UNIVERSIDADE FEDERAL DO ACRE

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – CCET

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

WILSON LUIS UCEDA MELGAR

DIFERENTES CONSTRUÇÕES DO NÚMERO REAL

Rio Branco

2017

WILSON LUIS UCEDA MELGAR

DIFERENTES CONSTRUÇÕES DO NÚMERO REAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Acre, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Ronaldo Melo

Rio Branco

2017

WILSON LUIS UCEDA MELGAR

DIFERENTES CONSTRUÇÕES DO NÚMERO REAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Acre, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas, para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Banca Examinadora:

....

Prof. Dr. José Ronaldo Melo (orientador, UFAC)

....

Prof. Dr. Manoel Domingos (membro interno, UFAC)

....

Prof. Msc. Paulo Roberto de Souza (membro externo, IFAC)

Rio Branco, Acre_____de______________de 2017.

RESUMO

O coração deste trabalho é apresentar a passagem dos números racionais aos números reais, fazendo uso dos Cortes de Dedekind e das sequências de Cauchy. Além de explicitar como se deu o processo de aprendizagem dos conceitos. A demonstração de tais passagens foi feita pelo método axiomático, ou seja, foi demonstrada a existência de um corpo ordenado e suas características. Ademais, o trabalho versa ainda sobre a inserção do conceito de números reais às salas de aula do ensino médio, através de oficinas educativas. Para facilitação de aprendizado são indicadas três atividades distintas para cada oficina. E verifica-se como se deu esse processo em classes do ensino médio.

Palavras chave: Números reais, Cortes de Dedekind, Sequência de Cauchy e Oficinas educativas.

ABSTRACT

The heart of this work is to present the passage from rational numbers to real numbers, using the Dedekind Cuts and the Cauchy sequences. In addition to explaining how the learning process of the concepts occurred. The demonstration of such passages was made by the axiomatic method, that is, the existence of an ordered body and its characteristics was demonstrated. The work is also about the insertion of the concept of real numbers to the high school classrooms, making educational workshops. For learning facilitation, three different activities are indicated for each workshop. And it is verified how this process occurred in high school classes.

Keywords: Real numbers, Dedekind Cuts, Cauchy Sequence and Educational Offices.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

"A matemática é uma vasta aventura em ideias;
Sua história reflete alguns dos mais
Nobres pensamentos de incontáveis gerações"
DirkJ. Struik

Este trabalho de pesquisa desenvolveu-se na plataforma do Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática (PROFMAT) e inicia-se com uma abordagem dos números reais em suas estruturas algébrica e topológica. O processo de investigação partiu de um convite feito aos professores de matemática do ensino médio, no qual os professores deveriam procurar compreender e identificar em sua prática as possibilidades de diferentes meios de como construir reflexões sobre o processo de construção dos números reais.

A partir do aceite ao referido convite apresentou-se a 10 professores do ensino médio, que se propuseram a participar da pesquisa, o conjunto dos números reais e todas as suas propriedades com a argumentação de que esses elementos estão presentes de alguma forma na sala de aula, ainda que o tratamento formal possa não ser considerado, em sua totalidade.

Como elemento reflexivo realizou-se uma leitura, conjuntamente com os participantes sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática, especialmente onde destaca o papel da história da matemática no sentido de colaborar para a constituição de uma visão mais crítica dos objetos de conhecimento relacionado ao estudo dos números reais. Considerando este aspecto foi argumentado junto aos participantes que "a matemática foi uma ciência desenvolvida pela humanidade como uma ferramenta para auxiliar no dia a dia de todos, e com isso, gerando atitudes e valores mais favorável a todos frente aos saberes matemáticos**"** (LOPES E ALVES, 2017).

Assim, apresentado a problemática que poderia conduzir a pesquisa, ofereceu-se um conjunto de atividades que poderia desenvolver-se através de oficinas nas quais foi sugerido um processo investigativo no qual estivesse presente a construção dos números reais através de uma ligação entre o formalismo conceitual e a matemática vivenciada na escola. Acreditando-se que essa estratégia poderia incentivar tanto os professores envolvidos com o trabalho investigativo quanto os alunos desses professores no Ensino Médio, a identificar, comparar, relacionar e compreender os elementos necessários a construção dos números reais.

Essas estratégias foram propostas no sentido de colaborar com uma reflexão que possa colaborar com a formação contínuada do professor de matemática, pois se tornou comum admitir que a prática de pesquisa assim como a formação do professor de matemática não são discutidas, a partir de relações envolvidas na dinâmica da sala de aula, na validade das questões matemáticas presentes no cotidiano e na busca de uma melhor compreensão das propostas para o ensino das "**diferentes construções do número real**" (BRASIL, 1998).

Em nossa compreensão a matemática tem sido prestigiada como uma ciência fantástica oferecendo uma extensa instrumentação para a construção do pensamento, sobretudo matemático. É constituída de um determinado senso lógico indispensável como instrumento intelectual para o desenvolvimento humano. Assim, a questão fundamental a ser respondida nesta pesquisa será compreender como as diferentes construções dos número reais poderá auxiliar na formação contínuada do professor de matemática e em consequência no desenvolvimento de suas ações em sala de aula.

1 ASPECTO HISTÓRICO

Apesar de todas as menções sobre as várias possibilidades de trabalhos escritos acerca do início da maravilhosa história da matemática, até hoje é quase impossível determinar quando se deu os primeiros ensaios sobre o entendimento da vida da matemática. No entanto, se lança mão dos vários elementos questionadores, como: Onde e quando foi que essa fantástica aventura da inteligência humana iniciou? Digamos na Ásia, na Europa, ou quem sabe em algum lugar da África? Na época do homem de Cro-Magnon, há mais de trinta mil anos? De repente no tempo do homem de Neandertal, há quase cinquenta mil anos? Ou ainda há cem mil anos, talvez uns quinhentos mil, quem sabe, 1 milhão de anos, ou mais? Na verdade, não sabemos de quase nada, pois vários acontecimentos se perderam em suas inúmeras noites do tempo pré-históricos, e deles não restam descrição alguma (IFRAH, 2005).

Segundo Ifrah (2005) a história milenar dos números nos instiga desde muito tempo, como, por exemplo, desde a remota e imensurável idade da pedra a algo mais recente e estrondoso a era dos computadores. O que coloca uma fenda vaga de reflexão e preocupação de como representar e quantificar dados em suas inúmeras possibilidades. Por vezes, hesitante e descontínua, são fatos da história de acontecimentos tão revolucionário quanto o domínio do fogo, a invenção da roda, a descoberta da eletricidade etc. E, tudo isso, se reflete em números que hoje conhecemos e que nos instiga cada vez mais em promover estudos para entender de forma mais clara e concisa do mundo infinito da matemática.

Para Ifrah (2005, p. 45):

> O uso de algarismos que conhecemos, tais como, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 são apresentados de forma muito clara, como se fosse algo como andar, cantar ou falar. Porém não podemos esquecer que o aprendizado do manejo dos números se trata na verdade de algo que foi inventado e deve ser transmitido como algo que se fez, faz e fará de forma organizada.

A apresentação de um conhecimento pronto e acabado pode não favorecer o estudante a construir o conhecimento matemático e a pensar matematicamente. O formalismo de regras e de procedimentos, herança da tendência formalista moderna, tem estado presente na educação brasileira. Para essa tendência, Fiorentini (1995, p. 14) esclarece que:

> O ensino de um modo geral contínua sendo acentuadamente autoritário e centrado no professor que expõe/demonstra rigorosamente tudo no quadro negro. O estudante, salvo algumas poucas experiências alternativas, contínua sendo considerado passivo, tendo de reproduzir a linguagem e os raciocínios lógico-estruturais ditados pelo professor.

Na escola há interesse por muitos temas, em todas as disciplinas, e conhecer a raiz e desenvolvimento dos temas dos quais se gosta é uma curiosidade natural de qualquer aluno, inerente ao ser humano. Todavia, quando se menciona os conhecimentos matemáticos, parece que não há mais nada a ser “descoberto” ou “inventado”. Por isso, esses conteúdos são trabalhados como uma ideia de que sempre tiveram a mesma configuração, ou seja, abstrata e sem contextualização, na maioria das vezes tratada nas escolas (LOPES e ALVES, 2014).

Os conhecimentos matemáticos não nasceram sistematizados, com algoritmos prontos que podem ser aplicados em situações com ou sem significado real, mas sim, construções humanas originadas na necessidade de determinar uma situação concreta ou podem ter sido desenvolvidos, a partir de curiosidades de pessoas interessadas no assunto. Dessa forma, acredita-se que o tempo pode ser uma ferramenta favorável que poderá facilitar sua compreensão e significação dentro do espaço escolar (LOPES e ALVES, 2014).

A escola deve estimular meios que intensifique o trabalho na condução de um processo de ensino e aprendizagem, que considere de antemão o conhecimento prévio que os estudantes possuem para que, a partir deles e sobre a própria experiência, possam construir novos conhecimentos (CRUZ, 2011).

Segundo Cruz (2011, p. 113-114):

> A matemática é reconhecida como parte do cotidiano e elemento importante para compreensão de mundo. Afinal, o mundo está rodeado de tabelas, de gráficos e de informações diversas que são apresentadas em termos matemáticos, as quais são compreendidas e usadas como meio de comunicação. Então, faz-se necessário preparar os estudantes para uma sociedade tão complexa, tornando-os capazes de pensar sobre relações numéricas e espaciais, compreender e se expressar sobre essas relações, desenvolvendo uma consciência crítica para serem reconhecidos como membros desta sociedade.

