



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ACRÍZIO CARLOS SILVA

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS POR FRAÇÕES
CONTÍNUAS

JUAZEIRO DO NORTE
2017

FRANCISCO ACRÍZIO CARLOS SILVA

REPRESENTAÇÃO DOS NÚMEROS REAIS POR FRAÇÕES CONTÍNUAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientadora:
Dra. Clarice Dias de Albuquerque.

JUAZEIRO DO NORTE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

S586r

Silva, Francisco Acrízio Carlos.

Representação dos números reais por frações contínuas/ Francisco Acrízio Carlos Silva. – 2017.
49 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia –
Departamento de Matemática, Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional,
Juazeiro do Norte, 2017.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dra. Clarice Dias de Albuquerque.

1. Frações contínuas. 2. Frações contínuas simples. 3. Representação dos números reais. I. Silva,
Francisco Acrízio Carlos. II. Título.

CDD 510



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Representação dos Números Reais por Frações Contínuas

Francisco Acrízio Carlos Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 19 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Clarice Dias de Albuquerque – UFCA

Orientadora

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
UFCA

Prof. Dr. Plácido Francisco de Assis
Andrade - UFCA

*À minha adorável mãe Dalvani Carlos,
pelo cuidado e amor incondicional, à
minha esposa Michely, companheira de
todas as horas, e aos meus filhos Leticia
e Guilherme.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por dar-me saúde, força, coragem e proteção em todas às horas.

À minha mãe Maria Dalvani Carlos, pelo cuidado e dedicação.

À minha esposa Michely Micaely de Castro Silva, pelo apoio, incentivo, paciência, companheirismo e compreensão.

À meus filhos Letícia de Castro Silva e Guilherme de Castro Silva, pelo carinho e pelas alegrias proporcionadas.

Ao meu Professor e amigo Antônio Ildemar Furtado Pereira, pelos conselhos de pai, auxílio na revisão deste trabalho, e por ser exemplo de dedicação, profissionalismo e competência.

À minha orientadora, Dra. Clarice Dias de Albuquerque, pela paciência, disponibilidade e contribuições valiosas a este trabalho.

À todos os professores do PROFMAT - UFCA, pela contribuição significativa e engrandecimento da minha aprendizagem.

Ao meu colega de PROFMAT, Bruno Serafim de Souza, pela organização e formatação desta dissertação.

À SBM, pela iniciativa louvável de criar esse Mestrado.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E a todos os que contribuíram de alguma maneira para eu chegar até aqui.

*“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)*

RESUMO

Um número real pode ser aproximado por um número racional. Isso é comumente feito através de uma representação decimal, ou seja, uma sequência de aproximações por racionais cujos denominadores são potências de 10. Contudo, a representação feita por frações contínuas produz aproximações muito melhores. Se por um lado, a representação decimal é prática, por outro as frações contínuas não deixam de ser simples e natural. Neste trabalho, abordamos esta última forma de representação dos números reais. Para isto, é introduzido o conceito de frações contínuas, com destaque para as frações contínuas simples, resultados mais relevantes e a representação dos números racionais e dos números irracionais por expansão de frações contínuas. Como aplicação, apresentamos o modelo para construção de calendário. Vale ressaltar que frações contínuas é um tema de pesquisa com ampla aplicação em Matemática Pura ou em Ciências Aplicadas, apesar de seu caráter elementar.

Palavras-chave: Frações Contínuas. Frações Contínuas Simples. Representação dos Números Reais.

ABSTRACT

A real number can be approximated by a rational number. This is commonly done through a decimal representation, that is, a sequence of approximations by rational whose denominators are powers of 10. However, the representation made by continued fractions produces much better approximations. If, on the one hand, the decimal representation is practical, on the other hand the continued fractions are still simple and natural. In this work, we approach the latter form of representation of real numbers. For this, the concept of continued fractions is introduced, with emphasis on simple continued fractions, more relevant results and the representation of rational numbers and irrational numbers by expansion of continued fractions. As an application, we present the model for calendar construction. It is worth pointing out that continued fractions is a research topic with wide application in Pure Mathematics or Applied Sciences, despite its elementary character.

Key-words: Continued Fraction. Simple Continued Fraction. Representation of Real Numbers.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Encher retângulos $p \times q$ de quadrados gulosos.	42
Figura 2 – Preencher retângulos $23 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ de quadrados gulosos.	43

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	FRAÇÕES CONTÍNUAS	12
2.1	Preliminares - conceitos básicos	12
2.2	Convergentes de frações contínuas	14
3	EXPANSÃO DE NÚMEROS REAIS EM FRAÇÕES CONTÍNUAS	18
3.1	Divisão euclidiana e máximo divisor comum	18
3.2	Expansão de números racionais em frações contínuas	19
3.3	Expansão de números irracionais em frações contínuas	24
3.3.1	Convergentes e boas aproximações	30
4	APLICAÇÕES	38
4.1	O problema do calendário	38
4.2	Preenchendo retângulos com quadrados	41
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

As frações contínuas foram utilizadas durante vários séculos apenas em exemplos específicos sem que uma teoria ou método geral fosse desenvolvido sobre o assunto. O matemático indiano Aryabhata (476 – 550) aplicou-as na resolução de equações lineares sem se preocupar em demonstrar ou formalizar a teoria. Da mesma forma, os italianos Rafael Bombelli (1526 – 1572) e Pietro Cataldi (1548 – 1626) apresentaram casos específicos. Bombelli representou a raiz quadrada de 13 como

$$\sqrt{13} \approx 3 + \frac{4}{6 + \frac{4}{6}} = \frac{18}{5}.$$

Cataldi escreveu a raiz quadrada de 18 da seguinte maneira

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \frac{2}{8 + \dots}}}$$

Embora já fosse utilizada há anos sem generalizações, pode-se afirmar que o início da fundamentação da teoria das frações contínuas se deve ao matemático inglês John Wallis (1616 – 1703). Foi ele quem explicou como calcular o n -ésimo convergente de uma fração contínua, desenvolveu algumas propriedades e usou pela primeira vez o termo fração contínua. Já no que diz respeito às aplicações práticas, o astrônomo holandês Christiaan Huygens (1629 – 1695), com o objetivo de construir um planetário mecânico, utilizou os convergentes de uma fração contínua para obter aproximações racionais com a finalidade de estabelecer relações entre as engrenagens e o número correto de dentes.

A teoria das frações contínuas se desenvolveu realmente quando os matemáticos Leonard Euler (1707 – 1783), Johan Heinrich Lambert (1728 – 1777) e Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) se voltaram para o assunto. Em 1737, Euler demonstrou que todo número racional pode ser expresso por uma fração contínua simples finita. Além disso, ele obteve a seguinte representação do número e

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}$$

Mais tarde, Lambert sistematizou e generalizou o trabalho de Euler sobre o número e , encontrou expressões para as funções $\log(1+x)$, $\arctg(x)$ e $\operatorname{tg}(x)$ e utilizou-as para provar que e^x e $\operatorname{tg}(x)$ são irracionais sempre que x for racional e diferente de zero. Já Lagrange encontrou o valor de raízes irracionais e demonstrou que as frações contínuas periódicas representam números quadráticos irracionais.

A partir do século XIX, as frações contínuas se popularizaram no meio matemático e, desde então, ganhou significativo desenvolvimento, principalmente, no que se refere aos convergentes e às variáveis complexas como termos. Os matemáticos mais renomados que contribuíram significativamente nesse campo foram os alemães Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Karl Jacobi (1804 – 1851) e Oskar Perron (1880 – 1975), os franceses Charles Hermite (1822 – 1901) e Augustin Cauchy (1789 – 1857) e o holandês Thomas Stieltjes (1856 – 1894).

E finalmente a partir do século XX, as frações contínuas têm sido utilizadas em outras áreas como, por exemplo, em algoritmos para computador que calcula aproximações racionais para os números reais e também são aplicadas na resolução de equações diofantinas.

Conforme relatado, as frações contínuas foram objeto de estudo de alguns dos mais importantes matemáticos. Suas propriedades são surpreendentes e a sua utilização se dá em diversos ramos da Matemática, seja no desenvolvimento de novas teorias ou em aplicações práticas.

No tocante ao ensino de Matemática no Ensino Médio as frações contínuas se configuram como excelentes instrumentos de introdução de situações contextualizadas, permitindo o estudo e aprendizagem de diversas propriedades dos números reais, em particular tornando o ensino de números irracionais mais significativo e fácil de ser compreendido, uma vez que, na representação dessas frações um número é irracional se a sua expansão for infinita e racional quando a expansão é finita. Não o bastante, elas também representam um dos mais poderosos instrumentos matemáticos de aproximação de um número irracional por números racionais.

No entanto, ao consultar livros didáticos de Matemática do Ensino Médio foi possível encontrar diversas formas de escrever um número real. Porém, em nenhum deles, verificou-se a expansão de números em frações contínuas. Essa lacuna dos manuais didáticos motivou o objeto de estudo desse trabalho que mostrará os principais teoremas e as propriedades que estruturam a teoria das frações contínuas, podendo servir de base para que professores e alunos interessados nesse tema tenham um primeiro contato com o assunto.

