UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

FRANCISCO ARISTONIO DE ALMEIDA SANTOS

A ANÁLISE COMBINATÓRIA DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR: CONTRIBUIÇÕES PARA A PRÁTICA E PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

FORTALEZA – CEARÁ
2017

FRANCISCO ARISTONIO DE ALMEIDA SANTOS

A ANÁLISE COMBINATÓRIA DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR: CONTRIBUIÇÕES PARA A PRÁTICA E PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Santos, Francisco Aristônio de Almeida .
A análise combinatória de um ponto de vista superior:contribuições para a prática e para a formação do professor de matemática. [recurso eletrônico] / Francisco Aristônio de Almeida Santos. - 2017.
1 CD-ROM: 4 ¾ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 57 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.
Área de concentração: Matemática.
Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Análise Combinatória. 2. Ponto de vista superior. 3. Princípio bijetivo. 4. Conhecimento para o ensino. 5. Princípio Multiplicativo. I. Título.

FRANCISCO ARISTONIO DE ALMEIDA SANTOS

A ANÁLISE COMBINATÓRIA DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR: CONTRIBUIÇÕES PARA A PRÁTICA E PARA A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 20 de julho de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda (PROFMAT/UECE)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (UFC)
Universidade Federal do Ceará – UFC

Prof. Dr. João Marques Pereira (PROFMAT/UECE)
Universidade Estadual do Ceará – UECE

Aos meus pais (Artidônio e Vaulízia).

AGRADECIMENTOS

A Deus nosso pai soberano.

Aos meus pais Artidônio e Vaulízia, mais conhecida como Pretinha, e meus filhos Sâmio e Elohim, as pessoas mais importantes da minha vida.

Aos meus irmãos Aristóteles, Elisângela e Rozanja.

Amo todos vocês!

A minha grande amiga Josefa de Oliveira, mãe do meu filho Elohim e minha companheira durante doze excelentes anos da minha vida.

A todas as pessoas que me ajudaram nessa caminhada acadêmica, em especial às grandes amigas Nilzete e Vaneska, para quem dedico muito carinho e gratidão.

Aos meus amigos do dia-dia em especial, Ilcivan, Nicinha, Lindeilson, Vânia, Plácido e Claudenísio.

Ao meu amigo, professor Joelson.

Ao meu grande amigo e irmão José Nogueira e sua digníssima esposa Roberta Elói.

A todos os colegas mestrandos em especial ao meu grande amigo Ari Claudino, Marcos Freire e Maurício.

Ao meu grande amigo e irmão Elion Souza da Silva.

Ao meu orientador Prof. João Montenegro, que sempre me atendeu prontamente.

Ao nosso querido primeiro coordenador local do Profmat Prof. Ellery, que abraçou a causa do curso e ao atual coordenador Prof. Thiago Caula.

Aos demais professores do nosso mestrado.

A todos que fazem parte de minha vida e que contribuíram direta, ou indiretamente, a chegar tão longe, o meu muito obrigado.

RESUMO

Este texto tem por objetivo fulcral apresentar uma abordagem de Análise Combinatória que amplie o conhecimento do professor de matemática do ensino básico, assumindo os pressupostos de Klein (2010), e sua ideia de *"Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior"*. De acordo com Rangel, Giraldo e Maculan (2014), Klein entende que o professor deve não somente ter conhecimentos específicos sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma *visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da Matemática* como ciência. Trabalharemos, basicamente, a abordagem dada por Muniz Neto (2012), que mostra tópicos de combinatória de modo denso e matematicamente rigoroso e consistente. Entendemos, assim como Klein, que tal compreensão é muito importante para que o professor consiga estabelecer uma visão panorâmica da combinatória que trabalhará na escola. O diferencial de nosso texto, para não se resumir a uma versão diluída do livro de Muniz Neto (2012), é fazer ligações entre esta abordagem e a que ocorre na maioria dos livros-texto e salas de aula do ensino médio, através de exemplos e problemas criativos.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Análise Combinatória. Conhecimento Matemático para o Ensino. Ponto de Vista Superior.

ABSTRACT

The purpose of this text is to present a Combinatorics approach that expands the knowledge of the elementary mathematics teacher, accepting the assumptions of Klein (2010), and his idea of *"Elementary Mathematics from a Higher Standpoint"*. According to Rangel, Giraldo & Maculan (2014), Klein understands that the teacher must not only have specific knowledge about the concepts and theories he teaches, but also know how to relate and articulate them, to understand their scientific nature and historical evolution, in order to develop a vision broad enough to situate them in the landscape of Mathematics as science. We will basically work on the approach given by Muniz Neto (2012), which shows combinatorics' topics in a densely way and mathematically rigorous and consistent. We understand, like Klein, that such an understanding is very important so that the teacher can establish a panoramic view of the combinatorics that will work in the school. The differential of our text, not to summarize a diluted version of Muniz Neto's book (2012), is to make connections between this approach and what happens in most textbooks and high school classrooms, through examples and creative problems.

Keywords: Mathematics Teaching. Combinatorics. Mathematical Knowledge for Teaching. Higher Standpoint.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sempre tive um fascínio pela Matemática. Desde o início dos meus estudos, ainda nos primeiros anos do ensino fundamental, sentia-me atraído pela resolução de situações-problemas envolvendo o raciocínio matemático. Ao concluir o Ensino Médio, comecei a lecionar no ensino fundamental e, logo em seguida, a cursar Licenciatura em Ciências com habilitação em Matemática. Após a conclusão da Licenciatura, comecei a lecionar também no ensino médio e novos desafios surgiram. Buscando formas de lidar com o ensino de adolescentes, percebi que, para ensinar matemática, além do domínio dos conteúdos, é imprescindível tratar o ensino de matemática a partir de um conhecimento de conteúdo que dialogue e se misture com os aspectos pedagógicos e didáticos, no intento de desenvolver no estudante autonomia, raciocínio lógico e espírito crítico.

O Conhecimento Matemático para o Ensino é o conhecimento matemático necessário ao professor para executar o trabalho do ensino da matemática (BALL; THAMES; PHELPS, 2008), partindo das premissas de que o conhecimento de matemática de um professor tem sua especificidade e de que essa especificidade tem implicações diretas para a formação e para a prática do professor (DAVIS; SIMMT, 2006; EVEN; BALL, 2009; FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013 apud RANGEL, 2015).

Dentre os conteúdos de matemática do ensino básico, um que sempre me chamou a atenção foi a Análise Combinatória. O ensino de Análise Combinatória na educação básica é um desafio recorrente para os professores, especialmente por tratar-se de um tópico que possui muitas aplicações diretas e uma riqueza de problemas que, tanto pode despertar o interesse dos alunos, quanto gerar dificuldades, e cabe ao professor trabalhar o conteúdo da melhor maneira possível para contribuir positivamente na construção do conhecimento dos educandos. Para enfrentar os desafios inerentes ao ensino de combinatória, mostra-se nevrálgico que o professor disponha de todas as ferramentas possíveis. Nosso trabalho tem por objetivo apresentar uma abordagem de combinatória que amplie o conhecimento do professor de matemática do ensino básico, assumindo os pressupostos de Klein (2010) que defende que os professores de matemática devem olhar para a Matemática Escolar “de cima”. Klein mostra ter impressões importantes sobre o saber necessário para o ensino, como enfatizam Rangel, Giraldo e Maculan (2014):

> (...) Klein entende que o professor deve não somente ter conhecimentos específicos sobre os conceitos e as teorias que ensina, mas também saber relacioná-los e articulá-los, compreender sua natureza científica e sua evolução histórica, de forma a desenvolver uma visão ampla o suficiente para situá-los no panorama da

> Matemática como ciência. (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2014, p. 2; grifo nosso).

Acreditamos que Klein (2010) é um bom fio condutor para a abordagem que aqui daremos à combinatória. Na esteira do pensamento de Klein, pensamos que o professor necessita saber "mais" acerca de Combinatória, em relação ao que conduzirá junto a seus alunos na sala de aula do ensino básico. Trabalharemos, basicamente, a abordagem dada por Muniz Neto (2012), que mostra tópicos de combinatória de modo denso e matematicamente rigoroso e consistente. Entendemos, assim como Klein, que tal compreensão é muito importante para que o professor consiga estabelecer uma visão panorâmica da combinatória que trabalhará na escola. O diferencial de nosso texto, para não se resumir a uma versão diluída do livro de Muniz Neto (2012), é fazer ligações entre esta abordagem e a que ocorre na maioria dos livros-texto e salas de aula do ensino médio, através de exemplos e problemas criativos.

Esta dissertação está dividida em 5 seções. Na seção 2 apresentamos um breve panorama da obra de Klein (2010), e buscando dialogar com nossa abordagem. Na seção 3 apresentamos várias técnicas elementares que podem ser utilizadas para calcular a quantidade de certas configurações combinatórias sem necessariamente ter de listá-las uma a uma. Na seção 4 apresentamos outras técnicas de contagem não tão elementares como o Princípio da inclusão e exclusão para n conjuntos também conhecido como fórmula de crivo além do Princípio da casa dos Pombos que se constitui numa importante ferramenta na resolução de determinados problemas de combinatória.

Na seção 5 apresentamos as considerações finais do trabalho com as reflexões que tiramos ao longo da pesquisa e escrita deste trabalho, e o que vislumbramos como contribuições para o ensino de combinatória no ensino médio e para o desenvolvimento profissional do professor de matemática.

2 A MATEMÁTICA ELEMENTAR DE UM PONTO DE VISTA SUPERIOR

2.1 SOBRE FÉLIX KLEIN

Felix Christian Klein foi um matemático alemão que nasceu na cidade de Düsseldorf em 25 de abril de 1849 e faleceu em Göttingen em 22 de junho de 1925. Seu trabalho incidiu sobre as geometrias não-euclidianas e as interligações entre a teoria dos grupos e a geometria. Porém, nosso foco é nas contribuições pioneiras de Klein para um campo científico que só começou a se estabelecer como tal algumas décadas depois: A Educação Matemática. Embora a preocupação fulcral de Klein fosse a Matemática, em 1908, as aulas de Matemática que ele lecionou para professores do ensino secundário foram publicadas sob forma de textos, em alemão, com o título *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior). A visão abrangente da disciplina desafiou professores e matemáticos a considerarem a relação entre a aprendizagem da Matemática e a natureza da disciplina matemática.

A obra vem sendo utilizada há décadas como aporte didático e teórico para formações de professores de matemática mundo afora. Klein denuncia o que chamou de *dupla descontinuidade* (que o futuro professor encontra em ir da escola para a universidade e, em seguida, ao voltar à escola para ensinar), evidenciada pelo alemão, ainda tão atual e pertinente mesmo um século depois, e a compreensão do que Klein quis dizer com "*Ponto de Vista Superior*". Em 1908, Felix Klein não só se tornou o presidente fundador da *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM, anglicizado como a Comissão Internacional sobre o Ensino de Matemática), mas também publicou o primeiro volume de sua inovadora *Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior*. O terceiro volume, de aplicações do Cálculo na Geometria, foi originalmente publicado em 1902, mas foi revista e colocada no final da série, porque, como Klein (2010) observou em sua introdução para a terceira edição do primeiro volume, tinha sido "Destinada a preencher a lacuna entre as necessidades de matemática aplicada e das investigações mais recentes da matemática pura", finalidade um pouco diferente da que ocorre nos dois primeiros volumes, que foram construídos "para chamar a atenção dos professores do ensino secundário de matemática e de ciência da importância de seu trabalho profissional de seus estudos acadêmicos, especialmente os seus estudos em matemática pura". O terceiro volume nunca foi traduzido do alemão original, enquanto os dois primeiros também apareceram em Inglês, Espanhol e mais recentemente em Português.

Todos os três volumes da série começaram como cópias litografadas de notas de aula manuscritas elaboradas pelos assistentes de Klein, Ernst Hellinger e Conrad H. Müller, que foram posteriormente editadas para edições impressas por Fritz Seyfarth e outros. Durante alguns anos, Klein ofereceu cursos dirigidos a professores do ensino secundário e, nesta etapa, se concentrou no conteúdo do currículo de matemática secundário. O primeiro volume foi baseado em notas de um curso ministrado em Göttingen no semestre de inverno de 1907/1908, e a segunda, a partir de um curso dado no verão do semestre seguinte, em 1908.

2.2 ARITMÉTICA, ÁLGEBRA E ANÁLISE

2.2.1 Introdução

Na introdução ao primeiro volume, Klein identifica um problema central na preparação de professores para ensinar matemática: uma *dupla descontinuidade* que o futuro professor encontra ao ir da escola para a universidade e, em seguida, voltar à escola para ensinar. A matemática escolar e a matemática universitária parecem não ter conexão alguma. Klein (2010) identifica os esforços para eliminar essa descontinuidade atualizando o currículo escolar, por um lado, e pela tentativa “de se levar em conta, no ensino universitário, as necessidades do professor” (p. 1). Seu curso, diz ele, irá partir da premissa de que os futuros professores estão familiarizados com os principais domínios da matemática. Sua tarefa será a de mostrar:

> (...) a ligação mútua entre problemas nos vários campos, uma coisa que não é evidenciado suficientemente nas aulas usuais do curso, e mais especialmente para enfatizar as relações destes problemas aos da matemática escolar. Deste modo eu espero torná-lo mais fácil para você adquirir tal habilidade a qual eu olho em cima como o objetivo real do seu estudo acadêmico: a capacidade de desenhar (em ampla medida) no grande corpo do conhecimento, sem antes colocar um estímulo de vida para o seu ensino. (pp. 1-2)

Nesta citação, ouvem-se ecos dos primeiros pontos de vista de Klein na Educação Matemática expressa em seu discurso de posse (Antrittsrede) de 1872, quando ele se tornou professor em Erlangen aos 23 anos. O problema do currículo do ensino secundário era, para Klein, insuficiente no tempo e com conteúdo inadequado:

> O que é necessário é mais interesse pela matemática, instrução mais animada, e um tratamento mais espirituoso do material! (...) Em jogo [para professores universitários de matemática] está a tarefa (...) de levantar os padrões da formação em matemática dos candidatos de ensino posterior a um nível que não foi visto por muitos anos. Se formar melhores professores, consequentemente, o ensino da matemática vai melhorar por si só, como a velha forma consignada vai sendo preenchida com um teor de nova, revitalizada! (...) [Assim,] nós, como professores

> universitários, exige-se não apenas que nossos alunos, após a conclusão de seus estudos, saibam o que deve ser ensinado nas escolas. Nós queremos que o futuro professor esteja acima do seu assunto, que ele tenha uma concepção do atual estado dos conhecimentos em seu campo, e que ele geralmente seja capaz de seguir o seu desenvolvimento. (Rowe, 1985, p. 139)

Ao longo de sua carreira, Klein enxergou que a matemática escolar demandava um ensino mais dinâmico e, consequentemente, que a matemática universitária, necessitava ajudar os futuros professores a enxergarem "por cima" o conteúdo matemático.

