



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL**

JOÃO MENDES BARROSO FILHO

**ÁREAS DOS PRINCIPAIS POLÍGONOS E DO CÍRCULO: UMA FERRAMENTA
PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA BÁSICA**

FORTALEZA – CEARÁ

2017

JOÃO MENDES BARROSO FILHO

ÁREAS DOS PRINCIPAIS POLÍGONOS E DO CÍRCULO: UMA FERRAMENTA PARA
O ENSINO DA MATEMÁTICA BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro.

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Barroso Filho, João Mendes.

Áreas dos principais polígonos e do círculo: uma ferramenta para o ensino da matemática básica [recurso eletrônico] / João Mendes Barroso Filho. - 2017.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 131 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.

Área de concentração: Educação Matemática. .

Orientação: Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro..

1. Áreas dos polígonos. 2. Área do círculo. 3. Ensino da Matemática Básica. I. Título.

JOÃO MENDES BARROSO FILHO

ÁREAS DOS PRINCIPAIS POLÍGONOS E DO CÍRCULO: UMA FERRAMENTA PARA
O ENSINO DA MATEMÁTICA BÁSICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Matemática. Área de Concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 25 de julho de 2017

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro (Orientador)
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)



Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico esse trabalho à minha família por me dar o equilíbrio e a tranquilidade suficientes e necessários para cumprir minha missão de educador, pai e esposo.

AGRADECIMENTOS

Vejo no hoje o amanhã que tanto me preocupava ontem. Depois de quase dez anos sem sentar nos bancos de uma universidade, ver-me concluindo essa difícil jornada, enche-me de alegria. Olhar para trás e recordar dos momentos de dificuldades superados fortalece-me e dá-me a certeza que sempre podemos nos engrandecer. Ao fazer um levantamento de fatos marcantes e decisivos que me conduziram a esse momento de júbilo, destaca-se minha dedicação draconiana, que de nada valeria sem a solidariedade dos meus amigos de turma e o empenho dos meus professores. Hoje, já com o coração mais leve e repleto de alegria, manifesto os meus sinceros agradecimentos a todos que fizeram parte dessa história.

Meu muito obrigado ao meu amigo irmão José Fabrício Maia Filho, responsável direto por esse momento. Partiu dele a ideia de nos inscrevermos no Exame Nacional de Admissão (ENA), passando pelo apoio nos momentos difíceis, quando tínhamos que conciliar o curso com o labor diário. Muito obrigado também à sua esposa, Tânia Teixeira Maia, por me permitir desfrutar de maravilhosos almoços aos sábados na companhia de seus familiares. Foram momentos de muita luz, onde trocávamos impressões relativas à vida e, por vezes, relativas às aulas do período findado e o que nos aguardava no período ainda por vir.

À minha família, bálsamo milagroso, capaz de revigorar-me após exaustivas horas de trabalho.

Aos meus professores Claudemir Silvino Leandro, João Marques Pereira, João Montenegro de Miranda e Ulisses Lima Parente que sempre estiveram presentes dividindo seus conhecimentos e sabedoria.

Aos meus colegas de turma, pois eles não deixaram que eu desistisse e sempre carregaram um pouco do meu fardo, tornando essa jornada mais suave. Através de nosso líder incontestado, José Bernardo de Araújo Torres, abraço a todos.

A meu professor e orientador Tiago Caúla Ribeiro pela amizade, dedicação e esmero, tornando possível essa pesquisa.

“A vida não conquistou o mundo por combate,
mas por redes de cooperação”.

(Lynn Margulis e Dorion Sagan em
Microcosmos)

RESUMO

O cálculo de áreas é desde o ensino fundamental apresentado aos jovens estudantes brasileiros, sendo sua assimilação facilitada pelo aspecto concreto e abundante de aplicações no cotidiano. Nesta pesquisa, são apresentadas e demonstradas, com base no método de exaustão de Eudoxo e pautadas nos trabalhos de autores como Carvalho (2011), Lima (1991), Morgado (1990) e Muniz Neto (2013 e 2015), as fórmulas matemáticas utilizadas no cálculo das áreas das regiões limitadas pelos principais quadriláteros, por triângulos e circunferências, além da área da região limitada por uma elipse. Após cada fórmula apresentada e demonstrada, quando possível, associa-se a prova de um teorema da matemática básica e, quando necessário, listam-se aplicações úteis para a sua fixação e aprofundamento. Parte da pesquisa é dedicada ao cálculo de aproximações racionais do valor numérico de π (pi), razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, embasando o cálculo da área do círculo. Através das experiências dos professores de matemática do Ensino Fundamental e Médio, percebe-se que, ao usar o cálculo de áreas como ferramenta nas resoluções de situações-problema, o estudante vê de forma mais clara, palpável e lúdica certos conteúdos da matemática básica, facilitando o processo ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Áreas dos polígonos. Área do círculo. Ensino da Matemática Básica.

ABSTRACT

The calculation of the areas since the elementary school are presented to young Brazilian students, the assimilation is facilitated by the concrete and abundant aspect of everyday applications. In this research, the mathematical formulas used in the calculation of the areas of study are presented and demonstrated, based on the Eudoxo method of exhaustion and based on the works of authors such as Carvalho (2011), Lima (1991), Morgado (1990) and Muniz Neto (2013 and 2015). Regions limited by the main quadrilaterals, triangles and circumferences, besides the area of the region limited by an ellipse. After each formula is presented and demonstrated, when possible, the proof of a basic mathematical theorem is associated and, when necessary, useful applications are listed for their fixation and deepening on the content. Part of the research is devoted to the calculation of rational approximations of the numerical value of π (π), ratio between the length of the circumference and its diameter, based on the calculation of the area of the circle. Through the experiences of mathematics teachers in Elementary and High School, it is noticed that, when using the calculation of areas as a tool in the resolutions of problem situations, the students see it more enlightened, palpable and playful form certain contents of basic mathematics, facilitating the teaching-learning process.

Key-words: Polygon areas. Circle area. Basic mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 –	Superfície plana S	25
Figura 2 –	Área de $Q = [Q] = 32$ $U = 9$ U	25
Figura 3 –	Composição da unidade de área	26
Figura 4 –	Composição do quadrado de lado racional	27
Figura 5 –	Quadrado Q' no interior do quadrado Q	28
Figura 6 –	Quadro Q de lado irracional n	28
Figura 7 –	Composição do quadrado de lado $b + h$	29
Figura 8 –	Região R	30
Figura 9 –	Retângulo A	31
Figura 10 –	Retângulo A de dimensões n e $n + 1$. Justaposição de duas regiões R congruentes e invertidas, com n retângulos cada uma	32
Figura 11 –	Retângulo A de dimensões n e $a_1 + a_n$. Justaposição de duas figuras R congruentes e investidas, com n retângulos cada uma	33
Figura 12 –	Octógono regular, inscrito no círculo, no qual duas diagonais menores foram prolongadas	34
Figura 13 –	Polígono retangular P contido numa figura plana F	35
Figura 14 –	Figuras semelhantes	37
Figura 15 –	Polígonos retangulares inscritos nas figuras semelhantes F e F'	38
Figura 16 –	Paralelogramo $ABCD$ de base b e altura h	39
Figura 17 –	Justaposição do paralelogramo $ABCD$ e dois triângulos retângulos congruentes, formando um retângulo	40
Figura 18 –	Justaposição dos dois triângulos retângulos	40
Figura 19 –	Triângulos de base b e altura h	41
Figura 20 –	Justaposição de dois triângulos congruentes, formando um paralelogramo	41
Figura 21 –	Polígono regular de n lados	42
Figura 22 –	Dois triângulos de mesma altura, cujas bases AB e BC são alinhadas	43

Figura 23 –	Triângulos ADC e BDC de mesma altura	44
Figura 24 –	Paralelogramo ABCD, em que M é ponto médio de DC	45
Figura 25 –	Triângulo ABC e retas r, s, t paralelas aos seus respectivos lados	46
Figura 26 –	Triângulo retângulo	47
Figura 27/28 –	Quadrado ABCD, particionado de modos diferentes	47
Figura 29 –	Feixe de retas paralelas	48
Figura 30 –	Medianas AM_1 e BM_2 do triângulo ABC	49
Figura 31 –	Medianas AM_1 e CM_3 do triângulo ABC	50
Figura 32 –	Baricentro G do triângulo ABC	51
Figura 33 –	Triângulo ABC	52
Figura 34 –	Cevianas AA', BB' e CC'	53
Figura 35 –	Trapézio ABCD e sua diagonal AC	55
Figura 36 –	Partição do trapézio ABCD e suas diagonais AC e BD	55
Figura 37 –	Trapézio ABCD particionado pelas diagonais	57
Figura 38 / 39 / 40 –	Triângulo ABC acutângulo/retângulo/ obtusângulo	58
Figura 41 –	Participação do triângulo ABC	59
Figura 42 –	Trisseção do ângulo ACB	60
Figura 43 –	Ponto P no interior do triângulo equilátero ABC	61
Figura 44 –	Aplicação 14	62
Figura 45 –	Participação do quadrilátero ABCD.....	63
Figura 46 –	Participação do quadrilátero convexo inscrito ABCD por suas diagonais	65
Figura 47/ 48 –	Triângulo ABC acutângulo / obtusângulo	66
Figura 49 –	Triângulo ABC inscrito	67
Figura 50 –	Triângulo APF	68
Figura 51 –	Circuncentro	69
Figura 52 –	Participação do triângulo ABC pelas bissetrizes	71
Figura 53 –	Círculo inscrito ao triângulo ABC	72
Figura 54 –	Triângulo ABC	72
Figura 55 –	I: incentro do triângulo, ponto equidistante dos lados	73
Figura 56 –	Círculos ex-escritos ao triângulo ABC	74
Figura 57 –	Círculo ex-escrito tangente ao lado AB	74

Figura 58 –	Quadrilátero AOBC, particionado	75
Figura 59 –	Secção transversal	76
Figura 60 –	Secção meridiana ABC do cone	76
Figura 61 –	Triângulo ABC com seu triângulo órtico A'B'C', no qual o lado B'C' foi prolongado nos dois sentidos	78
Figura 62 –	Triângulo isósceles AD₁D₂	79
Figura 63 –	Paralelogramo AOBC	81
Figura 64 –	Paralelogramos AOEC e AOED equivalentes	81
Figura 65 –	Paralelogramo AOED e retângulo FOEG equivalentes	82
Figura 66 –	Segmentos orientados	83
Figura 67 –	Rede no plano cartesiano	85
Figura 68 / 69 –	Polígonos simples e não simples	85
Figura 70/71/72	Polígonos 1, 2 e justaposição dos polígonos 1 e 2	86
Figura 73 –	Polígono simples	88
Figura 74 –	Triângulo retângulo particionado	88
Figura 75 –	Comprimento AB da circunferência	91
Figura 76 –	Polígonos inscritos	92
Figura 77 –	Duplicação do número de lados	92
Figura 78 –	Polígonos circunscritos	94
Figura 79 –	Lados dos polígonos inscrito e circunscrito	94
Figura 80 –	Lado AB de medida L	96
Figura 81 –	Lado AB de medida l_n	99
Figura 82 –	Triângulo retângulo ACD	100
Figura 83 –	Lado AB do polígono inscrito de n lados	102
Figura 84 –	Lados AM e BM do polígono inscrito de 2n lados	102
Figura 85 –	Vértices de polígonos circunscritos	104
Figura 86/87 –	Setor circular / Segmento circular	107
Figura 88 –	Cordas AB e CD congruentes	108
Figura 89 –	Aplicação 26	109
Figura 90 –	Aplicação 27	110
Figura 91 –	Resolução da aplicação 27	110
Figura 92 –	Aplicação 28	111
Figura 93 –	Resolução da aplicação 28	111

Figura 94 –	Aplicação 29	112
Figura 95 –	Números triangulares	113
Figura 96 –	Círculos circuncêntricos	115
Figura 97 –	Círculo e elipse	116
Figura 98 –	Arco AP	117
Figura 99 –	Círculo de raio r e centro no ponto (x_0, y_0)	118
Figura 100 –	Sistema XOY	120
Figura 101 –	Sistema X' O' Y'	120
Figura 102-	Trapézio retângulo AA'P'P	121
Figura 103 –	Resolução da aplicação 31	124

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS	18
2.1	SUPREMO E ÍNFIMO	18
2.2	O MÉTODO DE EXAUSTÃO DE EUDOXO	20
2.3	A DENSIDADE DE Q EM R	22
3	ÁREAS DAS REGIÕES LIMITADAS PELOS PRINCIPAIS QUADRILÁTEROS E PELO TRIÂNGULO	24
3.1	NOÇÕES INICIAIS DE ÁREA	24
3.2	ÁREA DA REGIÃO QUADRADA	25
3.3	ÁREA DA REGIÃO RETANGULAR	29
3.4	DEFINIÇÃO GERAL DE ÁREA	34
3.5	RELAÇÃO ENTRE SEMELHANÇA E ÁREA	36
3.6	ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM PARALELOGRAMO ...	39
3.7	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR	41
3.8	O TEOREMA DO LADO COMUM	43
3.9	ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM TRAPÉZIO	54
4	OUTRAS FORMULAS MATEMÁTICAS PARA O CÁLCULO DA ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR	58
4.1	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO ..	58
4.2	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS (FÓRMULA DE HERÃO)	65
4.3	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS E DO CIRCUNRAIO	67
4.4	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS E DO INRAIO	70
4.5	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS E DO RAIOS DE QUALQUER DOS CÍRCULOS EX-INSCRITOS	73
4.6	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DO CIRCUNRAIO E DO SEMIPERÍMETRO DO TRIÂNGULO	

	ÓRTICO.....	78
4.7	ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS DOS VÉRTICES	80
4.8	A FÓRMULA DE PICK PARA O CÁLCULO DA ÁREA DE UM POLÍGONO	84
5	O NÚMERO π E A ÁREA DO CÍRCULO	90
5.1	NOÇÕES INICIAIS RELATIVAS AO NÚMERO IRRACIONAL π .	90
5.2	O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA	92
5.3	O VALOR NUMÉRICO DE π	99
5.4	ÁREA DO CÍRCULO (DISCO)	102
5.5	ÁREA LIMITADA PELA ELIPSE	116
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	125
	REFERÊNCIAS	127

1 INTRODUÇÃO

Muitos dos resultados da matemática básica como por exemplo os teoremas de Pitágoras, Tales e Ceva, bem como a propriedade do baricentro de um triângulo, além dos cálculos da soma dos termos de uma progressão aritmética, do inraio, circunraio, ex-inraios podem ser demonstrados de maneira relativamente simples, aplicando-se o cálculo de áreas de triângulos e/ou dos principais quadriláteros de duas maneiras diferentes. Mas se o problema for calcular a área limitada por uma elipse, pode-se usar um dos princípios de Cavalieri, quando se conhece o cálculo da área de um círculo.

O estudo do cálculo de áreas teve início com a geometria prática de civilizações antigas como a egípcia e a babilônica. Cresceu e criou corpo na Grécia antiga, com a geometria dedutiva de Tales e Pitágoras, e com o desenvolvimento axiomático da geometria por Euclides. O método de exaustão aqui utilizado para dar sustentação ao cálculo da área do quadrado de lado irracional e ao cálculo da área do círculo, já fora utilizado por Arquimedes.

O método de exaustão não dá origem às fórmulas matemáticas. Na Grécia antiga, as fórmulas demonstradas tão elegantemente através do método de exaustão foram concebidas com a ideia do método de Arquimedes para determinar uma área ou volume. A ideia era cortar a região correspondente num número muito grande de tiras ou fatias paralelas finas, residindo aí os germes do cálculo integral.

O conhecimento das diversas fórmulas matemáticas utilizadas no cálculo de áreas e, acima de tudo, a compreensão dos processos empregados nas respectivas demonstrações, darão maior segurança, eficiência e simplicidade às resoluções de situações-problema compatíveis com o estudo de áreas. Para o presente trabalho, autores como Carvalho (2011), Lima (1991), Muniz Neto (2013 e 2015), Morgado (1990), Dolce (2005), Dante (2003), Barbosa (1995), Eves (1997), Singh (2001) e Carneiro (2006) foram consultados.

O objetivo maior deste estudo é divulgar ideias e modos diferentes do tradicional de abordar conteúdos relevantes no ensino da matemática básica. Muitas das aplicações e soluções aqui expostas são frutos de longas e gratificantes conversas informais com o professor Fabrício Maia, quando, na busca de encontrar uma melhor maneira de expor aos estudantes determinados conteúdos, ideias eram aprimoradas e/ou repassadas. Muito da

fundamentação teórica aqui utilizada tem origem e/ou motivação nas aulas proferidas pelos meus professores durante o transcorrer deste mestrado.

Esta pesquisa foi dividida em quatro partes, para que o leitor possa incorporar e assimilar de forma gradativa as ideias aqui contidas.

Na primeira parte, iniciamos com uma fundamentação teórica relativa ao conjunto \mathbb{R} dos números reais. Tal fundamentação, sustentará o Método de exaustão de Eudoxo, apresentado logo a seguir. Fecharemos essa primeira parte demonstrando que o conjunto dos números racionais (\mathbb{Q}) é denso em \mathbb{R} . O fato do conjunto dos racionais ser denso em \mathbb{R} , combinado com o método de exaustão, fundamentará o cálculo da área do quadrado de lado irracional, um dos pilares dessa pesquisa.

Na segunda parte, iniciaremos listando as proposições inerentes ao conceito de áreas. Com os conhecimentos da primeira parte servindo de esteio, são apresentadas e demonstradas as fórmulas para o cálculo das áreas das regiões limitadas pelos principais quadriláteros, notadamente, a do quadrado de lado irracional, e da região triangular, em função da base e da altura. A partir dessas fórmulas, nas aplicações, foram demonstrados alguns teoremas clássicos como o de Pitágoras, de Tales e de Ceva, além da propriedade do baricentro de um triângulo e da soma de números inteiros positivos em progressão aritmética. A maior dificuldade nessa primeira parte, sem dúvida alguma, consiste na demonstração da área limitada por uma região quadrada, cuja medida do lado é irracional. Muniz Neto (2013) e Lima (1991) trazem abordagens distintas para tal tema. Aqui, por se tratar de um estudo voltado para o ensino médio, optamos por utilizar o método de exaustão como apoio.

Na terceira parte, são apresentadas e demonstradas outras oito fórmulas matemáticas diferentes para o cálculo da área da região triangular e, a partir de combinações delas, nas aplicações, mostrou-se como calcular, de maneira relativamente simples, os raios das circunferências (inscrita, ex-inscritas e circunscrita) de um triângulo. Dentre essas outras fórmulas, encontra-se aquela que utiliza o semiperímetro do triângulo órtico, dando uma boa oportunidade para o professor do ensino médio ampliar seus conhecimentos e os de seus alunos, aproximando-os de situações-problema exploradas em olimpíadas de matemática. Outra fórmula demonstrada é aquela que utiliza as coordenadas cartesianas dos vértices do triângulo, onde optamos por utilizar as noções de vetores, embora de forma não evidente. A demonstração para essa fórmula, normalmente apresentadas nos livros didáticos, é exaustiva e

compromete, na maioria das vezes, o tempo disponível. Fechamos essa segunda parte com a fórmula de Pick, onde para se calcular a área de um polígono numa rede, basta saber contar pontos. Vale a pena apresentá-la aos estudantes do ensino médio, seu uso facilita a resolução de muitas situações-problema envolvendo cálculo de área em malhas quadriculadas.

Na quarta e última parte, abordou-se o número π (pi, razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro), o comprimento da circunferência e a área do círculo. Iniciamos com uma experiência simples e prática, na qual um valor racional aproximado para o número irracional π , com uma casa decimal, pode ser obtido. Tal experiência é sugerida para estudantes do ensino fundamental, quando em seu primeiro contato com o número π . Para o cálculo do comprimento da circunferência lançamos mão mais uma vez do método de exaustão de Eudoxo.

Nas demonstrações desse trabalho, tentou-se utilizar somente conteúdos normalmente estudados no ensino médio ou que possam ser facilmente assimilados por parte de quem tem o domínio de tais conteúdos. Com isso, tem-se uma maior dificuldade na demonstração do comprimento da circunferência, onde, além do método de exaustão, tivemos que usar algumas noções de limites. Uma demonstração alternativa para o cálculo do comprimento da circunferência com uso exclusivo das noções de limites, sem utilizar o método de exaustão de Eudoxo, foi citada.

O trabalho é finalizado com o cálculo da área da região limitada por uma elipse, onde são dadas duas demonstrações. A primeira, utilizando o princípio de Cavalieri, é bastante acessível ao nível de ensino médio. É uma ótima oportunidade de difundir tão importante princípio. A segunda, em que são utilizadas a área do círculo, sua projeção ortogonal num plano inclinado, além das equações paramétricas do círculo e da elipse, traz em si um engrandecedor caminho que vale a pena ser percorrido por professores e estudantes do ensino médio.

2 FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS

Iniciaremos esse capítulo com algumas definições relativas ao conjunto dos números reais que fundamentarão futuras demonstrações presentes nessa pesquisa. Tais definições podem ser encontradas em Lima (2014) ou Muniz Neto (2015).

2.1 SUPREMO E ÍNFIMO

Vejam algo que distingue o conjunto \mathbb{R} dos reais do conjunto \mathbb{Q} dos racionais. O conjunto \mathbb{R} é caracterizado como um corpo ordenado *completo*, propriedade que \mathbb{Q} não tem. Para um entendimento do que isso significa, vejamos alguns conceitos preliminares.

Um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$, tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$, ou seja, $X \subset (-\infty, b]$. Nesse caso, diz-se que b é uma *cota superior* de X . De modo análogo, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado inferiormente* quando existe algum $a \in \mathbb{R}$, tal que $x \geq a$ para todo $x \in X$, ou seja, $X \subset [a, +\infty)$. O número a é então *uma cota inferior* de X . Por fim, um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado* se X for simultaneamente limitado superior e inferiormente. Isso significa que X está contido em algum intervalo limitado $[a, b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $-k \leq x \leq k$, isto é,

$|x| \leq k$, para todo $x \in X$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não vazio. Um número $M \in \mathbb{R}$ chama-se **supremo** do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Em outras palavras, M é supremo de X quando cumpre as condições:

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq M$;

S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c < M$, então existe $x \in X$ com $c < x$.

A condição S2 diz que se c é menor que o supremo M de X , então c não é cota superior. Podemos reformular essa condição dizendo que se c é uma cota superior de X , então

c é maior do que ou igual ao supremo M de X . Escrevemos $M = \sup X$ para indicar que M é o supremo do conjunto não vazio X .

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não vazio, limitado inferiormente, um número real m chama-se **ínfimo** do conjunto X , e escreve-se $m = \inf X$, quando m é a maior das cotas inferiores de X . Isso equivale às duas afirmações:

I1. Para todo $x \in X$ tem-se $x \geq m$;

I2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c > m$, então existe $x \in X$ com $x < c$.

A condição I2 diz que se c é maior que o ínfimo m de X , então c não é cota inferior. Podemos reformular essa condição dizendo que se c é uma cota inferior de X , então c é menor do que ou igual ao ínfimo m de X .

Isto posto, podemos dizer que b é o elemento máximo e ao mesmo tempo supremo do intervalo fechado $[a, b]$. Já o intervalo $[a, b)$, cujo supremo é b , não possui elemento máximo. A ideia de supremo serve precisamente para substituir a ideia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe. Considerações inteiramente análogas podem ser feitas em relação ao ínfimo.

A afirmação de que o corpo ordenado \mathbb{R} é *completo* significa que todo conjunto não vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $M = \sup X \in \mathbb{R}$. Com isso, já fica subentendido que todo conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$, limitado inferiormente, possui ínfimo. De fato, nesse caso, o conjunto $Y = \{-x; x \in X\}$ é limitado superiormente e apresenta supremo $M = \sup X \in \mathbb{R}$. Assim, $-M = m = \inf X$, pois $-M$ é a maior cota inferior de Y .

Vejamos, agora, algumas consequências da completeza do conjunto \mathbb{R} dos números reais. São três teoremas que na realidade se equivalem. Os dois primeiros são creditados a Arquimedes e o terceiro, a Eudoxo. Essas três consequências da completeza de \mathbb{R} é que nos leva a dizer que \mathbb{R} é um corpo arquimediano.

Teorema 1: O conjunto $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ dos números naturais não é limitado superiormente.

Demonstração: De fato, supondo \mathbb{N} limitado superiormente, existe $M = \sup \mathbb{N}$. Daí, $M - 1$ não é cota superior de \mathbb{N} , isto é, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > M - 1$, ou seja,

$M < n + 1 \in \mathbb{N}$. Assim, M não é cota superior de \mathbb{N} , o que é uma contradição. Logo, o conjunto \mathbb{N} não é limitado superiormente. ■

Teorema 2: Dado um número real $a > 0$, existe um inteiro $n_0 > 0$ tal que $\frac{1}{n_0} < a$.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que $\frac{1}{n} \geq a$ para todo inteiro positivo n . Sendo assim, teremos $n \leq \frac{1}{a}$, para todo inteiro positivo n . Mas isso mostra que o conjunto dos naturais é limitado superiormente, o que é um absurdo.

Logo, existe $n = n_0$, tal que $\frac{1}{n_0} < a$. ■

Teorema 3: Dados dois números reais positivos a e b , existe um número inteiro positivo n tal que $n \cdot a > b$. Esse resultado é conhecido como *princípio de Arquimedes*.

Demonstração: De fato, pelo teorema 2, tomando o número real positivo $\frac{a}{b}$, existe um inteiro positivo n tal que $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$. Assim, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade pelo número real positivo $n \cdot b$, obtemos $n \cdot a > b$. ■

2.2 O MÉTODO DE EXAUSTÃO DE EUDOXO

Apresentaremos agora o método de exaustão de Eudoxo, o esteio maior desse trabalho. O que escrevemos a seguir sobre o método de exaustão, foi baseado em Ives (1997) e respaldado em Carvalho (2011), Lima (1991) e Muniz Neto (2013 e 2015).

Os *Elementos* de Euclides é uma obra composta de 13 livros ou capítulos, escrita em torno de 300 a.C., que reúne os conhecimentos de geometria, álgebra e aritmética da época.

É provável que os *Elementos* de Euclides sejam, na sua maior parte, uma compilação altamente bem sucedida e um arranjo sistemático de trabalhos anteriores. Não há dúvidas que Euclides, o criador e professor da famosa escola de matemática de Alexandria, teve que dar muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas, mas o grande mérito de seu trabalho reside

na seleção feliz de proposições e no seu arranjo numa sequência lógica, presumivelmente a partir de poucas suposições iniciais.

A proposição de abertura do livro X dos Elementos de Euclides, que é a base do método de exaustão empregado posteriormente no livro XII, diz o seguinte: *“Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade e assim, continuamente, chegar-se-á, pôr fim, a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie”*.

O modo de provar uma fórmula (igualdade) mostrando que a desigualdade é impossível, se valendo da proposição acima, é devido a Eudoxo, e é conhecido como *método de euxastão*. Como se pode notar, ao usar esse método, estamos pressupondo que a grandeza em questão possa ser subdividida indefinidamente. Usaremos esse método para provar várias fórmulas importantes desta pesquisa.

A proposição que é a base do método da exaustão de Eudoxo, pode ser resumida da seguinte maneira:

Duas grandezas de mesma espécie e desiguais sendo dadas, se da maior for retirada uma grandeza maior do que sua metade e esse processo for repetido um número suficientemente grande de vezes, sobrará uma grandeza menor do que a menor grandeza dada.

Em uma linguagem matemática, podemos transcrever essa proposição da seguinte maneira.

Sejam M_0 e ε duas grandezas de mesma espécie, com $M_0 > \varepsilon$. Tomamos $M_1 = M_0 - x$, onde $x > \frac{1}{2} \cdot M_0$, ou seja, $M_1 < \frac{1}{2} \cdot M_0$. Depois, tomamos $M_2 = M_1 - y$, onde $y > \frac{1}{2} \cdot M_1$, ou seja, $M_2 < \frac{1}{2} \cdot M_1$. E, assim, sucessivamente, de modo a termos a sequência M_0, M_1, M_2, \dots , em que $M_1 < \frac{1}{2} \cdot M_0$, $M_2 < \frac{1}{2} \cdot M_1$, $M_3 < \frac{1}{2} \cdot M_2$ etc. Então, existe um inteiro positivo N tal que $M_N < \varepsilon$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ dado.

Demonstração: De fato, mesmo sendo $M_0 > \varepsilon$, pelo princípio de Arquimedes (teorema 3), existe N inteiro positivo tal que $(N + 1) \cdot \varepsilon > M_0$, em que $(N + 1) \geq 2$. Veja figuras.



Nestas condições, tomemos as grandezas $M_0 < (N + 1) \cdot \varepsilon$. Da grandeza M_0 , retiremos mais que sua metade; e da grandeza $(N + 1) \cdot \varepsilon$, retiremos ε (que é menor que ou igual à metade de $(N + 1) \cdot \varepsilon$). Com esse procedimento, restam-nos, respectivamente, duas grandezas M_1 e $N \cdot \varepsilon$, tais que $M_1 < \frac{1}{2} M_0$ e $N \cdot \varepsilon \geq \frac{1}{2} \cdot (N + 1) \cdot \varepsilon > \frac{1}{2} \cdot M_0$. Assim, $N \cdot \varepsilon > M_1$.