Além desse capítulo introdutório que traz um relato histórico sobre o desenvolvimento da teoria das frações contínuas e suas aplicações, este trabalho contém mais três capítulos estruturados de forma adequada a facilitar o entendimento dos estudantes de nível médio.

No segundo capítulo é apresentado os conceitos básicos e as definições preliminares necessárias ao melhor entendimento do assunto. Já o terceiro é mais denso e nele é mostrado como se escreve um número racional ou irracional em frações contínuas, como obter aproximações para números irracionais e como provar os principais resultados sobre convergente. Finalmente, o quarto capítulo traz algumas aplicações interessantes sobre o tema, como, por exemplo, o clássico problema do calendário e a representação geométrica de uma fração contínua.

2 FRAÇÕES CONTÍNUAS

2.1 Preliminares - Conceitos básicos

Apresentaremos neste capítulo as definições de frações contínuas, fração contínua simples e as notações utilizadas. Introduziremos o conceito de convergentes e mostraremos alguns dos seus resultados.

Definição 2.1.1 *Fração contínua é uma expressão da forma*

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \frac{b_4}{a_4 + \dots}}}}. \quad (2.1)$$

em que a_0, a_1, a_2, \dots e b_0, b_1, b_2, \dots são números reais ou complexos, podendo sua quantidade ser finita ou infinita, e a_0 é a parte inteira.

A equação da definição (2.1) pode ser representada de maneira alternativa como

$$a_0 + \frac{b_1}{a_1 + \frac{b_2}{a_2 + \frac{b_3}{a_3 + \dots}}}. \quad (2.2)$$

em que $\frac{b_i}{a_i}$, $i = 1, 2, \dots$, são denominados quocientes parciais, e b_i e a_i são numerador e denominador do quociente parcial $\frac{b_i}{a_i}$.

Exemplo 2.1.1 *Pode-se escrever*

$$\sqrt{27} = 5 + \frac{2}{10 + \frac{2}{10 + \frac{2}{10 + \dots}}}.$$

Essa dissertação terá como foco as frações contínuas simples que são definidas da seguinte maneira:

Definição 2.1.2 Chamamos de fração contínua simples, a expressão da forma

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}} \quad (2.3)$$

onde a_0 é um inteiro qualquer e a_1, a_2, \dots são inteiros positivos.

Podemos denotar a expressão da definição 2.1.2 como

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots].$$

Quando a fração contínua simples é finita, escrevemos

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Equivalentemente podemos escrever $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ ou

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Exemplo 2.1.2 Vejamos o número $\frac{79}{45}$ escrito na forma de fração contínua simples em duas notações diferentes.

$$\frac{79}{45} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{11}}} = [1; 1, 3, 11].$$

Exemplo 2.1.3 Observe o número de ouro representado no formato de fração contínua simples infinita.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

2.2 Convergentes de frações contínuas

Matematicamente, os convergentes de uma fração contínua são uma sucessão de truncamentos realizados após cada $\frac{b_n}{a_n}$ da fração da Definição 2.1.1, em que obtemos uma sequência $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$, de aproximações que tendem para o valor que originou a fração.

Logo, considerando uma fração contínua simples finita temos,

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{a_0}{1} \\
 C_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1] \\
 C_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = [a_0; a_1, a_2] \\
 C_3 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3] \\
 &\vdots \\
 C_k &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + a_k}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_k] \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Os termos dessa sequência são chamados de primeiro, segundo, terceiro, ..., k -ésimo convergente.

Apresentaremos algumas propriedades algébricas dos convergentes de frações contínuas simples. Para isso, definimos:

Definição 2.2.3 *Dois números p_k e q_k , tais que $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, são denominados, respectivamente, numerador e denominador do k -ésimo convergente.*

Portanto, pela Definição 2.2.3 temos:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0} \Rightarrow p_0 = a_0 \text{ e } q_0 = 1 \\
 C_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1} \Rightarrow p_1 = a_0 \cdot a_1 + 1 \text{ e } q_1 = a_1 \\
 C_2 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = a_0 + \frac{a_2}{a_2 \cdot a_1 + 1} = \frac{a_2 \cdot a_1 \cdot a_0 + a_0 + a_2}{a_2 \cdot a_1 + 1} = \frac{a_2 \cdot (a_1 \cdot a_0 + 1) + a_0}{a_2 \cdot a_1 + 1} \\
 &= \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2} \Rightarrow p_2 = a_2 \cdot p_1 + p_0 \text{ e } q_2 = a_2 \cdot q_1 + q_0.
 \end{aligned}$$

De modo geral, é possível mostrar que

$$p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \text{ e } q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}.$$

Então, para provarmos que isso ocorre para um valor qualquer de k , demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 *No convergente $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ de uma fração contínua finita simples, os numeradores p_k e os denominadores q_k satisfazem as recorrências*

$$\begin{cases} p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2} \\ q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Com condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} p_1 = a_1 \cdot a_0 + 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases}$$

Demonstração: Vamos utilizar o Princípio da Indução Finita.

Vimos logo acima que o resultado é válido para $k = 2$. Supondo verdadeiro para todo $k \leq n$, mostraremos que vale para $k = n + 1$.

Sendo $k = n + 1$, temos:

$$C_{n+1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}}}}}}$$

Note que essa expressão possui $(n + 1)$ termos. Então, se tomarmos $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ como um único termo, a fração contínua simples passa a ter n termos, ou seja,

$$C_{n+1} = \left[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \right].$$

Isso significa que, na hipótese de indução, onde o n -ésimo termo convergente é dado por,

$$C_n = \frac{a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}},$$

substituindo o termo a_n por $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ no cálculo do convergente C_{n+1} , pois os números $p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}$ e q_{n-2} dependem apenas de a_n . Segue, portanto, que

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{\left(\frac{a_n \cdot a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right) \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(\frac{a_n \cdot a_{n+1} + 1}{a_{n+1}}\right) \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} \\
&= \frac{a_n \cdot a_{n+1} \cdot p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2} \cdot a_{n+1}}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} \cdot q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} \cdot q_{n-2}} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_n \cdot a_{n+1} \cdot p_{n-1} + p_{n-1} + p_{n-2} \cdot a_{n+1}} \\
&= \frac{a_{n+1} \cdot q_{n-1} + q_{n-1} + a_{n+1} \cdot q_{n-2}}{a_{n+1} \cdot (a_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}} \\
&= \frac{a_{n+1} \cdot (a_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}}{a_{n+1} \cdot p_n + p_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}.
\end{aligned}$$

E, com isso, mostramos pelo Princípio de Indução Finita que o resultado é válido para todo $k \geq 2$. ■

Os numeradores e denominadores dos convergentes obedecem ainda a uma relação determinada pelo teorema abaixo. Relação essa conhecida como fórmula do determinante.

Teorema 2.2.2 *A relação $p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1}$ que envolve os numeradores p_k e os denominadores q_k do k -ésimo convergente de uma fração contínua finita simples, é válida para todo $k \geq 1$.*

Demonstração: A demonstração desse teorema também se dá por Indução Finita.

Para $k = 1$ temos,

$$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = a_1 \cdot a_0 - a_0 \cdot a_1 + 1 = 1 = (-1)^{1-1} = (-1)^0.$$

Suponha que a expressão é verdadeira para todo inteiro $1 \leq k \leq n$, isto é

$$p_n \cdot q_{n-1} - p_{n-1} \cdot q_n = (-1)^{n-1}.$$

E vamos provar para $k = n + 1$.

Então,

$$\begin{aligned}
p_{n+1} \cdot q_n - p_n \cdot q_{n+1} &= (a_{n+1} \cdot p_n - p_{n-1}) \cdot q_n - p_n \cdot (a_{n+1} \cdot q_n + q_{n-1}) \\
&= a_{n+1} \cdot p_n \cdot q_n + q_n \cdot p_{n-1} - a_{n+1} \cdot p_n \cdot q_n - p_n \cdot q_{n-1} \\
&= q_n \cdot p_{n-1} - p_n \cdot q_{n-1} \\
&= -(p_n \cdot q_{n-1} - q_n \cdot p_{n-1}) \\
&= -(-1)^{n-1} = (-1)^n.
\end{aligned}$$

■

Segue do Teorema 2.2.2 o seguinte resultado.

Corolário 2.2.1 *Todo convergente $C_k = \frac{p_k}{q_k}$, com $k \geq 1$, de uma fração contínua simples é um número racional irredutível.*

Demonstração: Sabemos pelo Teorema 2.2.2 que

$$p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Suponhamos que exista um número inteiro não nulo m tal que $p_k = m \cdot p_k^*$ e $q_k = m \cdot q_k^*$, em que $p_k^*, q_k^* \in \mathbb{Z}$. Então,

$$m \cdot p_k^* \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot m \cdot q_k^* = (-1)^{k-1}.$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por m , obtemos

$$p_k^* \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k^* = \frac{(-1)^{k-1}}{m} \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $m = \pm 1$, como queríamos demonstrar.

