



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**  
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**

**MARCELO DE CASTRO SOARES**

**NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS CONEXÕES**

**FORTALEZA-CEARÁ**

**2017**

MARCELO DE CASTRO SOARES

NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS CONEXÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

FORTALEZA – CEARÁ

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Soares, Marcelo de Castro .

Números Complexos e Algumas Conexões [recurso eletrônico] / Marcelo de Castro Soares. - 2017.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 48 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. João Montenegro de Miranda.

1. Números Complexos. 2. Raízes da Unidade. 3. Inversão. 4. Cônicas. 5. Euler. I. Título.

MARCELO DE CASTRO SOARES

NÚMEROS COMPLEXOS E ALGUMAS CONEXÕES

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática.

Aprovada em: 26, 07, 2017

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. João Montenegro de Miranda  
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. João Marques Pereira  
Universidade Estadual do Ceará – UECE



Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes  
Universidade Federal do Ceará – UFC

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Criador do Cosmos e de todo o infinito, com toda sua magnificência e superioridade, por sua bondade sem fim. Sem sua permissão Senhor, nada disso seria possível. Louvado seja eternamente O Senhor, Criador de todo o universo. A meus pais e aos meus filhos dedico este trabalho. Vocês são a razão do meu viver. Amo vocês.

## RESUMO

Ao ter o primeiro contato com números complexos, o estudante tem como ênfase as propriedades do corpo  $\mathbb{C}$ . Desenvolvendo a álgebra dos complexos tem-se a sensação de que tudo funciona como os números reais, entretanto quando o estudante olhar com mais cuidado existem várias diferenças. Depois de estudar tantas propriedades, devemos procurar onde ocorrem as aplicações. Este trabalho tem como objetivo mostrar algumas dessas diferenças e onde ocorrem algumas dessas aplicações, a proposta deste texto é que seja uma leitura dinâmica e de rápida assimilação.

**Palavras-chave:** Números complexos. Semelhança de triângulos. Funções complexas. Inversão. Cônicas. Euler.

## ABSTRACT

. When having the first contact with complex numbers, the student emphasizes the properties of the body  $\mathbb{C}$ . Developing the algebra of the complexes has the sensation that everything works like the real numbers, however when the student looks more carefully there are several differences . After studying so many properties, we must look for where applications occur. This paper aims to show some of these differences and where some of these applications occur the proposal of this text is that it be a dynamic reading and rapid assimilation.

**Keywords:** Complex Numbers. Equation of the line. Similarity of Triangles. Roots of Unity. Complex Functions. Inversion. Logarithm. Exponential. Trigonometric Properties. Conical.Euler.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 –</b>	<b>Reta determinada por um ponto e uma direção.....</b>	<b>11</b>
<b>Figura 2 –</b>	<b>Reta determinada por dois pontos.....</b>	<b>12</b>
<b>Figura 3 –</b>	<b>Números complexos perpendiculares.....</b>	<b>13</b>
<b>Figura 4 –</b>	<b>A soma de dois números complexos.....</b>	<b>15</b>
<b>Figura 5 –</b>	<b>Rotação de um número complexo.....</b>	<b>15</b>
<b>Figura 6 –</b>	<b>A multiplicação de dois números complexos.....</b>	<b>16</b>
<b>Figura 7 –</b>	<b>O problema do tesouro.....</b>	<b>17</b>
<b>Figura 8 –</b>	<b>Teorema de Ptolomeu- Euler. ....</b>	<b>18</b>
<b>Figura 9 –</b>	<b>Problema IMO. ....</b>	<b>19</b>
<b>Figura 10 –</b>	<b>Produto de distâncias. ....</b>	<b>20</b>
<b>Figura 11 –</b>	<b>Construção de um hexágono. ....</b>	<b>21</b>
<b>Figura 12 –</b>	<b>Triângulo Equilátero. ....</b>	<b>22</b>
<b>Figura 13 –</b>	<b>A soma das distância de um ponto do círculo aos vértices. ....</b>	<b>23</b>
<b>Figura 14 –</b>	<b>Potências de um número. ....</b>	<b>24</b>
<b>Figura 15 –</b>	<b>Triângulos com orientações naturais e reversas.....</b>	<b>25</b>
<b>Figura 16 –</b>	<b>Inversão de números. ....</b>	<b>26</b>
<b>Figura 17 –</b>	<b>Triângulos reversos. ....</b>	<b>27</b>
<b>Figura 18 –</b>	<b>A inversão transforma retas em círculos.....</b>	<b>28</b>
<b>Figura 19 –</b>	<b>A inversão transforma círculos em círculos.....</b>	<b>29</b>
<b>Figura 20 –</b>	<b>Ptolomeu-Euler.....</b>	<b>30</b>
<b>Figura 21 –</b>	<b>Os três pares de semelhanças. ....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 22 –</b>	<b>A recíproca de Ptolomeu-Euler.....</b>	<b>32</b>
<b>Figura 23 –</b>	<b>A espiral quadrática. ....</b>	<b>33</b>
<b>Figura 24 –</b>	<b>Retas verticais e parábolas. ....</b>	<b>34</b>
<b>Figura 25 –</b>	<b>Círculos e elipses. ....</b>	<b>35</b>
<b>Figura 26 –</b>	<b>Parábolas e retas horizontais.....</b>	<b>36</b>
<b>Figura 27 –</b>	<b>Parábola. ....</b>	<b>37</b>
<b>Figura 28 –</b>	<b>Parametrização da elipse em coordenadas polares. ....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 29 –</b>	<b>Hipérbole parametrizada.....</b>	<b>41</b>
<b>Figura 30 –</b>	<b>Parábola parametrizada.....</b>	<b>41</b>
<b>Figura 31 –</b>	<b>A exponencial, retas horizontais e semi retas.....</b>	<b>42</b>

<b>Figura 32 -</b>	<b>A exponencial, retas verticais e círculos.....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 33 -</b>	<b>A transformação <math>sen(z)</math>, segmento horizontal e arco elíptico. ....</b>	<b>44</b>
<b>Figura 34 -</b>	<b>A transformação <math>sen(z)</math>, retas verticais e arcos hiperbólicos. ....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 35 -</b>	<b>O logaritmo principal e uma reta horizontal.....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 36 -</b>	<b>Os logaritmos negativos e retas imaginárias.....</b>	<b>50</b>
<b>Figura 37 -</b>	<b>O paralelepípedo de Klaner.....</b>	<b>54</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>GEOMETRIA.....</b>	<b>11</b>
2.1	EQUAÇÃO DA RETA PASSANDO POR $w$ , DADA UMA DIREÇÃO $v$ ...	11
2.2	EQUAÇÃO DA RETA, DADOS DOIS PONTOS $a, b \in \mathbb{C}$ .....	12
2.3	CONDIÇÃO DE PERPENDICULARISMO .....	13
2.4	FUNÇÕES ELEMENTARES.....	14
2.5	O PROBLEMA DOS PIRATAS MATEMÁTICOS.....	16
2.6	PTOLOMEU- EULER.....	17
2.7	PROBLEMA SELEÇÃO IMO (1992) .....	19
2.8	PROBLEMA (PUTNAM 55) .....	20
2.9	PROBLEMA (PUTNAM 67).....	21
2.10	PROBLEMA 10 (OBM) .....	22
2.11	BINÔMIO DE NEWTON E MOIVRE.....	24
2.12	SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS .....	25
2.13	INVERSÃO.....	26
2.14	ALGUMAS TRANSFORMAÇÕES.....	27
2.15	CÔNICAS-.....	36
2.16	PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS.....	38
2.17	EXPONENCIAL.....	42
2.18	FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	43
2.19	POTÊNCIAS E LOGARITMOS COMPLEXOS.....	47
<b>3</b>	<b>COMBINATÓRIA.....</b>	<b>51</b>
3.1	RAÍZES DA UNIDADE E .....	51
3.2	TEOREMA DA MULTISECÇÃO.....	52
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>56</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>57</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A natureza dos números complexos começou a ser investigada em meados do século dezesseis. Os matemáticos, inicialmente, começaram a especular a existência de números imaginários devido as equações quadráticas que não possuíam soluções plausíveis. Daí por diante, percebeu-se que eram inumeráveis as aplicações destes números e que eles surgem em diversas áreas, não só da matemática como em outras áreas da ciência. Alguns nomes relevantes são o de Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576), Bombeli (1526-1573), Euler (1707-1783) e Gauss (1777-1855). Atualmente os números complexos têm várias aplicações nas áreas de geometria, combinatória e na física são ferramentas muito importante nas áreas de eletricidade e na modelagem da mecânica dos fluidos.

### **\* Leonhard Euler \* (Um gigante entre nós)**

Leonhard Euler nasceu na Basileia, Suíça, em 1707. Ensaçou carreira no campo da teologia, mas encontrou sua verdadeira vocação na matemática, onde seu pai, um pastor calvinista, ensinou-lhe os fundamentos da matéria. O pai, que havia estudado com Jakob Bernoulli, conseguiu que o filho fosse estudar com Johann Bernoulli. Em 1727, com 20 anos, os irmãos Bernoulli, que pertenciam à academia de São Petesburgo, recém-criada por Pedro, o Grande, conseguiram que ele fosse indicado membro da instituição e com a volta de Daniel Bernoulli ocupando a cadeira de matemática da Universidade da Basileia, Euler tornou-se o cabeça da seção de matemática da Academia. Após 14 anos dignificando a academia de São Petesburgo, Euler chefiou a seção de matemática da Academia de Berlim, onde ficou por 25 anos, onde alcançou alto prestígio.

Em 1766 aceitou o convite de Catarina, a Grande, para retornar à academia de São Petesburgo, onde ficaria 17 anos seguintes da sua vida. Morreu subitamente em 1783 com 76 anos de idade. Interessante que em toda sua carreira, longa e variada, nunca tenha assumido um cargo de professor. Apesar da perda da visão direita desde 1735, Euler era um escritor excelente no ramo da matemática. Teve a infelicidade de perder completamente a visão quando retornou a São Petesburgo, mas não foi empecilho. Euler tinha memória fenomenal e poder de concentração incomum, continuando seu trabalho criativo com a ajuda de um secretário que anotava suas ideias faladas ou a giz numa lousa grande. Publicou, entre livros e artigos, 530 trabalhos, deixando, ao morrer, muitos manuscritos que enriqueceram as publicações da Academia de São Petesburgo por mais quarenta e sete anos.

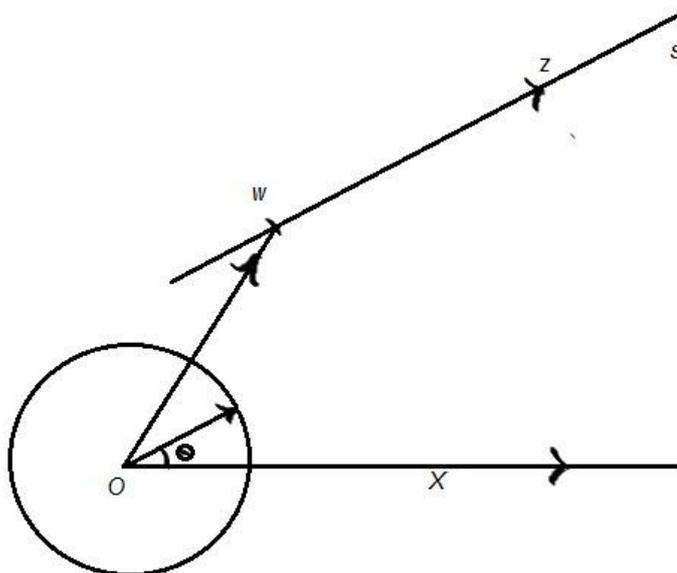
## 2 GEOMETRIA

### 2.1 EQUAÇÃO DA RETA PASSANDO POR $w$ , DADA UMA DIREÇÃO $v$ .

Sejam  $w$  e  $v \in \mathbb{C}$ . Mostrar que a equação da reta que passa por  $w$ , na direção de  $v$  é dada pela expressão  $z\bar{v} - \bar{z}v + \bar{w}v - w\bar{v} = 0$ .

Demonstração: Seja  $s$  a reta que passa por  $w$ , na direção de  $v$ . Sem perda de generalidade podemos supor que  $v = e^{i\theta}$ , para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Figura 1 - Reta determinada por um ponto e uma direção.**



Fonte: elaborada pelo autor

Primeiramente devemos notar que,  $z - w = ke^{i\theta}$  para algum  $k \in \mathbb{R}$ . Dessa forma obtemos que,  $\frac{z-w}{e^{i\theta}} = k = \bar{k} = \frac{\bar{z}-\bar{w}}{e^{-i\theta}} \Rightarrow (z-w)(e^{-i\theta}) = (\bar{z}-\bar{w})(e^{i\theta}) \Rightarrow ze^{-i\theta} - we^{-i\theta} = \bar{z}e^{i\theta} - \bar{w}e^{i\theta} \Rightarrow ze^{-i\theta} - we^{-i\theta} - \bar{z}e^{i\theta} + \bar{w}e^{i\theta} = 0 \Rightarrow ze^{-i\theta} - \bar{z}e^{i\theta} + \bar{w}e^{i\theta} - we^{-i\theta} = 0$ .

Note que essa equação é equivalente a  $z\bar{v} - \bar{z}v + w\bar{v} - \bar{w}v = 0$ , para todo  $v \in \mathbb{C}$ . Isso ocorre através da multiplicação da expressão encontrada pelo número  $|v|$ , já que  $v = |v| \cdot e^{i\theta}$  para algum  $\theta \in \mathbb{R}$ .

Exemplo. Sejam  $w = 2 + 5i$  e  $v = 4 - 3i$ , números complexos. Determine a equação da reta que passa por  $w$  na direção de  $v$ .

Solução: Vamos calcular o produto de  $w$  por  $\bar{v}$ . Temos que  $w \cdot \bar{v} = (2 + 5i)(4 + 3i) \Rightarrow w \cdot \bar{v} = 8 + 20i + 6i - 15 = -7 + 26i$ . Portanto,  $\bar{w} \cdot v = -7 - 26i$ , ou seja,  $\bar{w}v - w\bar{v} =$

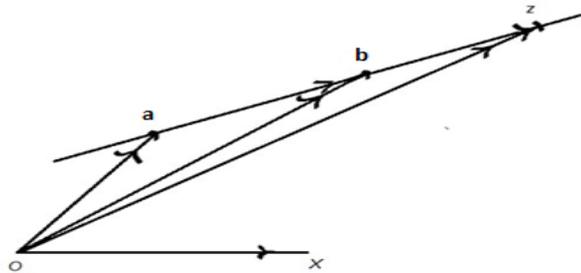
$-7 - 26i + 7 - 26i = -52i$ . Pelo que acabamos de mostrar a equação da reta que satisfaz as condições é dada por  $z(4 + 3i) - \bar{z}(4 - 3i) - 52i = 0$ .

## 2.2 EQUAÇÃO DA RETA, DADOS DOIS PONTOS $a, b \in \mathbb{C}$ .

Dados dois pontos  $a, b \in \mathbb{C}$ . Mostrar que a equação da reta com variável  $z \in \mathbb{C}$ , passando pelos pontos  $a, b$  é dada pela expressão  $z\bar{w} - \bar{z}w + 2\text{Im}(\bar{a}b) = 0$ , onde  $w = b - a$ .

Demonstração: Seja  $r$  a reta que passa pelos pontos  $a, b$ .

**Figura 2 - Reta determinada por dois pontos.**



Fonte: elaborada pelo autor

Seja  $z$  um ponto da reta  $r$ . Em termos de vetores temos que existe um  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\overrightarrow{AZ} = k \overrightarrow{AB}$ , ou seja,  $z - a = k(b - a)$ . Pelas propriedades do conjugado temos que  $\overline{z - a} = \bar{z} - \bar{a}$  e que  $\bar{k} = k$  para todo  $k \in \mathbb{R}$ . Assim,  $\frac{z-a}{b-a} = k = \bar{k} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} \Rightarrow (z-a)(\bar{b}-\bar{a}) = (\bar{z}-\bar{a})(b-a) \Rightarrow z\bar{b} - z\bar{a} - a\bar{b} + a\bar{a} = \bar{z}b - \bar{z}a - \bar{a}b + \bar{a}a \Rightarrow z\bar{b} - z\bar{a} - a\bar{b} - \bar{z}b + \bar{z}a + \bar{a}b = 0 \Rightarrow z(\bar{b} - \bar{a}) - \bar{z}(b - a) + \bar{a}b - \bar{b}a$ . Outra maneira de observar isso é notar que a direção dada é  $v = b - a$ .

Exemplo: Sejam  $b = 3 + 4i$  e  $a = 2 + 3i$ . Determinar a equação da reta, com coordenadas complexas, que passa pelos pontos dados.

Solução: Primeiramente,  $b - a = 1 + i \Rightarrow \bar{b} - \bar{a} = 1 - i$ . Agora calculando o produto temos que  $a\bar{b} = 6 - 8i + 9i + 12 = 18 + i \Rightarrow \bar{a}b = 18 - i$ . Pelo que acabamos de provar conclui-se que a equação da reta é  $z(1 - i) - \bar{z}(1 + i) + 2i = 0$ .