Muitos professores de história da matemática trabalham com os temas como trabalhos para seus alunos. Em seguida, passa uma lista de exercícios, dispostos naquela unidade. Cada tema desses deverá exigir dos alunos elementos, para ser desenvolvido, ou seja, outras leituras do texto trabalhado, assim forçando o aluno a se aprofundar na literatura arrolada na bibliografia do capítulo. Muitos desses objetos tratados em sala resultaram em excelentes artigos e diversos deles, escritos por alunos e publicados em jornais matemáticos e pedagógicos (EVES, 2004).

Eves (2004, p.76) esclarece que o tema história da matemática deveria ser melhor tratada nas graduações de licenciatura em matemática, e:

> Positivamente, não é fácil cobrir a história da matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos num curso semestral de três horas-aula semanais; isso requereria muita leitura por parte do aluno e um desprezo quase que completo do problema material. O ideal seria oferecer-se um curso anual sobre o assunto.

Os professores de matemática das escolas de Ensino Médio tem se preocupado, em geral, com o ensino de cálculos, processos lógicos, geometrias, sem preocupar-se em dar ênfase a uma problematização dos temas da matemática que estejam voltados para o contexto histórico e social, considerando, sobretudo, a lógica do desenvolvimento da matemática. Acreditamos que uma mudança de comportamento desses professores poderá mudar esse contexto ao se preocuparem com a contribuição que os alunos poderiam fornecer em um determinado tema da matemática, onde os cálculos matemáticos passariam a ser um simples, mas importante meio para atingir um determinado fim (CRUZ, 2011).

1.1 A caracterização numérica em relação aos PCNs para o ensino médio

Para as atividades desenvolvidas no ensino médio – que faz alusão à abordagem numérica – é contemplada (no conteúdo) números e operações: naturais, racionais, irracionais, reais; sendo estas desenvolvidas de acordo com as finalidades do ensino de matemática. Por fim, essa fase de estudo tem como objetivos conduzir o aluno a:

> Compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral; • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas; • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade; • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo; • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver

> a compreensão dos conceitos matemáticos; • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática; • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo; • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações; • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação (BRASIL, PCN-EM, 1998, p. 119).

As afinidades numéricas envolvidas nos PCNs de matemática do Ensino Médio e do Ensino Fundamental, não conseguem suplantar todos os desafios que se apresentam nessas fases de ensino. No entanto, são tentativas para conduzir e desenvolver o fazer pedagógico em suas extensões processual e diagnósticas. O realizar pedagógico é tratado como parte essencial do processo de ensino e aprendizagem, permitindo assim, corrigir, detectar, apreciar e instigar projetos na área bem-sucedidos (CRUZ, 2011).

Os entendimentos básicos e fundamentais que se desenvolvem a respeito dos números naturais, por exemplo, iniciam-se bem cedo, pelas crianças, as quais dão sentidos aos números, principalmente, em atividades simples de sala de aula, como a contagem. Assim como, as operações matemáticas, muito fortemente trabalhadas em outras fases do ensino, trazem correlações com o dia a dia desse aluno.

Segundo Cruz (2011, p. 48):

> As quatro operações básicas da matemática, em geral, são adequadamente formadas nos cursos de formação de professores das séries iniciais, sendo, muitas vezes, desconsiderados num curso de licenciatura na formação do professor de matemática, indicando uma acentuada separação na formação docente desse ciclo de ensino, com a formação do professor que leciona nas séries finais do ensino fundamental e no ensino médio.

Moreira e David, 2005 *apud* CRUZ, 2011 argumentam:

> Ainda que o licenciado em matemática, de um modo geral, não trabalhe com alunos das quatro séries iniciais do ensino fundamental, acreditamos que a separação acentuada existente entre a formação do docente desse ciclo e a do professor que leciona nos outros ciclos do ensino fundamental e médio é equivocada, pois pode contribuir para intensificar a descontinuidade do processo de transição das séries iniciais para a quinta série e seguintes. Isso, por si só, já coloca uma demanda no sentido de que o licenciado conheça a matemática que é trabalhada nas séries iniciais (MOREIRA e DAVID, 2005 *apud* CRUZ, 2011, p. 50-51).

Reconhecer os números e as operações matemáticas decorre da compreensão dos significados de números naturais, do sistema de numeração decimal e pela identificação dos números inteiros e racionais em distintos argumentos (BRASIL, 1998).

Para essa concepção, Moreira e David (2005) *apud* CRUZ (2011), dizem:

> No desenvolvimento de cada etapa desse processo de expansão dos conjuntos numéricos, o professor terá que, por um lado, conhecer profundamente — do ponto de vista da matemática escolar — aquilo que os alunos consideram num dado momento, como o universo (grifo do autor) numérico, e, por outro, lidar com dúvidas e concepções incorretas dos alunos, as quais vão se referir tanto ao "novo" conjunto, mais amplo, como também ao conjunto mais restrito, aquele supostamente ―conhecido‖, que está sendo ampliado (MOREIRA e DAVID, 2005, p.53).

1.2 A importância de estudar os números reais

No trabalho de pesquisa de Moreira *et al*, (2005) ficou claro a necessidade de se trabalhar os números reais como um conjunto de elementos que se relacionam segundo a estrutura de Corpo Ordenado, pois há outras exposições para estes números, que Moreira e David, 2005 *apud* CRUZ, 2011 destacam:

> Número real é um corte de Dedekind nos racionais, isto, é um par (A,B) de subconjuntos não vazios e complementares de Q, tais que, A não possui elemento Máximo. Nesta construção, todo elemento de A é cota inferior para B e todo elemento de B é cota superior para A. - Número real é uma classe de equivalência de intervalos interligados de sequências de Cauchy de números racionais, a qual é válida a relação: duas sequências são equivalentes se e somente se, a diferença entre elas converge para zero. - Número real é uma classe de equivalência de intervalos racionais encaixantes, segundo a relação de equivalência [an, bn] ~[cn, dn] se e somente se as sequências de números racionais (an – cn) e (bn – dn) convergem para zero (MOREIRA et al, 2005, ´p. 78).

Em termos da educação matemática escolar, o conjunto dos números reais é constituído para dar solução a problemas vistos como insuperáveis no âmbito dos números racionais. Então o conceito de números reais, de uma forma geral, é tratado nos cursos de licenciatura, desvinculado do processo histórico no qual foi estabelecida a sua formalização. A citação de textos históricos de livros da história da matemática que fazem alusão sobre a formalização do conceito de número real, só foram relatados a partir dos séculos XVII e XIX (PASQUINI, 2007).

2 CONSTRUÇÃO DO CORPO R

No século XIX era evidente a não completude dos números racionais, visto a incomensurabilidade de alguns segmentos, como a diagonal de um quadrado. Tal fator, aliado a competência de importantes matemáticos da época, como George Cantor, Richard Dedekind, Karl Weierstrass e Charles Méray, tornaram possível uma fundamentação concreta dos números reais.

Somente as teorias dos números reais dos matemáticos Dedekind e Cantor permaneceram. O diagrama a seguir engloba os principais aspectos da teoria de Dedekind (ÁVILA, 2000).

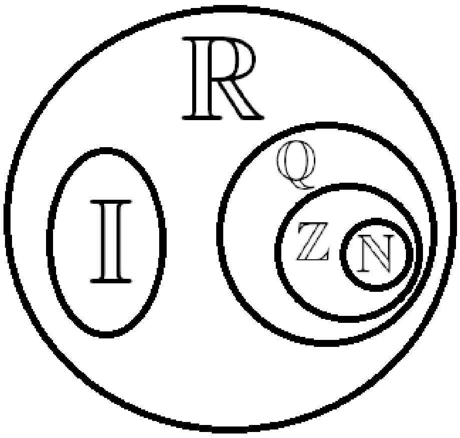

Figura 1 - Conjuntos numéricos

2.1 CONSTRUÇÃO NO CORPO R – CORTE DE DEDEKIND

O matemático Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), aluno de Gauss ([1777-1855], matemático, astrônomo e físico alemão, considerado o príncipe da matemática), e também de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet ([1805-1859], matemático alemão a quem se atribui a moderna definição formal de função), teve sua carreira como professor iniciada em 1858, quando ministrou Cálculo Diferencial em Zurique. Posteriormente, em 1862 transferiu-se à sua cidade natal, Braunschweig (SAMPAIO, 2008).

Ele, na tentativa de demonstrar que uma função crescente e limitada possui um limite, percebeu uma deficiência na fundamentação dos números reais. Um estudo sobre a aritmética da continuidade levou Dedekind à proposição dos denominados “cortes de Dedekind”, que teve por inspiração a Teoria das Proporções do filosofo e matemático grego Eudoxo (GUIDORIZZI, 1985).

2.1.1 Cortes de Dedekind

No processo de construção de sua teoria Richard Dedekind percebeu a definição, a relação de ordem e as seguintes operações no corpo R (ÁVILA, 2006). Estas detalhou-se abaixo.

Definição: Um conjunto α de números racionais é considerado um corte se satisfizer as seguintes condições:

a) α ≠ Ø e α ≠ Q

b) Se a ∈ α e b < a (b número racional), então b ∈ α.

c) Em α não existe um racional máximo.

Exemplo: O conjunto $B = \{x \in Q | x < \frac{5}{7}\}$

a) B ≠ Ø, já que 0 ∈ B e B ≠ Q.

b) Seja a ∈ B e b < a, assim, b < a < $\frac{5}{7}$, logo, b < $\frac{5}{7}$, portanto, b ∈ B.

c) Não existe um valor máximo no conjunto B, visto que pode-se aproximar do valor $\frac{5}{7}$ tanto quanto se queira.

Logo, o conjunto B é um corte.