■

3 EXPANSÃO DE NÚMEROS REAIS EM FRAÇÕES CONTÍNUAS

3.1 Divisão euclidiana e máximo divisor comum

Apresentaremos nesta seção, algumas proposições da Teoria dos Números que serão úteis no desenvolvimento desse trabalho, em particular, na demonstração do algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum de dois números. Esse algoritmo também será essencial nesta dissertação. O leitor encontrará mais detalhes em [9].

Teorema 3.1.3 (Divisão Euclidiana). *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que*

$$a = b \cdot q + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Os números a , b , q e r são chamados, respectivamente, dividendo, divisor, quociente e resto da divisão de a por b .

Demonstração: Considere o conjunto $S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup \{0\})$. Pela propriedade Arquimediana, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \cdot (-b) > -a$, ou seja, $a - nb > 0$, isso mostra que S é não vazio. Por outro lado, o conjunto S é limitado inferiormente por $x = 0$, e portanto, pelo Princípio da Boa Ordenação (PBO) segue que S possui um elemento mínimo r tal que $r = a - bq \geq 0$.

Afirmção: $r < |b|$. Suponhamos, por absurdo, que $r \leq |b|$. Dessa forma, existe $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = |b| + s$, ou seja, $0 \leq s < r$. Mas isso contradiz o fato de r ser o menor elemento de S , pois $s = a - (q \pm 1)b \in S$, com $s < r$. Logo, $r < |b|$.

Para provar a unicidade, suponha que $a = bq + r = bq_1 + r_1$, com $q, q_1, r, r_1 \in \mathbb{Z}$ e $0 < r, r_1 \leq |b|$. Daí, temos que

$$-|b| < -r \leq r_1 - r < |b| \Rightarrow -|b| < r_1 - r < |b| \Rightarrow |r_1 - r| < |b|.$$

Por outro lado, é trivial perceber que $r = a - bq$ e $r_1 = a - bq_1$. Assim, segue que

$$\begin{aligned} r_1 - r = b(q - q_1) &\Rightarrow |b| \cdot |q - q_1| = |r_1 - r| < |b| \\ &\Rightarrow 0 \leq |q - q_1| < 1 \Rightarrow |q - q_1| = 0 \\ &\Rightarrow q = q_1 \Rightarrow r = r_1. \end{aligned}$$

■

Para se provar a existência do máximo divisor comum entre dois inteiros não negativos, utiliza-se o resultado a seguir, conhecido como *Lema de Euclides*.

Lema 3.1.1 *Sejam $a, b, n \in \mathbb{Z}$. Se existe $\text{mdc}(a, b - na)$, então $\text{mdc}(a, b)$ existe e*

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(a, b - na).$$

Demonstração: Seja $d = \text{mdc}(a, b - na)$. Como d divide a e d divide $(b - na)$, segue que d divide $b = b - na + na$. Portanto, d é um divisor comum de a e b .

Suponhamos agora, que c seja um divisor comum de a e b . Daí, segue que c é um divisor comum de a e $(b - na)$, e portanto, c divide d . Logo, $d = \text{mdc}(a, b)$. ■

Finalmente, apresentaremos o *algoritmo de Euclides*, resultado útil para o desenvolvimento de frações contínuas.

Teorema 3.1.4 (Algoritmo de Euclides). *Para os inteiros a e $b > 0$, aplique sucessivamente o algoritmo da divisão para obter a série de equações:*

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1, & 0 \leq r_1 < b; \\ b &= r_1q_2 + r_2, & 0 \leq r_2 < r_1; \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3, & 0 \leq r_3 < r_2; \\ &\dots \\ r_{j-2} &= r_{j-1}q_j + r_j, & 0 \leq r_j < r_{j-1}; \\ r_{j-1} &= r_jq_{j+1}. \end{aligned}$$

O maior divisor comum de a e b será r_j , ou seja, o último resto não nulo da sequência de divisões acima.

Demonstração: A sequência de restos nas divisões acima não pode diminuir indefinidamente, pois $0 \leq r_j < r_{j-1}$ e existe um número finito de naturais menores do que b . Assim para algum j teremos $r_{j+1} = 0$. A equação $r_{j-1} = r_jq_{j+1}$ nos diz que $\text{mdc}(r_{j-1}, r_j) = r_j$. Pelo Lema de Euclides temos que,

$$r_j = \text{mdc}(r_{j-1}, r_j) = \text{mdc}(r_{j-1}, r_{j-2}) = \dots = \text{mdc}(r_1, r_2) = \text{mdc}(r_1, b) = \text{mdc}(a, b).$$

■

3.2 Expansão de números racionais em frações contínuas

Dado um número racional $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$ é possível escrevê-lo, por meio de simples manipulações algébricas, como fração contínua simples finita, conforme é apresentado a seguir.

Exemplo 3.2.4 Podemos escrever cada uma das frações abaixo como uma fração contínua simples.

(a) $\frac{75}{23}$.

$$\begin{aligned}\frac{75}{23} &= \frac{69}{23} + \frac{6}{23} = 3 + \frac{1}{\frac{23}{6}} = 3 + \frac{1}{\frac{18}{6} + \frac{5}{6}} \\ &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{6}{5}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} \\ &= [3; 3, 1, 5].\end{aligned}$$

(b) $\frac{23}{75}$.

$$\begin{aligned}\frac{23}{75} &= \frac{0}{75} + \frac{23}{75} = 0 + \frac{1}{\frac{75}{23}} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}} \\ &= [0; 3, 3, 1, 5].\end{aligned}$$

(c) $-\frac{75}{23}$.

$$\begin{aligned}-\frac{75}{23} &= -\frac{69}{23} - \frac{6}{23} = -3 - \frac{6}{23} + \frac{23}{23} - 1 = -4 + \frac{17}{23} \\ &= -4 + \frac{1}{\frac{23}{17}} = -4 + \frac{1}{\frac{17}{17} + \frac{6}{17}} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{6}{17}} \\ &= -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{17}{6}}} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{12}{6} + \frac{5}{6}}} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{6}{5}}}} \\ &= -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{5}{5} + \frac{1}{5}}}} = -4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}} = [-4; 1, 2, 1, 5].\end{aligned}$$

Pode-se ainda, utilizar o algoritmo de Euclides apresentado na seção anterior para obter a representação em frações contínuas simples de um número racional $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$.

Exemplo 3.2.5 Para calcular a fração contínua, obtida no Exemplo 3.2.4, do número racional $\frac{75}{23}$ pelo algoritmo de Euclides, realizamos as divisões sucessivas e utilizamos os quocientes parciais como termos da fração contínua. Isto é,

$$\begin{aligned}75 &= 3 \cdot 23 + 6 \\ 23 &= 3 \cdot 6 + 5 \\ 6 &= 1 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0\end{aligned}$$

E com isso,

$$\frac{75}{23} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = [3; 3, 1, 5].$$

Qualquer número racional possui uma representação em frações contínuas simples finita.

O teorema a seguir comprova essa afirmação.

Teorema 3.2.5 *Qualquer fração contínua simples finita representa um número racional. Reciprocamente, qualquer número racional pode ser representado por uma fração contínua simples finita.*

Demonstração: A demonstração da primeira parte é óbvia, pois dada uma fração contínua simples finita, podemos transformá-la em um número racional com simples operações elementares. Para a recíproca, consideremos um número racional $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$ qualquer. Pela divisão euclidiana teremos,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}, \quad (3.5)$$

com $0 \leq r_1 < q$, onde a_0 é o maior inteiro menor que $\frac{p}{q}$, que denotaremos por $a_0 = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$. Se $r_1 = 0$, $\frac{p}{q}$ é um número inteiro, não há nada a fazer. Caso contrário, escrevemos

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \text{ com } 0 < r_1 < q.$$

Repetindo o procedimento com a fração $\frac{q}{r_1}$ teremos,

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \text{ com } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Se $r_2 = 0$, o processo termina e,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1].$$

Se $r_2 \neq 0$, repetimos o mesmo procedimento com a fração $\frac{r_1}{r_2}$. Note que esse procedimento é finito. Para algum n teremos $r_n = 0$, pois $q > r_1 > r_2 > \dots >$ é uma sequência decrescente de inteiros positivos. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r_1}{q}, \quad 0 < r_1 < q, \\ \frac{q}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1}, \quad 0 < r_2 < r_1, \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = a_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, \quad 0 < r_{n-1} < r_{n-2},$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1}, \quad r_n = 0.$$

E portanto,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}]. \quad (3.6)$$

■

As frações contínuas finitas simples, usadas para representar números racionais não são únicas, existem duas maneiras diferentes de escrever o mesmo número racional com fração contínua simples.