Problema. Seja  $a \in \mathbb{C}$ . Mostre que qualquer ponto pertencente a reta que passa por  $a$  e  $\bar{a}$  tem a parte real constante.

Solução: Pelo resultado anterior temos que  $z(a - \bar{a}) - \bar{z}(\bar{a} - a) + 2i\text{Im}(a^2) = 0$  é a equação da reta que passa por  $a$  e seu conjugado. Assim,  $(\bar{a} - a)(z + \bar{z}) = -2i\text{Im}(a^2)$ , por outro lado temos que  $(\bar{a} - a) = -2i\text{Im}(a)$  e  $(z + \bar{z}) = 2\text{Re}(z) \Rightarrow (2i\text{Im}(a))(2\text{Re}(z)) = 2i\text{Im}(a^2) \Rightarrow \text{Re}(z) = \frac{\text{Im}(a^2)}{2\text{Im}(a)}$ .

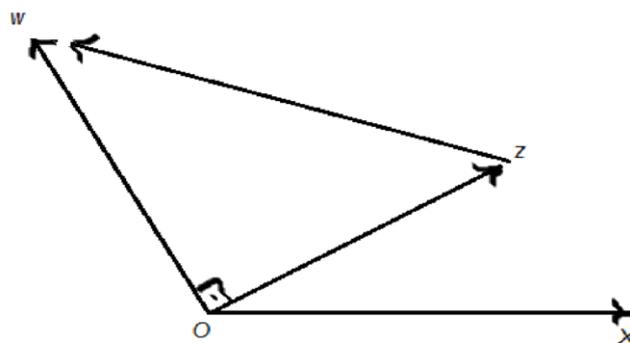
### 2.3 CONDIÇÃO DE PERPENDICULARISMO PARA NÚMEROS COMPLEXOS.

Agora a pergunta é, qual a condição de perpendicularismo entre dois números complexos? De forma mais clara dados  $z, w \in \mathbb{C}$ , qual a condição necessária e suficiente para que o ângulo entre eles seja de  $90^\circ$ , ou seja, para que  $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w) = \frac{\pi}{2}$ ? Vejamos.

Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ . Prove que dois números são perpendiculares se, e somente se, é válida a relação  $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ . Ou seja,  $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ .

Demonstração: Sejam  $z, w \in \mathbb{C}$ . Temos que existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que  $z = |z|e^{i\alpha}$  e  $w = |w|e^{i\beta}$ . Dessa forma  $z \perp w$  se, e somente se,  $\frac{w}{z} = \frac{|w|e^{i\beta}}{|z|e^{i\alpha}} = k \cdot e^{i(\beta-\alpha)} = k \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{w}{z} = k \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = ik \Leftrightarrow \frac{w}{z}i = -k = \overline{-k} = -i\frac{\bar{w}}{\bar{z}} \Leftrightarrow \frac{w}{z} = -\frac{\bar{w}}{\bar{z}} \Leftrightarrow z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ .

**Figura 3 - Números complexos perpendiculares.**



Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo. Decida se os pares de números abaixo são perpendiculares.

- $z = 2 + 3i$  e  $w = 7 - 2i$ .
- $z = 5 + 2i$  e  $w = 2 - 5i$ .

Solução: a) Aplicando o resultado obtido temos que,  $z\bar{w} = (2 + 3i)(7 + 2i) = 14 + 4i + 21i - 6 = 8 + 25i$ . Por outro lado,  $\bar{z}w = (2 - 3i)(7 - 2i) = 14 - 4i - 21i - 6 = 8 - 25i$ , dessa forma temos que  $z\bar{w} + \bar{z}w = 8 + 25i + 8 - 25i = 16$ . Os números não são perpendiculares. Para o item b) temos, de forma análoga, que  $z\bar{w} = (5 + 2i)(2 + 5i) = 10 + 25i + 4i - 10 = 29i$ . Calculando  $\bar{z}w = (5 - 2i)(2 - 5i) = 10 - 25i - 4i - 10 = -29i$ , assim  $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ . Estes números são perpendiculares.

Problema. Considere o triângulo retângulo  $\Delta 0wz$ , onde  $Arg(w) - Arg(z) = \frac{\pi}{2}$ . Mostre que é válida a seguinte expressão  $|w - z|^2 = |w|^2 + |z|^2$ .

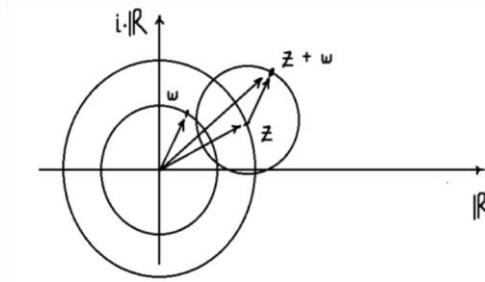
Solução: Desenvolvendo o termo  $|w - z|^2$  temos que,  $|w - z|^2 = (w - z)(\bar{w} - \bar{z}) = |w|^2 - z\bar{w} - \bar{z}w + |z|^2$ . Pelo resultado anterior temos que  $z\bar{w} + \bar{z}w = 0$ , ou seja, é válida a seguinte expressão  $|w - z|^2 = |w|^2 + |z|^2$ . Esse resultado nada mais é do que o teorema de Pitágoras, em termos complexos.

## 2.4 FUNÇÕES ELEMENTARES.

O que significa deslocar um ponto  $z$ , uma quantidade  $r = |w|$ , na direção  $\theta = Arg(w)$  com relação ao eixo fixado?

Seja  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f_w(z) = z + w$ . Esta função translada o ponto  $z$  para o ponto  $z + w$ , de forma semelhante, o aspecto vetorial nos diz que devemos traçar a diagonal do paralelogramo. Note que a função  $f_w(z)$  pode ser reescrita como  $f_w(z) = z + re^{i\theta}$ , assim caracterizamos a translação do ponto  $z$ .

**Figura 4 - A soma de dois números complexos.**

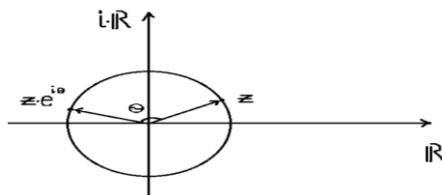


Fonte: elaborada pelo autor

Fixado um eixo de coordenadas, o que significa rotacionar o ponto  $z$ , um ângulo  $\theta$ ?

Temos aqui outra função elemental. Definindo  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , como  $f_{\theta}(z) = z \cdot e^{i\theta}$

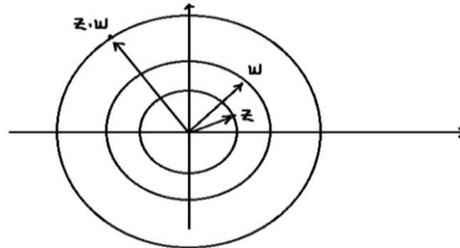
**Figura 5 - Rotação de um número complexo.**



Fonte: elaborada pelo autor

Com isso temos a interpretação geométrica da multiplicação de dois números  $z, w$ . De fato,  $z \cdot w = z \cdot |w|e^{i\theta} = |z|e^{i\alpha} \cdot |w|e^{i\theta}$ , onde  $\theta = \text{Arg}(w)$  e  $\alpha = \text{Arg}(z)$ . Daí obtemos que, ao multiplicar dois números complexos, estamos na verdade é dilatando ou contraindo o vetor e rotacionando-o simultaneamente.

**Figura 6 - A multiplicação de dois números complexos.**



Fonte: elaborada pelo autor

## 2.5 O PROBLEMA DOS PIRATAS MATEMÁTICOS.

Dois piratas pretendem enterrar um tesouro. Eles pretendem voltar em alguns anos. Para executar essa tarefa eles tomam como referência duas pedras e uma árvore. Anotam os seguintes passos.

Passo 1: Partindo da árvore, ir em linha reta até a pedra a sua direita, contando os passos. Depois virar exatamente  $90^\circ$  para a esquerda, ao chegar na pedra. Em seguida ande o mesmo tanto de passos que foram contados, em linha reta. Marque este ponto.

Passo 2: Partindo da árvore, ir em linha reta até a pedra a sua esquerda, contando os passos. Depois virar exatamente  $90^\circ$  para a direita, ao chegar na pedra. Em seguida ande o mesmo tanto de passos que foram contados, em linha reta. Marque este outro ponto.

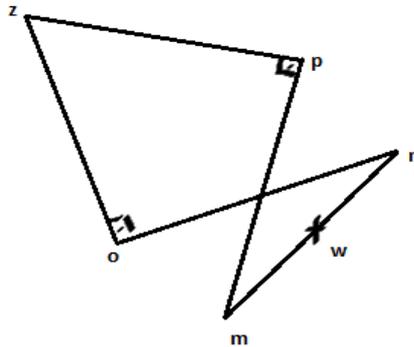
Passo 3: Do segmento determinado pelos pontos encontrados, marque o ponto médio. Lá estará o tesouro.

Passados alguns anos, eles voltaram para recuperar o tesouro. Mas não existe nem vestígio da árvore. Porém as pedras estão lá, intactas. Um dos piratas sugere tomar um ponto qualquer como o referencial “árvore”.

Problema. Prove que o local em que o tesouro foi escondido não depende do referencial escolhido.

Solução: Sem perda de generalidade podemos tomar uma pedra como origem. Mais especificamente, sejam  $O = \text{pedra 1}$ ,  $p = \text{pedra 2}$  e  $z = \text{referencial}$ . Estas serão as coordenadas dos pontos dados. Sejam  $m$  e  $n$  os pontos determinados pelos passos efetuados.

**Figura 7 - O problema do tesouro.**



Fonte: elaborada pelo autor

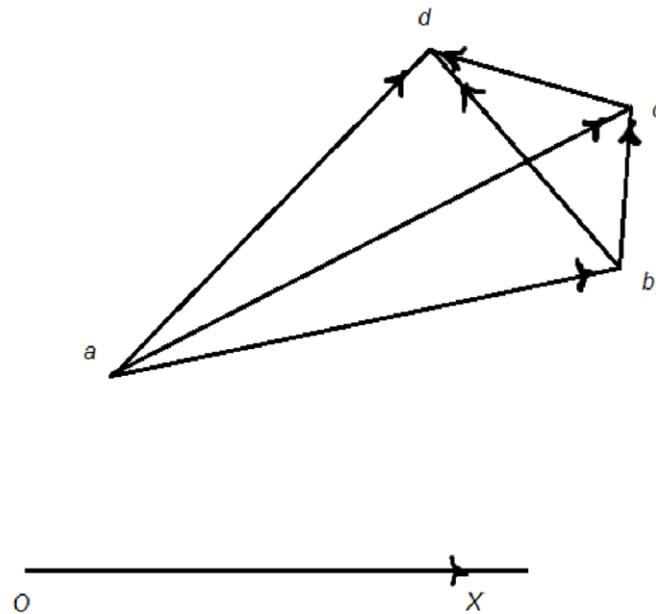
Vejamos que partindo de  $p$  temos que  $m - p = (z - p)i \Leftrightarrow m = (z - p)i + p$ . Por outro lado,  $n = \frac{z}{i} = -iz$ . Para calcular o ponto médio, que é o passo três, basta fazer uma “média aritmética complexa”. Assim,  $w = \frac{m+n}{2} = \frac{(z-p)i+p-iz}{2} = \frac{p(1-i)}{2}$ , ou seja, o ponto em que o tesouro foi enterrado não depende do referencial “árvore”, somente das pedras.

## 2.6 PTOLOMEU- EULER

Prove que para quaisquer quatro  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{C}$ , temos que  $|b - a| \cdot |d - c| + |c - b| \cdot |d - a| \geq |d - b| \cdot |c - a|$ , com igualdade ocorrendo se e somente se estes quatro pontos são concíclicos.

Demonstração: Sejam  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{C}$ . Aqui estamos fazendo a associação  $\mathbb{C} \ni a = A \in \mathbb{R}^2$ , os demais são análogos.

**Figura 8 - Teorema de Ptolomeu- Euler.**



Fonte: elaborada pelo autor

Primeiramente, vamos desenvolver  $(b - a)(d - c) + (c - b)(d - a) = a(b - d) - c(b - d) = (d - b)(c - a)$

Ou seja, é válida a igualdade  $(b - a)(d - c) + (c - b)(d - a) = (d - b)(c - a)$ . Usando a desigualdade triangular que afirma que dados  $w, z \in \mathbb{C}$ , tem-se que  $|w| + |z| \geq |w + z|$ . Para deduzir isso basta notar que,  $|w + z|^2 = |w|^2 + |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w \cdot z) \leq |w|^2 + |z|^2 + 2|w||z| = (|w| + |z|)^2$ . Daí obtemos que,

$$\begin{aligned} |(b - a)(d - c) + (c - b)(d - a)| &\geq |(d - b)(c - a)| \Leftrightarrow \\ |(b - a)||d - c| + |(c - b)||d - a| &\geq |(d - b)||c - a| \Leftrightarrow \\ |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| &\geq |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \end{aligned}$$

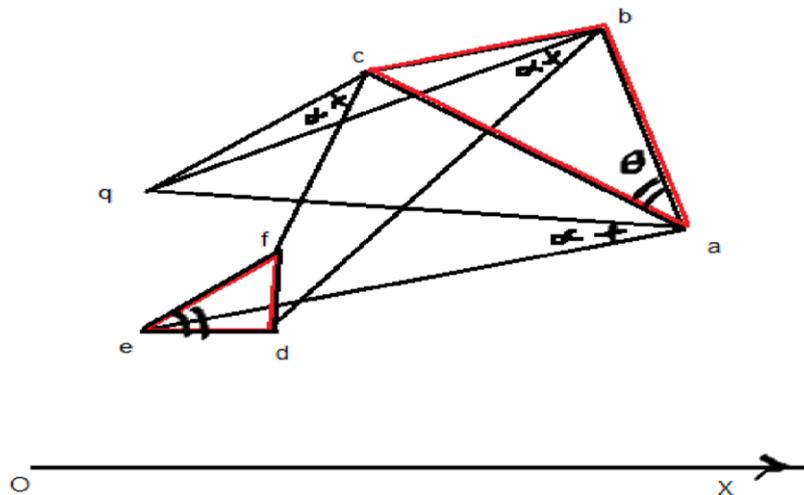
Temos que mostrar que eles serão concíclicos, se e somente se, for válida a igualdade. Deixaremos essa tarefa para quando tivermos definido a transformação inversão.

## 2.7 PROBLEMA SELEÇÃO IMO (1992)

A área do polígono  $[A_1 A_2 \dots A_n]$  é  $S$ . São dados um ângulo  $\alpha$  e um ponto  $Q$ . Rodemos  $Q - A_k$  de um ângulo  $\alpha$  no sentido anti-horário ao redor de  $A_k$ , para encontrar um ponto  $P_k$ . Ache a área de  $[P_1 P_2 \dots P_n]$ .

Solução: Inicialmente iremos analisar o caso do polígono ser um triângulo. Seja  $[ABC]$  o triângulo de área  $S$  e  $[EDF]$  triângulo obtido após rotação, sendo sua área  $S'$ . Em termos de complexos, cada vértice  $A, B$  e  $C$  será representado por  $a, b$  e  $c$ , conseqüentemente cada vértices  $D, E$  e  $F$  será representado por  $d, e$  e  $f$ .

Figura 9 - Problema IMO.



Fonte: elaborada pelo autor

Note que para girar um “vetor”, devemos multiplicar esse número complexo por  $e^{i\alpha}$ , assim temos as seguintes igualdades:

$$\text{i) } e - a = (q - a) e^{i\alpha}, \text{ ii) } d - b = (q - b) e^{i\alpha}, \text{ iii) } f - c = (q - c) e^{i\alpha}$$

Por outro lado, podemos expressar a área do triângulo  $[ABC]$  como  $S = |c - a| \cdot |b - a| \cdot \text{sen}\theta$  e a área do triângulo  $[EDF]$  por  $S' = |f - e| \cdot |d - e| \cdot \text{sen}\theta$ . Desenvolvendo as equações de maneira combinada obtemos, por i) e iii), que

$$(f - c) = (q - a) e^{i\alpha} - (q - c) e^{i\alpha} = e^{i\alpha} (c - a) \Rightarrow f - e = (c - a) (1 - e^{i\alpha})$$

De maneira análoga, por i) e ii) obtemos que,

$$d - b - (e - a) = (q - b) e^{i\alpha} - (q - a) e^{i\alpha} \Rightarrow d - e = (b - a) (1 - e^{i\alpha}).$$

Agora, substituindo em  $S'$  obtemos,

$$S = |f - e| \cdot |d - e| \cdot \text{sen}(\theta) = |(c - a)(1 - e^{i\alpha})| \cdot |(b - a)(1 - e^{i\alpha})| \cdot \text{sen}(\theta) \Rightarrow$$

$$|c - a| \cdot |b - a| \cdot \text{sen}(\theta) \cdot |(1 - e^{i\alpha})|^2 = S \cdot (1 - e^{i\alpha})(1 - e^{-i\alpha}) = S(2 - 2 \cos(\alpha)) \Rightarrow$$

$$S = \frac{S'}{2 - 2 \cos(\alpha)}$$

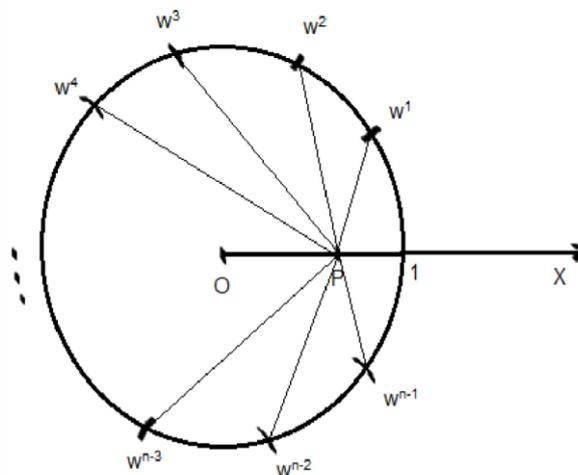
$S' = S(2 - 2 \cos(\alpha))$ . Para a generalização, basta agora, decompor o polígono em uma quantidade finita de triângulos e aplicar o resultado obtido.