Exemplo: O conjunto $C = \{x \in Q | -4 < x < \frac{8}{7}\}$

a) C ≠ Ø, já que –2 ∈ C e C ≠ Q.

b) Seja $-4 < a < \frac{8}{7}$ e b < a. Tomemos b = –5 e a = 0, é valido afirmar que b < a, no entanto b não está contido em C.

Logo, o conjunto C não é um corte.

A partir dessa definição, Dedekind notou que a existência de cortes sem elementos de separação no conjunto dos números racionais, pode ser considerada a expressão aritmética da descontinuidade. Então, adiciona-se os “novos números”, conjunto dos números irracionais, obtendo assim um conjunto maior, denominado Corpo R, ou conjunto dos números reais.

O conjunto Q não era tido como um continuo numérico, ao passo que o conjunto R pode ser definido dessa forma.

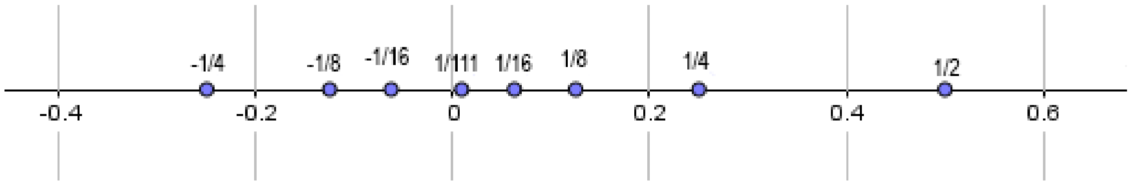

Figura 2 - Reta real

2.1.2 A relação de ordem

A relação de ordem não funciona de forma tão simplista, adicionando um conjunto ao outro, já que o novo corpo R, precisa manter a linha de estrutura dos corpos já conhecidos (naturais, inteiros e racionais). É importante ainda, que não haja conflitos, entre o corpo R e o corpo Q, já que as noções estabelecidas nos números racionais precisam ser tidas como verdadeiras.

Para isso, sejam dois números quaisquer α e β, caracterizado pelos cortes que determinam o conjunto Q, logo $\alpha = (E_1, D_1)$ e $\beta = (E_2, D_2)$. Diz-se que se α=β, temos que $E_1 = E_2$ e se α < β, então E_1 é um subconjunto de E_2. Portanto a ordem é preservada (LANDAU, 1960.).

2.1.3 Operações no corpo R

Definição: Sejam α e β dois cortes quaisquer, a soma α + β é o corte

$$\rho = \beta + \alpha = \{r = p + q | p \in \alpha \; e \; q \in \beta\}$$

Provaremos a seguir que ρ é um corte:

a) ρ ≠ Ø. Pois α ≠ Ø e β ≠ Ø, logo, os elementos de α e β estão contidos em ρ.

b) O conjunto ρ não comporta todos os racionais. Visto que α + β ≠ Q.

c) Seja r ∈ ρ. Logo r = p + q, onde p ∈ α e q ∈ β: Sabemos que em α e nem em β; não existe racional que seja máximo. Assim, se p ∈ α, então existe s ∈ α tal que s > p: Por outro lado, se q ∈ β, então existe t ∈ β tal que t > q: Como s ∈ α e t ∈ β, s + t ∈ ρ e s + t > p + q: Logo, em ρ não existe racional máximo.

Provado isso, partiremos para a propriedade associativa, comutativa, a existência de um elemento neutro, existência do oposto da soma:

Sejam α, β e γ cortes quaisquer; então se verifica que:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Para o conjunto de cortes pode-se definir o elemento neutro da soma o: $0^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$. Provaremos então que seja α um corte; então α + 0* = C.

Seja r ∈ α e s ∈ α tal que s > r; o que é possível visto que α não possui máximo. Seja q = r − s: Logo q < 0; q ∈ 0^* e r = s + q; daí r ∈ α +0^*: E α ⊂ α +0^* e, portanto α +0^* = α.

A propriedade do inverso aditivo deve garantir que para cada corte β exista o corte – β, considerada o inversa aditivo. Também pode ser falado que α+β = 0*.

Seja α um corte qualquer. Consideremos β = {p ∈ Q|− p ∈ M_α e −p ≠ min M_α}. Foi verificado que β é um corte, onde M_α é o conjunto das cotas superiores de α e min M_α é o mínimo de M_α. Agora verificaremos que α+β = 0*:

Seja p ∈ 0∗: Então p < 0; ou seja −p > 0, existem s ∈ α e r ∈ M_α, r ≠ minM_α; tais que r−s = −p o que nos dá s+(−r) = p. Como −r ∈ β e s ∈ α; então p ∈ α + β.

Provando assim que α+β = 0*.

Na multiplicação os cortes de Dedekind se definem da seguinte forma:

Definição: Se $\alpha \geq 0'$ e $\beta \geq 0'$ é o corte do produto $\alpha \circ \beta = 0' \cup \{r * s \setminus, r \in \alpha \wedge s \in \beta \wedge r > 0, s > 0\}$

Ou seja, dizer α e β são maiores que zero se tem números racionais positivos, e a multiplicação de α e β é a união da cortadura 0´ que inclui todos os racionais negativos e o conjunto de todos os números racionais produtos de todos os positivos de ambas cortaduras (ÁVILA, 2006).

Toma-se como exemplo as cortaduras:

$$\alpha = \{r, tal\ que\ r\ seja\ racional, r < 5\}$$

$$\beta = \{p, tal\ que\ p\ seja\ racional, p < 7\}$$

$$\alpha * \beta = \{x, tal\ que\ x\ é\ um\ racional, x < 35\}$$

Com toda cortadura C associa-se a cortadura valor absoluto $|C|, |C| > 0''$; para dois cortes quaisquer define-se α*β como:

$$\alpha \circ \beta\ se\ \alpha \geq\ 0'\ e\ \beta \geq 0'$$

$$-(|\alpha| * \beta) \; se \; \alpha < 0' \; e \; \beta \geq 0'$$
$$-(\alpha * |\beta|) \; se \; \alpha \geq 0' \; e \; \beta < 0'$$
$$(|\alpha| * |\beta|) \; se \; \alpha < 0' \; e \; \beta < 0'$$

E o produto de cortes, assim definido, gera outro corte cumprindo as leis de sinais pra multiplicação.

O conjunto de cortes formados por números racionais e por números irracionais é denominado conjunto dos números reais.

2.3 CONSTRUÇÃO NO CORPO R – CLASSES DE EQUIVALÊNCIA

No processo de construção dos reais Georg Ferdinand Ludwing Philip Cantor ([1845 –1918], matemático, físico e filosofo russo) contribuiu sobremaneira para o avanço teórico deste campo. No ano de 1863, ingressou na Universidade de Berlin e em 1867 recebeu o título de doutor depois de ter apresentado um trabalho sobre aritmética de Gauss e a teoria de números de Legendre (ÁVILA, 2000).

Sua carreira como professor universitário teve início na Universidade de Halle, Alemanha, onde publica seus primeiros trabalhos sobre teoria de números. Em 1872, publica sua teoria de números irracionais, na qual Weierstrass e Dedekind foram grandes defensores.

Cantor realizou a construção destes números sobre a base dos números racionais através de Cauchy, ele define o limite de uma sucessão fundamental como um número racional A, tal que $\lim_{n\to\infty}(A - x_{n+r}) = 0$; depois fez a extensão do conceito de limite onde A é um número irracional; E assim, com base nas sucessões fundamentais chega a demostrar que o conjunto de números reais formam um corpo ordenado.

É possível evidenciar que o conjunto dos números racionais não é completo, pois existem muitas sucessões de números racionais que não são convergentes a um destes números, como (ÁVILA, 2006):

$$a_n = 1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}$$
$$a_1 = 1$$
$$a_2 = 1 + \frac{1}{1 + a_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 + a_2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1 + a_3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = \frac{17}{12} = 1{,}416$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{1 + a_4} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{17}{12}} = \frac{42}{29} = 1{,}4137$$

E assim sucessivamente, nota-se que essa sequência converge ao número $\sqrt{2}$. Esses buracos no conjunto R, foram preenchidos por Cantor com as sucessões de Cauchy.

Na metodologia de Cantor, primeiro mostra-se que o conjunto de sucessões de Cauchy forma com as operações usuais de soma e produto entender eles assim:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

$$\{a_n\} * \{b_n\} = \{a_n * b_n\}$$

Parece não ser difícil demonstrar que o conjunto S de todas as sucessões fundamentais ou de Cuachy formadas por números racionais, junto com as operações de soma e produto de maneira usual entre sequências formam uma estrutura de anel. O conjunto R tem estrutura de corpo único. Decorre disto a seguinte proposição (SPIVAK, 1965).

Proposição: Entre dois números reais distintos, sempre existe um número racional.

Se x e y dois números reais, com x < y, deve-se mostrar que existe um racional r tal que: x < r < y. Ao tomar $x = \{a_n\}$ $y = \{b_n\}$, $\{a_n\} < \{b_n\}$ implica que $\{a_n\} - \{a_n\} < \aleph$. Sempre que $n > n_0$ para algum inteiro n_0.

Como as sequências $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ pertencem ao conjunto das sequências Ω, porém se elas forem de Cauchy; então existe um inteiro positivo $m_0 > n_0$ para o qual podemos dizer que $|a_n - a_m| < \frac{e}{4}$, e $|b_n - b_m| < \frac{e}{4}$, sempre que m, n sejam maiores que m_0. Então se tem o número $c = \frac{1}{2}(a_{m0} + b_{m0})$, então para todo n > m_0. (DUTRA, 2014)

$$c - a_n > \frac{1}{2}(a_{m0} +, b_{m0}) - a_{m0} - \frac{e}{4} = \frac{1}{2}(b_{m0} - a_{m0}) - \frac{e}{4} > \frac{e}{4}$$

$$b_n - c > b_{m0} - \frac{e}{4} - \frac{1}{2}(a_{mo} +, b_{mo}) = \frac{1}{2}(b_{m0} - a_{m0}) - \frac{e}{4} > \frac{e}{4}$$

Portanto, é válido $\{a_n\} < \{c_n\} < \{b_n\}$.