Para concluir a introdução ao volume, Klein cita várias discussões recentes do ensino da matemática que complementam os temas que ele estará tratando. Ele ressalta, no entanto, que alguns tratamentos da matemática elementar se constroem "sistematicamente e logicamente na linguagem madura do estudante avançado, [enquanto] a apresentação nas escolas (...) deve ser psicológica e não sistemática (...). Uma apresentação mais abstrata só será possível nas aulas do ensino superior" (Klein, 2010, pp. 3-4). Ele também aponta que adota uma postura "progressista":

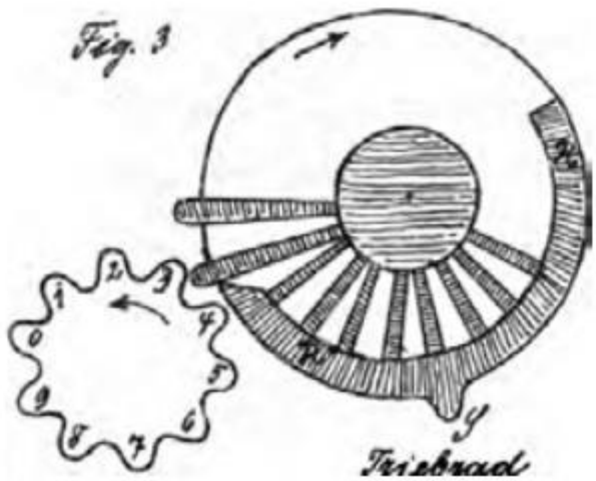
> Nós, que somos chamados de reformadores, colocaría mos o conceito de função no próprio centro da instrução, porque, de todos os conceitos da matemática dos últimos dois séculos, este desempenha o papel de *liderança* onde quer que o pensamento matemático seja usado. Nós iríamos introduzí-la no ensino tão cedo quanto possível, com uma utilização constante do método gráfico, representação das relações funcionais no sistema *xy*, que é usada hoje como uma matéria de curso em cada aplicação prática da matemática (...). Forte desenvolvimento da percepção espacial, acima de tudo, será sempre uma consideração principal. Em seu curso superior, no entanto, o ensino deve pressionar o suficiente para os elementos de cálculo infinitesimal para o cientista natural ou para o especialista de seguros para obter na escola as ferramentas que serão indispensáveis para ele. (P. 4)

Klein está antecipando a ênfase que ele coloca no texto subsequente sobre aplicações, figuras geométricas, percepção espacial, e o desenvolvimento histórico do campo. O livro é dividido em três partes - *aritmética, álgebra, análise* - em conjunto com seções suplementares sobre números transcendentes e teoria dos conjuntos.

2.2.2 Aritmética

Os principais tópicos da primeira parte são os números naturais; a extensão para os números negativos, frações e irracionais; teoria dos números; e números complexos. Um exemplo da ênfase de Klein em aplicações práticas é o seu tratamento prolongado do mecanismo de máquinas de calcular (veja a Figura 1, que mostra como a multiplicação é realizada). Mais tarde no livro, quando se discute tabelas logarítmicas, Klein (2010) menciona que uma máquina desse tipo "faz tabelas logarítmicas supérfluas. Atualmente, no entanto, esta máquina é tão cara que só os grandes escritórios podem pagar. Quando ela se tornar consideravelmente mais barata, uma nova fase de cálculo numérico será inaugurada” (p. 174). Palavras verdadeiramente proféticas.

Figura 1 - Roda motriz e roda denteada em uma maaquina de calcular



Fonte: Klein, 1908, p.48.

Klein termina a discussão da aritmética com um breve levantamento do desenvolvimento moderno da matemática. Revendo a primeira edição, John Wesley Young (1910) disse: “É um mero esboço, mas trata-se de uma obra-prima” (p. 258). Na pesquisa, Klein distingue dois processos pelos quais a matemática tem crescido, cada um dos quais leva a um plano diferente para o ensino. No Plano A, o plano mais comumente seguido nas escolas e nos livros didáticos elementares, cada ramo da matemática é desenvolvido separadamente com seus proprios objetivos e com seus próprios métodos. Os principais ramos – Análise Algébrica e Geometria –fazem um contato ocasional, mas não são unificados. No plano B, ao contrário, “o pensamento dominante é o da geometria analítica, que procura uma fusão da percepção de número com espaço” (Klein, 2010, p. 77). A matemática é para ser vista como um todo *conectado*, com a matemática pura e aplicada unificadas. Não surpreendentemente, Klein argumenta que o Plano B é o mais indicado para envolver os alunos “não dotados de um dom matemático abstrato específico” (p. 78). Ambos os planos têm o seu lugar, e não devem ser negligenciados. Mas o ensino na Escola Secundária

> (...) há muito tempo tem estado sob o domínio unilateral do Plano A. Qualquer movimento em direção à reforma do ensino de Matemática deve, portanto, pressionar por mais ênfase na direção do plano B. [Klein está] pensando, acima de tudo, numa impregnação com o método genético de ensinar, de uma maior ênfase na

> percepção do espaço, como tal, e, em particular, de dar destaque à noção de função, sob a fusão do conceito de espaço e do conceito de número! (p. 85).

Klein, então, argumenta que seu objetivo nesses livros é seguir o plano B, equilibrando assim os livros existentes sobre matemática elementar que quase invariavelmente seguem o plano A.

2.2.3 Álgebra

Os principais temas da segunda parte do livro falam do uso de métodos gráficos e geométricos em teoria das equações. Klein inicia citando livros de álgebra e apontando que a abordagem “unilateral” que ele vai tomar é projetada para enfatizar o que é negligenciado em outros lugares que podem, no entanto, iluminar o ensino. Sua abordagem para a resolução de equações reais usa a dualidade de coordenadas de pontos e de retas, e ele se baseia na teoria das funções de uma variável complexa para mostrar como representar, utilizando o mapeamento conforme, a solução de equações com um parâmetro complexo.

2.2.4 Análise

A terceira parte do livro diz respeito às Funções Transcendentes Elementares e ao Cálculo. Começa com uma discussão sobre logaritmo, que oferece uma boa ilustração da abordagem de Klein. Primeiro considera como o logaritmo é introduzido na escola – realizando a operação inversa à de elevar a uma potência – e chama a atenção para várias dificuldades e possíveis confusões que acompanham essa abordagem, incluindo a ausência de qualquer justificativa para usar o número “*e*” como a base para o que inexplicavelmente chamou de logaritmos “naturais”. Depois de discutir o desenvolvimento histórico do conceito, enfatizando o trabalho pioneiro de Napier e Bürgi, Klein propõe uma introdução que defina o logaritmo de “*a*” como a área da região entre a hipérbole $xy = 1$, o eixo x, a reta $x = 1$, e a reta $x = a$, primeiro aproximando a área como uma soma de retângulos e, em seguida, tomando a integral. A seção sobre logaritmo termina considerando uma visão complexo-teórica de função, onde Klein argumenta que os professores devem saber, ainda que não seja um tópico apropriado para a escola. Na resenha do livro, feita por Young (1910), ele aponta para o tratamento de Klein de logaritmo como o único de suas propostas de reforma que não seria prático nos Estados Unidos (e talvez nem mesmo na Alemanha), já que os alunos precisam usar logaritmos antes de terem contato com hipérboles, isso sem mencionar integrais.

As funções trigonométricas e hiperbólicas também são tratadas do ponto de vista da teoria de funções de uma variável complexa, e a parte termina com uma introdução ao cálculo infinitesimal que depende muito do teorema de Taylor e que inclui considerações históricas e pedagógicas. O suplemento no final do volume contém uma prova da transcendência de "*e*" e de π e uma breve e lúcida introdução à teoria dos conjuntos.

2.3 GEOMETRIA

No segundo volume, Klein tem uma abordagem diferente do que no primeiro. Argumentando que não existem tratamentos de livros didáticos unificados de geometria, como existem para álgebra e análise, ele propõe dar uma visão abrangente da geometria, deixando toda a discussão de ensino de geometria para um capítulo final (infelizmente não incluídos na tradução em Inglês). Dois suplementos para a terceira edição que foram preparados por Seyfarth em consulta com Klein "concerne à literatura de carácter científico e pedagógico que não foi considerado no texto original" (KLEIN, 2010, p vi;. Os suplementos não foram traduzidos em Inglês também).

Este volume, tal como o primeiro, possui três partes. O primeiro diz respeito as formas geométricas mais simples; o segundo, as transformações geométricas; e o terceiro, uma discussão sistemática da geometria e os seus fundamentos. Não surpreendentemente, o caráter inovador de Klein na geometria, como as invariantes de seus grupos de simetria, de seu famoso programa *Erlangen* (vide, por exemplo, Bass, 2005; Schubring, n.d.), constitui a base da sua discussão sobre a organização da geometria. Na discussão de fundações, Klein (2009) enfatiza a importância das Geometrias Não-Euclidianas, "como um meio muito conveniente para deixar claro visualmente as relações que são aritmeticamente complicadas" (p 184):

> Cada professor certamente deve saber algo de geometrias não-euclidianas (...). Por outro lado, gostaria de aconselhá-lo enfaticamente contra trazer geometria não-euclidiana ao ensino escolar regular (isto é, para além de sugestões ocasionais, em cima das perguntas dos alunos interessados), como entusiastas estão sempre recomendando. Vamos ficar satisfeitos se o conselho anterior for seguido e se os alunos aprenderem realmente a compreender a geometria euclidiana. Afinal de contas, o professor deve saber um pouco mais do que o aluno médio. (p. 185)

A terceira parte termina com uma discussão sobre a obra *Os Elementos*, de Euclides, em seu contexto histórico.

No capítulo final, Klein examina os esforços para reformar o ensino da geometria elementar na Inglaterra, França, Itália e Alemanha. O suplemento contém algumas observações adicionais sobre as questões de geometria elementar e o material atualizado sobre a reforma nos quatro países, em particular relatórios preparados para os inquéritos do ICME de práticas de ensino e currículos que haviam sido iniciadas durante a presidência de Klein.

Impresso durante um século, os volumes do livro de Klein têm sido usados em vários cursos de formação inicial e continuada. Embora os dois primeiros volumes forneçam material muito útil e fornecem excelentes exemplos precoces do que hoje é denominado *Conhecimento Matemático para o Ensino* (Ball & Bass, 2000; Bass, 2005), a organização do primeiro volume, com as questões pedagógicas e dificuldades enfrentadas pelo professor retomado após cada tópico em vez de relegado para um capítulo final, parece muito superior ao segundo. A organização do primeiro volume permite a Klein fazer sugestões específicas para o ensino e referências a livros e tratamentos históricos de tópicos, enquanto que os comentários no segundo volume tendem a ser mais geral.

2.4 KLEIN E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Como muitos matemáticos, Felix Klein passou grande parte de seu tempo trabalhando em questões de educação matemática uma vez que ele não estava fazendo uma pesquisa em matemática. Ao contrário da maioria deles, no entanto, ele tinha perseguido essas questões ao longo de toda a sua carreira. Como observado acima, no seu discurso de posse em Erlangen de 1872, Klein falou sobre a Educação Matemática (ROWE, 1983, 1985). Nela, ele lamentou a falta de conhecimento matemático entre as pessoas formadas. Ele viu essa falta como um sintoma de uma divisão crescente entre a educação humanística e científica, uma divisão em que a matemática está numa posição única: “A Matemática e os campos relacionados com ela ficam relegados para as ciências naturais e com razão, considerando a indispensabilidade da matemática para estes. No entanto, o seu conteúdo conceitual não pertence a nenhuma dessas duas categorias” (ROWE, 1985, p. 135). Observando que, como todas as ciências, a matemática é realizada para um fim nela mesma, Klein continua a argumentar que “(a matemática) também existe para servir as outras ciências, bem como para o valor educativo formal que seu estudo fornece” (p. 137).

Por “valor educativo formal”, Klein não dava a atenção para formar sobre o conteúdo que dominou educação matemática alemã na época: “Em vez de desenvolver um sentimento apropriado para operações matemáticas, ou promover uma aula animada e intuitiva de gráficos e de geometria, o tempo de aula é gasto na aprendizagem de formalidades sem sentido ou a praticar macetes triviais que não exibem nenhum princípio subjacente" (ROWE, 1985, p. 139). Em vez disso, Klein viu a matemática como uma ferramenta educacional formal para treinar a mente. Ele não estava especialmente preocupado com o domínio de procedimentos formais dos alunos; ele queria que eles compreendessem os procedimentos eles estavam utilizando. Ele também queria que os alunos que se tornassem professores do ginásio, se possível, tivessem alguma experiência em fazer uma pesquisa original em estudo em matemática, que era na época uma exigência na Prússia para se tornar certificado como professor de matemática. Klein não estava preocupado com os quais temas matemáticos eles estudariam, desde que eles aprendessem a trabalhar de forma independente.

No seu discurso de posse em Erlangen, Klein expressa uma visão neoumanística de como a matemática deveria aparecer na escola e no ensino universitário, uma visão que ele, mais tarde, modificou à luz de sua experiência. Depois de ensinar no instituto técnico em Munique entre 1875 e 1880, por exemplo, ele adotou uma postura de uma perspectiva mais ampla sobre os papéis mútuos da matemática, da ciência e da tecnologia na educação moderna. Quando ele se tornou professor de geometria em Leipzig, em 1880, começou a promover o ensino da matemática aplicada nas universidades, bem como em institutos técnicos. O objetivo final de Klein era fazer da matemática uma disciplina fundamental no ensino superior, e para alcançar esse objetivo, ele iniciou uma reforma da educação matemática secundária para incluir o cálculo. Em Erlangen, no entanto, ele havia dito que o professor animado, ao invés de novos tópicos, era o que as escolas secundárias necessitavam: Em notas autobiográficas que ele fez em 1913 (ROWE, 1985), resumiu o que havia dito naquele discurso: "An den Gymnasien auszubauen: Interesse. Leben und Geist. Kein Neuer Stoff [Para desenvolver nas escolas de ensino médio: Interesse. Vital e espiritual. Não novo material]". Ele então acrescentou uma observação marginal refletindo seu parecer revisto que o currículo secundário fez necessitando novo material: "Da bin ich freira anderen Sinnes geworden [Eu mudei minha mente sobre isso]". Depois de 40 anos de ensino, Klein também mudou a sua visão acerca de que futuros professores devem realizar um estudo independente sobre qualquer assunto que seja. Em notas privadas disponibilizados a seu colega Wilhelm Lorey (1916, citado em ROWE), ele escreveu:

> Gostaria agora de sugerir que os candidatos de ensino de talento médio devam limitar-se a tais estudos, como seria de fundamental importância para o exercício depois de sua profissão, enquanto tudo além disso deva ser reservada para aqueles com talento incomum ou circunstâncias favoráveis. (p. 128).

Um comentário final de Klein (ROWE, 1985) em suas notas autobiográficas sugere o número de batalhas para a reforma: “Quando se é jovem, trabalha-se muito mais rapidamente e sem firmeza, também acredita que os ideais em breve serão alcançados” (p. 126).