## 2.8 PROBLEMA (PUTNAM 55)

Seja  $[A_1 A_2 \dots A_n]$  um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio  $r$  e o centro  $O$ .  $P$  é um ponto sobre  $\overrightarrow{OA_1}$ . Mostre que  $\prod_{k=1}^n |PA_k| = |OP^n - r^n|$ .

Solução:

**Figura 10 - Produto de distâncias.**



Fonte: elaborada pelo autor

Façamos corresponder cada vértice do polígono, uma raiz da unidade e podemos supor o raio unitário, a menos de dilatação. O ponto  $P$  será denotado por  $p$ . Assim para cada  $A_k$ , corresponde ao número complexo  $w^k = e^{ik\theta}$ , para  $\theta = \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{R}$ . Agora o problema se reduz a

mostrar que  $\prod_{k=1}^n |w^k - p| = |p^n - 1|$ . Primeiramente observe que a fatoração  $(w^1 - z)(w^2 - z) \dots (w^n - z) = z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} \dots + z^2 + 1$  nos dá uma pista já que

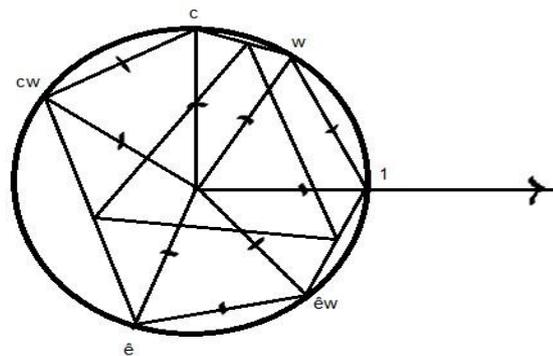
queremos calcular o módulo do produtos, que é justamente o lado esquerdo da expressão. Seja  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , um polinômio complexo de variável complexa, definido por  $P(z) = z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} \dots + z^2 + 1$ . Note que podemos reescrever o polinômio como  $P(z) = \frac{z^n - 1}{z - 1}$ , já que  $P(1) = n$ . Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, temos que as raízes do polinômio são, exatamente as raízes da unidade. Daí,  $P(z)[z - 1] = z^n - 1 \Rightarrow |P(z)[z - 1]| = \prod_{k=1}^n |w^k - z| = |z^n - 1| \Rightarrow \prod_{k=1}^n |w^k - z| = |z^n - 1|$ . Assim quando  $z = p$ , obtemos que  $\prod_{k=1}^n |w^k - p| = |p^n - 1|$ . Além disso, se  $p$  for interior ao círculo temo que, por linearidade que  $\prod_{k=1}^n |w^k - p| = 1 - |p^n|$ .

## 2.9 PROBLEMA (PUTNAM 67)

Seja  $[ABCDEF]$  um hexágono inscrito em uma circunferência de raio  $r$ . Mostre que, se  $|AB| = |CD| = |EF| = r$ , então os pontos médios de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{DE}$  e  $\overline{FA}$  são os vértices de um triângulo equilátero.

Solução:

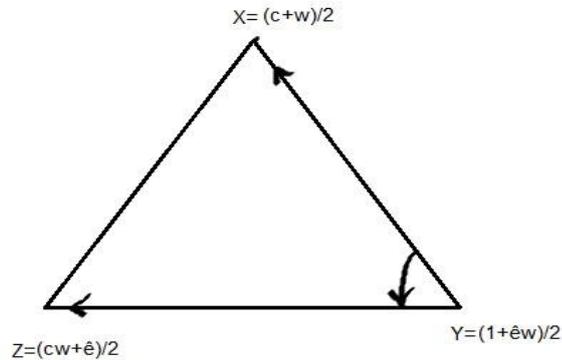
### Figura 11 - Construção de um hexágono.



Fonte: elaborada pelo autor

Seja  $[ABCDEF]$  um hexágono regular, onde a identificação de pontos no plano cartesiano, para os números complexos é dado por  $A = 1, B = w, C = c, D = cw, E = \hat{e}$  e  $F = \hat{e}w$  com  $w = e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \in \mathbb{C}$ . Note que,  $w^3 = -1 \Rightarrow w^3 + 1 = 0 \Rightarrow \Rightarrow (w^2 - w + 1)(w + 1) = 0 \Rightarrow (w^2 - w + 1) = 0$ .

**Figura 12 - Triângulo Equilátero.**



Fonte: elaborada pelo autor

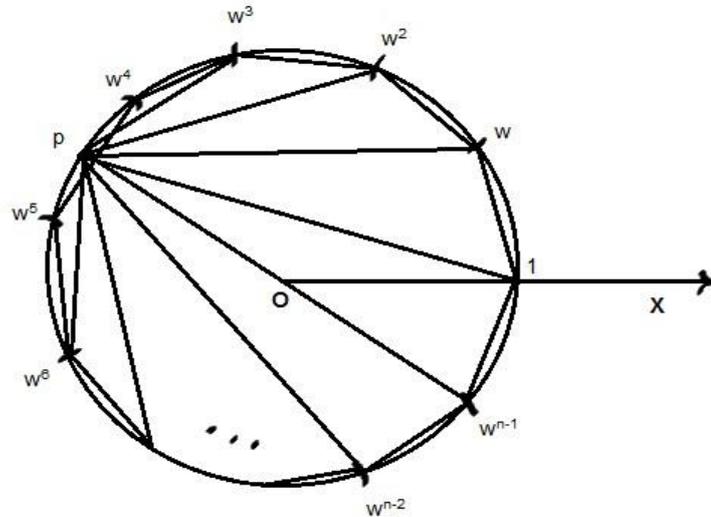
O que temos que constatar é se a igualdade  $(x - y)w = (z - y)$  é verdadeira, onde  $x, y, z$  são as coordenadas dos pontos médios, em termos de complexos. Fazendo as contas temos que,  $(x - y)w = \left(\frac{c+w}{2} - \frac{1+\hat{e}w}{2}\right)w = \left(\frac{c+w-1-\hat{e}w}{2}\right)w = \frac{1}{2}[cw + w^2 - w - \hat{e}w^2]$   
 $\Rightarrow \frac{1}{2}[cw - 1 - \hat{e}(w - 1)] = \frac{1}{2}[cw + \hat{e} - (1 + \hat{e}w)] = (z - y)$ . Note que eles possuem o mesmo módulo já que  $|x - y| \cdot |w| = |x - y| \cdot 1 = |z - y|$ .

## 2.10 PROBLEMA OBM

Dados um ponto  $p$  sobre uma circunferência unitária e os vértices  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  de um polígono regular de  $n$  lados. Calcule o valor de  $\sum_{k=0}^{n-1} |\overline{PA_k}|^2$ .

Solução:

**Figura 13 - A soma das distância de um ponto do círculo aos vértices.**



Fonte: elaborada pelo autor

Seja  $w = e^{\frac{i2\pi}{n}}$  uma raiz  $n$ -ésimas da unidade. Identifiquemos os vértices do polígono regular, sem perda de generalidade, como as raízes  $n$ -ésimas da unidade. O que devemos computar agora é a soma  $\sum_{k=0}^{n-1} |\overline{PA_k}|^2 = \sum_{k=1}^n |p - w^k|^2$ . Desenvolvendo o termo da esquerda temos que,  $|p - w^k|^2 = (p - w^k)(\bar{p} - \bar{w}^k) = |p|^2 - p\bar{w}^k - \bar{p}w^k + 1 = 2 - 2\text{Re}[p\bar{w}^k]$ . Obtemos que,  $\sum_{k=1}^n |p - w^k|^2 = \sum_{k=1}^n (2 - 2\text{Re}[p\bar{w}^k]) = \sum_{k=1}^n (2) - \sum_{k=1}^n 2\text{Re}[p\bar{w}^k]$ . Para calcular o valor desta última expressão devemos notar que,  $\text{Arg}[p\bar{w}^k] = \theta_p - \frac{2k\pi}{n}$ , disto temos que  $\text{Re}[p\bar{w}^k] = \cos(\theta_p - \frac{2k\pi}{n}) = \cos(\theta_p) \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \sin(\theta_p) \sin(\frac{2k\pi}{n}) \Rightarrow \sum_{k=1}^n \text{Re}[p\bar{w}^k] = \sum_{k=1}^n \cos(\theta_p - \frac{2k\pi}{n}) = \sum_{k=1}^n \cos(\theta_p) \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \sum_{k=1}^n \sin(\theta_p) \sin(\frac{2k\pi}{n}) \Rightarrow \cos(\theta_p) \sum_{k=1}^n \cos(\frac{2k\pi}{n}) + \sin(\theta_p) \sum_{k=1}^n \sin(\frac{2k\pi}{n})$

Esta última expressão é zero, de fato  $\sum_{k=1}^n \cos(\frac{2k\pi}{n}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [w^k + w^{-k}] = \frac{1}{2} \left[ \frac{w^{n-1} - w^{-n-1}}{w-1} - \frac{w^{-n-1} - w^{n-1}}{w^{-1}-1} \right] = 0$ , já que  $w^n = 1$  e  $w^{-n} = 1$ . Da mesma forma se faz com o termo  $\sum_{k=1}^n \sin(\frac{2k\pi}{n}) = 0$ .

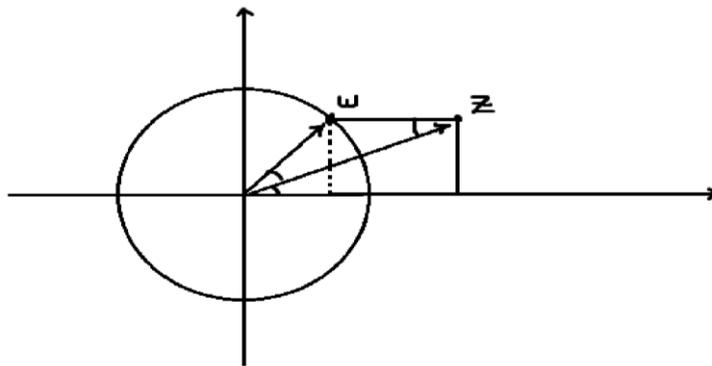
Daí,  $\sum_{k=1}^n |p - w^k|^2 = \sum_{k=1}^n (2 - 2\text{Re}(p\bar{w}^k)) = 2n$ .

## 2.11 BINÔMIO DE NEWTON E MOIVRE

Problema: Seja  $z = (1 + w)$ , onde  $w \in C_{unitário} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Determine as potências  $z^n = (1 + w)^n$ , em função do argumento principal de  $w$ , onde  $2\theta = Arg(w)$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

Solução:

**Figura 14 - Potências de um número.**



Fonte: elaborada pelo autor

Seja  $2\theta = Arg w$ , onde  $w \in C_{unitário}$ . Note que  $|z - w| = 1 = |w|$ , daí obtemos que o triângulo  $\Delta 0wz$  é isósceles. Com isto temos que  $Arg z = \theta$ , colocando  $z$  na forma polar conseguimos obter, a partir de Moivre que,

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) = |z|^n \cdot e^{in\theta}.$$

Agora devemos calcular  $|z|$ , temos que

$$|z|^2 = (1 + w)(1 + \bar{w}) = 1 + \bar{w} + w + |w|^2 = 1 + \bar{w} + w + 1 \Rightarrow$$

$$|z|^2 = 2 + 2 \cos(2\theta) = 4(\cos \theta)^2 \Rightarrow |z| = 2|\cos \theta|$$

$$\begin{aligned} z^n &= 2^n |\cos \theta|^n \cdot e^{in\theta} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos \theta + i \sin \theta)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta) + i \sin(k\theta)) = \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta)) + i \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta)) + i \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin(k\theta))$$

$\Rightarrow$

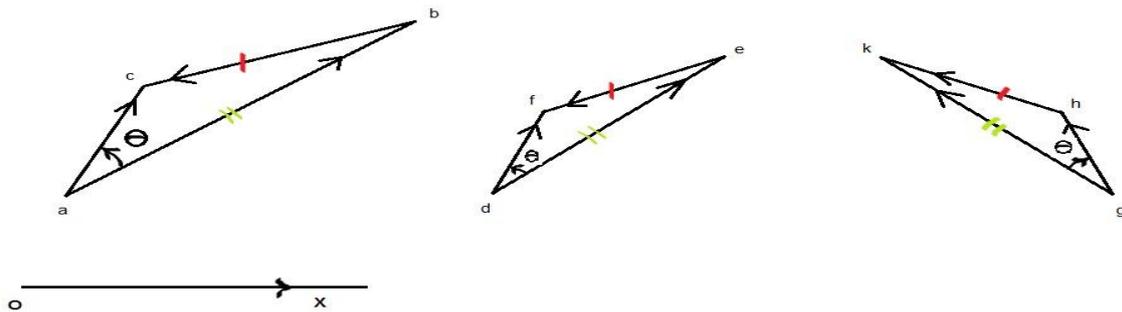
$$2^n |\cos \theta|^n \cdot e^{in\theta} = 2^n |\cos \theta|^n \cdot (\cos \theta + i \sin \theta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta)) + i \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sin(k\theta))$$

Daí conseguimos que,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\cos(k\theta)) = 2^n |\cos\theta|^n (\cos\theta) \text{ e } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\sen(k\theta)) = 2^n |\cos\theta|^n (\sen\theta).$$

## 2.12 SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS.

**Figura 15 - Triângulos com orientações naturais e reversas.**



Fonte: elaborada pelo autor

**Proposição:** Dois triângulos, onde  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$ , que representaremos por  $\Delta abc$  e  $\Delta def$ ,

são semelhantes se, e somente se,  $\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 1 \\ c & f & 1 \end{vmatrix} = 0$ .

Demonstração: Sejam  $\Delta abc$  e  $\Delta def$  triângulos semelhantes com mesma orientação, ou seja,  $\text{Arg} \frac{c-a}{b-a} = \text{Arg}(c-a) - \text{Arg}(b-a) = \text{Arg} \frac{f-d}{e-d}$ . Temos que eles são semelhantes se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} = \frac{f-d}{e-d} &\Leftrightarrow (c-a)(e-d) = (f-d)(b-a) \Leftrightarrow \\ ce - cd - ae + ad &= bf - af - bd + ad \\ \Leftrightarrow ce - cd - ae &= bf - af - bd \Leftrightarrow \\ ae + cd + bf - bd - ce - af &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a & d & 1 \\ b & e & 1 \\ c & f & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Os triângulos são ditos reversos quando possuem orientações opostas, note pela ilustração que os triângulos  $\Delta def$  e  $\Delta gkh$  são reversos, ou seja,  $\text{Arg} \frac{f-d}{e-d} = \text{Arg} \frac{h-g}{k-g} = -\text{Arg} \frac{k-g}{h-g}$ .

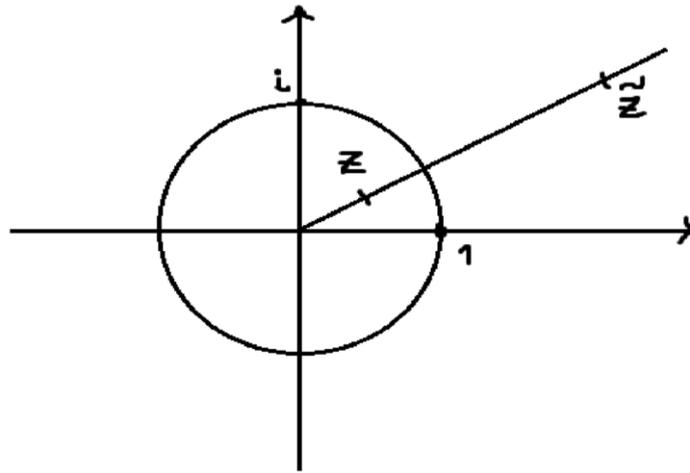
Corolário: Dois triângulos reversos, onde  $g, h, k, d, e, f \in \mathbb{C}$ , que representaremos por  $\Delta gkh$  e

$\Delta def$ , serão chamados semelhantes se, e somente se,  $\begin{vmatrix} \bar{g} & d & 1 \\ \bar{k} & e & 1 \\ \bar{h} & f & 1 \end{vmatrix} = 0$

### 2.13 INVERSÃO EM RELAÇÃO AO CÍRCULO UNITÁRIO.

Seja  $I: \mathbb{C} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $I(z) = \frac{e^{i\theta}}{|z|}$  onde  $\theta = \text{Arg}(z) \in \mathbb{R}$ . Adotaremos a nomenclatura,  $\tilde{z} = I(z)$ . Observe que por definição isso equivale, em termos geométricos que,  $|z| \cdot |\tilde{z}| = 1$ . Essa é chamada a transformação inversão.