Então o campo R é completo, e ainda todo conjunto cotado superiormente tem supremo e que todo conjunto cotado inferiormente tem ínfimo. Então, conclui-se o sistema de números reais construídos a partir de sucessões de Cauchy de números racionais, cumpre todas as propriedades que o conjunto dos números reais definidos axiomaticamente.

2.4 EQUIVALÊNCIA ENTRE AS DIFERENTES CONSTRUÇÕES DO CORPO R

Por caminhos diferentes Richard Dedekind e George Cantor desenvolveram a construção dos números reais. Considerando este aspecto podemos questionar sobre o que existe de equivalência entre essas teorias? As teorias elaboradas por esses matemáticos representam o mesmo conjunto? Ou seja, existe um só conjunto que cumpre os axiomas de corpo, ordem e completude? A resposta é: depende. Pois ao considerar o conjunto apenas como objetos, a resposta será negativa, mas a resposta será positiva se pensarmos nos objetos acompanhados da sua estrutura e composição (PELLEGRINI, 2013).

Por exemplo, tomando-se: F = {(x,x),x ∈ R}, com as operações de soma (+) e o produto (*) definidas da seguinte maneira:

$$(x,x) + (y,y) = (x + y, x + y)$$

$$(x,x) * (y,y) = (x * y, x * y)$$

Assim, analisando o conjunto de pares ordenados, observa-se que não estão na reta horizontal tomada para os números reais, no entanto demostra-se que efetivamente cumpre todos os axiomas de um corpo ordem e completude. Por exemplo, analisando o conjunto A, que tem os mesmos elementos que se encontram na reta real, mas que os elementos de A, estão numa reta inclinada 45º graus.

Agora pode se pensar que existem diferentes corpos que são ordenados e completos, mas que na sua estrutura e composição são idênticas aos números reais, ou seja, matematicamente quer dizer que dois corpos ordenados completos são equivalentes, se existe um isomorfismo entre eles.

Os corpos isomorfos podem considerar-se como essencialmente idênticos, ou seja, qualquer propriedade existente em um, também se existe no outro (PEREIRA, 2014).

Para demonstrar que dois corpos ordenados e completos (R) e A são isomorfos, o primeiro passo a se seguir é a construção de uma função denominada isomorfismo f de (R) em A, que siga as seguintes propriedades:

a) Se $x \neq y$, logo $f(x) \neq f(y)$

b) Se $z \in F$, logo $z = f(x)$ para algum $x \in (\mathbb{R})$.

c) Se x, y estão em($\mathbb{R}$), então:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y)$$

d) Se $x < y$, logo $f(x) < f(y)$

Deve-se notar que as operações binarias $(x+y)$ e $(x \circ y)$ estão definidas no corpo R e as operações$f(x+y) = f(x) + f(y)$ e $f(x \circ y) = f(x) * f(y)$ no corpo A, no livro de Michael Spivak, utilizam e mostram a equivalência com a seguinte função: f: R→A. E ainda tal definição foi baseada nos cortes de Dedekind, visto que explicita que número real está determinado pelos números racionais menores que ele.

No texto "Princípios de análises matemática", Lines (2002) difere do autor citado acima, na definição de número irracional, já que opta por ser semelhante às sequências de Cauchy, ou seja, sendo x um número irracional, sua aproximação é dada por uma sucessão que converge ao seu valor.

Em se tratando dos textos acima, é nítido ver a demonstração geral na qual efetivamente todo corpo ordenado e completo é isomorfo ao conjunto de números reais.

3 PROPOSTA DIDÁTICA

3.1 INTENÇÃO DA PROPOSTA

A matemática no Brasil é vista, por grande parte dos alunos, como uma matéria complicada e desnecessária. Essa concepção é decorrente de um processo histórico que vincula o estudo matemático à abstração pura e às fórmulas sem nenhuma aplicação aparente no mundo real. Geralmente, o professor de matemática apresenta os conceitos e as ideias a partir de uma síntese sobre o conhecimento acumulado historicamente. É claro que a abstração é uma ferramenta importantíssima no pensar matemático, afinal, não se encontra um número “3” sentado numa praça, e também não se pode convidar a “soma” para tomar um café. No entanto é perfeitamente possível construir um pensamento lógico-matemático para a melhor compreensão de conceitos do mundo real (MAIA, 2001).

A matemática ainda enfrenta outro problema no Brasil. Estima-se que 27% da população brasileira, que chegou ao Ensino Médio ou ao início da faculdade, não consegue compreender textos simples – dados de 2012 do Instituto Paulo Montenegro –, o que torna complicado o estudo de questões matemáticas, pois, várias vezes, o aluno não consegue nem compreender o que é esperado dele num simples problema (BRASIL, 2012).

Na tentativa de colaborar com o debate na busca de soluções para essa problemática, o estudo que desenvolveremos através de oficinas terá por objetivo, oferecer ferramenta de aplicação nas outras disciplinas curriculares, ou no cotidiano escolar, e desenvolver no aluno as habilidades de pensamento lógico. Assim, após um diagnóstico mais preciso no sentido de identificar as dificuldades dos participantes desta pesquisa, sobretudo em relação a formação de conceitos, domínios nas definições sobre números reais, em se tratando de densidade, totalidade e aproximação numérica dos números irracionais, pretende-se, realizar variadas atividades didáticas para introdução ao estudo dos números reais de forma reflexiva. Acreditamos que um planejamento adequado que parta do contexto social em que professores e alunos do Ensino Médio estejam comprometidos poderá favorecer a compreensão deste importante campo da Matemática (CRUZ, 2011).

No ambiente acadêmico e escolar, o ensino por meio de oficinas está ganhando espaço, até mesmo em instituições renomadas como o IME (Instituto

Militar de Engenharia), onde através do CAEM (Centro de Aperfeiçoamento do Ensino da Matemática), professores aprendem a ensinar diversos assuntos de ciências exatas. O COBENGE (Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia) apresentou em 2011 as oficinas matemáticas como uma solução à dificuldade de aprendizagem. O EIEMAT (Escola de Inverno de Educação Matemática), que ocorre em conjunto com o Encontro Nacional Pbid Matemática, recebe diversos trabalhos tratando sobre oficinas e seu ótimo resultado no ensino da matemática, ou seja, é algo viável e que instiga a curiosidade do aluno sobre o tema.

As oficinas aqui propostas são uma forma de melhorar e incentivar o estudo das ciências exatas no meio escolar e universitário.

3.2 A METODOLOGIA

A elaboração do trabalho baseou-se nas informações teóricas coletadas; obtidas por meio de uma revisão bibliográfica, realizada em revistas, livros e artigos. Posteriormente, aplicou-se oficinas de matemática sobre os elementos das construções dos números reais. Nessas oficinas executou-se em três fases as seguintes atividades:

- ✓ de aprofundamento;
- ✓ de aplicação;
- ✓ complementares.

Depois procedeu-se a análise dos desempenhos dos alunos.

3.3 OBJETIVO DAS OFICINAS

O principal objetivo das oficinas é criar bases sólidas dos conteúdos tratados nesse trabalho, como por exemplo, o conceito da diferença entre números racionais e irracionais, algo que pode ser feito geometricamente ou algebricamente, da forma que preferir o educador.

A oficina 1 tem por objetivo que o aluno seja capaz de identificar as magnitudes comensuráveis, números racionais, e as magnitudes incomensuráveis, números irracionais.

A oficina 2 tem por objetivo fazer com que o estudante compreenda que qualquer número real pode-se aproximar a uma representação decimal, caso seja racional, se faz uso do algoritmo de divisão e para os números irracionais através de sucessões ou frações contínuas.

Na oficina 3 o objetivo é aproximar de uma maneira mais exata a indicação de qualquer número racional na reta e alguns números irracionais construíveis. Aqui também é indicado trabalhar o conceito de bijetividade.

A oficina 4 tem por objetivo a dedução do número que representa a relação entre a longitude e o diâmetro de toda circunferência, o número π.

Na oficina 5 trabalha-se o número de ouro, representado por ϕ, utiliza-se de artifícios geométricos ou aritméticos para obter aproximações do número ϕ.

Com a oficina 6 o objetivo é que o estudante compreenda o que significa que o conjunto dos números reais seja denso, ou seja, o aluno precisa compreender que entre dois números reais, há outro número real.

3.4 FORMAS DE AVALIAÇÃO

O docente deverá analisar qual o nível de entendimento possuído por seus alunos em cada um dos tópicos seguintes (BORIN, 1996).

a) Análise de representações decimais dos números reais e diferenciação entre racionais e irracionais;

b) Reconhecimento da falta de densidade dos números racionais através de métodos, geométricos e algébricos;

c) Compreensão do uso de notações numéricas especificas dada;

d) Saber interpretar geometricamente o problema;

e) Fazer uso das técnicas de aproximação em processos infinitos numéricos.

4 AS OFICINAS

4.1 OFICINA 1 - MAGNITUDES COMENSURÁVEIS E INCOMENSURÁVEIS

OFICINA 1	
Público - alvo	1º ano do Ensino Médio
Recursos necessários	Quadro branco e pinceis
Objetivo da oficina	Identificar as magnitudes comensuráveis e incomensuráveis.