Teorema 3.2.6 *Todo número racional pode ser representado de duas maneiras distintas sob a forma de fração contínua simples.*

Demonstração: Na expansão da fração contínua simples, sempre que o termo $a_n > 1$, podemos escrevê-lo como $(a_n - 1) + \frac{1}{1}$. Dessa maneira, teremos duas formas de expressar a fração contínua simples. Ou seja,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n].$$

A fração $\frac{p}{q}$ também poderá ser representado como;

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{(a_{n-1}) + \frac{1}{1}}}}}} = [a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, 1].$$

■

Percebe-se no exemplo a seguir que uma expansão terá quantidade par de termos, enquanto no outra terá uma quantidade ímpar.

Exemplo 3.2.6 Considere o número $\frac{122}{53}$ cuja expansão está representada a seguir,

$$\frac{122}{53} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}} = [2, 3, 3, 5].$$

Note que $a_n = 5$. Então, fazendo a substituição $(5 - 1) + \frac{1}{1}$, obtém-se,

$$\frac{122}{53} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1}}}} = [2, 3, 3, 4, 1].$$

E daí, conclui-se que

$$\frac{122}{53} = [2; 3, 3, 5] = [2; 3, 3, 4, 1].$$

Ressalta-se que o procedimento utilizado para demonstrar o Teorema 3.2.5, pode ser adaptado para o caso em que $r_{n+1} = 0$ para algum n , pois

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q} \Rightarrow p = a_0q + r_1 \Rightarrow \frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{\frac{q}{r_1}}, \quad 0 < r_1 < q.$$

Daí, repetindo o feito acima teremos,

$$\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow q = a_1r_1 + r_2, \quad 0 < r_2 < r_1,$$

...

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = a_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \Rightarrow r_{n-2} = a_{n-1}r_{n-1} + r_n, \quad 0 < r_n < r_{n-1},$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = a_n + \frac{r_{n+1}}{r_n} \Rightarrow r_{n-1} = a_nr_n, \quad r_{n+1} = 0.$$

Nesse caso, o desenvolvimento é o algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum, que pode ser usado para obter a representação de um número racional $\frac{p}{q}$, com $q \neq 0$ em frações contínuas simples, conforme fizemos no Exemplo 3.2.5.

Finalizaremos esta seção mostrando como obter a fração contínua do inverso de um número racional, a partir da sua representação em frações contínuas finita simples.

Proposição 3.2.1 Seja $\frac{p}{q}$ um número racional positivo tal que $p > q$.

$$\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_n] \text{ se, e somente se, } \frac{q}{p} = [0; a_0, a_1, a_2, a_n].$$

Demonstração: Se $p > q$, então $\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$.

Mas, $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_n]$, e portanto,

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Mostraremos que a recíproca é verdadeira. Pela hipótese temos,

$$\frac{q}{p} = 0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n].$$

Daí, segue-se que

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\frac{q}{p}} = \frac{1}{0 + \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Onde,

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n].$$

■

Exemplo 3.2.7 Se $\frac{164}{31} = [5; 3, 2, 4]$, então $\frac{31}{164} = [0; 5, 3, 2, 4]$.

3.3 Expansão de números irracionais em frações contínuas

Na seção anterior, vimos que um número racional pode ser representado por uma fração contínua finita simples e vice-versa. A seguir, mostraremos, baseados em [1] e [3], que todo irracional também poderá ser expandido em frações contínuas. Para isso, bastará realizar algumas substituições sucessivas de acordo com o seguinte processo.

Seja x um número irracional qualquer e $a_0 = [x]$, onde $[x]$ significa que a_0 é o maior inteiro menor do que x . Podemos escrever x como

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}; \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1.$$

Assim, $x_1 = \frac{1}{x - a_0} > 1$ é um número irracional. De modo análogo, x_1 pode ser escrito como segue

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}; \quad a_1 = [x_1] \text{ e } 0 < \frac{1}{x_2} < 1.$$

Conseqüentemente, $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} > 1$ também é um número irracional.

Se repetirmos esse processo obtemos,

$$\begin{aligned} x_2 &= a_2 + \frac{1}{x_3}; \quad x_3 > 1, \quad a_2 > 1 \\ x_3 &= a_3 + \frac{1}{x_4}; \quad x_4 > 1, \quad a_3 > 1 \\ &\dots \\ x_n &= a_n + \frac{1}{x_{n+1}}; \quad x_{n+1} > 1, \quad a_n > 1, \end{aligned} \tag{3.7}$$

onde, $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, são inteiros e $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, são irracionais. Perceba que esse processo não acaba, pois, caso contrário, teríamos $x_n = a_n$ para algum n . No entanto, isso é impossível, uma vez que x_n é um número irracional para todo n .

Desta forma, fazendo substituições adequadas no processo acima, teremos a fração contínua simples infinita que representa o número irracional x . Isto é,

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} \\ &\dots \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n + \dots}}}} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]. \end{aligned}$$

Exemplo 3.3.8 *Como obter uma expansão em fração contínua do número $\sqrt{5}$.*

Temos, $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$, ou seja, $2 < \sqrt{5} < 3$. Daí, segue que $a_0 = [\sqrt{5}] = 2$.

Logo, podemos escrever

$$\sqrt{5} = a_0 + \frac{1}{x_1} = 2 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = 2 + \sqrt{5}.$$

Substituindo x_1 em $\sqrt{5} = 1 + \frac{1}{x_1}$ obtemos $\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}$.

De modo análogo, procedemos com $(2 + \sqrt{5})$. É fácil ver que $4 < 2 + \sqrt{5} < 5$, e consequentemente, $a_1 = \lfloor 2 + \sqrt{5} \rfloor = 4$. Então,

$$2 + \sqrt{5} = 4 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{5} - 2} = 2 + \sqrt{5}.$$

Substituindo novamente obtemos,

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \sqrt{5}}}$$

Ao repetirmos esse processo acima, teremos $a_2 = \lfloor 2 + \sqrt{5} \rfloor = 4$ e $x_3 = 2 + \sqrt{5}$.

Fica evidente, portanto que

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\ddots}}}} = [2; 4, 4, 4, \dots],$$

é a expansão em fração contínua simples do número $\sqrt{5}$.

Exemplo 3.3.9 *Como expressar $-\sqrt{3}$ como fração contínua simples.*

Sendo $-2 < -\sqrt{3} < -1$ segue que $a_0 = -2$. Além disso,

$$-\sqrt{3} = -2 + \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}.$$

Com isso, temos

$$-\sqrt{3} = -2 + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}.$$

Agora, $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$ e, portanto, $a_1 = \lfloor 2 + \sqrt{3} \rfloor = 3$, o que nos leva a

$$2 + \sqrt{3} = 3 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

E a expansão ficará,

$$-\sqrt{3} = -2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}}.$$

Continuando temos, $a_2 = \lfloor \frac{1+\sqrt{3}}{2} \rfloor = 1$ e

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2} - 1} = 1 + \sqrt{3}.$$

Substituindo mais uma vez teremos,

$$-\sqrt{3} = -2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \sqrt{3}}}}.$$

Segue que $a_3 = \lfloor 1 + \sqrt{3} \rfloor = 2$ e que

$$1 + \sqrt{3} = 2 + \frac{1}{x_4} \Rightarrow x_4 = \frac{1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

A partir desse ponto, notamos que $x_2 = x_4$ e obviamente os termos da fração começam a se repetir de maneira ordenada. Finalmente, a expansão de $-\sqrt{3}$ será

$$-\sqrt{3} = -2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}} = [-2; 3, 1, 2, 1, 2, \dots].$$

Quando os denominadores dos quocientes parciais se repetem, como no exemplo acima, a fração contínua chama-se periódica e podemos representá-la com a seguinte notação:

$$-\sqrt{3} = [-2; 3, \overline{1, 2}, \dots].$$

Exemplo 3.3.10 *Como expressar π em fração contínua.*

Sabemos que $\pi = 3, 1415926535897932 \dots$. Logo, $a_0 = \lfloor \pi \rfloor = 3$.

De $x = a_0 + \frac{1}{x_1}$ tiramos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} = 0,1415926535897932\dots &\Rightarrow x_1 = \frac{1}{0,1415926535897932\dots} \\ &\Rightarrow x_1 = 7,06251331041\dots \\ &\Rightarrow x_1 = 7 + 0,06251331041\dots \end{aligned}$$

E daí, $a_1 = 7$.

Continuando, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_2} = 0,06251331041\dots &\Rightarrow x_2 = \frac{1}{0,06251331041\dots} \\ &\Rightarrow x_2 = 15,9965932606\dots \\ &\Rightarrow x_1 = 15 + 0,9965932606\dots \end{aligned}$$

Logo, $a_2 = 15$.

Procedendo de maneira análoga,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_3} = 0,9965932606\dots &\Rightarrow x_3 = \frac{1}{0,9965932606\dots} \\ &\Rightarrow x_3 = 1,00341838495\dots \\ &\Rightarrow x_1 = 1 + 0,00341838495\dots \end{aligned}$$

E, segue que $a_3 = 1$.