**Figura 16 - Inversão de números.**



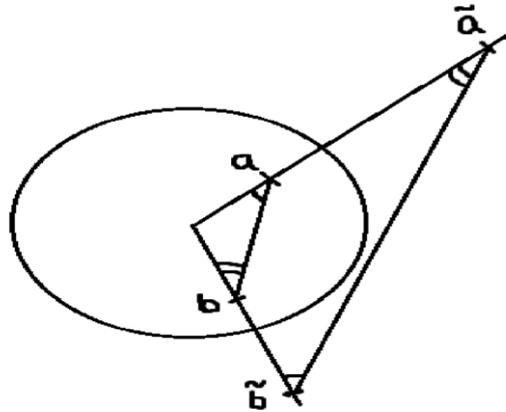
Fonte: elaborada pelo autor

Um critério útil. Considere o  $C_{\text{unitário}} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Mostre que, dados dois pontos  $a, b \in \mathbb{C}$ , os triângulos  $\Delta (0ab) \cong \Delta (0\tilde{b}\tilde{a})$ , são semelhantes e reversos.

Solução: Pela caracterização da semelhança entre triângulos reversos,  $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & \bar{b} & 1 \\ b & \bar{a} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{vmatrix} =$

$a \cdot \bar{a} - b \cdot \bar{b} = |a|^2 - |b|^2 = |a|^2 \cdot \frac{e^{-i\alpha}}{|a|} - |b|^2 \cdot \frac{e^{-i\beta}}{|b|} = 1 - 1 = 0$ . Concluímos que  $\Delta (0ab) \cong \Delta (0\tilde{b}\tilde{a})$  e reversos

Figura 17 - Triângulos reversos.

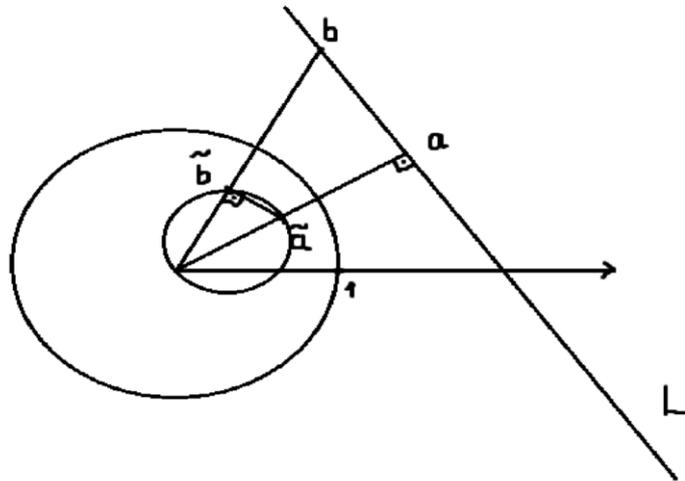


Fonte: elaborada pelo autor

Observe que isso nos diz um pouco mais. Considere o  $C_{\text{unitário}} = C = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Com o resultado anterior podemos mostrar que uma reta que não intersecta o círculo unitário em nenhum ponto, é levada pela transformação da inversão, em um círculo interior ao unitário.

De fato, seja  $L$  a reta que passa pelos pontos  $a$  e  $b$ , onde  $a$  é o ponto mais perto da origem. Pelo resultado anterior temos que os  $\Delta(Oab) \cong \Delta(O\tilde{b}\tilde{a})$  são semelhantes. Daí,  $\sphericalangle(Oab) = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle(O\tilde{b}\tilde{a})$ , e isso significa que  $\tilde{b}$  pertence ao círculo de diâmetro  $\tilde{a}$ , já que sabemos que dado o diâmetro de uma circunferência, um ponto só pertence ao círculo se formar um triângulo retângulo com as extremidades do diâmetro. Assim a reta  $L$  é transformada em um círculo, como estamos admitindo que a reta não intersecta o círculo, significa que o círculo é interior a  $C$ .

Figura 18 - A inversão transforma retas em círculos.



Fonte: elaborada pelo autor

Até aqui a definição de inversão foi relacionada apenas com o círculo unitário, vamos generalizar. Seja  $K$  uma circunferência de raio  $R$ , definimos  $I_K: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; I_K(z) = \frac{R^2 \cdot e^{i\theta}}{|z|}$  como sendo a inversão de  $z$  com relação ao círculo  $K$ . Continuaremos a denotar por  $\tilde{z} = I_K(z)$ . Considerando uma reta  $L$  e um círculo  $\tilde{L} = I_K(L)$ , intuitivamente, temos que a imagem do centro de  $K$  é o infinito de  $L$ , sendo que o centro de  $K$  é um ponto de tangência com o círculo  $\tilde{L}$ , costuma-se dizer o círculo “furado”  $\tilde{L}$ .

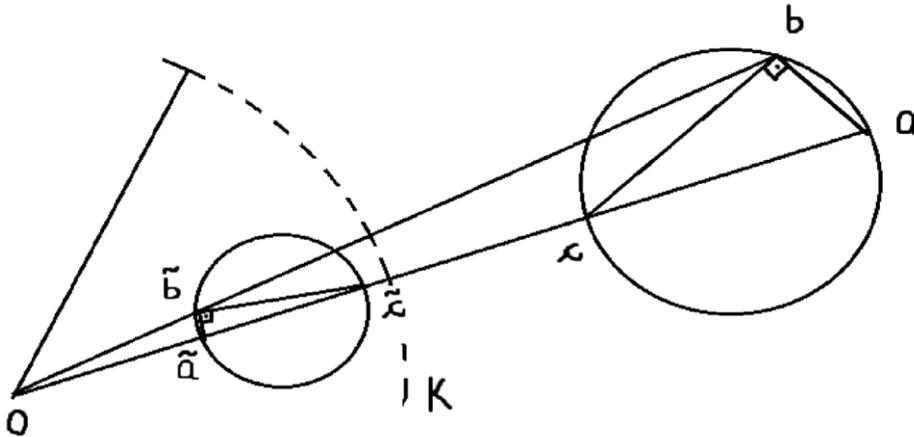
Problema. Considere um círculo  $K$  de raio  $R$  centrado na origem e um círculo  $C$  exterior ao  $K$ , no sentido de não existir pontos de contato e o centro de  $C$  não pertence a  $K$ . Mostre que a inversão de  $C$  é um círculo interior a  $K$ , ou seja, que  $I_K(C) = \tilde{C} \subset K$ .

Solução: Considere dois pontos  $a, c \in C$  tais que  $a$  e  $c$  são extremos do diâmetro de  $C$ . Tome um ponto  $b \in C$ , temos que  $\Delta(abc)$  é retângulo em  $b$ , isto é,  $\sphericalangle(abc) = \frac{\pi}{2}$ . Temos que mostrar que  $\sphericalangle(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}) = \frac{\pi}{2}$ . Pelo que acabamos de mostrar no exemplo anterior, sabemos que

os

$\Delta(0ab) \cong \Delta(0\tilde{b}\tilde{a})$  e que  $\Delta(0cb) \cong \Delta(0\tilde{b}\tilde{c})$ . Disto,  $\sphericalangle(ab) = \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{a})$  e  $\sphericalangle(0cb) = \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{c})$ . Mas  $\sphericalangle(0cb) = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle(0ab) = \frac{\pi}{2} + \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{a}) = \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{c}) \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{c}) - \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{a})$ . No entanto sabemos que,  $\sphericalangle(\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}) = \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{c}) - \sphericalangle(0\tilde{b}\tilde{a}) = \frac{\pi}{2}$ . Disto concluímos que a inversão leva círculos em círculos.

**Figura 19 - A inversão transforma círculos em círculos.**

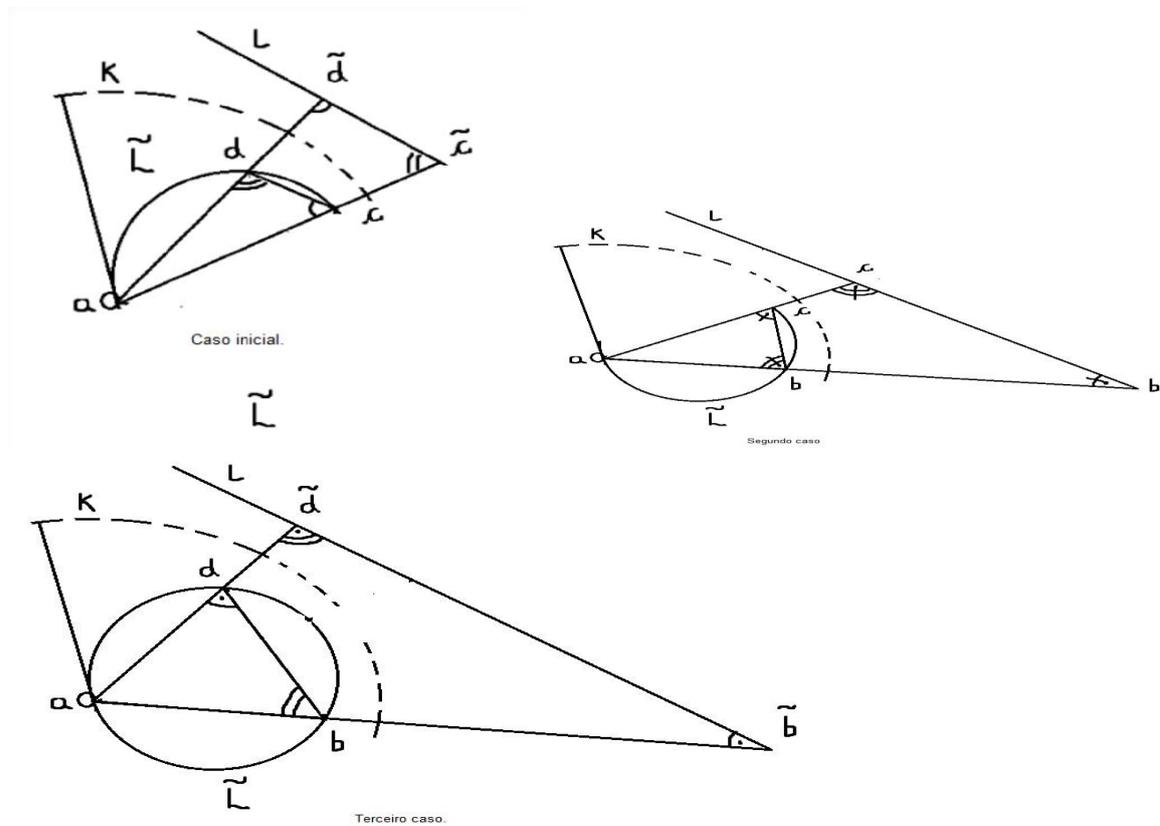


Fonte: elaborada pelo autor

Voltando ao Teorema de Ptolomeu- Euler. Vejamos a reciprocidade, o enunciado diz que para quaisquer quatro  $A, B, C$  e  $D \in \mathbb{R}^2$ , temos que  $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| + |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \geq |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{AC}|$ , com igualdade se e somente se estes quatro pontos são concíclicos. Considere a inversão onde transforma  $\tilde{L} = I_K(L)$ , onde o círculo  $K$  tem centro, digamos  $a$ , como na figura. Lembrando que temos a correspondência  $\mathbb{C} \ni a = A \in \mathbb{R}^2$ .



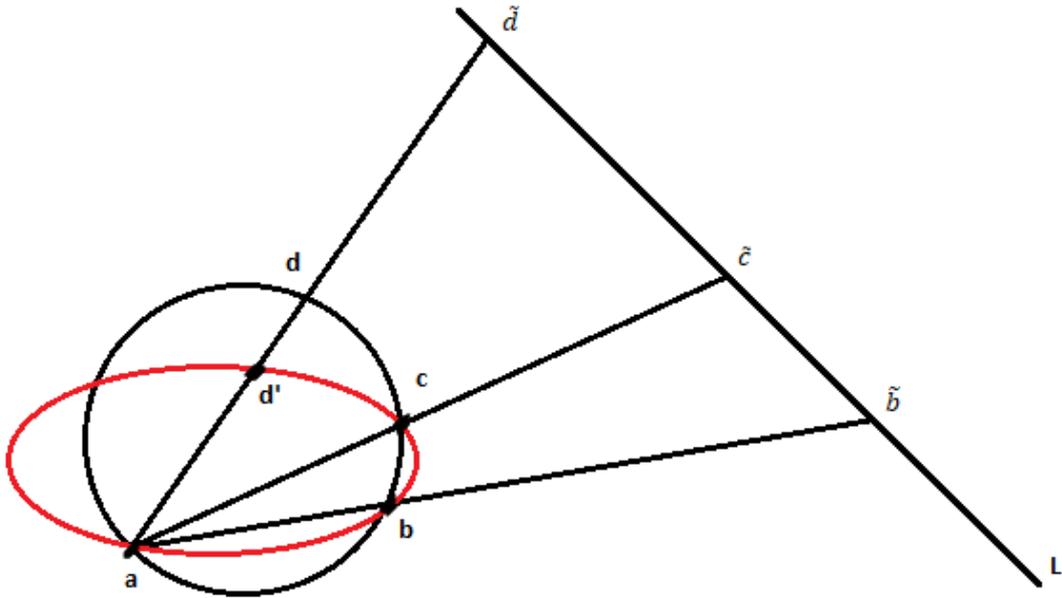
Figura 21 - Os três pares de semelhanças.



Fonte: elaborada pelo autor

Temos que provar que se é válida a igualdade, então os pontos são concíclicos. Suponha que vale a igualdade  $|d - a|. |c - b| + |d - c|. |b - a| = |d - c|. |b - a|$  e que o ponto  $d$  esteja fora do círculo determinado pelos pontos  $a, b$  e  $c$ . Seja  $d'$  o ponto de intersecção do círculo determinado pelos pontos  $a, b$  e  $c$  com a reta que passa por  $a$  e  $d$ . Note que,  $|d - a|. |c - b| + |d - c|. |b - a| = |d - c|. |b - a|$ , por semelhança de triângulos é equivalente a  $|\tilde{c} - \tilde{b}| + |\tilde{d} - \tilde{c}| = |\tilde{d} - \tilde{b}|$ , ou seja,  $d$  pertence a reta formada por  $\tilde{b}$  e  $\tilde{c}$ .

Figura 22 - A recíproca de Ptolomeu-Euler.



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo que acabamos de provar, temos que  $|d' - a| \cdot |c - b| + |d' - c| \cdot |b - a| = |d' - c| \cdot |b - a|$ . Por dois pontos passam uma única reta, dessa maneira a reta que passa por  $\tilde{b}, \tilde{c}$  e  $\tilde{d}$  é a mesma que passa por  $\tilde{b}, \tilde{c}$  e  $\tilde{d}'$ . Logo  $\tilde{d}, \tilde{d}' \in L$ . Pela inversão  $\tilde{d}$  e  $\tilde{d}'$  tem a mesma direção  $\Rightarrow \tilde{d} = \tilde{d}' \Rightarrow I(d) = I(d') \Rightarrow d = d'$ , por bijeção.

#### 2.14 Algumas transformações.

A espiral quadrática.

Qual a imagem obtida, de um semicírculo de centro  $(a, 0)$  onde  $a \geq 1$ , através da transformação  $z \mapsto z^2$ ?

Dado um número  $z = |z|e^{i\theta}$ , temos pela fórmula de Moivre que,  $z^2 = |z|^2e^{i2\theta}$ . Com isso retiramos que o argumento duplica e a norma fica ao quadrado. Assim devemos analisar três casos,

- (I)  $|z| > 1$
- (II)  $|z| = 1$
- (III)  $|z| < 1$

Caso (I):

Como o comprimento do diâmetro é a maior corda possível, temos que o número complexo de maior norma é o  $z = 2a$ , e quando  $|z| \rightarrow 1$  o número  $z \rightarrow e^{i\alpha}$  para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . O que ocorre é uma contração de  $1 \leq |z| \leq 4a^2$ , a medida que  $0 \leq \theta \leq \alpha$ .

Caso(II):

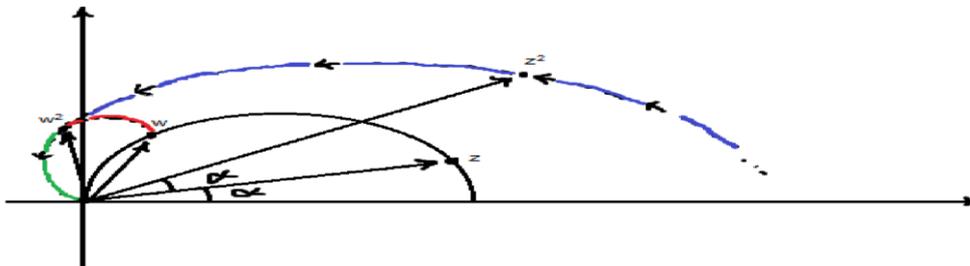
Quando  $|z| = 1$ , temos que a transformação apenas rotaciona o vetor, ou de forma equivalente, duplica apenas o argumento deixando a norma unitária ainda.