No entanto, Klein foi bem-sucedido na reforma do currículo do ensino secundário, bem como na criação de cursos universitários para professores. Seu objetivo há tempos era para elevar o nível do ensino da matemática tanto nos institutos técnicos quanto nas universidades, e ele veio a perceber que a chave para alcançar essa meta seria a de elevar o nível de ensino da matemática secundária para incluir o cálculo, aumentando assim o nível de instrução terciária (SCHUBRING, 1989). Para pressionar por reformas no currículo secundário e terciário, Klein construiu uma aliança entre professores, cientistas e engenheiros, e ele também ajudou a Comissão Internacional se tornar um grande agente da mudança curricular. Seus cursos para professores eram parte dos esforços de reforma para melhorar a matemática secundária, melhorando a preparação de professores. Apesar das adversidades que ele encontrou e as mudanças resultantes na abordagem que ele fez, nenhum matemático teve uma influência mais profunda sobre a educação matemática como um campo de bolsas de estudo e prática.

Sendo Klein um matemático, seu pioneirismo em se preocupar com as questões curriculares, estruturais, didáticas e epistemológicas da matemática, enquanto matéria a ser ensinada, inspirou outros matemáticos a também contribuírem para o ensino desta ciência e para pensar o que (e como) o professor de matemática deveria saber/ensinar no ensino secundário, como *George Pólya* e *Hans Freudenthal* (KILPATRICK, 2008), cujos trabalhos foram semelhantes ao de Klein.

2.5 ALINHANDO AS IDEIAS DE KLEIN COM NOSSA PROPOSTA

Klein identifica como matemática elementar aquela que congrega as partes essenciais que encerram a capacidade de sustentar e de estruturar a Matemática. Assim, não há diferença de valor entre o que é elementar e o que é superior – são partes que se fundem e se articulam compondo, com a mesma importância, a Matemática enquanto ciência (SCHUBRING, 2014).

Na nossa concepção, convergindo com as ideias de Klein, o professor de matemática do ensino básico, que leciona Combinatória, precisa ter um conhecimento que a contemple “de cima”, sabendo fazer as conexões entre a combinatória em nível universitário e a combinatória que trabalhará em sua sala de aula no ensino médio.

Pensemos, como exemplo, em uma situação-problema onde precisemos contar quantos são os números pares de três algarismos distintos. Uma estratégia possível, talvez a mais simples, é contar todos os números de três algarismos distintos (648) e depois subtrair destes os ímpares (320)[1], resultando em 328, que é, de fato, o total de números pares de três algarismos distintos. Este raciocínio de “contar tudo” e retirar “o que não serve”, tão comum na resolução de problemas de combinatória no ensino médio, é, na verdade, aplicação do seguinte teorema: “Se A é um conjunto finito e $B \subset A$, então $|B| = |A| - |A \setminus B|$”. Note que, no contexto do nosso problema-exemplo, A é o conjunto de todos os números de três algarismos distintos, B é o conjunto dos números pares de três algarismo distintos e, desta forma, $|A \setminus B|$ é o conjunto dos números ímpares.

Este teorema não consta nos livros e nem na maioria das aulas do ensino médio, mas esse problema (ou semelhantes), com esta estratégia de resolução, são muito recorrentes lá. No entanto, o professor precisa conhecer este resultado (e outros) para conseguir ampliar sua visão sobre a matemática escolar, e ter consciência de que implicitamente este teorema está sendo utilizado.

Nas resoluções de problemas que apresentaremos nos capítulos seguintes, iremos nos apropriar das dicas presentes em Lima et al (2006) de “sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar”. Nossa expectativa é que nosso trabalho sirva como instrumento de consulta e orientação para os professores de matemática do ensino médio, com vistas a uma melhor experiência no ensino de combinatória.

[1] É bem mais fácil contar os ímpares do que os pares, por conta da restrição do zero que não pode figurar na classe das centenas, mas pode aparecer na classe das unidades.

3 PRINCÍPIOS ELEMENTARES DE CONTAGEM

Existem várias técnicas elementares de contagem que são usadas para simplificar a solução de muitos problemas em Análise Combinatória. Uma significativa parte do estudo de combinatória reduz-se a determinar a quantidade de elementos de um conjunto finito. Representaremos o número de elementos de um conjunto finito A ou sua cardinalidade por $|A|$ ou #A. Apresentaremos os princípios básicos de contagem a partir da construção de bijeções apropriadas e da utilização de recursões.

3.1 O PRINCÍPIO BIJETIVO

Para n $\in \mathbb{N}$ representaremos por I_n o conjunto $I_n = \{j \in \mathbb{N}; 1 \leq j \leq n\}$ dos números naturais de 1 a n. Deste modo dizemos que um conjunto A não vazio é finito quando podemos construir a bijeção f: $I_n \rightarrow A$, para algum n $\in \mathbb{N}$. E assim representando a_j = f(j) podemos escrever A = $\{a_1, \ a_2, \dots, a_n\}$ e dizemos que n é o **número de elementos** de A, isto é

$$|A| = n \quad \text{ou} \quad \#A = n.$$

Fundamentaremos as técnicas elementares de contagem a partir do teorema a seguir denominado **princípio bijetivo**.

Teorema 3.1. Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então $|A|$ = $|B|$ se, e somente se existe uma bijeção do conjunto A no conjunto B.

Demonstração: Admitamos a existência de uma bijeção f: $A \rightarrow B$ provaremos que $|A|$ = $|B|$. Se $|A| = n$, tomemos uma bijeção g: $I_n \rightarrow A$; segue que $f \circ g$: $I_n \rightarrow B$ também é bijeção de modo que $|B| = n$. Reciprocamente, admitiremos que $|A|$ = $|B| = n$, logo temos as bijeções g: $I_n \rightarrow A$ e h: $I_n \rightarrow B$. Então $h \circ g^{-1}$: $A \rightarrow B$ é uma bijeção de A em B. ■

Uma consequência do princípio bijetivo, indispensável como uma ferramenta na resolução de problemas de combinatória, é o princípio aditivo da contagem. Contudo, antes de definirmos formalmente este princípio o ilustraremos com alguns exemplos visando uma melhor compreensão desse conceito.

Exemplo 1. Suponha que tenham sido lançados no Brasil cinco novos modelos de sedãs médios e quatro novos modelos de motos 600 cilindradas. Suponha ainda que André desejoso de adquirir um veículo automotor dispões de dinheiro suficiente para comprar apenas um veículo (ou um carro ou uma motocicleta). Dentre os modelos citados, quantas são as possibilidades para André adquirir um veículo?

Solução. Se André tem dinheiro para comprar apenas um veículo, então ou ele compra o sedã 1 ou o sedã 2 ou o sedã 3 ou o sedã 4 ou o sedã 5 ou a moto 1 ou a moto 2 ou a moto 3 ou a moto 4. Portanto, ao todo são nove opções de veículos diferentes que André pode comprar.

Observe que neste exemplo podemos identificar os seguintes conjuntos:

A = $\{x; x \text{ é } um\ sedã\ médio\}$ = $\{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ com $|A| = 5$ e

B = $\{x; x \text{ é } uma\ moto\ de\ 600\ cilindradas\}$ = $\{m_1, m_2, m_3, m_4\}$ com $|B| = 4$ de onde $A \cup B = \{x; x \text{ é } um\ sedã\ médio\ ou\ uma\ moto\ de\ 600\ cilindradas\}$ com $|A \cup B| = |A| + |B| = 9$.

Exemplo 2. Vamos supor que entraram em cartaz 4 filmes e 3 peças de teatro e que hoje Ana só disponha de dinheiro para assistir a apenas 1 evento. Dentre estes referidos eventos, quantos são os programas que Ana pode fazer hoje?

Solução. Ou Ana assiste a um dos quatro filmes disponíveis ou a uma das três peças de teatro. Portanto, Ana pode fazer 4 + 3 = 7 programas diferentes.

No exemplo 2 podemos identificar os seguintes conjuntos:

A = $\{x; x \text{ é } um\ filme\}$ = $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ com $|A| = 4$ e

B = $\{x; x \text{ é } uma\ peça\ de\ teatro\}$ = $\{p_1, p_2, p_3\}$ com $|B| = 3$ de onde $A \cup B = \{x; x \text{ é } um\ filme\ ou\ uma\ peça\ de\ teatro\}$ com $|A \cup B| = |A| + |B| = 7$.

Ambos os exemplos obedecem a um mesmo princípio denominado **princípio aditivo** que enunciamos a seguir como o Teorema 3.2. Sabe-se ainda que dois conjuntos são ditos disjuntos quando A ∩ B = ∅.

3.2 O PRINCÍPIO ADITIVO

Teorema 3.2. Se A e B são conjuntos finitos e disjuntos então

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

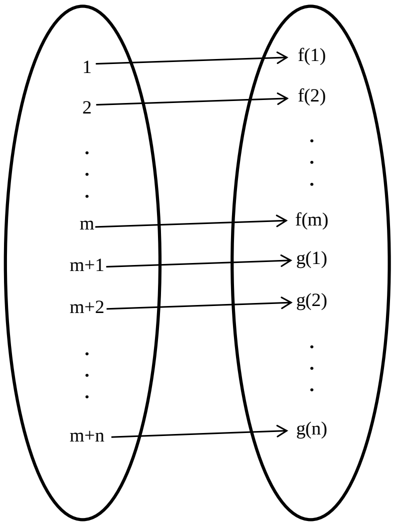
Demonstração: Tomemos os conjuntos A e B finitos, não vazios e disjuntos com $|A| = m\ e\ |B| = n$. Vamos provar que existe uma bijeção $h: I_{m+n} \to A \cup B$.

Como $|A| = m\ e\ |B| = n$ existem bijeções $f: I_m \to A$ e $g: I_n \to B$.

Podemos representar os conjuntos A = $\{x_i; 1 \leq i \leq m\}$ = $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e B = $\{y_j; 1 \leq j \leq n\}$ = $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Tomemos o conjunto A ∪ B e consideremos a seguinte função:

$$h: \quad I_{m+n} \quad \to \quad A \cup B$$



Provaremos que h: $I_{m+n} \to A \cup B$ é uma bijeção. Vamos provar inicialmente que h é uma sobrejeção. De fato: $\forall\ z \in A \cup B, z \in A\ ou\ z \in B$ segue que:

$z = f(i) = h(i); e\ 1 \leq i \leq m$ ou $z = g(j) = h(m + j); e\ 1 \leq j \leq n$, portanto h é uma sobrejeção.

Provaremos agora que h é uma função injetiva.

Dados $i, j \in I_{m+n}$ com $i \neq j$, provaremos que $h(i) \neq h(j)$.

a) Vamos considerar inicialmente o caso em que $i, j \in I_m$ e $i \neq j$, nesse caso temos:

$h(i) = f(i)$ e $h(j) = f(j)$

Como f é uma bijeção então $f(i) \neq f(j)$, logo $h(i) \neq h(j), \forall\ i, j \in I_m$ e $i \neq j$;

b) Consideremos agora o caso em que $i \in I_m$ e $j \in I_{m+n}$ com $j \geq m + 1$ e $i \neq j$, nesse caso temos:

$h(i) = f(i) \in A$ e $h(j) = g(j - m) \in B$

Como $A \cap B = \emptyset$ então $h(i) \neq h(j)$, $\forall\ i \in I_m$ e $j \in I_{m+n}$ com $j \geq m + 1$ e $i \neq j$;

c) Finalmente vamos considerar o caso $i, j \in I_{m+n} - I_m$ com $i, j \geq m + 1$ e $i \neq j$, nesse caso temos:

$h(i) = g(i - m)$ e $h(j) = g(j - m)$

Como $i-m, j-m \in I_n$ e $i-m \neq j-m$, além disso g é uma função bijetiva então $g(i-m) \neq g(j-m)$ logo $h(i) \neq h(j)$. ■

Pelos exemplos dados vemos que o princípio aditivo enunciado anteriormente pode ser aplicado quando temos de escolher exatamente um objeto dentre dois tipos distintos possíveis com uma quantidade definida de possibilidades para cada tipo. A seguir generalizamos, no Teorema 3.3, o princípio aditivo para n conjuntos finitos e disjuntos dois a dois.

Teorema 3.3. Se $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo i ≠ j, com 1≤ i , j ≤ n, então

$$\#\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

Demonstração: Vamos provar que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

Sabemos que $|A \cup B| = |A| + |B|$. Por indução mostraremos que $\#\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$. Suponhamos que $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$ $\forall$ A_j conjuntos finitos, não vazios e disjuntos dois a dois. Seja B = $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, então $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| = |B \cup A_{n+1}|$

Pelo teorema 2.2 temos que $|B \cup A_{n+1}| = |B| + |A_{n+1}| = \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| + |A_{n+1}|$

Pela hipótese de indução temos que $\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| + |A_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n} |A_j| + |A_{n+1}| = \sum_{j=1}^{n+1} |A_j|$.■

Podemos obter como consequência direta do **princípio aditivo** o seguinte corolário:

Corolário 3.4. Se A é um conjunto finito e B ⊂ A, então

$$|B| = |A| - |A \backslash B|.$$

Demonstração: Como A = B ∪ A\B pela reunião disjunta, então pelo princípio aditivo temos que

$$|A| = |B \cup (A \backslash B)| \text{ segue que}$$

$$|A| = |B| + |A \backslash B| \text{ logo}$$

$$|B| = |A| - |A \backslash B|. \blacksquare$$

Esta proposição pode ser utilizada na resolução de problemas de contagem com a configuração descrita a seguir. Suponha que tenhamos de contar os elementos de um certo conjunto B, mas que essa contagem de forma direta seja bem difícil de ser realizada. Podemos então encontrar um conjunto A ⊃ B de tal modo que seja mais fácil determinar o $|A|$ e o $|A\backslash B|$. Deste modo podemos, aplicando o corolário imediatamente anterior, determinar a quantidade de elementos de B. Mais adiante apresentaremos algumas aplicações dos teoremas descritos, bem como deste corolário.

O teorema a seguir nos permite calcular o número de elementos da união de dois conjuntos finitos, não necessariamente disjuntos, e é uma generalização do teorema 3.2 e do corolário 3.4. Essa fórmula, que enunciaremos como teorema 3.5, é conhecida como **princípio da inclusão e exclusão** para dois conjuntos e, posteriormente, nesse trabalho, apresentaremos este princípio generalizado para n conjuntos finitos.

Teorema 3.5. Se A e B são conjuntos finitos, então

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Demonstração: Sabemos que A e B\A são conjuntos disjuntos. Podemos afirmar ainda que A∪B = A ∪ B\A. Segue que:

$$|A \cup B| = |A| + |B\backslash A|$$

Temos ainda a união disjunta:

$$B = (A \cap B) \cup (B\backslash A), \text{ donde segue que}$$

$$|B| = |A \cap B| + |B\backslash A| \Rightarrow |B\backslash A| = |B| - |A \cap B| \text{ como}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B\backslash A| \text{ concluimos que}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \blacksquare$$

Na sequência enunciaremos o princípio multiplicativo, no entanto, antes de definirmos formalmente esse princípio, o ilustraremos com um exemplo. Ademais, lembre-se que, sendo A e B dois conjuntos, o produto cartesiano entre A e B, representado por A x B, é o conjunto formado pelos pares ordenados (a,b) tais que a ∈ A e b ∈ B, isto é

$$A \, x \, B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Do mesmo modo, sendo A_1, A_2, ..., A_n conjuntos finitos e não vazios então A_1x A_2x ... x A_n é o conjunto formado pelas sequências (a_1, a_2, ..., a_n) tais que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$.