Quadro 1 - Oficina 1

4.1.1 Atividade de aprofundamento

a) O docente ficará encarregado de levar quatro segmentos (pedaços de madeira, papelão, plástico) de comprimento *A = 30* cm, *B = 5 cm, C = 7 cm* e *D = 9 cm*, e o aluno deverá fazer uma comparação relativa, calculando a quantidade de vezes o elemento B cabe dentro do elemento A.

b) Comparar a diferença de comprimento entre os segmentos C e D. Posteriormente quantificar o elemento A por meio do elemento C e D, exercitando assim, a ideia de fração.

4.1.2 Atividade de aplicação

1. Se dois segmentos estão em razão 3 a 5 e um deles mede 15 cm, quanto mede o segundo segmento? Quantas respostas possíveis existem?

2. Quais condições devem cumprir dois segmentos para que sua razão seja de $\frac{1}{2}$? Quantos segmentos existem dessa forma?

3. Quais condições devem cumprir dois segmentos para que sua razão seja de $\frac{3}{5}$? Quantos segmentos existem dessa forma?

4. Se você possui uma lâmina que mede 50 cm x 30 cm e a dividiu em quadrados de modo que o lado β desses quadrados foi o máximo possível. Qual valor de β encontrado?

4.1.3 Atividades complementares

Pesquisar sobre o descobrimento de Hippasus de Metapontun e as consequências históricas de suas descobertas.

4.2 OFICINA 2 - AS DÍZIMAS DE UM NÚMERO REAL

OFICINA 2	
Público - alvo	1º e 2º ano do Ensino Médio
Recursos necessários	Quadro branco e pinceis
Objetivo da oficina	Verificar diferença de expansão entre números racionais (dízimas periódicas) e irracionais (dízimas não periódicas).

Quadro 2 - Oficina 2

4.2.1 Atividade de aprofundamento

As dízimas decimais de um número racional

Um numero é dito racional se sua representação puder ser construída por $\frac{a}{b}$ sendo a e b números inteiros e b ≠ 0. (As operações de soma, multiplicação e simétrico existem no conjunto Q).

E ainda um número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado de forma decimal ao dividir-se o numero a pelo inteiro b, e o resultado dessa divisão pode ser de dois tipos (GUIDORIZZI, 1985):

a) Um resultante decimal r com quantidade finita de algarismos, sendo esses diferentes de 0, é denominado decimal exata.

Os exemplos a seguir representam o tipo de número citado acima e sua expansão decimal.

$$\frac{39}{100} = 0{,}39 = 0 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} \qquad e \qquad \frac{5128}{1000} = 5{,}128 = 5 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{8}{1000}$$

b) Um resultante decimal r com quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, é denominada dízima periódica.

Os exemplos a seguir representam o tipo de número citado acima e sua expansão decimal.

$$\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0 + \frac{1}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \frac{6}{10000}\ldots$$

Os números que aparecem antes do período (números que se repetem infinitamente), são denominados ante período. No exemplo acima 1 é o ante período.

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ldots = 0 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{5}{10000}\ldots$$

As dízimas decimais de um número irracional

Há números cuja representação decimal resulta em uma dízima não periódica. Esses são os denominados números irracionais, uma classe que está contida nos números reais. Os exemplo mais famosos de números irracionais são, π e $\sqrt{2}$ (GUIDORIZZI, 1985).

Para realizar aproximação do valor de um número irracional, são utilizadas as duas técnicas.

Primeira: o método da sucessão, diz que um conjunto de números que seguem padrões pré-estabelecidos são denominados sucessões numéricas e tais conjuntos possuem características especiais, como a sequência de Leonardo Fibonacci, que foi um matemático de origem italiana, tido como o primeiro grande matemático europeu da Idade Média. A sucessão de recorrência é caracterizada pela necessidade de possuir um termo anterior ao termo que quer-se encontrar, como por exemplo:

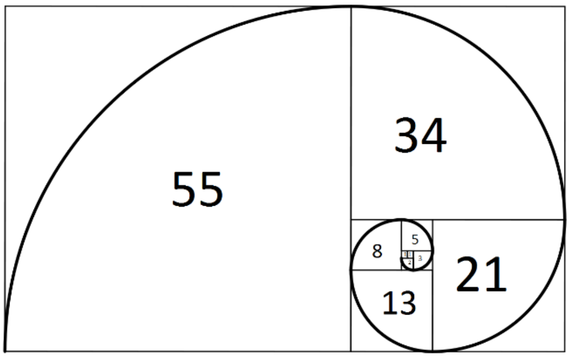

Figura 3 - Sequência de Fibonacci

$$a_n = 1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}$$

Considerando $a_1 = 2$.

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1 + a_1} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} = 1{,}3333\ ...$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 + a_2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{10}{7} = 1{,}428571429$$

E assim sucessivamente.

O outro método empregado para a aproximação de números irracionais é o das frações contínuas. Uma fração contínua é uma expressão da forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cdots}}}$$

4.2.2 Atividade de aplicação

1. Dados os números racionais abaixo, encontre a expressão decimal que a representa e indique a parte inteira, a parte decimal, e se houver dízima periódica, qual período e ante período:

$$\frac{2}{100} \qquad \frac{347}{9} \qquad \frac{1}{11} \qquad \frac{141}{9} \qquad \frac{89}{6} \qquad \frac{796}{5} \qquad \frac{51}{7} \qquad \frac{91}{3} \qquad \frac{985}{9} \qquad \frac{5}{3}$$

2. Se aproxime do número $\sqrt{2}$ obtendo o resultado das sequências que seguem, expressando de forma decimal. Se necessário faça uso da calculadora.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}}$$

3. Fazendo uso da explicação encontre uma fração contínua para $\sqrt{3}$ e $\sqrt{7}$ e aproxime os valores obtidos em 5 casas decimais, posteriormente faça uma comparação com os resultados obtidos na calculadora.

4. Resolva as seguintes recorrências. Considere $a_1 = 1$ e $b_1 = 1$.

$$b_{n+1} = \frac{b_n + \frac{2}{b_n}}{2} \qquad\qquad a_n = 1 + \frac{1}{1 + a_{n-1}}$$

4.2.3 Atividades complementares

Ache uma fração contínua para $\sqrt{5}$ e aproxime seu valor até 10 casas decimais, depois faça uma comparação com o valor dado pela calculadora científica.

4.3 OFICINA 3 - INDICAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA RETA NUMÉRICA

OFICINA 3	
Público – alvo	1º ano do Ensino Médio
Recursos necessários	Quadro branco, régua, compasso e pinceis
Objetivo da oficina	Identificar a localização exata dos números racionais e alguns irracionais construíveis sobre a reta numérica.

Quadro 3 - Oficina 3

4.3.1 Atividade de aprofundamento

O teorema de Tales

Tales de Mileto foi um importante filósofo, astrônomo e matemático grego que viveu antes de Cristo. Ele possuía amplos conhecimentos sobre geometria e proporcionalidade. O Teorema que leva seu nome, diz que:

“Feixes de retas paralelas cortadas ou intersectadas por segmentos transversais formam segmentos de retas proporcionalmente correspondentes”.

Para uma melhor compreensão do teorema de Tales, segue a figura abaixo (DOLCE e POMPEO, 2013):

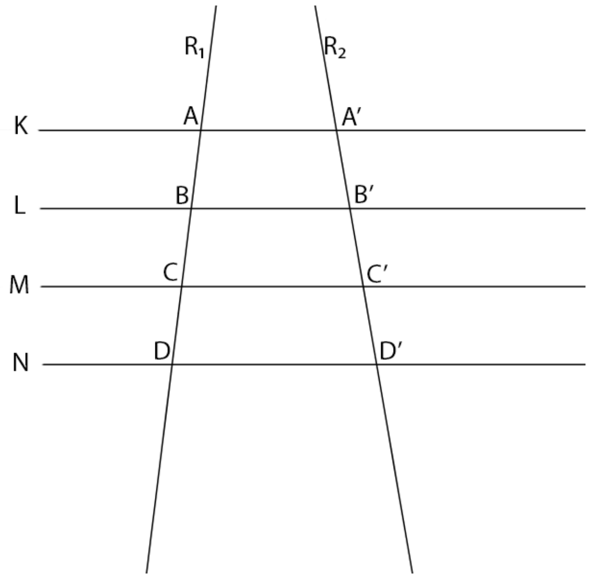

Figura 4 - Teorema de Tales

As retas K, L, J, M, N são paralelas, e da figura temos que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AC}{BD} = \frac{A'C'}{B'D'} = \frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'}$$

Construção de retas paralelas

1. Dada uma reta f, e um ponto B, exterior f. Traça-se uma reta que passe por B, e corte f em num ponto A.
2. Com o auxílio do compasso, com centro em A traça-se um arco de circunferência, este corta as retas em pontos aleatórios.