Caso(III):

Quando a norma é menor que a unidade, temos que o vetor resultante terá uma norma que tenderá a zero. Além disso, quando o argumento do número considerado estiver tendendo a  $\frac{\pi}{2}$ , a transformação levará o novo número com uma norma que tende a zero e um argumento que tende a  $\pi$ .

O esboço da transformação  $z \mapsto z^2$  é dado por,

**Figura 23 - A espiral quadrática.**



Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo. Mostre que a transformação  $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $w = z^2$ , transforma a região triangular delimitada pelas retas  $y = x$ ,  $x = 1$  e  $y = -x$ , na região delimitada pelo eixo  $v$  e pela parábola  $p = \frac{2}{(1+\cos\theta)}$ .

Solução: Observemos que os números  $a = 1 + i$ ,  $b = 1 - i$  tem a forma polar  $a = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$  e  $b = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$ . Então  $a^2 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$  e  $b^2 = 2 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$ . Considerando os números da forma  $z = 1 + iy$ , temos que  $z^2 = (1 - y^2) + 2yi = w$ . Calculando sua norma temos que,  $|w| = \sqrt{(1 - y^2)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 - 2y^2 + y^4 + 4y^2} = \sqrt{(1 + y^2)^2} = 1 + y^2 = p$ . Vamos tentar colocar a norma de  $w$ , em função de seu argumento, ou seja, queremos obter  $f(\theta) = p$

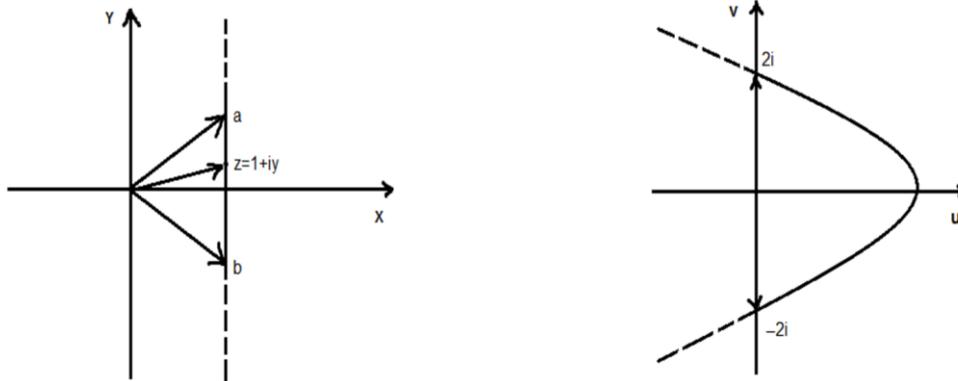
onde  $\text{Arg}(w) = \theta$ . Sabemos que  $w = p \cdot e^{i\theta}$  e  $\bar{w} = p \cdot e^{-i\theta}$ , daí obtemos que a parte real pode ser escrita como,

$$p \cos(\theta) = (1 - y^2) \Rightarrow p \cos(\theta) = 1 - (p - 1) = 2 - p$$

$$\Rightarrow p \cos(\theta) + p = 2 \Rightarrow p = \frac{2}{(1 + \cos(\theta))}$$

Note que,  $-\frac{\pi}{4} < \text{Arg}(z) < \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \text{Arg}(w) < \frac{\pi}{2}$ .

**Figura 24 - Retas verticais e parábolas.**



Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo. Mostre que a transformação  $w: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}, w = z + \frac{1}{z}$ , leva o círculo  $|z| = c$  em uma elipse  $u = \left(c + \frac{1}{c}\right) \cdot \cos\theta$  e  $v = \left(c - \frac{1}{c}\right) \cdot \sin\theta$ , onde  $w = u + iv$ , quando  $c \neq 1$ . O que ocorre quando  $c = 1$

Solução: Seja  $z = c \cdot e^{i\theta}$ , onde  $c \neq 1$ . Aplicando a transformação, obtemos que

$$w = c \cdot e^{i\theta} + \frac{1}{c \cdot e^{i\theta}} = c \cdot e^{i\theta} + \frac{e^{-i\theta}}{c} = c(\cos\theta + i \sin\theta) + \frac{1}{c}(\cos\theta - i \sin\theta) \Rightarrow$$

$$w = \left(c + \frac{1}{c}\right) \cos\theta + i \left(c - \frac{1}{c}\right) \sin\theta \Rightarrow u = \left(c + \frac{1}{c}\right) \cdot \cos\theta \text{ e } v = \left(c - \frac{1}{c}\right) \cdot \sin\theta. \text{ Esses}$$

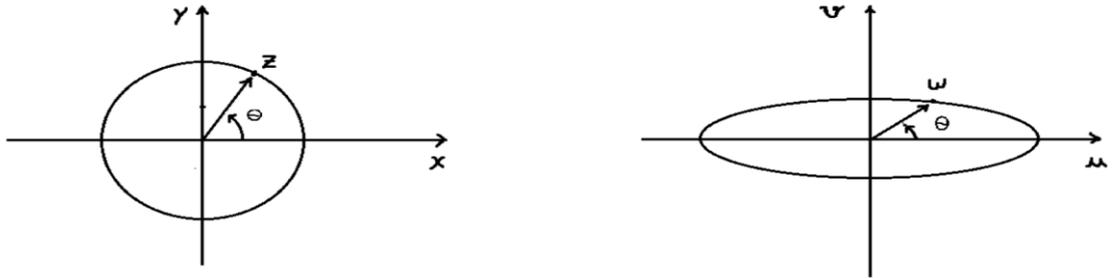
ponto estão sobre uma elipse já que,

$$\frac{u^2}{\left(c + \frac{1}{c}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(c - \frac{1}{c}\right)^2} = (\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1.$$

Note que quando  $c = 1$ , a parte imaginária é zero e a parte real é  $u = 2\cos\theta$ . Assim o círculo unitário é transformado em um segmento de reta  $-2 \leq u \leq 2$  e  $v = 0$ .

**Figura 25 - Círculos e elipses.**

$$w: z \mapsto z + \frac{1}{z}$$



Fonte: elaborada pelo autor

Exemplo. Mostre que a transformação  $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}$ , onde  $0 < \theta = \text{Arg}(z) < 2\pi$  e  $|z| = r$ , leva o domínio entre duas parábolas  $r = \frac{2b^2}{1-\cos\theta}$ , e  $r = \frac{2c^2}{1-\cos\theta}$  de modo biunívoco, na faixa  $c < v < b$ .

Solução: Seja  $w: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  a transformação definida por  $w = \sqrt{z} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}$ , conforme o enunciado. Fazendo  $z$  percorrer a parábola, ou seja, substituindo  $r = \frac{2b^2}{1-\cos\theta}$  em  $w$ , obtemos que

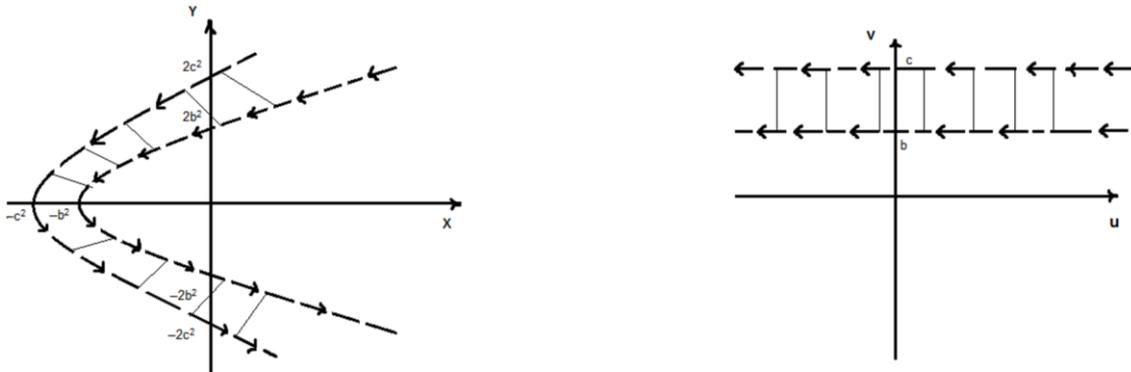
$$\begin{aligned} w = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} &= \sqrt{\frac{2b^2}{1-\cos\theta}} \cdot e^{\frac{i\theta}{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot b \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}}{\sqrt{1-\cos\theta}} = \frac{\sqrt{2(1+\cos\theta)} \cdot b \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}}{|\text{sen}\theta|} \Rightarrow \\ w &= \frac{2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \cdot b \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}}{|\text{sen}\theta|} = \frac{2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| \cdot b \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}}{2 \left| \text{sen} \frac{\theta}{2} \right| \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|} = \frac{b \cdot e^{\frac{i\theta}{2}}}{\left| \text{sen} \frac{\theta}{2} \right|} \Rightarrow \\ w &= \frac{b \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{\left| \text{sen} \frac{\theta}{2} \right|} + i \frac{b \cdot \text{sen} \frac{\theta}{2}}{\left| \text{sen} \frac{\theta}{2} \right|} \end{aligned}$$

Como  $0 < \theta = \text{Arg}(z) < 2\pi \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \pi$ , temos que  $\text{sen} \frac{\theta}{2}$  é positivo e  $\cot \frac{\theta}{2}$  percorre a reta real, ou seja,  $\cot \frac{\theta}{2}: (0, \pi) \mapsto (-\infty, +\infty)$ . Assim podemos escrever a transformação  $w = \sqrt{z}$  parametrizada pela parábola  $r = \frac{2b^2}{1-\cos\theta}$  como  $w = b \cot \frac{\theta}{2} + ib$ . Mas essa equação representa uma reta paralela ao eixo real.

Vejam a figura,

$$z \mapsto w = \sqrt{z}$$

**Figura 26 - Parábolas e retas horizontais.**



Fonte: elaborada pelo autor

As flechas estão orientadas pelo argumento, no sentido anti- horário.

## 2.15 CÔNICAS.

### 2.15.1 Parábola.

Por definição, um ponto qualquer da parábola equidista do foco e da reta diretriz. Daí consegue-se, de forma cartesiana, a equação da parábola. Agora, vamos considerar o caso em que o sistema de coordenadas fica centrado no vértice da parábola. Analisemos a compatibilidade das equações cartesianas e complexas.

Seja  $f = ip$  o foco e  $d: z = x - ip$  a equação da diretriz, onde  $p$  é o parâmetro. Por definição temos que o número  $z$  pertence a parábola se, e somente se, ele é equidistante do foco e da diretriz.

Ou seja,

$$|z - f| = |z - (x - ip)| = |(y + p)i| = |y + p| \Leftrightarrow$$

$$|z - f|^2 = |y + p|^2 \Rightarrow (z - f)(\bar{z} - \bar{f}) = (y + p)^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 - \bar{f}z - f\bar{z} + |f|^2 = y^2 + 2yp + p^2 \Leftrightarrow$$

$$|z|^2 - \bar{f}z - f\bar{z} + |f|^2 = |z|^2 + ipz - ip\bar{z} + p^2 = y^2 + 2yp +$$

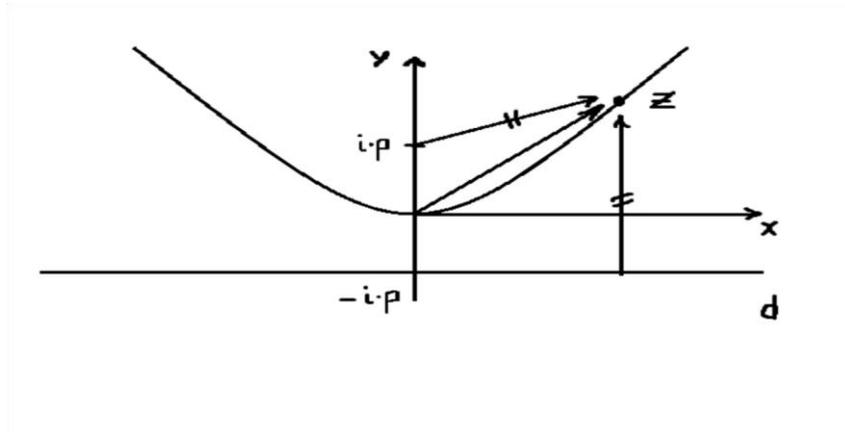
$$|z|^2 + ipz - ip\bar{z} = y^2 + 2yp = x^2 + y^2 + ip(2iy) \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 2yp = x^2 + y^2 + ip(2iy) = x^2 + y^2 - 2py \Leftrightarrow$$

$$y^2 + 2yp = x^2 + y^2 - 2py \Rightarrow 4yp = x^2 \Leftrightarrow$$

$$y = \frac{x^2}{4p}$$

**Figura 27 - Parábola.**



Fonte: elaborada pelo autor

Dessa forma temos que,  $|z - f| - |z - (x - ip)| = |y + p| \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4p}$ . Essa última é chamada a equação cartesiana reduzida da parábola.

### 2.15.2 Hipérbole

Considere que os focos estejam sobre o eixo real, tome  $z$  sobre o ramo hiperbólico direito,  $c = \text{distância do foco a origem}$ ,  $a = \text{distância do vértice a origem}$ . Por definição, a distância entre o ponto  $z$  aos focos quando subtraídas deve ser constante. Ou seja,  $H_+ = \{z \in \mathbb{C}; |z + c| - |z - c| = 2a\}$  é o ramo hiperbólico direito centrado na origem. Temos que,

$$\begin{aligned}
|z+c| - |z-c| &= 2a \Rightarrow |z+c| = |z-c| + 2a \Rightarrow |z+c|^2 = (|z-c| + 2a)^2 \\
|z|^2 + \bar{c}z + c\bar{z} + c^2 &= |z|^2 - \bar{c}z - c\bar{z} + c^2 + 4a|z-c| + 4a^2 \Rightarrow \\
2(\bar{c}z + c\bar{z}) &= 4a|z-c| + 4a^2 = 4cx \Rightarrow a|z-c| = cx - a^2 \Rightarrow \\
(a|z-c|)^2 &= (cx - a^2)^2 = c^2 \cdot x^2 - 2a^2 \cdot c \cdot x + a^4 \Rightarrow \\
a^2(|z|^2 - \bar{c}z - c\bar{z} + c^2) &= c^2 \cdot x^2 - 2a^2 \cdot c \cdot x + a^4 = a^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - 2 \cdot a^2 \cdot c \cdot x + a^2 \cdot c^2 \\
\Rightarrow \\
a^2 \cdot x^2 - c^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 &= -a^2 \cdot c^2 + a^4 = -a^4 - a^2 \cdot b^2 + a^4 \Rightarrow \\
(a^2 - c^2) + a^2 \cdot y^2 &= -a^2 \cdot b^2 = -b^2 x^2 + a^2 \cdot y^2 \Rightarrow \\
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1
\end{aligned}$$

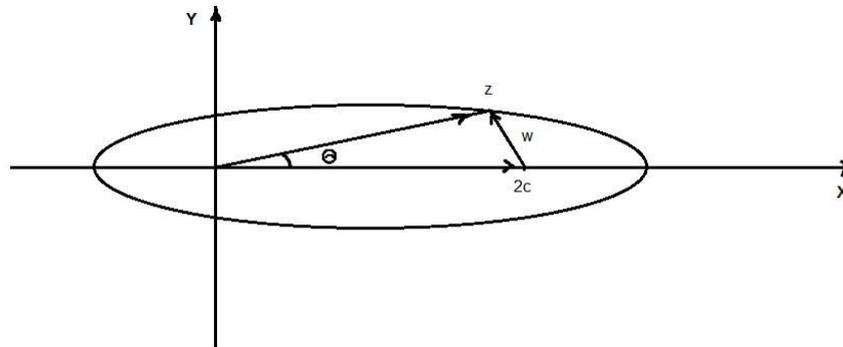
Vemos que as equações são equivalentes. Para deslocar o centro, caso necessário, devemos aplicar uma translação e para rotacionar a hipérbole um ângulo  $\theta$ , basta multiplicar por  $e^{i\theta}$ . Quando se analisa o ramo esquerdo da hipérbole, deve trabalhar com a igualdade  $|z-c| - |z+c| = 2a$ , gerando as expressões cartesianas.

## 2.16 PARAMETRIZAÇÃO DAS CÔNICAS.

### 2.16.1 Elipse.

Aqui o eixo, ou o polo, está centrado em um foco da elipse e além disso o eixo maior está sobre o eixo real. A distância entre os focos representaremos por  $2c$ , e a distância entre os vértices será  $2a$ . Temos por definição, que a elipse é o conjunto de pontos  $\varepsilon = \{z \in \mathbb{C}; |z| + |z - 2c| = 2a\}$ . O lugar geométrico pode ser descrito como  $|z| + |w| = 2a$ , já que o eixo maior está sobre o eixo real e  $w = z - 2c$ .

