

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**CONTAGEM EM GRAFOS:  
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**

Silvio Ricardo Santos

**Orientador:** Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo.

Feira de Santana

Agosto de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**CONTAGEM EM GRAFOS:  
UMA PROPOSTA PARA O ENSINO MÉDIO**

Silvio Ricardo Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

**Orientador:** Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo.

Feira de Santana  
04 de Agosto de 2017

**Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado**

S234c Santos, Silvio Ricardo  
Contagem em grafos : uma proposta para o ensino médio / Silvio  
Ricardo Santos. - 2017.  
67 f.: il.

Orientador: Ademakson Souza Araújo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de  
Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional,  
2017.

1. Matemática. 2. Teoria dos Grafos. I. Araújo, Ademarkson Souza,  
orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE SILVIO RICARDO SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos trinta e um dias do mês de agosto de dois mil e dezessete às 14:30 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Contagem em Grafos: Uma Proposta para o Ensino Médio**”, do discente **Silvio Ricardo Santos**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Ademakson Souza Araújo (Orientador, UEFS), Azly Santos Amorim de Santana (IFBa) e Maurício de Araújo Ferreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 31 de agosto de 2017.

Prof. Dr. Ademakson Souza Araújo (UEFS)

Orientador

Profa. Dra. Azly Santos Amorim de Santana (IFBa)

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti  
Coordenador do PROFMAT/UEFS

*A meu grande amigo Israel Wolfovitch (In memorian), ofereço a você este trabalho, promessa  
cumprida.*

## AGRADECIMENTOS

- Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força nos momentos mais difíceis e ter me ajudado a nunca desistir deste sonho de me tornar Mestre em Matemática.
- A Nossa Senhora Aparecida por estar sempre ao meu lado nos momentos de maiores dificuldades.
- A minha esposa Ângela Cristina.
- Ao bem mais precioso da minha vida minha filha Ana Beatriz.
- Aos meus pais Raimundo (In memorian) e Linda (In memorian), que com seus exemplos de integridade e dignidade me ensinaram a lutar pelos meus objetivos.
- As amigas construídas na família PROFMAT/UEFS turma 2015, em particular aos meus amigos: Jorge, Nayra, Eliene e Mateus, pelo convívio mais próximo.
- A excelente equipe de professores do profmat polo Feira, em especial a professora Ana Percontini, a madrinha da nossa turma.
- Aos meus colegas do ISBA: Brandão, Adherbal, Augusto e Fábio.
- A minha família, em especial a minha irmã Maria de Lourdes.
- A CAPES pelo apoio financeiro e incentivo. ‘
- A UEFS por acreditar na iniciativa do PROFMAT.
- A meu orientador Professor Ademakson Souza Araújo que me instruiu com conhecimento e momentos de muita aprendizagem, pelas dicas, paciência e apoio que sempre me passou.

Neste trabalho apresentaremos uma proposta para a resolução de alguns problemas que podem ser modelados através de uma contagem em grafos. Previamente, foi feito um levantamento dos quatro principais Princípios de Contagem que serão usados para fundamentar alguns métodos de contagem. Os métodos de contagem por sua vez, serão utilizados como alicerce para provar algumas propriedades nos grafos que servirão à contagem em grafos.

**PALAVRA CHAVE:** Princípios de Contagem, Grafos, Modelagem Matemática.

ABSTRACT

In this paper we present a proposal for the resolution of some problems that can be modeled by counting in graphs. Previously, a survey was made of the four major Counting Biases that will be used to substantiate some counting methods. Each one of the counting methods will be used as database to prove/confirm some properties in the graphs that will serve the count.

**KEY WORDS :** Principle of counting, Graphs, Mathematical Modeling.



<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Sumário</b>	<b>v</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Princípios e métodos de contagem</b>	<b>3</b>
1.1 Os Quatro Princípios Básicos de Contagem . . . . .	3
1.1.1 O Princípio da Adição . . . . .	3
1.1.2 O Princípio da Multiplicação . . . . .	5
1.1.3 O Princípio da subtração . . . . .	6
1.1.4 O Princípio da Divisão . . . . .	8
1.2 Principais métodos de Contagem . . . . .	9
1.2.1 Arranjos Simples . . . . .	9
1.2.2 Arranjos com Repetição . . . . .	11
1.2.3 Permutação Simples . . . . .	12
1.2.4 Combinação Simples . . . . .	14
<b>2 Introdução a Teoria dos Grafos</b>	<b>16</b>
2.1 Definição de Grafo Simples . . . . .	16
2.2 Alguns Tipos de Grafos . . . . .	17

2.2.1	Grafo Rotulado . . . . .	17
2.2.2	Grafos Planares . . . . .	18
2.2.3	Subgrafo de um Grafo . . . . .	18
2.2.4	Grafos Ponderados . . . . .	19
2.2.5	Dígrafos . . . . .	19
2.3	Cardinalidade do Grafo . . . . .	20
2.4	Conectividade em Grafos . . . . .	20
2.4.1	Grafo Conexo . . . . .	21
2.4.2	Grafo Hamiltoniano . . . . .	21
2.5	Isomorfismo . . . . .	22
2.6	Tipos Especiais de Grafos . . . . .	24
2.6.1	Grafo Completo . . . . .	24
2.6.2	Grafo Regular . . . . .	25
2.6.3	Grafo Bipartido . . . . .	26
2.6.4	Grafo Grade . . . . .	26
2.7	Árvores e Florestas . . . . .	27
2.7.1	Árvore Enraizada . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Contagem em Grafos</b>	<b>32</b>
3.1	Contagem Dupla e o Primeiro Teorema . . . . .	32
3.2	Contagem em Grafos Completos . . . . .	35
3.2.1	Contagem de Arestas em Grafos Completos . . . . .	35
3.2.2	Contagem de Caminhos e Ciclos em Grafos Completos . . . . .	39
3.3	Contagem em Grafo Grade . . . . .	43
3.3.1	Contagem de Arestas em Grafo Grade . . . . .	43
3.3.2	Contagem de Caminhos em Grafo Grade . . . . .	50
3.4	Contagem em árvores . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>57</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>59</b>

Nos dias atuais, o desejo do professor em que os alunos entendam e gostem, ou pelo menos se interessem pela sua disciplina tem se tornado um grande desafio.

Vive-se em um mundo tecnológico e o aluno tem tido cada vez mais acesso a essa tecnologia que em alguns momentos tem dividido a atenção dele e exigido do professor nessa "disputa" cada vez mais dedicação, conhecimento e atualização. No mundo contemporâneo, essa exigência tem cobrado um novo método ou uma nova prática que possibilite ao professor trabalhar os conteúdos de uma forma mais dinâmica, eficiente, atraente e prazerosa. Nessa busca o professor precisa se debruçar continuamente atrás de novas ferramentas, metodologias e de novos caminhos que possam tornar o processo ensino aprendizagem mais significativo para os alunos.

Neste contexto, uma experiência com os Grafos no Ensino Médio se encaixa perfeitamente, pois o seu estudo poderá se dar fundamentado nos principais métodos de Contagem, que já se trabalha no Ensino Médio além disso, a sua aplicabilidade nas atuais tecnologias é muito adequada pois, devido ao aparecimento dos computadores e o grande avanço tecnológico houve a necessidade de encontrar caminhos mais curtos para se ter respostas mais rápidas. Em várias situações e problemas da matemática em que se detecta um conjunto de pontos e um conjunto de ligações entre eles, pode-se pensar como uma possibilidade da aplicação de grafo.

Segundo [1] "os grafos representam um conceito relativamente novo na matemática e que ganhou grande destaque entre os matemáticos na segunda metade do século XX". Os grafos possuem grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento como: na Química, na Computação, na Biologia (com foco na cadeia alimentar), etc.

Foi escolhido para tratar aqui nesse trabalho de dissertação de mestrado, a Contagem em Grafos. Essa contagem será efetuada a partir das várias propriedades que os grafos possuem e que serão fundamentadas aqui pelos Princípios e Métodos de Contagem. Serão contados por exemplo: cidades e poços traduzidos em forma de vértices e ainda: estradas e caminhos, que serão traduzidos em forma de arestas. Contagem em grafos se propõe ser uma possibilidade a mais de abordar grafos no Ensino Médio.

No Capítulo 1 serão abordados os Princípios e Métodos de Contagem, tendo como objetivo fundamentar as propriedades dos grafos que serão abordadas nos Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 2 serão abordados as definições de grafos, os principais tipos de grafos e as propriedades de grafos com alguns exemplos, tendo o intuito de fundamentar e possibilitar a compreensão do Capítulo 3.

No Capítulo 3, serão mostrados alguns problemas que se mostram passíveis para a contagem em grafos, tais como: O problema da rede de esgoto; a solução de números inteiros e positivos da equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m - 1$ , dentre outros.

No Capítulo 4 serão feitas as Considerações Finais.

# CAPÍTULO 1

## PRINCÍPIOS E MÉTODOS DE CONTAGEM

Alguns problemas de contagem podem ser resolvidos simplesmente fazendo uma enumeração de seus elementos, mas muitas vezes um problema aparentemente simples pode trazer dificuldades na resolução. As dificuldades apresentadas em problemas de contagem são solucionadas por processos sistemáticos, chamados de métodos de contagem. Os métodos de contagem, por sua vez, são fundamentados pelos princípios de contagem.

### 1.1 Os Quatro Princípios Básicos de Contagem

Vamos explorar quatro princípios básicos que usaremos para fundamentar os métodos de contagem.

#### 1.1.1 O Princípio da Adição

O primeiro princípio, **princípio da adição**, considera que, a cardinalidade de um todo é igual a soma das cardinalidades de suas partes, isto é, sendo  $S$  um conjunto não vazio e  $S_1, S_2, \dots, S_n$  uma partição para  $S$ , teremos:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n, \text{ com } S_i \cap S_j = \emptyset, (i \neq j),$$

então teremos,

$$|S| = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_n|.$$

Os  $S_i$  são denominados de partes de  $S$ .

**Exemplo 1.1.** *Quantos números inteiros positivos com dois algarismos têm apenas um dígito 6?*

**Solução:** Seja  $S$  o conjunto dos números inteiros positivos com dois algarismos que têm apenas um dígito 6. Vamos particionar  $S$  em dois conjuntos da seguinte forma:

1.  $S_1$  é o conjunto dos números inteiros positivos com dois algarismos em  $S$ , que começam com o dígito 6.

$$\text{Assim, teremos } S_1 = \{60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 68, 69\};$$

2.  $S_2$  é o conjunto dos números inteiros positivos com dois algarismos em  $S$ , que terminam com o dígito 6.

$$\text{Assim, teremos } S_2 = \{16, 26, 36, 46, 56, 76, 86, 96\}.$$

Segue que,

$$|S_1| = 9$$

e

$$|S_2| = 8.$$

Logo

$$|S| = |S_1| + |S_2|$$

$$|S| = 9 + 8 = 17.$$

□

A arte de aplicar o princípio da adição é dividir o problema em casos mutuamente exclusivos, que esgotam todas as possibilidades e que o resultado seja a contagem de seus elementos.

### 1.1.2 O Princípio da Multiplicação

Seja  $S$  um conjunto de pares ordenados  $(a, b)$  onde o primeiro elemento  $a$  pertence a um conjunto com  $q$  elementos, e para cada elemento  $a$ , existe  $p$  maneiras diferentes para se escolher o elemento  $b$ . Assim, a quantidade de elementos do conjunto  $S$  é dado por  $q \times p$ . O princípio da multiplicação é na verdade uma consequência do princípio da adição. Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_q$  as  $q$  diferentes maneiras para se escolher um elemento  $a$ , particionando o conjunto  $S$  em partes  $S_1, S_2, \dots, S_q$  onde  $S_i$  é o conjunto de pares ordenados em  $S$  com primeiro elemento  $a_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, q$ ). Como cada conjunto  $S_i$  tem  $p$  elementos, segue que, pelo princípio da adição

$$\begin{aligned} |S| &= |S_1| + |S_2| + \dots + |S_q| \\ &= p + p + \dots + p \text{ (} q \text{ parcelas } p\text{)} \\ &= q \times p. \end{aligned}$$

**Observação 1.1.** No Exemplo 1.1. poderíamos ter aplicado o princípio da multiplicação para contar, por exemplo, o número de elementos em  $S_1$  da seguinte maneira:

1. escolhendo o algarismo das dezenas, que pode ser feito de 1 maneira (dígito 6);
2. escolhendo os algarismos das unidades, que pode ser feito de 9 maneiras diferentes (dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9).

Logo, a quantidade de números inteiros positivos com dois algarismos em  $S$ , que começam com o dígito 6 é  $|S_1| = 1 \cdot 9 = 9$ .

□

**Exemplo 1.2.** Quantos números inteiros entre 0 e 10000 têm apenas um dígito 6?

**Solução:** Considerando que os números procurados possuem 4 dígitos. Vamos dividir a resolução em quatro partes menores:

1. Quando o primeiro algarismo é 6, teremos 9 maneiras de se escolher o algarismo das centenas, 9 maneiras de se escolher o algarismo das dezenas e 9 maneiras de se escolher o algarismo das unidades.

2. Quando o algarismo das centenas é 6, teremos 9 maneiras de se escolher o primeiro algarismo, 9 maneiras de se escolher o algarismo das dezenas e 9 maneiras de se escolher o algarismo das unidades.
3. Quando o algarismo das dezenas é 6, teremos 9 maneiras de se escolher o primeiro algarismo, 9 maneiras de se escolher o algarismo das centenas e 9 maneiras de se escolher o algarismo das unidades.
4. Quando o último algarismo é 6, teremos 9 maneiras de se escolher o primeiro algarismo, 9 maneiras de se escolher o algarismo das centenas e 9 maneiras de se escolher o algarismo das dezenas.

Pelo princípio da multiplicação teremos  $4 \times 9 \times 9 \times 9 = 2916$ . Logo, existem 2916 números inteiros entre 0 e 10000 que têm apenas um dígito 6

□

### 1.1.3 O Princípio da subtração

Seja  $A$  um subconjunto próprio, não vazio, de um conjunto  $U$  e

$$\bar{A} = U \setminus A = \{x/x \in U \text{ e } x \notin A\}$$

o complementar de  $A$  em relação a  $U$ , então o número de elementos de  $A$  é dado por

$$|A| = |U| - |\bar{A}|.$$

**Exemplo 1.3.** *Quantos números inteiros com seis dígitos, sem repetição de dígitos, podemos formar com os elementos do conjunto  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , nos quais não ocorrem os dígitos 156 juntos e nesta ordem?*

**Solução:** Vamos usar o princípio da subtração para achar a quantidade  $P$  dos números inteiros com seis dígitos, sem repetição, formados pelos elementos de  $S$ , nos quais não ocorrem os dígitos 156 juntos e nesta ordem.