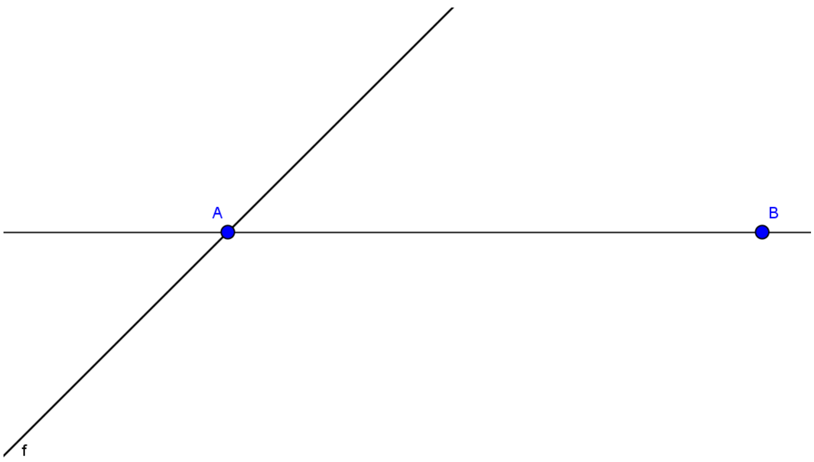

Figura 5 – Instrução i

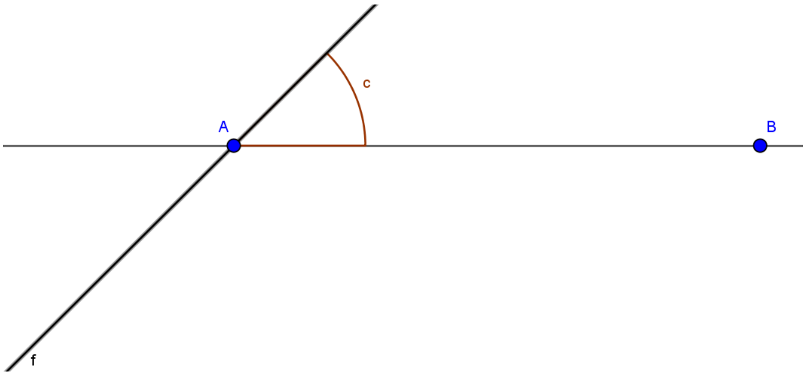

Figura 6 - Instrução ii

3. Agora que já se possui a medida do arco, basta utilizar esse mesmo ângulo.

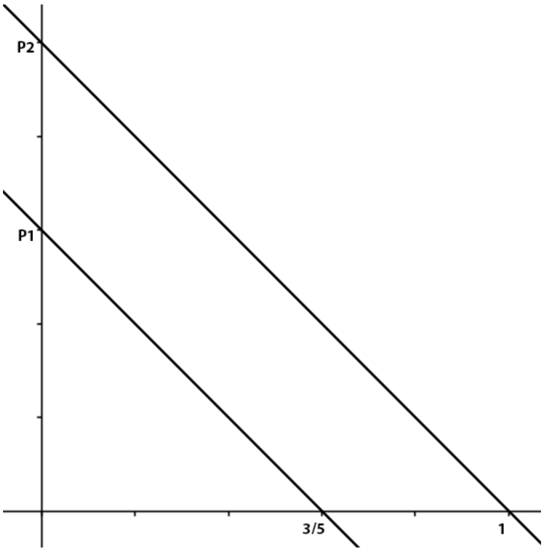

Figura 7 - Retas paralelas

Localização de alguns números irracionais construíveis

Para encontrar números do tipo $\sqrt{n}$, na reta real, observe a figura abaixo. Traçou-se um triângulo de catetos iguais a 1 e hipotenusa igual a $\sqrt{2}$. Em seguida,com o auxilio de um compasso, ligou-se P(1,1) até a reta numérica (DOLCE e POMPEO, 2013).

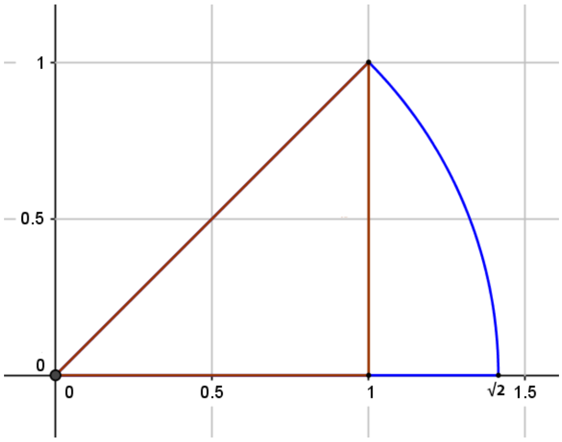

Figura 8 *- Localização do $\sqrt{2}$ na reta real*

4.3.2 Atividade de aplicação

1. Localizar ordenadamente os seguintes números na reta numérica:

$$\frac{2}{100} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{18}{11} \quad \frac{56}{9} \quad \frac{89}{6} \quad \frac{16}{5} \quad \frac{30}{7} \quad \frac{91}{13} \quad \frac{26}{9} \quad \frac{5}{3}$$

2. Desenhe os segmentos de retas de tamanhos:

$$3\sqrt{2}+\sqrt{11} \qquad \sqrt{2}\times\sqrt{7} \qquad \sqrt{13}+\sqrt{3} \qquad \sqrt{51}\div\sqrt{2}$$

3. Explique como obter um ponto na reta; a partir de zero, obtenha um comprimento de $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, …, $\sqrt{n}$. Considere n, um quadrado não perfeito.

4.3.3 Atividades complementares

Pesquise sobre Tales e as pirâmides do Egito e utilize o Teorema de Thales para encontrar um segmento de reta de longitude $\sqrt{13}.\sqrt{6}$.

4.4 OFICINA 4 - O NÚMERO π

OFICINA 4	
Público – alvo	2º e 3º ano do Ensino Médio
Recursos necessários	Objetos esféricos ou circulares, quadro branco e pincéis
Objetivo da oficina	Deduzir o significado do número π e fazer uso de polígonos inscritos e circunscritos na circunferência para aproximar através de intervalos encaixados o valor do número π.

Quadro 4 – Oficina 4

4.4.1 Atividade de aprofundamento

O número π

O π, o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e seu diâmetro, é considerada a mais antiga constante matemática que se conhece. Apesar da antiguidade do nosso conhecimento do π, algo por volta de 2000 atrás, ele ainda é fonte de pesquisas em diversas áreas.

A primeira demonstração da existência do π, trata-se de uma nota de Simplicius falando que Hippokrates demonstrou que a razão entre as áreas de círculos é igual à razão entre os quadrados dos respectivos diâmetros.

Por outro lado, o mais antigo documento ainda existente e que traz demonstração da existência do π é o livro Elementos de Euclides – escrito em 300 a.c..Na proposição 18 do Livro XII, Euclides enuncia e prova que esferas estão uma para a outra assim como a razão tríplice de seus diâmetros (STEWART, 2010).

Cálculo de π pelo método de Arquimedes

O método de Arquimedes consiste em encontrar o valor aproximado de π, por meio da construção de duas sequências de números, s_n e S_n, respectivamente construídas pelo cálculo do valor dos lados de duas s de polígonos, inscritos e circunscritos no círculo de raio 1, que se aproximam do círculo, por dentro e por fora, como ilustrado na figura 9 e na figura 10 (DOLCE e POMPEO, 2013).

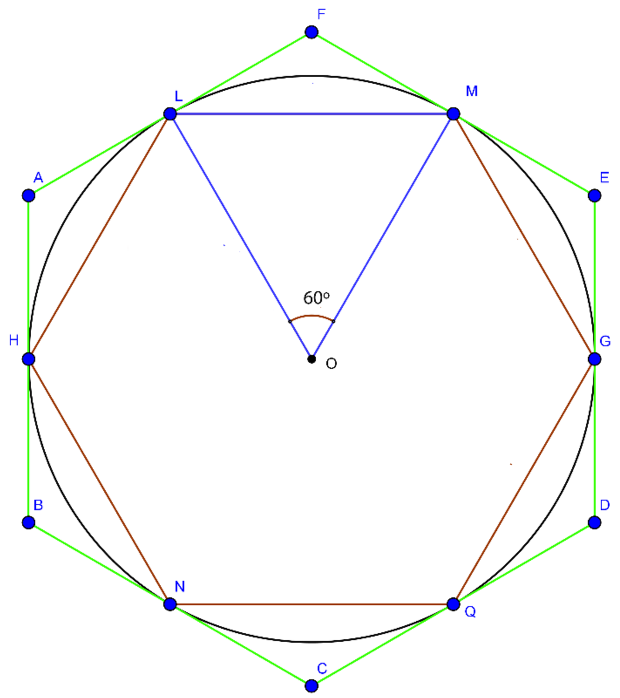

Figura 9 - Polígonos inscritos e circunscritos

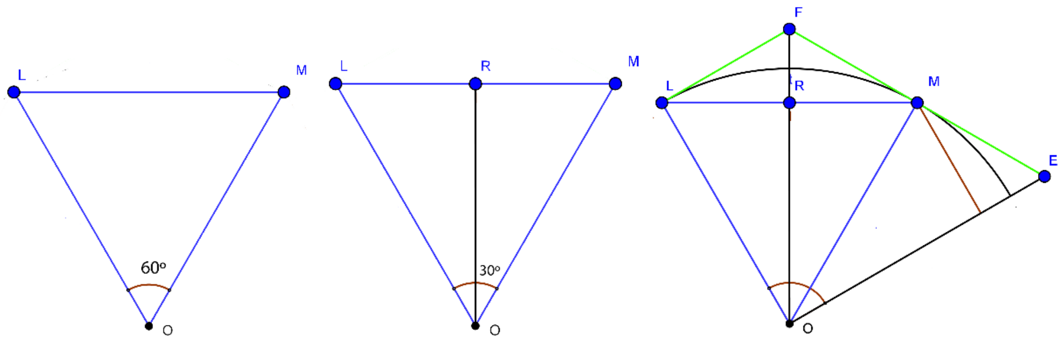

Figura 10 – Corte do polígono

Para obter estas duas sequências, Arquimedes iniciou o cálculo por s_6, o lado do hexágono inscrito no círculo de raio 1. Não é difícil ver que $s_6 = 1$, já que como representado nas figuras anteriores, ele é composto por triângulos equiláteros. Possuindo $s_6 = 1$, Arquimedes deduziu, fazendo uso da semelhança de triângulos, o lado do hexágono circunscrito ao referente círculo.