Isso mostrou que $(N + 1) \cdot \varepsilon > M_0$ implica em $N \cdot \varepsilon > M_1$. Como esse mesmo raciocínio, $N \cdot \varepsilon > M_1$ implica em $(N - 1) \cdot \varepsilon > M_2$; $(N - 1) \cdot \varepsilon > M_2$ implica em $(N - 2) \cdot \varepsilon > M_3$ e, assim, continuamente até chegarmos em $[N - (N - 1)] \cdot \varepsilon > M_N$, isto é, $M_N < \varepsilon$. ■

2.3 A DENSIDADE DE \mathbb{Q} EM \mathbb{R}

Por definição, um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito **denso** em \mathbb{R} quando todo intervalo real aberto (α, β) contém algum ponto de X .

Teorema 4: O conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é denso em \mathbb{R} .

Demonstração: Mostraremos que dado um intervalo (α, β) qualquer em \mathbb{R} , existe um $q \in (\alpha, \beta)$, com $q \in \mathbb{Q}$. Para isso, sabemos que $(\alpha, \beta) = \{x \in \mathbb{R} ; \alpha < x < \beta\}$. Daí, temos:

i) $\alpha < \beta \Leftrightarrow \beta - \alpha > 0$

ii) Pelo teorema 2, existe um número inteiro positivo p tal que $0 < \frac{1}{p} < \beta - \alpha$

Considere agora o conjunto $A = \left\{ m \in \mathbb{Z}; \frac{m}{p} \geq \beta \right\}$, onde já sabemos que

$\frac{1}{p}, \beta \in \mathbb{R}$ e $\frac{1}{p} > 0$. Daí, temos que:

iii) pelo teorema 3, existe um inteiro positivo m' tal que $m' \cdot \frac{1}{p} > \beta$ e $m' \in A$.

Logo, A não é vazio.

iv) dado $m \in A$, então $\frac{m}{p} \geq \beta$, ou seja, $m \geq \beta \cdot p$. Daí, A é limitado inferiormente

por $\beta \cdot p$.

Seja, portanto, m_0 o menor elemento de A . Daí, obtemos que:

v) $\frac{m_0}{p} \geq \beta$.

vi) $m_0 - 1 < m_0$ e, assim, $m_0 - 1 \notin A$. Daí, concluímos que $\frac{m_0 - 1}{p} < \beta$.

Temos, portanto, de (ii) e (v), o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} < \beta - \alpha \\ \frac{m_0}{p} \geq \beta \end{cases} \Leftrightarrow \frac{m_0}{p} - \frac{1}{p} > \beta - (\beta - \alpha) \Leftrightarrow \frac{m_0 - 1}{p} > \alpha$$

Com isso, mostramos que $\alpha < \frac{m_0 - 1}{p} < \beta$, isto é, $\frac{m_0 - 1}{p} \in (\alpha, \beta)$, em que $(m_0 - 1)$

e p são inteiros, ou seja, $\frac{m_0 - 1}{p} \in \mathbb{Q}$. ■

3 ÁREAS DAS REGIÕES LIMITADAS PELOS PRINCIPAIS QUADRILÁTEROS E PELO TRIÂNGULO

Iniciaremos esse capítulo com os conceitos iniciais de área e, em seguida, com inspiração em Ives (1997), Lima (1991), Muniz Neto (2013 e 2015) e Dolce (2005) serão apresentadas e demonstradas as fórmulas matemáticas utilizadas no cálculo da área da região quadrada, retangular, triangular, limitada pelo paralelogramo e limitada pelo trapézio. Veremos, também, nas aplicações, como se tornam interessantes e acessíveis, para os estudantes e para os professores, as demonstrações dos clássicos teoremas de Pitágoras, de Tales e de Ceva, além da demonstração da propriedade do baricentro e da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

3.1 NOÇÕES INICIAIS DE ÁREA

Medir uma grandeza é compará-la a outra grandeza da mesma espécie tomada como unidade. No caso, medir uma superfície (S) é compará-la com outra superfície conhecida (U). O resultado dessa comparação é um número que expressa quantas unidades (U), justapostas, estão contidas na superfície (S). Esse número assim obtido é a **medida da superfície S** ou, o que é mais usual, esse número é a **área de S** . Intuitivamente, a *área* de uma região do plano é um número positivo que associamos à mesma e que serve para quantificar a superfície por ela ocupada. Para que um conceito qualquer de áreas para polígonos tenha utilidade, *postulamos* que as seguintes propriedades (intuitivamente desejáveis) sejam válidas:

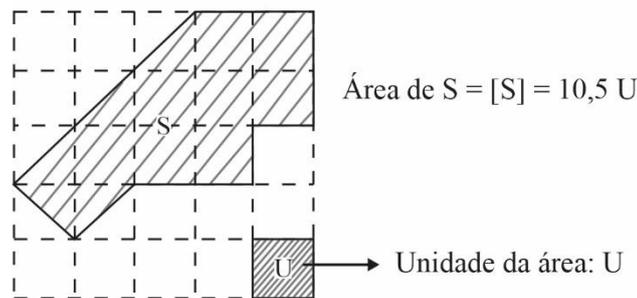
1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é *particionado* em um número finito de outros polígonos convexos (isto é, se o polígono é a união de um número finito de outros polígonos convexos, tais que dois quaisquer deles partilham somente um vértice ou uma aresta), então a área do polígono maior é a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono (maior) contém outro (menor) em seu interior, então a área do polígono maior é maior que a área do polígono menor.
4. Se Q é um quadrado de lado unitário, então a área de Q é igual a $[Q] = 1$.

A propriedade 4 estabelece como unidade de área uma superfície equivalente à superfície de uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Por definição, então, toda superfície quadrada de lado medindo 1 unidade de comprimento terá área igual a 1 unidade de área.

Usaremos a notação $[S]$ para representar a medida da superfície S (ou a área de S), ou seja, área de $S = [S]$.

Exemplo: A superfície plana S da figura seguinte tem área igual a $10,5 U$.

Figura 1 - superfície plana S



Fonte: elaborada pelo autor

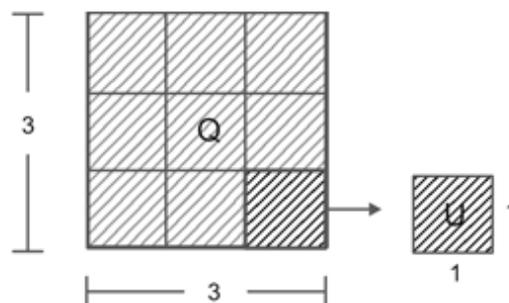
3.2 ÁREA DA REGIÃO QUADRADA

Considerando uma superfície quadrada Q cujo lado mede n unidades de comprimento, temos que sua área é dada por n^2 , isto é, área de $Q = [Q] = n^2$. Veja a seguir a demonstração deste fato.

• **Caso n seja natural** – Neste caso, Q poderá ser decomposta em $n \times n = n^2$ regiões quadradas justapostas, cada uma com lado unitário. Daí, área de $Q = [Q] = n^2$.

Exemplo:

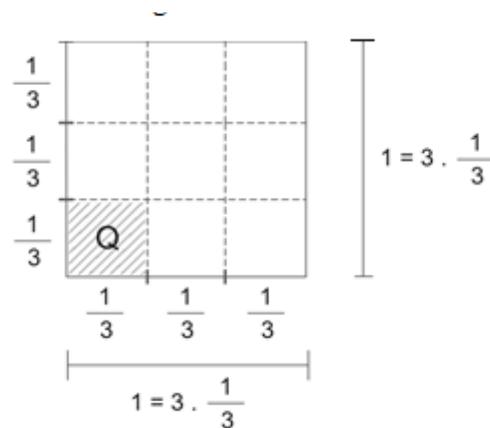
Figura 2 - Área de $Q = [Q] = 3^2 U = 9 U$



Fonte: elaborada pelo autor

• **Caso $n = \frac{1}{k}$, em que $k \in \mathbb{N}^*$** – Neste caso, a unidade de comprimento pode ser entendida como $1 \text{ uc} = k \cdot \frac{1}{k} \text{ uc}$ e, assim, a unidade de área (a região quadrada de lado 1 unidade de comprimento) poderá ser decomposta em $k \times k = k^2$ regiões quadradas, justapostas, todas congruentes a Q. Daí, $k^2 \cdot (\text{área de } Q) = 1$, ou seja, área de $Q = \frac{1}{k^2} = \left(\frac{1}{k}\right)^2$.
 Portanto, área de $Q = [Q] = n^2$.

Figura 3 - Composição da unidade de área

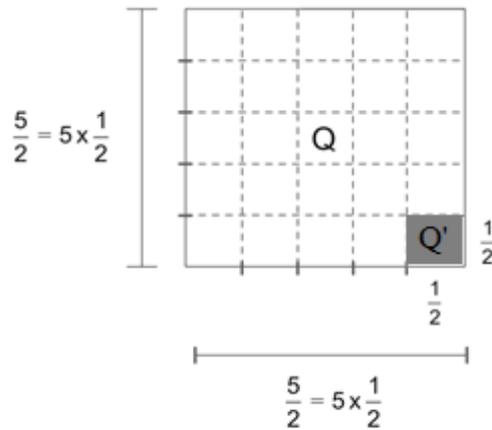


Fonte: elaborada pelo autor

Note: $3^2 \cdot (\text{área de } Q) = 1 \Rightarrow \text{área de } Q = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

• **Caso $n = \frac{p}{k}$, em que $\{p,k\} \subset \mathbb{N}^*$ (n é racional)** – Neste caso, $n = p \cdot \frac{1}{k}$ e, assim, podemos decompor Q em $p \times p = p^2$ regiões quadradas, cada uma com lado medindo $\frac{1}{k}$ e, portanto, com área igual a $\left(\frac{1}{k}\right)^2$. Logo, a área de Q é igual a $p^2 \cdot \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \left(\frac{p}{k}\right)^2$, ou seja, área de $Q = [Q] = n^2$. Exemplo:

Figura 4 - Composição do quadrado de lado racional



Fonte: elaborada pelo autor

Note: Área de $Q = 5 \times 5 \cdot [\text{área de } Q'] = 5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

- **Caso n seja irracional** – Neste caso, n e a unidade de comprimento (1 uc) são incomensuráveis, isto é, não existe segmento que seja submúltiplo comum de n e da unidade de comprimento. Mesmo assim, prova-se que a área de Q é igual a n^2 .

Para tal prova, consideremos os números reais positivos $[Q]$ e n^2 que expressam, respectivamente, a área do quadrado Q e o quadrado da medida n dos lados de Q , n irracional. Como sabemos, uma, e somente uma, das sentenças seguintes é verdadeira (tricotomia):

- i) $[Q] < n^2$
- ii) $[Q] = n^2$
- iii) $[Q] > n^2$

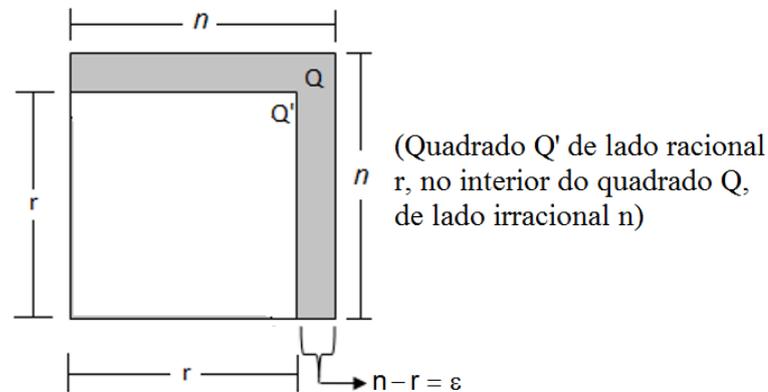
Mostraremos, por exclusão, que a sentença $[Q] = n^2$ é a verdadeira.

1º) Mostrando que a área de Q não pode ser menor que n^2 .

Supondo, por absurdo, que a área de Q seja menor que n^2 , a densidade do conjunto dos racionais em \mathbb{R} (ver 2.3) garante que existe r racional tal que $\sqrt{[Q]} < r < n$.

Essa desigualdade equivale a $[Q] < r^2 < n^2$. Consideremos, agora, no interior do quadrado Q de lado n , um quadrado Q' de lado racional r , cuja área já sabemos ser igual a r^2 .

Figura 5 - Quadrado Q' no interior do quadrado Q



Fonte: elaborada pelo autor

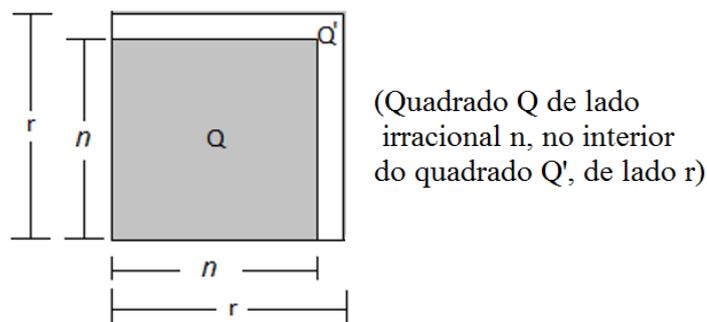
Nesse caso, temos que $r^2 = [Q']$ e $[Q] < r^2 < n^2$, ou seja, $[Q] < [Q']$. Mas isso é um absurdo, pois Q' é parte de Q . Assim, $[Q] < n^2$ é uma sentença falsa.

2º) Mostrando que a área de Q não pode ser maior que n^2 .

Supondo, por absurdo, que a área de Q seja maior que n^2 , a densidade do conjunto dos racionais em \mathbb{R} (ver 2.3) permite que tomemos r racional tal que $n < r < \sqrt{[Q]}$. Essa desigualdade equivale a $n^2 < r^2 < [Q]$. Consideremos, agora, no interior do quadrado Q' de lado r , cuja área já sabemos ser igual a r^2 , um quadrado Q de lado irracional n .

Figura 6 – Quadro Q de lado irracional n

Figura 06



Fonte: elaborada pelo autor

Nesse caso, temos que $r^2 = [Q']$ e $n^2 < r^2 < [Q]$, ou seja, $[Q'] < [Q]$. Mas isso é um absurdo, pois Q é parte de Q' . Assim, $[Q] > n^2$ é uma sentença falsa.

Portanto, a área do quadrado Q não pode ser menor nem maior do que n^2 . Logo, por exclusão, a área do quadrado Q de lado n , n irracional, é também igual a n^2 . Com isso, fica concluído que, dado um quadrado de lado n , em que n é um número real positivo qualquer (inteiro, fracionário ou irracional) sua área é dada por $[Q] = n^2$. ■

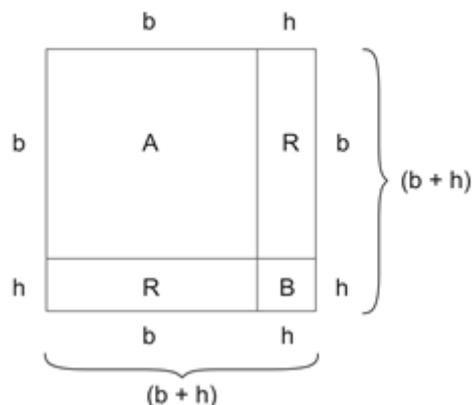
3.3 ÁREA DA REGIÃO RETANGULAR

Seja R uma região retangular de base igual a b unidades de comprimento (b uc) e de altura h uc. Sua área é dada, em unidades de área (ua), por

$$\text{Área de } R = [R] = b \cdot h$$

Prova: Construamos um quadrado (Q) de lado igual a $(b + h)$ uc, o qual contém, justapostas, duas regiões congruentes a R e mais duas regiões quadradas, (uma “A”, cujo lado mede b uc, e outra “B”, cujo lado mede h uc).

Figura 7 - Composição do quadrado de lado $b + h$



Fonte: elaborada pelo autor

Por um lado, a área de Q é igual a $[Q] = (b + h)^2 = b^2 + 2bh + h^2$.

Por outro lado, a área de Q é igual a $[Q] = [A] + 2 \cdot [R] + [B]$, isto é,

$$[Q] = b^2 + 2 \cdot [R] + h^2. \text{ Daí,}$$

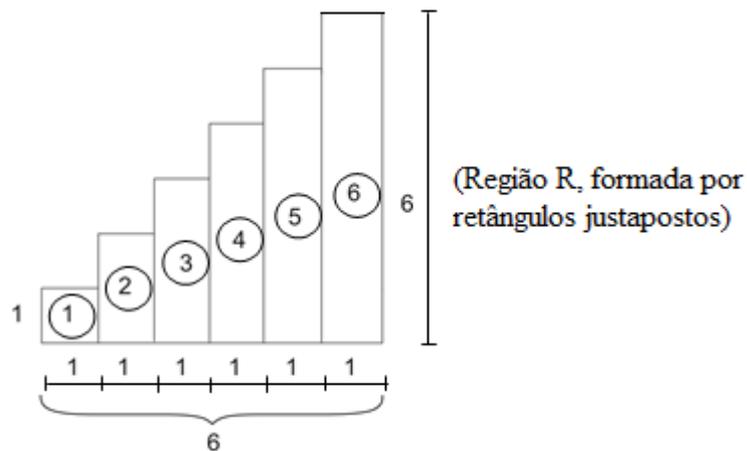
$$[Q] = b^2 + 2 \cdot [R] + h^2 = b^2 + 2bh + h^2 \text{ e, portanto, a área de R é igual a}$$

$$[R] = b \cdot h. \quad \blacksquare$$

Aplicação 1: Calcule a soma $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$, usando o cálculo de áreas de retângulos.

Resolução: Considerando 6 retângulos justapostos de bases iguais a 1 e alturas iguais a 1, 2, 3, 4, 5, 6, temos a região (R) representada a seguir, cujos números interiores indicam as áreas dos respectivos retângulos.

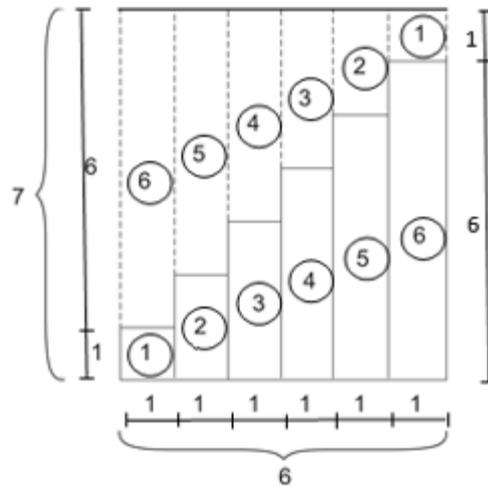
Figura 8 – Região R, justaposição de 6 retângulos



Fonte: elaborada pelo autor

Considerando duas regiões congruentes a R, invertidas e justapostas, obtemos um retângulo A de base 6 e altura 7, conforme mostra figura seguinte.

Figura 9 – Retângulo A, justaposição de duas regiões R congruentes



Fonte: elaborada pelo autor

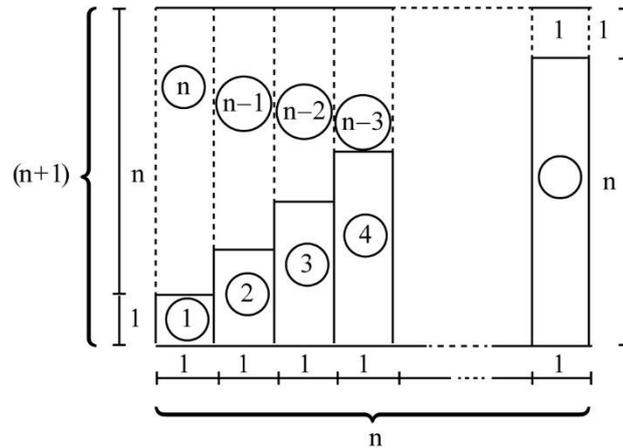
Por um lado, $[A] = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \text{ ua} = 2 \cdot S \text{ ua}$ (Veja figura 09)

Por outro lado, $[A] = (6 \cdot 7) \text{ ua}$. Daí, $2 \cdot S = 6 \cdot 7 \Rightarrow S = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

Teorema 5. A soma dos n primeiros números inteiros positivos, $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$, em que $n \in \mathbb{N}^*$, pode ser dada por $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração: Consideremos a região (R) formada por n retângulos, justapostos, de bases iguais a 1 e alturas iguais a 1, 2, ..., n . Duas regiões congruentes a R, invertidas e justapostas, formam uma região retangular (A) de base igual a “ n ”uc e altura igual a “ $(n + 1)$ ” uc. Veja figura seguinte, na qual os números no interior de cada retângulo indicam as áreas dos respectivos retângulos.

Figura 10 - Retângulo A de dimensões n e n + 1. Justaposição de duas regiões R congruentes e invertidas, com n retângulos cada uma.



Fonte: elaborada pelo autor

Por um lado, $[A] = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \text{ ua} = 2 \cdot S_n \text{ ua}$.

Por outro lado, $[A] = n(n + 1) \text{ ua}$.

n

Daí, $2 \cdot S_n = n(n + 1) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ■

Teorema 6. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, em que $n \in \mathbb{N}^*$, pode ser dada por $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.

Demonstração: Considerando r a razão da progressão aritmética, temos que:

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + r) + (a_n - r) = a_1 + a_n$$

$$a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2r) + (a_n - 2r) = a_1 + a_n$$

$$a_4 + a_{n-3} = (a_1 + 3r) + (a_n - 3r) = a_1 + a_n$$

.....

$$a_{1+k} + a_{n-k} = (a_1 + kr) + (a_n - kr) = a_1 + a_n$$

Isso mostra que, numa progressão aritmética, a soma de termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos. Assim, de maneira análoga à demonstração do teorema anterior, supondo os termos da PA positivos, consideremos a região (R) formada por n retângulos, justapostos, de bases iguais a 1 e alturas iguais a a_1, a_2, \dots, a_n . Duas regiões congruentes a R, invertidas e justapostas, formam uma região retangular (A) de base igual a “ n ”uc e altura igual a “ $(a_1 + a_n)$ ”uc. Veja figura seguinte, na qual os números no interior de cada retângulo indicam as áreas dos respectivos retângulos.

Figura 11 - Retângulo A de dimensões n e $a_1 + a_n$. Justaposição de duas figuras R congruentes e investidas, com n retângulos cada uma.



Fonte: elaborada pelo autor

Por um lado, $[A] = 2 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \text{ ua} = 2 \cdot S_n \text{ ua}$.

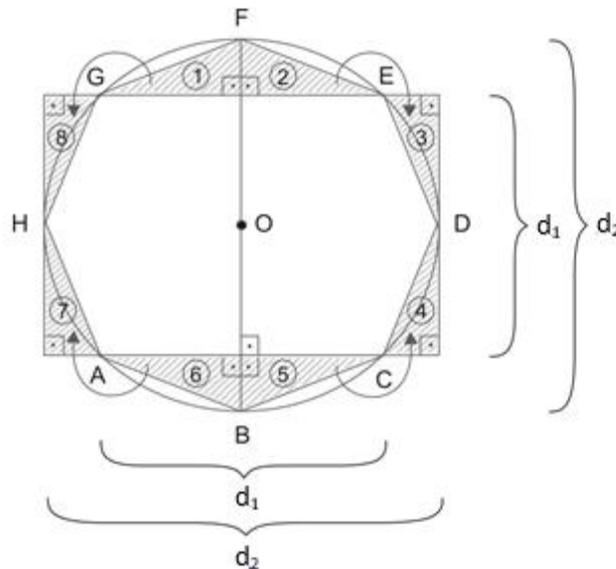
Por outro lado, $[A] = n \cdot (a_1 + a_n) \text{ ua}$.

$$\text{Daí, } 2 \cdot S_n = n(a_1 + a_n) \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad \blacksquare$$

Aplicação 2: Mostre que a área de um octógono regular é igual ao produto da maior diagonal pela menor diagonal.

Demonstração: Considere a figura seguinte relativa ao problema, em que duas diagonais menores paralelas (de medidas iguais a d_1) foram prolongadas igualmente de ambos os lados, até atingir medida igual à diagonal maior ($d_2 = \text{diâmetro}$).

Figura 12 - Octógono regular, inscrito no círculo, no qual duas diagonais menores foram prolongadas



Fonte: elaborada pelo autor

Os triângulos 1, 2, 3, ..., 8 são retângulos e congruentes (caso LAL de congruência de triângulos, pois têm catetos iguais a $\frac{d_1}{2}$ e $\frac{d_2 - d_1}{2}$). Assim, podemos dividir o octógono regular em um hexágono (ACDEGH) e nos triângulos 1, 2, 5 e 6. Rearranjando todas essas partes, podemos formar o retângulo composto pelo hexágono ACDEGH e os triângulos 3, 4, 7 e 8.

Então, o octógono regular ABCDEFGH é equivalente ao retângulo de base d_2 e altura d_1 .

Portanto, $[ABCDEFGH] = d_2 \cdot d_1$ ■

3.4 DEFINIÇÃO GERAL DE ÁREA

Vejamos a definição geral de área, segundo Lima (1991). A área de uma figura plana F arbitrária deve ser um número real não negativo, que indicaremos com $[F]$. Ele ficará bem determinado se conhecermos seus valores aproximados, por falta ou por excesso. As aproximações por falta (respectivamente por excesso) de $[F]$ são os números $[P]$, em que P

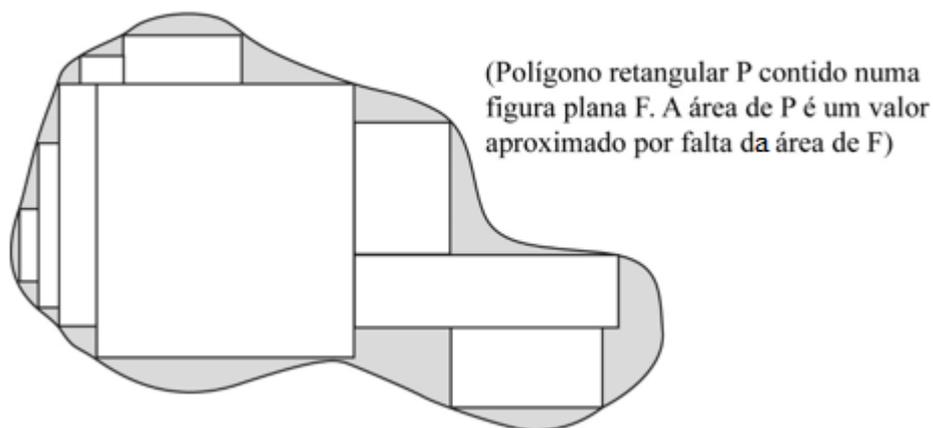
é um polígono contido em (respectivamente que contém) F . Por conseguinte, quaisquer que sejam os polígonos P (contido em F) e P' (contendo F), o número $[F]$ satisfaz às desigualdades: $[P] \leq [F] \leq [P']$.

Por simplicidade, em vez de considerarmos polígonos quaisquer, limitaremos nossa atenção aos polígonos retangulares, para os quais é mais fácil calcular a área. Um *polígono retangular* é a reunião de vários retângulos justapostos (isto é, dois desses retângulos têm em comum no máximo um lado). A área de um polígono retangular é a soma das áreas dos retângulos que o compõem.

Considerando os polígonos retangulares contidos e os polígonos retangulares que contêm a figura F , cuja área queremos calcular, as áreas dos contidos são aproximações por falta e as dos que contêm são aproximações por excesso. Quando essas aproximações tendem a um mesmo número, a área de F existe e é esse número. Nesse caso, o ínfimo das aproximações por excesso coincide com o supremo das aproximações por falta e cada um deles nos dá a área de F .

Assim, definiremos a área da figura F como sendo o número real $[F]$ cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares contidos em F e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos retangulares que a contêm.

Figura 13 – Polígono retangular P contido numa figura plana F .



Isso significa que dados quaisquer números reais b e c , tais que $b < [F] < c$, existe um polígono retangular P , contido em F , e um polígono retangular P' , que contém F , de modo que $b < [P] \leq [F] \leq [P'] < c$.

3.5 RELAÇÃO ENTRE SEMELHANÇA E ÁREA

Antes de ver a relação entre semelhança e área, convém lembrar a definição de figuras semelhantes, também encontrada em Lima (1991). Diz-se que as figuras F e F' (do plano ou do espaço) são semelhantes, com razão de semelhança r (r é um número real positivo), quando existe uma correspondência biunívoca $\delta : F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F' , com a seguinte propriedade:

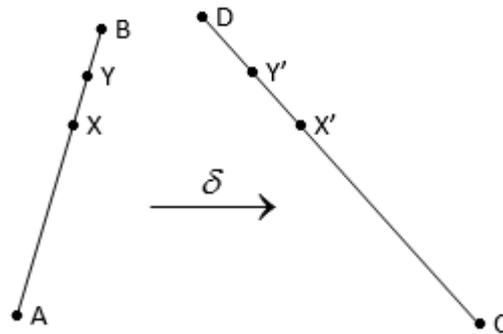
se X, Y são pontos quaisquer de F e $X' = \delta(X), Y' = \delta(Y)$ são seus correspondentes em F' então $\overline{X'Y'} = r \cdot \overline{XY}$.