- $P_T$  é a quantidade total de números inteiros com seis dígitos, sem repetição de dígitos, formados pelos elementos de  $S$ . Pelo princípio da multiplicação temos que,  $P_T = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ .



- $P_{156}$  é a quantidade dos números inteiros com seis dígitos, sem repetição de dígitos, formados pelos elementos de  $S$ , nos quais ocorrem os dígitos 156 juntos e nesta ordem. Pelo princípio da multiplicação e considerando 156 como um único dígito temos que,  $P_{156} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ .

Logo,  $P = P_T - P_{156} = 720 - 24 = 696$ .

□

Ao aplicar o princípio da subtração, o conjunto  $U$ , denominado de conjunto universo, é normalmente formado por todos elementos do evento. Só faz sentido aplicar o princípio da subtração quando é mais fácil contar os elementos dos conjuntos  $U$  e  $\bar{A}$  do que contar os elementos do conjunto  $A$ .

### 1.1.4 O Princípio da Divisão

Seja o conjunto finito  $S$  e uma partição

$$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k,$$

com

$$|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_k|,$$

então

$$|S_i| = \frac{|S|}{k}, \quad i = (1, 2, \dots, k),$$

assim quando acontecer

$$S_1 = S_2 = \cdots = S_k = A,$$

teremos

$$|A| = \frac{|S|}{k}.$$

**Exemplo 1.4.** *De quantas maneiras distintas podemos dividir 7 objetos em um grupo de 4 objetos e um de 3 objetos?*

**Solução:** Um processo de fazer a divisão é colocar os objetos em fila; os 4 primeiros formam o grupo de 4 e os 3 últimos formam o grupo de 3.

Há  $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$  modos de colocar os objetos em fila.

Entretanto, se considerarmos:  $a, b, c, d, e, f, g$ , como sendo os objetos, notamos que filas como  $abcdefg$  e  $cbadefg$  são filas diferentes e geram a mesma divisão em grupos. Cada divisão em grupos foi contada uma vez para cada ordem dos objetos dentro de cada grupo. Há  $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$  modos de arrumar os objetos em cada grupo, isto é, cada divisão em grupos foi contada  $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)$  vezes.

Concluimos que, o número de maneiras distintas que podemos dividir 7 objetos em um grupo de 4 objetos e um de 3 objetos é

$$\frac{5040}{(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = 35.$$

□

## 1.2 Principais métodos de Contagem

Nesta secção usaremos os Princípios de Contagem para fundamentar os principais Métodos de Contagem.

### 1.2.1 Arranjos Simples

**Definição 1.1.** *Seja  $A$  um conjunto formado por  $n$  elementos e  $p$  um número natural não-nulo tal que  $p \leq n$ . Chama-se "arranjo simples de  $p$  elementos de  $A$ " toda sequência formada por  $p$  elementos de  $A$  distintos. Indicaremos por  $A_{n,p}$  o número de arranjos simples de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ .*

Vamos mostrar que o número total de agrupamentos simples de  $n$  elementos arranjados  $p$  a  $p$ ,  $p \leq n$ , indicado por  $A_{n,p}$  é dado por

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Para formar sequências de  $p$  elementos distintos tomados de um conjunto  $A$  de  $n$  elementos, temos:

- $n$  possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento;
- $n - 1$  possíveis escolhas para o segundo elemento (pois temos  $n - 1$  elementos disponíveis);
- $n - 2$  possíveis escolhas para o terceiro elemento (pois temos  $n - 2$  elementos disponíveis);
- $n - 3$  possíveis escolhas para o quarto elemento (pois temos  $n - 3$  elementos disponíveis);
- .
- .
- $n - (p - 1)$  possíveis escolhas para o  $p$ -ésimo elemento (pois temos  $n - (p - 1)$  elementos disponíveis).

Aplicando o princípio da multiplicação, temos:

$$A_{n,p} = n.(n-1).(n-2).\dots.[n-(p-1)].$$

Desenvolvendo a expressão do segundo membro e multiplicando por

$$\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

temos:

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots [n-p+1] \cdot (n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

Concluimos então que

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

**Exemplo 1.5.** *Quantos números de 4 algarismos diferentes podemos escrever com os algarismos 1, 2, 3, 6, 7, 8 e 9?*

**Solução:** Como temos  $n = 7$  elementos para escolher  $p = 4$  elementos distintos, utilizando a fórmula  $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$ , temos:

$$A_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 840.$$

**Exemplo 1.6.** *Numa sala existem 8 cadeiras numeradas de 1 a 8. De quantas formas 2 pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas?*

**Solução:** Cada maneira em que se sentarem corresponde a um par ordenado de números distintos, escolhidos entre 1, 2, 3, ..., 8. Consideremos que o par (2, 5) significa que a pessoa  $p_1$  senta na cadeira 2 a pessoa  $p_2$  senta na cadeira 5. Calculemos inicialmente o total de pares ordenados:  $A_{8,2} = 8 \cdot 7 = 56$

Agora calculamos o número de pares ordenados cujos elementos são números consecutivos:

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8) totalizando 7 pares (considerando a pessoa  $p_1$  na cadeira 1 e a pessoa  $p_2$  na cadeira 2 e assim por diante)

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8) totalizando 7 pares (considerando a pessoa  $p_2$  na cadeira 1 e a pessoa  $p_1$  na cadeira 2 e assim por diante)

Devemos então, excluir  $7 + 7 = 14$  pares. Logo, o número de maneiras em que essas pessoas podem se sentar obedecendo a restrição dada é:  $56 - 14 = 42$ .

### 1.2.2 Arranjos com Repetição

Os arranjos com repetição, serão indicados por (AR). São agrupamentos que levam em consideração a ordem, sem a necessidade de serem distintos, isto é, são permitidas repetições de elementos.

**Definição 1.2.** *Seja  $A$  um conjunto formado por  $n$  elementos e  $p$  um número natural não-nulo tal que  $p \leq n$ . Chama-se "arranjo com repetição de  $p$  elementos de  $A$ " toda sequência formada por  $p$  elementos de  $A$  não necessariamente distintos. Indicaremos por  $AR_{n,p}$  o número de arranjos com repetição de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ .*

Vamos mostrar que o número total de agrupamentos simples de  $n$  elementos arranjados  $p$  a  $p$ ,  $p \leq n$ , indicado por  $AR_{n,p}$  é dado por

$$AR_{n,p} = n^p.$$

Para formar sequências de  $p$  elementos não necessariamente distintos tomados de um conjunto  $A$  de  $n$  elementos, temos:

- $n$  possíveis escolhas para o primeiro elemento do agrupamento;
- $n$  possíveis escolhas para o segundo elemento;
- $n$  possíveis escolhas para o  $p$ -ésimo elemento.

Aplicando o princípio da multiplicação, temos:

$$AR_{n,p} = n.n.\dots.n,$$

onde temos  $p$  fatores iguais  $n$ .

Concluimos então que

$$AR_{n,p} = n^p.$$

□

**Exemplo 1.7.** *Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , quantos números de três algarismos podemos formar?*

**Solução:** Para cada uma das três escolhas, temos 5 possibilidades.

Logo, podemos formar  $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$  números de três algarismos.

### 1.2.3 Permutação Simples

**Definição 1.3.** Seja  $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$  um conjunto com  $n$  elementos. Chama-se "permutação simples dos  $n$  elementos de  $A$ " todo arranjo simples desses  $n$  elementos tomados  $n$  a  $n$ .

O número de permutações de um conjunto com  $n$  elementos é dado por  $P_n = n!$  e pode ser obtido diretamente através da fórmula de arranjo simples, isto é:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = n!.$$

**Exemplo 1.8.** Com as letras da palavra CROSTA:

- (i) quantos anagramas podemos formar?
- (ii) quantos anagramas mantém as consoantes juntas e em ordem alfabética?

**Solução:**

(i) Cada anagrama corresponde a uma ordem de colocação dessas 6 letras. Logo o número de anagramas é  $P_6 = 6! = 720$ .

(ii) Consideramos "CRST", nessa ordem, alfabética, como sendo uma única letra, logo teremos, juntando com as vogais "A" e "O", três letras a considerar, daí o número de anagramas pedido é  $P_3 = 3! = 6$ .

### Permutação com elementos repetidos

**Exemplo 1.9.** Quantos anagramas têm a palavra FACHADA?

**Solução:** Caso as letras fossem distintas teríamos  $7!$  como resposta. Porém observa-se que a letra A se repete três vezes, logo quando trocamos elas entre si obtemos o mesmo anagrama e não outro diferente. Esse fato leva que na contagem de  $7!$  tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes,  $3!$  vezes precisamente, pois há  $3!$  modos de trocar as letras A entre si sem mudar o anagrama.

Como resposta teremos  $\frac{7!}{3!} = 840$ . Observamos que nada mais foi feito do que aplicar o princípio da multiplicação seguido do princípio da divisão.

Generalizando, o número de permutações de  $n$  objetos, dos quais  $n_1$  é de um tipo,  $n_2$  de um segundo tipo, ... ,  $n_k$  de um  $k$ -ésimo tipo, é o que chamamos de permutação com

elementos repetidos, será indicado por  $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$  e é calculado por:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

**Exemplo 1.10.** (UFBA) Na figura 1.1 cada quadrado representa um quarteirão de um condomínio e cada  $x$  um cruzamento de ruas. Um carro desloca-se de  $A$  até  $B$ , obedecendo as seguintes condições:

- O trajeto deve ser formado por segmentos de reta ligando pontos de cruzamentos consecutivos;
- Cada segmento só pode ser percorrido num dos sentidos indicados pelas setas na figura 1.1.

Com base nessas informações, quantos trajetos diferentes existem?

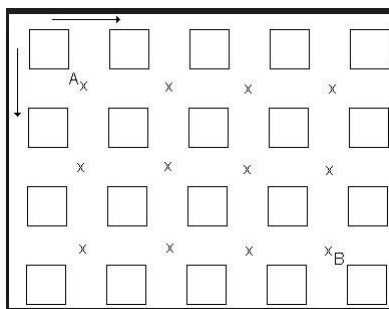


Figura 1.1: quarteirão de um condomínio

**Solução:** O deslocamento do carro só pode ser feito nos sentidos indicados pelas setas, Leste ( $L$ ) e Sul ( $S$ ), sendo que, em qualquer dos caminhos escolhidos e possíveis, teremos sempre três quarteirões percorridos para o Leste e dois para o Sul. Podemos então formar anagramas do tipo  $LLLSS, SLLLL, \dots$ . Logo, podemos calcular o total de trajetos como permutações com repetições, ou seja:

$$P_n^{n_1, n_2} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2!} \therefore P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10.$$

### Permutação Circular

Chama-se permutação circular de  $n$  objetos distintos qualquer disposição desses objetos em torno de um círculo. Indica-se por  $(PC)_n$ .

**Exemplo 1.11.** Uma reunião dos líderes das turmas  $A, B, C, D$  e  $E$ , da 1ª série do ensino médio de uma escola será realizada em uma mesa redonda. Em quantas ordens diferentes podem ser dispostos os líderes em volta da mesa?

**Solução:** De início nos parece que essa resposta seria obtida escolhendo uma ordem para esses líderes e calculando  $5! = 120$  ordens diferentes. Entretanto tal disposição dos líderes A, B, C, D, e E em torno da mesa é uma permutação circular desses cinco elementos. Notemos que, se girarmos no sentido horário:

- I. partindo de A, obteremos a permutação em linha ABCDE;
- II. partindo de B, obteremos a permutação em linha BCDEA;
- III. partindo de C, obteremos a permutação em linha CDEAB;
- IV. partindo de D, obteremos a permutação em linha DEABC;
- V. partindo de E, obteremos a permutação em linha EABCD.

Isto é, as cinco permutações em linha, ABCDE, BCDEA, CDEAB, DEABC, e EABCD correspondem a uma única permutação circular: A partir dessa correspondência, podemos concluir que na contagem de 120 ordens contou cada ordem 5 vezes e a resposta do problema então é  $\frac{120}{5} = 24$ .

De um modo geral, o número de permutações circulares de  $n$  elementos é dado por:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} = (n - 1)!$$

#### 1.2.4 Combinação Simples

Seja A um conjunto com  $n$  elementos e  $p$  um número natural, com  $n \geq p$ . Chama-se combinação simples dos  $n$  elementos de A tomados  $p$  a  $p$ , a cada agrupamento onde a ordem dos elementos não importa e representamos por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n - p)!}$$

**Observação.** Alguns autores representam a combinação por  $C_n^p$ .

**Exemplo 1.12.** Considerando o conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , quantos são os subconjuntos com 3 elementos que podemos formar?

**Solução:** Vamos resolver essa situação problema de duas maneiras:



**Resolução 1:**

Como a ordem dos elementos não importa, visto que  $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$ , temos um problema de combinação. Dessa forma, o número de subconjuntos com 3 elementos que podem ser formados usando os elementos do conjunto A é

$$C_{4,3} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4.$$

**Resolução 2:**

O primeiro elemento pode ser escolhido de 4 maneiras diferentes, o segundo, de 3 maneiras diferentes e o terceiro, de 2 maneiras diferentes. Usando o princípio multiplicativo temos  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  maneiras.

Entretanto, podemos perceber que os conjuntos  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{1, 3, 2\}$ ,  $\{2, 1, 3\}$ ,  $\{2, 3, 1\}$ ,  $\{3, 1, 2\}$ , e  $\{3, 2, 1\}$ , são todos iguais e foram contados como se fossem diferentes. Como em cada combinação os elementos podem ser permutados de  $3! = 6$  maneiras temos que cada combinação foi contada 6 vezes, dessa forma, devemos dividir 24 por 6, ou seja,  $24 \div 6 = 4$  subconjuntos.

Neste capítulo faremos uma abordagem sucinta sobre a teoria dos grafos, elencando algumas das suas definições, teoremas e observações.

## 2.1 Definição de Grafo Simples

**Definição 2.1.** Um **grafo simples** é um par formado por um conjunto finito e não vazio  $V$  de elementos chamados *vértices* e um conjunto finito  $E$  de pares não ordenados de elementos distintos de  $V$  chamados de *arestas*. Denotaremos  $G = (V, E)$  como um grafo  $G$  de conjuntos de vértices  $V$  e conjunto de arestas  $E$ .