Exemplo 3. Retomando o exemplo 2 suponhamos que Ana disponha de dinheiro para assistir a um filme e a uma peça de teatro. Nesse caso quantos são os programas que ela poderá fazer?

Solução. Vamos listar todos os casos possíveis. Ana poderá assistir ao:

- Filme 1 e peça 1;
- Filme 1 e peça 2;
- Filme 1 e peça 3;
- Filme 2 e peça 1;
- Filme 2 e peça 2;
- Filme 2 e peça 3;
- Filme 3 e peça 1;
- Filme 3 e peça 2;
- Filme 3 e peça 3;
- Filme 4 e peça 1;
- Filme 4 e peça 2;
- Filme 4 e peça 3;

Portanto Ana poderá escolher um dentre os 12 programas listados, se optar a assistir a um filme e a uma peça de teatro. Como já dito anteriormente, podemos representar os conjuntos

A = $\{x; x \text{ é } um\ filme\}$ = $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ com $|A| = 4$ e B = $\{x; x \text{ é } uma\ peça\ de\ teatro\}$ = $\{p_1, p_2, p_3\}$ com $|B| = 3$.

Desse modo temos que o conjunto A x B = $\{(f, p); f \in$ A e p $\in B\}$, isto é, A x B = $\{(f_1, p_1), (f_1, p_2), (f_1, p_3), (f_2, p_1), (f_2, p_2), (f_2, p_3), (f_3, p_1), (f_3, p_2), (f_3, p_3), (f_4, p_1), (f_4, p_2), (f_4, p_3)\}$ onde concluímos que $|A\ x\ B|$ = 4 . 3 = 12.

Este exemplo obedece a um outro princípio básico da contagem, de extrema importância, que enunciaremos no teorema 3.6, denominado **princípio multiplicativo** ou **princípio fundamental da contagem**.

3.3 O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO

O seguinte, em sua versão no ensino básico, se configura como um dos mais importantes e mais trabalhados. É chamado também de Princípio Fundamental da Contagem.

Teorema 3.6. Se A e B são conjuntos finitos e não vazios, então

$$|A \text{ x } B| = |A| \,.\, |B|$$

Demonstração: Sejam A = $\{a_i; 1 \leq i \leq n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ e B = = $\{b_j; 1 \leq j \leq m\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} = \bigcup_{j=1}^{m}\{b_j\}$. Logo:

A x B = A x $(\bigcup_{j=1}^{m}\{b_j\}) = \bigcup_{j=1}^{m}(A \times \{b_j\})$, reunião disjunta. Desse modo pelo teorema 2.3 temos que:

$$|A \times B| = \left|\bigcup_{j=1}^{m}(A \times \{b_j\})\right| = \sum_{j=1}^{m}\left|A \times \{b_j\}\right|$$

Podemos escrever a bijeção *f*: A → $A \times \{b_j\}$ dada por f(a) = (a, b_j) com inversa f^{-1}: $A \times \{b_j\}$→A dada por $f^{-1}(a, b_j) = a$, temos então $|A| = \left|A \times \{b_j\}\right|$ para $1 \leq j \leq m$ e, daí,

$$|A \times B| = \sum_{j=1}^{m}\left|A \times \{b_j\}\right| = |A| \cdot m = |A| \cdot |B|. \blacksquare$$

Na resolução de problemas de combinatória a supracitada versão do **princípio fundamental da contagem** pode ser utilizada na tomada de duas decisões simultâneas que consiste em escolher dois objetos, um pertencente a um dado conjunto A e o outro a um dado conjunto B onde o número de possibilidades para cada tipo de objeto equivale ao número de elementos de A e B. Analogamente ao princípio aditivo, o princípio multiplicativo pode ser generalizado para um número finito qualquer de conjuntos.

Para essa generalização faz-se necessário ampliar o conceito de produto cartesiano para um número finito de conjuntos finitos e não vazios, A_1, A_2, ..., A_n, conforme segue:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n); a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Teorema 3.7. Se A_1, A_2, ..., A_n são conjuntos finitos e não vazios então $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_{j=1}^{n}|A_j|$.

Demonstração: Sabemos pelo teorema 3.6 que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Suponhamos que $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = \prod_{j=1}^{n}|A_j|$. Vamos mostrar que sempre que esta hipótese de indução é verdadeira também é verdade que $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1}|A_j|$ $\forall$ A_j conjuntos finitos e não vazios. Seja B = $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. Então $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times A_{n+1}| = |B \times A_{n+1}| = |B| \cdot |A_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n}|A_j| \cdot |A_{n+1}| = \prod_{j=1}^{n+1}|A_j|$. ∎

A partir do teorema 3.7 podemos elaborar uma definição extremamente útil do **princípio multiplicativo,** conforme segue.

Corolário 3.8. Se A_1, A_2, ..., A_k são conjuntos finitos e não vazios, com $|A_1| = n_1$, $|A_2| = n_2$, ..., $|A_k| = n_k$, então há exatamente $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ sequências de tamanho k, com j-ésimo elemento em A_j para todo $1 \leq j \leq k$.

Demonstração: Sabemos que uma sequência (a_1, a_2, ..., a_k) tal que $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_k \in A_k$ é um elemento do produto cartesiano A_1 x A_2 x ... x A_k. Sendo assim o número desse tipo de sequências é igual ao número de elementos do A_1 x A_2 x ... x A_k que de acordo com o teorema 3.7 é igual a $|A_1|$. $|A_2|$ . ... . $|A_k|$ = n_1 . n_2 . ... . n_k. ■

Na sequência apresentamos algumas aplicações dos princípios básicos de contagem, apresentados anteriormente, na resolução de alguns problemas que ocorrem com frequência num curso de ensino médio.

Exemplo 4. Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 720?

Solução. Como 720 = 2^4 . 3^2 . 5^1 os divisores inteiros e positivos de 720 são os números da forma 2^a . 3^b . 5^c com a ∈ A = {0, 1, 2, 3, 4}, b ∈ B = {0, 1, 2} e c ∈ C = {0, 1}.

É fácil observar que a solução deste problema consiste em determinar a quantidade de sequências (a, b, c) com a ∈ A, b ∈ B e c ∈ C, o que pelo princípio multiplicativo, enunciado no corolário imediatamente anterior, equivale a $|A\ x\ B\ x\ C\ |$ = $|A|$. $|B|$. $|C|$ = 5 . 3 . 2 = 30. Portanto o número 720 tem 30 divisores inteiros e positivos.

Exemplo 5. Bianca decidiu renovar a sala da sua casa. Para isso pretende substituir a televisão, a estante e o sofá. Indo a uma loja de eletrodomésticos a vendedora lhe apresentou cinco modelos de TVs, quatro modelos de estantes e 3 modelos de sofás. Entretanto, analisando os preços dos referidos objetos e o seu orçamento Bianca concluiu que no momento só poderá adquirir dois dos três objetos. De quantas maneiras ela poderá fazer essa escolha?

Solução. Para a resolução deste problema utilizaremos os princípios aditivo e multiplicativo.

Vamos representar os seguintes conjuntos:

T = $\{x; x$ é $televis$ão$\}$ = $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

E = $\{y; y$ é $estante\}$ = $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

S = $\{z; z$ é sofá$\}$ = $\{z_1, z_2, z_3\}$

Inicialmente Bianca poderá fazer uma das seguintes escolhas:

a) A = T x E = $\{(x, y); x \ \in T\ e\ y \ \in E\}$ onde $|A|$ = $|T\ x\ E|$ = 5 . 4 = 20

b) B = T x S = $\{(x, z); x \ \in T\ e\ \ z \ \in S\}$ onde $|B|$ = $|T\ x\ S|$ = 5 . 3 = 15

c) C = E x S = $\{(y, z); y \ \in E\ e\ \ z \ \in S\}$ onde $|C|$ = $|E\ x\ S|$ = 4 . 3 = 12

Como as escolhas de Bianca devem ocorrer dentre umas das 3 possibilidades (a), (b) ou (c) representadas pelos conjuntos A, B e C e como A ∩ B ∩ C = ∅, pelo teorema 3.3

(princípio aditivo para n conjuntos finitos, não vazios e disjuntos dois a dois) concluímos que o número de escolhas que Bianca pode fazer é igual $|A \cup B \cup C|$. Portanto $|A \cup B \cup C|$ = $|A|$ + $|B|$ + $|C|$ = 20 + 15 + 12 = 47.

Exemplo 6. Quantos números pares podemos formar com 3 algarismos distintos?

Solução. Temos de fazer 3 escolhas. O algarismo das unidades, o algarismo das dezenas e o algarismo das centenas. Iniciando a nossa escolha pelo último dígito (algarismo das unidades) tendo em vista ser o mais restrito, temos 5 possibilidades a saber 0, 2, 4, 6 e 8. Contudo quando formos contar as possibilidades para o dígito das centenas nos deparamos com o seguinte impasse: se já utilizamos o zero na posição das unidades temos 9 possibilidades. Mas, se não utilizamos o zero, teremos apenas 8 possibilidades, pois não poderemos utilizar o zero nem o algarismo já utilizado na posição das unidades. Uma forma bem prática de superarmos esse impasse é aplicando a ideia contida no corolário 3.4 que nos diz que $|B|$ = $|A| - |A\backslash B|$. Vamos denominar de conjunto B o conjunto dos números pares de algarismos distintos. Denominaremos por A o conjunto de todos os números de 3 algarismos distintos. Desse modo A ⊃ B. Temos ainda que A\B obviamente representará o conjunto dos números ímpares de 3 algarismos distintos. É notório que se torna mais fácil determinar $|A|$e $|A\backslash B|$ do que $|B|$ e aplicarmos o supracitado corolário.

Então vejamos: A quantidade de números de três algarismos distintos, ou seja, o $|A|$ é dada por 9 . 9 . 8 = 648, pois há 9 modos de escolher o dígito das centenas (não podemos utilizar o zero), 9 modos de escolher o dígito das dezenas e 8 modos de escolher o dígito das unidades, logo $|A|$ = 648. Para determinarmos a quantidade de números ímpares de três algarismos distintos, ou seja, $|A\backslash B|$ faremos 5 . 8 . 8 = 320, pois há 5 modos de escolher o dígito das unidades, 8 modos de escolher o dígito das centenas (não podemos utilizar nem o zero nem o algarismo já utilizado na posição das unidades) e 8 modos de escolher o dígito das dezenas, logo $|A\backslash B|$ = 320. Concluímos então que a quantidade de números pares de três algarismos distintos é igual a:

$$|B| = |A| - |A\backslash B|$$
$$|B| = 648 - 320$$
$$|B| = 328.$$

Um caso específico do corolário 3.8 nos permite contar quantos são **os arranjos com repetição** de k elementos escolhidos de um conjunto com *n* elementos.

Definimos os **arranjos com repetição** de **n** elementos tomados **k** a **k** como sendo às sequências formadas pelas imagens da função de I_k em A tal que $|A| = n$. Desse modo podemos afirmar que o número os **arranjos com repetição** de **n** elementos tomados **k** a **k** é igual ao número total de funções $f: I_k \to A$.

Ressaltamos que a maioria dos livros utilizados no ensino médio definem **arranjos com repetição** de **n** elementos tomados **k** a **k** como sendo os agrupamentos com **k** elementos que podem ser construídos a partir de um conjunto A tal que $|A| = n$, em que estes agrupamentos diferem entre si quer pela **ordem**, quer pela **natureza** dos elementos que os constituem, podendo estes elementos serem ou não repetidos uma ou mais vezes.

Antes de enunciarmos formalmente a fórmula dos **arranjos com repetição** ilustraremos esse tipo de situação através de um exemplo.

Exemplo 7. Quantos números de dois algarismos podemos formar com os números 1, 2 e 3?

Solução. Nesse caso, podemos listar todos os números com dois algarismos formados com os dígitos 1, 2 e 3 conforme segue: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32 e 33. Temos nesse caso um total de nove números. Este problema equivale a perguntar quantas são as sequências de 2 elementos que podemos formar com os elementos do conjunto I_3.Como temos 3 possibilidades para o primeiro elemento e outras 3 possibilidades para o segundo elemento da sequência, pelo princípio multiplicativo temos um total de 3^2 sequências possíveis. Podemos encarar este problema ainda de um outro modo. Uma sequência de 2 termos ambos pertencentes a um conjunto com 3 elementos equivalem a uma função *f*: $I_2 \to I_3$. Portanto, queremos calcular o número de funções *f*: $I_2 \to I_3$. Vamos listar todas as funções possíveis:

a) $f_1: \{(1,1), (2,1)\}$
b) $f_2: \{(1,1), (2,2)\}$
c) $f_3: \{(1,1), (2,3)\}$
d) $f_4: \{(1,2), (2,1)\}$
e) $f_5: \{(1,2), (2,2)\}$
f) $f_6: \{(1,2), (2,3)\}$
g) $f_7: \{(1,3), (2,1)\}$
h) $f_8: \{(1,3), (2,2)\}$
i) $f_9: \{(1,3), (2,3)\}$

Vemos que a quantidade de funções *f*: $I_2 \to I_3$ é igual a 3^2.

3.4 OS ARRANJOS COM REPETIÇÃO

Corolário 3.9. Se $|A|$ = n, podemos formar exatamente n^k sequências de tamanho k com todos os elementos dessa sequência pertencentes ao conjunto A, ou equivalentemente, podemos afirmar que o número de **arranjos com repetição** de k elementos, pertencentes ao conjunto A, é exatamente igual a n^k.

Demonstração: Considere A_1 = A_2 = ... = A_k = A. Pelo corolário 3.8 temos n_1 . n_2 . ... . n_k sequências de tamanho k. Como nesse caso n_1 = n_2 = ... = n_k = n temos então um total de n^k sequências. ■

Exemplo 8. O atual sistema de placas de veículos automotores do Brasil começou a ser implementado em 1990, no Paraná, e foi adotado gradualmente em cada estado brasileiro, sendo totalmente implementado somente em 1999. As novas placas passaram a adotar um prefixo de três letras e uma sequência de quatro números (para motos inclusive). Nesse atual sistema, qual o total de placas distintas possíveis de serem formadas?

Solução. Podemos solucionar este problema aplicando o corolário imediatamente anterior. Para a sequência das letras temos um **arranjo com repetição** de 3 elementos de um conjunto de 26 elementos (as letras do alfabeto) e para a sequência dos dígitos numéricos temos um outro **arranjo com repetição** de 4 elementos de um conjunto de 10 elementos (os algarismos de 0 a 9). Portanto, pelo já referido corolário, temos um total de $26^3 . 10^4$ = 17576.10000 = 175760000 placas possíveis de serem formadas no atual sistema de placas de veículos automotores adotado no Brasil.

Exemplo 9. Qual o número de funções *f*: $I_k \to I_n$?

Solução. Lembremo-nos que uma sequência de k termos, todos pertencentes a um conjunto com n elementos é equivalente a uma função *f*: $I_k \to I_n$.. Portanto, pelo corolário 3.9 temos exatamente n^k funções *f*: $I_k \to I_n$. No exemplo imediatamente anterior estabelecemos como determinar o total de funções *f*: $I_k \to I_n$. Na sequência deste trabalho estabeleceremos como determinar quantas dessas funções são injetivas, bijetivas ou sobrejetivas.