A correspondência biunívoca (correspondência um a um, bijeção) $\delta : F \rightarrow F'$, com esta propriedade de multiplicar as distâncias pelo fator constante r , chama-se uma *semelhança de razão r* entre F e F' . Se $X' = \delta(X)$, diz-se que os pontos X e X' são *homólogos*.

Um exemplo simples de figuras semelhantes é dado por dois segmentos de reta arbitrários AB e CD . Se $\overline{CD} = r \cdot \overline{AB}$, podemos definir uma semelhança $\delta : AB \rightarrow CD$, de razão r , fazendo corresponder a cada ponto X do segmento AB o ponto X' de CD tal que $\overline{CX'} = r \cdot \overline{AX}$.

De fato, tomando arbitrariamente os pontos X, Y em AB e supondo a notação escolhida de modo que X esteja entre A e Y , pela definição de δ , segue-se que X' está entre C e Y' . Logo,

Figura 14 - Figuras semelhantes



Fonte: LIMA, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria

$$\overline{X'Y'} = \overline{CY'} - \overline{CX'} = r \cdot \overline{AY} - r \cdot \overline{AX} = r \cdot (\overline{AY} - \overline{AX}) = r \cdot \overline{XY}$$

Veamos, agora, a relação entre semelhança e área. Inicialmente, observe que se existe uma semelhança de razão r entre os retângulos R e R' , pelo exemplo exposto, as dimensões $\overline{AB} = b$ e $\overline{BC} = h$ do retângulo R e as dimensões homólogas $\overline{A'B'} = b'$ e $\overline{B'C'} = h'$ do retângulo semelhante R' são tais que:

$$\begin{cases} b' = r \cdot b \\ h' = r \cdot h \end{cases} \Leftrightarrow b'h' = r^2 \cdot (bh)$$

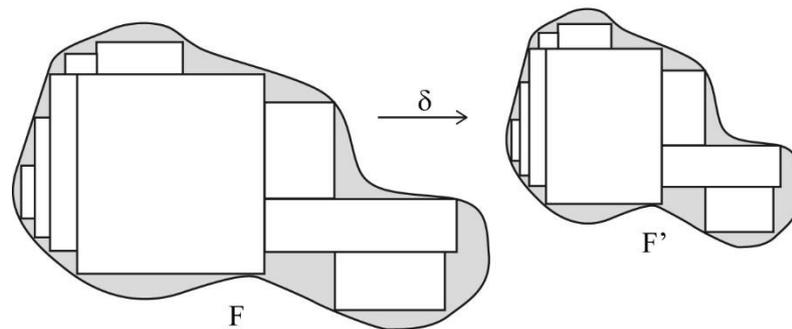
Assim, se R' e R são retângulos semelhantes de razão r , temos $[R'] = r^2 \times [R]$, ou seja,

$$\frac{[R']}{[R]} = r^2$$

Teorema 7. As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.

Demonstração: Seja $\delta: F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F' . Se F e F' são retângulos, vimos acima que área de F' é igual a r^2 vezes a área de F .

Figura 15 - Polígonos retangulares inscritos nas figuras semelhantes F e F'



Fonte: LIMA, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria

Assim, qualquer polígono P que pode ser decomposto em retângulos justapostos, contido em F, é transformado pela semelhança δ num polígono P', contido em F', tal que a área de P' é r^2 vezes a área de P. E vice-versa, todo polígono retangular Q', contido em F' é transformado por δ^{-1} num polígono retangular Q, contido em F, cuja área é $(1/r)^2$ vezes a área de Q'. Assim, a área de F' é um número real cujas aproximações por falta são r^2 vezes as aproximações por falta da área de F. Dessa maneira, temos:

$$[F'] = r^2 \times [F], \text{ ou seja, } \frac{[F]}{[F']} = r^2 \quad \blacksquare$$

Aplicação 3: Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 6 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área desmatada aparece com 9 cm². Calcular a área real desmatada.

Resolução: A superfície desmatada e a superfície correspondente na fotografia são semelhantes e sua razão de semelhança **k** é tal que:

$$k = \frac{6 \text{ km}}{5 \text{ cm}} \Rightarrow k = \frac{6000000 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} \Rightarrow k = 120000 = 1,2 \cdot 10^5$$

Assim, sendo S' a área real desmatada e S a área correspondente na fotografia, pelo teorema anterior, devemos ter:

$$\frac{S'}{S} = k^2 \Rightarrow \frac{S'}{9 \text{ cm}^2} = (1,2 \cdot 10^5)^2 \Rightarrow S' = 1,44 \cdot 10^{10} \cdot 9 \text{ cm}^2$$

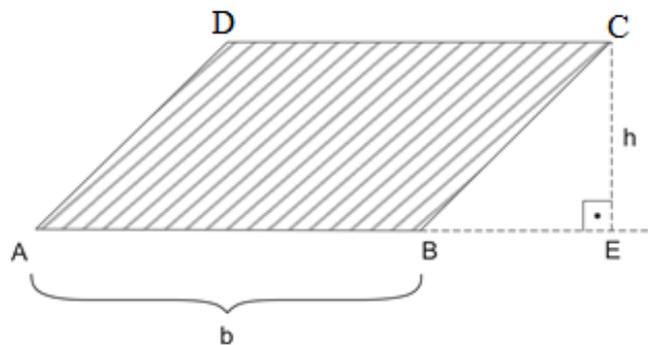
$$\text{Daí, } S' = 12,96 \cdot 10^{10} \text{ cm}^2 = 12,96 \text{ km}^2$$

3.6 ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM PARALELOGRAMO

Sejam $AB = b$ e $CE = h$ as medidas da base e da respectiva altura de um paralelogramo ABCD, numa mesma unidade de comprimento (uc). A área da região limitada pelo paralelogramo, em unidades de área (ua), pode ser dada por:

$$\boxed{\text{Área de ABCD} = [\text{ABCD}] = b \cdot h}$$

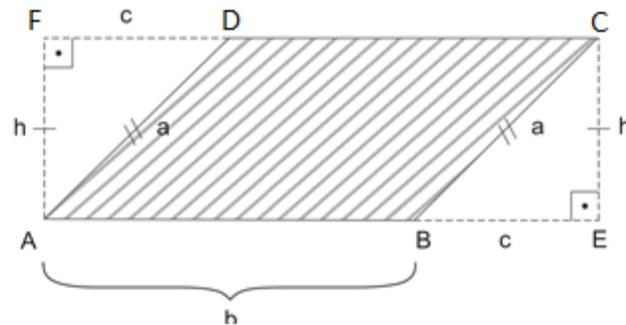
Figura 16 – Paralelogramo ABCD de base b e altura h.



Fonte: elaborada pelo autor

Prova: Considerando o retângulo seguinte AECF que contém o paralelogramo ABCD, temos:

Figura 17 – Justaposição do paralelogramo ABCD e dois triângulos retângulos congruentes, formando um retângulo

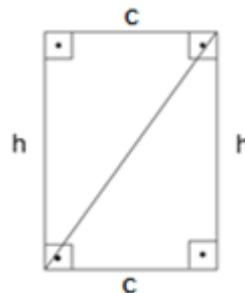


Fonte: elaborada pelo autor

i) $\triangle EBC \cong \triangle FDA$ (caso cateto-hipotenusa). Daí, $BE = DF = c$ e $[EBC] = [FDA]$.

ii) $[EBC] + [FDA] = c \cdot h$. Veja:

Figura 18 – Justaposição dos dois triângulos retângulos



Fonte: elaborada pelo autor

Daí, por um lado, $[AECF] = (b + c) \cdot h$.

Já por outro lado, $[AECF] = ([EBC] + [FDA]) + [ABCD] = c \cdot h + [ABCD]$.

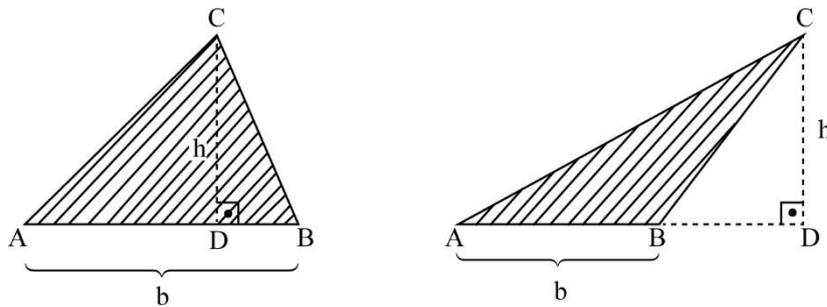
Então, $[AECF] = (b + c) \cdot h = c \cdot h + [ABCD] \Leftrightarrow b \cdot h + c \cdot h = c \cdot h + [ABCD]$.

Logo, Área de ABCD = $[ABCD] = b \cdot h$. ■

3.7 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR

Sejam $AB = b$ e $CD = h$ a base e a respectiva altura do triângulo ABC , em uma mesma unidade de comprimento (uc). A área da região limitada pelo triângulo ABC , em unidades de área (ua), pode ser dada por:

Figura 19 - Triângulos de base b e altura h

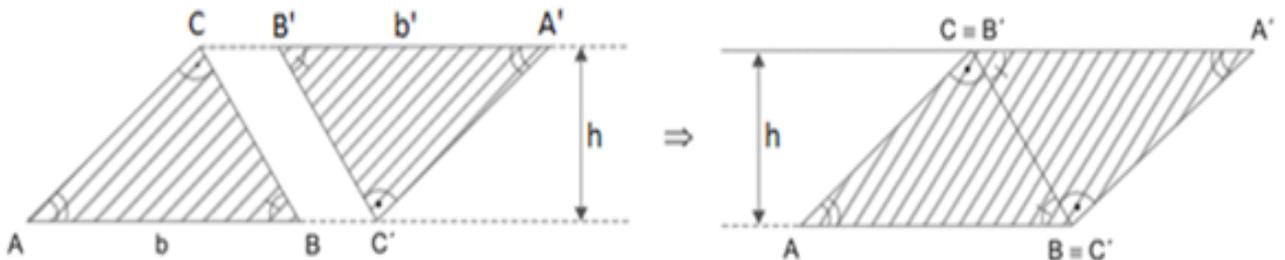


$$\text{Área de } ABC = [ABC] = \frac{b \cdot h}{2}$$

Fonte: elaborada pelo autor

Prova: Seja $A'B'C'$ um triângulo congruente ao triângulo ABC . Consideremos o paralelogramo $ABA'C'$ formado por triângulos congruentes a ABC e $A'B'C'$, invertidos e justapostos, como mostrado a seguir.

Figura 20 – Justaposição de dois triângulos congruentes, formando um paralelogramo



Fonte: elaborada pelo autor

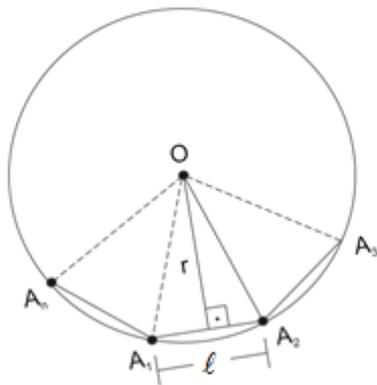
Temos que $[ABC] = [A'B'C']$ e, portanto, $[ABA'C] = 2 \cdot [ABC]$. Como $ABA'C$ é um paralelogramo, $[ABA'C] = b \cdot h$. Logo, $b \cdot h = 2 \cdot [ABC]$.

$$\text{Daí, } \boxed{\text{Área de } ABC = [ABC] = \frac{b \cdot h}{2}}. \quad \blacksquare$$

Aplicação 4: Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono regular de n lados, cujo semiperímetro é p e cuja medida do apótema é r . Calcular a área desse polígono, em função de p e r .

Resolução: Seja ℓ a medida do lado desse polígono regular.

Figura 21 – Polígono regular de n lados



(Polígono regular de n lados, inscrito num círculo, no qual destacam-se as medidas r do apótema e ℓ dos lados)

Fonte: elaborada pelo autor

$$\text{i) Perímetro } A_1A_2 \cdots A_n = 2p = \underbrace{\ell + \ell + \cdots + \ell}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow p = \frac{n \cdot \ell}{2}$$

ii) A área de $A_1A_2 \cdots A_n$ é igual à soma das áreas de n triângulos congruentes de

base ℓ e altura relativa igual a r . Daí, $[A_1A_2 \cdots A_n] = n \cdot \frac{\ell \cdot r}{2} = \left(\frac{n \cdot \ell}{2} \right) \cdot r$

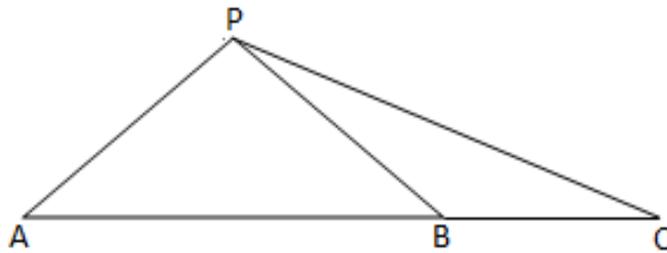
$$\text{Portanto, } [A_1A_2 \cdots A_n] = p \cdot r$$

3.8 O TEOREMA DO LADO COMUM

Sejam A, B e C três pontos distintos colineares, e P um ponto não pertencente à reta AB. Então temos que $\frac{[PAB]}{[PBC]} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$. Equivalentemente, podemos dizer que os pares de triângulos PAB e PBC, que apresentam o lado PB em comum, são tais que:

$$\overline{AB} = k \times \overline{BC} \Rightarrow [PAB] = k \times [PBC]$$

Figura 22 - Dois triângulos de mesma altura, cujas bases AB e BC são alinhadas.



Fonte: elaborada pelo autor

Isso significa que dois triângulos de mesma altura (ou de mesma base) têm suas áreas proporcionais às respectivas bases (ou alturas).

Demonstração: De fato, sendo h a distância do ponto P à reta AB, temos que

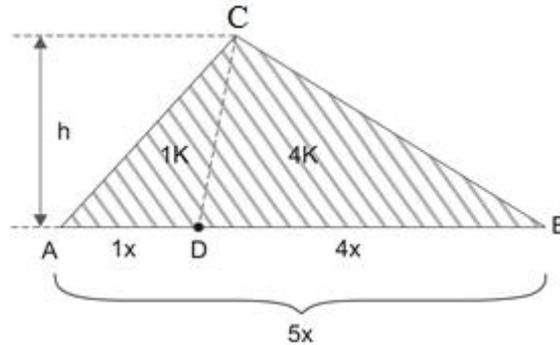
$$[PAB] = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} \text{ e } [PBC] = \frac{\overline{BC} \cdot h}{2}. \text{ Daí, obtemos } \frac{[PAB]}{[PBC]} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = k \quad \blacksquare$$

Aplicação 5: Sabe-se que o ponto D divide o lado AB do triângulo ABC de modo que \overline{AD} e \overline{DB} estão na razão 1 : 4. Se a área do triângulo ABC é igual a 240 cm^2 , qual é a área do triângulo DBC?

Resolução: Considere a figura seguinte relativa ao enunciado. Os triângulos CAD, CDB e CAB têm a mesma altura h , relativa às bases AD, DB e AB, respectivamente.

Como $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{1}{4}$, podemos considerar $\overline{AD} = 1x$ e $\overline{DB} = 4x$, onde x é a constante de proporcionalidade.

Figura 23 - Triângulos ADC e BDC de mesma altura



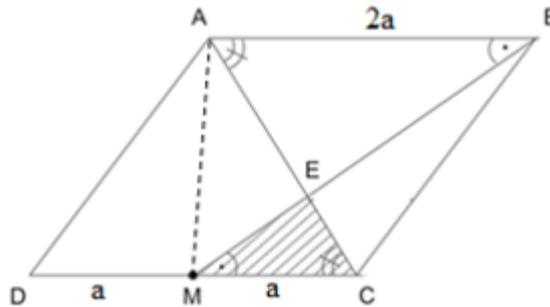
Fonte: elaborada pelo autor

Então, pelo teorema do lado comum, $[ADC]$, $[DBC]$ e $[ABC]$ são, respectivamente, proporcionais a $1x$, $4x$ e $5x$ (equivalentemente proporcionais a 1, 4 e 5), ou seja, $[CAD] = 1k$, $[CDB] = 4k$ e $[CAB] = 5k$, em que k é a constante de proporcionalidade. Daí, $[ABC] = 5k = 240 \text{ cm}^2$ e, portanto, $k = 48 \text{ cm}^2$, o que nos dá $[CDB] = 4k = 192 \text{ cm}^2$.

Aplicação 6: Sejam ABCD um paralelogramo de área S e M o ponto médio de CD . Determinar a área do triângulo MEC, em que E é a interseção da diagonal AC com o segmento BM .

Resolução: Considere a figura 24 seguinte relativa ao problema, em que $\overline{AB} = \overline{CD} = 2a$.

Figura 24 – Paralelogramo ABCD, em que M é ponto médio de DC



Fonte: elaborada pelo autor

Como ABCD é um paralelogramo, temos que $AB \parallel CD$ e $AD \parallel CB$. Isso mostra que $\widehat{BAC} = \widehat{DCA}$ e $\widehat{BCA} = \widehat{DAC}$. Daí, os triângulos ABC e CDA são congruentes (caso ângulo, lado, ângulo), ou seja, $[ABC] = [CDA] = \frac{S}{2}$. Observando que os triângulos EBA e EMC são semelhantes de razão

$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{2a}{a} = 2$, pelo teorema do lado comum, obtemos:

$$\text{i) } \frac{[AME]}{[CME]} = \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = 2 \Rightarrow [AME] = 2 \cdot [CME]$$

$$\text{ii) } \frac{[DAM]}{[CAM]} = \frac{\overline{DM}}{\overline{CM}} = 1 \Rightarrow [DAM] = [CAM]$$

$$\text{iii) } [DAM] + [CAM] = [CDA] \Rightarrow 2 \cdot [CAM] = \frac{S}{2} \Rightarrow [CAM] = \frac{S}{4}$$

$$\text{iv) } [AME] + [CME] = [CAM] \Rightarrow 2 \cdot [CME] + [CME] = \frac{S}{4} \Rightarrow [CME] = \frac{S}{12}$$

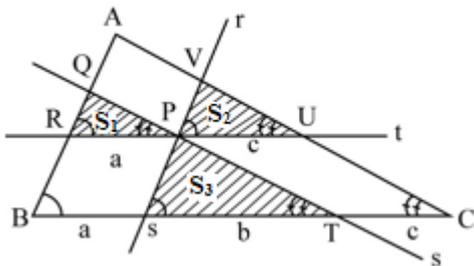
Portanto, a área do triângulo MEC é igual a $\frac{S}{12}$.

Aplicação 7: Seja P um ponto interno do triângulo ABC de área S. Por P, traçam-se as retas r, s e t, respectivamente paralelas aos lados AB, AC e BC, dividindo o triângulo ABC em três

triângulos menores de áreas iguais a S_1 , S_2 e S_3 , e em três paralelogramos. Mostre que $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$.

Prova: Consideremos a seguinte figura 25 relativa ao problema.

Figura 25 – Triângulo ABC e retas r, s, t paralelas aos seus respectivos lados.



Fonte: elaborada pelo autor

Os triângulos QRP, VPU e PST são semelhantes ao triângulo ABC e as razões de semelhança são, respectivamente, iguais a $\frac{a}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+b+c}$ e $\frac{b}{a+b+c}$. Então, pelo teorema

7, temos:

$$\bullet \frac{S_1}{S} = \left(\frac{a}{a+b+c} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{a}{a+b+c}$$

$$\bullet \frac{S_2}{S} = \left(\frac{c}{a+b+c} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{c}{a+b+c}$$

$$\bullet \frac{S_3}{S} = \left(\frac{b}{a+b+c} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_3}{S}} = \frac{b}{a+b+c}$$

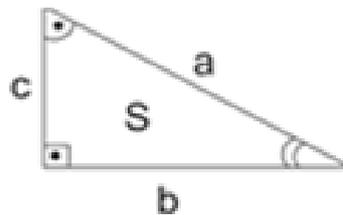
Daí, somando membro a membro as três igualdades anteriores, obtemos:

$$\frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}} = \frac{a+c+b}{a+b+c} \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \quad \blacksquare$$

Teorema 8 (Teorema de Pitágoras). Em um triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Demonstração: Consideremos quatro triângulos congruentes ao triângulo retângulo de hipotenusa **a**, catetos **b** e **c**, e de área **S**. Mostraremos que $a^2 = b^2 + c^2$.

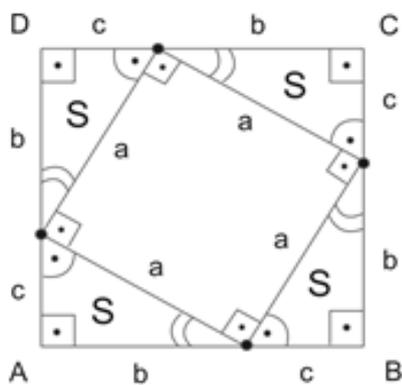
Figura 26 – Triângulo retângulo



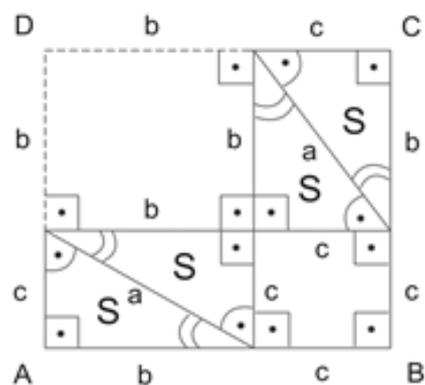
Fonte: elaborada pelo autor

Com esses 4 triângulos congruentes, podemos formar um quadrado ABCD, cujo lado mede $(b + c)$, com as seguintes disposições diferentes:

Figura 27/28 – Quadrado ABCD, particionado de modos diferentes



(Justaposição de 4 triângulos congruentes e 1 quadrado)



(Justaposição de 4 triângulos congruentes e 2 quadrados)

Fonte: elaborada pelo autor

Por um lado, na figura 27, temos:

$$[ABCD] = a^2 + 4S$$

Por outro lado, a figura 28 nos fornece:

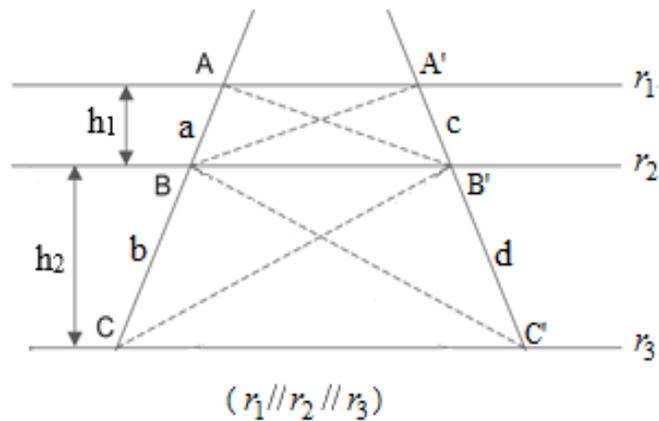
$$[ABCD] = b^2 + c^2 + 4S.$$

$$\text{Então, } a^2 + 4S = b^2 + c^2 + 4S, \text{ ou seja, } a^2 = b^2 + c^2 \quad \blacksquare$$

Teorema 9 (Teorema de Tales). Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes da outra.

Prova: Consideremos a seguinte figura relativa ao problema.

Figura 29 - Feixe de retas paralelas



Fonte: elaborada pelo autor

Temos que:

i) $[ABB'] = [A'BB'] = S_1$, pois os triângulos ABB' e $A'BB'$ têm a mesma base BB' e a mesma altura relativa h_1 .

ii) Analogamente, $[BB'C] = [BB'C'] = S_2$ (mesma base BB' e mesma altura h_2).

iii) Os triângulos $AB'B$ e $BB'C$ têm a mesma altura, relativa às bases de medidas $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$, ou seja,

$$\frac{[AB'B]}{[BB'C]} = \frac{a}{b} = \frac{S_1}{S_2} \quad (\text{Teorema do lado comum})$$

iv) Os triângulos $A'BB'$ e $B'BC'$ têm a mesma altura, relativa às bases de medidas $\overline{A'B'} = c$ e $\overline{B'C'} = d$, ou seja,

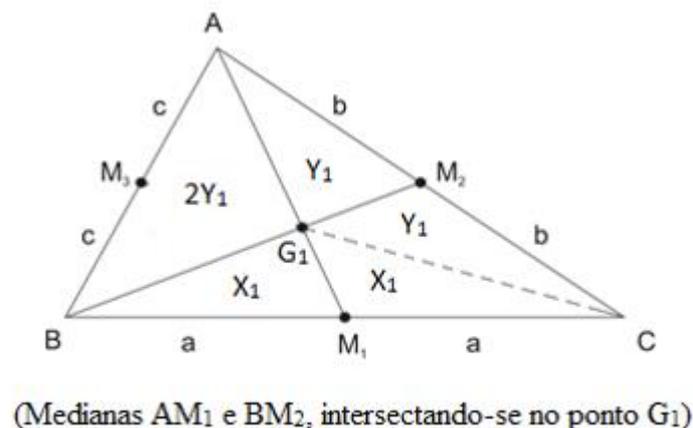
$$\frac{[A'BB']}{[B'BC']} = \frac{c}{d} = \frac{S_1}{S_2} \quad (\text{Teorema do lado comum})$$

Assim, de (iii) e (iv), obtemos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ■

Teorema 10 (propriedade do baricentro): As três medianas de um triângulo intersectam-se em um único ponto, chamado de baricentro, que divide cada mediana em duas partes, tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Prova: Considere M_1 , M_2 e M_3 os pontos médios dos lados BC , AC e AB , respectivamente, de um triângulo arbitrário ABC . Por um lado, considerando G_1 o ponto de encontro das medianas AM_1 e BM_2 , pelo teorema do lado comum, temos:

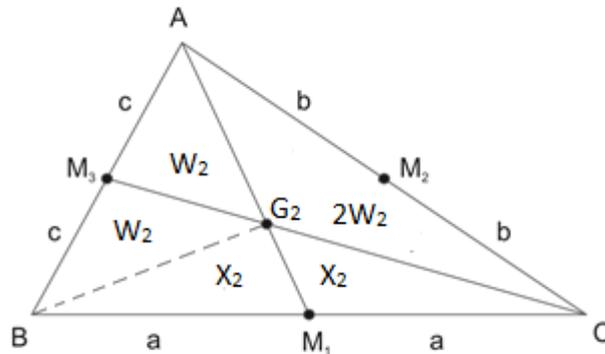
Figura 30 – Medianas AM_1 e AM_2 do triângulo ABC



- i) $\frac{[BG_1M_1]}{[CG_1M_1]} = \frac{a}{a} \Rightarrow [BG_1M_1] = [CG_1M_1] = X_1$
- ii) $\frac{[CG_1M_2]}{[AG_1M_2]} = \frac{b}{b} \Rightarrow [CG_1M_2] = [AG_1M_2] = Y_1$
- iii) $\frac{[ABM_1]}{[ACM_1]} = \frac{a}{a} \Rightarrow \frac{[AG_1B] + [BG_1M_1]}{2Y_1 + X_1} = 1 \Rightarrow \frac{[AG_1B] + X_1}{2Y_1 + X_1} = 1 \Rightarrow [AG_1B] = 2Y_1$
- iv) $\frac{[AG_1B]}{[AG_1M_2]} = \frac{\overline{BG_1}}{\overline{G_1M_2}} = \frac{[BG_1C]}{[CG_1M_2]} \Rightarrow \frac{2Y_1}{Y_1} = \frac{\overline{BG_1}}{\overline{G_1M_2}} = \frac{2X_1}{Y_1}$
- $\therefore \frac{\overline{BG_1}}{\overline{G_1M_2}} = \frac{2}{1}$ e $X_1 = Y_1$
- v) $\frac{2Y_1}{X_1} = \frac{[AG_1C]}{[CG_1M_1]} = \frac{\overline{AG_1}}{\overline{G_1M_1}} = \frac{2}{1}$, pois $Y_1 = X_1$.

Por outro lado, considerando G_2 o ponto de encontro das medianas AM_1 e CM_3 , de modo inteiramente análogo aos itens (i) a (v) anteriores, temos:

Figura 31 – Medianas AM_1 e CM_3 do triângulo ABC



(Medianas AM_1 e CM_3 , intersectando-se no ponto G_2)

Fonte: elaborada pelo autor

vi) $\frac{[AG_2C]}{[AG_2M_3]} = \frac{\overline{CG_2}}{\overline{G_2M_3}} = \frac{[CG_2B]}{[BG_2M_3]} \Rightarrow \frac{2W_2}{W_2} = \frac{\overline{CG_2}}{\overline{G_2M_3}} = \frac{2X_2}{W_2}$

$$\therefore \frac{\overline{CG_2}}{G_2M_3} = \frac{2}{1} \text{ e } X_2 = W_2$$

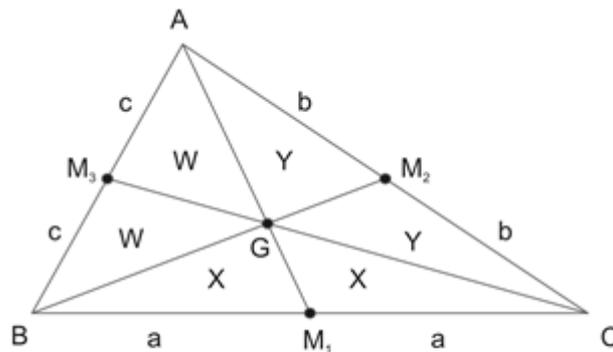
$$\text{vii) } \frac{[AG_2B]}{[BG_2M_1]} = \frac{\overline{AG_2}}{G_2M_1} \Rightarrow \frac{2W_2}{X_2} = \frac{\overline{AG_2}}{G_2M_1} \Rightarrow \frac{\overline{AG_2}}{G_2M_1} = \frac{2}{1}, \text{ pois } W_2 = X_2$$

Como G_1 e G_2 pertencem a AM_1 e o dividem na mesma razão,
 $\frac{\overline{AG_1}}{G_1M_1} = \frac{\overline{AG_2}}{G_2M_1} = \frac{2}{1}$, obrigatoriamente temos $G_1 \equiv G_2$.