Cada aresta é um subconjunto de  $V$  com dois vértices, não necessariamente distintos. Dada uma aresta  $e = \{v, w\}$ , os vértices  $v$  e  $w$  são denominados extremidades da aresta  $e$ , ou então, que a aresta  $e$  incide sobre os vértices  $v$  e  $w$ . Dizemos que uma aresta incidente num par de vértices conecta esses dois vértices, ou então, que os dois vértices são adjacentes ou vizinhos.

Por simplicidade vamos denotar uma aresta  $e = \{v, w\}$  apenas por  $e = vw$ .

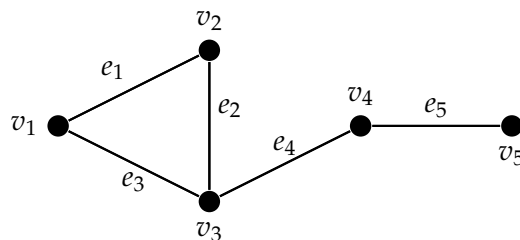


Figura 2.1: Grafo  $G$

Na figura 2.1 temos um grafo  $G$  onde:

- O conjunto  $V$  dos vértices é

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

e o conjunto  $E$  de arestas é

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\},$$

onde:  $e_1 = v_1v_2$ ;  $e_2 = v_2v_3$ ;  $e_3 = v_1v_3$ ;  $e_4 = v_3v_4$  e  $e_5 = v_4v_5$ .

- Os vértices  $v_1$  e  $v_2$  são conectados pela aresta  $e_1$ , logo são vértices adjacentes ou vizinhos. Os vértices  $v_2$  e  $v_4$  não são conectados, pois nenhuma aresta incide neste par de vértices.

Algumas literaturas, a exemplo de [3], definem grafo de forma a contemplar os multigrafos. Neste trabalho só serão considerados os grafos simples, visto que todos os problemas que serão abordados resultam na modelagem desse tipo de grafo.

Caso haja necessidade de distinção, podemos indicar os conjuntos de vértices e de arestas de um grafo  $G$  por  $V_G$  e  $E_G$  respectivamente.

## 2.2 Alguns Tipos de Grafos

### 2.2.1 Grafo Rotulado

Um grafo  $G(V, E)$  é dito rotulado em vértices (ou arestas) quando, os seus vértices (ou arestas) estiverem associados a números, letras ou letras com índices.

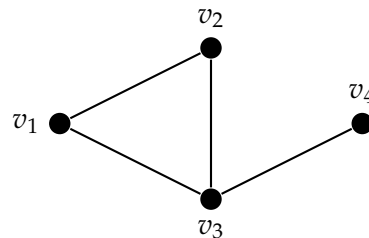


Figura 2.2: Grafo Rotulado  $G$

## 2.2.2 Grafos Planares

**Definição 2.2.** Grafos planares são aqueles que podem ser representados no plano, atendendo ao fato de que não tenham duas arestas se cruzando (exceto em suas extremidades), podendo as arestas até terem um vértice em comum.

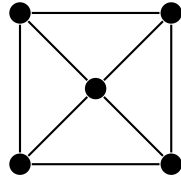


Figura 2.3: Grafo Planar

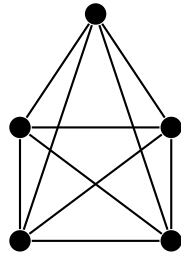


Figura 2.4: Grafo não Planar

## 2.2.3 Subgrafo de um Grafo

**Definição 2.3.** Um grafo  $H = (V_H, E_H)$  é dito subgrafo de  $G = (V_G, E_G)$ , quando  $V_H \subset V_G$  e  $E_H \subset E_G$ .

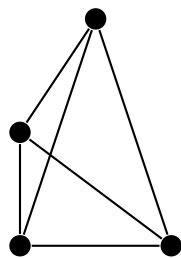


Figura 2.5: Subgrafo H do Grafo da figura 2.4

## 2.2.4 Grafos Ponderados

**Definição 2.4.** *Grafos Ponderados ou valorados são Grafos em que as arestas possuem pesos. Os pesos denotam distância, tempo, custo, tráfego ou outros indicadores de consumo de recursos.*

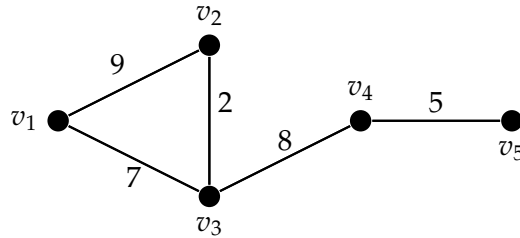


Figura 2.6: Grafo ponderado

Na figura 2.6 temos um exemplo de grafo ponderado. As arestas têm os seguintes pesos:

$$P(v_1v_2) = 9, P(v_1v_3) = 7, P(v_2v_3) = 2, P(v_3v_4) = 8 \text{ e } P(v_4v_5) = 5.$$

## 2.2.5 Dígrafos

Um grafo orientado (Dígrafo)  $G = (V, E)$  é um grafo com uma orientação no seu conjunto de arestas, isto é, cada aresta é um par ordenado de vértices distintos e agora definidas como arcos ou arestas direcionadas.

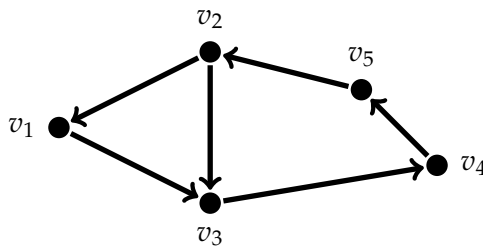


Figura 2.7: Exemplo de Dígrafo

## 2.3 Cardinalidade do Grafo

**Definição 2.5.** Indicamos o número de vértices (cardinalidade) e o número de arestas (cardinalidade) de  $G$ , respectivamente por  $|V|$  e  $|E|$ . O grau de um vértice é determinado pelo número de arestas que incidem neste. Dado um vértice  $v$ , representamos por  $d(v)$  o grau do vértice  $v$ . O grau de um grafo  $G$  é a soma dos graus de todos os seus vértices e é denotado por  $gr(G)$ .

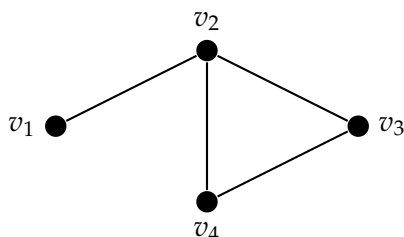


Figura 2.8: Grafo  $G_3$

Na figura 2.8, temos a representação de um grafo  $G_3$ , onde o conjunto de vértices  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  e o conjunto de arestas  $E = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$ . Os graus dos vértices de  $G$  são respectivamente dados por  $d(v_1) = 1$ ,  $d(v_2) = 3$ ,  $d(v_3) = 2$ ,  $d(v_4) = 2$  e  $gr(G_3) = 8$ .

## 2.4 Conectividade em Grafos

**Definição 2.6.** Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um **passeio** em  $G$  é uma sequência de vértices de  $v_1, v_2, \dots, v_k$  tais que toda aresta  $(v_i, v_{i+1}) \in E$  e  $1 \leq i \leq k$ . O **comprimento do passeio** é dado pelo número de arestas que o compõem. O vértice  $v_1$  é chamado de **origem** (ou **início**) do passeio e o vértice  $v_k$  seu **término** (ou **fim**). Um passeio em que não há repetição de arestas é dito uma **trilha** ou **trajeto**. Em particular, se não há repetição de vértices, o passeio é dito um **caminho**. Um passeio  $v_1, v_2, \dots, v_k$  é dito **fechado** quando o vértice de seu início coincide com o vértice de seu término, isto é,  $v_1 = v_k$ . Analogamente, uma trilha é dita **fechada**, quando o vértice de início coincide com o vértice final. Uma trilha fechada é chamada de **circuito** e um circuito em que não há repetição de vértice além dos vértices inicial e final é chamado de **ciclo**. Denotamos um passeio por  $P_n$  e seu comprimento por  $|P_n|$ .

### 2.4.1 Grafo Conexo

**Definição 2.7.** Grafo Conexo é um grafo onde, dados dois vértices quaisquer, existe um caminho ligando estes vértices. Um grafo não conexo é dito desconexo.

Como exemplo de grafo conexo temos o grafo Hamiltoniano, do qual falaremos a seguir.

### 2.4.2 Grafo Hamiltoniano

**Definição 2.8.** Um ciclo em um grafo  $G$  é dito ciclo hamiltoniano se contém todos os vértices de  $G$ . Da mesma forma, um caminho hamiltoniano contém todos os vértices de  $G$ . Se  $G$  possui um ciclo hamiltoniano ele é chamado de grafo hamiltoniano.

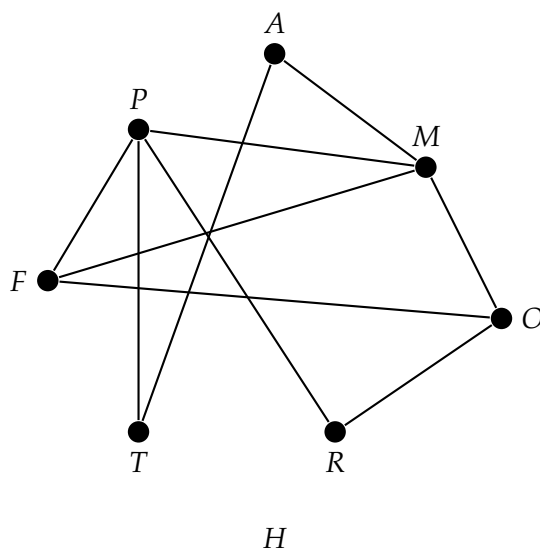


Figura 2.9: Grafo H, Exemplo de grafo Hamiltoniano .

A seguir, na figura 2.10, temos a sequência PROFMATP, em linha contínua, que representa um ciclo Hamiltoniano.

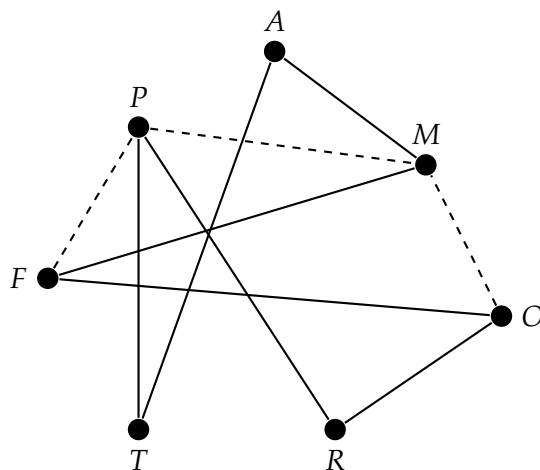


Figura 2.10: Ciclo PROFMATP, exemplo de ciclo Hamiltoniano em H.

## 2.5 Isomorfismo

Dois grafos simples são isomorfos se existir uma função entre os conjuntos de vértices que obedeçam:

1. Ser bijetiva;
2. As imagens dos vértices adjacentes sejam adjacentes (existir uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e os vértices do outro e entre as arestas de um e as arestas do outro).

**Corolário 2.1.** *Em um isomorfismo de grafos, os graus de ambos os grafos (soma de todos os graus dos vértices) são iguais, pois suas propriedades devem ser conservadas.*

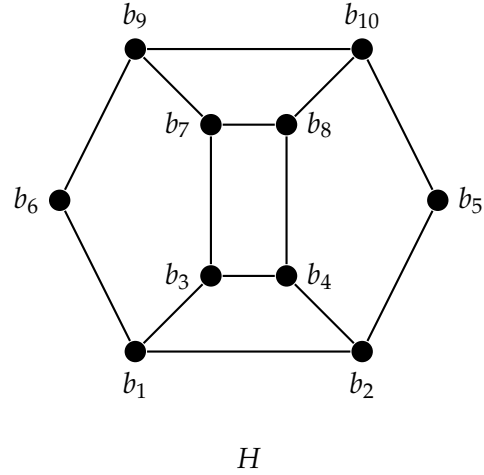
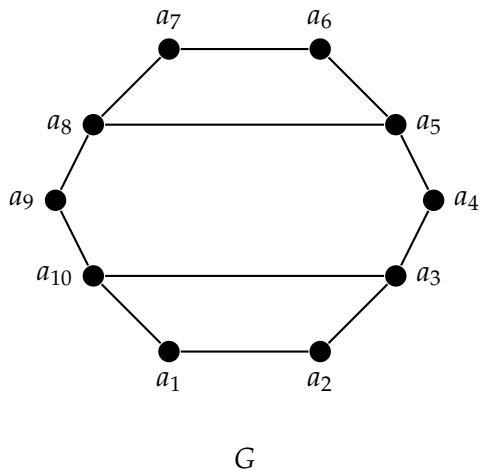
Para verificar se dois grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos, basta analisar todas as bijeções de  $G(V)$  em  $H(V)$ . Entretanto este método se tornaria inviável em grafos que tivessem um grande número de arestas e vértices. Podemos procurar outras razões pelas quais tais bijeções não existem e portanto descobrir se existe ou não o isomorfismo. Apesar de não ser uma tarefa simples em todos os casos, existem certas condições sob as quais se verifica que dois grafos não são isomorfos. Essas condições incluem:

- Um grafo ter mais vértices do que outro;
- Um grafo ter mais arestas do que outro;
- Um grafo ter um vértice de grau  $k$  e o outro não;



- Um grafo ser conexo e o outro não.

**Exemplo 2.1.** Verificar se os grafos  $G$  e  $H$  abaixo são isomorfos.



**Solução:**

Como

$$\begin{aligned} gr(A) &= d(a_1) + d(a_2) + d(a_3) + d(a_4) + d(a_5) + d(a_6) + d(a_7) + d(a_8) + d(a_9) + d(a_{10}) \\ &= 2 + 2 + 3 + 2 + 3 + 2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 24 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} gr(B) &= d(b_1) + d(b_2) + d(b_3) + d(b_4) + d(b_5) + d(b_6) + d(b_7) + d(b_8) + d(b_9) + d(b_{10}) \\ &= 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 3 = 28, \end{aligned}$$

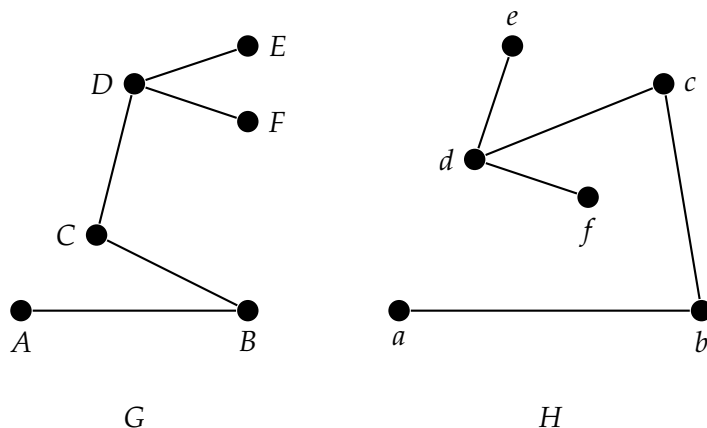
temos

$$gr(A) = 24 \neq 28 = gr(B).$$

Logo os grafos citados não são isomorfos.