**Figura 28 - Parametrização da elipse em coordenadas polares.**



Fonte: elaborada pelo autor

Ao elevarmos ao quadrado os termos da definição obtemos que,

$$(|z| + |w|)^2 = 4a^2 \Rightarrow |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| = 4a^2 \Rightarrow$$

$$|w|^2 = 4a^2 - |z|^2 - 2|z| \cdot |w| = 4a^2 - |z|^2 - 2|z| \cdot (2a - |z|)$$

$$|w|^2 = 4a^2 - |z|^2 + 2|z|^2 - 4a \cdot |z| = 4a^2 + |z|^2 - 4a \cdot |z|$$

$\Rightarrow$   
|

Por outro lado, aplicando a lei dos cossenos, temos que,

$$|w|^2 = |z|^2 + 4c^2 - 4c \cdot |z| \cdot \cos\theta.$$

Igualando as expressões encontradas,

$$4a^2 + |z|^2 - 4a \cdot |z| = |z|^2 + 4c^2 - 4c \cdot |z| \cdot \cos\theta \Rightarrow$$

$$-4a \cdot |z| = 4c^2 - 4c \cdot |z| \cdot \cos\theta \Rightarrow a^2 - a \cdot |z| = c^2$$

$$4a^2$$

$$-c \cdot |z| \cdot \cos\theta$$

$$a \cdot |z| - c \cdot |z| \cdot \cos\theta = a^2 - c^2 = b^2, \text{ sendo } b \text{ a norma do número } |z| = |w|.$$

Portanto, em termos de coordenadas polares, ou seja, substituindo  $P = |z|$  temos que

$$P(a - c \cdot \cos\theta) = b^2 \Rightarrow P = \frac{b^2}{(a - c \cdot \cos\theta)} \Rightarrow P = \frac{k}{1 - \varepsilon \cdot \cos\theta}.$$

Onde  $k = \frac{b^2}{a}$  é o parâmetro e  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  é a excentricidade.

### 2.16.2 Hipérbole.

De forma análoga, aqui o eixo maior está sobre o eixo real e a origem é um dos focos, digamos o esquerdo, conforme a figura. A distância entre os focos será denotada por  $2c$  e a distância entre os vértices é  $2a$ . Temos por definição que a hipérbole é o lugar geométrico  $H = \{z \in \mathbb{C}; ||z| - |z - 2c|| = |2a|\}$ . Como nossa origem está no foco esquerdo e chamando  $w = z - 2c$  temos que,

$$|w| - |z| = |2a| \Rightarrow (|w| - |z|)^2 = |w|^2 + |z|^2 - 2|w|. |z| = 4a^2 \Rightarrow$$

$$|w|^2 = 4a^2 - 2|w|. |z| - |z|^2 = 4a^2 - 2(|2a| + |z|). |z| - |z|^2 \Rightarrow$$

++

$$|w|^2 = 4a^2 - 4|a||z| + 2|z|. |z| - |z|^2 = 4a^2 - 4a|z| + |z|^2$$

Por outro lado, aplicando a lei dos cossenos,

$$|w|^2 = |z|^2 + |2c|^2 - 2. |z|. |2c|. \cos\theta = |z|^2 + 4c^2 - 4c. |z|. \cos\theta \Rightarrow$$

$$|w|^2 = |z|^2 + 4c^2 - 4c. |z|. \cos\theta.$$

Igualando as expressões, obtemos que

$$4a^2 - 4a|z| + |z|^2 = |z|^2 + 4c^2 - 4c. |z|. \cos\theta \Rightarrow$$

$$4a^2 - 4a|z| = +4c^2 - 4c. |z|. \cos\theta \Rightarrow a^2 - a|z| = c^2 - c.$$

$$|z|. \cos\theta$$

Sendo  $b$  a medida do eixo menor, prevalece  $a^2 = b^2 + c^2$ , ou seja

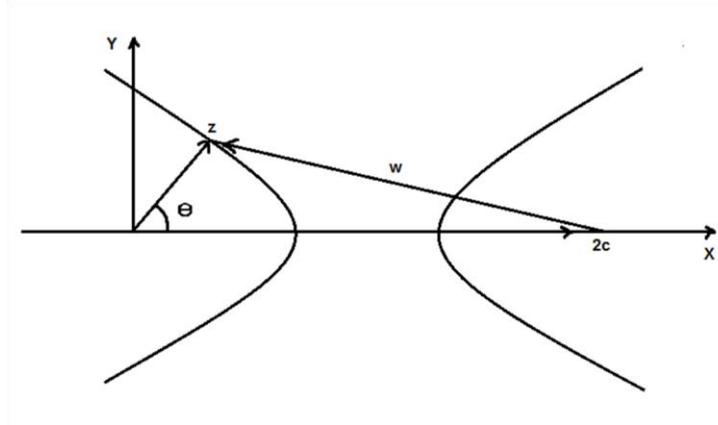
$$a^2 - a|z| = c^2 - c. |z|. \cos\theta \Rightarrow b^2 = a|z| - c. |z|. \cos\theta$$

$$|z|(a - c. \cos\theta) = b^2 \Rightarrow P = \frac{b^2}{(a - c. \cos\theta)} \Rightarrow$$

$$P = \frac{k}{1 - \varepsilon. \cos\theta}$$

Onde  $k = \frac{b^2}{a}$  é o parâmetro e  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  é a excentricidade da hipérbole.

**Figura 29 - Hipérbole parametrizada.**

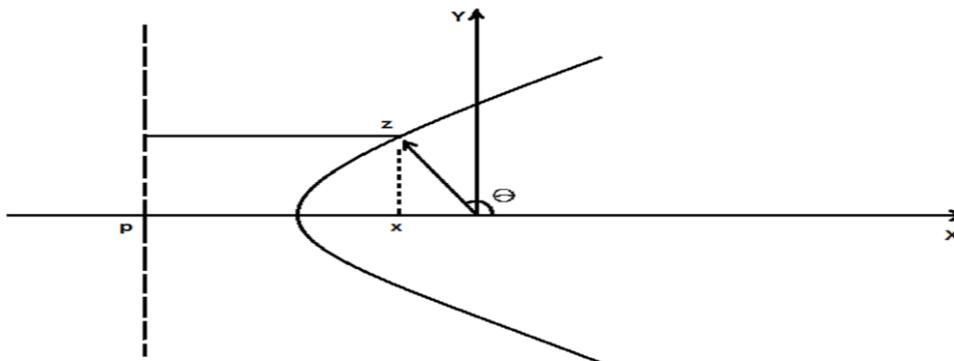


Fonte: elaborada pelo autor

### 2.16.3 Parábola.

Para parametrizar a parábola, procedemos de forma muito parecida. Considere que o vértice esteja sobre o eixo dos reais e seja este ponto a origem. Chamando  $p$  a distância entre o vértice e a reta diretriz, de acordo com a figura.

**Figura 30 - Parábola parametrizada.**



Fonte: elaborada pelo autor

Aplicando a definição temos que,

$$\begin{aligned}\cos \theta &= -\cos(\pi - \theta) = \frac{x}{|z|} = \frac{p - |z|}{|z|} \Rightarrow \\ |z| \cdot \cos \theta &= p - |z| \Rightarrow |z| \cdot \cos \theta + |z| = p \Rightarrow \\ |z| \cdot (\cos \theta + 1) &= p \Rightarrow |z| = \frac{p}{(1 + \cos \theta)} \Rightarrow \\ P &= \frac{p}{(1 + \cos \theta)}\end{aligned}$$

Onde  $p$  é o parâmetro e  $P(\theta) = |z|$ .

## 2.17 EXPONENCIAL

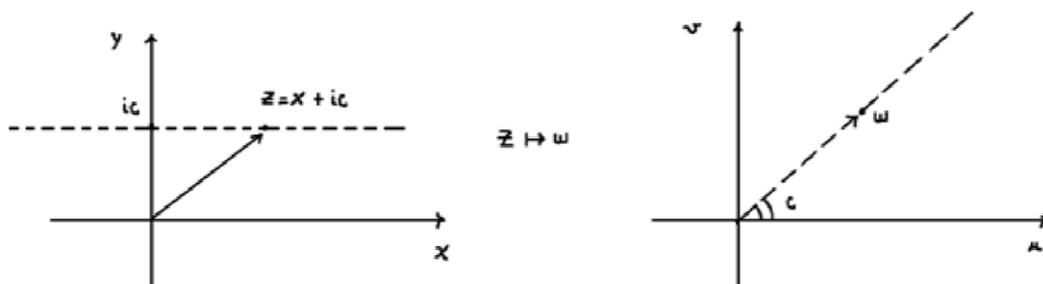
Exemplo. Mostre que a função  $f(z): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; f(z) = e^z$ , transforma:

- i) Retas paralelas ao eixo real, em semi retas passando pela origem.
- ii) Retas paralelas ao eixo imaginário, em círculos centrados na origem

Solução: Seja  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$ . Por definição, a função exponencial pode ser escrita como  $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ . Por outro lado, escrevendo a imagem na forma polar, obtemos que  $w = u + iv = |w| \cdot e^{i \text{Arg}(w)}$ . Comparando as expressões temos as seguintes igualdades,  $w = f(z) \Rightarrow |w| = e^x e^{i \text{Arg}(w)} = e^{iy} \Rightarrow |w| = e^x$  e  $\text{Arg}(w) = \text{Im}(z) = y$ .

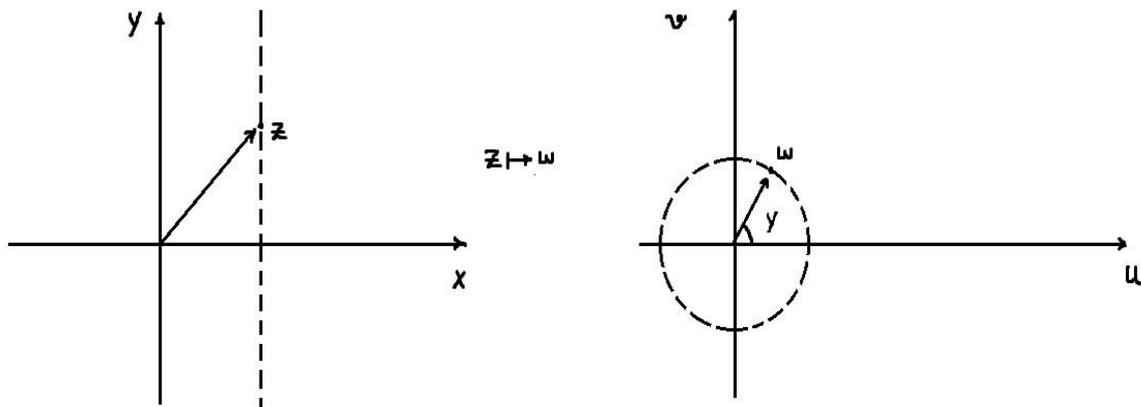
Para o item (i), note que a parte imaginária é constante e a parte real está variando. Isto nos diz que, o ângulo do número após a transformação fica constante. Já a norma do número obtido cresce de maneira exponencial.

**Figura 31- A exponencial, retas horizontais e semi retas.**



Para o segundo caso, o raciocínio é análogo. De fato, nesse caso a norma do número  $w = f(z)$  fica constante e o que fica variando é o argumento, ou seja,  $|w| = e^x$  e  $Arg(w) = Im(z) = y$ . Considere uma reta  $r: z(y) = c + iy$ , uma reta paralela ao eixo imaginário, aqui  $c \neq 0$ . Tome um ponto qualquer  $w$  na reta  $r$ , vemos que o número  $w = |w| \cdot e^{iArg(w)} = e^c \cdot e^{iy}$ . Ou seja, para todo número da reta  $r$ , obtemos um número que tem norma constante e a sua direção fica variando, concluímos que a transformação  $f(z) = e^z$  leva retas paralelas ao eixo imaginário, em círculos centrados na origem.

**Figura 32 - A exponencial, retas verticais e círculos.**



Fonte: elaborada pelo autor

## 2.18 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

A função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \operatorname{sen} z$  é definida por  $f(z) = f(x, y) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ . Note que, ao desenvolvermos o lado direito, através da definição de exponencial, obteremos uma expressão envolvendo os senos e cossenos hiperbólicos. Vejamos:

$$e^{iz} - e^{-iz} = e^{i(x+iy)} - e^{i(-x-iy)} = e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x) \Rightarrow$$

$$e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x) - e^y(\cos x - i \operatorname{sen} x) = -\cos x(e^y - e^{-y}) + i \operatorname{sen} x(e^y + e^{-y}) \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2i} = \frac{-\cos x(e^y - e^{-y}) + i \operatorname{sen} x(e^y + e^{-y})}{2i}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x(e^y + e^{-y})}{2} + i \frac{\cos x(e^y - e^{-y})}{2} \Rightarrow$$

$$f(z) = \operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y + i \cos x \cdot \operatorname{senh} y.$$

Temos as seguintes expressões  $w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , com  $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y$  e  $v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{senh} y$ .

Exemplo. Mostre que a função  $f(z) = \operatorname{sen} z$ , transforma para cada  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ :

i) Segmento de reta paralelo ao eixo real em ramos elípticos ii)

Retas paralelas ao eixo imaginário em ramos hiperbólicos

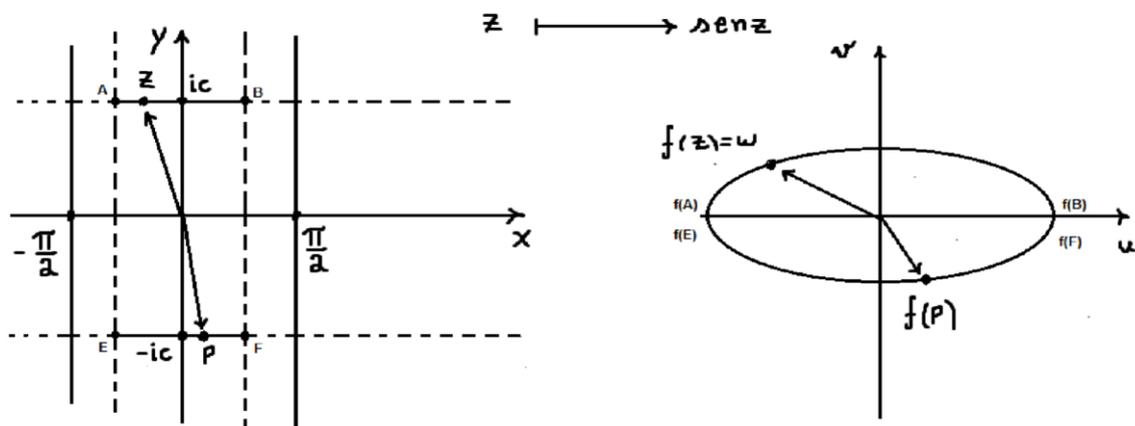
Solução: Sejam  $w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , com  $u(x, y) = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cosh} y$  e  $v(x, y) = \cos x \cdot \operatorname{senh} y$ . Fixando a parte imaginária, e variando  $x$  no segmento  $\overline{AB}$ , segmento este localizado entre o primeiro e terceiro quadrante com na figura, obtemos que

$$u(x, c) = \operatorname{sen}(x) \cdot \operatorname{cosh}(c) \text{ e } v(x, c) = \cos(x) \cdot \operatorname{senh}(c) \Leftrightarrow \frac{u}{\operatorname{cosh}(c)} = \operatorname{sen}(x) \text{ e}$$

$$\frac{v}{\operatorname{senh}(c)} = \cos x \Rightarrow \left(\frac{u}{\operatorname{cosh} c}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{senh} c}\right)^2 = 1, \text{ ou seja, os pontos deste segmento são levados a}$$

pontos de uma elipse. No caso, o segmento estando entre o primeiro e terceiro quadrante é transformado no ramo positivo da elipse. Se o segmento estiver no segundo e quarto quadrante, será transformado no ramo negativo da elipse.

**Figura 33 - A transformação  $\operatorname{sen}(z)$ , segmento horizontal e arco elíptico.**



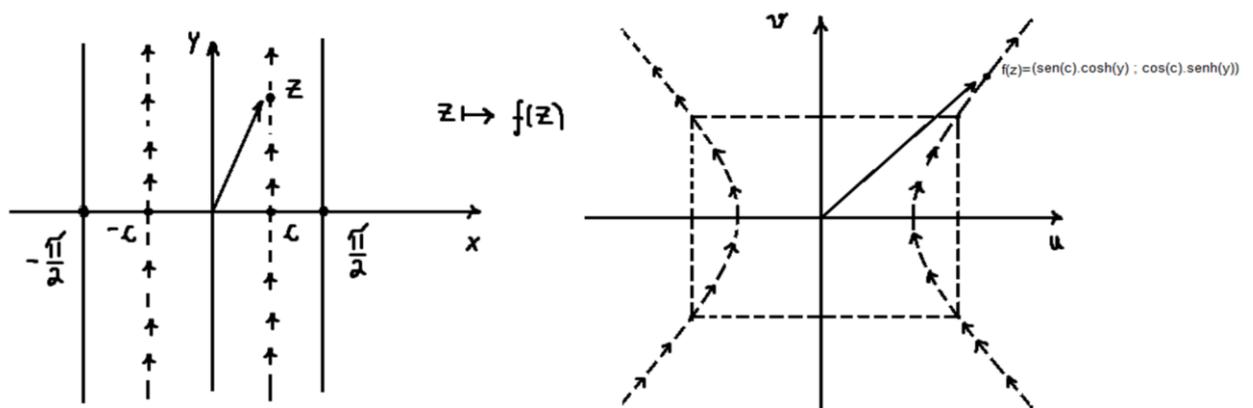
Fonte: elaborada pelo autor

Para o segundo item, procedemos de forma análoga. De fato, agora com  $u(c, y) = \text{sen}(c) \cdot \cosh(y)$  e  $v(c, y) = \cos(c) \cdot \text{senh}(y)$  obtemos que,

$$\begin{aligned} \frac{u}{\text{sen}(c)} = \cosh(y) \text{ e } \frac{v}{\cos(c)} = \text{senh}(y) &\Rightarrow \left(\frac{u}{\text{sen}(c)}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos(c)}\right)^2 = \\ &= (\cosh(y))^2 - (\text{senh}(y))^2 = 1 \\ &\Rightarrow \left(\frac{u}{\text{sen}(c)}\right)^2 - \left(\frac{v}{\cos(c)}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Assim, essas retas são transformadas em ramos hiperbólicos.

