



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DO CEARÁ**  
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIAS**  
**CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL**

**JOSÉ BERNARDO DE ARAÚJO TORRES**

**TESSELAÇÕES PLANAS: APRESENTAR AS TESSELAÇÕES DO PLANO E**  
**ALGUMAS APLICAÇÕES NAS OBRAS DE MAURITS CORNELIS ESCHER**

**FORTALEZA – CEARÁ**

**2017**

JOSÉ BERNARDO DE ARAÚJO TORRES

TESSELAÇÕES PLANAS: APRESENTAR AS TESSELAÇÕES DO PLANO E  
ALGUMAS APLICAÇÕES NAS OBRAS DE MAURITS CORNELIS ESCHER

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro

FORTALEZA – CEARÁ  
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação

Universidade Estadual do Ceará

Sistema de Bibliotecas

Torres, José Bernardo de Araújo.

Tesselações planas: apresentar as tesselações do plano e algumas aplicações nas obras de Maurits Cornelis Escher [recurso eletrônico] / José Bernardo de Araújo Torres. - 2017.

1 CD-ROM: il.; 4 ¼ pol.

CD-ROM contendo o arquivo no formato PDF do trabalho acadêmico com 88 folhas, acondicionado em caixa de DVD Slim (19 x 14 cm x 7 mm).

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual do Ceará, Centro de Ciências e Tecnologia, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2017.

Área de concentração: Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro.

1. Matemática. 2. Arte. 3. Tesselações. 4. Geometria. I. Título.

JOSÉ BERNARDO DE ARAÚJO TORRES

TESSELAÇÕES PLANAS: APRESENTAR AS TESSELAÇÕES DO PLANO E  
ALGUMAS APLICAÇÕES NAS OBRAS DE MAURITS CORNELIS ESCHER

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências e Tecnologias da Universidade Estadual do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática em Rede Nacional. Área de concentração: Matemática

Aprovada em: 28 de agosto de 2017

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Claudemir Silvino Leandro (Orientador)  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro  
Universidade Estadual do Ceará (UECE)



Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo  
Universidade Federal do Ceará – (UFC)

Dedico esse trabalho a Deus, ao meu pai Benedito Torres (*in memoriam*), a minha mãe Bibil Torres, a minha esposa Daniela Torres, ao meu filho Artur Bernardo, a minha filha Ana Clara e a maior incentivadora de todo meu mestrado, minha sogra a professora Zélia Pinheiro Alan.

## AGRADECIMENTOS

À Deus por ter oportunizado em minha vida esse momento tão significativo pra mim, do ponto de vista profissional e mais ainda do ponto de vista pessoal.

Aos idealizadores do PROFMAT. Durante a minha graduação que ocorreu na década de 1980, eu sonhava em fazer um mestrado em matemática, mas sentia que esse sonho estava muito distante das minhas condições de um modo geral. Foi então que surgiu o PROFMAT, oferecendo condições para que professores como eu fizessem um mestrado. Começo dizendo isso porque não consigo deixar de lembrar com gratidão aos que tiveram essa iniciativa e aos que a apoiaram. Portanto sou grato a Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior – CAPES, por ter tomado a iniciativa e que ainda me auxiliou financeiramente nesse período com uma bolsa de muita serventia para a logística necessária; sou grato a Sociedade Brasileira de Matemática - SBM que coordena e sou grato ao Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA pelo apoio. Como as ações públicas dependem de quem está no poder, pois dependem de vontade e determinação política, devo dizer de minha gratidão ao Ministro da Educação na época da fundação do PROFMAT o professor Fernando Haddad e principalmente ao Presidente da República que muito investiu na educação de um modo geral e nesse particular na educação de ensino superior, o Sr. Luis Inácio Lula da Silva. Aos meus amados professores, todos com muito compromisso e competência, nunca se negaram a nos atender mesmo além do tempo devido. Faço questão de citar todos os nomes para que não corra o risco de no futuro minha memória cometer uma injustiça: João Marques, Tiago Caúla, João Montenegro, Claudemir Leandro (meu orientador), Ulisses Parente, Hemínio Borges, Ana Pinheiro e mesmo não mais participando da equipe de professores do Mestrado, não poderia deixar de citar o professor que me deu a notícia tão esperada de minha vaga no PROFMAT, e que, portanto, com quem primeiro partilhei a minha enorme alegria, como também quem me acolheu no momento determinante do Mestrado que foi na minha matrícula, o grande professor Guilherme Ellery. Por fim ao professor da UFC Marcelo Ferreira de Melo que fez parte da banca. A todos minha mais profunda gratidão.