Com os valores de s_6 e S_6, Arquimedes obteve duas sequências de números: a de lados dos polígonos inscritos, com lados 6, 12, 24, 48, 96...; e igualmente, a sequência de lados dos polígonos circunscritos, com lados 6, 12, 24, 48, 96...

Fazendo uso dos valores de s_{96} e S_{96}, pelo Método de Arquimedes, calculam-se os perímetros p_{96} e P_{96}. Estes valores são muito próximos de 2.

$$p_{96} < 2\pi < P_{96}$$

Fazendo a divisão por 2, obtêm-se duas aproximações de π

$$3{,}14016 < \pi < 3{,}14208$$

Arquimedes usou a seguinte fórmula:

$$P_{C_{2n}} = \frac{2P_{i_n}P_{c_n}}{P_{c_n} + P_{i_n}}$$

4.4.2 Atividade de aplicação

1. As funções trigonométricas circulares (seno, cosseno, entre outras) são definidas em termos de um círculo unitário. Consequentemente, não deve ser surpreendente a ocorrência do π em valores dessas funções e nas relações entre elas. Essa ocorrência também é válida para as funções trigonométricas hiperbólicas?
2. Faça um levantamento das fórmulas de áreas e volumes das figuras da Geometria Euclidiana e que tenham algum tipo de circularidade ou esfericidade. Para cada uma dessas figuras, explique a ocorrência, ou não, do π em tais fórmulas.
3. Identifique na sala vários objetos circulares, como a circunferência da tampa do lixo, uma moeda, uma roda de uma bicicleta, um CD, entre outros. Usando uma fita métrica, meça o comprimento da circunferência (L) e do diâmetro (D). Por fim complete a tabela:

Objetos	Circunferência (L)	Diâmetro (D)	Razão (L/D)

Quadro 4 – Descobrindo π

De acordo com a tabela responda as seguintes perguntas:

a) Que número caracteriza todos os quocientes obtidos.

b) De acordo com o exercício de medição da circunferência e o diâmetro de cada círculo, como pode-se definir o número aqui obtido?

4. Utilizando as fórmulas para encontrar o perímetro dos polígonos dadas por Arquimedes, calcule P_{c_n} e P_{i_n} para n = 1,2,3,4,…,30 e preencha a seguinte tabela. Para verificar que o número π encontra-se na interseção dos intervalos da forma $[P_{i_n}, P_{c_n}]$, é dizer $P_{i_n} < \pi < P_{c_n}$, onde P_{i_n} e P_{c_n} represente as medidas dos perímetros dos polígonos inscritos e circunscritos respetivamente.

n	Nº de lados	P_i	π	P_c
1				
2				
3				
4				
5				
6				
.				
.				

Quadro 6 - Descobrindo π - Método de Arquimedes

4.4.3 Atividades complementares

Pesquise sobre o experimento de “A agulha de Buffon” para aproximar o valor do valor π.

4.5 OFICINA 5 - O NÚMERO DE OURO

OFICINA 5	
Público – alvo	1º ano do Ensino Médio
Recursos necessários	Quadro branco e pinceis
Objetivo da oficina	Utilizar algoritmos aritméticos ou geométricos, para encontrar aproximações ao número Φ.

Quadro 5 - Oficina 5

4.5.1 Atividade de aprofundamento

No Egito Antigo já se utilizava a proporção áurea. As pirâmides de Gizé são exemplos disto, uma vez que a razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro.

Já na Grécia, o templo Partenon (construído entre 447 e 433 a. C.) contém a razão de Ouro no retângulo que contêm a fachada. Na estrela pentagonal, os pitagóricos também utilizaram a razão áurea; Eudoxo, matemático grego, utilizou os seus estudos sobre proporções para estudar a secção que se crer ser a secção áurea, e o mais famoso, Fibonacci utilizou a razão áurea na solução do famoso problema dos coelhos e hoje a sequência leva seu nome (MLODINOW, 2010).

Euclides, no Livro VI dos Elementos, define: “um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo.” Daí temos:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \Rightarrow (a+b)b = a^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$$

$$a = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4(1)(-b^2)}}{2} \Rightarrow a = \frac{b + \sqrt{5b^2}}{2}$$

$$a = \frac{b + b\sqrt{5}}{2} = \frac{b(1+\sqrt{5})}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = \Phi$$

4.5.2 Atividade de aplicação

1. Utilizando a fração contínua abaixo, encontre o valor de Φ até coincidir com 10 casas decimais.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}}}}$$

2. Verifique que o quociente de dois termos consecutivos da sucessão de Fibonacci aproxima-se ao número Φ, use n = 8, n = 15, n = 20 e n = 35.

4.5.3 Atividades complementares.

Pesquise as aplicações do número de ouro ou razão dourada e utilizando régua e compasso encontre um segmento de comprimento número Φ.

4.6 OFICINA 6 - DENSIDADE DOS NÚMEROS REAIS

OFICINA 6	
Público - alvo	1º ano do Ensino Médio
Recursos necessários	Quadro branco e pincéis
Objetivo da oficina:	Identificar o conceito de densidade dos números reais

Quadro 6 - Oficina 6

4.6.1 Atividade de aprofundamento

Um estádio de futebol tem capacidade para 60.000 espectadores, se somente se 800 pessoas assistiram; então se afirma que cada uma das pessoas pode-se sentar em 75 postos diferentes sem atrapalhar ou incomodar a ninguém. Imaginando uma situação oposta, onde a bilheteria foi esgotada, o estádio estaria totalmente cheio, ou seja, teoricamente cada pessoa corresponde uma só vaga.

Dividir um espaço disponível pelo número de pessoas presentes mostra o conceito de densidade populacional, as definições que utilizam os físicos ou químicos a consideram como: uma medida que indica quanto material encontra-se comprimido num espaço determinado. Enfim, é a quantidade de massa por unidade de volume.

4.6.2 Atividade de aplicação

1. Encontre um número real entre $\frac{3}{4} e \frac{3}{5}$.
2. Qual é o número seguinte a $\frac{6}{7}$? Justifique.

3. Encontre dois números reais, a e b, tais que a distância entre eles seja igual a 0,5.

4. Encontre um número real c que esteja situado entre a e b.

5. Existe um número real d que esteja na metade de a e c? Se sim, como o encontrarmos? E caso contrário, por quê?

6. Os números encontrados nos exercícios anteriores são racionais?
Por quê?

7. Existe um número irracional entre a e d?

8. Encontre um número real, x, que se encontre na metade entre 1 e 2.

9. Encontre um número real, y, que se encontre na metade entre 1 e x.

10. Existe um número irracional w que esteja entre x e y?.
11. Encontre um número real, n, que se encontre na metade entre 2 e 3.

13. Encontre um número real, m, que se encontre na metade entre n e 3.

14. Existe um número irracional q que esteja entre n e m?.

15. Utilizando a sequência abaixo, pode encontrar-se infinitos números racionais que se encontrarão entre n e m?

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

16. De acordo com o exercício anterior, quantos números racionais poderemos encontrar entre n e m?

17. Na sequência anterior, substituindo n indefinidamente por um número natural; o número ali obtido é um número irracional porque suas cifras decimais são infinitas não periódicas. Qual número aproxima-se cada vez mais desta sequência?

4.6.3 Atividades complementares.

a) Pesquise qual estado do Brasil é mais denso e a área correspondente por habitante.

b) O número 5,1010010001000010000… é irracional? Justifique.

c) Encontre um número irracional que esteja entre os números 7,5 e 7,6.

5 ANÁLISE DE APRENDIZADO

Neste capítulo apresentam-se as observações e reflexões estabelecidas a partir da aplicação das oficinas. Essas reflexões levam em consideração o nível de envolvimento do aluno conforme o aprofundamento no conteúdo tratado, lembrando que o conteúdo foi exposto em três atividades diferentes (FIORENTINI, 1995).

Após um tratamento inicial ou leitura do tema, realizava-se a atividade de aprofundamento; em seguida, para manter o foco do aluno, era realizada a atividade de aplicação, onde o mesmo passava a ter um conhecimento prático do conceito. Por fim, ocorria a atividade complementar, geralmente realizada no período extraclasse, ou seja, possibilitava o conhecimento do interesse do aluno após a oficina (LINES, 2002).

Por uma questão de segurança, optou-se pelo anonimato dos sujeitos na coleta de dados. Foram usadas salas do 1º ao 3º ano do ensino médio.

5.1 OFICINA 1- MAGNITUDES COMENSURÁVEIS E INCOMENSURÁVEIS

Na realização da atividade de aprofundamento, o professor optou por levar segmentos de papelão cortado, devido ao fácil manuseio. A maioria dos alunos compreendeu rapidamente a ideia de representação, proporcionalidade e fração. Uma pequena parcela de estudantes não compreendeu inicialmente a proposta, mas após o professor mostrar um exemplo, as dúvidas sobre o conceito tratado foram sanadas.

Na atividade de aplicação houve bastante produtividade e discussão em torno das questões tratadas, visto que na matemática, por mais que haja um resultado correto, há inúmeras formas de se chegar até ele, o principal ponto notado foi que o aluno pode ver que por mais que o seu colega pensasse diferente, isso não significava que um dos dois teria de estar errado.

A atividade de complementação era uma pesquisa histórica. Constatou-se que a maioria dos estudantes possuíam acesso à internet – essa era a melhor forma de pesquisa visto o limitado acervo da escola em questão. A escola também possuía um laboratório de informática, contudo por questão de horários e burocracias, optou-se por solicitar que a pesquisa fosse realizada extraclasse. A respeito dos alunos que possuíam acesso à internet: metade realizou a tarefa solicitada.