**Figura 34 - A transformação  $\text{sen}(z)$ , retas verticais e arcos hiperbólicos.**



Fonte: elaborada pelo autor

Mas o que acontece quando  $x$  atingir o extremo do intervalo? Note que quando  $x$  tende a  $\frac{\pi}{2}$ , o ramo hiperbólico se contraí, ou seja, sua excentricidade tende a zero. Assim o ramo hiperbólico se torna degenerado. De outra forma, a imagem da reta  $z = \frac{\pi}{2} + iy$  é exatamente a semi-reta  $[1, \infty)$ . De maneira análoga, a imagem da reta  $z = -\frac{\pi}{2} + iy$  é o intervalo  $(-\infty, -1]$ .

A função  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \cos z$ , pode ser escrita como  $f(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  através de uma mudança de variável, no caso uma translação, aplicada função seno, obtemos a função cosseno. De fato, aplicando a translação  $z \mapsto z + \frac{\pi}{2}$  em  $g(z) = \text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ , obtemos

$$e^{i(z+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(z+\frac{\pi}{2})} = e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{iz} - e^{-\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-iz} = i \cdot e^{iz} + i e^{-iz} \Rightarrow$$

$$g\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{i \cdot e^{iz} + i e^{-iz}}{2i} = f(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z.$$

Ou seja, as interpretações anteriores são a mesma, a menos de uma translação.

### 2.18.1 Algumas propriedades. das funções trigonométricas e hiperbólicas.

Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Temos que as funções trigonométricas e hiperbólicas são muito semelhantes. Vejamos as definições e algumas relações entre essas funções.

As definições das funções seno, cosseno, cosseno hiperbólico e seno hiperbólico para  $z \in \mathbb{C}$ , são:

$$* \quad \text{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$* \quad \text{senh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Observe que a partir das definições conseguimos relações entre essas funções. De fato considere  $z = x + iy$ , temos que

$$\text{senh}(iz) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = i \cdot \text{senz}$$

e

$$\cos(iz) = \frac{e^{i \cdot iz} + e^{-i \cdot iz}}{2} = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = \cosh(z)$$

Propriedade 1: Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então  $(\cosh(z))^2 - (\text{senh}(z))^2 = 1$ .

Demonstração: Basta calcular diretamente,

$$\begin{aligned} (\cosh(z))^2 - (\text{senh}(z))^2 &= \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \frac{1}{4} [(e^z + e^{-z})^2 - (e^z - e^{-z})^2] &= \frac{1}{4} [(e^z + e^{-z}) + (e^z - e^{-z})] \cdot [(e^z + e^{-z}) - (e^z - e^{-z})] \\ \Rightarrow (\cosh(z))^2 - (\text{senh}(z))^2 &= \frac{1}{4} [2e^z] \cdot [2e^{-z}] = \frac{4e^{z-z}}{4} \Rightarrow \\ &(\cosh(z))^2 - (\text{senh}(z))^2 = 1. \end{aligned}$$

Propriedade 2: Seja  $z \in \mathbb{C}$ , então  $(\cos(z))^2 + (\text{sen}(z))^2 = 1$ .

Demonstração: De forma semelhante, desenvolvendo o lado esquerdo temos que,

$$\begin{aligned} (\cos(z))^2 + (\text{sen}(z))^2 &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 \Rightarrow \\ = (\cos(z))^2 + (\text{sen}(z))^2 &= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right)^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}\right)^2 = (\cosh(z))^2 - (\sinh(z))^2 = 1$$

Propriedade 3. Seja  $z \in \mathbb{C}$ , onde  $z = x + iy$ . Então é válida a seguinte identidade,  $\cosh(z) = \cosh(x + iy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + i \sinh(x) \cdot \sin(y)$ .

Demonstração: Usando as definições e a identidade de Euler, temos que

$$\cosh(x + iy) = \frac{e^{x+iy} + e^{-x-iy}}{2} = \frac{1}{2}(e^x \cdot e^{iy} + e^{-x} \cdot e^{-iy}) \Rightarrow$$

$$\cosh(x + iy) = \frac{1}{2}[e^x \cdot (\cos y + i \sin y) + e^{-x} \cdot (\cos y - i \sin y)] \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}[(e^x + e^{-x})\cos y + (e^{-x} - e^x)i \sin y] = \frac{(e^x + e^{-x})}{2} \cos y + \frac{(e^{-x} - e^x)}{2} i \sin y \Rightarrow$$

$$\cosh(x + iy) = \cosh(x) \cdot \cos(y) + i \sinh(x) \cdot \sin(y)$$

Propriedade 4. Seja  $z \in \mathbb{C}$ , onde  $z = x + iy$ . Então é válida a seguinte identidade,  $\sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y$ .

Propriedade 5. Para todo  $z \in \mathbb{C}$ , onde  $z = x + iy$ , vale  $|\cos(z)|^2 = (\cos x)^2 + (\sin y)^2$ .

Demonstração: Temos que,  $|\cos(z)|^2 = \cos(z) \cdot \overline{\cos(z)} = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) \cdot \overline{\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)}$ . Calculemos

$$\text{a parte conjugada, } \overline{e^{iz} + e^{-iz}} = \overline{e^{iz}} + \overline{e^{-iz}} = e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)} = e^{ix-y} + e^{-ix+y} \Rightarrow$$

$$\overline{e^{ix-y} + e^{-ix+y}} = e^{-y-ix} + e^{y+ix} \Rightarrow$$

$$\overline{\cos(z)} = e^{-y-ix} + e^{y+ix} = e^{-2y+y-ix} + e^{2y-y+ix} \Rightarrow$$

$$\overline{\cos(z)} = e^{-2y-iz} + e^{2y+iz}.$$

Assim,

$$|\cos(z)|^2 = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{-2y-iz} + e^{2y+iz}) = \frac{1}{4}(e^{-2y} + e^{2y+2iz} + e^{-2y-2iz} + e^{2y}) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4}(e^{-2y} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{2y}) = \frac{1}{4}(e^{-2y} - 2 + e^{2y}) + \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) \Rightarrow$$

$$|\cos(z)|^2 = (\cos x)^2 + (\sin y)^2.$$

## 2.19 POTÊNCIAS E LOGARITMOS COMPLEXOS.

Qual o valor de  $(1 + i)^i$ ? Qual o valor de  $\text{Log}(2 + 3i)$ ? Essas perguntas só poderão ser solucionadas mediante a definição de exponenciais complexas. Depois disso, podemos definir as ideias análogas de potências e logaritmos. Temos, pela a expansão de Taylor, que a função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = e^x$  é infinitamente diferenciável. Assim ela pode ser expressada por,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ . Quando, intuitivamente, substituímos a variável  $x \in \mathbb{R}$  por  $z = ix \in \mathbb{C}$ , vejamos o que acontece.:

$$f(ix) = e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix^1}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} \dots =$$

$$(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \dots) + i(\frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \dots).$$

Essas duas parcelas, são conhecidas em funções de variável real, a parte real é a função cosseno e a parte imaginária é a função seno, ambas as expressões são obtidas pelo desenvolvimento de Taylor. Daí, obtemos que o número complexo  $e^{i\theta}$ , onde  $\theta \in \mathbb{R}$ , fica definido por  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ . Define-se  $e^z$ , onde  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , por  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ . Considere o número  $w = \ln|z| + i\theta$ , onde  $\theta \equiv \text{Arg}(z)$ , temos, por definição que,  $e^w = e^{\ln|z|}(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = z$ . Como o  $\theta$  tem infinito

correspondentes, temos que, existem infinitos números complexos que fazem o papel do logaritmo de  $z$ . Assim definimos,

$\log(z) = \{w \in \mathbb{C}; w = \ln|z| + i\theta \text{ e } \theta = 2k\pi + \text{Arg}(z) \text{ com } k \in \mathbb{Z}\}$ . Chamamos de

logaritmo principal quando  $\theta = \text{Arg}(z)$ , então

$\text{Log}(z) = w \Leftrightarrow e^w = z$ , onde  $w = \ln|z| + i\theta$ .

Agora nos resta analisar sobre  $z^\gamma$  onde a base e o expoente são complexos. Aqui encaramos um problema similar ao anterior. Seja  $w \in \log(z)$ , temos que  $e^{\gamma w} = (e^w)^\gamma = (e^{\ln|z|}(\cos \theta + i \sin \theta))^\gamma = (z)^\gamma = z^\gamma$ , assim dizemos que  $z^\gamma$  é a  $\gamma$ -

potência de  $z$  associada ao logaritmo  $w$ . Tomando  $w$  como logaritmo principal, dizemos que  $z^\gamma = e^{\gamma w} = e^{\gamma \text{Log} z}$  é a  $\gamma$ -potência principal de  $z$ .

Exemplo. Respondendo a pergunta inicial, calcule  $(1+i)^i$ , em termos de potência principal.

Solução: Temos que  $(1+i)^i = e^{i \text{Log}(1+i)}$ , sabemos que

$$\text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \text{Arg}(1+i) \text{ que } 1+i = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ ou seja } \text{Arg}(1+i) = \frac{\pi}{4}.$$

Além disso  $|1+i| = \sqrt{2}$ , daí obtemos que  $\text{Log}(1+i)$  é expresso por

$$\text{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i \frac{\pi}{4} \Rightarrow i \text{Log}(1+i) = i \ln|1+i| - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + i \ln \sqrt{2}$$

$$\text{Assim, } (1+i)^i = e^{i \text{Log}(1+i)} = e^{-\frac{\pi}{4} + i \ln \sqrt{2}}.$$

Vejamos algumas semelhanças entre as potências complexas e as reais, no que se refere a propriedades. Mas nem todas as propriedades são válidas, já que, dependendo do ramo em que estivermos considerando, obtemos outros valores.

Exemplo. Qual o valor de  $((1+i)^i)^{-1}$ ? Será o mesmo valor de  $(1+i)^{-i}$ ?

$$\text{Solução: Sabemos que } (1+i)^i = e^{-\frac{\pi}{4} + i \ln \sqrt{2}} \Rightarrow ((1+i)^i)^{-1} = \left(e^{-\frac{\pi}{4} + i \ln \sqrt{2}}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\left(e^{-\frac{\pi}{4}+i\ln\sqrt{2}}\right)^{-1} = \left(e^{-\frac{\pi}{4}}\right)^{-1} \cdot \left(e^{i\ln\sqrt{2}}\right)^{-1} = \left(e^{\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \left(e^{-i\ln\sqrt{2}}\right) = e^{\frac{\pi}{4}-i\ln\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\left((1+i)^i\right)^{-1} = e^{\frac{\pi}{4}-i\ln\sqrt{2}}. \quad \text{Por outro lado, } (1+i)^{-i} = e^{-i\text{Log}(1+i)} = e^{-i(\ln\sqrt{2}+\frac{i\pi}{4})} =$$

$$e^{\frac{\pi}{4}-i\ln\sqrt{2}} = \left((1+i)^i\right)^{-1} \Rightarrow (1+i)^{-i} = \left((1+i)^i\right)^{-1}.$$

Exemplo. Calcule o valor de  $(i^i)^i$ , associado ao logaritmo principal.

Solução: Por definição, temos que  $i^i = e^{i\text{Loz}|i|} = e^{i(0+\frac{i\pi}{2})} = e^{-\frac{\pi}{2}}$ , assim  $(i^i)^i = \left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^i \Rightarrow$   
 $\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)^i = e^{i\text{Log}\left|e^{-\frac{\pi}{2}}\right|} = e^{i(\ln e^{-\frac{\pi}{2}}+i0)} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i \Rightarrow (i^i)^i = -i = i^{i.i}$ . Até aqui ocorreu uma compatibilidade entre as propriedades das potências reais e complexas. Mas isso não ocorre sempre, nem nas potências e nem nos logaritmos complexos. Vejamos alguns casos:

Exemplo. Calcule o valor de  $\text{Loz}(-i)$ .

Solução: Pela definição, temos que  $\text{Loz}(-i) = \ln|-i| + \frac{3\pi i}{2} = 0 + \frac{3\pi i}{2} = \frac{3\pi i}{2}$ , o que nos diz que  $2\text{Loz}(-i) = 3\pi i \Rightarrow \text{Loz}(-i) + \text{Loz}(-i) = 3\pi i \neq \text{Log}[(-i) \cdot (-i)] = \text{Log}(-1) = \pi i$ . De fato, nem todas as propriedades dos logaritmos reais são válidas nos logaritmos complexos. Nas potências também temos algumas diferenças entre reais e complexas.

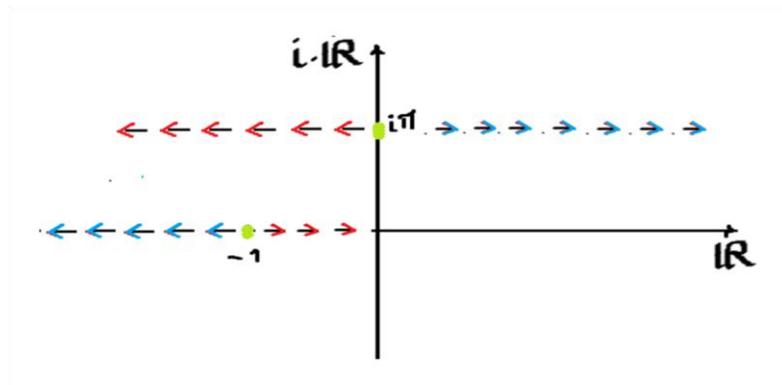
Exemplo. Calcule  $\text{Loz}(-1)$ .

Solução: Temos que,  $\text{Log}(-1) = \ln|-1| + i\pi$ , já que  $\pi = \text{Arg}(k), \forall (k < 0) \in \mathbb{R}$ . Daí,  
 $\text{Log}(-1) = \ln|-1| + i\pi = 0 + i\pi = i\pi$ .

Vejamos o que acontece quando tentamos esboçar a imagem de  $\text{Log}(k)$ , quando  $k$  percorre a parte negativa da reta. Sabemos que quando  $x \rightarrow 0, \ln(x) \rightarrow \infty$ , sabe-se também que  $\text{Log}(z) = \ln|z| + i \cdot \text{Arg}(z)$ . Assim quando  $0 < |k| < 1$ , obtemos  $\ln|k| < 0$  e que quando  $1 < |k|$  teremos que  $0 < \ln|k|$ . Necessariamente temos que quando  $|k| = 1$ ,  $\ln|k| = 0$ .

Assim, quando  $k$  se aproxima de zero, no intervalo  $[0; 1]$ , terá como imagem a parte negativa da reta imaginária  $r: z(k) = \ln|k| + i\pi; (k < 0) \in \mathbb{R}$ , que pelo esquema abaixo está em vermelho. Da mesma forma  $k$  percorre o intervalo  $(-\infty; 1]$ , sua imagem percorre a parte positiva da reta imaginária, que no esquema é a parte azul.

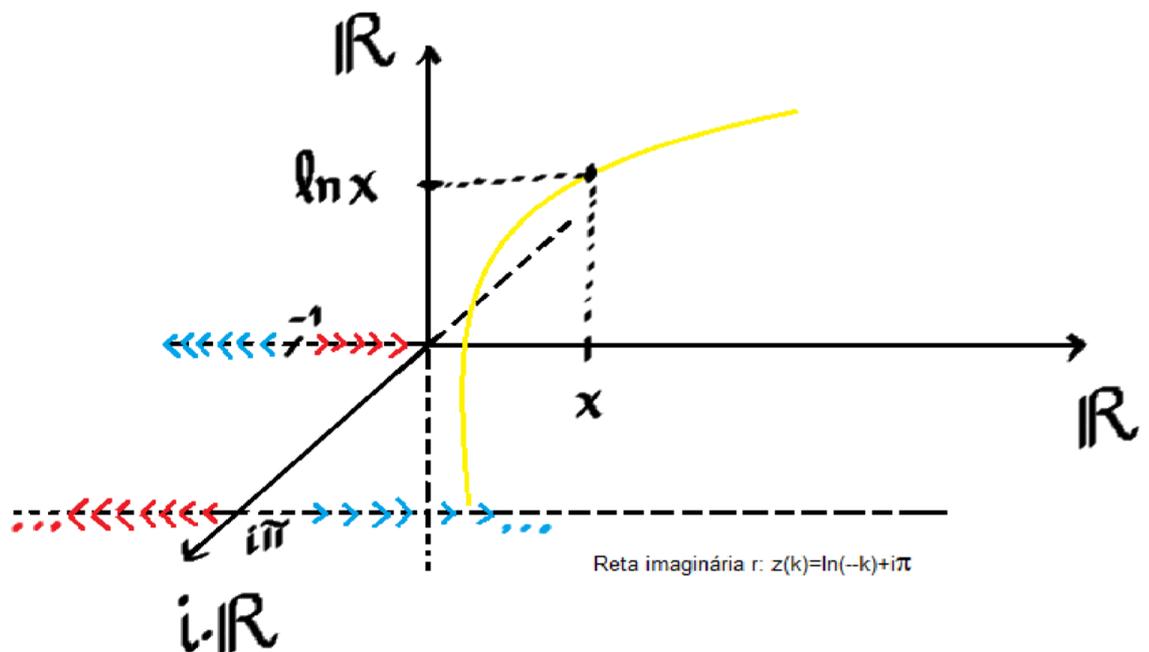
Figura 35 - O logaritmo principal e uma reta horizontal.