Observa-se ainda que no grafo  $A$  temos 4 vértices ( $a_3, a_5, a_8, a_{10}$ ) com grau 3 enquanto que no grafo  $B$  temos 8 vértices com essa mesma cardinalidade ( $b_1, b_2, b_3, b_4, b_7, b_8, b_9, b_{10}$ ) o que inviabiliza que as imagens dos vértices adjacentes sejam adjacentes.

**Exemplo 2.2.** Verificar se os grafos  $G$  e  $H$  abaixo, são isomorfos.



**Solução:**  $gr(G) = 10 = gr(H)$ , devemos agora observar que as imagens dos vértices adjacentes sejam adjacentes.

Associando os grafos  $G(V_1, E_1)$  e  $H(V_2, E_2)$  à função  $f : V_1 \rightarrow V_2$  devemos verificar que se  $D$  e  $F$  são vértices adjacentes de  $G$  então  $f(D)$  e  $f(F)$  são vértices adjacentes de  $H$ .

$$f(D) = d$$

$$f(E) = e$$

$$f(F) = f$$

$$f(C) = c$$

$$f(B) = b$$

$$f(A) = a$$

Observamos então que para dois quaisquer vértices do grafo  $G$  teremos imagens adjacentes no grafo  $H$  e a recíproca também é válida, logo os grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos.

## 2.6 Tipos Especiais de Grafos

Muitos grafos possuem características notáveis. A seguir, apresentaremos alguns tipos especiais cujas características serão posteriormente utilizadas na contagem de grafos.

### 2.6.1 Grafo Completo

**Definição 2.9.** Grafo completo com  $n$  vértices, denotado por  $K_n$ , é um grafo simples contendo exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

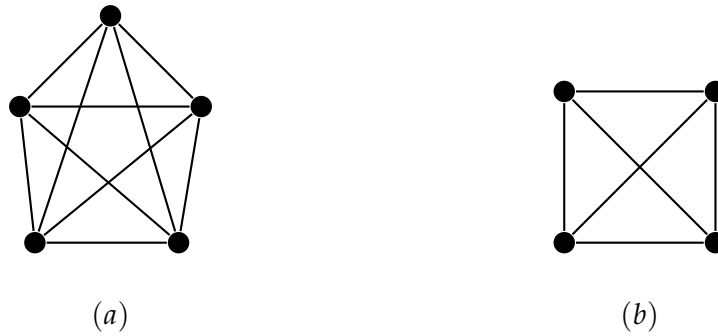


Figura 2.11: (a) Grafo Completo  $K_5$  e (b) Grafo Completo  $K_4$ .

Na figura 2.11 temos dois grafos completos. Em (a) temos um grafo completo  $K_5$  e em (b) um grafo completo  $K_4$ .

### 2.6.2 Grafo Regular

**Definição 2.10.** Grafo regular é o grafo no qual todos os vértices possuem o mesmo grau. Um grafo regular de grau  $k$  é dito  $k$  – regular.

**Observações:**

- (i) Todo grafo completo é um grafo  $(n - 1)$  – regular.
- (ii) Todo Grafo Ciclo  $C_n$  é 2 – regular.

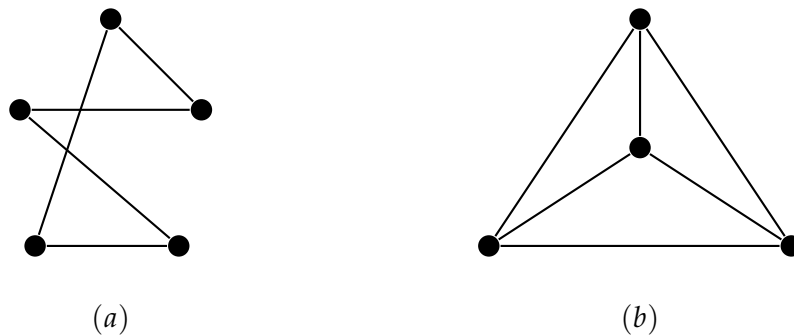


Figura 2.12: (a) Grafo ciclo  $C_5$  e (b) Grafo Regular  $K_4$ .

Na figura 2.11 temos dois grafos regulares. Em (a) temos um grafo completo  $K_5$ , que é 4 – regular e em (b) um grafo completo  $K_4$  que é 3 – Regular. Na figura 2.12 temos dois grafos regulares. Em (a) temos um grafo ciclo  $C_5$ , que é 2 – Regular e em (b) um grafo completo  $K_4$  que é 3 – Regular.

### 2.6.3 Grafo Bipartido

**Definição 2.11.** Um grafo é bipartido se o conjunto de vértices  $V$  pode ser particionado em 2 subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  com  $m$  e  $n$  vértices, respectivamente, tal que todas as arestas do grafo são incidentes a um vértice de  $V_1$  e a um vértice de  $V_2$ . Um grafo bipartido  $K_{m,n}$  é completo, se cada vértice do subconjunto  $V_1$  é adjacente a todos os vértices do subconjunto  $V_2$  e vice-versa.

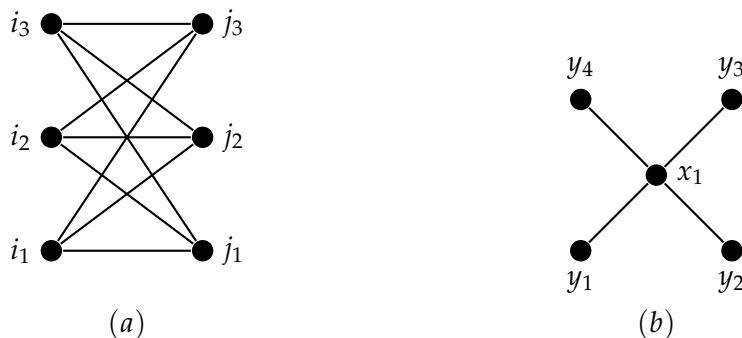


Figura 2.13: (a) Grafo Bipartido Completo  $K_{3,3}$  e (b) Grafo Bipartido Completo  $K_{1,4}$ .

### 2.6.4 Grafo Grade

**Definição 2.12.** Seja  $V$  o produto cartesiano  $\{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$ , isto é, o conjunto de todos os pares ordenados  $(i, j)$  com  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ . Dizemos que dois elementos  $(i, j)$  e  $(i', j')$  de  $V$  são adjacentes se

$$i = i' \text{ e } |j - j'| = 1 \text{ ou } j = j' \text{ e } |i - i'| = 1$$

Essa relação de adjacência define um grafo  $G_{m \times n}$  sobre o conjunto  $V$  de vértices. Esse grafo é conhecido como **grafo grade**.

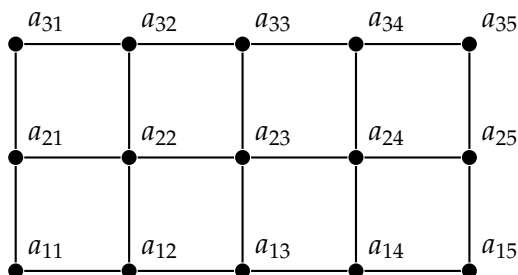


Figura 2.14: Grafo Grade  $G_{3 \times 5}$

Na figura 2.14 temos um grafo grade  $3 \times 5$ , onde cada vértice  $(i, j)$  foi representado

por  $a_{ij}$ . Observe que o grafo grade é um grafo bipartido, pois podemos particionar o conjunto  $V$  da seguinte maneira:

$$V = X \cup Y : \begin{cases} (i, j) \in X \text{ se } i + j \text{ for par;} \\ (i, j) \in Y \text{ se } i + j \text{ for impar.} \end{cases}$$

Assim,  $X = \{a_{11}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, a_{15}, a_{24}, a_{33}, a_{35}\}$  e  $Y = \{a_{12}, a_{21}, a_{14}, a_{23}, a_{32}, a_{25}, a_{34}\}$

## 2.7 Árvores e Florestas

**Definição 2.13.** *Árvore é um grafo conexo sem ciclos (acíclico). Um conjunto de árvores é dito floresta, isto é, floresta é um grafo acíclico.*

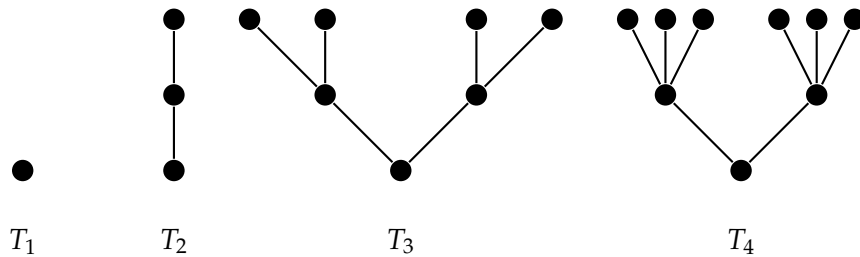


Figura 2.15: Floresta com suas componentes conexas, as árvores  $T_1, T_2, T_3, T_4$ .

Certas proposições traduzem resultados imediatos a partir da definição de árvores. Apresentaremos a seguir algumas dessas proposições:

**Proposição 2.1.** *Ao retirarmos uma aresta de uma árvore, o novo grafo obtido passa a ser desconexo. O que caracteriza que a árvore é um grafo minimamente conexo.*

*Demonstração.* Se a retirada de uma aresta  $uv$  do grafo não desconectar, então há um caminho de  $u$  até  $v$  que não utiliza a aresta  $uv$ . Colocando a aresta  $uv$  de volta, obtemos um ciclo, e portanto, o grafo original não seria uma árvore, absurdo.  $\square$

**Corolário 2.2.** *Ao acrescentarmos uma aresta a uma árvore, surge um ciclo no novo grafo. O que caracteriza que a árvore é um grafo maximamente acíclico.*

*Demonstração.* Seja  $uv$  a aresta acrescentada à árvore. O grafo sem a aresta  $uv$  é conexo e, portanto, há um caminho de  $u$  até  $v$ . Ao adicionarmos a aresta  $uv$ , necessariamente obteremos um ciclo de  $u$  até  $v$ , como queríamos.  $\square$

**Proposição 2.2.** *Se  $G$  é uma árvore com  $n$  vértices então  $G$  possui  $n - 1$  arestas.*

*Demonstração.* Seja  $T = (V, E)$  tal que  $|V| = n, |E| = m$ . Vamos fazer a prova por indução no número de vértices de  $T$ .

Para  $n = 1$ , temos que:  $m = 0 = 1 - 1 = n - 1$ . Verdadeira para  $n = 1$ . Suponha como hipótese de indução que o resultado é válido para toda árvore com menos do que  $n$  vértices, e para  $n > 1$ . Então  $T$  possui pelo menos uma aresta  $e = \{v, w\}$ . Se removermos a aresta  $e$  de  $T$  teremos duas componentes conexas  $T_1$  e  $T_2$ , sendo ambas árvores, com menos de  $n$  vértices. Seja  $|V(T_1)| = n_1; |E(T_1)| = m_1$  e  $|V(T_2)| = n_2; |E(T_2)| = m_2$ . Logo, a hipótese de indução vale para  $T_1$  e para  $T_2$ , ou seja:  $m_1 = n_1 - 1$  e  $m_2 = n_2 - 1$ . Mas  $|V(T)| = |V(T_1)| + |V(T_2)|$ , isto é  $n = n_1 + n_2$ . Assim,  $|E(T)| = |E(T_1)| + |E(T_2)| + 1 = m_1 + m_2 + 1 = n_1 - 1 + n_2 - 1 + 1$ . Logo,  $|E(T)| = n_1 + n_2 - 1 = n - 1$ .

Concluimos então, que a proposição é válida para toda árvore com  $n$  vértices.

□

**Proposição 2.3.** *Todo grafo conexo  $G$  possui uma árvore que contém todos os vértices de  $G$ . Tal árvore é chamada de árvore geradora do grafo  $G$ . (Um mesmo grafo pode possuir diversas árvores geradoras diferentes).*

*Demonstração.* Se  $G$  não possuir ciclos,  $G$  é uma árvore e o problema acaba. Se  $G$  possui um ciclo  $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ , ao retirarmos a aresta  $v_1v_k$ , o subgrafo  $G'$  obtido permanece conexo. De fato, sejam  $h_1$  e  $h_2$  vértices de  $G$ . Como  $G$  é conexo, há um caminho de  $h_1$  até  $h_2$ . Se este caminho não utilizar a aresta  $v_1v_k$ ,  $G'$  claramente permanece conexo. Caso o caminho utilize a aresta  $v_1v_k$ , podemos trocá-la pelo caminho  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  sempre que necessário. Desta maneira, não usaremos mais a aresta  $v_1v_k$  e o grafo  $G'$  permanece conexo. Se repetirmos este processo até que não haja mais ciclos, obteremos a árvore geradora desejada.

□

### 2.7.1 Árvore Enraizada

**Definição 2.14.** Uma árvore enraizada  $T$  é um grafo com um determinado vértice  $v$ , chamado de raiz, e qua há um único caminho da raiz a qualquer dos outros vértices.

Após a definição do vértice raiz, os vértices restantes constituem um único conjunto vazio ou são divididos em  $k$  ( $k \geq 1$ ) conjuntos disjuntos, distintos e não vazios, que são subárvores de  $v$ , onde cada subárvore é, por sua vez, uma árvore.

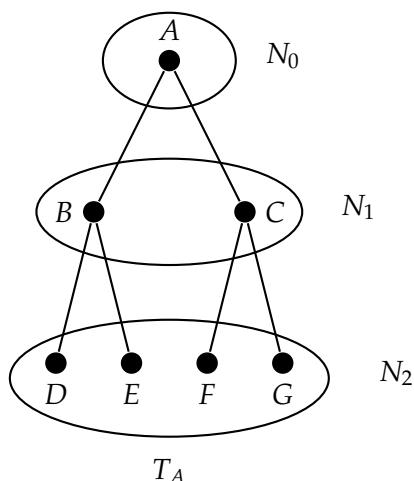


Figura 2.16: Árvore Enraizada  $T_A$ .