Determinar a quantidade de funções injetivas *f*: $I_k \to I_n$ equivale a contar o número de **arranjos sem repetição** ou **arranjos simples** de k elementos escolhidos de um conjunto A com n elementos.

Denominamos de **arranjos simples** de **n** elementos tomados **k** a **k** as sequências de **k** termos os quais são elementos distintos de A tal que $|A| = n.$ Estas sequências são formadas pelas imagens das funções injetivas de I_k em A com $|A| = n$ e k ≤ n. Desse modo, a quantidade de **arranjos simples** de **n** elementos tomados **k** a **k** é igual a quantidade de funções injetivas de I_k em A com $|A| = n$ e **k** ≤ **n**.

Lembramos que, na maioria dos livros de ensino médio, define-se **arranjos simples** de **n** elementos tomados **k** a **k** como sendo os agrupamentos formados por **k** elementos distintos pertencentes a um conjunto A tal que $|A| = n$, de modo que um grupo se torna diferente do outro pela ordem ou pela natureza dos elementos que o compõem.

Antes de enunciarmos formalmente como determinar o número de arranjos sem repetição de k elementos pertencentes a um conjunto com n elementos, ilustraremos esse tipo de problema de contagem através de um exemplo.

Exemplo 10. Quatro cavalos disputam um páreo. Qual é o número de possíveis resultados para as três primeiras colocações?

Solução. Representando os cavalos que disputam o páreo por $c_1, c_2, c_3\ e\ c_4$ vamos listar todas as sequências possíveis para as três primeiras colocações, conforme segue: (c_1, c_2, c_3), (c_1, c_2, c_4), (c_1, c_3, c_2), (c_1, c_3, c_4), (c_1, c_4, c_2), (c_1, c_4, c_3), (c_2, c_1, c_3), (c_2, c_1, c_4), (c_2, c_3, c_1), (c_2, c_3, c_4), (c_2, c_4, c_1), (c_2, c_4, c_3), (c_3, c_1, c_2), (c_3, c_1, c_4), (c_3, c_2, c_1), (c_3, c_2, c_4), (c_3, c_4, c_1), (c_3, c_4, c_2), (c_4, c_1, c_2) (c_4, c_1, c_3), (c_4, c_2, c_1), (c_4, c_2, c_3), (c_4, c_3, c_1), (c_4, c_3, c_2). Temos nesse caso um total de 24 possibilidades para as três primeiras colocações.

Este problema equivale a perguntar quantas são as sequências de três elementos distintos todos pertencentes a um conjunto com quatro elementos. Como temos um total de 4 possibilidades para o primeiro elemento da sequência, 3 possibilidades para o segundo elemento e 2 possibilidades para o terceiro elemento, pelo princípio fundamental da contagem concluímos que temos um total de $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ sequências possíveis. Podemos entender esse problema ainda de um outro modo. Uma sequência de 3 elementos distintos, escolhidos de um conjunto com 4 elementos, equivale ao número de funções injetivas *f*: $I_3 \to I_4$.

Portanto, queremos determinar a quantidade de funções injetivas *f*: $I_3 \to I_4$. Vamos listar todas as funções injetivas possíveis neste caso:

- $f_1 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
- $f_2 = \{(1,1), (2,2), (3,4)\}$
- $f_3 = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$
- $f_4 = \{(1,1), (2,3), (3,4)\}$
- $f_5 = \{(1,1), (2,4), (3,2)\}$
- $f_6 = \{(1,1), (2,4), (3,3)\}$
- $f_7 = \{(1,2), (2,1), (3,3)\}$
- $f_8 = \{(1,2), (2,1), (3,4)\}$

- f_9 = {(1,2), (2,3), (3,1)}
- f_{10} = {(1,2), (2,3), (3,4)}
- f_{11} = {(1,2), (2,4), (3,1)}
- f_{12} = {(1,2), (2,4), (3,3)}
- f_{13} = {(1,3), (2,1), (3,2)}
- f_{14} = {(1,3), (2,1), (3,4)}
- f_{15} = {(1,3), (2,2), (3,1)}
- f_{16} = {(1,3), (2,2), (3,4)}
- f_{17} = {(1,3), (2,4), (3,1)}
- f_{18} = {(1,3), (2,4), (3,2)}
- f_{19} = {(1,4), (2,1), (3,2)}
- f_{20} = {(1,4), (2,1), (3,3)}
- f_{21} = {(1,4), (2,2), (3,1)}
- f_{22} = {(1,4), (2,2), (3,3)}
- f_{23} = {(1,4), (2,3), (3,1)}
- f_{24} = {(1,4), (2,3), (3,2)}

Vemos que, neste caso, a quantidade de funções injetivas *f*: $I_3 \to I_4$ é igual a 4 . 3 . 2 = 24.

3.5 OS ARRANJOS SIMPLES

Os Arranjos Simples são também chamados, em algumas ocasiões, de Arranjos Sem Repetição. Eles se configuram como funções injetivas *f*: $A \to B$, tal que $|A| \leq |B|$.

Teorema 3.10. Sejam n, k ∈ ℕ e k ≤ n. Se A é um conjunto tal que $|A|$ = n, então há exatamente n . (n – 1) . (n – 2) ... (n – k + 1) funções injetivas *f*: $I_k \to A$, ou equivalentemente, o número de sequências de *k* termos os quais são elementos distintos de A, isto é, o número de **arranjos simples** de *n* elementos tomados *k* a *k* é exatamente igual a n . (n – 1) . (n – 2) ... (n – k + 1).

Demonstração. Consideremos que $|A|$ = n, vamos tomar $a_{k,n}$ o número de funções injetivas *f*: $I_k \to A$.

Dado x ∈ A, sendo k > 1 e *f*: $I_k \to A$ é uma função injetiva tal que *f*(k) = x, então a restrição de f a I_{k-1} é uma função injetiva $\tilde{f}: I_{k-1} \to A\backslash\{x\}$. Reciprocamente, dada uma função injetiva $\tilde{f}: I_{k-1} \to A\backslash\{x\}$ estendemos $\tilde{f}$ a uma função injetiva *f*: $I_k \to A$ inserindo f(k) = x. Obviamente as citadas operações de restrição e extensão de funções injetivas são inversas uma da outra. Desse modo concluímos que o número de funções injetivas *f*: $I_k \to A$ tais que f(k) = x é exatamente igual ao número de funções injetivas $\tilde{f}: I_{k-1} \to A\backslash\{x\}$. Há, portanto, $a_{k-1,n-1}$ funções deste tipo. Mas como há n possibilidades para x, podemos escrever que o número de funções injetivas *f*: $\mathrm{I_k}$ → A será igual a

$$\mathrm{a_{kn}} = \mathrm{na_{k-1,n-1}}$$

Logo,

$$\mathrm{a_{kn}} = \mathrm{na_{k-1,n-1}} = \mathrm{n\,(n - 1)}\ \mathrm{a_{k-2,n-2}}$$

$= \ldots$

$= n\ (n-1) \ldots (n-k+2)\ a_{1,n-k+1}$

$= n\ (n-1) \ldots (n-k+2)\ (n-k+1),$

onde na última igualdade admitimos o fato de que se X é um conjunto finito e não vazio, então o número de funções injetivas $f\colon I_1 \to X$, é claramente igual ao número de elementos de X. ■

Na sequência, apresentamos mais alguns exemplos de problemas constantemente presentes nos livros de ensino médio e que são aplicações diretas do teorema 3.10, ou seja, problemas onde temos de determinar o número de arranjos simples de k elementos escolhidos de um conjunto A tal que $|A| = n$.

Exemplo 11. Em uma reunião de um condomínio residencial, com pauta para a eleição dos membros da sua administração, 10 pessoas se habilitam para ocupar 3 cargos: síndico, tesoureiro e secretário. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?

Solução. Queremos determinar a quantidade de sequências de 3 elementos distintos todos pertencentes a um conjunto A tal que $|A|$ = 10. Desse modo, pelo teorema imediatamente anterior, temos um total de 10 . (10 – 1) . (10 – 3 + 1) = 10 . 9 . 8 == 720 sequências possíveis. Em outras palavras, temos 720 arranjos simples de 3 elementos escolhidos de um conjunto com 10 elementos.

Exemplo 12. Numa sala existem 10 cadeiras enfileiradas numeras de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem sentar nessas cadeiras, havendo ao menos uma cadeira entre elas?

Solução. Vamos considerar que os números das cadeiras escolhidas pelas pessoas A e B formam um par ordenado. Assim, o par ordenado (3,6) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 3, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 6. O par ordenado (6,3) significa que a pessoa A ocupa a cadeira número 6, enquanto a pessoa B ocupa a cadeira número 3. O total de maneiras diferentes de as cadeiras serem ocupadas será dado pelo número de pares ordenados formados com os números das cadeiras, que, pelo teorema 3.10, pode ser calculado da seguinte maneira: 10 · 9 = 90.

Logo, podem ser formados 90 pares ordenados ou 90 sequências de dois elementos distintos de um conjunto com 10 elementos. Porém existe uma restrição: A e B não podem sentar-se juntas. Isso significa que A e B não podem ocupar cadeiras cujos números são consecutivos. Assim devemos descobrir quantos são os pares ordenados cujos elementos são consecutivos para subtraí-los dos 90 pares ordenados possíveis. Os pares ordenados formados com números consecutivos são: (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (9, 10), (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5), (7, 6), (8, 7), (9, 8) e (10, 9), totalizando 18 pares. Fazendo 90 – 18, podemos concluir que existem 72 maneiras de as duas pessoas se sentarem com pelo menos uma cadeira entre elas.

Como consequência da contagem de **arranjos simples** vamos definir como calcular o número de permutações dos elementos de um dado conjunto A.

Para tanto definimos que as **permutações simples** dos **n** elementos de um conjunto não vazio A equivalem as sequências formadas pelas imagens das bijeções f: $A \to A$. Portanto, podemos afirmar que o número de **permutações simples** dos **n** elementos de um conjunto A tal que $|A| = n$ é exatamente igual ao número de funções bijetivas f: $A \to A$.

Normalmente, na maioria dos livros de ensino médio, define-se **permutação simples** de **n** elementos como sendo os agrupamentos que podem ser formados com certo número de elementos distintos, tal que a diferença entre um agrupamento e outro se dê apenas pela mudança de posição entre seus elementos.

Se A é finito e não vazio, então uma função f: $A \to A$ é bijetiva se, e somente se for injetiva. Logo, tomando k = n no teorema 3.10 obtemos, como consequência imediata, a fórmula para o cálculo do número de **permutações simples** de n elementos.

3.6 AS PERMUTAÇÕES SIMPLES

Corolário 3.11. Se $|A|$ = n, então há exatamente n . (n – 1) . (n – 2) ... 2 . 1 = n! permutações dos elementos de A.

A seguir apresentamos alguns exemplos de problemas que representam uma **permutação simples** de n elementos, ou dizendo de outro modo, uma bijeção f: $I_n \to I_n$.

Exemplo 13. Numa van com 11 assentos, viajarão 10 passageiros e o motorista. De quantos modos distintos os 10 passageiros podem ocupar os assentos do veículo?

Solução. Para determinarmos de quantas maneiras distintas os dez passageiros poderão ocupar os 10 assentos basta permutarmos os 10 elementos, o que, pelo corolário imediatamente anterior, é igual a 10! = 10 . 9 . 8 ... 2 . 1 = 3628800. Este problema pode ser interpretado ainda da seguinte forma: qual o número de funções bijetivas f: $I_{10} \to I_{10}$? O primeiro elemento do domínio tem 10 possibilidades de imagem, o segundo tem 9, o terceiro tem 8 e, assim sucessivamente, até que o último elemento tem apenas uma possibilidade de imagem. Concluímos que a solução será exatamente 10 . 9 . 8 ... 2 . 1 = 10!

Exemplo 14. Qual a soma de todos os números de quatro algarismos distintos formados com os algarismos 1, 3, 5 e 7?

Solução. A soma procurada (S) tem 24 parcelas, pois a quantidade de números de quatro algarismos distintos que podemos que podemos formar com os algarismos 1, 3, 5 e 7 equivale a uma permutação simples de quatro elementos, isto é, equivale a 4! = 24. Na ordem das unidades simples cada algarismo aparece seis vezes, pois vinte e quatro dividido por quatro igual a 6. Obviamente, ocorre o mesmo com cada algarismo nas outras ordens (dezena, centena e unidade de milhar). A soma dos valores absolutos, em cada ordem é:

(7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7) + (5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3) + (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 42 + 30 + 18 + 6 = 96.

Logo a soma S será dada por:

S = 96 . 1 + 96 . 10 + 96 . 100 + 96 . 1000

S = 96 + 960 + 9600 + 9600

S = 106656.

Na sequência apresentamos um teorema que nos permite calcular quantas são as escolhas não ordenadas de k elementos distintos de um dado conjunto A tal que $|A|$ = n. Denominamos tais escolhas como as **combinações simples** de n elementos tomados k a k e representaremos por C_k^n ou $C_{n,k}$.

Definimos uma **combinação simples** de **n** elementos tomados **k** a **k** como sendo um subconjunto com exatamente k elementos de um dado conjunto A tal que $|A|$ = n com $k \leq n$.

Vale ressaltar que, normalmente, nos livros de ensino médio, as **combinações simples** de **n** elementos tomados **k** a **k,** são definidas como sendo os agrupamentos de **k** elementos distintos, de um dado conjunto A com n elementos, que diferem entre si apenas pela natureza de seus elementos.

Para determinarmos a quantidade de subconjuntos, com uma quantidade de elementos definida de um certo conjunto finito, utilizaremos um argumento recursivo bem como o conhecimento prévio de que o número binomial $\binom{n}{k}$, com 0$\leq k \leq n$ é definido por $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, l$embramos ainda que tais números satisfazem a recorrência $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ conhecida como relação de Stifel. Antes de enunciarmos formalmente o teorema que nos mostra como determinar o número de subconjuntos com exatamente k elementos, de um dado conjunto A, tal que A tem n elementos, ou equivalentemente, qual o número de

combinações simples de n elementos tomados k a k, vamos apresentar alguns exemplos para tornar a ideia mais compreensível ao leitor.

Exemplo 15. Quantos são os subconjuntos de k elementos, com $0 \leq k \leq 5$, do conjunto A = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Solução. Vamos listar os subconjuntos conforme pedido no problema estratificado de acordo com a quantidade de elementos conforme segue.

Subconjuntos contendo:

1) Zero elemento: $\emptyset$ (temos um subconjunto), logo temos $\binom{5}{0} = 1$.
2) Um elemento: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ (temos cinco subconjuntos), logo temos $\binom{5}{1} = 5$.
3) Dois elementos: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$,$\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$, $\{4, 5\}$ (temos dez subconjuntos), logo temos $\binom{5}{2} = 10$.
4) Três elementos: $\{1, 2, 3\}$, $\{1,2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$,$\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$, $\{3, 4, 5\}$ (temos dez subconjuntos), logo temos $\binom{5}{3} = 10$.
5) Quatro elementos: $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 4, 5\}$, $\{1, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$ (temos cinco subconjuntos), logo temos $\binom{5}{4} = 5$.
6) Cinco elementos: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ (temos um subconjunto), logo temos $\binom{5}{5} = 1$.