5.2 OFICINA 2 - AS DÍZIMAS DE UM NÚMERO REAL

Na atividade de aprofundamento, o professor explicou o conceito de dízimas. Inicialmente os alunos estavam dispersos e foi um tanto difícil conseguir sua atenção, no entanto houve uma curiosidade geral sobre o matemático Fibonacci.

A atividade de aplicação ocorreu sem maiores problemas, um grupo de 5 alunos continuou sem demonstrar interesse, e o restante tentou realizar a atividade, houveram muitas solicitações de ajuda, porém ao final todas as questões foram respondidas.

A atividade complementar foi realizada em sala de aula e veio à tona duas discussões interessantes: a primeira relacionada ao conceito de infinito e como é possível que um infinito “caiba” dentro de outro, e a segunda sobre o uso de calculadora nas aulas de matemática. O professor se posicionou contra o uso afirmando que papel e lápis fariam o aluno criar uma maior agilidade mental, alguns alunos concordaram, outros contra argumentaram.

5.3 OFICINA 3 - INDICAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS NA RETA NUMÉRICA

Na atividade de aprofundamento discutiu-se o teorema de Thales; a turma alegou não conhecer o teorema, porém após a introdução alguns alunos relataram que já haviam usado o teorema na resolução de exercícios anteriores. A turma inicialmente teve problemas em visualizar geometricamente a construção de retas paralelas, mas após uma segunda explicação, entenderam o conceito. A maioria dos alunos achou bem interessante a localização de números irracionais na reta numérica.

As atividades de aplicação 1 e 2 foram realizadas sem maiores problemas e houve uma discussão produtiva sobre a atividade 3, onde até alguns alunos que permaneciam dispersos, voltaram a ficar interessado no conteúdo.

A atividade complementar era de realização extraclasse e cerca de 30% da turma a realizou.

5.4 OFICINA 4 - O NÚMERO π

Na atividade de aprofundamento notou-se interesse por parte da maioria da turma. Proveitosa a construção geométrica uma vez que presenciou-se uma animada conversa entre professores e alunos. Ademais o estudo de polígonos tinha sido recente, então a maioria dos alunos compreendeu rapidamente o tema tratado.

Na atividade de aplicação, os alunos foram divididos em grupo e verificou-se nitidamente uma grande dificuldade dos alunos no estudo da trigonometria, por isso precisou-se voltar e retomar conceitos básicos para seguir com a atividade. As atividades 2 e 3 foram realizadas sem maiores problemas e os objetos utilizados foram bolas de isopor e plástico, e algumas tampas levadas pelo professor.

Ao menos uma pessoa de cada grupo realizou a atividade complementar, que era extraclasse, nessa atividade permanece ainda o problema do acesso à internet.

5.5 OFICINA 5 – O NÚMERO DE OURO

A maioria dos alunos não conheciam o matemático Euclides, o que pode mostrar um desinteresse pelo processo de construção do conhecimento da matemático, todavia ficaram atentos a explicação do professor.

Existiu dificuldades por parte dos alunos na compreensão da atividade de aplicação, muitos não entenderam a proposta do professor – isso se deu principalmente devido à falta de interpretação de texto. Um aluno afirmou que não era capaz de compreender matemática, e que nunca tinha usado a fórmula de Bhaskara para nada em sua vida; por conseguinte, o professor deu uma pausa na oficina para explicar algumas aplicações na matemática, e que esta não se resumia a fórmulas e pensamentos prontos. A turma no geral fez uma boa reflexão e o aluno em questão realizou a atividade.

A maior parte da turma executou a atividade complementar e relatou-se que na aula seguinte ainda discutiram de forma construtiva sobre a razão áurea.

5.6 OFICINA 6 - DENSIDADE DOS NÚMEROS REAIS

Apesar da maioria dos alunos nunca terem ido a um estádio de futebol, houve uma conversa bastante animada na atividade de aprofundamento. Essa ocorreu de uma maneira muito leve, permitindo brincadeiras com times de futebol, que deixaram os alunos bastante à vontade com o tema tratado.

Na atividade de aplicação houve participação da maioria, a conversa seguiu no mesmo tom empolgante da atividade anterior, as atividades 2 e 15 foram as que mais chamaram atenção dos estudantes.

Mais uma vez: a atividade complementar foi realizada pela maioria dos alunos; alguns inclusive trouxeram os estados do Brasil por ordem de densidade, o que mostra que houve um interesse real pelo tema.

CONCLUSÃO

Apresentou-se de duas formas a construção do conjunto dos números reais, através dos cortes de Dedekind e por sequências de Cauchy; a fim de proporcionar um entendimento significativo deste conjunto, contribuindo, portanto, com a base conceitual dos alunos e auxiliando na construção de um pensamento logico-matemático.

Ademais, visando uma boa compreensão da teoria desenvolvida neste trabalho, procurou-se – por meio das oficinas – explorar os conceitos de número racional, irracional bem como sua localização na reta numérica e também suas propriedades algébricas. Para assim demonstrar a criação do corpo dos números reais como extensão do conjunto dos números racionais, via definição de corpo ordenado completo.

Isto posto, é válido ressaltar que houve um enfoque geométrico na construção dos conceitos matemáticos, pelo motivo da fácil visualização de propriedades algébricas e a necessidade de desenvolvimento do estudante na análise geométrica. Além disso, as oficinas proporcionaram ainda um estudo matemático de áreas indiretamente relacionadas aos temas trabalhados, aumentando, portanto, a gama de conceitos matemáticos estudados.

Por fim, espera-se que este trabalho possa servir de incentivo e inspiração a docentes e discentes, que procuram compreender de forma reflexiva o estudo do corpo dos números reais.

REFERÊNCIAS

A Construção dos Números. **UFSCAR**, 2014. ISSN . Disponivel em: <http://www.dm.ufscar.br/dm/index.php/component/attachments/download/43>. Acesso em: 05 maio 2017.

ÁVILA, G. Cantor e a teoria dos conjuntos. **do professor de matemática**, Goiânia, n. 43, p. 8-14, 2000.

ÁVILA, G. S. D. S. **Análise matemática para licenciatura**. 3ª. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2006.

BLOCH, M. **Apologia da História, ou , o ofício de historiador**. São Paulo: Jorge Zahar, 2002.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. 9ª. ed. São Paulo: IME/USP, 1996.

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

BRASIL. In: MÉDIA, S. D. E. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. [S.l.]: [s.n.], v. 2, 1998. p. 119.

BRASIL. Censo Escolar da Educação Básica 2012: Resumo tecnico. **IBGE**, 2012. Disponivel em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/resumos_tecnicos/resumo_tecnico_censo_educacao_basica_2012.pdf>. Acesso em: 05 maio 2017.

CERTEAU, M. D. **A operação historiográfica. A escrita da história**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CHARTIER, R. **La Historia o la lectura del tiempo**. Espanha: Gedisa, 2007.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisaTeoria e Educação. Porto Alegre: Pannônica, v. 2, 1990. p. 177-229.

CRUZ, W. J. **Os números reais:** um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora, 2011.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Geometria Plana**. 9ª. ed. São Paulo: Atual, v. 9, 2013.

DUTRA, S. W. A Construção dos Números Reais. **UESC**, 2014. Disponivel em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/1178/2012_00960_WELTON_DE_SOUZA_DUTRA.pdf?sequence=>. Acesso em: 15 maio 2017.

FIORENTINI, D. (.). Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. **Zetetike**, v. 4, n. 3, 1995.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. 9ª. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A, v. I, 1985.

IFRAH, G. **Historia universal dos algarismos**. Marrocos: [s.n.], 2005.

JULIA, D. A cultura escolar como objeto histórico. **Revista brasileira de histórica da educação**, v. I, p. 9 - 43, 2001.

LANDAU, E. **Foundations of Analysis.** 2ª. ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1960.

LE GOFF, J. **História e Memória**. São Paulo: UNICAMP, 1992.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 9ª. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LINES, G. **Princípios de análises matemática**. [S.l.]: [s.n.], 2002.

LOPES, L. S.; ALVES, A. M. M. A história da matemática em sala de aula: propostas de atividades para a educação básica. **Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Su**, n. 20, 2014.

MAIA, L. D. S. L. O Que Há de Concreto no Ensino da Matemática? **ZETETIKÉ-CEMPEM**, Campinas, v. 9, n. 15/16, p. 77-98, Jan/Dez 2001.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides:** Historia da Geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço. 6ª. ed. Belo Horizonte: Geração Editorial, 2010.

MOREIRA, P. C. E. D. M. M. M. S. A formação matemática do professor. **Autêntica**, Belo Horizonte, 2005.

PASQUINI, R. C. G. **Um Tratamento para os Números Reais via medição de segmentos:** uma proposta, uma investigação. Rio Claro (SP): UNESP, 2007.

PELLEGRINI, J. C. Relações de Equivalência e de Ordem, 2013. Disponivel em: <http://aleph0.info/cursos/md/2013-q2/relacoes.pdf>. Acesso em: 03 Junho 2017.

PEREIRA, F. R. Formalizando a Existência dos Números Reais. **UNESP**, 2014. Disponivel em: <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/123987/000832383.pdf?sequence=1>. Acesso em: 14 maio 2017.

SAMPAIO, P. A. Infinito, uma história a contar. **Revista Millenium**, n. 34, p. 205-222, abril 2008.

SEVERINO, A. J. **Metodologia do trabalho científico**. 19ª. ed. São Paulo: Cortez, 1993.

SPIVAK, M. **Calculus**. [S.l.]: Saraiva , 1965.

STEWART, I. **O Fantástico Mundo dos Números. A Matemática do Zero ao Infinito**. 3ª. ed. [S.l.]: ZAMAR, 2010.

VALENTE, W. R. História da Matemática na Licenciatura: uma contribuição para o debate. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. Especial, 2002. ISSN SBEM.