Repetindo esse processo, encontramos $a_4 = 292$, $a_5 = 1$, $a_6 = 1$, $a_7 = 1$, $a_8 = 2$, \dots

Portanto,

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}}}}}$$

Sempre que $x = \sqrt{n}$, em que n é um número natural que não é quadrado perfeito, é possível encontrarmos expansões em frações contínuas simples ou não simples do seguinte modo:

1. Encontramos dois números naturais a e b tais que $n = a^2 + b$ e calculamos

$$\begin{aligned}\sqrt{n} - a &= \frac{(\sqrt{n} - a) \cdot (\sqrt{n} + a)}{(\sqrt{n} + a)} \\ &= \frac{n - a^2}{\sqrt{n} + a} \\ &= \frac{b}{2a + \sqrt{n} - a};\end{aligned}\tag{3.8}$$

2. Em seguida substituímos sucessivamente $\sqrt{n} - a$ por $\frac{b}{2a + \sqrt{n} - a}$ em (3.8). Com isso, obtemos a fração contínua

$$\sqrt{n} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}}}$$

Exemplo 3.3.11 Expressar $\sqrt{11}$ como fração contínua utilizando o método descrito.

Solução. Note que $11 = 3^2 + 2$.

Logo,

$$\sqrt{11} - 3 = \frac{(\sqrt{11} - 3) \cdot (\sqrt{11} + 3)}{(\sqrt{11} + 3)} = \frac{11 - 3^2}{\sqrt{11} + 3} = \frac{2}{6 + \sqrt{11} - 3}.$$

A partir daí, realizamos as substituições sucessivas

$$\begin{aligned}\sqrt{11} - 3 &= \frac{2}{6 + \frac{2}{6 + \sqrt{11} - 3}} \\ &= \frac{2}{6 + \frac{2}{6 + \frac{2}{6 + \sqrt{11} - 3}}}}.\end{aligned}$$

Daí, concluí-se que

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{2}{6 + \frac{2}{6 + \frac{2}{6 + \frac{2}{6 + \dots}}}}$$

■

3.3.1 Convergentes e boas aproximações

Conforme apresentado na Seção 2.2 os convergentes de uma fração contínua de um número real x nos fornecem aproximações para ele. Quando temos um número racional, a fração contínua é finita e o último convergente é igual ao próprio x . Apresentaremos a seguir, o caso dos números irracionais, onde os convergentes da fração contínua infinita nos dão apenas aproximações cada vez mais precisas para x .

Exemplo 3.3.12 *Considerando a fração contínua de $\sqrt{5}$ obtida no Exemplo 3.3.8, observe o comportamento dos seus primeiros convergentes.*

Sabemos que $\sqrt{5} = [2; 4, 4, 4, \dots]$. Assim, basta proceder como explicitado pela Definição 2.2.3, isto é, $a_0 = 2, a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \dots = a_{n+1} = 4$.

Logo,

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = 2; \\ C_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1} = \frac{4 \cdot 2 + 1}{4} = \frac{9}{4} = 2, 25; \\ C_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{4 \cdot 9 + 2}{4 \cdot 4 + 1} = \frac{38}{17} = 2, 23529411765; \\ C_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{4 \cdot 38 + 9}{4 \cdot 17 + 4} = \frac{161}{72} = 2, 23611111111; \\ C_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \frac{4 \cdot 161 + 38}{4 \cdot 72 + 17} = \frac{682}{305} = 2, 23606557377; \\ C_5 &= \frac{p_5}{q_5} = \frac{a_5 \cdot p_4 + p_3}{a_5 \cdot q_4 + q_3} = \frac{4 \cdot 682 + 161}{4 \cdot 305 + 72} = \frac{2889}{1292} = 2, 23606811146. \end{aligned}$$

Utilizando uma calculadora, percebemos que $\sqrt{5} = 2, 2360679775 \dots$. Então, analisando esses seus primeiros convergentes é possível notar uma aproximação considerável de $\sqrt{5}$. Percebe-se também que os convergentes de ordem par se aproximam por falta e os de ordem ímpar por excesso.

Exemplo 3.3.13 *Vamos aproximar o número π utilizando o seu desenvolvimento em fração contínua obtida no Exemplo 3.3.10.*

Seus primeiros convergentes são:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} = \frac{3}{1} = 3 \\
C_1 &= \frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 \cdot a_0 + 1}{a_1} = \frac{7 \cdot 3 + 1}{7} = \frac{22}{7} = 3,142857142857 \\
C_2 &= \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{15 \cdot 22 + 3}{15 \cdot 7 + 1} = \frac{333}{106} = 3,141509433962 \\
C_3 &= \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{1 \cdot 333 + 22}{1 \cdot 106 + 7} = \frac{355}{113} = 3,141592920354 \\
C_4 &= \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \frac{292 \cdot 355 + 333}{292 \cdot 113 + 106} = \frac{103993}{33102} = 3,14159265012.
\end{aligned}$$

Esse exemplo é especialmente interessante, pois o convergente $C_1 = \frac{22}{7}$ representa a mesma aproximação obtida por Arquimedes para o número π . No entanto, os historiadores não conseguem afirmar que ele tenha utilizado frações contínuas.

Observando o valor $\pi = 3,1415926535897962\dots$ é fácil ver que o quarto convergente já nos fornece uma aproximação com oito casas decimais corretas. O que é bastante razoável. Mais uma vez os convergentes de ordem par se aproximam por falta e os de ordem ímpar por excesso.

Para um melhor entendimento dos próximos resultados dessa Seção iremos descrever um conjunto de definições da Análise Matemática. O leitor interessado em se aprofundar no assunto pode consultar [11].

Definição 3.3.4 *Uma sequência $\{x_n\}$ diz-se limitada superiormente quando existe um número real b tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Analogamente, diz-se que uma sequência $\{x_n\}$ é limitada inferiormente quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Evidentemente, uma sequência é limitada, se e somente se, é limitada superiormente e inferiormente.*

Definição 3.3.5 *As sequências crescentes, não crescentes, decrescentes e não decrescentes são chamadas de sequências monótonas.*

Definição 3.3.6 *Diz-se que um número real a é o limite da sequência $\{x_n\}$ de números reais, e escreve-se $a = \lim x_n$ ou $a = \lim_{x \rightarrow \infty} x_n$, quando para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$ sempre que $n > n_0$.*

Quando $\lim x_n = a$, dizemos que a sequência $\{x_n\}$ converge para a . Logo, a sequência que possui limite é chamada convergente.

Teorema 3.3.7 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração: O leitor encontrará uma demonstração para esse Teorema em [11], página 111. ■

Para fundamentar o que está exposto nos Exemplos 3.3.12 e 3.3.13, apresentamos os seguintes resultados.

Proposição 3.3.2 *Os convergentes de frações contínuas simples infinitas satisfazem:*

$$1. C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}}, \quad k \geq 1;$$

$$2. C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^{k-2} \cdot a_k}{q_k \cdot q_{k-2}}, \quad k \geq 2.$$

Demonstração:

1. Pelo Teorema 2.2.2, temos que os convergentes de uma fração contínua obedecem a relação

$$p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1}.$$

Para $k \geq 1$, basta dividir essa expressão por $(q_k \cdot q_{k-1})$, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{p_k \cdot q_{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}} - \frac{p_{k-1} \cdot q_k}{q_k \cdot q_{k-1}} &= \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}} \Rightarrow \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}} \\ &\Rightarrow C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}}. \end{aligned}$$

2. Note que

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_k}{q_k \cdot q_{k-2}}.$$

Lembre-se que $p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}$ e $q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}$, podemos escrever

$$\begin{aligned} p_k \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_k &= (a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}) \cdot q_{k-2} - (a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}) \cdot p_{k-2} \\ &= a_k \cdot (p_{k-1} \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_{k-1}) = (-1)^{k-2} \cdot a_k. \end{aligned}$$

Logo,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^{k-2} \cdot a_k}{q_k \cdot q_{k-2}}.$$

■

Teorema 3.3.8 *Os convergentes de uma fração contínua simples infinita formam uma sequência C_0, C_1, C_2, \dots que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Os convergentes de ordem par C_{2k} formam uma sequência crescente.*
2. *Os convergentes de ordem ímpar C_{2k+1} formam uma sequência decrescente.*

3. *Todo convergente de ordem par é menor do que qualquer convergente de ordem ímpar.*
4. *Cada convergente C_k , $k \geq 2$ está entre os convergentes C_{k-1} e C_{k-2} .*
5. *Os termos da sequência $\{C_k\}$ satisfazem*

$$C_0 < C_2 < C_4 < \cdots < C_{2k} < \cdots < \cdots < C_{2k+1} < \cdots < C_5 < C_3 < C_1.$$

Demonstração: Lembre-se que $a_k > 0$, para $k \geq 1$ e $q_k > 0$, para $k \geq 0$.