Assim, fica provado que as medianas de um triângulo intersectam-se em um único ponto $G_1 \equiv G_2 \equiv G$ (baricentro do triângulo ABC); e G divide qualquer das medianas em dois segmentos cuja razão é $2 : 1$, ou seja, o maior dos segmentos (aquele que contém o vértice) é o dobro do menor. ■

Observação: Como $G_1 \equiv G_2 \equiv G$ (baricentro), temos que $X_1 = X_2$ e $Y_1 = W_2$, ou seja, as medianas de um triângulo o dividem em seis triângulos equivalentes (de mesma área). Veja:

Figura 32 – Baricentro G do triângulo ABC



(As medianas AM_1 , BM_2 e CM_3 intersectando-se no baricentro G do triângulo ABC)

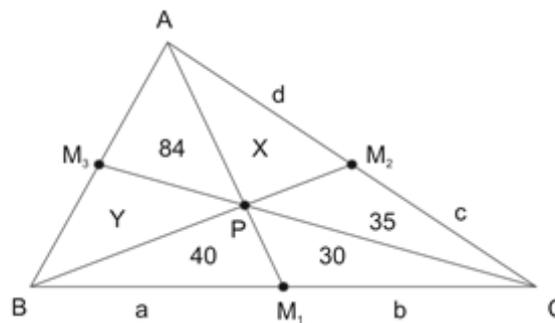
Fonte: elaborada pelo autor

$$\text{Nessa figura, temos que } X = Y = W = \frac{[ABC]}{6}$$

Aplicação 8: Sejam M_1 , M_2 e M_3 pontos dos lados BC , AC e AB do triângulo ABC , respectivamente, tais que as cevianas AM_1 , BM_2 e CM_3 encontram-se em um mesmo ponto P . Sabendo que os triângulos BPM_1 , CPM_1 , CPM_2 e APM_3 têm áreas iguais a 40 cm^2 , 30 cm^2 , 35 cm^2 e 84 cm^2 , respectivamente, qual é a área do triângulo ABC ?

Resolução: Considerando $AM_1 = a$, $CM_1 = b$, $CM_2 = c$, $AM_2 = d$, $[APM_2] = X \text{ cm}^2$ e $[BPM_3] = Y \text{ cm}^2$, conforme mostra figura, temos:

Figura 33 – Triângulo ABC



(Triângulo ABC particionado em 6 triângulos menores por três cevianas que intersectam-se em P)

Fonte: elaborada pelo autor

Pelo teorema do lado comum, temos:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & \frac{[BPM_1]}{[CPM_1]} = \frac{a}{b} = \frac{40}{30} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{3} \\ \text{ii)} \quad & \frac{[ABM_1]}{[ACM_1]} = \frac{a}{b} = \frac{84 + Y + 40}{X + 35 + 30} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{Y + 124}{X + 65} \\ \text{iii)} \quad & \frac{[CPM_2]}{[APM_2]} = \frac{c}{d} = \frac{35}{X} \\ \text{iv)} \quad & \frac{[CBM_2]}{[ABM_2]} = \frac{c}{d} = \frac{40 + 30 + 35}{Y + 84 + X} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{105}{Y + X + 84} \end{aligned}$$

Assim, de (i) e (ii), obtemos $\frac{Y + 124}{X + 65} = \frac{4}{3}$, isto é, $4X - 3Y = 112$.

E de (iii) e (iv), deduzimos que $\frac{1}{X} = \frac{3}{Y+X+84}$, isto é, $2X - Y = 84$.

Daí, resolvendo o sistema $\begin{cases} 4X - 3Y = 112 \\ 2X - Y = 84 \end{cases}$, encontramos $X = 70$ e $Y = 56$. Portanto,

$$[ABC] = (84 + 40 + 30 + 35) \text{ cm}^2 + (X + Y) \text{ cm}^2 = 315 \text{ cm}^2.$$

Teorema 11 (Teorema de Ceva): Consideremos em um triângulo ABC três cevianas, AA', BB' e CC'. Estas três cevianas serão concorrentes em um mesmo ponto se, e somente se, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$. O termo ceviana é uma homenagem ao matemático italiano Giovanni Ceva (1648-1734).

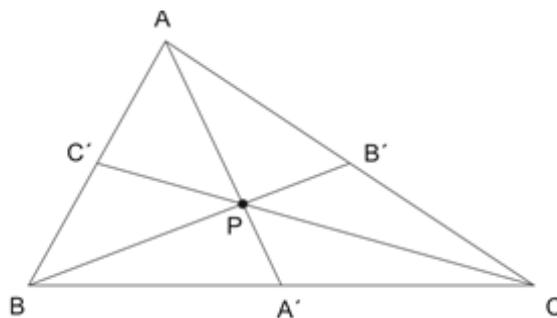
Prova:

(\Rightarrow) **Hipótese:** AA', BB' e CC' concorrem em P.

Tese: $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$

Demonstração: Consideremos a figura 34 seguinte relativa ao problema.

Figura 34 – Cevianas AA', BB' e CC'



(Cevianas AA', BB' e CC' intersectando-se no ponto P)

Temos:

$$i) \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{[BAA']}{[CAA']} = \frac{[BPA']}{[CPA']} = k \quad (\text{Teorema do lado comum}). \text{ Daí, obtemos:}$$

$$[BAA'] = k \cdot [CAA'] \text{ e } [BPA'] = k \cdot [CPA'].$$

$$ii) \frac{[BAA'] - [BPA']}{[CAA'] - [CPA']} = \frac{k \cdot [CAA'] - k \cdot [CPA']}{[CAA'] - [CPA']} \Rightarrow \frac{[ABP]}{[ACP]} = k = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$$

$$iii) \text{ Analogamente, } \frac{[BCP]}{[ABP]} = \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \text{ e } \frac{[ACP]}{[BCP]} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

$$\text{Então, } \frac{[ABP]}{[ACP]} \cdot \frac{[BCP]}{[ABP]} \cdot \frac{[ACP]}{[BCP]} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$$

$$\text{Portanto, } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

$$(\Leftrightarrow) \text{ Hipótese: } \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1.$$

Tese: As cevianas AA' , BB' e CC' concorrem em um mesmo ponto.

Demonstração: Seja P o ponto de interseção de $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$; e seja C_1 o ponto de interseção da reta CP com AB . Pela demonstração anterior, $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = 1$.

Como a hipótese é $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$, resulta $\frac{C_1A}{C_1B} = \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ e, portanto, $C_1 = C'$ ■

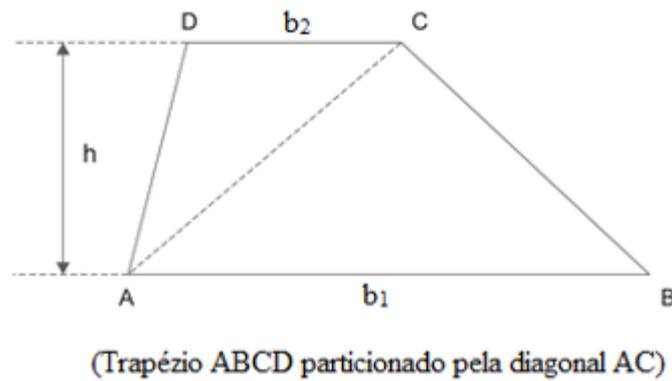
3.9 ÁREA DA REGIÃO LIMITADA POR UM TRAPÉZIO

Seja $ABCD$ um trapézio cujas bases medem $\overline{AB} = b_1$ e $\overline{CD} = b_2$, e cuja altura é

h. A área da superfície limitada por esse trapézio pode ser dada por:

$$A_{TZ} = [ABCD] = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$$

Figura 35 – Trapezio ABCD e sua diagonal AC



Fonte: elaborada pelo autor

Prova: Os triângulos ABC e CDA de bases b_1 e b_2 , respectivamente, têm a mesma altura h . Daí, obtemos:

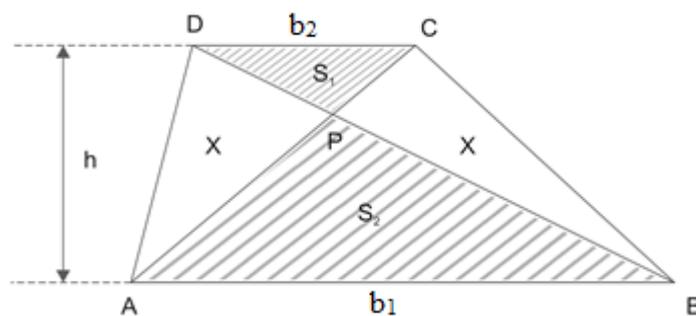
$$[ABCD] = [ABC] + [CDA] \Rightarrow [ABCD] = \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2}.$$

$$\text{Portanto, } A_{TZ} = [ABCD] = \frac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}. \quad \blacksquare$$

Aplicação 9: As diagonais AC e BD de um trapézio ABCD, de bases AB e CD intersectam-se no ponto P. Se $[CDP] = S_1$ e $[ABP] = S_2$, calcule $[ABCD]$ em função de S_1 e S_2 .

Resolução: Consideremos a figura seguinte relativa ao problema.

Figura 36 – Partição do trapézio ABCD por suas diagonais AC e BD



Fonte: elaborada pelo autor

Temos:

$$\text{i) } [ADB] = [ACB] = \frac{b_1 \cdot h}{2}.$$

$$\text{Daí, } [ADP] + [APB] = [APB] + [BCP] \Rightarrow [ADP] = [BCP] = X$$

$$\text{ii) } \frac{[CDP]}{[BCP]} = \frac{S_1}{X} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} \text{ (Teorema do lado comum).}$$

$$\text{iii) } \frac{[ADP]}{[ABP]} = \frac{X}{S_2} = \frac{\overline{DP}}{\overline{BP}} \text{ (Teorema do lado comum).}$$

$$\text{De (ii) e (iii), obtemos } \frac{S_1}{X} = \frac{X}{S_2}, \text{ ou seja, } X = \sqrt{S_1 S_2}$$

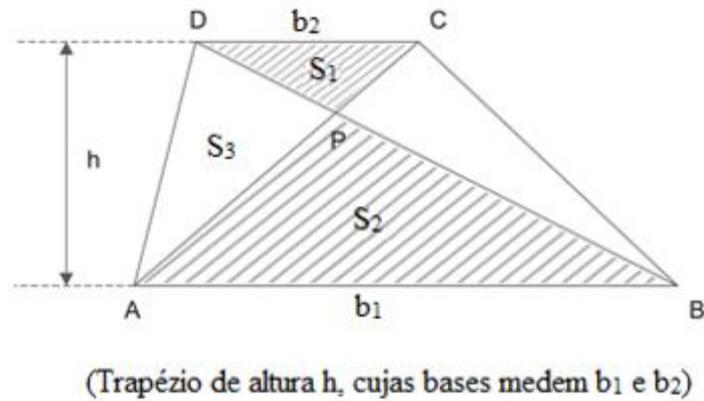
$$\text{Daí, } A_{TZ} = [ABCD] = S_1 + 2X + S_2 \Rightarrow A_{TZ} = (\sqrt{S_1})^2 + 2\sqrt{S_1 S_2} + (\sqrt{S_2})^2$$

$$\text{Logo, } A_{TZ} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

Aplicação 10: Dá-se um trapézio ABCD cujas bases medem $\overline{AB} = b_1$, $\overline{CD} = b_2$, com $b_1 > b_2$, e cuja altura mede h. Calcule a diferença entre as áreas dos triângulos que têm por bases AB e CD, respectivamente, e por vértice oposto a intersecção das diagonais, em função de b_1 , b_2 e h.

Resolução: Sendo P o ponto de intersecção das diagonais, $[CDP] = S_1$, $[ABP] = S_2$ e $[ADP] = S_3$, temos:

Figura 37 – Trapézio ABCD particionado pelas diagonais



Fonte: elaborada pelo autor

$$\text{i) } [ABD] = S_2 + S_3 = \frac{b_1 \cdot h}{2}$$

$$\text{ii) } [ACD] = S_1 + S_3 = \frac{b_2 \cdot h}{2}$$

Subtraindo (ii) de (i), obtemos $S_2 - S_1 = \frac{h}{2}(b_1 - b_2)$.

Portanto, a diferença procurada das áreas é $\frac{(b_1 - b_2)h}{2}$.

4 OUTRAS FÓRMULAS MATEMÁTICAS PARA O CÁLCULO DA ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR

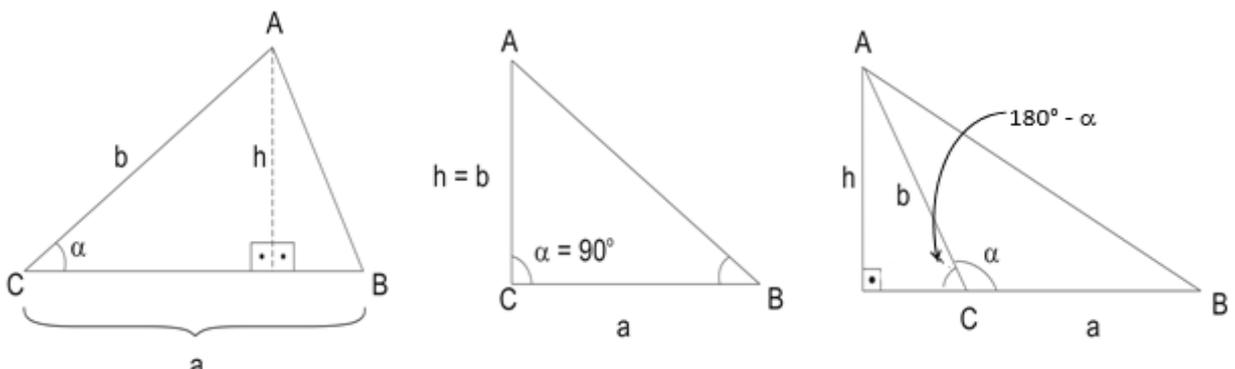
Já apresentamos e demonstramos a fórmula para o cálculo da área de uma região triangular em função da base e da sua altura relativa $\left(\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}\right)$. Neste capítulo, serão apresentadas e demonstradas oito outras fórmulas matemáticas diferentes para o cálculo da área da região triangular. São elas: em função de dois lados e do ângulo compreendido; em função dos lados (fórmula de Herão); em função dos lados e do raio do círculo circunscrito (ou inscrito ou ex-inscrito); em função das coordenadas dos vértices e a fórmula de Pick, na qual se calcula a área de um polígono simples de uma rede apenas contando pontos. Nas aplicações, são usadas combinações dessas fórmulas para resolver, de maneira simples, situações-problema aparentemente complexas.

4.1 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DE DOIS LADOS E DO ÂNGULO COMPREENDIDO

Se ABC é um triângulo, tal que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\widehat{ACB} = \alpha$, então a área desse triângulo pode ser dada por $A_T = [ABC] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen } \alpha$.

Prova: Considere as figuras seguintes relativas ao problema e, na figura 40, observe que $\text{sen}(180^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha$.

Figura 38 / 39 / 40 – Triângulo ABC acutângulo/retângulo/obtusângulo



Fonte: elaborada pelo autor

Em qualquer dos três casos, temos:

$$\text{i) } \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

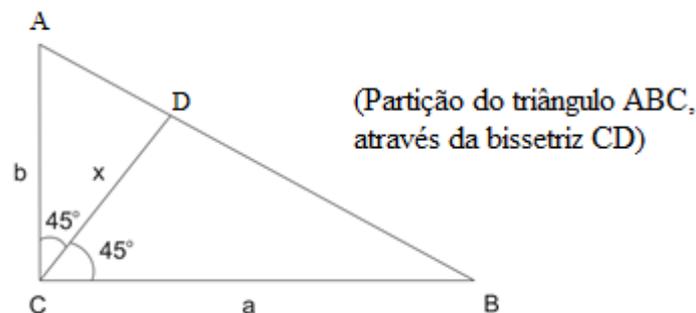
$$\text{ii) } A_T = [ABC] = \frac{a \cdot h}{2} \quad (\text{ver 3.7})$$

Substituindo (i) em (ii), obtemos $A_T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \operatorname{sen} \alpha$. ■

Aplicação 11: Os catetos de um triângulo retângulo medem **a** e **b** unidades de comprimento, respectivamente. Calcular, em função de **a** e **b**, o comprimento da bissetriz relativa à hipotenusa.

Resolução: Consideremos a figura seguinte relativa ao problema.

Figura 41- Participação do triângulo ABC



Fonte: elaborada pelo autor

Como CD é bissetriz de $\hat{A}CB = 90^\circ$, temos que $\hat{A}CD = \hat{BCD} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$; e a partição do triângulo ABC pela bissetriz CD nos dá: $[ACD] + [DCB] = [ACB]$.

Daí, substituindo as fórmulas 4.1 e 3.7 na igualdade de áreas acima, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \operatorname{sen} 45^\circ + \frac{1}{2} \cdot a \cdot x \cdot \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{a \cdot b}{2}.$$

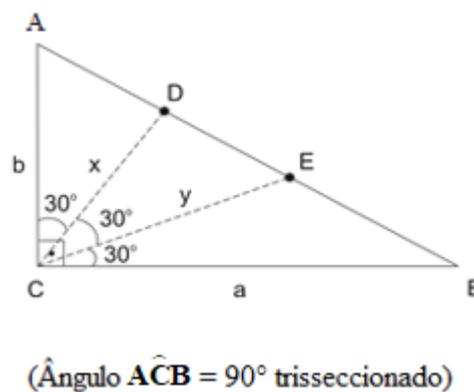
$$\text{Assim, } bx\sqrt{2} + ax\sqrt{2} = 2ab, \text{ ou seja, } x = \frac{2ab}{\sqrt{2}(a+b)} = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}.$$

Portanto, o comprimento da bissetriz relativa à hipotenusa é $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Aplicação 12: Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos medem $\overline{BC} = a$ e $\overline{AC} = b$. Se D e E são pontos da hipotenusa AB , tais que CD e CE trissectam o ângulo \widehat{ACB} , determinar, em função de a e b , as medidas $x = \overline{CD}$ e $y = \overline{CE}$, sabendo que $\overline{AD} < \overline{AE}$.

Resolução: Com base na figura 42, ilustrativa do problema, temos:

Figura 42 – Trisseção do Ângulo ACB



Fonte: elaborada pelo autor

$$\text{i) } [ACD] + [CDB] = [ACB]$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot x \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot x \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a \cdot b}{2} \quad (\text{ver 4.1 e 3.7})$$

$$bx + a \sqrt{3} x = 2ab \Rightarrow x = \frac{2ab}{a\sqrt{3} + b}$$

$$\text{ii) } [ACE] + [ECB] = [ACB]$$

$$\frac{1}{2} \cdot b \cdot y \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot a \cdot y \cdot \sin 30^\circ = \frac{ab}{2}$$

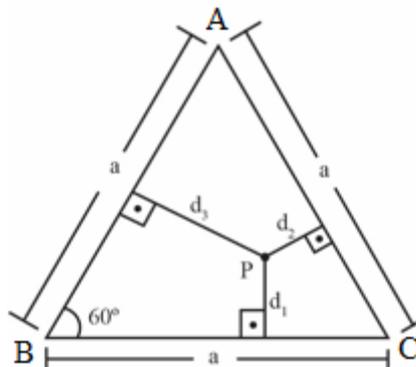
$$b\sqrt{3}y + ay = 2ab \Rightarrow y = \frac{2ab}{a + b\sqrt{3}}$$

$$\text{Portanto, } CD = \frac{2ab}{a\sqrt{3} + b} \text{ e } CE = \frac{2ab}{a + b\sqrt{3}}.$$

Aplicação 13: Um ponto P é escolhido, ao acaso, no interior de um triângulo equilátero ABC. Sejam d_1 , d_2 , d_3 as distâncias de P aos lados BC, AC e AB, respectivamente. Mostre que a soma $d_1 + d_2 + d_3$ é igual à altura desse triângulo.

Demonstração: Consideremos a figura 43 seguinte, em que o triângulo ABC é equilátero, cujos lados medem a, relativa ao problema.

Figura 43 - Ponto P no interior do triângulo equilátero ABC



Fonte: elaborada pelo autor

Nessa situação, por um lado, temos:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (ver 4.1)}$$

Por outro lado, ligando os vértices A, B e C ao ponto interior P, com segmentos de reta, obtém-se uma partição do triângulo equilátero ABC que nos dá:

$$[ABC] = [APB] + [BPC] + [CPA], \text{ ou seja:}$$

$$[ABC] = \frac{a \cdot d_1}{2} + \frac{a \cdot d_2}{2} + \frac{a \cdot d_3}{2} \quad (\text{ver 3.7})$$

$$\text{Daí, } [ABC] = \frac{a}{2} (d_1 + d_2 + d_3) = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow d_1 + d_2 + d_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

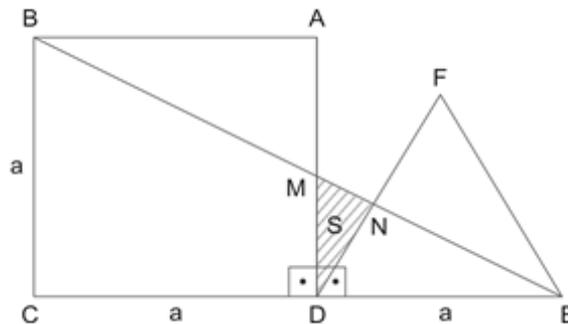
Agora, note que sendo h a altura do triângulo equilátero de lado a , temos que:

$$[ABC] = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = d_1 + d_2 + d_3$$

$$\text{Assim, } d_1 + d_2 + d_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = h \quad \blacksquare$$

Aplicação 14: Na figura seguinte, ABCD é um quadrado e DEF é um triângulo equilátero, ambos de lados de medida a . Calcule a área S da região sombreada, em função de a .

Figura 44 – Aplicação 14



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução:

Nessa figura, temos que:

- i) $\overline{MD} = \frac{a}{2}$ (base média do $\triangle BEC$)
- ii) $\hat{NDE} = 60^\circ$ ($\triangle DEF$ é equilátero)
- iii) $\alpha = \hat{MDN} = 90^\circ - \hat{NDE} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$$\text{iv) } \overline{ND} = \frac{2a \cdot \overline{DM}}{a\sqrt{3} + \overline{DM}} \quad (\text{Veja aplicação 12. Lá, } \overline{ND} \text{ equivale a } \overline{CD}). \text{ Daí,}$$

obtemos:

$$\overline{ND} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{a\sqrt{3} + \frac{a}{2}} \Leftrightarrow \overline{ND} = \frac{a^2}{\frac{2a\sqrt{3} + a}{2}} \Leftrightarrow \overline{ND} = \frac{2a}{2\sqrt{3} + 1} = \frac{4(\sqrt{3} - 2)a}{11}$$

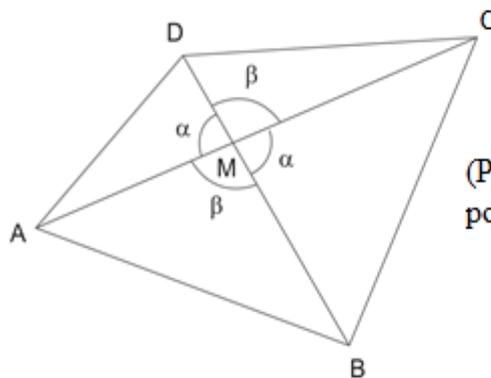
$$\text{v) } S = [\text{MND}] = \frac{1}{2} \cdot \text{MD} \cdot \text{ND} \cdot \text{sen } 30^\circ \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{(4\sqrt{3} - 2)a}{11} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Logo, } S = \frac{(2\sqrt{3} - 1)a^2}{44}.$$

Aplicação 15: As diagonais AC e BD de um quadrilátero convexo ABCD formam um ângulo α entre si. Mostre que $[\text{ABCD}] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \text{sen } \alpha$.

Demonstração: Consideremos a figura seguinte, ilustrativa do problema, em que M é o ponto de encontro das diagonais \overline{AC} e \overline{BD} .

Figura 45 – Participação do quadrilátero ABCD



(Partição do quadrilátero ABCD por suas diagonais AC e BD)

Fonte: elaborada pelo autor

Observando que $\text{sen } \alpha = \text{sen } \beta$, pois $\alpha + \beta = 180^\circ$, temos (ver 4.1):

$$[AMB] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AM} \cdot \overline{BM} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$[BMC] = \frac{1}{2} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CM} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$[CMD] = \frac{1}{2} \cdot \overline{CM} \cdot \overline{DM} \cdot \text{sen } \alpha$$

$$[DMA] = \frac{1}{2} \cdot \overline{DM} \cdot \overline{AM} \cdot \text{sen } \alpha$$

Somando membro a membro essas igualdades, obtemos:

$$[AMB] + [BMC] + [CMD] + [DMA] = [ABCD]$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \left[(\overline{AM} \cdot \overline{BM} + \overline{BM} \cdot \overline{CM}) + (\overline{CM} \cdot \overline{DM} + \overline{DM} \cdot \overline{AM}) \right].$$

$$\text{Daí, } [ABCD] = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \left[\overline{BM} (\overline{AM} + \overline{CM}) + \overline{DM} (\overline{CM} + \overline{AM}) \right]$$

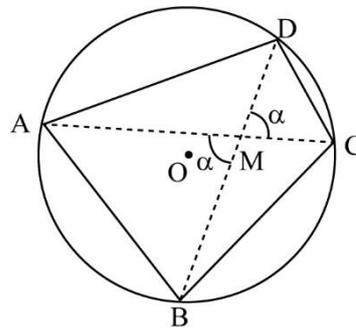
$$[ABCD] = \frac{1}{2} \text{sen } \alpha \left[(\overline{AM} + \overline{CM}) \cdot (\overline{BM} + \overline{DM}) \right]$$

$$[ABCD] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \text{sen } \alpha \quad \blacksquare$$

Aplicação 16: Dentre todos os quadriláteros convexos inscritos em uma circunferência, qual é o de maior área?

Resolução: Seja ABCD um quadrilátero convexo inscrito numa circunferência de centro O e raio R, representado na figura seguinte relativa ao problema.

Figura 46 - Participação do quadrilátero convexo inscrito ABCD por suas diagonais



Fonte: elaborada pelo autor

Usando o resultado da aplicação 15, temos que $[ABCD] = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BD} \cdot \sin \alpha$.

Sendo AC e BD cordas da circunferência de diâmetro $2R$, o produto $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ é, no máximo, igual a $(2R) \cdot (2R) = 4R^2$; e sendo $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\sin \alpha$ é, no máximo, igual a $\sin 90^\circ = 1$.

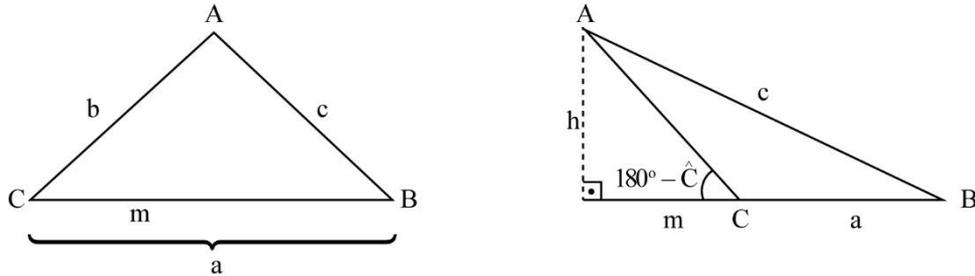
Portanto, $[ABCD]$ será máxima quando as diagonais AC e BD forem diâmetros e $\alpha = 90^\circ$ for ângulo central, ou seja, o quadrilátero ABCD de área máxima é aquele que apresenta as diagonais congruentes, perpendiculares, intersectando-se mutuamente ao meio. Sendo assim, o quadrilátero ABCD de área máxima é o quadrado inscrito.

4.2 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS (FÓRMULA DE HERÃO)

A área da região limitada pelo triângulo ABC, cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, pode ser dada por $A_T = [ABC] = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, onde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Prova: Consideremos as figuras 47 e 48 seguintes, ilustrativas.

Figura 47/48 - Triângulo ABC acutângulo / obtusângulo



Fonte: elaborada pelo autor

Na figura 47, note que $\cos \hat{C} = \frac{m}{b}$ e, na figura 48, $\cos(180^\circ - \hat{C}) = \frac{m}{b}$, ou seja,
 $\cos \hat{C} = -\frac{m}{b}$.