Exemplo 16. Um garoto gostaria de convidar quatro amigos para um acampamento, porém só há lugar para dois amigos na barraca. De quantas maneiras ele pode escolher dois entre os quatro amigos?

Solução. Vamos nominar os amigos por A, B, C e D. Na sequência listamos todos os casos possíveis: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Temos um total de 6 casos possíveis. Perceba que a pergunta desse problema é equivalente a perguntar quantas são as sequências não ordenadas de 2 elementos escolhidos de um conjunto com 4 elementos. Nesse caso, como vimos, a resposta é 6, donde:

$$\binom{4}{2} = 6$$

3.7 AS COMBINAÇÕES SIMPLES

Teorema 3.12. Se A é um conjunto finito, tal que $|A| = n$ com $0 \leq k \leq n$, então a quantidade de subconjuntos de A com exatamente k elementos será dada por $\binom{n}{k}$, ou equivalentemente, o número de **combinações simples** de n elementos tomados k a k é exatamente igual a $\binom{n}{k}$.

Demonstração. Se k = 0 não há o que provar. Vamos supor, então, $1 \leq k \leq n$ e seja C_k^n o número de subconjuntos de A com k elementos.

Fixado $x \in$ A, há dois tipos de subconjuntos de A com k elementos: os que não contém x e os que contém x. Os subconjuntos de k elementos de A que não contém x são precisamente os subconjuntos de k elementos de A\\$\{x\}$, num total de C_k^{n-1} subconjuntos. Por outro modo, se B ⊂ A tem k elementos, um dos quais é x, então B\\$\{x\}$ ⊂ A\\$\{x\}$ tem k – 1 elementos; reciprocamente, se B' ⊂ A\\$\{x\}$ tem k – 1 elementos, então B' ∪ $\{x\}$ ⊂ A tem k elementos, um dos quais é x. Como tais correspondências são claramente inversas uma da outra, concluímos que há tantos subconjuntos de A com k elementos contendo x quantos forem os subconjuntos de k – 1 elementos de A\\$\{x\}$, isto é, há C_{k-1}^{n-1} tais subconjuntos.

A partir das informações acima, obtemos a recorrência

$$C_k^n = C_k^{n-1} + C_{k-1}^{n-1},$$

a qual é idêntica à relação de Stifel para os números binomiais $\binom{n}{k}$. Deste modo, como $C_0^n = 1 = \binom{n}{0}$ e $C_1^n = n = \binom{n}{1}$, provaremos por indução sobre n que $C_k^n = \binom{n}{k}$.

Suponhamos que $C_k^n = \binom{n}{k}$ (hipótese de indução). Considerando esta hipótese de indução provaremos que $C_k^{n+1} = \binom{n+1}{k}$.

De fato, pela relação de Stifel temos que

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n$$

Como pela hipótese de indução $C_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ então segue que:

$$C_k^{n+1} = C_k^n + C_{k-1}^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1) + n!k}{k!(n-k+1)!} = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}. \quad \blacksquare$$

A seguir apresentamos mais alguns exemplos de problemas que representam uma **combinação simples** de n elementos tomados k a k, ou dizendo de outro modo, quantas são as escolhas não ordenadas de k elementos distintos de um dado conjunto A tal que $|A|$ = n.

Exemplo 17. Dentre os 40 alunos de uma classe o professor deve escolher 4 para formarem uma comissão. Nessa turma há 25 garotas e 15 garotos**.** De quantos modos distintos o professor pode escolher as 4 pessoas para formar essa comissão com 2 garotas e 2 garotos?

Solução. Essa escolha deve ser feita em duas etapas.

1) E_1: escolher 2 entre as 25 garotas, o que, pelo teorema 3.12, equivale a C_2^{25}, onde

$$C_2^{25} = \frac{25!}{2!\,(25-2)!} = \frac{25!}{2!\,23!} = \frac{25.24}{2.1} = 300$$

2) E_2: escolher 2 entre os 15 garotos, o que, pelo teorema 3.12, equivale a C_2^{15}, onde

$$C_2^{15} = \frac{15!}{2!\,(15-2)!} = \frac{15!}{2!\,13!} = \frac{15.14}{2.1} = 105$$

Pelo princípio multiplicativo, o número de possibilidades é dado por:

$$C_2^{25}\,.\,C_2^{15} = 300\,.\,105 = 31500$$

Desse modo concluímos que o número de modos distintos que o professor pode formar a comissão contendo 2 garotas e 2 garotos, escolhidos dos 40 alunos dessa turma, é de 31500.

Exemplo 18. Tem-se 6 pontos sobre uma reta *r* e 10 pontos sobre uma reta *s* tal que *r//s*. Quantos triângulos podemos formar com vértices nesses pontos?

Solução. Para formar um triângulo ou escolhemos um ponto dentre os 6 marcados na reta *r* e dois pontos dentre os 10 marcados na reta *s* ou escolhemos dois pontos dentre os 6 marcados na reta *r* e um ponto dentre os 10 marcados na reta *s*. Desse modo o número de triângulos que podemos formar com vértices nesses pontos será dado por $6\,.\,C_2^{10} + 10\,.\,C_2^{6} = 6\,.\,45 + 10.\,15 = 270 + 150 = 420.$ Também podemos pensar em escolher 3 dentre os 16 pontos e excluir dessa contagem as escolhas de pontos colineares, o que dará como resultado $C_3^{16} - C_3^{6} - C_3^{10}$ = 560 – 20 – 120 = 420.

4 PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO E OUTRAS TÉCNICAS DE CONTAGEM

Neste capítulo apresentaremos algumas técnicas de contagem um pouco mais complexas que as apresentadas no capítulo anterior. Inicialmente apresentaremos no teorema 4.1 o **princípio da inclusão-exclusão**, também conhecido como **fórmula de crivo**, é devido ao matemático francês do século XVIII Abraham de Möivre. Antes de enunciarmos formalmente o **princípio da inclusão-exclusão** para n conjuntos, o que é uma extensão do teorema 3.5 apresentado anteriormente neste trabalho, faremos uma aplicação para melhor compreensão das ideias utilizadas na formalização do referido princípio.

4.1 O PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO (PIE)

Como vimos no teorema 4.2 dados dois conjuntos A_1 e A_2 disjuntos então a cardinalidade de $A_1 \cup A_2$ é dada por:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| \cup |A_2|$$

Contudo, se A_1 e A_2 são conjuntos não disjuntos, ou seja, $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, teríamos contado, nessa fórmula, os elementos de $(A_1 \cup A_2)$ duas vezes, sendo assim, temos de retirar essa dupla contagem. Isto equivale a subtrairmos $|A_1 \cap A_2|$ de $|A_1 \cup A_2|$. Logo, conforme vimos no teorema 4.5, segue que

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

Para estendermos esse princípio para n conjuntos finitos faremos inicialmente uma aplicação desse princípio.

Exemplo 19. Quantos são os anagramas da palavra FERMAT, em que a letra F ocupa a primeira posição ou que a letra E ocupa a segunda posição?

Solução. Inicialmente definimos os conjuntos A_1 e A_2 da seguinte forma:

A_1: conjunto das permutações da palavra FERMAT que começam com F.

A_2: conjunto das permutações nas quais a letra E ocupa o segundo lugar.

A solução deste problema consiste em encontrar a cardinalidade de $(A_1 \cup A_2)$. A cardinalidade de A_1 será igual a 5! pois podemos permutar as letras da palavra FERMAT, de modo que a letra F ocupe a primeira posição de 5! formas diferentes.

Fixando a letra E na segunda posição há também 5 maneiras de ocorrer a permutação das demais, isto é, $|A_2|$ será igual a 5!. Finalmente, fixando a letra F na primeira posição e a letra E na segunda posição, podemos permutar as outras restantes de 4! maneiras, o que equivale a $|A_1 \cap A_2| = 4!$

Então, ao substituirmos em $|A_1 \cup A_2| = |A_1| \cup |A_2|$ - $|A_1 \cap A_2|$, obtemos

$|A_1 \cup A_2| = 5! + 5! - 4!$ = 120 + 120 – 24 = 216

Por conseguinte, há 216 modos distintos de permutar as letras da palavra FERMAT, tendo a letra F em primeiro e a letra E em segundo lugar.

Mas, como deveríamos proceder se tivéssemos que permutar as letras da palavra FERMAT fixando três letras?

Por um raciocínio análogo ao anterior, a solução a esta questão seria dada pela cardinalidade da união de três conjuntos A_1, A_2 e A_3.

Se estes conjuntos fossem disjuntos, teríamos:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|.$$

Porém, como nesse caso os conjuntos não são disjuntos, estamos somando duas vezes os elementos das intersecções dos conjuntos dois a dois. Logo temos de remover essa dupla contagem, ficando assim:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|$$

Ora, para que a contagem fique correta, devemos acrescentar $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$, pois estes números foram contados três vezes em $|A_1| + |A_2| + |A_3|$ e foram removidos três vezes em: - $|A_1 \cap A_2|$ - $|A_1 \cap A_3|$ - $|A_2 \cap A_3|$, ou seja, eles não foram contados.

Logo, dados três conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3, temos que:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

O caso geral, isto é, o caso em que temos de calcular a quantidade de elementos da união de *n* conjuntos será enunciado a seguir.

Teorema 4.1. Se A_1, A_2, A_3,…, A_n são conjuntos finitos, a cardinalidade de sua união, denotada por $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n|$e dada por

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j}^{n}|A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k}^{n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1\leq i<j<k<p}^{n}|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p| + \dots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n|.$$

Demonstração. Vamos mostrar que um elemento *x*, que aparece em *m* dos *n* conjuntos com $1 \leq m \leq n$ é contado exatamente uma vez.

Se *x* pertence a *m* dos conjuntos A_1, A_2, A_3, …, A_n, então *x* é contado

1) $C_{m,1}$ vezes em $\sum_{i=1}^{n}|A_i|$;

2) $C_{m,2}$ vezes em $\sum_{1\le i<j}^{n}\left|A_i \cap A_j\right|$, pois *x* só pertence a $A_i \cap A_j$ se *x* está em A_i e em A_j.

Como temos *m* conjuntos que possuem *x*, a quantidade de modos de tomar dois deles com o referido elemento é $C_{m,2}$;

3) $C_{m,3}$ vezes em $\sum_{1\le i<j<k}^{n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right|$ por um raciocínio semelhante ao anterior;

E, continuando com este raciocínio, veremos que *x* ocorre $C_{m,m} = 1$ vez no somatório do número de elementos das intersecções de *m* conjuntos.

Obviamente, o elemento *x* não ocorrerá em uma intersecção com mais de *m* conjuntos, pois ele só pertence a *m* dos *n* conjuntos.

Logo, se um determinado elemento *x* ocorre em *m* dos *n* conjuntos, então *x* é contado em $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n|$, exatamente

$(C_{m,1} - C_{m,2} + C_{m,3} - C_{m,4} + \cdots + (-1)^{m-1}\, C_{m,m})$ vezes. Mostraremos que esta expressão vale 1. Para isso tomaremos $(1-1)^m$ e faremos a expressão utilizando a fórmula do desenvolvimento do binômio de Newton.

$(1-1)^m = C_{m,0}\cdot 1^m \cdot (-1)^0 + C_{m,1}\cdot 1^{m-1}\cdot(-1)^1 + C_{m,2}\cdot 1^{m-2}\cdot(-1)^2 + \cdots + C_{m,m}\cdot 1^0\cdot(-1)^m = C_{m,0} - C_{m,1} + C_{m,2} + \cdots + (-1)^m \cdot C_{m,m}$ como $(1-1)^m = 0$ e $C_{m,0} = 1$, temos que:

$$1 - C_{m,1} + C_{m,2} + \cdots + (-1)^m \cdot C_{m,m} = 0$$

Adicionando (-1) a ambos os membros da igualdade obtemos

$$- C_{m,1} + C_{m,2} + \cdots + (-1)^m \cdot C_{m,m} = -1$$

E dividindo ambos os membros da igualdade por (-1):

$$C_{m,1} - C_{m,2} + \cdots + (-1)^{m-1} \cdot C_{m,m} = 1 \ \blacksquare$$

4.2 AS PERMUTAÇÕES CAÓTICAS E APLICAÇÕES DO PIE

Na sequência apresentamos algumas aplicações clássicas do princípio da inclusão-exclusão. Para a primeira das aplicações, que apresentamos como o corolário 4.2, definiremos que uma permutação de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ elementos é dita ***caótica*** quando nenhum dos a_i´s elementos se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição. De outro modo, dizemos que uma permutação $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ de I_n é caótica se $a_i \neq$i para todo $1\le i \le n$, isto é, quando vista como função, a sequência $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$ não possui pontos fixos. Antes de enunciarmos formalmente o referido corolário faremos uma aplicação para melhor compreensão do mesmo.

Exemplo 20. Quantas são as permutações da palavra NASH em que nenhuma das letras permanece na posição original?

Solução. Vamos denominar de conjunto universo o conjunto de todos os anagramas da palavra NASH. Representando este conjunto por Ω temos $|\Omega| = P_4 = 4! = 24$.

Representaremos os quatros A_i como sendo os conjuntos obtidos ao fixarmos uma das letras da palavra NASH e permutarmos as outras três, logo:

$|A_i| = P_3 = 3! = 6$, $1 \leq i \leq 4$

$A_1 =$ {anagramas da palavra NASH com "N" na primeira posição}

$A_2 =$ {anagramas da palavra NASH com "A" na segunda posição}

$A_3 =$ {anagramas da palavra NASH com "S" na terceira posição}

$A_4 =$ {anagramas da palavra NASH com "H" na quarta posição}

Para chegarmos à solução pedida utilizando o princípio da inclusão-exclusão analisaremos as duplas, as triplas e as quádruplas intersecções.

1) Duplas intersecções possíveis ($A_{i1} \cap A_{i2}$, $1 \leq i_1, i_2 \leq 4$ e $i_1 \neq i_2$): os elementos desses conjuntos são os anagramas que obtemos ao fixarmos duas das letras da referida palavra e permutarmos livremente as outras duas nas posições restantes. Logo:

$|A_{i1} \cap A_{i2}| = P_2 = 2! = 2$. Além disso a quantidade de duplas intersecções possíveis é: $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

2) Triplas intersecções possíveis ($A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{i3}$, $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 4$ e $i_1 \neq i_2 \neq i_3$): os elementos desses conjuntos são os anagramas que obtemos ao fixarmos três das letras da referida palavra e deixarmos uma opção para o preenchimento da posição restante. Logo:

$|A_{i1} \cap A_{i2} \cap A_{i3}| = P_1 = 1! = 1$. Além disso o número de triplas intersecções possíveis é:

$C_{4,3} = \frac{4!}{3!1!} = 4$.

3) Quádruplas intersecções possíveis ($A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$): neste caso ocorre um único anagrama obtido ao fixarmos todas as quatro letras nas posições originais. Logo:

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = P_0 = 0! = 1$.

Além disso, o número de quádruplas intersecções possíveis é $C_{4,4} = \frac{4!}{4!0!} = 1$.