Pela Proposição 3.3.2; (2) temos,

$$C_{2k} - C_{2k-2} = \frac{(-1)^{2k-2} \cdot a_{2k}}{q_{2k} \cdot q_{2k-2}} > 0 \Rightarrow C_{2k-2} < C_{2k}. \quad (3.9)$$

$$C_{2k+1} - C_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1} \cdot a_{2k+1}}{q_{2k+1} \cdot q_{2k-1}} > 0 \Rightarrow C_{2k+1} < C_{2k-1}. \quad (3.10)$$

Pela Proposição 3.2.2; (1) obtemos

$$C_{2k} - C_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k-1}}{q_{2k} \cdot q_{2k-1}} < 0 \Rightarrow C_{2k} < C_{2k-1} \quad (3.11)$$

e

$$C_{2k+1} - C_{2k} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k+1} \cdot q_{2k}} > 0 \Rightarrow C_{2k+1} > C_{2k} \quad (3.12)$$

A expressão (3.9) mostra que $\{C_{2k}\}$ é uma sequência crescente, a expressão (3.10) mostra que $\{C_{2k+1}\}$ é uma sequência decrescente e a expressão (3.11) mostra a veracidade da afirmação do item 3. Comparando as expressões (3.9), (3.10) e (3.12), podemos escrever

$$C_{2k-2} < C_{2k} < C_{2k+1} < C_{2k-1}. \quad (3.13)$$

Isso mostra o resultado (4). Agora, em (3.13), fazendo

- $k = 1$, obtemos $C_0 < C_2 < C_3 < C_1$;
- $k = 2$, obtemos $C_2 < C_4 < C_5 < C_3$. Portanto, $C_0 < C_2 < C_4 < C_5 < C_3 < C_1$;
- $k = 3$, obtemos $C_4 < C_6 < C_7 < C_5$. Daí,

$$C_0 < C_2 < C_4 < C_6 < C_7 < C_1 < C_5 < C_3 < C_1.$$

Continuando com esse raciocínio e comparando as desigualdades concluímos que

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots < C_{2k} < \dots < \dots < C_{2k+1} < \dots < C_5 < C_3 < C_1.$$

Demonstrando assim, o teorema. ■

Podemos deduzir da Definição 3.3.4 que a sequência dos convergentes de ordem par é limitada superiormente por C_1 e a sequência dos convergentes de ordem ímpar é limitada inferiormente por C_0 . Logo, pela Definição 3.3.5, essas sequências são monótonas. Consequentemente, Teorema 3.3.7 garante que elas convergem.

Mais precisamente, o próximo Teorema mostra que as sequências dos convergentes de ordem par e ímpar de uma função contínua infinita convergem para o mesmo limite. Mais adiante, provaremos que esse limite é, na verdade, o número irracional que gerou a fração contínua.

Teorema 3.3.9 *Toda fração contínua simples infinita é convergente e seu limite L é*

$$L = \lim_{k \rightarrow \infty} C_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} C_{2k+1}.$$

Demonstração: Sejam L_p o limite da sequência $C_0, C_2, C_4, \dots, C_{2k}, \dots$ e L_i o limite da sequência $C_1, C_3, C_5, \dots, C_{2k+1}, \dots$, mostraremos que $L_p = L_i$.

Pela Proposição 3.3.2, (1), tomando-se $k = 2n$ teremos que

$$C_{2n} - C_{2n-1} = \frac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n}q_{2n-1}} = \frac{-1}{q_{2n}q_{2n-1}}.$$

Assim, $C_{2n} - C_{2n-1} \rightarrow 0$, pois os valores de q_n são inteiros positivos e $q_{n+1} < q_n$, dado que

$$q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \in \mathbb{N}.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (C_{2n} - C_{2n-1}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} C_{2n-1}.$$

Logo, $L_p = L_i = L$. ■

O próximo teorema nos diz que a sequência dos convergentes de uma fração contínua simples infinita tem como limite um número irracional.

Teorema 3.3.10 *A sequências dos convergentes $\{C_k\}_{k=0}^{\infty}$ converge para um número irracional.*

Demonstração: Suponhamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = L = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$.

Logo,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p}{q} \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = \frac{p}{q}.$$

Pelo Teorema 3.3.7, podemos escrever

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} < \frac{p}{q} < \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}.$$

Daí,

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} > \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p_{2k+1}q - pq_{2k+1}}{qq_{2k+1}} > 0.$$

Ora, $p_{2k+1}q - pq_{2k+1} \in \mathbb{Z}$ e $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} > \frac{p}{q}$. Logo, $p_{2k+1}q - pq_{2k+1} \geq 1$. Dividindo ambos os membros dessa última inequação por $(q_{2k+1}q)$ obtemos,

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{q_{2k+1}q}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p}{q} &< \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} \\ \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p}{q} &< C_{2k+1} - C_{2k} \\ \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p}{q} &< \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{q_{2k+1}q} < \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}}$$

Logo, $q_{2k} < q$ para todo $k \geq 1$ é uma contradição, pois $\{q_k\}$ é uma sequência crescente. ■

Definição 3.3.7 Considere a fração contínua simples infinita $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots]$. Defina-se cauda de ordem n da fração contínua x a fração contínua

$$x_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots]. \quad (3.14)$$

Para verificar que $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, x_n]$, consideremos a sequência, $a_0; a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ e a sequência dos convergentes C_n . Pela Equação (3.3) segue que

$$\begin{aligned} x &= a_0 + \frac{1}{x_1} = [a_0; x_1] = \left[a_0; a_1 + \frac{1}{x_2} \right] \\ &= [a_0; a_1, x_2] = \left[a_0; a_1, a_2 + \frac{1}{x_3} \right] \\ &= [a_0; a_1, a_2, x_3] = \left[a_0; a_1, a_2, a_3 + \frac{1}{x_4} \right] \\ &= [a_0; a_1, a_2, a_3, x_4] = [a_0; a_1, a_2, a_3, \dots, x_n], \end{aligned}$$

com $x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}}$. Logo,

$$a_n < x_n < a_n + 1 \text{ e } x = \frac{x_n \cdot p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n \cdot q_{n-1} + q_{n-2}} \quad (3.15)$$

Dito, iremos demonstrar que o limite L para o qual a sequência dos convergentes tende é, na verdade, o próprio número irracional que deu origem a fração contínua.

Teorema 3.3.11 *Se um número irracional positivo x é expandido em uma fração contínua simples infinita $[a_0; a_1, a_2, \dots]$, então $\lim_{k \rightarrow \infty} C_k = x$, onde $\{C_k\}$ é a sequência dos convergentes da fração contínua $[a_0; a_1, a_2, \dots]$.*

Demonstração: Temos,

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{x_n}}}}}$$

Onde x_n é a Cauda de ordem n da fração contínua x . Como $x_{n+1} > a_{n+1}$, então

$$\begin{aligned} x_n = a_n + \frac{1}{x_{n+1}} < a_n + \frac{1}{a_{n+1}} &\Rightarrow a_n < x_n < a_n + \frac{1}{a_{n+1}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{a_n} > \frac{1}{x_n} > \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_{n+1}}} \end{aligned}$$

Baseando-se nessas relações acima segue

$$\begin{aligned} C_0 &= a_0 < x_0 < a_0 + \frac{1}{a_1} < C_1 \Rightarrow C_0 < x < C_1; \\ C_1 &= a_0 + \frac{1}{a_1} > x = a_0 + \frac{1}{x_1} > a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2}} = C_2 \Rightarrow C_2 < x < C_1 \\ C_3 &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} > x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} > a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4}}}} = C_4 \\ &\Rightarrow C_4 < x < C_3. \end{aligned}$$

Continuando com esse raciocínio, pode-se concluir que

$$C_{2k} < x < C_{2k+1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Pelo Teorema do Confronto, demonstrado em [11] tem-se que: sendo $x_n < z_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $\lim x_n = \lim y_n = a$, então $\lim z_n = a$. E portanto, $L = x$. ■

Para finalizar, iremos demonstrar que podemos obter aproximações cada vez melhores para o número real que deu origem a fração contínua à medida que aumentamos os índices dos convergentes.

Teorema 3.3.12 *Seja x um número irracional qualquer e $\{C_k\}$ a sequência dos convergentes da fração contínua simples associada a x , então*

$$|x - C_k| < |x - C_{k-1}|, \quad k \geq 1.$$

Demonstração: Consideremos $x = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, x_{k+1}]$, onde $x_{k+1} = [a_{k+1}, a_{k+2}, \dots]$. Pela expressão (3.15) podemos escrever

$$x = \frac{x_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}}{x_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}} \Rightarrow x \cdot (x_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}) = x_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1}.$$

Para $k \geq 1$, essa equação é equivalente a

$$x_{k+1} \cdot (x \cdot q_k + q_{k-1}) = -q_{k-1} \cdot \left(x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right).$$

Dividindo em ambos os membros da igualdade a cima por $(x_{k+1} \cdot q_k)$ e calculando o seu valor absoluto teremos,

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| -\frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k} \right| \cdot \left| x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right|.$$

Como $x_{k+1} > 1$ para $k \geq 1$ e $q_k > q_{k-1} > 0$ segue que $0 < -\frac{q_{k-1}}{x_{k+1}q_k} < 1$. Daí, conclui-se que

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \left| x - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} \right| \Rightarrow |x - C_k| < |x - C_{k-1}|, \quad k \geq 1.$$

■

4 APLICAÇÕES

Apresentamos neste capítulo algumas situações em que utilizamos a teoria das frações contínuas para resolver problemas. Consideramos que partir de uma situação problema seja de fundamental importância para introduzir o estudo das frações contínuas no ensino básico e atrair a atenção dos estudantes desse nível de ensino.