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \pm 2am. \text{ Daí, } m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\pm 2a}.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, encontramos:

$$b^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - m^2$$

Substituindo m por $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{\pm 2a}$, ficamos com:

$$h^2 = b^2 - \frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4a^2} \Rightarrow 4a^2h^2 = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2, \text{ ou seja:}$$

$$4a^2h^2 = [2ab + a^2 + b^2 - c^2] \cdot [2ab - a^2 - b^2 + c^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2h^2 = [(a + b)^2 - c^2] \cdot [c^2 - (a - b)^2] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4a^2h^2 = (a + b + c)(a + b - c) \cdot (c + a - b) \cdot (c - a + b)$$

Fazendo $a + b + c = 2p$, obtemos:

$$4a^2h^2 = (2p) \cdot (2p - 2c) \cdot (2p - 2b) \cdot (2p - 2a). \text{ Então,}$$

$$4a^2h^2 = 2^4 \cdot p \cdot (p - c) \cdot (p - b) \cdot (p - a)$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros:

$$2ah = 4 \cdot \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}.$$

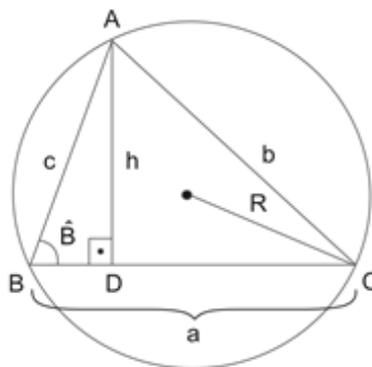
$$\text{Portanto, } \frac{ah}{2} = [ABC] = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)}. \quad \blacksquare$$

4.3 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS E DO CIRCUNRAIO

Seja ABC um triângulo inscrito numa circunferência de raio R , cujos lados medem $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$. Então, sua área pode ser dada por $A_T = [ABC] = \frac{abc}{4R}$.

Prova: Consideremos a figura 49 seguinte relativa ao problema.

Figura 49 – Triângulo ABC inscrito



(Triângulo ABC inscrito num círculo de raio R)

Da lei dos senos, temos $\frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$. Daí, $\sin \hat{B} = \frac{b}{2R}$.

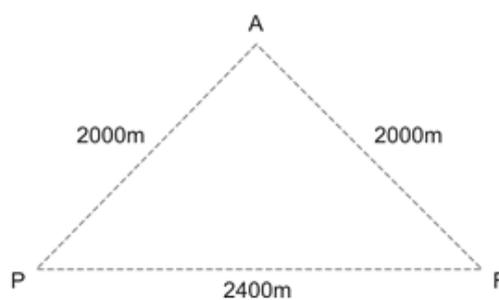
No triângulo ABD, obtemos $\sin \hat{B} = \frac{h}{c}$. Daí, $\frac{b}{2R} = \frac{h}{c}$, ou seja, $h = \frac{bc}{2R}$.

Uma vez que $A_T = [ABC] = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a}{2} \cdot h$, obtemos $[ABC] = \frac{a}{2} \cdot \frac{bc}{2R}$.

Portanto, $A_T = \frac{abc}{4R}$. ■

Aplicação 17: Os senhores Pedro, Francisco e Antônio moram numa cidade plana do nordeste brasileiro. Preocupados com a seca que assola a região, eles decidiram cavar um poço profundo num local que ficasse a igual distância de suas residências. Se a figura 50 mostra as distâncias entre as residências dos três, a que distância da casa deles deve ficar o poço?

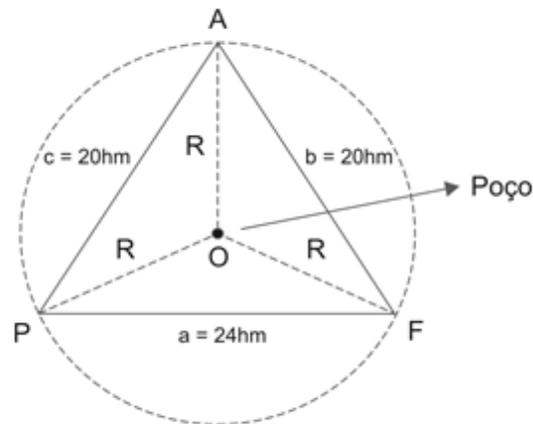
Figura 50 – Triângulo APF



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: O poço deve ficar no circuncentro do triângulo APF e a distância dele para as residências é o raio da circunferência circunscrita.

Figura 51 – Circuncentro



(Circuncentro do triângulo, ponto equidistante dos vértices)

Fonte: elaborada pelo autor

Nesse caso, como o semiperímetro do triângulo APF é $p = \frac{a + b + c}{2} = 32$ hm, sua

área será:

$$[APF] = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{ver 4.3 e 4.2}).$$

$$\text{Então, } \frac{24 \cdot 20 \cdot 20}{4R} = \sqrt{32 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} \Rightarrow \frac{6 \cdot 20 \cdot 20}{R} = 2 \cdot 8 \cdot 12 \Rightarrow R = 12,5 \text{ hm}$$

Portanto, a distância do poço às residências deve ser de $12,5 \text{ hm} = 1250 \text{ m}$.

Aplicação 18: Dado um círculo de raio R, mostre que, para qualquer triângulo ABC inscrito,

a expressão $\frac{h_a}{bc} + \frac{h_b}{ac} + \frac{h_c}{ab}$, onde **a**, **b**, **c** são as medidas dos lados do triângulo

e h_a , h_b , h_c são as respectivas alturas, é constante.

Demonstração: Sendo S a área do triângulo ABC , temos:

$$[ABC] = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = S \text{ (ver 3.7)}. \text{ Então, } ah_a = bh_b = ch_c = 2S.$$

$$\text{Como } [ABC] = \frac{abc}{4R} = S \text{ (ver 4.3), obtemos } abc = 4SR.$$

$$\text{Assim, } E = \frac{h_a}{bc} + \frac{h_b}{ac} + \frac{h_c}{ab} = \frac{ah_a}{abc} + \frac{bh_b}{abc} + \frac{c \cdot h_c}{abc} \Leftrightarrow E = \frac{2S}{4SR} + \frac{2S}{4SR} + \frac{2S}{4SR} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E = 3 \cdot \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \text{ (constante)} \quad \blacksquare$$

4.4 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS E DO INRAIO

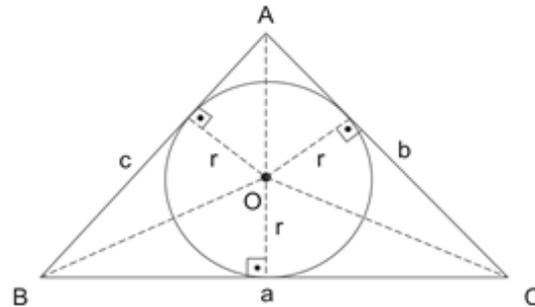
Seja ABC um triângulo cujos lados medem $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, circunscrito a um círculo de raio r e centro O . Então, sua área pode ser dada por:

$$A_T = [ABC] = p \cdot r,$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$ é o semiperímetro do triângulo ABC .

Prova: Consideremos a figura 52 seguinte relativa ao problema.

Figura 52 – Participação do triângulo ABC pelas bissetrizes



(Partição do triângulo ABC nos triângulos BOC, COA e AOB, em que O é o incentro)

Fonte: elaborada pelo autor

Nessa figura, temos que $A_T = [ABC] = [BOC] + [COA] + [AOB]$. Daí, obtemos:

$$A_T = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} \quad (\text{ver 3.7})$$

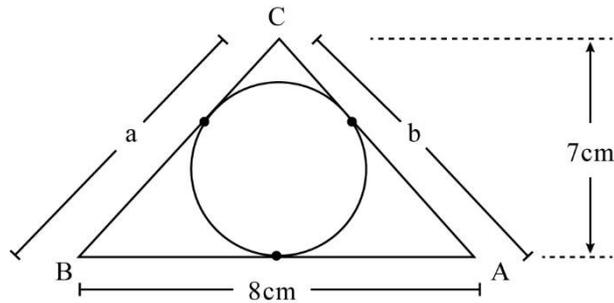
$$A_T = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

$$A_T = r \cdot \left(\frac{a + b + c}{2} \right)$$

Portanto, $A_T = p \cdot r$ ■

Aplicação 19: Se o raio do círculo inscrito no triângulo da figura 53 seguinte é 2 cm, calcule a soma $a + b$ das medidas dos lados AC e BC.

Figura 53 - Círculo inscrito ao triângulo ABC

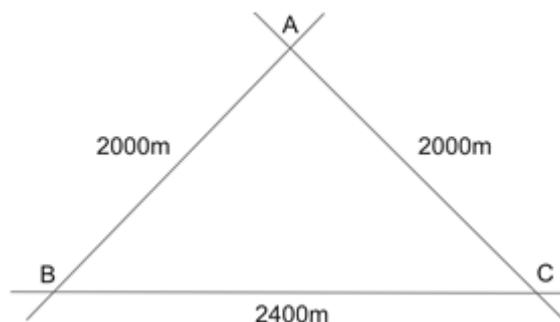


Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: O semiperímetro do triângulo ABC é $p = \frac{a+b+8}{2}$ cm e sua área, $[ABC] = p \cdot r = \frac{8 \cdot 7}{2}$ cm² (veja 4.4 e 3.7). Então, $\left(\frac{a+b+8}{2}\right) \cdot 2 = 28$. Portanto, $a + b = 20$ cm.

Aplicação 20: João deseja construir sua casa a igual distância das estradas representadas pelos lados do triângulo ABC seguinte, onde os vértices A, B e C representam seus cruzamentos. Supondo a região plana e considerando os dados da figura, onde João deve construir sua casa? Qual será a distância da casa para as estradas?

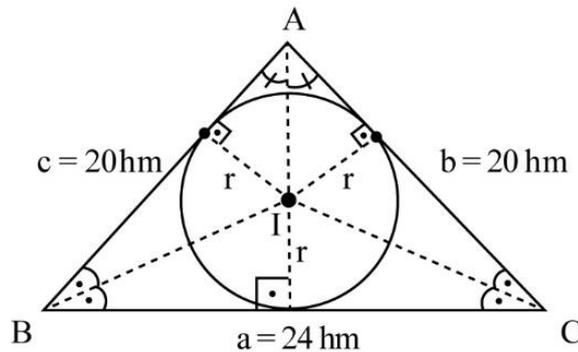
Figura 54 – Triângulo ABC



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: A casa de João deve ser construída no incentro (I) do triângulo ABC e a distância dela para as estradas é o inraio (raio do círculo inscrito).

Figura 55 - I: incentro do triângulo, ponto equidistante dos lados



Fonte: elaborada pelo autor

O semiperímetro do triângulo ABC é $p = \frac{a+b+c}{2} = 32$ hm e sua área,

$$[ABC] = p \cdot r = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{ver 4.4 e 4.2}).$$

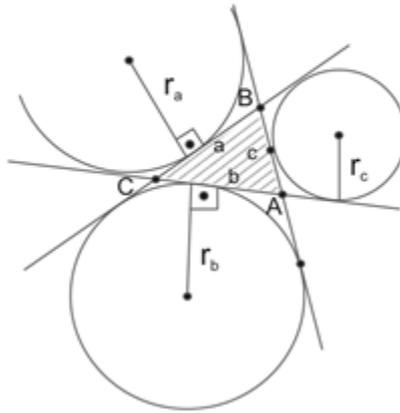
$$\text{Então, } 32 \cdot r = \sqrt{32 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 12} \Rightarrow 32 \cdot r = 2 \cdot 8 \cdot 12 \Rightarrow r = 6 \text{ hm.}$$

Portanto, João deve construir sua casa no incentro do ABC e a distância da casa para as estradas deve ser de $6 \text{ hm} = 600 \text{ m}$.

4.5 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DOS LADOS E DO RAIOS DE QUALQUER DOS CÍRCULOS EX-INSCRITOS

Círculo ex-inscrito a um triângulo é aquele que é tangente a um dos lados do triângulo e aos prolongamentos dos outros dois lados. Um triângulo apresenta três círculos ex-inscritos. Veja:

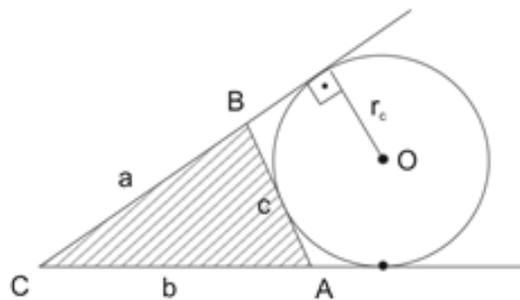
Figura 56 - Círculos ex-escritos ao triângulo ABC



Fonte: elaborada pelo autor

Vejamos, agora, como calcular a área do triângulo ABC em função do raio de qualquer dos círculos ex-inscritos. Para isso, considere a figura seguinte.

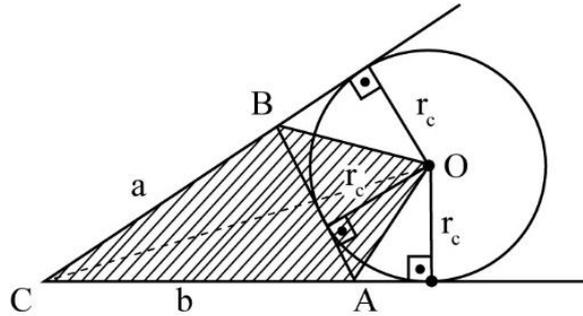
Figura 57 - Círculo ex-escrito tangente ao lado AB



Fonte: elaborada pelo autor

Ligando os vértices A, B e C do triângulo ABC ao centro O do círculo ex-inscrito tangente ao lado AB (relativo ao lado oposto ao vértice C), obtemos duas partições distintas para o quadrilátero AOBC.

Figura 58 - Quadrilátero AOBC, particionado



Fonte: elaborada pelo autor

Por um lado, temos que $[AOBC] = [AOC] + [COB]$. Por outro lado, observa-se também que $[AOBC] = [ABC] + [AOB]$. Com isso, temos que $[ABC] + [AOB] = [AOC] + [COB]$, ou seja:

$$[ABC] = [AOC] + [COB] - [AOB]$$

$$[ABC] = \frac{b \cdot r_c}{2} + \frac{a \cdot r_c}{2} - \frac{c \cdot r_c}{2} \quad (\text{ver 3.7})$$

$$[ABC] = \frac{(b + a - c) \cdot r_c}{2}$$

$$[ABC] = \frac{(a + b + c - 2c) \cdot r_c}{2}$$

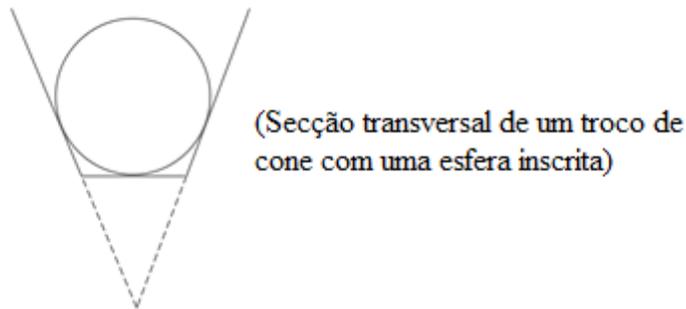
$$\text{Fazendo } 2p = a + b + c, \text{ obtemos } [ABC] = \frac{(2p - 2c) \cdot r_c}{2}.$$

Portanto, $A_T = [ABC] = (p - c) \cdot r_c$, em que p é o semiperímetro do triângulo ABC e r_c , a medida do raio do círculo ex-inscrito, tangente ao lado oposto ao vértice C.

De modo análogo, $A_T = (p - b) \cdot r_b$ e $A_T = (p - a) \cdot r_a$.

Aplicação 21: Para brincar de “bola ao cesto”, João Victor utiliza uma lixeira em formato de um tronco de cone reto, cujo diâmetro da base menor mede 12 cm, e a geratriz do cone subtraído, 9 cm. Quando João Victor “acerta o cesto”, percebe que sua bola se encaixa perfeitamente, tangenciando o fundo do cesto, conforme figura seguinte. Qual a medida do raio da bola?

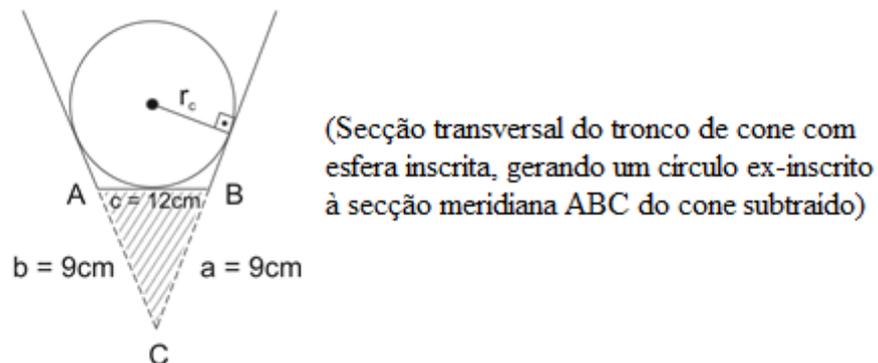
Figura 59 – Secção transversal



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: O raio da bola é o raio (r_c) do círculo ex-inscrito do triângulo ABC, tangente ao lado AB (diâmetro da base menor do tronco de cone), representado a seguir.

Figura 60 – Secção meridiana ABC do cone



Fonte: elaborada pelo autor

O semiperímetro do triângulo ABC é $p = \frac{a+b+c}{2} = 15$ cm e

$$[ABC] = (p - c) \cdot r_c = \sqrt{p \cdot (p - a)(p - b)(p - c)} \quad (\text{ver 4.5 e 4.2}).$$

$$\text{Então, } (15 - 12) \cdot r_c = \sqrt{15 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3} \Rightarrow 3 \cdot r_c = 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{5} \Rightarrow r_c = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

Portanto, o raio da bola mede $6\sqrt{5}$ cm.

Aplicação 22: Sendo r o raio do círculo inscrito e r_a, r_b, r_c os raios dos círculos ex-inscritos em um triângulo de área S , provar que $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

Demonstração: Consideremos o triângulo arbitrário ABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$, de semiperímetro $p = \frac{a + b + c}{2}$ e de área S . Temos que:

$$\text{i) } S = (p - a)r_a = (p - b)r_b = (p - c)r_c \quad (\text{ver 4.5}).$$

$$\text{Daí, } (p - a) = \frac{S}{r_a}, (p - b) = \frac{S}{r_b} \text{ e } (p - c) = \frac{S}{r_c}.$$

$$\text{ii) } S = p \cdot r \quad (\text{ver 4.4}). \text{ Daí, } p = \frac{S}{r}.$$

Substituindo esses resultados na fórmula de Herão, $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$,

obtemos:

$$S = \sqrt{\frac{S}{r} \cdot \frac{S}{r_a} \cdot \frac{S}{r_b} \cdot \frac{S}{r_c}} \Rightarrow S = \frac{S^2}{\sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}}$$

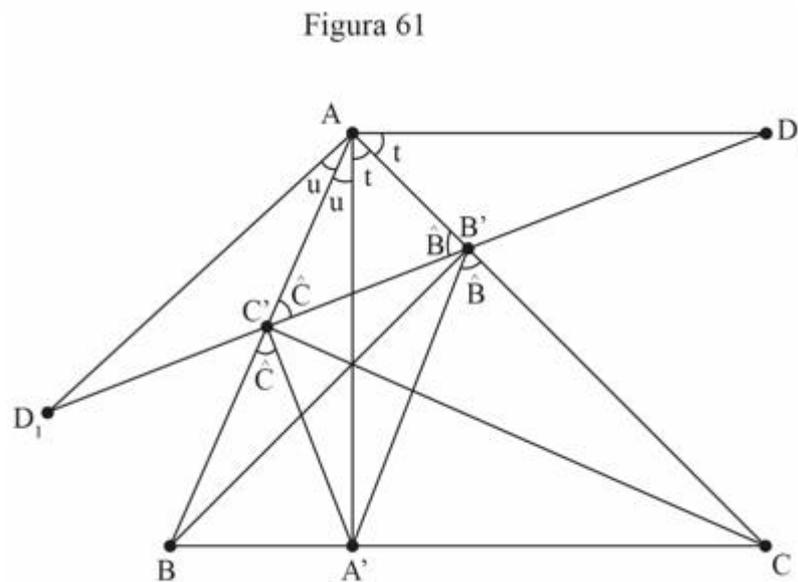
$$\text{Daí, } S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c} \quad \blacksquare$$

4.6 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DO CIRCUNRAIO E DO SEMIPERÍMETRO DO TRIÂNGULO ÓRTICO

Sejam ABC um triângulo e A', B', C' os pés das suas respectivas alturas traçadas a partir dos vértices A, B, C . Chamamos $A'B'C'$ de **triângulo órtico** do triângulo ABC . A área do triângulo ABC pode ser dada por $[ABC] = R \cdot s$, em que R é o circunraio do triângulo ABC e s é o semiperímetro do seu triângulo órtico $A'B'C'$.

Demonstração: Considere a figura 61 seguinte relativa ao triângulo ABC e seu triângulo órtico $A'B'C'$.

Figura 61 - Triângulo ABC com seu triângulo órtico $A'B'C'$, no qual o lado $B'C'$ foi prolongado nos dois sentidos



Fonte: elaborada pelo autor

Inicialmente, observe que o quadrilátero $C'BCB'$ é circunscritível, pois os ângulos $\hat{B}C'C$ e $\hat{B}B'C$ são retos, isto é, o círculo circunscrito aos triângulos $BC'C$ e $BB'C$ é o mesmo, pois BC é o seu diâmetro.

Sendo $C'BCB'$ circunscritível, temos que:

$$i) \quad \hat{C}'BC + \hat{C}'B'C = 180^\circ \Rightarrow \hat{C}'B'C = 180^\circ - \hat{C}'BC$$

$$\text{ii) } \widehat{C'B'C} = 180^\circ - \widehat{AB'C'}$$

$$\text{iii) Comparando (i) e (ii), obtemos } \widehat{AB'C'} = \widehat{C'BC} = \widehat{ABC} = \widehat{B}$$

iv) Como $AB'A'B$ também é circunscritível, de modo análogo, obtemos $\widehat{A'B'C} = \widehat{ABC} = \widehat{B}$

v) $\widehat{A'C'B} = \widehat{ACB} = \widehat{C}$ e $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB} = \widehat{C}$, análogo, pois $ACA'C'$ e $BC'B'C$ são circunscritíveis.

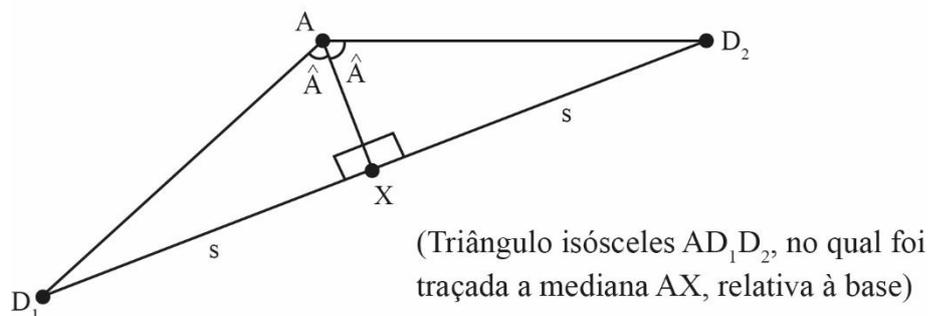
Prolonguemos, agora, $C'B'$ nos dois sentidos até os pontos D_1 e D_2 , respectivamente, de modo que $\overline{C'D_1} = \overline{C'A'}$ e $\overline{B'D_2} = \overline{B'A'}$, conforme figura anterior. Daí, obtemos:

vi) Os triângulos $AB'A'$ e $AB'D_2$ são congruentes pelo caso lado, ângulo, lado. Assim, $B'\widehat{AD}_2 = B'\widehat{AA'} = t$.

vii) Os triângulos $AC'A'$ e $AC'D_1$ são congruentes pelo caso lado, ângulo, lado. Assim, $C'\widehat{AD}_1 = C'\widehat{AA'} = u$.

Sendo assim, temos que $\widehat{BAC} = u + t = \widehat{A}$ e $D_1\widehat{AD}_2 = 2(u + t) = 2\widehat{A}$. Além disso, também temos $\overline{AD_1} = \overline{AD_2} = \overline{AA'}$ e o perímetro do triângulo órtico $A'B'C'$ igual a $\overline{D_1D_2} = 2s$. Considere, então, o triângulo isósceles D_1AD_2 e trace sua mediana AX relativa à base D_1D_2 , conforme figura seguinte.

Figura 62 – Triângulo isósceles AD_1D_2



Fonte: elaborada pelo autor

Como a mediana relativa à base de um triângulo isósceles também é bissetriz e altura, obtemos:

$$\text{sen } \hat{A} = \frac{s}{AD_1} = \frac{s}{AA'}$$

Por outro lado, usando a lei dos senos no triângulo ABC, temos que:

$$2R = \frac{\overline{BC}}{\text{sen } \hat{A}} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{\overline{BC}}{R}$$

$$\text{Portanto, } \frac{s}{AA'} = \frac{\overline{BC}}{2R} \Rightarrow R_s = \frac{(\overline{BC})(\overline{AA'})}{2} = [ABC] \quad \blacksquare$$

4.7 ÁREA DA REGIÃO TRIANGULAR EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS DOS VÉRTICES

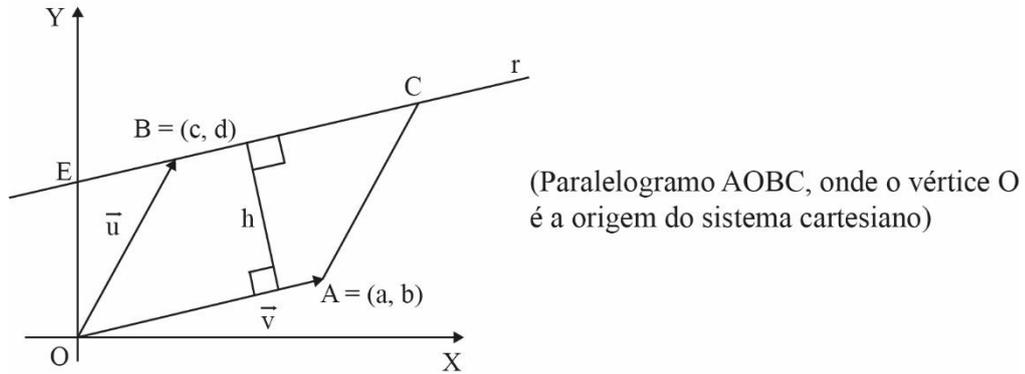
Inicialmente, mostraremos que a área de um paralelogramo AOBC, no qual a origem do sistema cartesiano, $O = (0, 0)$, é um de seus vértices, é dada por

$$[AOBC] = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|,$$

em que a primeira linha da matriz são as coordenadas do vértice A e a segunda linha, as coordenadas de B, ou seja, $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$.

Para mostrar isso, considere a figura seguinte, na qual AOBC é um paralelogramo, isto é, o ponto C fica sobre a reta r que passa pelo ponto B e é paralela ao lado OA, de tal modo que $\overline{BC} = \overline{OA}$ (segmentos orientados iguais).

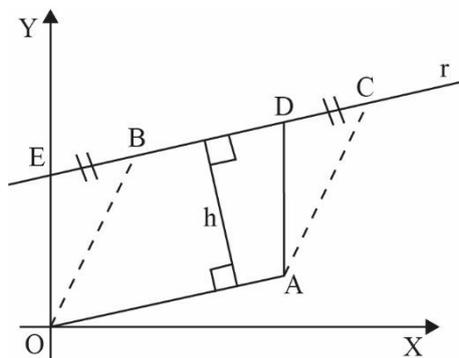
Figura 63 – Paralelogramo AOBC



Fonte: elaborada pelo autor

A área do paralelogramo é dada por $[AOBC] = \overline{BC} \cdot h$. No entanto, deslocando a base BC sobre a reta suporte r, até B coincidir com E, onde E é a interseção do eixo das ordenadas com a reta r, C coincidirá com D, $D \in r$, tal que $\overline{BE} = \overline{CD}$ (deslocamento) e, consequentemente, $\overline{ED} = \overline{BC} = \overline{OA}$.

Figura 64 – Paralelogramos AOEC e AOED equivalentes

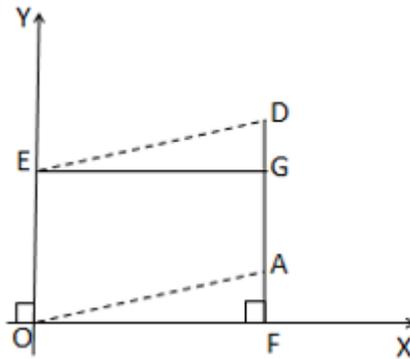


Fonte: elaborada pelo autor

Com isso, temos que AOED é um paralelogramo que apresenta a mesma área de AOBC, ou seja, $[AOBC] = [AOED] = \overline{ED} \cdot h$. Além disso, $\overline{DA} = \overline{EO}$. No entanto, deslocando o segmento AD sobre a reta \overline{AD} , até A coincidir com F, F pertencente ao eixo

das abscissas, o ponto D coincidirá com o ponto G da reta \overline{AD} , tal que $\overline{AF} = \overline{DG}$ (deslocamento) e, conseqüentemente, $\overline{DA} = \overline{GF} = \overline{EO}$ e FOEG é um retângulo.