O modo padrão de desenhar uma árvore enraizada  $T$  é colocar a raiz  $A$  no topo da figura. Então os vértices adjacentes de  $A$  são colocados num nível abaixo do nível de  $A$ , e assim por diante, como na árvore da Figura 2.16. Dizemos que a raiz está no nível 0 ( $N_0$ ), os vértices  $B$  e  $C$  naquela árvore estão no nível 1 ( $N_1$ ), os vértices  $D$ ,  $E$ ,  $F$ , e  $G$  naquela árvore estão no nível 2 ( $N_2$ ).

#### Dados e Propriedades das árvores enraizadas

Para qualquer vértice  $x$  em  $T$ , exceto a raiz, o pai de  $x$  é o único vértice  $y$  com uma aresta para  $x$  (o mais próximo do último vértice no caminho único da raiz para  $x$ ). Reciprocamente, o vértice  $x$  é um filho do vértice  $y$ . Se dois vértices têm o mesmo pai, eles são irmãos.

Na árvore da Figura 2.16, o vértice  $B$  tem o vértice  $A$  como seu pai, os vértices  $D$  e  $E$  como seus filhos, o vértice  $C$  como seu irmão. Já o vértice  $D$  tem o vértice  $B$  como seu pai, o vértice  $E$  como seu irmão e o vértice  $A$  como seu outro ancestral.

Os ancestrais de um vértice  $v$  em uma árvore enraizada são todos os vértices no (único) caminho simples entre a raiz e  $v$  (incluindo o próprio vértice  $v$ ).

A raiz é, portanto, um ancestral comum a todos os vértices. Um vértice  $w$  é descendente de  $v$  se, e somente se,  $v$  for ancestral de  $w$ . A relação pai-filho se estende aos ancestrais e descendentes de um vértice.

O número de filhos de um vértice  $v$  é chamado **grau de saída** desse vértice, e indicaremos por  $d^+(v)$ . Um vértice que não possui descendentes próprios (vértices sem filhos) é chamado de vértice **folha**. Ou seja, um vértice **folha** é aquele com grau de saída nulo.

Um vértice que não é folha é chamado vértice interior ou **vértice interno**. Se cada vértice interno de uma árvore enraizada tem  $m$  filhos, a árvore  $T$  é chamada de **árvore  $m$ -ária**. Se  $m = 2$ , a árvore  $T$  é dita uma árvore binária e se  $m = 3$ ,  $T$  é uma árvore ternária, e assim por diante.

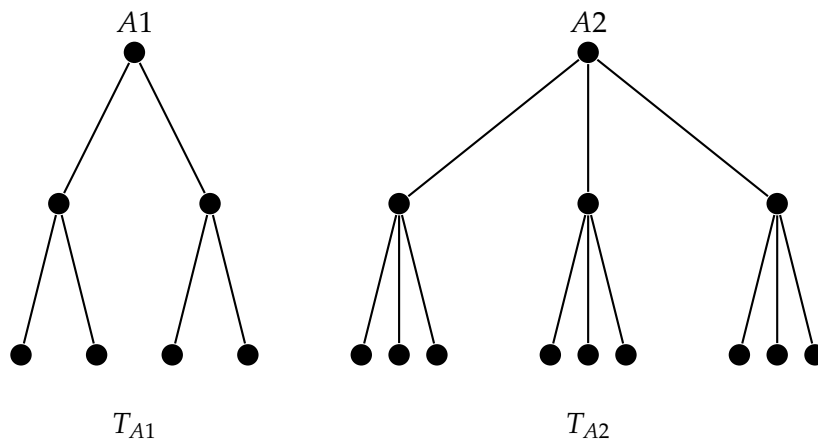


Figura 2.17: Árvore binária  $T_{A1}$  e árvore ternária  $T_{A2}$ .

**Teorema 2.1.** Uma árvore  $m$ -ária  $T$  com  $k$  vértices internos tem  $n = m \cdot k + 1$  vértices no total.

*Demonstração.* Cada vértice interno tem  $m$  filhos. Assim há  $mk$  filhos mais a raiz. Logo, há  $mk + 1$  vértices no total.  $\square$

**Corolário 2.3.** Seja  $T$  uma árvore  $m$ -ária. Então temos:

- (a) Se  $T$  tem  $k$  vértices internos, então ela tem  $j = (m - 1)k + 1$  folhas.
- (b) Se  $T$  tem  $j$  folhas, então ele tem  $k = \frac{j - 1}{m - 1}$  vértices internos e  $n = \frac{mj - 1}{m - 1}$  vértices no total.
- (c) Se  $T$  tem  $n$  vértices no total, então ela tem  $k = \frac{n - 1}{m}$  vértices internos.



(d) Se  $T$  tem  $n$  vértices no total, então ela tem  $j = \frac{(m-1)n+1}{m}$  folhas.

*Demonstração.* a) Sabemos que o total de vértices  $n$  é igual à soma dos vértices internos  $k$  com as folhas  $j$ . Logo  $j = n - k$ . Mas  $n = mk + 1$ , pelo Teorema 2.1. Daí:  $j = n - k = mk + 1 - k = (m-1)k + 1$ . Ou seja:  $j = (m-1)k + 1$

b) De a, tem-se:  $j = (m-1)k + 1$ . Logo,  $j - 1 = (m-1)k$ . Daí:  $k = \frac{j-1}{m-1}$  e como  $n = j + k$ , então  $n = j + \frac{j-1}{m-1} = \frac{mj-1}{m-1}$ . Ou seja:  $n = \frac{mj-1}{m-1}$

c) De  $n = j + k$ , vem:  $k = n - j = n - [(m-1)k + 1] = n - (m-1)k - 1$ . Logo:  $k = n - mk + k - 1$ . Daí:  $mk = n - 1$ . Ou seja:  $k = \frac{n-1}{m}$ .

d) De c tem-se que  $k = \frac{n-1}{m}$  e de b tem-se que  $k = \frac{j-1}{m-1}$ , vem então que:  $\frac{j-1}{m-1} = \frac{n-1}{m}$ . Daí:  $(j-1)m = (m-1)(n-1)$ , segue que:  $jm - m = mn - m - n + 1$ , portanto  $jm = mn - n + 1$ , logo:  $j = \frac{(m-1)n+1}{m}$

□

No ano de 1736, Leonhard Euler resolveu através de uma modelagem matemática com grafos o problema conhecido como, Problema das Pontes de Königsberg, cidade da Rússia, hoje conhecida como cidade de Kaliningrado [14]. Euler resolveu o problema proposto, dando uma solução não só para o caso particular de Königsberg, mas para todos os problemas semelhantes. Hoje em dia existem muitas situações problemas que são resolvidas com a modelagem em grafos. Neste capítulo apresentaremos problemas que resolveremos a partir de uma contagem em grafos. Usaremos a Contagem Dupla, o Primeiro Teorema, Grafos Completos e Árvores.

### 3.1 Contagem Dupla e o Primeiro Teorema

A primeira contagem na teoria dos grafos relaciona a soma dos graus dos vértices de um grafo com seu número de arestas.

**Teorema 3.1.** *Em um grafo  $G = (V, E)$ , a soma do grau de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.*

*Demonstração.* Usaremos a contagem dupla e o princípio da divisão para mostrar que

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E| :$$

1. Contando diretamente as arestas teremos uma quantidade  $|E|$ ;

2. Determinando a soma dos graus dos vértices e dividindo por dois, pois nesta contagem cada aresta foi contada duas vezes, teremos

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in V} d(v)$$

Como essas duas contagens levam a um mesmo número. Logo

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

□

**Exemplo 3.1.** *Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1? Represente ilustrativamente um possível grafo.*

**Solução:** O grafo  $G$ , da figura 3.1, possui 6 vértices e tem como soma dos graus dos vértices um total de  $5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 14$ . E como  $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$ , temos que existem 7 arestas.

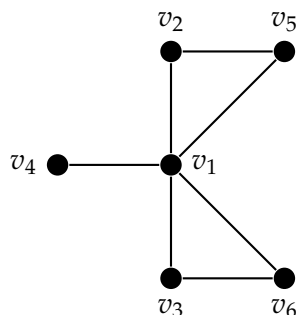


Figura 3.1: Grafo  $G$ .

**Exemplo 3.2.** *Considere 100 cidades ligadas entre si por estradas diretas, sendo que de cada cidade partem 4 estradas. Quantas estradas teremos no total, nas condições citadas?*

**Solução:** Podemos modelar esse problema num grafo 4-regular onde  $\sum_{v \in V} d(v) = 100 \cdot 4 = 400$  então pelo teorema 3.1 tem-se  $400 = 2 \cdot |E|$  daí  $|E| = 200$  estradas.

**Exemplo 3.3.** *(Banco IMO 1995) Em uma reunião com  $12k$  pessoas, cada uma cumprimenta exatamente outras  $3k + 6$  pessoas. Para cada duas pessoas, o número de pessoas que cumprimentou ambas é sempre o mesmo. Quantas pessoas estavam na reunião?*

**Solução:** Podemos representar essa reunião por um grafo, onde os vértices são as pessoas e os cumprimentos são as arestas. Esse grafo é formado por  $12k$  vértices, cada um com grau  $3k + 6$ . Observe que não podemos usar o Teorema 3.1 diretamente, pois não temos outro dado numérico. Mas é nos dado a relação entre três pessoas na reunião, "Para cada duas pessoas, o número de pessoas que cumprimentou ambas é sempre o mesmo". Assim podemos usar a contagem dupla para determinar o número de vértices (pessoas) através da relação de cada três vértices  $v, u, w$ , veja a Figura 3.2.

Seja  $T$  a quantidade de grupos que podemos formar com cada três vértices e  $n$  o número de pessoas que cumprimentou duas pessoas quaisquer. Podemos fazer a contagem de  $T$  de duas formas:

1. Escolhendo primeiro a pessoa  $v$ . A pessoa  $v$  pode ser escolhida de  $12K$  maneiras. Feito isso, podemos escolher o par  $(u, w)$  de  $(3k + 6)(3k + 5)$  maneiras. Assim,  $T = 12K(3k + 6)(3k + 5)$ .
2. Escolhendo primeiro o par  $u, w$ . Este par pode ser escolhido de  $12k(12k - 1)$  maneiras. Feito isso podemos escolher  $v$  de  $n$  maneiras. Assim,  $T = 12nk(12k - 1)$ .

Segue que,

$$12nk(12k - 1) = 12K(3k + 6)(3k + 5)$$

$$n = \frac{(3k + 6)(3k + 5)}{12k - 1},$$

como  $n$  é um número inteiro positivo, temos  $k = 3$ .

Logo, 36 pessoas estavam na reunião

□

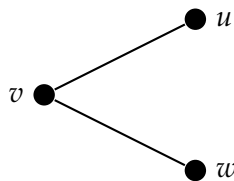


Figura 3.2: Relação entre 3 pessoas do exemplo 3.3

## 3.2 Contagem em Grafos Completos

### 3.2.1 Contagem de Arestas em Grafos Completos

**Proposição 3.1.** O número de arestas  $|E|$  em um grafo completo  $K_n$  é dado por

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

*Demonstração.* Como o grau de cada vértice em um grafo completo é dado por

$$d(v) = n - 1, \text{ para todo } v \in V,$$

temos pelo Teorema 3.1, que

$$\sum_{v \in V} d(v) = n \cdot (n - 1) = 2 \cdot |E|;$$

Logo,

$$|E| = \frac{n(n-1)}{2}.$$

□

**Exemplo 3.4.** (Sistema SAS) Em um campeonato de xadrez, participaram  $n$  enxadristas. Nesse campeonato, todos jogaram entre si uma única vez, e o campeão é o jogador com maior número de vitórias. Sabe-se que  $n - 4$  enxadristas jogaram  $5n$  partidas. Qual o número total de partidas jogadas durante o campeonato?

**Solução:** Podemos modelar esse problema com um grafo completo  $K_n$  (pois todos os jogadores jogam entre si), onde os vértices representam os jogadores e as arestas são as partidas. Pela proposição 3.1 o total de arestas será dado por  $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ .

Como os  $n - 4$  enxadristas jogaram  $5n$  partidas e os 4 jogadores excluídos momentaneamente aí, que jogam entre eles,  $|E| = \frac{4(4-1)}{2} = 6$  partidas, teremos então:

$5n + 6 = \frac{n(n-1)}{2}$ , daí,  $n^2 - 11n - 12 = 0$ , logo  $n = 12$  jogadores e  $|E| = \frac{12(12-1)}{2} = 66$  partidas no total.

**Exemplo 3.5.** Quantas são as diagonais de um polígono de  $n$  lados?

**Solução:** O polígono com  $n$  lados e todas as suas diagonais, pode ser visto como um grafo completo  $K_n$ . Para calcular o número de diagonais  $D$  basta tirar do total de arestas

$|E|$  a quantidade  $n$ , correspondentes as arestas que representam os lados do polígono.

Assim,

$$D = |E| - n$$

$$D = \frac{n(n-1)}{2} - n$$

$$D = \frac{n(n-3)}{2}.$$

□

**Exemplo 3.6.** (OBM Fase 2 N3 2007) Em um certo país, há 21 cidades e o governo pretende construir  $m$  estradas (todas de mão dupla), sendo que cada estrada liga exatamente duas das cidades do país. Qual o menor valor de  $m$  para que, independente de como as estradas sejam construídas, seja possível viajar entre quaisquer duas cidades (passando, possivelmente, por cidades intermediárias)?

**Solução:** Ao se deparar com essa questão muitos alunos poderiam responder que  $m = 20$ , pois como podemos modelar esse problema em um grafo de árvore e esse tipo de grafo é minimamente conexo temos que com 21 vértices (cidades), basta que tenhamos 20 arestas (estradas) para conectá-los. Mas na questão diz que "independente de como as estradas sejam construídas". Assim 20 arestas não é a resposta correta.

Queremos encontrar o menor número de arestas que um grafo de 21 vértices deve ter para garantir que ele é conexo, ou seja: que dados dois vértices (cidades) quaisquer, existe um caminho ligando estes vértices (cidades). independente de como as arestas(estradas) estejam dispostas no grafo.

Considerando um grafo completo  $K_{20}$  e 1 vértice isolado, temos que este grafo não é conexo e, pela proposição 3.2 possui  $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$  arestas. Desta maneira, obtemos que  $m \geq 191$ .