O desenvolvimento de algumas ideias referentes as frações contínuas e suas aplicações apresentam-se como uma excelente oportunidade de representar e mostrar, em nível bastante elementar, alguns números irracionais importantes, como o número de ouro, π , o número de Euler, e as raízes não exatas. Além disso, as frações contínuas permitem a distinção entre números irracionais e racionais de forma bastante clara. Qualquer aluno de nível médio aprende facilmente que o número é racional quando a fração contínua é finita e irracional quando ela é infinita.

4.1 O problema do calendário

Ao longo dos séculos a humanidade desenvolveu diversos calendários. O objetivo inicial era prever as estações, determinar épocas ideais para o plantio e colheitas ou mesmo estabelecer quando deveriam ser comemorados feitos militares ou realizadas atividades religiosas.

Para medir os ciclos, muitos povos valeram-se da lua, bem como outros do sol.

Atualmente o calendário mais usado baseia-se no movimento da terra em relação ao sol. O Ano Tropical, intervalo de tempo que a Terra leva para completar o seu trajeto orbital completo em torno do Sol, que equivale as estações do ano, corresponde a 365,242199 dias. Mais precisamente um ano consiste de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 46 segundos.

O fato do ano real não ter número inteiro de dias ocasiona sérios problemas na hora de organizar um calendário, pois este deve determinar da forma mais precisa possível a ocorrência dos fenômenos que dependem da revolução da Terra em torno do se e em torno do sol, como por exemplo, a contagem dos dias, as fases da lua e as estações do ano.

No decorrer do tempo houve diversas tentativas de elaboração de um calendário que representasse com fidedignidade tais fenômenos.

No ano de 46 *A.C.*, por exemplo, Júlio César reformulou o calendário romano para uniformizar os diferentes calendários usados pelos territórios ocupados pelos romanos. Sua proposta consistia em acrescentar um dia ao ano, a cada quatro anos. Assim, depois de 3 anos de 365 dias, o quarto seria de 366 dias (bissexto). Dessa forma o ano juliano tem em média 365,25 dias.

Porém, depois de 16 séculos de uso, a diferença entre o calendário juliano e o movimento real da Terra ao redor do Sol era enorme. O equinócio de primavera, entre outros fenômenos astronômicos, estava ocorrendo 10 dias após a data prevista. Para resolver esse problema, o Papa Gregório XIII proclamou, em 1582, um calendário em que a duração de um ano era aproximadamente $365\frac{97}{400}$ dias. Nesse novo calendário, os múltiplos de 100 deixariam de ser bissextos, exceto pelos múltiplos de 400. Por exemplo, o ano 2000 seria bissexto, mas 2100 não seria.

Utilizando como fundamentação o exposto acima, vamos analisar a construção de um calendário tendo como base a teoria das frações contínuas estudada nos capítulos anteriores.

A parte fracionária do ano $(0,242199)$ deve ser convertida em um dia (ano bissexto), a cada certo intervalo de tempo. Para determinarmos quando isso deve ocorrer, procederemos da seguinte maneira.

1. Determinamos a fração contínua simples da relação entre a quantidade de segundos que excede 365 dias no ano real e a quantidade de segundos que temos em um dia. Assim, temos que $0,242199 = 5\text{ h } 48\text{ min } 46\text{ s} = 20926\text{ s}$ e que $1\text{ dia} = 86400\text{ s}$.

E então

$$\begin{aligned} 0,242199 &\approx \frac{5\text{ h } 48\text{ min } 46\text{ s}}{1\text{ dia}} = \frac{20926\text{ s}}{86400\text{ s}} \\ &= 0 + \frac{1}{4 + \frac{1}{7 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{64}}}}}}} \\ &= [0; 4, 7, 1, 3, 5, 64]. \end{aligned}$$

2. A partir dessa fração contínua, analisamos com a utilização de aproximações pelos seus convergentes, algumas possibilidades para a construção de um calendário e seus respectivos erros em relação ao ano tropical.

Observação 1 *Como estamos interessados em verificar as diferenças entre o ano real e o ano calendário, descartamos o convergente C_0 , pois este representa a parte inteira e não é necessário lembrar que um ano tem 365 dias inteiros.*

• Primeira aproximação:

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = 0 + \frac{1}{4} = 0,25.$$

Esse convergente é a aproximação dada pelo calendário juliano em que os anos bissextos ocorrem a cada 4 anos. Esse erro difere em 11 minutos e 14 segundos do ano real, o que representa um dia a mais a cada 128 anos.

- Segunda aproximação:

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 \cdot p_1 + p_0}{a_2 \cdot q_1 + q_0} = \frac{7 \cdot 1 + 0}{7 \cdot 4 + 1} = \frac{7}{29} = 0,24137931.$$

Com essa aproximação, teríamos 7 anos bissextos a cada 29 anos ou, equivalentemente, 28 a cada 116 anos, em vez dos 29 previstos no calendário juliano, ou seja, teríamos que excluir um dos anos bissextos e transformá-lo em um ano simples. Tal aproximação gera um erro de 1 minuto e 11 segundos a menos que um ano normal. Isso ocasiona um dia a menos a cada 1217 anos.

- Terceira aproximação:

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 \cdot p_2 + p_1}{a_3 \cdot q_2 + q_1} = \frac{1 \cdot 7 + 1}{1 \cdot 29 + 4} = \frac{8}{33} = 0,242424 \dots$$

Nessa aproximação, temos 8 anos bissextos a cada período de 33 anos, com um erro de 19 segundos a mais que o ano tropical, que gera um dia a mais a cada 4547 anos. De maneira equivalente, poderíamos ter 32 anos bissextos (um a menos que o calendário juliano) a cada 132 anos. O impasse com essa aproximação e a anterior seria a elaboração de uma regra para sua aplicação.

- Quarta aproximação:

$$C_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{a_4 \cdot p_3 + p_2}{a_4 \cdot q_3 + q_2} = \frac{3 \cdot 8 + 7}{3 \cdot 33 + 29} = \frac{31}{128} = 0,2421875.$$

É uma aproximação quase exata. O erro de 1 segundo não tem significado prático. Se a utilizássemos, levaríamos 86400 anos para termos um dia de diferença entre o calendário e ano real.

Observação 2 *Foram feitas propostas de utilizar esse calendário. Em 1864, por exemplo, o astrônomo russo Medler tentou introduzi-lo na Rússia no início do século XX. Bastava a cada 128 anos transformar um ano bissexto do calendário juliano em ano simples, uma vez que a cada 128 anos no calendário juliano temos 32 bissextos. Contudo ele não foi aceito. Certamente em razão da dificuldade de se elaborar uma regra prática para o ciclo de 128 anos.*

O problema de escolher o calendário tem apenas 4 soluções viáveis (as mostradas acima). A partir do quinto convergente obtêm-se combinações bastante complexas.

O calendário gregoriano, utilizado atualmente pela maioria dos países, apresenta uma regra um pouco diferente das que foram demonstradas aqui. Conforme relatado, nele

um ano tem $365\frac{97}{400} = 365,2425$ dias e existem 97 anos bissextos a cada ciclo de 400 anos. Os anos bissextos são aqueles que são divisíveis por 4, com exceção dos múltiplos de 100 que não são múltiplos de 400.

Para chegar a essa regra, Gregório XIII considerou tabelas astronômicas existentes na sua época que marcavam a duração de um ano como sendo de 365 dias 5 horas 49 minutos e 16 segundos e que difere em 10 minutos e 44 segundos do ano juliano. Assim para que se acumulasse o erro de um dia seriam necessários

$$\frac{24 \text{ horas}}{10 \text{ minutos } 44 \text{ segundos}} = \frac{86400 \text{ segundos}}{644 \text{ segundos}} \approx 134 \text{ anos.}$$

Logo, para corrigir o erro do calendário juliano precisaria excluir um ano bissexto a cada 134 anos. Porém, pode ocorrer do 134º não ser bissexto. Para contornar isso notou-se que 134 é aproximadamente $\frac{1}{3}$ de 400 e portanto basta excluir 3 anos bissextos a cada 400 anos.

Convém notar que, aparentemente não tendo sido utilizado conhecimentos sobre frações contínuas na elaboração do calendário gregoriano, se considerarmos a aproximação do convergente $C_4 = \frac{31}{128}$ e a regra de três simples

$$\frac{31}{128} = \frac{x}{400},$$

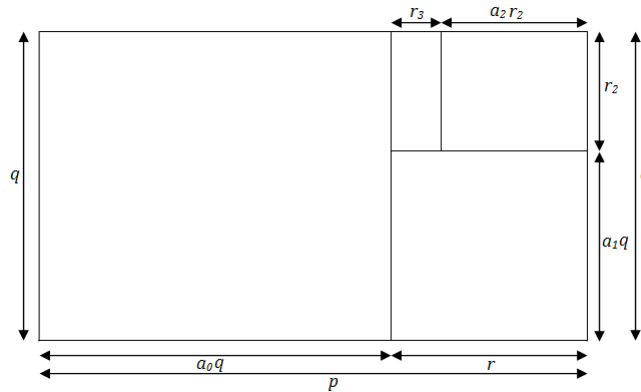
obtemos $x = 96,875$ que é aproximadamente 97 anos bissextos e nos levaria a mesma regra obtida por Gregório XIII.