Figura 65 – Paralelogramo AOED e retângulo FOEG equivalentes



Fonte: elaborada pelo autor

Assim, a área do paralelogramo AOED também pode ser dada por $[AOED] = \overline{OE} \cdot \overline{OF}$, isto é, a área do paralelogramo inicial AOBC termina sendo igual à área do retângulo EOFG. Portanto,

$[AOBC] = \overline{OE} \cdot \overline{OF}$, onde se sabe que:

- $\overline{OF} = |a|$ é o módulo da abscissa do ponto A;
- $\overline{OE} = |k|$ é o módulo do coeficiente linear da reta $r = \overline{BC}$.

Para o cálculo do coeficiente linear (k) da reta r, observe que r é paralela à reta \overline{OA} e, portanto, seu coeficiente angular é $\frac{b}{a}$. Sendo assim, r tem equação do tipo $y = \frac{b}{a}x + k$ e passa pelo ponto $B = (c, d)$. Logo, obtemos:

$$d = \frac{b}{a} \cdot c + k \Leftrightarrow k = \frac{ad - bc}{a}$$

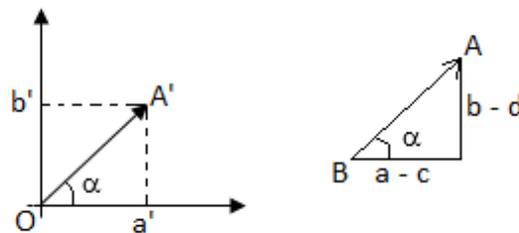
Com isso, temos que:

$$[AOBC] = \overline{OE} \cdot \overline{OF} = |k| \cdot |a| = |a \cdot k| = |ad - cb| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

De modo geral, para calcular a área do paralelogramo ABCD, conhecendo as coordenadas cartesianas de três vértices consecutivos $A = (a, b)$, $B = (c, d)$ e $C = (e, f)$, basta determinarmos os pontos $A' = (a', b')$ e $C' = (c', d')$ tais que tenhamos satisfeitas as seguintes igualdades de segmentos orientados:

- $\overline{OA'} = \overline{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = a - c \\ b' = b - d \end{cases} \Leftrightarrow A' = (a - c, b - d)$ (Ver figura 66)

Figura 66 – Segmentos orientados



(Segmentos orientados $\overline{OA'}$ e \overline{BA} congruentes, isto é, com mesmo sentido, direção e módulo)

Fonte: elaborada pelo autor

- $\overline{OC'} = \overline{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} c' = e - c \\ d' = f - d \end{cases} \Leftrightarrow C' = (e - c, f - d)$

Assim, o paralelogramo ABCD e o paralelogramo que apresenta os vértices consecutivos A', O, C' são congruentes e, portanto, apresentam a mesma área. Daí, como foi demonstrado anteriormente, teremos:

$$[ABCD] = \left| \det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} a - c & b - d \\ e - c & f - d \end{pmatrix} \right| = |(a - c)(f - d) - (e - c)(b - d)|$$

$$[ABCD] = | af - ad - cf + \cancel{ad} - eb + ed + cb - \cancel{cd} |$$

$$[ABCD] = | (af - eb) - (ad - cb) - (cf - ed) |$$

$$[ABCD] = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} \right|$$

$$[ABCD] = \left| -1 \cdot \begin{vmatrix} c & d \\ e & f \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|$$

$$[ABCD] = \left| \det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} \right|$$

Observando agora que, no paralelogramo ABCD, os triângulos ABC e CDA são congruentes pelo caso ângulo, lado, ângulo, temos que:

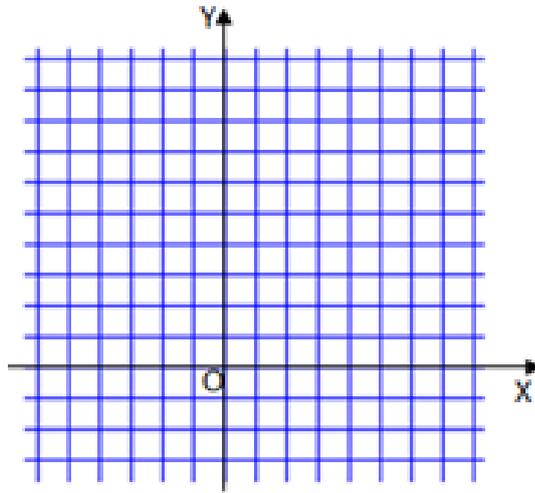
$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot \left| \det \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{pmatrix} \right|, \text{ onde a terceira coluna da matriz tem todos os}$$

elementos iguais a 1 e as duas primeiras colunas são formadas pelas respectivas coordenadas dos vértices $A=(a, b)$, $B=(c, d)$ e $C=(e, f)$, em qualquer ordem, uma vez que a troca de filas paralelas da matriz altera apenas o sinal do seu determinante, sem alterar o módulo. ■

4.8 A FÓRMULA DE PICK PARA O CÁLCULO DA ÁREA DE UM POLÍGONO SIMPLES

Uma *rede* no plano é um conjunto infinito de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de cada um deles aos pontos mais próximos na horizontal ou na vertical é igual a 1. Considerando um sistema de coordenadas cartesianas com origem em qualquer um dos pontos e com um eixo horizontal e o outro vertical, a rede poder ser descrita como o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas (x, y) são números inteiros.

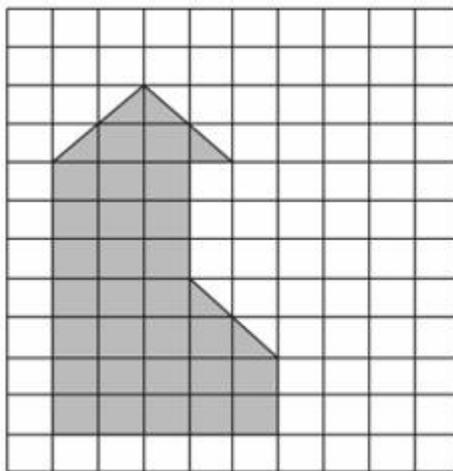
Figura 67 - Rede no plano cartesiano



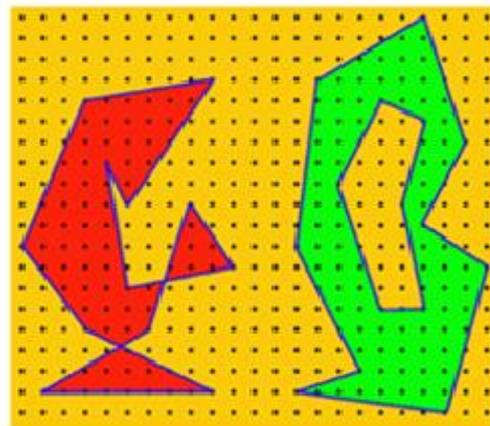
Fonte: elaborada pelo autor

Seja P um polígono cujos vértices são pontos da rede. O polígono P se diz simples quando não possui buracos no seu interior nem interseção de duas arestas.

Figura 68 / 69 – Polígonos simples e não simples



(Polígono simples)



(Polígonos não simples)

Fonte: TAVARES, João Nuno

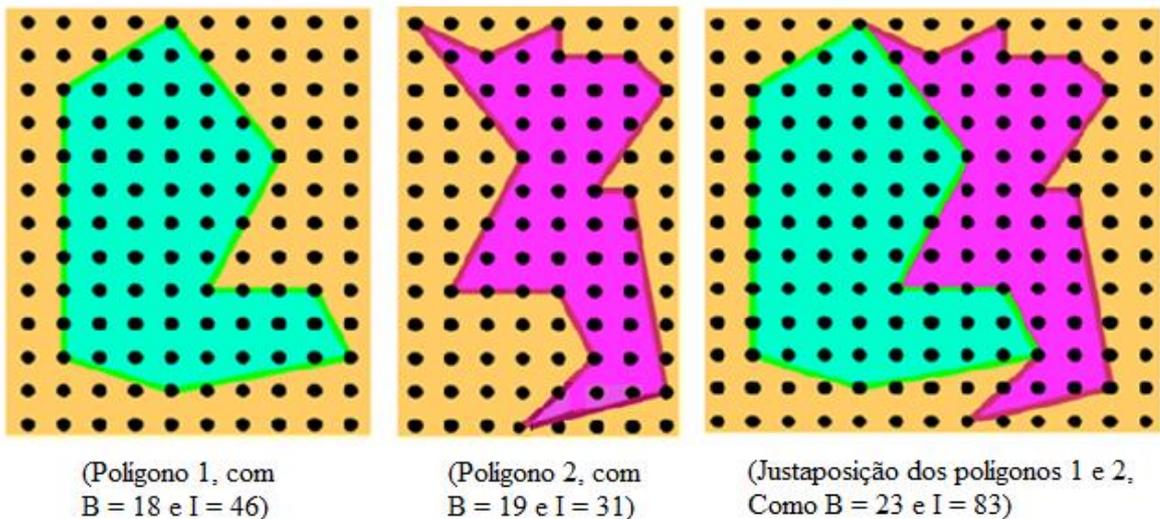
Aos pontos que estão sobre as arestas do polígono (sobre o bordo) chamamos de pontos de fronteira e aos que estão no interior do polígono chamamos de pontos interiores. Em 1899, o matemático austríaco Georg Alexander Pick demonstrou o hoje chamado **Teorema de Pick** que permite calcular a área de um polígono simples cujos vértices são pontos de uma rede, contando o número B dos seus pontos situados sobre o bordo do polígono e o número I de pontos da rede existentes no interior do polígono.

Teorema de Pick. A área de um polígono simples P , cujos vértices são pontos de uma rede, é dada pela expressão

$$[P] = \frac{B}{2} + I - 1$$

Nessa fórmula, a expressão $\frac{B}{2} + I - 1$ nos dá o que chamamos de número de Pick do polígono P . Para demonstrar o teorema de Pick, primeiramente note que o número de Pick deve ser aditivo, ou seja, justapondo dois polígonos ao longo de pelo menos uma aresta, o número de Pick do polígono resultante deve ser igual à soma dos correspondentes números de Pick dos referidos polígonos. Essa conjectura se justifica, pois, o polígono resultante da justaposição pode ser particionado nos dois polígonos originais e o número de Pick de cada um dos polígonos nos dá a sua área (ver 3.1 e figuras 70, 71 e 72 seguintes).

Figura 70 / 70 / 72 – Polígonos 1, 2 e justaposição dos polígonos 1 e 2



Note que, no polígono 1, o número de Pick é igual a $\frac{18}{2} + 46 - 1 = 54$ ua enquanto, no polígono 2, o número de Pick é $\frac{19}{2} + 31 - 1 = 39,5$ ua. Já o polígono resultante da justaposição dos polígonos 1 e 2 tem número de Pick igual a $\frac{23}{2} + 83 - 1 = 93,5$ ua. Fica fácil ver que a soma dos números de Pick dos polígonos 1 e 2 é o número de Pick do polígono resultante da justaposição desses polígonos. No caso, $54 + 39,5 = 93,5$.

Provaremos que realmente o número de Pick é aditivo. Considere dois polígonos simples arbitrários P_1 e P_2 , em que B_1 e B_2 são os respectivos números de pontos dos bordos, enquanto I_1 e I_2 são os respectivos números de pontos interiores. Justapondo-se esses polígonos, obtemos o polígono resultante P , com B pontos no seu bordo e I pontos no seu interior. Devemos mostrar que

$$\frac{B}{2} + I - 1 = \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1 \right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1 \right).$$

Para tanto, repare que depois de justapor os dois polígonos P_1 e P_2 , os pontos deles que ficam sobre as arestas comuns tornam-se pontos do interior do polígono resultante P , exceto dois deles que continuam a ser pontos de bordo, embora agora do polígono P . Nesse caso, sendo k o número de pontos de contato de P_1 e P_2 que após a justaposição se tornaram pontos interiores de P , devemos ter:

i) $I = I_1 + I_2 + k$;

ii) $B = (B_1 - k) + (B_2 - k) - 2$, uma vez que:

- em B_1 e em B_2 estão contados os k pontos em contatos que viraram pontos interior de P ;
- os dois pontos das arestas comuns que continuam no bordo (agora de P) estão contados simultaneamente em $(B_1 - k)$ e $(B_2 - k)$, são contados duas vezes. Logo, precisamos excluir esses dois pontos repetidos;

iii) Soma dos números de Pick dos polígonos P_1 e P_2 :

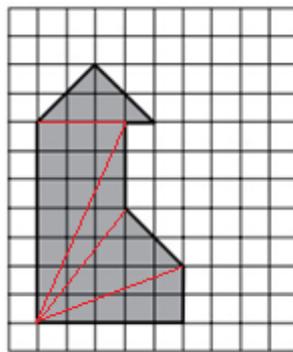
$$\begin{aligned} \left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1 \right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1 \right) &= \left(\frac{B_1}{2} - \frac{2k}{2} + \frac{B_2}{2} - \frac{2}{2} \right) + (I_1 + I_2 + k) - 1 = \\ &= \frac{(B_1 - k) + (B_2 - k) - 2}{2} + (I_1 + I_2 + k) - 1 \end{aligned}$$

Assim, substituindo (i) e (ii) em (iii), obtemos:

$$\left(\frac{B_1}{2} + I_1 - 1\right) + \left(\frac{B_2}{2} + I_2 - 1\right) = \frac{B}{2} + I - 1$$

Temos, então, que o número de Pick é realmente aditivo; e sabemos que qualquer polígono simples pode ser triangulado.

Figura 73 – Polígono simples

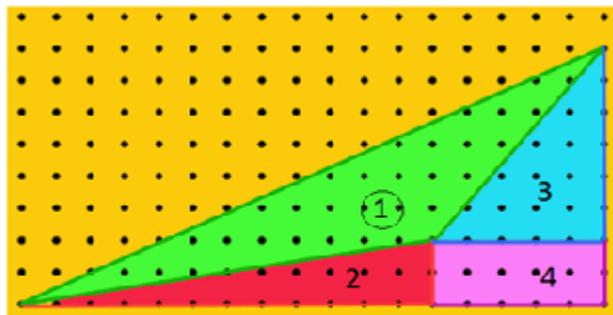


(Polígono simples,
particionado em triângulos)

Fonte: elaborada pelo autor

Sendo assim, para provar o teorema de Pick, basta mostrar que o mesmo vale para um triângulo arbitrário com vértices na rede. Mas note que um triângulo arbitrário pode ser completado num triângulo retângulo de catetos horizontal e vertical, justapondo-lhe ou retângulos ou novos triângulos retângulos.

Figura 74 – Triângulo retângulo particionado



(Triângulo não retângulo 1, completado em
triângulo retângulo)

Fonte: TAVARES, João Nuno

Com isso, devemos provar que o teorema de Pick vale para retângulos de lados horizontal e vertical, pois valendo para esses retângulos, também valerá para triângulos retângulo de catetos horizontal e vertical, uma vez que os retângulos são justaposições de dois triângulos congruentes. No entanto, um retângulo com vértices na rede de lados horizontal e vertical é a justaposição quadrados de lados unitários. Basta então provar a fórmula a fórmula de Pick para o quadrado de lado 1, o que é fácil, pois um quadrado Q de lado 1 tem $B = 4$ e $I = 0$, isto é,

$$[Q] = \frac{B}{2} + I - 1 \Leftrightarrow 1^2 = \frac{4}{2} + 0 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \text{ (verdade)} \quad \blacksquare$$

5 O NÚMERO π E A ÁREA DO CÍRCULO

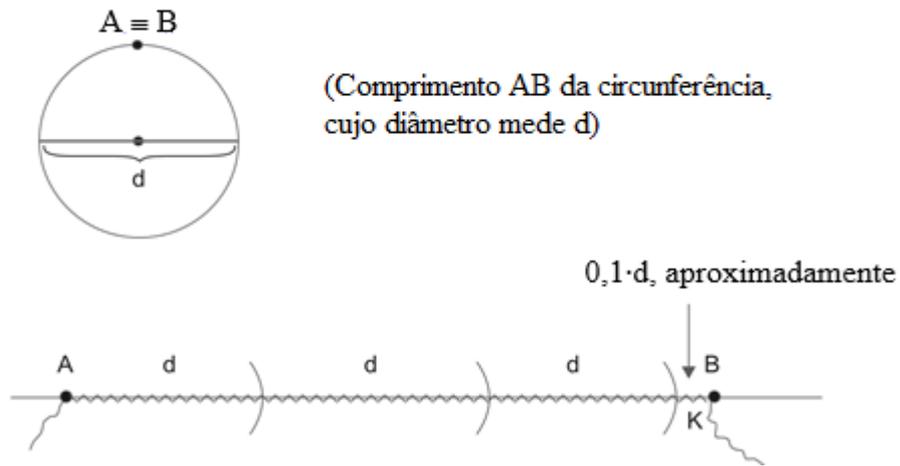
Será apresentada nessa seção, inicialmente, uma experiência costumeiramente realizada com estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental II, na qual se pode levá-los a descobrir um padrão existente entre as circunferências e seus respectivos diâmetros. Tal experiência proporciona aos jovens estudantes as primeiras noções relativas ao número π . Depois, utilizando o método de Exaustão de Eudoxo, calcularemos o comprimento de uma circunferência e a área do círculo, com base nas sugestões de Carvalho (2011), Morgado (1990) e Eves (1997).

5.1 NOÇÕES INICIAIS RELATIVAS AO NÚMERO IRRACIONAL π

Há uma experiência que se pode realizar com os estudantes, notadamente, os que estão iniciando os estudos relativos ao comprimento da circunferência, a qual permite encontrar um valor aproximado para a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Para tal experiência, usam-se papel ofício, compasso, régua e linha de algodão (linha de costurar), seguindo as etapas:

- i) Usando o compasso, constrói-se numa folha de papel ofício uma circunferência de raio 10 cm;
- ii) Coloca-se, o mais fiel possível, a linha sobre a circunferência (molhe a linha e retire o excesso d'água, se necessário), marcando na linha o ponto inicial (A) e final (B), ao se encontrarem;
- iii) Estique a linha e marque os pontos A e B sobre um segmento de reta, traçado previamente;
- iv) Usando o compasso com abertura igual ao diâmetro, divide-se o segmento AB em segmentos consecutivos e de medida igual ao diâmetro.

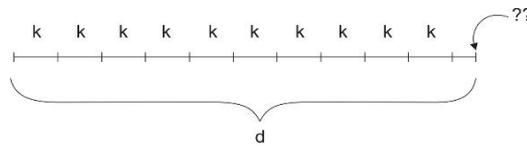
Figura 75 – Comprimento AB da circunferência



Fonte: elaborada pelo autor

Assim, constata-se que o comprimento da circunferência, $c = AB$, é um pouco maior que três vezes o seu diâmetro (d). Daí, $c \cong 3 \cdot d$.

v) Usando o compasso com abertura igual a $(AB - 3D) = k$, ou seja, igual à sobra, verifica-se quantas vezes essa sobra (k) cabe em um diâmetro (d):



Assim, constata-se que **k** cabe aproximadamente 10 vezes em d ($k \cong 0,1 \cdot D$). Daí, $c \cong 3,1 \cdot d$.

Com isso, obtém-se $\frac{c}{d} \cong 3,1$.

Na realidade, a razão entre o comprimento de uma circunferência (c) e seu diâmetro (d) é um número com infinitas casas decimais, sem repetição periódica, batizado por Euler (Basiléia, 1707 – São Petersburgo, 1783) de π (pi). Assim, por definição, $\frac{c}{d} = \pi$. Uma aproximação de π com 6 casa decimais exatas é $\pi \cong 3,141592$.

5.2 O COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Calcularemos o comprimento de uma circunferência de raio R usando a proposta de Antifonte (por volta de 479 a 411 a.C., orador, filósofo e matemático grego), ou seja, vamos aproximar o círculo por polígonos regulares inscritos e circunscritos, com 2^n lados. Começaremos com o quadrado (2^2 lados) e, a partir daí, dobraremos o número de lados sucessivamente, passando aos polígonos de 2^3 (octógono), 2^4 , 2^5 , ... lados.

Figura 76 - Polígonos inscritos

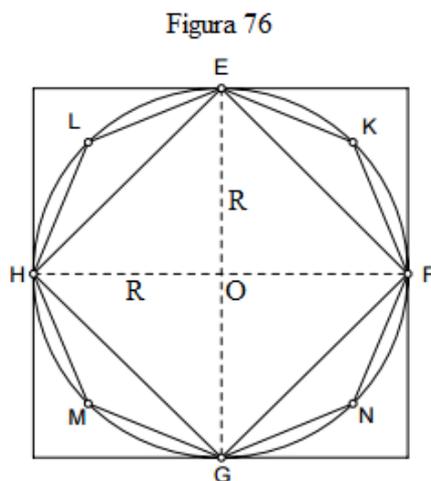
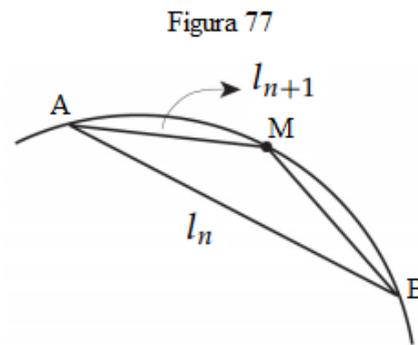


Figura 77 - Duplicação do número de lados



Fonte: CARVALHO, Sônia Pinto de

Consideremos f_n o polígono regular inscrito no círculo de raio R com 2^n lados, $n \geq 2$, l_n o comprimento de cada um de seus lados e $p_n = 2^n \cdot l_n$ seu perímetro. Para passar do polígono de 2^n lados para o polígono de 2^{n+1} lados, tomamos como novos vértices os pontos médios dos arcos determinados na circunferência pelos vértices do polígono de 2^n lados (ver figura 77).

Nessa sequência de polígonos regulares inscritos, temos que o perímetro do quadrado será igual a $p_2 = 4\sqrt{2}R$. Para ver isso, basta aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo EOH da figura 76, em que O é o centro do círculo, obtendo $l_2 = \overline{EF} = \overline{EH} = R\sqrt{2}$. Conseqüentemente, o perímetro do quadrado inscrito no círculo será igual a $p_2 = 4 \cdot l_2 = 4\sqrt{2}R$. Sabemos também, da desigualdade triangular, que a medida de qualquer dos lados de um triângulo é menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Aplicando então essa desigualdade no triângulo ABM da figura 77, temos, para todo $n \geq 2$, que $l_n < 2 \cdot l_{n+1}$, em que $l_n = \overline{AB}$ é a medida de cada lado do polígono regular de 2^n lados e $l_{n+1} = \overline{AM} = \overline{BM}$, a do polígono regular de 2^{n+1} lados. Como isso, temos:

$$l_n < 2 \cdot l_{n+1} \Leftrightarrow 2^n \cdot l_n < 2^n \cdot 2 \cdot l_{n+1} \Leftrightarrow 2^n \cdot l_n < 2^{n+1} \cdot l_{n+1} \Leftrightarrow p_n < p_{n+1}.$$

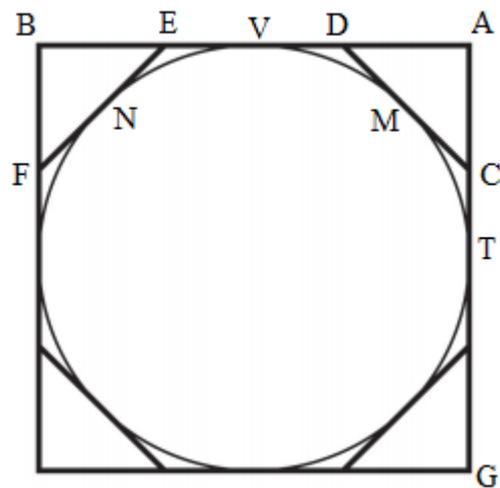
Já em relação ao quadrado circunscrito ao círculo, na figura 76, temos que seu perímetro é igual a $4 \cdot 2R = 8R$, e é maior que o perímetro de qualquer polígono inscrito no círculo, ou seja, $p_n < 8R$, para todo $n \geq 2$. Temos então que

$$4\sqrt{2}R = p_2 < p_3 < \dots < p_n < p_{n+1} < \dots < 8R,$$

ou seja, a sequência $(p_n)_{n \geq 2}$ é positiva e estritamente crescente. Em outras palavras, ou essa sequência cresce ilimitadamente, ou, ao aumentarmos o n , chegamos cada vez mais próximo de um número C . Tal número é o supremo dos perímetros dos polígonos regulares inscritos de 2^n lados, ou seja, $C = \sup\{p_n; n \in \mathbb{N}\}$. No caso, ela não pode crescer sem parar, uma vez que o valor $8R$ é uma cota superior. Portanto, a sequência $(p_n)_{n \geq 2}$ tende para certo valor positivo C quando n tende a infinito. Em outras palavras, C é o limite de p_n quando n tende a infinito. Em símbolos:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

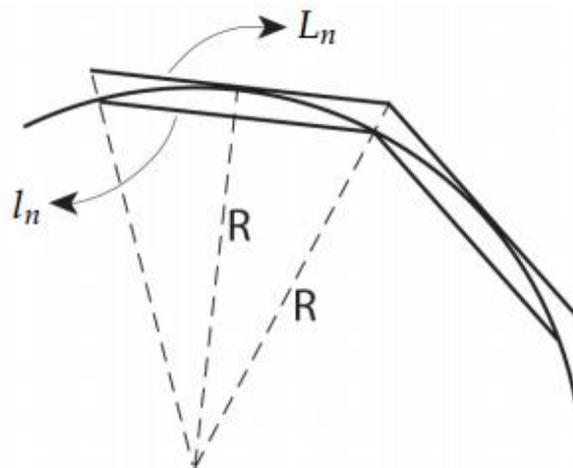
Consideremos, agora, F_n o polígono regular circunscrito ao círculo de raio R com 2^n lados, $n \geq 2$, L_n o comprimento de cada um de seus lados e $P_n = 2^n \cdot L_n$ seu perímetro. Nessa sequência de polígono regulares circunscritos, para passar do polígono de 2^n lados (F_n) para o polígono de 2^{n+1} lados (F_{n+1}), traçamos as retas tangentes ao círculo nos pontos médios dos arcos cujas extremidades são os pontos médios de dois lados consecutivos de F_n . Os vértices de F_{n+1} são as interseções dessas retas tangentes com os lados de F_n . A figura 78 ilustra bem esse fato. V e T são os pontos médios dos lados AB e AG de F_n , M é ponto médio do arco VT , D e C são vértices de F_{n+1} .

Figura 78 - Polígonos circunscritos

Fonte: CARVALHO, Sônia Pinto de

Observe que nesse processo de passar do polígono F_n para o polígono F_{n+1} , o vértice A sai e no seu lugar entram os vértices C e D. Isso mostra que, no perímetro do polígono F_n , sai a soma $\overline{AC} + \overline{AD}$ e entra o lado \overline{CD} para compor o perímetro de F_{n+1} ; e sabemos pela desigualdade triangular que $\overline{CD} < \overline{AC} + \overline{AD}$. O mesmo ocorre com os outros vértices de F_n . Assim, fica provado que $P_{n+1} < P_n$, para todo $n \geq 2$.

Por outro lado, como $L_n > l_n$, segue imediatamente que $P_n = 2^n \cdot L_n > p_n = 2^n \cdot l_n$, para todo $n \geq 2$.

Figura 79 - Lados dos polígonos inscrito e circunscrito

Fonte: CARVALHO, Sônia Pinto de

Assim, temos que:

$$P_2 = 8R > P_3 > P_4 > \dots > P_n > P_{n+1} > \dots > p_2 = 4\sqrt{2}R,$$

ou seja, a sequência $(P_n)_{n \geq 2}$ é positiva e estritamente decrescente. Mas essa sequência não pode decrescer ilimitadamente, uma vez que o valor $p_2 = 4\sqrt{2}R$ é uma cota inferior. Portanto, a sequência $(P_n)_{n \geq 2}$ tende para certo valor positivo $D = \inf\{P_n; n \in \mathbb{N}\}$, isto é, D é o limite de P_n quando n tende a infinito. Em símbolos:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$$

Será que os limites C e D das duas sequências são iguais? Se sim, podemos definir o comprimento da circunferência como sendo o perímetro do polígono regular de 2^n lados inscrito ou circunscrito na circunferência, quando n tende a infinito. Vamos mostrar que sim, estes limites são iguais.