Observe que qualquer aresta adicional ligando o vértice isolado a qualquer um dos outros 20 vértices já conecta o grafo. Mas vamos provar que um grafo  $G$  com 21 vértices e 191 arestas é sempre conexo.

Suponha por absurdo que um grafo  $G$  com 21 vértices e 191 arestas é desconexo.

Desta maneira podemos ter  $G = H_1 \cup H_2$  com  $H_1 \cap H_2 = \emptyset$ . Sendo  $n_1, n_2$  os números de vértices de  $H_1, H_2$ , respectivamente, temos que  $n_1 + n_2 = 21$  vértices.

Por outro lado acontece que o número máximo de arestas de  $G$  é

$$\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2}.$$

Assim,

$$\frac{n_1(n_1 - 1)}{2} + \frac{n_2(n_2 - 1)}{2} \geq 191$$

$$n_1^2 + n_2^2 - n_1 - n_2 \geq 382,$$

como

$$n_1 + n_2 = 21,$$

temos

$$n_1^2 + n_2^2 + 2n_1n_2 = 441,$$

segue que

$$-2n_1n_2 + 441 - 21 \geq 382$$

$$-2n_1n_2 \geq -38$$

$$n_1n_2 \leq 19$$

Chegamos a uma contradição, pois sendo  $n_1, n_2$  dois inteiros positivos, não podemos ter  $n_1 + n_2 = 21$  e  $n_1n_2 \leq 19$ .

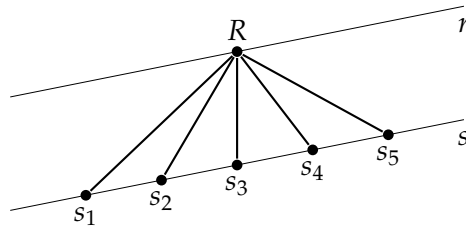
□

**Exemplo 3.7.** (Sistema SAS/Adaptada) Sejam duas retas  $r, s$  paralelas e considere nove pontos distintos, quatro em  $r$  e cinco em  $s$ . Quantos triângulos podemos formar com esses nove pontos?

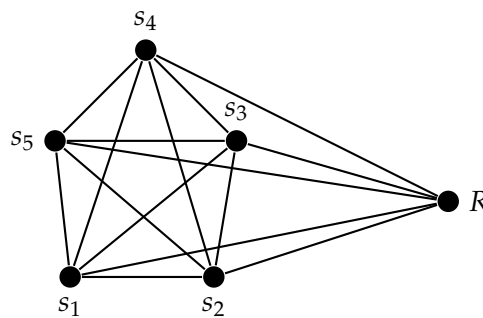
**Solução:** Formar triângulos, nesta situação, significa fazer duas escolhas:

1. ( $E_1$ ) Escolher um vértice de  $r$  e dois de  $s$ .

Na figura a seguir temos representadas duas retas paralelas  $r$  e  $s$ .  $R$  é um ponto escolhido da reta  $r$  e  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  são pontos da reta  $s$ . Assim precisamos contar as triplas  $(R, s_i, s_j)$ ;  $i \neq j$  e  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  que podemos formar e determinar a quantidade de triângulos.



Segue que, para cada triângulo representado por  $(R, s_i, s_j)$ ;  $i \neq j$  a contagem de dois elementos de  $s, s_i e s_j$  é feita contando as arestas de um grafo completo  $K_5$ . Na figura a seguir é mostrado um grafo, onde temos a escolha de um vértice  $R$  da reta  $r$  e os vértices de  $s$  são representados no grafo completo  $K_5$ .



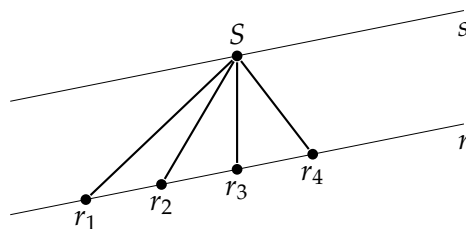
Assim, Em  $(E_1)$  temos 4 maneiras de se escolher  $R$  e pela proposição 3.1 temos

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

maneiras de se escolher os pares não ordenados  $\{s_i, s_j\}$ . Logo, temos  $4 \cdot 10 = 40$  triângulos;

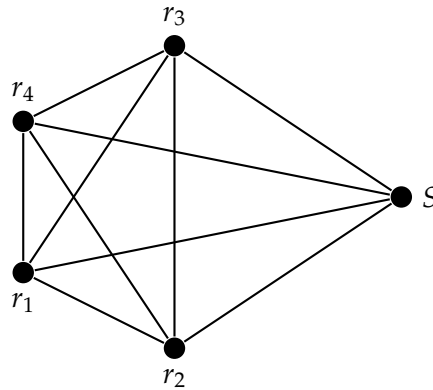
2.  $(E_2)$  Escolher um vértice de  $s$  e dois de  $r$ .

De forma análoga, temos representadas, na figura abaixo, as triplas  $(S, r_i, r_j)$ ;  $i \neq j$ .  $S$  é um ponto escolhido da reta  $s$  e  $r_1, r_2, r_3, r_4$  são pontos da reta  $r$ .



Na figura abaixo é mostrado um grafo, onde temos a escolha de um vértice  $S$  da reta  $s$  e os vértices de  $r$  são representados no grafo completo  $K_4$ .





Em  $(E_2)$  temos 5 maneiras de se escolher  $S$  e

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

maneiras de se escolher os pares não ordenados  $(r_i, r_j)$ . Assim, temos  $5 \cdot 6 = 30$  triângulos.

Logo, por  $(E_1)$  e por  $(E_2)$ , temos  $40 + 30 = 70$ .

Concluimos então, que podemos formar 70 triângulos.

□

### 3.2.2 Contagem de Caminhos e Ciclos em Grafos Completos

Uma aplicação da contagem de caminhos em grafos completos pode ser adaptada ao problema do caixeiro viajante (PCV). O PCV é o conjunto de problemas em que se considera ciclo hamiltoniano em grafos completos, isto é, um caixeiro viajante precisa visitar  $n$  cidades, passando por cada cidade uma única vez e depois retornar a cidade inicial. Assim, é necessário determinar o ciclo que tenha o menor custo, isto é, que a soma das arestas tem o menor peso total. Uma forma de determinar o ciclo de menor custo é pelo método da exaustão. O método da exaustão consiste em listar os ciclos hamiltonianos e assim determinar o ciclo de menor custo. Aqui nesse momento estamos interessados em determinar quantos ciclos hamiltonianos e quantos caminhos hamiltonianos existem em um grafo completo  $K_n$ .

### 3.2.2.1 Número de caminhos hamiltonianos em um grafo completo

**Proposição 3.2.** *Em um grafo completo com  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , existem  $n!$  caminhos hamiltonianos.*

*Demonstração.* Um caminho hamiltoniano em um grafo completo  $K_n$  pode ser representado por uma sequência de  $n$  elementos distintos. Como existe uma aresta ligando quaisquer dois vértices do grafo, temos que os elementos da sequência podem ser permutados entre si. Logo existem  $n!$  permutações possíveis.  $\square$

### 3.2.2.2 Número de ciclos hamiltonianos em um grafo completo

**Proposição 3.3.** *Em um grafo completo com  $n$  vértices,  $n \geq 3$ , existem  $\frac{(n-1)!}{2}$  ciclos hamiltonianos.*

*Demonstração.* Os  $n$  vértices de um grafo completo  $K_n$  podem ser colocados em disposição de um círculo. Assim, temos uma permutação circular de  $n$  elementos o que nos fornecem  $(n-1)!$  sequências. Mas cada duas sequências representam o mesmo ciclo Hamiltoniano. Logo, pelo princípio da divisão temos que existem  $\frac{(n-1)!}{2}$  ciclos hamiltonianos em um grafo completo  $K_n$ .  $\square$

**Exemplo 3.8.** *Um caixeiro viajante precisa sair da sua cidade, visitar outras 4 cidades, uma única vez, e depois retorna a sua cidade. Sabendo que as cinco cidades estão conectadas duas a duas por uma única estrada. Pede-se:*

- i. *De quantas maneiras o caixeiro viajante pode fazer esse passeio?*
- ii. *Quantos ciclos hamiltonianos distintos existem?*

**Solução 3.1.** *Esse problema pode ser modelado por um grafo completo  $K_5$ , onde as cidades são os vértices e as estradas são as arestas. Daí temos que:*

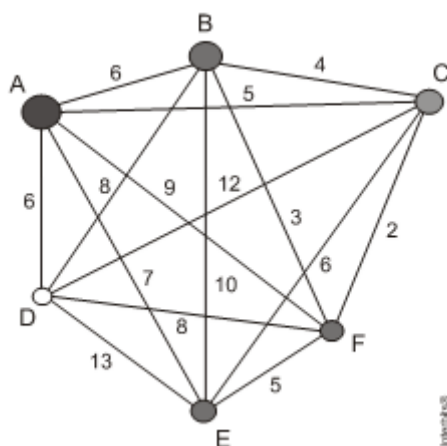
- (i) *Sejam os cinco vértices  $A, B, C, D$  e  $E$ , onde  $A$  representa a cidade do caixeiro viajante. Como os vértices  $A, B, C, D$  e  $E$  podem ser dispostos em círculo (permutação cíclica) temos que existem  $(5-1)! = 4! = 24$  passeios.*

$\square$

- (ii) *Pela Proposição 3.3 existem  $\frac{(5-1)!}{2} = \frac{4!}{2} = \frac{24}{2} = 12$  ciclos hamiltonianos.*

**Exemplo 3.9.** Vamos resolver a questão 173 da prova azul do ENEM - 2010.

João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele saíra da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cinco clientes. Examinando a figura, percebe que precisa considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1 min 30 s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado.

O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de

- A) 60 min.
- B) 90 min.
- c) 120 min.
- d) 180 min.
- e) 360 min.

**Solução:** Este problema se encontra modelado como um grafo completo, embora na

questão não informe isso, pois sabemos que esse conteúdo não faz parte da lista dos conteúdos cobrados pelo enem, o que poderia facilitar o seu entendimento e a sua resolução.

Trata-se do número de ciclos hamiltonianos possíveis traduzidos aí como sequências de 7 letras, que representam os trajetos a serem percorridos.

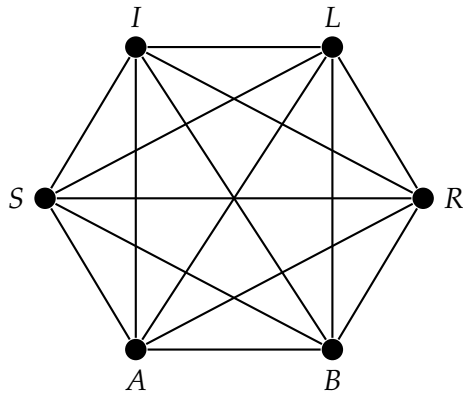
Pela proposição 3.3 existem  $\frac{(6-1)!}{2} = \frac{5!}{2} = \frac{120}{2} = 60$  ciclos hamiltonianos.

Teremos então 60 sequências no total a considerar e como cada uma delas leva 1min 30seg = 1,5min para ser examinada, João levará  $1,5 \cdot 60 = 90$  min para verificar todas essas sequências.

**Exemplo 3.10.** (OBM) *As permutações da palavra BRASIL foram listadas em ordem alfabética, como se fossem palavras de seis letras em um dicionário. A 361ª palavra nessa lista é:*

- A) BRISAL
- B) SIRBAL
- c) RASBIL
- d) SABRIL
- e) LABIRS

**Solução:** Podemos modelar esse problema em um grafo completo conforme figura abaixo, onde cada letra representa um vértice e as arestas as relações de ordem das letras. Observe que os anagramas que começam com a letra A podem ser contados como se fossem caminhos hamiltonianos em um grafo completo  $K_6$  pois A estará fixo como vértice inicial. Logo pela proposição 3.2, teremos  $5! = 120$  anagramas iniciados pela letra A. De maneira análoga, temos 120 anagramas iniciados pela letra B e 120 iniciados pela letra I. Assim já temos:  $120 + 120 + 120 = 360$  anagramas e o próximo anagrama, que pela ordem alfabética começa com a letra L, é LABIRS e será portanto a 361ª palavra nessa lista.



### 3.3 Contagem em Grafo Grade

Nesta secção será apresentado como se determina o número de arestas e a quantidade de caminhos entre dois pontos de um grafo grade.

#### 3.3.1 Contagem de Arestas em Grafo Grade

Um grafo grade  $G_{m \times n}$  pode ser visto como a união entre  $m$  caminhos  $P_n$  e  $n$  caminhos  $P_m$ , onde nenhuma das arestas se repetem.

Vamos mostrar os  $m$  caminhos  $P_n$  e  $n$  caminhos  $P_m$  no grafo grade  $G_{3 \times 5}$  (figura 3.2 a seguir), isto é, como  $m = 3$  e  $n = 5$ , teremos 3 caminhos  $P_5$  (figura 3.4a seguir), e 5 caminhos  $P_3$  (figura 3.5a seguir).

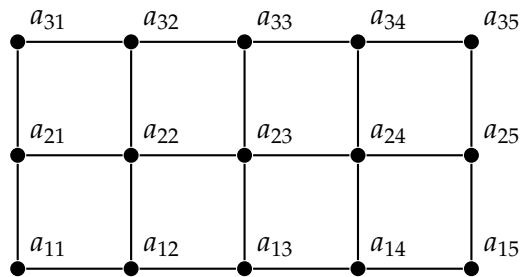


Figura 3.3: Grafo Grade  $G_{3 \times 5}$

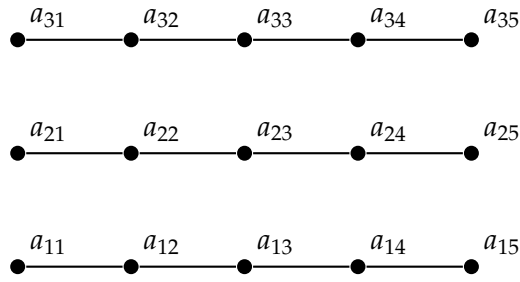


Figura 3.4: Os 3 caminhos  $P_5$

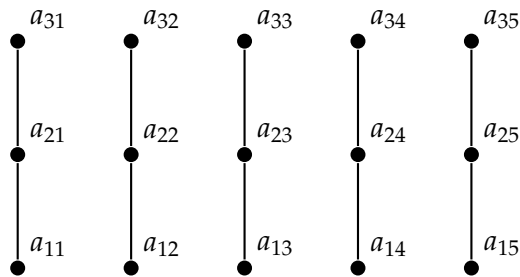


Figura 3.5: Os 5 caminhos  $P_3$

Assim temos a seguinte proposição:

**Proposição 3.4.** *Um grafo grade  $G_{m \times n}$  possui  $m(n - 1) + n(m - 1)$  arestas.*

*Demonstração.* Cada caminho  $P_n$  possui  $n - 1$  arestas (todo caminho é uma árvore), como existem  $m$  caminhos  $P_n$  temos  $m(n - 1)$  arestas. Analogamente temos  $n(m - 1)$  arestas para os  $n$  caminhos  $P_m$ . Assim, como o número de arestas é a união disjunta das arestas de todos os caminhos, temos  $|E| = m(n - 1) + n(m - 1)$ .  $\square$

**Exemplo 3.11.** Um artesão deseja construir uma rede de malhas quadradas conforme o modelo da figura abaixo. A rede deve possuir 169 nós e ter a maior área possível. Sabendo que a distância entre os nós é de 15 cm e que cerca de 20% do fio é gasto na amarração dos nós, qual o comprimento, em metros, de fio serão usados para construir esta rede?