Fonte: elaborada pelo autor

O que acontece então se estendermos o domínio, retirando o zero, para toda a reta? Sabemos que quando número considerado é real e positivo, obteremos o gráfico do logaritmo natural, já que o argumento desse número é zero. Uma tentativa de entender o gráfico da função  $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{C}$  esboçada abaixo:

Figura 36 - Os logaritmos negativos e retas imaginárias.



Fonte: elaborada pelo autor

### 3 COMBINATÓRIA

#### 3.1 RAÍZES DA UNIDADE E MARCADORES

Exemplo: Calcule  $\sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k}$ .

Seja  $f: \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ , onde  $f(z) = (z + 1)^n$  e  $f \in \mathbb{C}[X]$ . Aqui iremos admitir a validade da identidade  $(z + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k$ . Analisemos o termo  $f(w^j)$ , onde  $w = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  é uma raiz cúbica da unidade. Temos que,

$$\begin{aligned} f(w^j) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (w^j)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^{jk} \Rightarrow \sum_{j=0}^2 f(w^j) = \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} w^{jk} \Rightarrow \\ \sum_{j=0}^2 f(w^j) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^2 \binom{n}{k} w^{jk} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^2 w^{jk} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Sigma$

$\sum_{j=0}^2 f(w^j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^2 w^{jk}$ . Como  $w^3 = 1$  temos que  $1 + w + w^2 = 0$  daí vem a justificativa do somatório até dois, porque  $(2; 3) = 1$  formando assim um sistema de resíduos completo em  $\mathbb{Z}_3$ . Façamos um esquema para melhor entendermos:

Se,  $k \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow k + 2 \equiv 2 \pmod{3}$ ,  $k \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow k + 2 \equiv 0 \pmod{3}$  e

$k \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow k + 2 \equiv 1 \pmod{3}$ .

Então ao multiplicarmos  $\sum_{j=0}^2 f(w^j) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^2 \binom{n}{k} w^{jk}$  por  $w^{2j}$  obtemos ,

$\sum_{j=0}^2 w^{2j} f(w^j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^2 w^{(k+2)j}$ . Observe que quando  $k \equiv 1 \pmod{3}$  obtemos  $w^{(k+2)j} = 1$ , já que  $k + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ . Do contrário o termo  $\sum_{j=0}^2 w^{(k+2)j} = 0$ , já que  $1 + w + w^2 = 0$  e  $(2; 3) = 1$ , obtendo apenas um embaralhamento do sistemas de resíduos em  $\mathbb{Z}_3$ . Daí,

$$\sum_{j=0}^2 w^{2j} f(w^j) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^2 w^{(k+2)j} = 3 \sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} \Rightarrow$$

$$\sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=0}^2 w^{2j} f(w^j) = \frac{1}{3} \cdot \{ f(1) + w^2 f(w) + w f(w^2) \} \Rightarrow$$

$$\sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} \cdot \{ 2^n + w^2 (w + 1)^n + w (w^2 + 1)^n \} \Rightarrow$$

$$\sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} \cdot \{ 2^n + w^2 (-w^2)^n + w (-w)^n \} \Rightarrow$$

$$\sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} \cdot \{ 2^n + (-1)^n w^{2n+2} + (-1)^n w^{n+1} \} \Rightarrow$$

$$\sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} \cdot \{ 2^n + (-1)^n [w^{2n+2} + w^{n+1}] \}.$$

Note que,  $[w^{2n+2} + w^{n+1}] = -1$ . Isto deve-se ao fato que,  $1 + w + w^2 = 0$  e

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{3} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+2 \equiv 2 \pmod{3} \\ 2n+2 \equiv 1 \pmod{3} \\ 2n+2 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} n+1 \equiv 1 \pmod{3} \\ n+1 \equiv 2 \pmod{3} \\ n+1 \equiv 0 \pmod{3} \end{cases}$$

Gerando uma permutação no sistema de resíduos em  $\mathbb{Z}_3$ .

$$\text{Assim, } \sum_{k \equiv 1 \pmod{3}} \binom{n}{k} = \frac{1}{3} \cdot \{2^n + (-1)^{n+1}\}.$$

### 3.2 TEOREMA DA MULTISECÇÃO.

Seja  $f \in \mathbb{C}[X] - \{0\}$ , um polinômio de complexo, dado por  $f(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ .

Considere  $p$  primo ímpar e  $0 \leq r \leq p-1$ .

$$\text{Se } w^n \neq 1, \text{ então } \sum_{k \equiv r \pmod{p}} a_n = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \{w^{(p-1)rj} \cdot f(w^j)\}.$$

Demonstração:

Vamos analisar o termo  $f(w^j) = \sum_{k=0}^n a_k w^{jk}$ , onde  $w$  é a  $p$ -ésima raiz da unidade.

Temos que,

$$\sum_{j=0}^{p-1} f(w^j) = \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^n a_k w^{jk} = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{p-1} a_k w^{jk} = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{p-1} w^{jk}.$$

Observe que  $j \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$  formam um sistema de resíduos em  $\mathbb{Z}_p$ . Por um lado,

quando  $k \equiv r \pmod{p} \Rightarrow kj \equiv rj \pmod{p} \Rightarrow prj - rj + kj \equiv 0 \pmod{p}$ . Mas por outro,

temos que,  $\sum_{j=0}^{p-1} w^j = \frac{w^p - 1}{w - 1} = 0$ . Quando  $(k; p) = 1$ , sabemos que  $kj \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{p-1}\}$

ainda assim é um sistema de resíduos em  $\mathbb{Z}_p$ . Daí sendo  $(k; p) = 1$ , temos que

$$\sum_{j=0}^{p-1} w^{jk} = \frac{w^{pk} - 1}{w^k - 1} = 0 \text{ e } \sum_{j=0}^{p-1} w^{jk} = p \text{ do contrário. Sendo assim, multiplicando a expressão}$$

$$\sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{p-1} w^{jk}, \text{ por } w^{(p-1)rj}, \text{ com o intuito de marcar os índices } k \equiv r \pmod{p}, \text{ obtemos}$$

que,

$$\sum_{j=0}^{p-1} w^{(p-1)rj} f(w^j) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{p-1} w^{jk} \cdot w^{(p-1)rj} \Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} w^{(p-1)rj} f(w^j) = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{j=0}^{p-1} w^{(pr-r+k)j} \Rightarrow$$

$$\sum_{j=0}^{p-1} w^{(p-1)rj} f(w^j) = p \cdot \sum_{k \equiv r \pmod{p}} a_n, \text{ que é equivalente a igualdade do enunciado.}$$

### 3.3 O Paralelepípedo de Klarner.

Mais uma bela aplicação de raízes da unidade e combinatória. Seja  $P$  o paralelepípedo de dimensões  $(m \times n \times p)$ . Supondo possível a decomposição do cubo em peças de  $(1 \times 1 \times q)$ , então  $q|p$  ou  $q|n$  ou  $q|m$ .

Demonstração: Considere um tabuleiro de dimensões  $(m \times n)$ . Façamos o seguinte, vamos distribuir potências da  $q$  – raiz da unidade e avaliar a soma de cada tabuleiro, nesse caso o primeiro tabuleiro já que  $(m \times n \times 1) = (m \times n)$ . Seja  $w = e^{\frac{2\pi i}{q}}$  a  $q$  – raiz da unidade, agora vamos distribuir potências de  $w$  no tabuleiro.

$w^{1+1+1}$	$w^{1+2+1}$	$w^{1+3+1}$	$w^{1+4+1}$	.	$w^{1+n}$	$w^{n+2}$
$w^{2+1+1}$	$w^{2+2+1}$	$w^{2+3+1}$	.	.	.	$w^{n+3}$
$w^{3+1+1}$	.	.	.	.	.	.
				.	.	.
$w^{m+1}$	$w^{m+2}$			.	.	$w^{m+n}$
$w^{m+1+1}$	$w^{m+2+1}$			.	.	$w^{m+n+1}$

Aqui, nada mais é que uma matriz definida por  $A = [a_{i \times j}]$ , onde  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  e  $a_{i \times j} = w^{i+j+1}$ . Seja  $L_i = \sum_{j=1}^n w^{i+j+1}$  a soma dos elementos da  $i$  – ésima linha,

calculemos:

$$L_i = \sum_{j=1}^n w^{i+j+1} = w^{i+1} \cdot \sum_{j=1}^n w^j = w^{i+2} \cdot \sum_{j=1}^n w^{j-1} = w^{i+2} (1 + w^1 + w^2 + \dots + w^{n-1}) = w^{i+2} \left( \frac{w^n - 1}{w - 1} \right) \Rightarrow L_i = w^{i+2} \left( \frac{w^n - 1}{w - 1} \right).$$

Seja  $T_1 = \sum_{i=1}^m L_i$  a soma de todas as linhas do primeiro tabuleiro, o que iremos

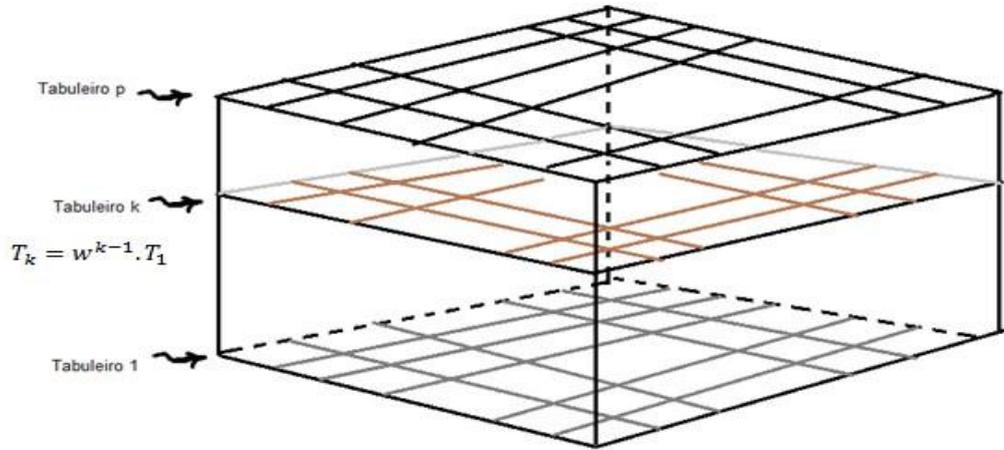
chamar de peso do primeiro tabuleiro. Calculando o primeiro peso temos que,

$$T_1 = \sum_{i=1}^m L_i = \sum_{i=1}^m \left[ w^{i+2} \left( \frac{w^n - 1}{w - 1} \right) \right] = \left( \frac{w^n - 1}{w - 1} \right) \cdot w^3 \cdot \sum_{i=1}^m [w^{i-1}] \Rightarrow$$

$T_1 = \left( \frac{w^n - 1}{w - 1} \right) \cdot w^3 \cdot (1 + w^1 + w^2 + \dots + w^{m-1}) = \left( \frac{w^n - 1}{w - 1} \right) \cdot w^3 \cdot \left( \frac{w^m - 1}{w - 1} \right)$ . Observe que para se calcular o peso de um  $k$  – ésimo tabuleiro qualquer basta multiplicar  $T_1$  por  $w^{k-1}$ , daí o peso do cubo pode ser expresso por  $C = \sum_{k=1}^p T_k$ .

Obtemos que,

**Figura 37 - O paralelepípedo de Klaner.**



Fonte: elaborada pelo autor

$$C = \sum_{k=1}^p T_k = \sum_{k=1}^p [w^{k-1} T_1] = T_1 \cdot \sum_{k=1}^p w^{k-1} = \left(\frac{w^n - 1}{w - 1}\right) \cdot w^3 \cdot \left(\frac{w^m - 1}{w - 1}\right) \cdot \sum_{k=1}^p w^{k-1} \Rightarrow$$

$$C = \left(\frac{w^n - 1}{w - 1}\right) \cdot w^3 \cdot \left(\frac{w^m - 1}{w - 1}\right) (1 + w^1 + w^2 + \dots + w^{p-1}) \Rightarrow$$

$$C = w^3 \cdot \left(\frac{w^m - 1}{w - 1}\right) \cdot \left(\frac{w^n - 1}{w - 1}\right) \cdot \left(\frac{w^p - 1}{w - 1}\right).$$

Esse é o peso do paralelepípedo. Por outro lado, estamos supondo possível a decomposição do paralelepípedo em peças de  $(1 \times 1 \times q)$ . Isto nos indica outra maneira de contabilizar o peso do cubo. De fato, em algum sentido tridimensional, temos que cada peça de  $(1 \times 1 \times q)$  foi enumerada de forma de o peso de cada peça é dado por

$$\text{Peso de uma peça qualquer} = A = w^{i+j+k} + w^{i+j+k+1} + w^{i+j+k+2} + \dots + w^{i+j+k+q-1},$$

onde  $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq k \leq p$ . Daí,

$$A = w^{i+j+k} (1 + w^1 + w^2 + \dots + w^{q-1}) = w^{i+j+k} \cdot \left(\frac{w^q - 1}{w - 1}\right) = 0, \text{ já que } w = e^{\frac{2\pi i}{q}}. \text{ Portanto o}$$

peso do cubo é igual a zero já que o peso de uma peça qualquer é zero. Concluimos que

$$C = w^3 \cdot \left(\frac{w^m - 1}{w - 1}\right) \cdot \left(\frac{w^n - 1}{w - 1}\right) \cdot \left(\frac{w^p - 1}{w - 1}\right) = 0, \text{ como o corpo dos números complexos satisfaz}$$

a propriedade de ser íntegro, temos que ou  $\left(\frac{w^m - 1}{w - 1}\right) = 0$  ou  $\left(\frac{w^n - 1}{w - 1}\right) = 0$  ou  $\left(\frac{w^p - 1}{w - 1}\right) =$

0. Considere  $\left(\frac{w^m-1}{w-1}\right) = 0$ . Isto nos diz que,  $\left(\frac{w^m-1}{w-1}\right) = 0 \Rightarrow w^m - 1 = 0 \Rightarrow w^m =$

$1 \Rightarrow e^{\frac{2\pi mi}{q}} = 1 \Rightarrow q|m$ . O argumento é análogo para os outros casos.

## 4 CONCLUSÃO

Quando o estudante do ensino médio tem um primeiro contato com os números complexos, quase que em uma totalidade, pergunta-se o porquê de estudar estes números e onde usar todos estes conceitos, isso ocorre até mesmo com os alunos de graduações em áreas afins. Nota-se que para responder estas perguntas, o aluno deve adquirir uma maturidade científica. Aí se encontra a dificuldade do professor, os livros que os alunos normalmente tem contato, na maioria das vezes, deixam a riqueza das aplicações de lado dando ênfase a parte teórica ainda assim muito superficial, na maioria dos casos, obscurecendo as ideias. Claro que os exemplos e exercícios resolvidos no presente texto são apenas alguns das inumeráveis possibilidades. Para os interessados em aprofundar o conhecimento nesta área, citamos algumas referências [1], [2] e [5]. Estes livros tem como foco o cálculo diferencial com funções complexas de variável complexas, abordando temas com sequências, séries, diferenciabilidade, as condições de Riemann e sua interpretação geométrica. Além da teoria da integral, o teorema de Cauchy, singularidades, pólos e resíduos. Algumas aplicações em física são expostas em [1], na modelagem da mecânica dos fluidos.

## REFERÊNCIAS

ÁVILA, G.S.S. **Variáveis complexas e aplicações**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

BROWN, J.W.; CHURCHILL, R.V. **Variáveis Complexas e suas aplicações**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1975.

FERNANDEZ, C.S; BERNARDES, N.C. **Introdução às funções de uma variável complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

HEFEZ, A; VILLELA, M.L.T. **Polinômios e equações algébricas**. Rio de Janeiro:[s.n.], 2012.

NETO, A.C.M. **Tópicos de matemática elementar: polinômios**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

NETO, A.L. **Funções de uma variável complexa**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

UCHÔA, V.D. **Substituições envolvendo números complexos**. Rio de Janeiro: OBM, 2011.