Para isso, usando os triângulos retângulos da figura 79, cujos ângulos centrais são os mesmos da figura 80, deduzimos facilmente que $l_n = 2R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right)$ e $L_n = 2R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right)$. Assim, obtemos:

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{2^n \cdot l_n}{2^n \cdot L_n} = \cos\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) \Leftrightarrow p_n = P_n \cdot \cos\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) \Leftrightarrow p_n - P_n = P_n \cdot \left(\cos\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) - 1\right)$$

Como $D = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ (existe) e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos\frac{180^\circ}{2^n}\right) = \cos 0^\circ = 1$, concluímos que:

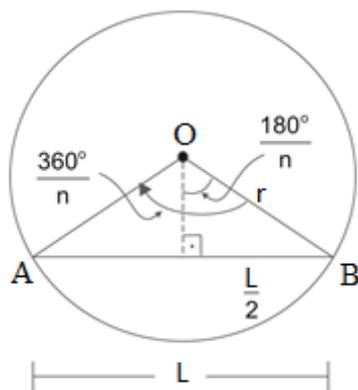
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - p_n) = 0$$

Isso mostra que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = C = D = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n$. Portanto, o comprimento da circunferência pode ser definido tomando-se polígonos regulares de 2^n lados, tanto inscritos quanto circunscritos.

Considere o comprimento da circunferência como sendo o limite C da sequência $(p_n)_{n \geq 2}$. Assim, existe um inteiro positivo i tal que diferença $C - p_i < \varepsilon$, qualquer que seja $\varepsilon > 0$ dado. Em outras palavras, podemos usar o método de exaustão de Eudoxo (ver 2.2) para o cálculo do comprimento da circunferência, comparando-o com perímetros de polígonos regulares inscritos. Iniciaremos mostrando que o comprimento de uma circunferência e seu respectivo raio são proporcionais, ou seja, mostraremos que se C_1 e C_2 são os comprimentos de duas circunferências de raios respectivamente iguais a r_1 e r_2 , então $\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2}$.

Para isso, considere L_1 e L_2 as medidas dos lados dos polígonos regulares de n lados inscritos, respectivamente, nas circunferências de raios respectivamente iguais a r_1 e r_2 .

Figura 80 – Lado AB de medida L



(Lado AB de medida L do polígono regular de n lados, inscrito num círculo de raio r e centro em O)

Fonte: elaborada pelo autor

Nesse caso, nas duas circunferências, temos a constante:

$$\operatorname{sen} \cdot \left(\frac{180^\circ}{n} \right) = \frac{L_1}{r_1} = \frac{L_2}{r_2} \quad (\text{ver figura 80}).$$

Daí, obtemos:

$\frac{r_1}{r_2} = \frac{L_1}{L_2} = \frac{n \cdot L_1}{n \cdot L_2} = \frac{2p_1}{2p_2}$, onde $2p_1$ e $2p_2$ são os perímetros dos polígonos de n lados

inscritos nas circunferências de raios r_1 e r_2 , respectivamente.

Suponhamos, agora, que, em vez da igualdade $\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2p_1}{2p_2}$, tivéssemos

$$\frac{c_1}{c_2} > \frac{2p_1}{2p_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Podemos, então, inscrever na primeira circunferência um polígono regular cujo perímetro m_1 difira tão pouco de C_1 que $\frac{m_1}{c_2} > \frac{2p_1}{2p_2}$ (I).

Seja m_2 o perímetro do polígono regular semelhante ao de perímetro m_1 considerado, mas inscrito no segundo círculo. Então, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2p_1}{2p_2}$ (II).

Assim, de (I) e (II): $\frac{m_1}{c_2} > \frac{m_1}{m_2}$, ou seja, $c_2 < m_2$, o que é um absurdo, pois o comprimento de um polígono inscrito (m_2) não pode superar o de sua circunferência circunscrita (c_2). Logo, a desigualdade $\frac{c_1}{c_2} > \frac{r_1}{r_2}$ é falsa.

Suponhamos, agora, que, em vez da igualdade $\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2}$, tivéssemos $\frac{c_1}{c_2} < \frac{r_1}{r_2}$.

Nesse caso, provar essa desigualdade equivale a provar a desigualdade reversa $\frac{c_2}{c_1} > \frac{r_2}{r_1}$. Com isso, recaímos no caso anterior, havendo apenas uma troca de papéis (índice 1 com índice 2).

Logo, a desigualdade $\frac{c_1}{c_2} < \frac{r_1}{r_2}$ também é falsa.

Portanto, fica demonstrado, por uma dupla *reductio ad absurdum*, que $\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1}{r_2}$, ou

$$\text{seja, } \frac{c_1}{r_1} = \frac{c_2}{r_2}.$$

Daí, se C é o comprimento e r é o raio da circunferência, temos que:

$$\frac{c_1}{2r_1} = \frac{c_2}{2r_2} = \frac{C}{2r} = \text{constante}$$

A constante da igualdade anterior, que é a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro, foi batizada por Euler de π .

$$\text{Portanto, } \frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2\pi r.$$

Uma outra maneira de chegarmos a esse resultado para o comprimento da circunferência, $C = 2\pi R$, é utilizando as noções de limites, encontradas em Iezzi (2013) ou em Caminha (2015). Nesse caso, o comprimento C da circunferência de raio R já foi definido como sendo o limite do perímetro do polígono regular de 2^n lados, inscrito na circunferência, quando n tendo a infinito, ou seja,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

Observando as figuras 79 e 80, nota-se facilmente que $l_n = 2R \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right)$ e $p_n = 2^n \cdot 2R \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right)$. Assim, o comprimento C de uma circunferência de raio R será:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \Leftrightarrow C = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot 2R \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) \Leftrightarrow C = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right)$$

Com isso, os comprimentos C_1 e C_2 de duas circunferências, cujos raios medem, respectivamente, R_1 e R_2 são tais que

$$\frac{C_1}{2R_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right) = \frac{C_2}{2R_2},$$

isto é, a razão $\frac{C}{2R}$ dá sempre o mesmo valor, é constante, qualquer que seja a circunferência.

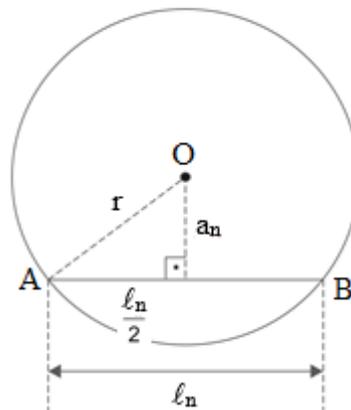
Essa constante $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \text{sen}\left(\frac{180^\circ}{2^n}\right)$ é o que foi batizada por Euler de π . Daí, obtemos:

$$\frac{C}{2R} = \pi \Leftrightarrow C = 2\pi R$$

5.3 O VALOR NUMÉRICO DE π

Consideremos, inicialmente, uma circunferência de raio r e um polígono regular de n lados inscrito, de apótema a_n , lado ℓ_n e perímetro $2p_n$. Veja figura 81 seguinte

Figura 81 – Lado AB de medida ℓ_n



(Lado AB de medida ℓ_n do polígono regular de apótema a_n , inscrito num círculo de raio r e centro em O)

Fonte: elaborada pelo autor

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura anterior,

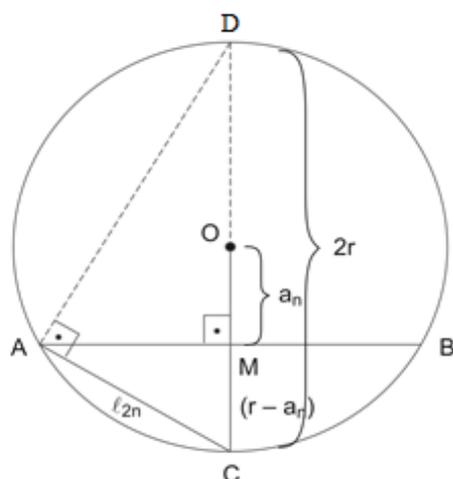
obtemos
$$a_n = \sqrt{r^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}}.$$

Seu ℓ_{2n} o lado do polígono regular de $2n$ lados inscrito na circunferência

anterior, encontramos $\ell_{2n} = \sqrt{2r \left(r - \sqrt{r^2 - \frac{(\ell_n)^2}{4}} \right)}$, cuja demonstração tem por base a relação

métrica $(AC)^2 = (CM) \cdot (CD)$ do triângulo ACD, retângulo em A, na figura 82 seguinte.

Figura 82 – Triângulo retângulo ACD



(Triângulo retângulo ACD,
inscrito num círculo de raio r)

Fonte: elaborada pelo autor

O comprimento C de uma circunferência de raio r , $C = 2\pi r$, é maior que o perímetro $2p_i$ de um polígono inscrito e menor que o perímetro $2p_c$ de um polígono circunscrito. Considerando $r = 1$, obtemos $2p_i < 2\pi < 2p_c$, ou seja, $\frac{2p_i}{2} < \pi < \frac{2p_c}{2}$.

Para os hexágonos regulares inscrito e circunscrito na circunferência de raios $r = 1$, obtemos facilmente as medidas dos respectivos lados iguais a $L_I = r = 1$ e $L_C = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Isso mostra que $\frac{6 \cdot 1}{2} < \pi < \frac{6 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}}{2}$, ou seja, $3,00000 < \pi < 3,46411$. Usando, agora, a fórmula para o cálculo de l_{2n} , em função de l_n , a partir dos hexágonos regulares, inscrito e circunscrito na circunferência de raio $r = 1$ e uma calculadora, podemos ter uma ideia do valor numérico de π :

n	$\frac{2p_I}{2} < \pi < \frac{2p_C}{2}$
6	$3,00000 < \pi < 3,46411$
12	$3,10582 < \pi < 3,21540$
24	$3,13262 < \pi < 3,15967$
48	$3,13935 < \pi < 3,14609$
96	$3,14103 < \pi < 3,14272$

Na tabela anterior, percebe-se que quando **n** aumenta, $\frac{2p_I}{2}$ aumenta e $\frac{2p_C}{2}$ diminui, e os dois valores estão convergindo para um mesmo valor, que é π .

Para uma melhor ideia do valor de π , consideremos os polígonos regulares inscritos no círculo de raio unitário, tendo cada um o dobro do número de lados do anterior.

Usando a fórmula da duplicação do número de lados, $l_{2n} = \sqrt{2r \left(r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{l_n}{4} \right)^2} \right)}$, obtemos

a partir de $l_4 = \sqrt{2}$ (fácil de calcular):

$$l_4 = l_{2^2} = \sqrt{2}; \quad (2 - 1) \text{ radicais}$$

$$l_8 = l_{2^3} = \sqrt{2 \cdot 1 \left(1 - \sqrt{1^2 - \frac{(\sqrt{2})^2}{4}} \right)} = \sqrt{2 - \sqrt{2}}; \quad (3 - 1) \text{ radicais}$$

$$l_{16} = l_{2^4} = \sqrt{2 \cdot 1 \left(1 - \sqrt{1^2 - \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{4}} \right)} = \sqrt{2 - \sqrt{2} + 2}; \quad (4 - 1) \text{ radicais}$$

$$\ell_{32} = \ell_{2^5} = \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{(2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}{4}} \right)} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}; \quad (5 - 1) \text{ radicais}$$

Assim, $\ell_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}$, com n radicais, é o lado do polígono regular de 2^{n+1} lados, cujo perímetro é $2p = 2^{n+1} \cdot \ell_{2^{n+1}}$. Quando n cresce indefinidamente, $2p$ tende para o comprimento do círculo (de raio 1), ou seja, $2\pi \cdot 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} \cdot \ell_{2^{n+1}}$. Daí,

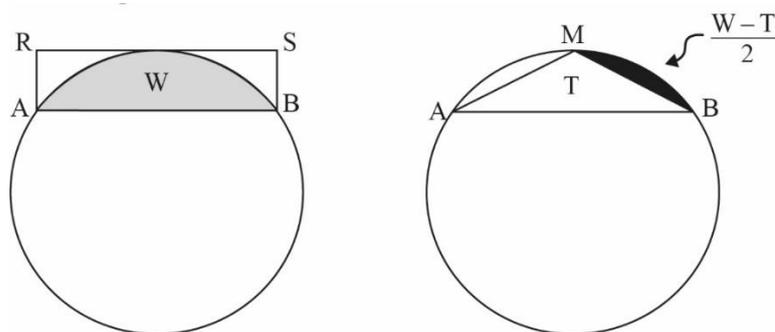
$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots}}}} \text{ , com } n \text{ radicais.}$$

Agora, finalmente, vamos determinar a área do círculo.

5.4 ÁREA DO CÍRCULO (DISCO)

Mostraremos inicialmente que a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular inscrito pode se tornar tão pequena quanto se deseje. Para isso, considere a figura 83, na qual AB é lado do polígono regular g_n de n lados, $n \geq 3$, inscrito no círculo, e M é ponto médio do arco AB . Considere também a figura 84, na qual $AM \equiv BM$ são lados do polígono regular g_{2n} de $2n$ lados, obtido a partir de g_n . Seja d_n a diferença entre as respectivas áreas do círculo e do polígono g_n . De acordo com o método de exaustão de Eudoxo (ver 2.2), para provar que a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular inscrito pode se tornar tão pequena quanto se deseje, basta provarmos que $d_{2n} < \frac{1}{2} \cdot d_n$, o que é fácil de ver. Observe:

Figura 83 - Lado AB do polígono inscrito de n lados **Figura 84: Lados AM e BM do polígono inscrito de $2n$ lados**



Fonte: elaborada pelo autor

A diferença d_n entre a área do círculo e a área do polígono regular inscrito g_n de n lados corresponde a n vezes a área W sombreada na figura 83, ou seja, $d_n = n \cdot W$. Ao passar do polígono g_n para o polígono g_{2n} , a diferença d_n é modificada para a diferença d_{2n} retirando-se de cada área W a área T do triângulo ABM (veja figura 84). Assim, a diferença d_{2n} será:

$$d_{2n} = n \cdot (W - T) = 2n \cdot \left(\frac{W - T}{2} \right)$$

Logo, para que a diferença d_{2n} caia para menos da metade de d_n , basta que a área retirada T de cada área W , seja mais da metade de W . Devemos então mostrar que $T > \frac{W}{2}$, mais isso é só observar nas figuras 83 e 84 que o triângulo ABM e o retângulo $ABSR$ têm a mesma base AB e a mesma altura relativa. Daí, obtemos:

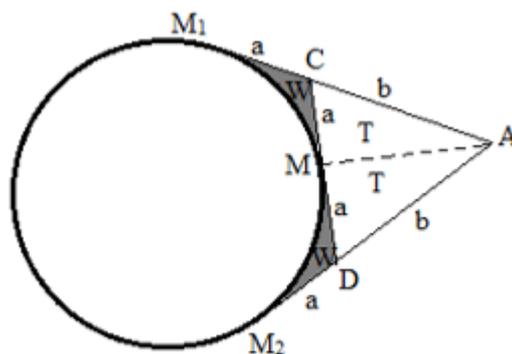
$$[ABSR] = 2T > W \Leftrightarrow T > \frac{W}{2}$$

$$\text{Portanto, } d_{2n} < \frac{1}{2} \cdot d_n$$

Assim, pelo método de exaustão de Eudoxo (ver 2.2), a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular inscrito pode se tornar tão pequena quanto se deseje.

Agora, vamos mostrar que a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular circunscrito também pode se tornar tão pequena quanto se deseje. Para isso, considere a figura 85 seguinte, na qual A é um dos vértices do polígono regular G_n de n lados, $n \geq 3$, circunscrito ao círculo. Nessa figura, M_1 e M_2 são pontos médios de dois lados consecutivos de G_n , M é ponto médio do arco M_1M_2 e \overline{CD} é tangente ao círculo no ponto M , de modo que \overline{CD} é lado do polígono regular G_{2n} circunscrito de $2n$ lados. Além disso, $CD = 2a$ representa a medida de um lado de G_{2n} e $AM_1 = a + b$ representa a metade da medida de um lado do polígono G_n .

Figura 85 – Vértices de polígonos circunscritos



(Vértice A do polígono de n lados e
vértices C, D do polígono de $2n$ lados)

Fonte: elaborada pelo autor

Analogamente ao que fizemos com os polígonos inscritos, considerando a diferença D_n entre a área do polígono regular G_n e a área do círculo, a diferença D_{2n} cairá para menos da metade de D_n se ao passar do polígono G_n para o G_{2n} , a área retirada $2T$ for maior do que a metade da área ($2W + 2T$), conforme mostra a figura 85. Assim, devemos mostrar que $2T > \frac{2W + 2T}{2}$, ou seja, mostrar que $T > W$.

Para isso, temos que o triângulo AMC é retângulo em M , o que nos leva a concluir que $b > a$ (em um triângulo, ao maior ângulo se opõe o maior lado e vice-versa). Note que sendo α a medida, em graus, do ângulo MCA , a medida do seu suplemento MCM_1 será $180^\circ - \alpha$. Daí, observando que $\sin \alpha = \sin (180^\circ - \alpha) > 0$, pois α está entre zero e 180° , teremos:

$$b > a \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot b \cdot a \cdot \sin \alpha > \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin(180^\circ - \alpha) \Rightarrow [MCA] = T > [MCM_1] > W$$

Logo, $T > W$ e, conseqüentemente, $D_{2n} < \frac{1}{2} \cdot D_n$. Assim, pelo método de exaustão de Eudoxo (ver 2.2), a diferença entre a área de um polígono regular circunscrito e a do círculo pode se tornar tão pequena quanto se deseje. Sendo assim, a área do círculo existe e

pode ser o supremo das aproximações por falta das áreas dos polígonos regulares inscritos ou o ínfimo das aproximações por excesso das áreas dos polígonos regulares circunscritos.

Na aplicação 4, mostramos que a área de um polígono regular g_n de semiperímetro p e apótema a pode ser calculado através da fórmula $[g_n] = p \cdot a$.

No entanto, nota-se que, quando o número de lados n do polígono inscrito aumenta, o perímetro $2p$ do polígono se aproxima do comprimento $2\pi r$ da circunferência. Sendo assim, o semiperímetro p se aproxima de πr , enquanto o apótema a se aproxima do raio r da circunferência. Assim, faz sentido conjecturar que a área do polígono regular inscrito se aproxime da área do círculo e, no limite, a área do polígono regular inscrito seja igual a:

$$p \cdot a = \pi r \cdot r = \pi r^2 = [\text{círculo}].$$

Mostraremos que a área A do círculo de raio r é realmente $A = \pi r^2$. Para isso, suponhamos que no lugar de $A = \pi r^2$ tenhamos $A > \pi r^2$. Pelo que demonstramos antes, a área $[g_n] = p \cdot a$ de um polígono regular g_n de n lados, inscrito num círculo, pode ficar tão próxima de A quanto se deseje. Assim, com certeza, existirá um polígono regular inscrito g_n com área tão próxima de A que também sua área é maior que πr^2 . Daí, teremos que:

$$A > [g_n] = p \cdot a > \pi r^2 \Leftrightarrow 2p \cdot a > 2\pi r \cdot r \text{ (absurdo)}$$

Note que o absurdo acontece porque temos, obrigatoriamente, o perímetro ($2p$) e o apótema (a) de qualquer polígono inscrito menores que o comprimento da circunferência ($2\pi r$) e o raio r , respectivamente. Assim, o produto de dois fatores positivos menores não pode ser maior que o produto de dois fatores positivos maiores. Portanto, a desigualdade $A > \pi r^2$ é falsa.

Suponhamos agora que no lugar de $A = \pi r^2$ tenhamos $A < \pi r^2$. Pelo que demonstramos antes, os polígonos regulares circunscritos G_n têm área maior que A , mas suas áreas podem ficar tão próximas de A quanto se deseje. Assim, com certeza, existirá um polígono inscrito G_n com área tão próxima de A que também sua área é menor que πr^2 , ou seja, teremos $A < [G_n] < \pi r^2$.

Como sabemos, em qualquer polígono regular circunscrito, o apótema é igual ao raio ($a = r$) e o seu perímetro ($2P$) é maior que o comprimento da circunferência ($2\pi r$), ou seja, $2P > 2\pi r$. Daí, obtemos:

$$A < [G_n] = P \cdot r < \pi r^2 \Leftrightarrow 2P < 2\pi r \text{ (absurdo)}$$

Portanto, a desigualdade $A < \pi r^2$ também é falsa. Sendo assim, fica demonstrado que a sentença $A = \pi r^2$ é verdadeira.

Uma outra maneira de mostrar que a área A de um círculo de raio r é dada por $A = \pi r^2$ é utilizando a definição de limite e suas propriedades, encontradas em Iezzi (2013) ou em Caminha (2015). Nesse caso, considerando “**a**” a medida do apótema do polígono regular de **n** lados inscrito num círculo de raio r , quando **n** tende a infinito ($n \rightarrow \infty$), temos que:

- o perímetro ($2p$) do polígono tende ao comprimento da circunferência ($c = 2\pi r$). Daí, o semiperímetro (p) tende a πr ($p \rightarrow \pi r$).
- o apótema (**a**) tende a **r** ($a \rightarrow r$)
- a área do polígono tende à área do círculo.

Como a área do polígono é igual a $p \cdot a$ (ver aplicação 4), obtemos:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} p \cdot a = (\pi r) \cdot r. \text{ Portanto, } A = \pi r^2$$

Aplicação 23: Se o raio de um círculo aumenta 100%, qual o aumento percentual na sua área?

Resolução: Sendo A_1 a área do círculo de raio R_1 e A_2 a área do círculo de raio $R_2 = R_1 + 100\% R_1$, temos:

$$\text{i) } R_2 = 2R_1$$

$$\text{ii) } A_1 = \pi R_1^2$$

$$\text{iii) } A_2 = \pi (2R_1)^2 \Rightarrow A_2 = 4\pi R_1^2 \Rightarrow A_2 = (1 + 3) \cdot A_1$$

$$3 = 300\%$$

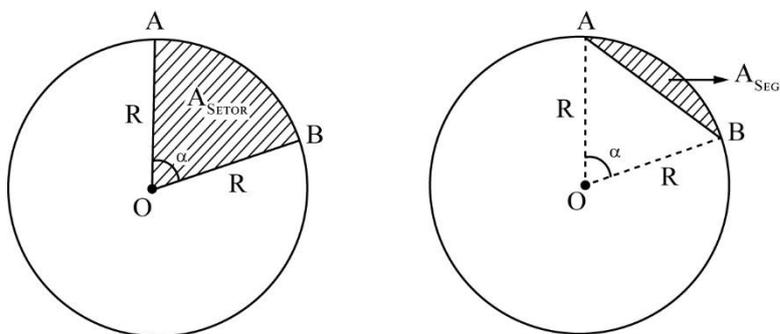
$$\text{Daí, } A_2 = A_1 + \underset{\text{aumento}}{\uparrow} \cdot A_1$$

Logo, o aumento é de 300%.

Aplicação 24: Sejam A_{SETOR} e A_{SEG} as áreas do setor e do segmento circulares de raio R e medidas iguais a α radianos. Calcular A_{SETOR} e A_{SEG} , em função de R e α .

Resolução: Consideremos as figuras ilustrativas seguintes.

Figura 86/ 87 - Setor circular / Segmento circular



Fonte: elaborada pelo autor

$$\text{i) } A_{\text{SETOR}} \text{ é a fração } \frac{\alpha}{2\pi} \text{ do círculo. Então, } A_{\text{SETOR}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \frac{\alpha R^2}{2} .$$

$$\text{ii) } A_{\text{SEG}} = A_{\text{SETOR}} - [\text{AOB}]$$

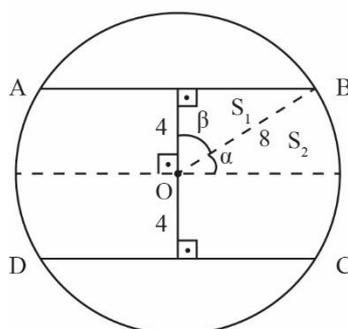
$$A_{\text{SEG}} = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \cdot \text{sen } \alpha . \text{ (ver 4.1)}$$

$$\text{Portanto, } A_{\text{SEG}} = \frac{R^2}{2} [\alpha - \text{sen } \alpha] \text{ e } A_{\text{SETOR}} = \frac{\alpha R^2}{2} .$$

Aplicação 25: Duas cordas congruentes, paralelas e distantes 8 cm uma da outra são traçadas em círculo de raio 8 cm. Calcule, em unidades de área, a medida da superfície da região do círculo compreendida entre essas cordas.

Resolução: Considere a figura 88 seguinte relativa ao enunciado, em que AB e CD são as cordas paralelas e O, o centro.

Figura 88 – Cordas AB e CD congruentes



Fonte: elaborada pelo autor

Pela simetria da figura, a área procurada é equivalente a $4 \cdot (S_1 + S_2)$, onde:

$$\text{i) } \cos \beta = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

$$\text{ii) } \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

$$\text{iii) } S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \text{ (ver 4.1)} \Rightarrow S_1 = 8\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

iv) S_2 é a área de um setor circular equivalente a $\frac{\alpha}{360^\circ}$ da área do círculo.

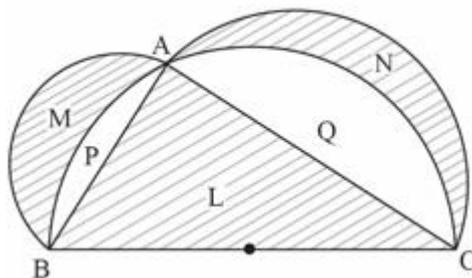
$$\text{Daí, } S_2 = \frac{30^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 8^2 \Rightarrow S_2 = \frac{16\pi}{3} \text{ cm}^2.$$

Assim, a área procurada (A_p) é igual a $A_p = 4 \cdot \left(8\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3} \right) \text{ cm}^2$.

$$\text{Portanto, } A_p = \left(32\sqrt{3} + \frac{64\pi}{3} \right) \text{ cm}^2.$$

Aplicação 26: Considerando a figura 89 seguinte, provar que $L = M + N$, em que as semicircunferências têm raios medindo $\frac{\overline{AB}}{2}$, $\frac{\overline{AC}}{2}$ e $\frac{\overline{BC}}{2}$, respectivamente, e L, M, N são as áreas das regiões sombreadas.

Figura 89 – Aplicação 26



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração: O triângulo ABC é retângulo em \hat{A} , pois BC é diâmetro do círculo circunscrito. Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{AC})^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2.$$

Observando agora que:

$$\bullet \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 = L + P + Q;$$

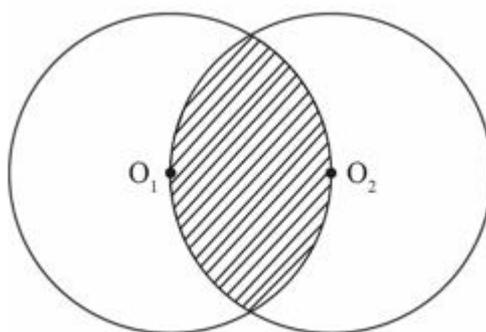
$$\bullet \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = P + M;$$

$$\bullet \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{AC}{2} \right)^2 = Q + N, \text{ em que P e Q são as áreas das regiões não sombreadas,}$$

obtemos: $L + P + Q = (P + M) + (Q + N)$. Portanto, $L = M + N$ ■

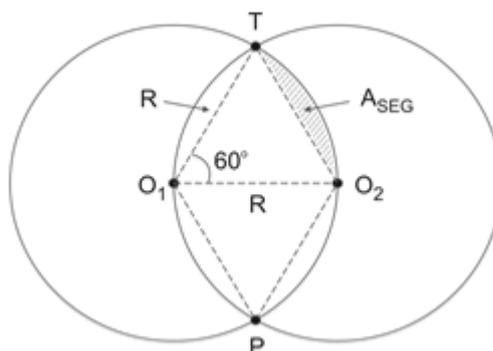
Aplicação 27: A região sombreada seguinte é limitada por dois arcos das circunferências de raios iguais a R e centros nos pontos O_1 e O_2 . Calcular, em função de R, a área sombreada.

Figura 90 – Aplicação 27



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 91 – Resolução da aplicação 27



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: Consideremos os triângulos equiláteros O_1O_2T e O_1O_2P de lados iguais a R na figura ilustrativa seguinte.

$$\text{Temos que } [O_1O_2T] = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \text{ e } 60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad, o que nos dá } A_{\text{SEG}} = \frac{R^2}{2} \cdot \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right].$$

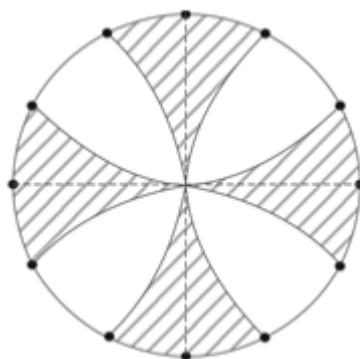
Como a figura é simétrica, a área procurada (A_{PROC}) é dada por:

$$A_{\text{PROC}} = 2 \cdot [O_1O_2T] + 4 \cdot A_{\text{SEG}}$$

$$A_{\text{PROC}} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} + 2R^2 \cdot \left[\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \Leftrightarrow A_{\text{PROC}} = R^2 \cdot \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Aplicação 28: Um círculo de raio a se intersecta com quatro outros círculos de mesmo raio, formando uma cruz, como indica a figura, onde os pontos destacados são vértices de um dodecágono regular inscrito. Determine a área da cruz sombreada, em função de a .

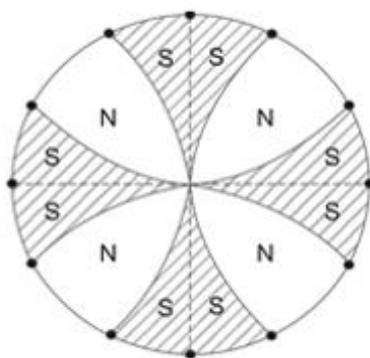
Figura 92 – Aplicação 28



Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: Na figura, temos quatro regiões congruentes sombreadas e quatro regiões congruentes não sombreadas. Consideremos a área de cada região congruente sombreada igual a $2S$ e a de cada região congruente não sombreada igual a N , conforme figura seguinte.