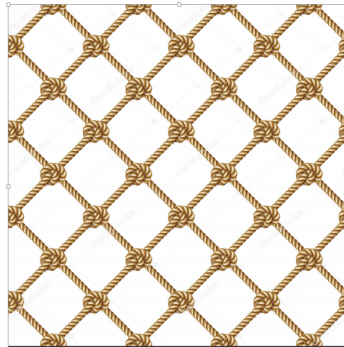


Figura 3.6: Modelo de rede

**Solução:** Podemos modelar a questão com um grafo grade  $G_{13 \times 13}$  pois, as situações  $G_{1 \times 169}$  e  $G_{169 \times 1}$  não representam redes. Assim, pela proposição 3.4 temos que o número de arestas é dado por

$$|E| = m(n - 1) + n(m - 1)$$

$$|E| = 13(13 - 1) + 13(13 - 1)$$

$$|E| = 13 \cdot 12 + 13 \cdot 12$$

$$|E| = 2 \cdot 156 = 312.$$

Segue que, pelo enunciado da questão, temos que o comprimento de fio é dado por

$$312 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 312 \cdot 0,15 = 56,16m$$

□

**Exemplo 3.12.** Em um condomínio residencial com 12 unidades, projeta-se uma rede de esgoto conforme a figura abaixo. Se em cada cruzamento da tubulação existe um poço de visita, determine:

- i) Quantos poços de visitas existem nesta rede de esgoto?
- ii) Qual a menor quantidade de poços de visitas que terá um condomínio com 121 unidades residenciais?
- iii) Qual a menor quantidade de poços de visitas que terá um condomínio com 200 unidades residenciais?

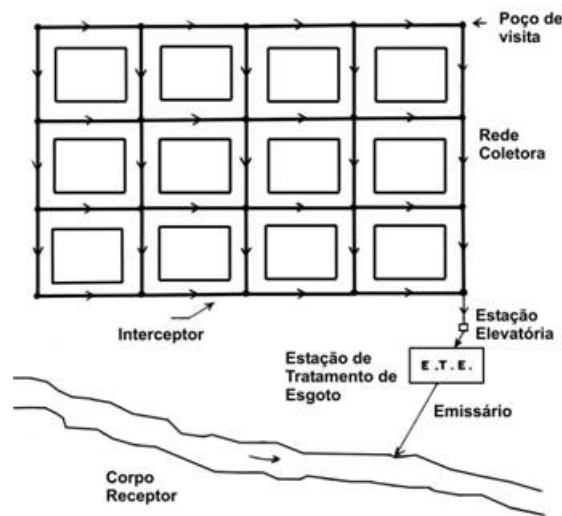


Figura 3.7: Mapa da rede de esgoto

**Solução:** A figura nos remete a um grafo grade onde, cada vértice representa um poço de visita.

- (i) Como as unidades residenciais estão dispostas em 3 linhas com 4 unidades cada, temos que cada caminho vertical terá 3 arestas e cada caminho horizontal terá 4 arestas. Segue que,  $m - 1 = 3 \therefore m = 4$  e  $n - 1 = 4 \therefore n = 5$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{4 \times 5}$ , que tem  $4 \cdot 5 = 20$  vértices. Concluímos então que existem 20 poços de visitas.
- (ii) Os divisores inteiros positivos de 121 são 1, 11 e 121. Assim, temos três possibilidades para a disposição das unidades residenciais:
  - I. As unidades residenciais estão dispostas em 1 linha com 121 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 1 \therefore m = 2$  e  $n - 1 = 121 \therefore$



$n = 122$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{2 \times 122}$ , que tem  $2 \cdot 122 = 244$  vértices. Logo, existem 244 poços de visitas.

II. As unidades residenciais estão dispostas em 11 linhas com 11 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 11 \therefore m = 12$  e  $n - 1 = 11 \therefore n = 12$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{12 \times 12}$ , que tem  $12 \cdot 12 = 144$  vértices. Logo, existem 144 poços de visitas.

III. As unidades residenciais estão dispostas em 121 linhas com 1 unidade cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (I).

Concluimos então que a menor quantidade de poços de visitas que terá um condomínio com 121 unidades residenciais é 144.

□

(iii) Os divisores inteiros positivos de 200 são 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40, 25, 50, 100 e 200. Assim, temos doze possibilidades para a disposição das unidades residenciais:

I. As unidades residenciais estão dispostas em 1 linha com 200 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 1 \therefore m = 2$  e  $n - 1 = 200 \therefore n = 201$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{2 \times 201}$ , que tem  $2 \cdot 201 = 402$  vértices. Logo, existem 402 poços de visitas.

II. As unidades residenciais estão dispostas em 2 linhas com 100 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 2 \therefore m = 3$  e  $n - 1 = 100 \therefore n = 101$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{3 \times 101}$ , que tem  $3 \cdot 101 = 303$  vértices. Logo, existem 303 poços de visitas.

III. As unidades residenciais estão dispostas em 4 linhas com 50 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 4 \therefore m = 5$  e  $n - 1 = 50 \therefore n = 51$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{5 \times 51}$ , que tem  $5 \cdot 51 = 255$  vértices. Logo, existem 255 poços de visitas.

IV. As unidades residenciais estão dispostas em 5 linhas com 40 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 5 \therefore m = 6$  e  $n - 1 = 40 \therefore n = 41$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{6 \times 41}$ , que tem  $6 \cdot 41 = 246$  vértices. Logo, existem 246 poços de visitas.

- VI. As unidades residenciais estão dispostas em 8 linhas com 25 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 8 \therefore m = 9$  e  $n - 1 = 25 \therefore n = 26$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{9 \times 26}$ , que tem  $9 \cdot 26 = 234$  vértices. Logo, existem 234 poços de visitas.
- VI. As unidades residenciais estão dispostas em 10 linhas com 20 unidades cada. Segue que, da mesma forma que fizemos em (i), temos  $m - 1 = 10 \therefore m = 11$  e  $n - 1 = 20 \therefore n = 21$ . Assim, temos um grafo grade  $G_{11 \times 21}$ , que tem  $11 \cdot 21 = 231$  vértices. Logo, existem 231 poços de visitas.
- VII. As unidades residenciais estão dispostas em 200 linhas com 1 unidade cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (I).
- VIII. As unidades residenciais estão dispostas em 100 linhas com 2 unidades cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (II).
- IX. As unidades residenciais estão dispostas em 50 linhas com 4 unidades cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (III).
- X. As unidades residenciais estão dispostas em 40 linhas com 5 unidades cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (IV).
- XI. As unidades residenciais estão dispostas em 25 linhas com 8 unidades cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (V).
- XII. As unidades residenciais estão dispostas em 20 linhas com 10 unidades cada. Nesta possibilidade temos a mesma quantidade de poços que em (VI).

Concluimos então que a menor quantidade de poços de visitas que terá um condomínio com 200 unidades residenciais é 231.

□

**Exemplo 3.13.** Na pequena cidade de Quadrantina, uma cidade que tem as suas ruas formando um quadrado, existe uma linha de ônibus passando em cada rua, cortando a malha urbana de norte a sul e de leste a oeste, como ilustra a figura abaixo. Se entre dois cruzamentos consecutivos quaisquer de ruas existe um ponto de ônibus, quantos pontos de ônibus existem nesta cidade?

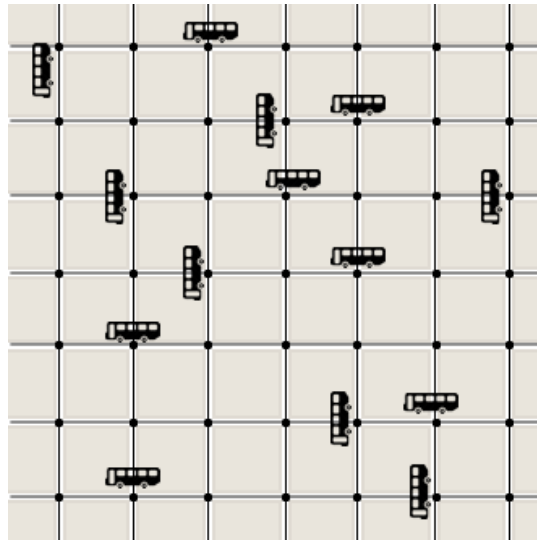


Figura 3.8: Mapa viário da cidade de Quadrantina

**Solução:** A figura nos remete a um grafo grade  $G_{7 \times 7}$ , onde os vértices representam os cruzamentos das ruas e as arestas representam os pontos de ônibus. Assim, pela proposição 3.4 temos que o número de arestas é dado por

$$|E| = m(n - 1) + n(m - 1) = 7(7 - 1) + 7(7 - 1) = 7 \cdot 6 + 7 \cdot 6 = 2 \cdot 42 = 84.$$

Concluimos então que existem 84 pontos de ônibus na pequena cidade de Quadrantina.

□

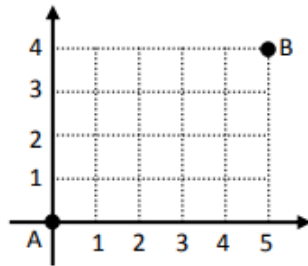
### 3.3.2 Contagem de Caminhos em Grafo Grade

Muitos problemas do Ensino Básico podem ser resolvidos pela contagem de caminhos em um grafo grade. Queremos neste momento encontrar a quantidade de caminhos em um grafo grade que vai do vértice  $a_{11}$  até o vértice  $a_{mn}$ .

**Teorema 3.2.** Em um grafo grade  $G_{m \times n}$  existem  $\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$  caminhos distintos que vão do vértice  $a_{11}$  até o vértice  $a_{mn}$ , sendo permitido apenas dois movimentos: subir ou deslocar para a direita.

*Demonstração.* Em cada caminho que vai do vértice  $a_{11}$  até o vértice  $a_{mn}$  temos  $m-1$  arestas verticais e  $n-1$  arestas horizontais. Assim teremos uma permutação de  $m-1 + n-1 = m+n-2$  arestas com repetição de  $m-1$  e  $n-1$  arestas. Logo, pela fórmula de Permutação com elementos repetidos, temos  $\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}$ .  $\square$

**Exemplo 3.14.** (FGV – SP) Na figura abaixo, quantos caminhos diferentes podem ser feitos de A para B, deslocando-se uma unidade de cada vez, para cima ou para a direita ?



- a) 126
- b) 858
- c) 326
- d) 954
- e) 386

**Solução:** A figura nos remete a um grafo grade  $G_{5 \times 6}$ , ( $m = 5$  e  $n = 6$ ) Assim, pelo Teorema 3.2 temos que o número de trajetos (caminhos) é dado por

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{(5+6-2)!}{(5-1)!(6-1)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Concluimos então que existem 126 trajetos (caminhos) diferentes.

□

**Exemplo 3.15.** (UFBA) Na figura abaixo, cada quadrado representa um quarteirão de um condomínio e cada  $x$  um cruzamento de ruas. Um carro desloca-se de  $A$  até  $B$ , obedecendo as seguintes condições:

O trajeto deve ser formado por segmentos de reta ligando pontos de cruzamentos consecutivos;

Cada segmento só pode ser percorrido num dos sentidos indicados pelas setas na figura 3.9.

Com base nessas informações, quantos trajetos diferentes existem?

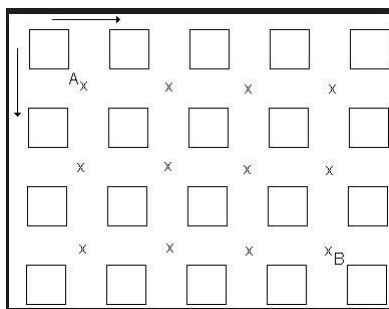


Figura 3.9: Quarteirão de um Condomínio

**Solução:** A figura nos remete a um grafo grade  $G_{4 \times 3}$ , ( $m = 4$  e  $n = 3$ ), onde cada cruzamento de rua representa um vértice e os segmentos que ligam os cruzamentos representam as arestas. Consideraremos, sem perda de generalidade, que o ponto  $A$  encontra-se no vértice  $a_{11}$  e o ponto  $B$  no vértice  $a_{34}$ . Assim, pelo Teorema 3.2 temos que o número de trajetos (caminhos) é dado por

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{(4+3-2)!}{(4-1)!(3-1)!} =$$

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Concluimos então que existem 10 trajetos (caminhos) diferentes.

□

**Exemplo 3.16.** (Fuvest) A figura a seguir representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinaladas as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para o Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria?

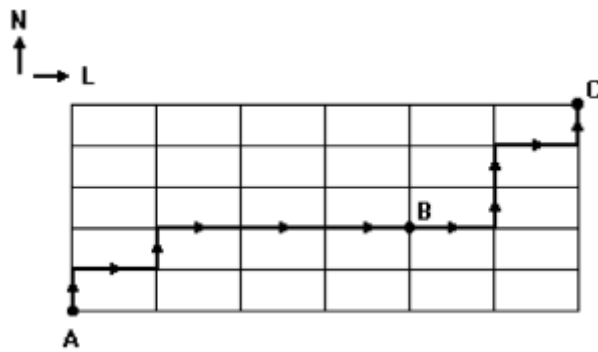


Figura 3.10: parte do mapa de uma cidade

**Solução:** A figura nos remete a um grafo grade  $G_{6 \times 7}$ , ( $m = 6$  e  $n = 7$ ).

O problema diz que para ir de A até C deve-se passar antes por B. Modelaremos então o problema em dois grafos grades correspondendo a duas etapas, e depois multiplicaremos os resultados obtidos em cada etapa (Princípio Multiplicativo).