Pelo princípio da inclusão e da exclusão temos:

$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = C_{4,1} \cdot 3! - C_{4,2} \cdot 2! + C_{4,3} \cdot 1! - C_{4,4} \cdot 0! = 4!\,(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!})$

O número de anagramas pedido será dado por $|\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$, logo, as permutações da palavra NASH em que nenhuma das letras permanece na posição original será igual a:

$4! - 4!\,(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) = 4!\,(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 4!\,(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}) = 24\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 9.$

Corolário 4.2. Para $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, temos exatamente

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}$$

permutações caóticas de I_n.

Demonstração. Vamos definir A_i como o conjunto das permutações de $(a_1, a_2\ \ldots, a_n)$ em que fixamos o i-ésimo elemento na posição i e permutamos os demais elementos com $i \in \{1,2,3,\ldots, n\}$ e vamos considerar Ω o conjunto de todas as permutações possíveis dos a_i´s elementos. Deste modo, o numero de permutações caóticas de I_n será dado por:

$$D_n = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n|$$

Neste caso temos que $|\Omega| = n!$ e $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n|$, como vimos anteriormente, pode ser determinado pelo princípio da inclusão-exclusão da seguinte forma $|\sum_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1\leq i<j}^{n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\leq i<j<k}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1\leq i<j<k<p}^{n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_p| + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$

Vamos determinar o valor de cada parcela da soma acima. Representando-as por S_i com $1 \leq i \leq n$ temos:

1) $S_1 = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = \sum_{i=1}^{n} (n-1)!$ e como existem $C_{n,1} = n$ conjuntos A_i temos nessa soma, então

   $S_1 = n(n-1)! = n!$

2) $S_2 = \sum_{1\leq i<j}^{n} \left|A_i \cap A_j\right| = \sum_{1\leq i<j}^{n} (n-2)!$ e como existem $C_{n,2}$ intersecções duplas temos nessa soma, então

$$S_2 = C_{n,2} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdot (n-2)! = \frac{n!}{2!}$$

3) $S_3 = \sum_{1\leq i<j<k}^{n} \left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| = \sum_{1\leq i<j<k}^{n} (n-3)!$ e como existem $C_{n,3}$ intersecções triplas temos nessa soma, então

$$S_3 = C_{n,3} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot (n-3)! = \frac{n!}{3!}$$

Seguindo com este raciocínio chegamos a

4) $S_n = C_{n,n} \cdot (n-n)! = \frac{n!}{n!(n-n)!} \cdot (n-n)! = \frac{n!}{n!}$

Deste modo, temos que

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = S_1 - S_2 + S_3 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot S_n$$

Logo, o número de permutações caóticas D_n será dado por

$$D_n = |\Omega| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$D_n = n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!}\right)$$

$$D_n = n! - n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1) \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

$$D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots (-1)^{n} \cdot \frac{1}{n!}\right)$$

Logo,

$$D_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \blacksquare$$

Continuando com as aplicações, na sequência, apresentamos no corolário 4.3 como determinar dentre o conjunto de funções $f\colon A \to B$ com $|A| = n$ e $|B| = k$, dado por $\mathcal{F}_{n,k}$ o subconjunto $\mathcal{S}_{n,k}$ de funções sobrejetoras.

Corolário 4.3. São dados $n, k \in \mathbb{N}$ e os conjuntos finitos A e B tais que $|A| = n$ e $|B| = k$. O número de funções sobrejetoras $f\colon A \to B$ é igual a

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n.$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{n,k}$ o conjunto das funções *f*: $A \to B$ e $\mathcal{S}_{n,k}$ o subconjunto de $\boldsymbol{\mathcal{F}}_{n,k}$ formado pelas funções sobrejetoras. Sejam ainda $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$ e para $1 \leq i \leq k$, C_i o conjunto das funções tais que $b_i \notin Im(f)$. Nesse caso o conjunto das funções *f*: $A \to B$ que não são sobrejetoras será dado por

$$\bigcup_{i=1}^{k} C_i$$

Obviamente, o número de funções sobrejetoras $\mathcal{S}_{n,k}$ será igual a

$$|\mathcal{S}_{n,k}| = |\boldsymbol{\mathcal{F}}_{n,k}| - \left|\bigcup_{i==1}^{k} C_i\right|$$

Sabemos ainda que $|\boldsymbol{\mathcal{F}}_{n,k}| = k^n$ e determinaremos o $\left|\bigcup_{i==1}^{k} C_i\right|$ através do princípio da inclusão-exclusão.

Assim,

$\left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |C_i| - \sum_{1 \leq i \leq j} |C_i \cap C_j| + \cdots + (-1)^{k-1} |C_i \cap C_j \cap \ldots \cap C_k|$

Daí, segue que $|C_i| = (k-1)^n$, pois podemos escolher qualquer imagem para $f(a_j)$ com $1 \leq j \leq n$, com exceção de b_i. Desse modo o primeiro somatório resulta em k . $(k-1)^n$, pois temos k conjuntos C_i e cada um possui $(k-1)^n$ funções.

Analogamente, temos $|C_i \cap C_j| = (k-2)^n$, pois podemos escolher qualquer imagem para $f(a_j)$ com $1 \leq j \leq n$, com exceção de b_i e b_j. Portanto segundo somatório resulta em $\binom{k}{2}(k-2)^n$

Aplicando esse mesmo raciocínio para os demais somatórios obtemos:

$\left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right| = \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \cdots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(k-k)^n$

$\left|\bigcup_{i=1}^{k} C_i\right| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i}(k-i)^n.$

Subtraindo esse número do total de funções $|\boldsymbol{\mathcal{F}}_{n,k}| = k^n$ temos:

$$|\mathcal{S}_{n,k}| = k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Observe que k^n pode ser escrito como $k^n = (-1)^0 \binom{k}{0}(k-0)^n$. Desse modo concluímos que

$$|\mathcal{S}_{n,k}| = (-1)^0 \binom{k}{0} (k-0)^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

$$\left|\mathcal{S}_{n,k}\right| = (-1)^0\binom{k}{0}(k-0)^n - \sum_{i=1}^{k}(-1)^i(-1)^{-1}\binom{k}{i}(k-i)^n$$

$$\left|\mathcal{S}_{n,k}\right| = (-1)^0\binom{k}{0}(k-0)^n + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$$

$$\left|\mathcal{S}_{n,k}\right| = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n. \blacksquare$$

Apresentamos, na sequência, alguns exercícios que podem ser trabalhados a nível de ensino médio e que apresentam aplicações do teorema e dos corolários apresentados anteriormente neste capítulo.

Exemplo 21. Um empresário possui uma rede de lojas de calçados e confecções. Ele decidiu fazer um rodízio entre os gerentes das 6 lojas de modo que todos passem a gerenciar uma loja diferente da que gerencia antes do rodízio. De quantos modos poderão ser organizados os gerentes nessas lojas dentro das condições citadas?

Solução. Para resolvermos este problema temos de calcular uma permutação de 6 elementos (os 6 gerentes vão permutar nas seis lojas), como cada elemento deve ocupar um lugar diferente do que ocupava, então temos uma permutação caótica de 6 elementos que, pelo corolário 4.2, pode ser calculada pela fórmula $D_6 = 6!\sum_{i=0}^{6}\frac{(-1)^i}{i!}$. Logo:

$$D_6 = 6!\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right) = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265.$$

Exemplo 22. Temos 10 brinquedos diferentes para distribuir entre quatro crianças. De quantos modos distintos podemos distribuir estes brinquedos entre as quatro crianças de forma que cada uma delas receba pelo menos um brinquedo?

Solução. Consideremos inicialmente o conjunto B como sendo o conjunto dos brinquedos e o conjunto C como sendo o conjunto das crianças. Isto é: $B = \{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$ e $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$. Tomemos agora a função *f*: B→ C. Como cada criança deve receber pelo menos um brinquedo, ou seja, como cada elemento do contradomínio deve ser imagem de pelo menos um elemento do domínio o que queremos é determinar a quantidade de funções *f*: B→ C que são sobrejetoras. Ora, sabemos pelo corolário 4.3, que o número de funções sobrejetoras de *f*: B→ C com $|B| = 10$ e $|C| = 4$ será igual a: $\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^{10}$. Logo:

$$\sum_{i=0}^{4}(-1)^i\binom{4}{i}(4-i)^{10} = \binom{4}{0}(4-0)^{10} - \binom{4}{1}(4-1)^{10} + \binom{4}{2}(4-2)^{10} - \binom{4}{3}(4-3)^{10} + \binom{4}{4}(4-4)^{10} = 4^{10} - 4.3^{10} + 6.2^{10} - 4.1^{10} + 0^{10} = 818520.$$

Outra aplicação do princípio da inclusão-exclusão que apresentamos a seguir é a fórmula para o cálculo da função Φ de Euler. Apresentaremos esta aplicação no exemplo 23. Para o que segue, definimos como função Φ de Euler a função Φ: ℕ → ℕ que associa a cada elemento natural *n* a quantidade de números naturais relativamente primos com *n* e menores do que ou iguais a *n*.

A função Φ: ℕ → ℕ está bem definida e tem as seguintes propriedades:

1. $\Phi(\mathrm{n}) \geq 1$, pois mdc(n,1) = 1, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;
2. $\Phi(\mathrm{n}) \leq \mathrm{n} - 1$, pois mdc(n,n) = n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;
3. $\Phi(\mathrm{p}) = \mathrm{p} - 1$, se p é primo, pois mdc(p,n) = 1, $\forall\, n < p$.

Lembremos ainda do Teorema Fundamental da Aritmética que afirma que n = $p_1^{\propto_1}.p_2^{\propto_2}.p_3^{\propto_3} \dots p_r^{\propto_r}$, onde $p_i\ com\ i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$, são os fatores primos de *n*.

Exemplo 23. Prove que Φ(n), ou seja, a quantidade de números naturais relativamente primos com *n*, pertencentes ao conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$, pode ser calculada pela fórmula

$$\Phi(\mathrm{n}) = n. \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i}),$$

sendo que n = $p_1^{\propto_1}.p_2^{\propto_2}.p_3^{\propto_3} \dots p_r^{\propto_r}$, onde os $p_{i,} tal\ que\ 1 \leq i \leq r,$ são os fatores primos de *n*.

Solução. Temos que obter o número de elementos no conjunto $A = \{1, 2, \dots, n\}$ que são relativamente primos com *n*. Para que um número k < n seja relativamente primo com n, k não pode ser múltiplo de nenhum dos fatores primos de n, pois caso contrário, se p_i é fator de k e n, então mdc(k, n) ≥ p_i.

Dessa forma definiremos $A_i = \{x \in A; x\ \text{é}\ múltiplo\ de\ p_i, 1 \leq i \leq r\}$.

Para obtermos o número de elementos de A que são relativamente primos com n, devemos calcular $|A| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r|$, pois devemos excluir todos os elementos que são múltiplos dos fatores primos de n.

Utilizaremos o Princípio da Inclusão e Exclusão para calcular $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r|$.

Para facilitar a notação, denotaremos por $I_{k,r}$, o conjunto de todas as k-combinações dos índices $i \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$. Dessa forma, pelo Princípio da Inclusão e Exclusão,

$\Phi(\mathrm{n}) = |A| - |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_r|$

$$\Phi(\mathrm{n}) = |A| - \sum_{i=1}^{r}|A_i| + \sum_{(i,j)\in I_{2,r}}|A_i \cap A_j| + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,\ldots i_k)\in I_{k,r}}|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| + \cdots$$
$$+ \ (-1)^r|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r|$$

Temos então que determinar o número de elementos de conjuntos do tipo A_i, $(A_i \cap A_j)$, $(A_i \cap A_j \cap A_k)$,... , $(A_i \cap A_j \cap A_k \cap \ldots \cap A_r)$. Concluímos que $|A_i| = \frac{n}{p_i}$, pois para obtermos a quantidade de múltiplos de um número primo no conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ basta que dividamos o comprimento do intervalo [0; n], pelo número primo e teremos quantos números múltiplos de p_i cabem nesse intervalo. Por um raciocínio análogo, podemos determinar $|A_i \cap A_j|$, contando os múltiplos de $p_i p_j$ contidos no intervalo [0; n], ou seja, $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$. Continuando com esse raciocínio para obtermos o resultado do número de elementos dos outros conjuntos temos:

$|A| = n$,

$|A_i| = \frac{n}{p_i}$,

$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}$,

$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \frac{n}{p_i p_j p_k}$,

...

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_r| = \frac{n}{p_1 p_2 p_3 \ldots p_r}$.

Desse modo, retomando o cálculo de $\Phi(\mathrm{n})$ segue que:

$$\Phi(\mathrm{n}) = n - \sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i} + \sum_{(i,j)\in I_{2,r}}\frac{n}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,\ldots i_k)\in I_{k,r}}\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}} + \cdots + (-1)^r \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_r}$$

Donde

$$\Phi(\mathrm{n}) = n(1 - \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i} + \sum_{(i,j)\in I_{2,r}}\frac{1}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,\ldots i_k)\in I_{k,r}}\frac{1}{p_{i_1} p_{i_2} \ldots p_{i_k}} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{p_1 p_2 \ldots p_r}$$

e, portanto

$$\Phi(\mathrm{n}) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots (1 - \frac{1}{p_r}).$$

Esta última igualdade pode ser melhor compreendida ao analisarmos o produto $\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots (1 - \frac{1}{p_r})$, do seguinte modo:

Cada termo gerado por esse produto, corresponde a uma sequência de escolhas entre as parcelas 1 e $\frac{1}{p_i}$ de cada fator. Por exemplo, o número 1 que é o primeiro termo do somatório é gerado quando escolhemos dentro de cada fator a parcela 1. Os termos do somatório $-\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{p_i}$ são obtidos quando efetuamos uma escolha de termos $\frac{1}{p_i}$ dentre os fatores $\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$.

Os termos do somatório $\sum_{(i,j)\in I_{2,r}}\frac{1}{p_i p_j}$ são obtidos quando fazemos duas escolhas de parcelas $\frac{1}{p_i},\frac{1}{p_j}$ e, expandindo esse raciocínio obtemos todos os somatórios da equação $\Phi(\mathrm{n}) = n - \sum_{i=1}^{r}\frac{n}{p_i} + \sum_{(i,j)\in I_{2,r}}\frac{n}{p_i p_j} + \cdots + (-1)^k \sum_{(i_1,i_2,\ldots i_k)\in I_{k,r}}\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}} + \cdots + (-1)^r\frac{n}{p_1 p_2 \cdots p_r}$, desse modo, podemos afirmar de fato que

$$\Phi(\mathrm{n}) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots(1-\frac{1}{p_r}).$$

4.3 O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS – PCP

Na sequência apresentamos mais um método de contagem, o Princípio da Casa dos Pombos também conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet. Este princípio se constitui numa importante ferramenta na resolução de determinados tipos de problemas de combinatória. Antes de enunciarmos formalmente este princípio mostraremos um exemplo básico de aplicação do mesmo, visando uma melhor compreensão do leitor.

Exemplo 24. Em um conjunto de 3 pombos, prove que existem pelo menos 2 do mesmo sexo.