Figura 93 – Resolução da aplicação 28



Fonte: elaborada pelo autor

Assim, por um lado temos que $4S + 2N = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2$ (meio círculo de raio a). Por outro lado, usando o resultado da aplicação 26, temos que:

$$2S + 2N = a^2 \cdot \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

Daí, subtraindo membro a membro essas duas igualdades, obtemos:

$$(4S + 2N) - (2S + 2N) = \frac{1}{2} \cdot \pi a^2 - a^2 \left[\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

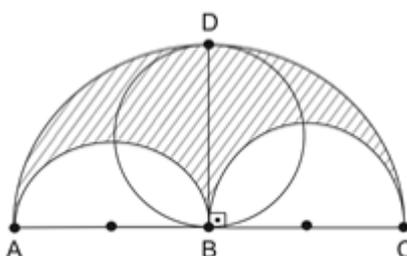
$$2S = \frac{3\pi a^2 - 4\pi a^2 + 3\sqrt{3}a^2}{6}$$

$$8S = \frac{6\sqrt{3}a^2 - 2\pi a^2}{3}$$

Portanto, a superfície da cruz é igual a $8S = a^2 \cdot \left(2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \right)$.

Aplicação 29: Provar que a área da região sombreada é igual à área do círculo de diâmetro BD na figura, onde AB, BC e AC são os diâmetros dos três semicírculos.

Figura 94 – Aplicação 29



Fonte: elaborada pelo autor

Demonstração: Considerando $\overline{AB} = 2r$ e $\overline{BC} = 2R$, temos os raios $\frac{\overline{AB}}{2} = r$, $\frac{\overline{BC}}{2} = R$ e $\frac{\overline{AC}}{2} = R + r$. Então, a área sombreada (A_{SOMB}) é igual à área do semicírculo maior, menos as áreas dos dois semicírculos menores, ou seja,

$$A_{SOMB} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{AC}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2$$

$$A_{SOMB} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left[(R+r)^2 - r^2 - R^2 \right] \Leftrightarrow A_{SOMB} = \pi Rr$$

Por outro lado, usando a relação métrica $(\overline{BD})^2 = (\overline{AB}) \cdot (\overline{BC})$ no triângulo ADC, retângulo em D, pois o triângulo ADC está inscrito no círculo de diâmetro AC, obtemos:

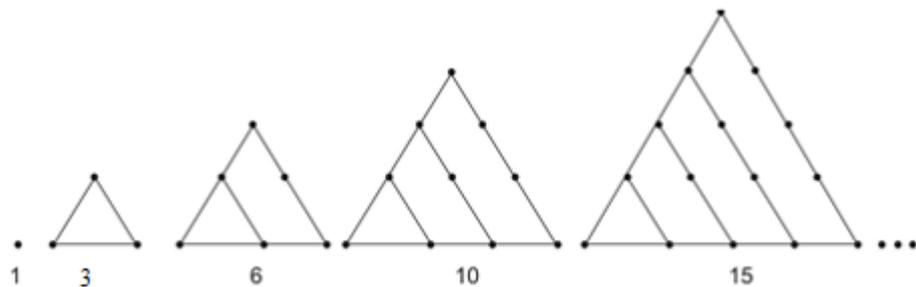
$$(\overline{BD})^2 = (2r) \cdot (2R) \Rightarrow \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 = Rr$$

Então, a área do círculo (A_{CIRC}) de raio $\left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)$ é $A_{CIRC} = \pi \cdot \left(\frac{\overline{BD}}{2}\right)^2 = \pi Rr$.

Portanto, $A_{SOMB} = A_{CIRC}$. ■

Aplicação 30: Os números 1, 3, 6, 10, 15, ... são chamados de números triangulares, nomenclatura esta justificada pela sequência de triângulos da figura 95 seguinte.

Figura 95 - Números triangulares



- a) Determine uma expressão algébrica para o n -ésimo número triangular.
- b) Prove que a diferença positiva entre os quadrados de dois números triangulares consecutivos é um cubo perfeito.
- c) Prove, geometricamente, que a soma dos cubos dos n primeiros números inteiros positivos é igual ao quadrado da soma desses números.

Resoluções:

- a) Na sequência de números triangulares, $a_1 = 1$, $a_2 = 3 = 1 + 2$, $a_3 = 6 = 1 + 2 + 3$, ..., o n -ésimo termo é: $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Daí,

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ver teorema 5})$$

- b) **Prova:** Sendo a_k e a_{k+1} dois números triangulares consecutivos, pelo item a, temos:

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = \left[\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{k(k+1)}{2} \right]^2$$

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = \left[\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} + \frac{k(k+1)}{2} \right] \cdot \left[\frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} \right]$$

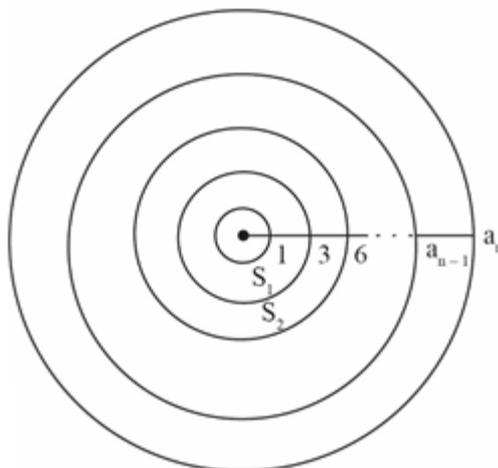
$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = \left[\frac{(k+1) \cdot (k+2+k)}{2} \right] \cdot \left[\frac{(k+1)(k+2-k)}{2} \right]$$

$$a_{k+1}^2 - a_k^2 = \frac{(k+1) \cdot 2 \cdot (k+1)}{2} \cdot \frac{(k+1) \cdot 2}{2}$$

$$\text{Portanto, } a_{k+1}^2 - a_k^2 = (k+1)^3. \quad \blacksquare$$

c) **Prova:** Consideremos n circunferências concêntricas cujos respectivos raios são os n primeiros números triangulares.

Figura 96 – Círculos circuncêntricos



(Círculos concêntricos, cujos raios são os n primeiros números triangulares)

Fonte: elaborada pelo autor

Sejam S_1, S_2, \dots, S_{n-1} as áreas das coroas circulares, temos:

Área do círculo maior = $\pi \cdot 1^2 + S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}$, ou seja,

$$\pi \cdot a_n^2 = \pi \cdot 1^2 + (\pi \cdot 3^2 - \pi \cdot 1^2) + (\pi \cdot 6^2 - \pi \cdot 3^2) + \dots + (\pi \cdot a_n^2 - \pi \cdot a_{n-1}^2)$$

Dividindo ambos os membros por π , obtemos:

$$a_n^2 = 1^3 + (3^2 - 1^2) + (6^2 - 3^2) + \dots + (a_n^2 - a_{n-1}^2), \text{ ou seja:}$$

$$a_n^2 = 1^3 + (a_2^2 - a_1^2) + (a_3^2 - a_2^2) + \dots + (a_n^2 - a_{n-1}^2)$$

Daí, pelos itens **a** e **b**, concluímos que:

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

■

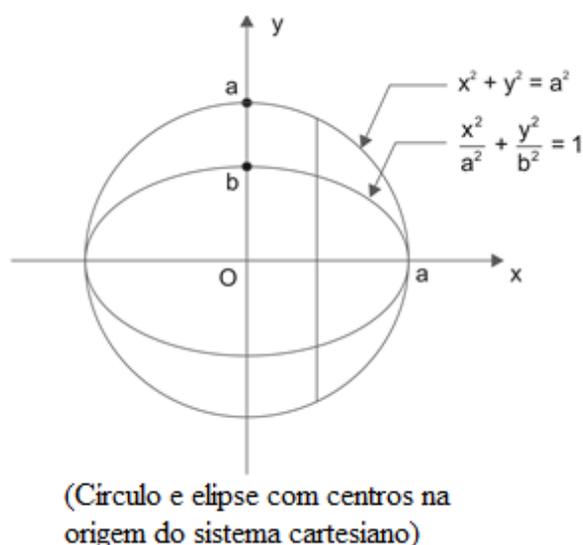
5.5 ÁREA LIMITA PELA ELIPSE

O cálculo da área da região limitada pela elipse fica muito simples quando se aceita o seguinte princípio de Cavalieri como evidente: “se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante”.

Consideremos a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$, e a circunferência $x^2 + y^2 = a^2$,

referidas ao mesmo sistema de coordenadas retangulares.

Figura 97 – círculo e elipse



Fonte: elaborada pelo autor

Para o círculo, temos $y_1 = (a^2 - x^2)^{1/2}$; e para a elipse temos $y_2 = \frac{b}{a} \cdot (a^2 - x^2)^{1/2}$.

Daí, temos que a razão entre duas ordenadas correspondentes quaisquer da elipse e do círculo é $\frac{b}{a}$, ou seja, a razão entre duas cordas verticais correspondentes da elipse e do círculo é a constante $\frac{b}{a}$. Logo, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que:

Área da elipse = $\frac{b}{a}$ da área do círculo

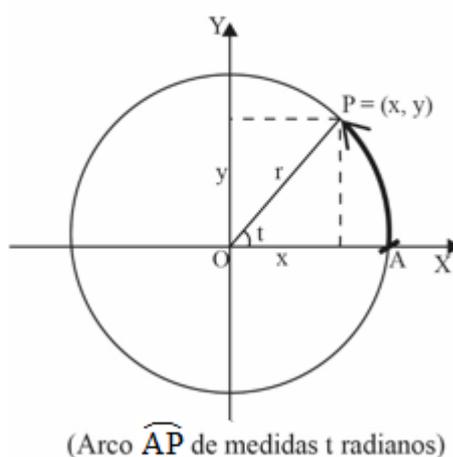
$$\text{Área da elipse} = \frac{b}{a} \cdot \pi a^2$$

$$\text{Área da elipse} = \pi ab$$

Outra prova para a área da região limitada pela elipse:

Daremos uma outra prova do cálculo da área limitada por uma elipse, utilizando as equações paramétricas da elipse e do círculo. Para uma melhor compreensão, convém relembrar aqui a parametrização do círculo e da elipse. Para isso, considere um círculo de centro na origem de um sistema de coordenadas usuais e de raio r . Considere também um ponto $P = (x, y)$ se deslocando sobre o círculo e seja t radianos o arco percorrido por P em t unidades de tempo, após P passar pela origem (A) dos arcos, conforme figura 98.

Figura 98 – Arco AP



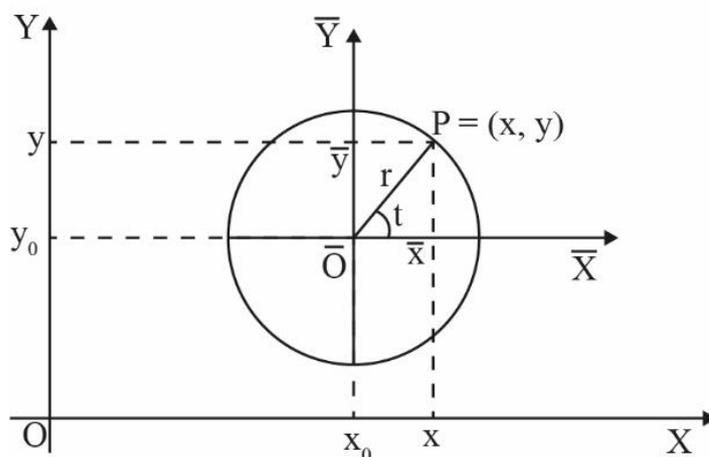
Fonte: elaborada pelo autor

Assim, as equações paramétricas do círculo são: $\begin{cases} x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$. De fato,

para qualquer t real, obtemos: $x^2 + y^2 = r^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2$.

Para o círculo com centro no ponto $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e raio r , usando uma translação, obtemos facilmente suas equações paramétricas. Veja:

Figura 99 - Círculo de raio r e centro no ponto (x_0, y_0)



Fonte: elaborada pelo autor

$$\text{Equações paramétricas no sistema } \bar{O}\bar{X}\bar{Y} : \begin{cases} \bar{x} = r \cdot \cos t \\ \bar{y} = r \cdot \text{sen } t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Equações paramétricas no sistema } OXY : \begin{cases} x = x_0 + \bar{x} \\ y = y_0 + \bar{y} \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

Assim, as equações paramétricas do círculo de equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ são:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cdot \cos t \\ y = y_0 + r \cdot \text{sen } t \end{cases}; t \in \mathbb{R}.$$

De fato, $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = (r \cdot \cos t)^2 + (r \cdot \text{sen } t)^2 = r^2$.

Observe agora a equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ou $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ de uma elipse com

centro na origem. Tomando $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right) = (x', y')$, os pares (x', y') satisfazem a equação

$(x')^2 + (y')^2 = 1$, ou seja, os pares (x', y') formam uma circunferência de raio 1 e com o mesmo centro da elipse. A equação da elipse é satisfeita, por exemplo, pelo par $(x, y) = (0, 3)$, e isso obriga o par $(x', y') = \left(\frac{0}{2}, \frac{3}{3}\right) = (0, 1)$ a satisfazer a equação da circunferência. Note:

$$\bullet \quad \left(\frac{0}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} (x, y) = (0, 3) \in \text{elipse} \\ \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{3}\right) = (0, 1) \in \text{circunferência} \end{cases}$$

De modo geral, dada a elipse de equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, temos que o par (x, y) pertence à elipse se, e somente se, o par $(x', y') = \left(\frac{x-x_0}{a}, \frac{y-y_0}{b}\right)$ pertence à circunferência de raio 1 e centro na origem. Nesse caso, temos as seguintes equações paramétricas para a circunferência:

$$\begin{cases} x' = \frac{x-x_0}{a} = 1 \cdot \cos t \\ y' = \frac{y-y_0}{b} = 1 \cdot \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Logo, as equações paramétricas da elipse são:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos t \\ y = y_0 + b \cdot \sin t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

Agora estamos fundamentados para fazer a outra prova da área da região limitada pela elipse. Dividiremos tal prova em dois exercícios resolvidos a seguir.

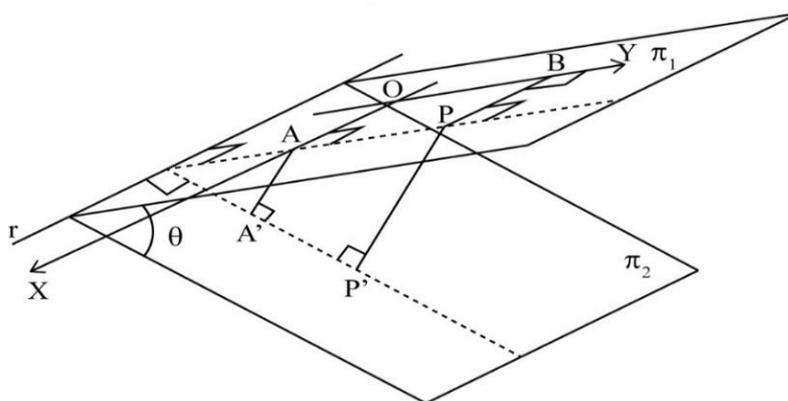
Exercício resolvido 1: Dois planos secantes $(\pi_1$ e $\pi_2)$ intersectam-se em r e formam entre si um ângulo de medida θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Sobre π_1 , considere um sistema de coordenadas cartesianas XOY de eixos perpendiculares, onde $\overrightarrow{OX} \parallel r$. Projetando-se ortogonalmente esse sistema sobre o plano π_2 , gera-se um novo sistema de coordenadas cartesianas $X'O'Y'$.

a) Um ponto P pertencente ao plano π_1 tem coordenadas $P = (x, y)$, no sistema XOY . Quais são as coordenadas da projeção ortogonal de P sobre π_2 , no sistema $X'O'Y'$?

b) Considerando um círculo em π_1 , cujo raio mede a , $a > 0$, qual é a figura formada pela projeção ortogonal desse círculo sobre o plano π_2 ?

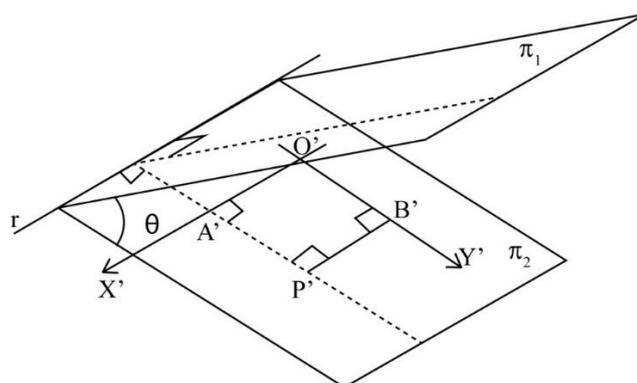
- a) **Resolução:** Sendo A e B as projeções ortogonais do ponto $P = (x, y)$ sobre os eixos \overrightarrow{OX} e \overrightarrow{OY} , respectivamente, temos que $\overline{PB} = \overline{OA} = x$ e $\overline{PA} = \overline{OB} = y$. Projetando ortogonalmente os pontos $P = (x, y)$, $A = (x, 0)$, $B = (0, y)$ e $O = (0, 0)$ do sistema XOY sobre o plano π_2 , obtemos, respectivamente, os pontos $P' = (x', y')$, $A' = (x', 0)$, $B = (0, y')$ e $O' = (0, 0)$ do sistema $X'O'Y'$.

Figura 100 – Sistema XOY sobre o plano π_1



Fonte: elaborada pelo autor

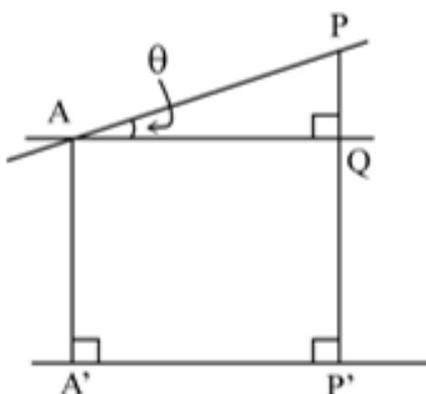
Figura 101 – Sistema $X'O'Y'$



Fonte: elaborada pelo autor

- i) Como $\overrightarrow{OA} \parallel r \parallel \overrightarrow{O'A'}$, $OAA'O'$ é um retângulo. Daí, $x' = \overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA} = x$.
- ii) No trapézio retângulo $AA'P'P$, traçando $\overrightarrow{AQ} \parallel \overrightarrow{A'P'}$, Q pertencente a PP' , temos:

Figura 102- Trapézio retângulo $AA'P'P$



Fonte: elaborada pelo autor

$$\cos \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}, \text{ em que } \overline{AQ} = \overline{A'P'} = \overline{O'B'} = y' \text{ e } \overline{AP} = \overline{OB} = y. \text{ Daí, } y' = y \cdot \cos \theta.$$

Assim, com base no exposto em (i) e (ii), o ponto $P = (x, y)$, coordenadas no sistema XOY , quando projetado ortogonalmente sobre o plano π_2 , sua projeção tem coordenadas

$P' = (x, y \cos \theta)$. Note que a primeira coordenada é preservada e a segunda é modificada de y para $y \cos \theta$.

b) **Resolução:** Considere o sistema XOY sobre o plano π_1 , em que a origem é o centro do círculo. Nesse sistema, o círculo terá equação $x^2 + y^2 = a^2$ e suas equações paramétricas serão:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \end{cases}; t \in \mathbb{R}. \text{ De acordo com o item (a) anterior, projetando ortogonalmente os}$$

pontos $P = (x, y)$ do círculo, no sistema XOY , obtemos os pontos $P' = (x', y') = (x, y \cos \theta)$,

no sistema $X'O'Y'$, sobre o plano π_2 . Assim, os pontos P' formaram sobre o plano π_2 uma figura cuja equações paramétricas serão

$$P' = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t \cdot \cos \theta).$$

Fazendo a constante $a \cdot \cos \theta = b$, temos que $b < a$, pois $0 < \cos \theta < 1$, uma vez que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. Daí, obtemos:

$$P' = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t)$$

Isso mostra que a projeção ortogonal do círculo de raio a , contido no plano π_1 , sobre o plano π_2 , é uma elipse de eixo focal $2a$ e eixo não focal $2b = 2a \cdot \cos \theta$, em que $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$. De fato,

$$\frac{(a \cdot \cos t)^2}{a^2} + \frac{(b \cdot \sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Exercício Resolvido 2: Mostre, usando o resultado do exercício resolvido 1 anterior, que a área limitada por uma elipse de semieixo focal de medida a e semieixo não focal de medida b , a e b numa mesma unidade de comprimento, é dada por πab .

Demonstração: De acordo com o exercício resolvido 1 anterior, supondo a elipse dada sobre o plano π_2 , ela será a projeção ortogonal de um círculo de raio a , contido em π_1 , onde os pontos $P = (x, y) = (a \cdot \cos t, a \cdot \sin t)$ do círculo, no sistema XOY , correspondem aos pontos $P' = (x', y') = (a \cdot \cos t, b \cdot \sin t)$ da elipse, no sistema $X'O'Y'$, em que $t \in \mathbb{R}$, $b = a \cdot \cos \theta$, $\theta = \angle(\pi_1, \pi_2)$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. De modo geral, do exercício resolvido 1, temos que as medidas x de segmentos do plano π_1 , paralelos ao eixo \overrightarrow{OX} do sistema XOY , quando projetados ortogonalmente sobre o plano π_2 , são preservadas, no sistema $O'X'Y'$. Já as medidas y de

segmentos paralelos ao eixo \overrightarrow{OY} , quando projetados ortogonalmente sobre o plano π_2 , são modificadas para $y \cdot \cos \theta$, em que θ é um ângulo agudo formado pelos planos π_1 e π_2 .

Posto isso, considere, sobre o círculo do plano π_1 , uma malha formada por quadrados, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados do sistema XOY e medem $\frac{1}{n}$.

Nesse caso, a projeção ortogonal da malha sobre o plano π_2 será formada por retângulos cujas dimensões são $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n} \cdot \cos \theta$. Sendo, então, $N(n)$ o número de quadrados da malha no interior do círculo (ou o número de retângulos no interior da elipse), temos que a área do círculo é aproximadamente igual a $N(n) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$; enquanto a área limitada pela elipse será

$N(n) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \theta$, aproximadamente. Assim, quando n tende a infinito, temos que:

- Área do círculo = $\pi a^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} N(n) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2$;

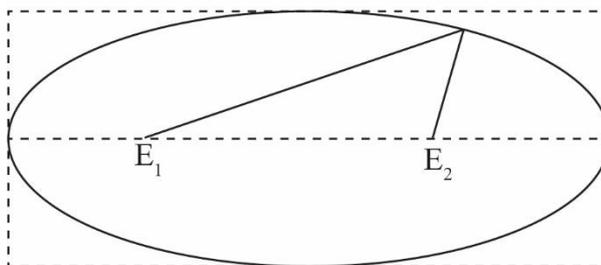
- Área limitada pela elipse = $\lim_{x \rightarrow \infty} N(n) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \cos \theta = \cos \theta \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} N(n) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \pi a^2 \cdot \cos \theta$.

$$\text{Daí, Área limitada pela elipse} = \pi a(a \cdot \cos \theta) = \pi ab$$

$$\text{Portanto, [Elipse]} = \pi ab$$

Aplicação 31: Usando uma corda de 10 metros de comprimento, cujas extremidades estão presas respectivamente em duas estacas, distantes 6 metros uma da outra, um jardineiro marca um terreno inscrito num retângulo, riscando o solo com um graveto. Para tanto, ele pressiona a corda com o graveto, mantendo-a esticada enquanto caminha girando em torno das estacas, riscando o solo. No interior do terreno marcado serão plantadas roseiras.

Determine, em m^2 , a área destinada à plantação de roseiras.

Figura 103 – Resolução da aplicação 31

Fonte: elaborada pelo autor

Resolução: A linha marcada é uma elipse cujo eixo focal mede $2a = 10$ m (comprimento da corda) e cuja distância focal mede $2c = 6$ m (distância entre as estacas). Assim, em metros, temos $a = 5$, $c = 3$ e semieixo não focal igual a $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{16} = 4$. Portanto, a área limitada pela elipse é $\pi ab = 20\pi$ m².

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A minha experiência como professor de matemática do ensino fundamental e médio, e o convívio com outros professores, mostram-me três níveis distintos de público no processo de ensino e aprendizado da matemática básica, no Brasil. Em um nível inferior, encontra-se um grupo de estudantes, notadamente de escolas públicas, em que o objetivo principal é tão somente conseguir um certificado de conclusão do ensino fundamental e/ou médio. Em um nível intermediário, temos, a meu ver, a grande maioria dos nossos estudantes e professores, onde o objetivo maior é o acesso a uma instituição de ensino superior e/ou uma melhor colocação no mercado de trabalho. Em um nível mais avançado, encontra-se um universo restrito de estudantes e professores, para os quais o objetivo maior e a curto prazo são as olimpíadas de matemática, estaduais, nacionais ou internacionais.

Boa parte daqueles que buscam tão somente a certificação, infelizmente, não atingem o objetivo, terminam por abandonar os estudos. Na sua grande maioria, essas pessoas são desfavorecidas pela sociedade. Sociedade esta, que, se fosse ideal, uma vez detectada uma criança ou jovem sem o devido estímulo e compromisso para com a sua educação integral, um núcleo específico de orientadores educacionais, professores e assistentes sociais, entraria imediatamente em ação, juntamente com a família do educando. Assim, danos futuros seriam evitados e toda a comunidade sairia engrandecida.

Para esse grupo de crianças e jovens que buscam tão somente uma certificação, sugiro que a sociedade empregue os melhores professores, educadores e assistentes sociais. Os mais doentes são os que necessitam dos melhores tratamentos e cuidados. Nesse contexto, o professor de matemática básica, com a devida qualificação, seria de muita valia. Com os conhecimentos contidos nessa dissertação, relativas a áreas, assim como os conhecimentos contidos em outros projetos mais completos e ousados, o professor de matemática básica estaria apto a, no mínimo, detectar e capacitar jovens talentos a resolverem problemas, não só na vida acadêmica, mas também na vida profissional deles, num futuro próximo.

Ilude-se o jovem estudante e o professor de matemática básica que, a pretexto de não perder tempo estudando algo que não lhes será útil nos exames prestados, evitam as demonstrações de teoremas fundamentais da matemática. Ao procederem assim, limitam-se a tão somente resolver situações-problema diversas. Ao passo que demonstrar um teorema, além de equivaler a resolver todas essas situações-problema diversas de maneira precisa,

consciente e segura, ainda nos fundamenta, deixando-nos aptos a adquirir outros conhecimentos. Essa pesquisa permite que o estudante e o professor do ensino médio inicie um trabalho de qualificação, no qual vários teoremas são demonstrados de maneira relativamente tranquila, utilizando áreas.

Para os jovens estudantes e professores já habituados com situações-problema olímpicas, essa pesquisa serve como leitura de revisão e/ou fixação.

Minha preocupação maior ao fazer essa pesquisa foi agregar num só trabalho conhecimentos suficientes para despertar no professor de matemática básica o interesse por seu engrandecimento quanto profissional. Outros trabalhos com o objetivo de engrandecer os nossos professores do ensino básico devem ser escritos, divulgados e agregados a esse. Somente com professores qualificados teremos estudantes do ensino básico capacitados e estimulados a seguir sua trajetória acadêmica e profissional sem interrupções danosas à sociedade.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, José et. al. **Área y volumen en la geometria elemental**. Buenos Aires: Red Olímpica, 2000.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria eucliana plana**. Fortaleza: SNM, 1995. (Coleção do Professor de Matemática).

CARNEIRO, Emanuel et al. **Olimpíadas Cearenses de Matemática 1981 a 2005**: nível fundamental. Fortaleza: Indústria Gráfica, 2006.

_____. **Olimpíadas cearenses de matemática 1981 a 2005**: nível médio. Fortaleza: Indústria Gráfica, 2006.

CARVALHO, Sônia Pinto de. **A área e o perímetro de um círculo**. 2011. 115f. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011. Disponível em: <<http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.02.pdf>>. Acesso em: 07 maio 2017.

CHOU, Shang-Ching; Xiao-Shan. **Machine Proofs in Geometry**. [S.l.]: World Scientific, 1994, v. 1.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**: contexto & aplicações. São Paulo: Ática, 2003.

DULCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. Campinas, SP: UNICAMP, 1997.

LIMA, Elon Lages. **Análise real**: funções de uma variável. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014, v.1. (Coleção do Professor de Matemática).

_____. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

_____. **Meu professor de matemática e outras histórias**. Rio de Janeiro: SBM, 1991. (Coleção do Professor de Matemática).

MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Geometria II**: métrica plana. 2. ed. Rio de Janeiro: F. Alves, 1990.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

_____. **Fundamentos de Cálculo**. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção PROFMAT).

SINGH, Simon. **O último teorema de Fermat**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

TAVARES, João Nuno. **Teorema de Pick**. Disponível em: <<http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/index.html>>. Acesso em: 20 mar. 2017.