A 1ª etapa corresponderá ao número de caminhos da casa de João (A) até a casa de Maria (B),

teremos um grafo  $(G_1)_{3 \times 5}$  ( $m = 3$  e  $n = 5$ ), onde pelo Teorema 3.2 temos que o número de caminhos é dado por

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{(3+5-2)!}{(3-1)!(5-1)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

A 2ª etapa corresponderá ao número de caminhos da casa de Maria (B) até a escola (C), teremos um grafo  $(G_2)_{4 \times 3}$  ( $m = 4$  e  $n = 3$ ), onde pelo Teorema 3.2 temos que o número de caminhos é dado por

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{(4+3-2)!}{(4-1)!(3-1)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Logo, teremos  $15 \cdot 10 = 150$

Concluimos então que existem 150 caminhos distintos que João poderá percorrer para ir de sua casa à escola, passando pela casa de Maria.

□

**Exemplo 3.17.** Encontre o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4.$$

**Solução:** Podemos modelar este problema através de uma contagem de caminhos em um grafo grade  $G_{5 \times 3}$ , que vai do vértice  $a_{11}$  até o vértice  $a_{53}$ . A soma das parcelas de inteiros, no caso 4, representa a quantidade de arestas de cada caminho vertical e a quantidade de parcelas de inteiros, no caso 3, é a quantidade de caminhos verticais. Por exemplo, temos representados nos grafos  $G_1$  e  $G_2$  abaixo, das figuras 3.11a e 3.11b), respectivamente, as soluções  $(1, 1, 2)$  e  $(0, 0, 4)$ .

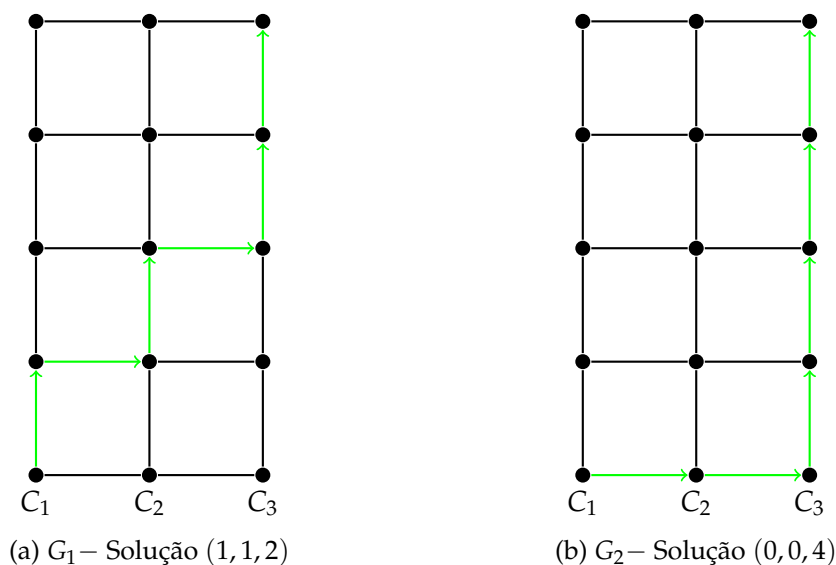


Figura 3.11: Grafos grades - duas soluções inteiras não negativas da equação  $x_1 + x_2 + x_3 = 4$

Observe que para o caminho orientado em  $G_1$  temos: 1 aresta vertical em  $C_1$ , 1 aresta vertical em  $C_2$  e 2 arestas verticais em  $C_3$  o que significa  $1 + 1 + 2$  (as arestas horizontais do caminho representam os sinais de +). Analogamente em  $G_2$  temos: 0 aresta vertical em  $C_1$ , 0 aresta vertical em  $C_2$  e 4 arestas verticais em  $C_3$  o que significa  $0 + 0 + 4$ . Segue que, pelo Teorema 3.2, o número de soluções inteiras não negativas da equação  $x_1 + x_2 + x_3 = 4$  é dado por

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} = \frac{(5+3-2)!}{(5-1)!(3-1)!} =$$

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

□

**Observação 3.1.** No caso geral o número de soluções inteiras não negativas da equação

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m - 1$$

é igual a quantidade de caminhos distintos em um grafo grade  $G_{mn}$  que vai do vértice  $a_{11}$  até o vértice  $a_{mn}$ , sendo permitido apenas dois movimentos: subir ou deslocar para a direita. Assim, o número de soluções é dada por

$$\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!}.$$

Convido o leitor a comparar as conduções das soluções do exemplo 3.17 e do caso geral, com as soluções propostas pelo livro: A Matemática do Ensino Médio da SBM, de Augusto César Morgado, quarta edição, Exemplo 10, na página 98. No livro ele propõe para o caso geral da equação na forma  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$ , a solução representada por  $CR_n^p = CR_n^{n+p-1}$ , fazendo  $p = m - 1$ , obteremos a expressão do Teorema 3.2, demonstrado através das propriedades dos grafos. Essa solicitação de comparação entre as soluções deste trabalho e do livro citado, o qual faz parte inclusive das minhas referências bibliográficas, tem como propósito mostrar como o uso de contagem em grafos pode facilitar na compreensão e solução de alguns tipos de problemas.

### 3.4 Contagem em árvores

**Exemplo 3.18.** Consideremos que uma cadeia de telefones seja instalada por uma empresa que possui 130 funcionários. Essa cadeia de telefones é iniciada por uma determinada pessoa que liga para um grupo escolhido de três pessoas. Cada uma dessas três pessoas liga para grupos escolhidos de três outras pessoas, e assim sucessivamente. Pede-se:

- (i) Quantas ligações serão feitas no total?
- (ii) Quantas pessoas não terão que fazer nenhuma ligação?

**Solução:**

(i) Podemos modelar essa cadeia de telefones como uma árvore enraizada de  $n = 130$  vértices onde, cada aresta corresponde a uma ligação. Logo, pela **Proposição 2.2**, teremos  $n - 1 = 130 - 1 = 129$  ligações.

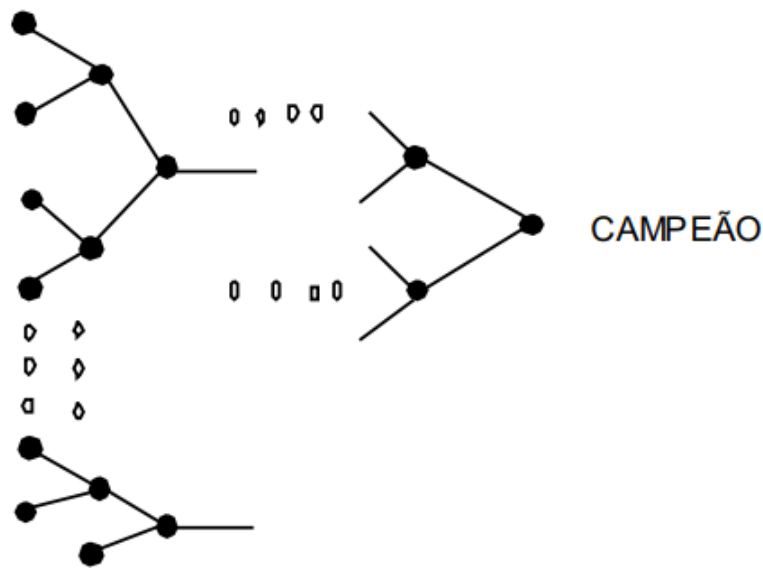
(ii) Como a árvore é ternária (3-ária), do Colorário 2.3 item (d), tem-se que há



$j = \frac{(m-1)n+1}{m} = \frac{(3-1)130+1}{3} = 87$  folhas (vértices com grau de saída nulo). Isto é, 87 pessoas não farão nenhuma ligação.

**Exemplo 3.19.** Se 50 pessoas se inscrevem para disputar um torneio de ténis, quantas partidas teremos ao todo até se chegar ao campeão?

**Solução:** Podemos modelar esse problema como uma árvore binária, pois cada partida envolve dois jogadores (vértices), partindo das folhas para a raiz, como podemos ver na figura abaixo.



Observa-se que todos os participantes são folhas e as partidas são os vértices internos. Pelo colorário 3.2 item (b) Se  $T$  tem  $j$  folhas, ele tem  $k = \frac{j-1}{m-1}$ , como  $j = 50$  folhas e a árvore é binária,  $m = 2$ , teremos  $k = \frac{50-1}{2-1} = 49$  partidas a serem disputadas.

**Exemplo 3.20.** (ELETROBRAS 2013/BIORIO) As partidas de um novo jogo eletrônico são jogadas por dois adversários e sempre há um vencedor. Um torneio desse jogo será disputado online por 2.893 jogadores previamente inscritos. O torneio só tem partidas eliminatórias, ou seja, o vencedor de cada partida continua no torneio, e o perdedor é eliminado. Assim, esse torneio terá o seguinte número de partidas:

- a) 1.578
- b) 2.892
- c) 5.786
- d) 11.482
- e) 22.964

**Solução:** Pode-se modelar esse problema como uma árvore binária, pois cada partida envolve dois jogadores (vértices), partindo das folhas para a raiz. Como foi visto na solução do Exemplo 3.19, todos os participantes são folhas e as partidas são os vértices internos. Pelo corolário 3.2 item (b) Se  $T$  tem  $j$  folhas, ele tem  $k = \frac{j-1}{m-1}$ , como  $j = 2.893$  folhas e a árvore é binária,  $m = 2$ , teremos  $k = \frac{2.893-1}{2-1} = 2.892$  partidas a serem disputadas.

Neste trabalho foi apresentado aplicações para o Ensino Médio da Teoria dos Grafos. Procurou-se utilizar as propriedades dos grafos na resolução de problemas possíveis de serem modelados através de uma Contagem em Grafos. Para isso foi feito um levantamento dos quatro principais Princípios de Contagem: Princípios da Adição, da Subtração, da Multiplicação e da Divisão, e usou-se esses princípios para fundamentar alguns métodos de contagem. Os princípios e métodos de contagem por sua vez foram utilizados para mostrar algumas propriedades de contagem em grafos. Essas propriedades de contagem em grafos foram aplicadas na resolução dos problemas apresentados. Dentre esses problemas, pode-se citar com destaques:

1. A contagem de arestas em grafos completos para determinar:
  - O número de partidas jogadas em um torneio de xadrez mostrado no exemplo 3.4
  - O menor número de arestas que um grafo de 21 vértices deve ter para garantir que o mesmo é conexo, independente das disposições das arestas no grafo, mostrado no Exemplo 3.6.
  - A quantidade de triângulos formados por nove pontos distintos sendo que quatro pertencem a uma reta  $r$  e cinco a reta  $s$  sendo,  $r // s$ , mostrado no Exemplo 3.7.
2. A quantidade de caminhos e ciclos em grafos completos para determinar:

- O Problema do Caxeiro Viajante (P.C.V.) mostrado no Exemplo 3.8.
  - As permutações da palavra BRASIL mostrado, no Exemplo 3.10.
3. Apresentou-se um método de como obter, através de grafos grade, o número de soluções inteiras não negativas da equação  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m - 1$ .

Dessa forma, foi apresentada situações que podem ser resolvidas, no Ensino Médio, através de contagem em grafos.

Para finalizar, pensou-se que muitos problemas de contagem em grafos, que foram apresentados neste trabalho, poderão ser aplicados em sala de aula, por professores do Ensino médio, possibilitando novas abordagens na relação ensino aprendizagem e na resolução de problemas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aquino, Andréia Araújo de Farias. *Atividades de Modelagem Matemática Envolvendo a Teoria dos Grafos no Ensino Médio*. Dissertação (PROFMAT)-Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.
- [2] Lima, Elon Lages - *A Matemática do Ensino Médio-volume 2*. Quarta Edição Vol 2 SBM.
- [3] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. *Graph theory (graduate texts in mathematics)*. Ed. Springer New York, New York ,(2008).
- [4] Bassanezi, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. Ed. Contexto,(2002).
- [5] De Carvalho, Marco Antonio Garcia. *Teoria dos Grafos — Uma Introdução*, Limeira, SP, 2005. Acesso em: 08 fevereiro 2017.
- [6] Feofiloff, Paulo and Kohayakawa, Yoshiharu and Wakabayashi, Yoshiko. *Uma introdução sucinta à teoria dos grafos*, 2011. Disponível em <https://www.ime.usp.br/~pf/teoriadosgrafos/texto/TeoriaDosGrafos.pdf>. Acesso em: 07 fevereiro 2017.
- [7] Jurkiewicz, Samuel. *Programa de Iniciação Científica (PIC) da OBMEP*, 2009. Disponível em <http://www.obmep.org.br/docs/apostila5.pdf>. Acesso em: 12 fevereiro 2017.
- [8] Laszlo Lovasz and Jozsef Pelikan and Vsztergombi, Katalin. *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*. Ed. Springer, New York,(2003).

- [9] Lima, José Fábio de Araújo. *Modelagem e Resolução de Problemas por meio de Grafos: Aplicações no Ensino Básico*. Dissertação (PROFMAT)-Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana,(2014).
- [10] Lopes, Samuel Antônio. *Métodos Finitos em Matemática*, 2011. Disponível em: Acesso em: 05 abril 2017.
- [11] Manoel. *Matemática 2* 1ª Edição, 1995.
- [12] Tantau, Till. *The TikZ and pgf packages: Manual for version 2.10*, 2010. pgfmanual. (pdf). On-line manual available from <http://sourceforge.net/projects/pgf>. Acesso em: 12 março 2017.
- [13] Teixeira, Paulo Jorge M. *Contagem e codificação de Árvore*. Disponível em: <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/p.jorge.contagem.pdf>. Acesso em: 18 abril 2017.
- [14] Van Lint, Jacobus Hendricus and Wilson, Richard Michael. *A course in combinatorics*. Ed. Cambridge university press, New York,(2001).
- [15] Wilson, Robin J. *Introduction to Graph Theory*. Ed. Citeseer, Finland,(1996).
- [16] Secco, Matheus. *Grafos*. Disponível em: <http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/mini/>
- [17] Machado, Rodrigo. *Teoria dos Grafos e Análise Combinatória*. Disponível em: <http://www.inf.ufrgs.br/rma/grafos-combinatoria/lista-03.pdf/>
- [18] Shine, Carlos. *Combinatória*. Disponível em: <http://www.urantiagaia.org/educacional/matematica/combinatoria/Contagem.pdf/>