Solução. Em primeiro lugar, observe que queremos provar a existência de certo subconjunto dos pombos dados (2 pombos), cujos elementos satisfazem a uma certa propriedade (são do mesmo sexo). Para isto, consideramos os 3 pombos dados e duas casas de pombo, uma rotulada *m* (macho) e a outra rotulada *f* (fêmea). Vamos agora colocar os pombos nas casas de pombo, de acordo com o sexo. Isto é, cada pombo vai para uma das casas, de acordo com o seguinte critério: se o pombo é macho, ele vai para a casa *m*; se o pombo é fêmea (uma pomba, na verdade), ela vai para a casa *f*.

$$\begin{tikzcd}
 & p \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
{[m]} & & {[f]}
\end{tikzcd}$$

Como temos 3 pombos e 2 casas de pombo para colocá-los, uma das casas deverá conter mais do que $\frac{3}{2} = 1{,}5$ pombos. Mais especificamente, uma das casas deverá conter 2 pombos. Ou seja, ou temos 2 pombos machos ou temos 2 pombos fêmeas.

A resolução deste problema simples ilustra a ideia central associada ao PCP: Ele dá origem a um método que pode ser usado na prova de que certa configuração (objetos que possuem certa propriedade) existe. Para isto, alguns objetos são considerados como pombos, outros como casas de pombo, e os pombos são colocados nas casas de pombo. O PCP, simplesmente, garante que existe uma casa de pombos que contém mais do que certo número de pombos. Esta casa de pombos, obtida pelo PCP, usualmente nos leva à configuração procurada.

Teorema 4.4. Seja P um conjunto finito e não vazio (de pombos) e C um conjunto finito e não vazio (de casas de pombo). Se $f : P \rightarrow C$ é uma função (que coloca os pombos nas casas de pombo), então existe c em C (uma casa de pombo), tal que

$|f^{-1}(c)| \geq \frac{|P|}{|C|}$ (a casa c possui ao menos $\frac{|P|}{|C|}$ pombos).

Demonstração. Sejam P e C conjuntos finitos e não vazios. Uma função de P em C relaciona elementos de P a elementos de C, de maneira que:

1) cada elemento de P está associado a algum elemento de C;
2) nenhum elemento de P está associado a mais do que um elemento de C.

Assim, f é uma função de P em C, quando cada elemento de P está associado a um e exatamente um elemento de C por f. Funções são, usualmente, dadas por *conjuntos de pares ordenados* ou *leis algébricas*.

Dados os conjuntos P e C, escrevemos $f : P \rightarrow C$ para dizer que f é uma função de P em C. Além disso, dados $f : P \rightarrow C$, $p \in P$ e $c \in C$, escrevemos $f(p) = c$ para dizer que c é o único elemento de C associado a p por f. Sejam P e C conjuntos, f : P → C e c ∈ C. A imagem inversa de c por f é o conjunto de todos os elementos de P que f associa a c, ou seja, é o conjunto $\{p \in P : f(p) = c\}$. Dados $f : P \rightarrow C$ e $c \in C$, escrevemos $f^{-1}(c)$ para denotar a imagem inversa de c por f. Observe que $f^{-1}(c)$ é um subconjunto de P. A ideia fulcral na formulação do PCP é a de que, se estabelecemos uma função de um conjunto P em um conjunto C, mesmo que tenhamos feito uma distribuição equitativa dos elementos de P entre os elementos de C, há um elemento de C que é o correspondente de, no mínimo, uma quantidade igual a divisão de $|P|$ (o número de elementos de P) por $|C|$ (o número de elementos de C).

Desse modo temos que:

$$| f^{-1}(c) | \geq \frac{|P|}{|C|}. \blacksquare$$

A seguir apresentamos algumas aplicações do Princípio da Casa dos Pombos.

Exemplo 25. Prove que em um grupo de 50 pessoas, pelo menos 5 fazem aniversário no mesmo mês.

Solução. Neste caso queremos provar a existência de certo subconjunto das pessoas (5 pessoas) cujos elementos possuem uma propriedade em comum (fazem aniversário no mesmo mês). Vamos considerar P como sendo o conjunto das pessoas e C como sendo o conjunto dos meses do ano. Sabemos que $|P|$ = 50 e $|C|$ = 12. Consideremos também a função f : P → C tal que $f(p)$ é o mês de aniversário da pessoa p. Assim, pelo PCP, existe uma casa c que possui ao menos 5 > 4,1666... = $\frac{50}{12}$ = $\frac{|P|}{|C|}$ pombos. Ou seja, temos ao menos cinco pessoas que fazem aniversário no mesmo mês.

Exemplo 26. Prove que, em um ano não bissexto, considerando um grupo de 731 pessoas, pelo menos 3, farão aniversário no mesmo dia.

Solução. Neste caso queremos provar a existência de certo subconjunto das pessoas (731 pessoas) cujos elementos possuem uma propriedade em comum (fazem aniversário no mesmo dia). Vamos considerar P como sendo o conjunto das pessoas e C como sendo o conjunto dos dias do ano. Sabemos que $|P|$ = 731 e $|C|$ = 365. Consideremos também a função f : P → C tal que $f(p)$ é o dia de aniversário da pessoa p. Assim, pelo PCP, existe uma casa c que possui ao menos 3 > 2,002... = $\frac{731}{365}$ = $\frac{|P|}{|C|}$ pombos. Ou seja, temos ao menos três pessoas que fazem aniversário no mesmo dia.

Exemplo 27. Mostre que em um calendário anual qualquer com *n* dias e um conjunto contendo *n+1* pessoas, há pelo menos duas pessoas deste conjunto que farão aniversário no mesmo dia.

Solução. Como podemos perceber este problema consiste na generalização do problema anterior. Logo, por um raciocínio análogo vamos considerar P como sendo o conjunto das pessoas e C como sendo o conjunto dos dias do ano. Sabemos que $|P|$ = n + 1 e $|C|$ = n. Consideremos também a função f : P → C tal que $f(p)$ é o dia de aniversário da pessoa p. Assim, pelo PCP, existe uma casa c que possui ao menos 2 > 1> $\frac{n+1}{n}$ = $\frac{|P|}{|C|}$ pombos. Ou seja, temos ao menos duas pessoas que fazem aniversário no mesmo dia.

Exemplo 28. Prove que dado o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$, se retirarmos aleatoriamente *n + 1* elementos desse conjunto, então teremos pelo menos dois elementos onde um deles dividirá o outro.

Solução. Vamos denominar de a qualquer número inteiro pertencente ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$, sabemos que a pode ser escrito na forma $a = 2^k.b$ e que b é um dos números ímpares pertencentes ao conjunto $\{1, 3, \dots, 2n-1\}$. Desse modo, podemos considerar P o conjunto dos $n+1$ elementos escolhidos aleatoriamente do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$ onde $|P| = n+1$ e consideraremos C o conjunto os valores de b quando $a = 2^k.b$ tal que $b \in \{1, 3, \dots, 2n-1\}$, isto é, $|C| = n$. Consideremos também a função f: P → C tal que $f(p)$ é o fator b no número $a = 2^k.b$, pelo PCP temos 2 > 1> $\frac{n+1}{n}$ = $\frac{|P|}{|C|}$, o que mostra que temos pelo menos dois elementos, dos $n+1$ elementos retirados aleatoriamente do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$, onde um é múltiplo do outro. De fato, existem dentre os $n+1$ elementos retirados aleatoriamente do conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 2n\}$ dois elementos $a_1 = 2^{k_1}.b$ e $a_2 = 2^{k_2}.b$, com $k_1 \neq k_2$. Suponha sem perda de generalidade que $k_1 < k_2$. Então $\frac{a_2}{a_1}$ = $\frac{2^{k_2}.b}{2^{k_1}.b}$ = $\frac{2^{k_2}}{2^{k_1}} = 2^{k_2-k_1}$ e, como $k_1 - k_2 > 0$ concluímos então que a_1 divide a_2.

Exemplo 29. Considere um conjunto X contendo 10 números naturais não nulos menores do que ou iguais a 100. Isto é, X ⊂ $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ e $|X| = 10$. Prove que podemos tomar dois subconjuntos não vazios Y e Z de X, com Y∩ Z $= \emptyset$ tal que:

$$\sum_{y \in Y} y = \sum_{z \in Z} z$$

Solução. Considere P como sendo o conjunto dos subconjuntos não vazios de X e C como sendo o conjunto dos resultados possíveis dos somatórios dos subconjuntos não vazios de X, isto é, C = $\{\sum_{a \in A} a\,; A \subseteq X \; e \; A \neq \emptyset\}$. Obviamente $|P| = 2^{10} - 1$, pois $|X| = 10$. Não temos informações suficientes para determinarmos $|C|$ com precisão. Contudo, podemos determinar uma cota superior para $|C|$ o que é suficiente aos nossos propósitos. Para determinarmos essa cota, vemos que todos os 10 elementos de X são menores do que ou iguais a 100, portanto o $\sum_{x \in X} x < 1000$. Daí, se A ⊆ X, então,$\sum_{a \in A} a < 1000$. Ou seja, os resultados possíveis dos somatórios dos subconjuntos não vazios de X são valores entre 1 e 1000, isto é, $|C| < 1000$.

Desse modo concluímos, pelo PCP, que existe uma casa c que possui pelos menos $2 \geq \frac{1023}{1000} = \frac{|P|}{|C|}$ pombos. Isto é, existem pelo menos dois subconjuntos não vazios A e B de X tais que $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$. Não podemos garantir que $A \cap B = \emptyset$, mas, a partir destes conjuntos, é fácil obter dois subconjuntos não vazios Y e Z de A com todas as propriedades desejadas. Para isto, podemos tomar $Y = A - (A \cap B)$ e $Z = B - (A \cap B)$. Temos então que $Y \cap Z = \emptyset$ e $\sum_{y \in Y} y = \sum_{z \in Z} z$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação versou sobre alguns conceitos dentro da análise combinatória, tendo sido apresentadas algumas definições, propriedades, aplicações e problemas relativos a alguns princípios de contagem como o princípio bijetivo, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Entendendo que para enfrentar com sucesso os desafios inerentes ao ensino da combinatória, é imprescindível que o professor disponha de todas as ferramentas possíveis e, assumindo os pressupostos de Klein (2010) que argumenta, com bastante propriedade, que os professores de matemática devem olhar para a Matemática escolar de um ponto de vista superior, apresentamos as técnicas elementares de contagem com uma abordagem não excessivamente rigorosa, contudo logicamente estruturada e mais aprofundada que a usual nos diversos livros do ensino médio.

Apresentamos, outrossim, o Princípio da Inclusão-Exclusão, que é útil não apenas na Análise Combinatória, como também na resolução de problemas envolvendo Conjuntos e Probabilidade. Ele se faz importante quando queremos contar elementos de conjuntos não necessariamente disjuntos, situação na qual carece-se de muito cuidado para não haver contagem dos elementos da interseção dos conjuntos mais de uma vez. Entendemos que o referido princípio, trabalhado normalmente no ensino médio apenas no caso particular $n = 2$, pode ser útil para municiar o professor de matemática de um conhecimento que vai além daquilo que ele necessariamente trabalhará em sua sala de aula na educação básica.

Enveredamos pelo estudo do problema da existência de uma configuração especial no universo das configurações possíveis, utilizando para tanto o princípio da casa dos pombos e que quando usado como um método de prova, o PCP se torna uma ferramenta extremamente poderosa na resolução de problemas. Apresentamos o referido princípio também de uma forma mais aprofundada que a usual, pois para formalizar esta ideia, usamos as noções de função e de imagem inversa de um elemento por uma função.

Seguindo a ideia de que o Profmat tem como objetivo proporcionar formação matemática aprofundada e relevante para a docência na Educação Básica, visando dar ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática, entendemos que o presente trabalho pode ser nevralgicamente útil como um material de estudo auxiliar aos professores do ensino básico e alunos de licenciatura em matemática, futuros professores, interessados em aprofundar seus conhecimentos matemáticos na área específica de combinatória.

REFERÊNCIAS

AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **As Provas Estão n'O Livro**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

ALEXANDERSON, G. L. **The random walks of George Pólya**. Washington, DC: Mathematical Association of America, 2000.

ANDREESCU, T.; FENG, Z. **A Path to Combinatorics for Undergraduates:** Counting Strategies. Springer Science & Business Media, 2013.

BALL, D. L.; THAMES, M. H. T.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching, What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** [S.l.]. p.389-407, 2008.

CERIOLI, M.; FREITAS, R.; VIANA, P. **Princípio das Casas de Pombo**, Niterói: UFF, 2011, p. 9-14.

DE ASSIS, L. M. E.; **Aplicações do Princípio da Inclusão e Exclusão**. Campinas: Unicamp, 2008.

FREUDENTHAL, H. **Weeding and sowing:** Preface to a science of mathematical education. Dordrecht, the Netherlands: D. Reidel, 1978.

INTERNATIONAL MATHEMATICAL UNION. Klein Project. Disponível em: <http://www.didaktik. mathematik.uni-wuerzburg.de/projekt/klein/life.html>. Acesso em: 05 mar. 2017.

KILPATRICK, J. **A Higher Standpoint**. ICME 11 Proceedings, 2008.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. v.1, Parte I Aritmética. SPM, Lisboa, 2009.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. v.1, Parte II Álgebra. SPM, Lisboa, 2010.

KLEIN, F. **Matemática de um Ponto de Vista Superior**. v.1, Parte III Análise. SPM, Lisboa, 2011.

KLEIN, F. **Elementary mathematics from an advanced standpoint**: **Geometry** .v. 2, 3rd ed., E. R. Hedrick & C. A. Noble, trans. New York: Macmillan,1939. (Original work published 1925).

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. v. 2. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de janeiro, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de janeiro, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar:** Combinatória. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PÓLYA, G. Ten commandments for teachers. In: G.-C. Rota (Ed.), George Pólya: Collected papers: v. 4. **Probability;** combinatorics; teaching and learning in mathematics (p. 525–533). Cambridge, MA: MIT Press, 1984.

RANGEL, L. G.; GIRALDO, V.; MACULAN, N. Matemática Elementar e saber pedagógico de conteúdo: estabelecendo relações. Professor de Matemática. **SBM,** [S.l.]. v.2, n.1, 2014.

ROWE, D. E. **A forgotten chapter in the history of Felix Klein's Erlanger Programm. Historia Mathematica**, [S.l.]. v.10, p.448–457, 1983.

ROWE, D. E. **Felix Klein's "Erlanger Antrittsrede":** A transcription with English translation and commentary. Historia Mathematica, v.12, p.123–141. 1985.

SCHUBRING, G. Pure and applied mathematics in divergent institutional settings in Germany: The role and impact of Felix Klein. In: D. E. Rowe & J. McCleary (Eds.), The history of modern mathematics: Institutions and applications . **Academic Press**. San Diego, CA:, v. 2. p. 171–220, 1989.

SCHUBRING, G. A matemática elementar de um ponto de vista superior: Felix Klein e a sua atualidade. In: Roque, T.; Giraldo, V. (Eds.). **O saber do professor de matemática:** ultrapassando a dicotomia entre didática e conteúdo. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

SHULMAN, L.S. Those Who Understand: Knowledge Growth In Teaching. **Stanford University.** [S.l.]. v.15, p.4-14, 1986.

YOUNG, J. W. A synoptic course for teachers [Review of the book Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. **Bulletin of the American Mathematical Society**, [S.l.]. v. 1-2. p.54–265, 1910.