O calendário gregoriano apresenta uma diferença de 26 segundos em relação ao ano real o que representa um dia a mais a cada 3323 anos. Isso quer dizer que a regra atual vai merecer uma correção com a retirada de 1 dia do calendário a cada 3323 anos aproximadamente a contar de 1582. O que deverá ocorrer por volta de 4905.

4.2 Preenchendo retângulos com quadrados

Considere um retângulo com lados p e q , onde p e q são inteiros positivos primos entre si e $p > q$.

Queremos encher o retângulo $p \times q$ de quadrados “gulosos”, isto é, com a maior área possível sempre utilizando o espaço ainda livre conforme ilustrado na figura e explicado em seguida.

Figura 1: Encher retângulos $p \times q$ de quadrados gulosos.

Fonte: Elaborada pelo autor.

O número inicial de quadrados será $a_0 = \lfloor \frac{p}{q} \rfloor$. Então, segue que $p = a_0 \cdot q + r$, com $0 \leq r < q$. Dividindo ambos os membros da equação por q teremos

$$\frac{p}{q} = \frac{a_0 \cdot q}{q} + \frac{r}{q} = a_0 + \frac{r}{q}.$$

Quando colocamos a_0 quadrados no retângulo $p \times q$ deixamos o retângulo $q \times r$ livre e então o preenchemos com $a_1 = \lfloor \frac{q}{r} \rfloor$ quadrados. Com isso $q = a_1 \cdot r + r_2$, onde $0 \leq r_2 < r$.

Continuando com esse raciocínio, temos que o retângulo livre agora mede $r \times r_2$ e podemos enchê-lo com $a_2 = \lfloor \frac{r}{r_2} \rfloor$ quadrados. Consequentemente, $r = a_2 \cdot r_2 + r_3$ em que $0 \leq r_3 < r_2$.

Sendo p e q são números inteiros, o algoritmo de Euclides nos diz que para algum n natural, teremos $r_{(n-1)} = a_n \cdot r_n$. Portanto, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{r}{a_1 \cdot r + r_2} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 \cdot r + r_2}{r}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r}}. \end{aligned}$$

Substituindo $r = a_2 \cdot r_2 + r_3$ na equação acima obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 \cdot r_2 + r_3}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{a_2 \cdot r_2 + r_3}{r_2}}} \\ &= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}}. \end{aligned}$$

Continuando com as substituições teremos,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Ou seja, a razão entre os lados do retângulo nos fornece uma fração contínua simples que resulta no número total de quadrados que utilizaremos para preencher o retângulo.

Quando os lados do retângulo são números racionais a fração contínua é finita, caso contrário, infinita.

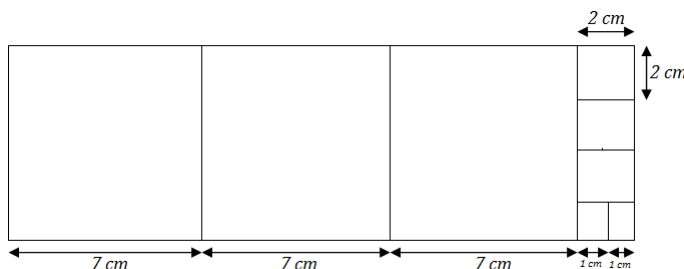
Exemplo 4.2.14 *Considere um retângulo de dimensões $23 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ e vamos preenchê-lo com quadrados gulosos.*

Para isso fazemos,

$$\frac{23}{7} = \frac{21}{7} + \frac{2}{7} = 3 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 3 + \frac{1}{\frac{6}{2} + \frac{1}{2}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = [3; 3, 2].$$

Esta fração contínua indica que serão necessários 8 quadrados para encher o retângulo conforme a figura abaixo.

Figura 2: Preencher retângulos $23 \text{ cm} \times 7 \text{ cm}$ de quadrados gulosos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Outra maneira de obtermos o mesmo resultado é utilizando o algoritmo de Euclides. Ou seja,

$$23 = 7 \cdot 3 + 2$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1$$

$$2 = 1 \cdot 2 + 0,$$

Nessa representação, os quocientes representam as medidas dos lados dos quadrados e os quocientes parciais o número de quadrados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao constatar, através da observação dos manuais didáticos de Matemática, que a teoria das Frações Contínuas não aparece no currículo da educação básica, este trabalho mostra, de maneira simplificada, ser viável inserir essa teoria no currículo das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

As pesquisas mostram, por exemplo, que as melhores aproximações racionais para um número real se dar pelo uso de frações contínuas e não pelo uso da base 10, como tradicionalmente é feito. Logo, essas frações constituem um conteúdo importante da matemática a ser trabalhado, especialmente, no Ensino Médio.

Com o objetivo de auxiliar estudantes e professores, esse trabalho descreve as principais definições, propriedades e algumas aplicações que envolvem o assunto de modo a facilitar sua compreensão.

As Frações Contínuas proporcionam um olhar diferenciado para os números reais, tornando claro a distinção entre números racionais e irracionais; permitem uma articulação entre diversos conceitos matemáticos; mostram-se úteis em diversas aplicações, possibilitando o despertar da curiosidade dos alunos, ajudando a responder os famosos “porquês” e, conseqüentemente, estimulando a aprendizagem.

Os convergentes fornecem poderosa técnica de aproximação de números irracionais por números racionais tornando significativo o seu estudo e o uso no ensino regular.

Portanto, mesmo não fazendo parte do currículo básico, o tema Frações Contínuas se mostra ideal para propiciar situações de ensino-aprendizagem mais significativas e consistentes, pois possibilita uma melhor preparação dos alunos de nível médio para o estudo das funções reais, tema central desta etapa do ensino básico.

REFERÊNCIAS

- [1] ANDRADE, E. X. L., BRACCIALI, C. F. **Frações Contínuas**: algumas propriedades e aplicações - Notas em Matemática Aplicada. vol. 20. São Carlos, SP: SBMAC, 2005.
- [2] **Astronomia e Astrofísica**. Disponível em <http://astro.if.ufrgs.br/index.htm>. Acesso em: 28 jun. 2017.
- [3] BESKIN, N. M. **Frações Contínuas** - Iniciação à Matemática. Editora Mir Moscovo. 1987. Tradução de Pedro Lima.
- [4] BONGIOVANNI, V. **Ano Bissexto** - Revista do Professor de Matemática. n°. 20. Rio de Janeiro, 1992.
- [5] BOYER, C. B. **História da Matemática**, Revista por Uta. C. Merzbach: Tradução Elza F. Gomide.- 2. ed. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.
- [6] CARNEIRO, J. P. Q. **Um Processo Finito para Raíz Quadrada** - Revista do Professor de Matemática. n°. 34. Rio de Janeiro, 1997.
- [7] CASAS, R. L. **Calendários**. Disponível em <http://astro.if.ufrgs.br/index.htm>. Acesso em: 28 jun. 2017.
- [8] DÍAZ, L. J.; JORGE, D. D. R. **Uma Introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas** - 26° Coloquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [9] HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**, 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [10] **História do Calendário**. Disponível em <http://www.portalsaofrancisco.com.br/historia-geral/historia-do-calendario>. Acesso em: 29 jun. 2017.
- [11] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol.1. 12. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2009.
- [12] MOREIRA, C. G. **Frações Contínuas, Representações de Números e Aproximações Diofantinas** - 1° Coloquio de Matemática da Região Sudeste. São João del-Rei, MG: UFSJ, 2011.
- [13] MOREIRA, C. G. T. A; MARTINEZ, F. E. B; SALDANHA, N. C. **Tópicos de Teoria dos Números** - Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

-
- [14] NASCIMENTO, R. S. **Frações Contínuas - Uma Forma de Representar e de Aproximar os Números Irracionais**. 2013. 41 *f.* Dissertação de Mestrado - Universidade do Piauí, Teresina, 2013.
- [15] POMMER, W. M. **A construção de Significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Proposta de Abordagem Envolvendo os Eixos Constituintes dos Números Reais**. 2012. Tese de Doutorado - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2012.
- [16] POMMER, W. M. **Frações Contínuas no Ensino Médio?** - Seminários de Ensino de Matemática/SEMA - FEUSP. Setembro, 2009.
- [17] POMMER, W. M. **O uso de como Tema Articulador no Ensino Médio**. Revista Eletrônica de Matemática - 2013.
- [18] SANTOS, J. P. O. **Introdução a Teoria dos Números** - Coleção Matemática Universitária, 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.
- [19] SILVA, S. S. **Introdução às Frações Contínuas**. 2016, 97 *f.* Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2016.