Aos meus colegas de turma que tornaram-se meus grandes amigos. Todos colaboraram com muito companheirismo e com saberes que por muitas vezes partilhavam comigo. Cito os que participaram do início até aqui: Diarley Emanuel Lacerda de Almeida Loiola Sena, José Aldeci de Lima Silva, Albimar Silva Neri, João Mendes Barroso Filho, Marcelo de Castro Soares Alencar, Sérgio Augusto Coelho Monteiro Junior e deixo por último esses três, Gerlúcio Silva de Lima, Jonathan Araújo Barbosa e José Ivan Esteves Vieira, pois se

juntaram a mim e fizemos um grupo de estudo com encontros frequentes. Esses encontros foram realizados na própria Universidade Estadual do Ceará – UECE, no bloco do mestrado que tão bem nos acolheu durante todo curso; no Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará – UFC; na cidade de Caucaia, na residência do Ivan Vieira ou em minha residência na minha querida cidade de Barreira, a eles uma certeza da saudade permanente em nossas vidas dos nossos belos encontros.

À minha escola Ensino Médio Danísio Dalton da Rocha Corrêa, onde trabalho, agradeço aos membros do Núcleo Gestor a professora Rosalva Girão e os professores Francisco Feitosa e Jhonnata Batista, pela solidariedade que me emprestaram nos momentos em que precisava estudar.

Ao colega professor de Matemática, meu ex-aluno no ensino médio, egresso da primeira turma do PROFMAT, premiado pelo excelente desempenho no mestrado, o Prof. Mestre Gustavo Oliveira Lima Júnior, minha mais profunda gratidão pela ajuda vital que me disponibilizou no início dessa caminhada.

À minha esposa Daniela Torres pelos dias de afastamento que a necessidade de estudo impôs e pelas orações com que rogava a Deus o meu êxito, como também a paciência de minha filha Ana Clara e do meu filho Artur Bernardo pela ausência em alguns momentos que o dever de pai impunha.

À minha sogra professora Zélia Pinheiro Alan, pelo acolhimento em Fortaleza, na sua casa nos dias que antecediam as provas, onde me recolhia para estudar. Agradeço pelo interesse que sempre demonstrou por essa empreitada em minha vida e principalmente pelas orações e velas acesas pra Nossa Senhora de Fátima a quem pedia pelo meu sucesso. Rogo a Deus muita saúde e muitos anos de vida pra senhora.

À minha mãe a D. Bibil Torres, pela energia, pela alegria, força e fé em Deus que sempre apresentou como exemplo de vida e muito me serviram nessa luta. Agradeço aos meus quatro irmãos e minhas oito irmãs, cunhados e cunhadas, sobrinhos e sobrinhas enfim a toda família Araújo Tores, que sempre me davam forças nos momentos de dificuldades e pelas orações que todos e todas fizeram a Deus para que eu chegasse até aqui.

A todos vocês sou profundamente grato.

“A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria.”

(Paulo Freire)

## RESUMO

Esse trabalho mostra a relação existente entre a Matemática e a Arte - a Geometria Plana e a Arte gráfica das Tesselações de Maurits Cornélis Escher. Para entendermos esse encontro, mostramos nos dois primeiros capítulos um pouco da vida do artista e em que momento ele se encantou com as Tesselações e as técnicas usadas na sua realização. No terceiro capítulo fizemos um estudo das isometrias no plano – translações, rotações e reflexões, finalizando com o teorema das três reflexões. No quarto capítulo definimos Tesselações e seus principais tipos – monoédricas, regulares, semirregulares, demirregulares, periódicas e não periódicas. Em seguida fazemos um estudo das Tesselações regulares para em seguida, de forma mais minuciosa apresentamos as Tesselações semirregulares nos seus diversos tipos. E para finalizar, no quinto capítulo apresentamos algumas Tesselações de M. C. Escher e as isometrias usadas pelo artista para sua construção.

**Palavras-chave:** Matemática. Arte. Tesselações. Geometria.

## ABSTRACT

This work shows the relationship between Mathematics and Art - the Flat Geometry and the Graphic Art of Maurits Cornelis Escher's Thessaloniki. To understand this encounter, we show in the first two chapters a little of the artist's life and in what moment he was enchanted with the Thessalonings and the techniques used in its realization. In the third chapter we did a study of the isometries in the plane - translations, rotations and reflections, ending with the theorem of the three reflections. In the fourth chapter we define Tesselações and its main types - monohedral, regular, semi-regular, demireregular, periodic and non-periodic. Next we make a study of the regular Thessaloncies, and then, in a more detailed way, we present the semi-regular Thessalonies in their various types. And to conclude, in the fifth chapter we present some Tesselações of M.C. Escher and the isometries used by the artist for its construction.

**Keywords:** Mathematics. Art. Thessaloniki. Geometry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1 -</b>	<b>Queda d'água – Litografia 1961 .....</b>	<b>17</b>
<b>Figura 2 -</b>	<b>Castrovalva (1930) – Litografia .....</b>	<b>21</b>
<b>Figura 3 -</b>	<b>Oito Cabeças (1922) – Xilogravura .....</b>	<b>23</b>
<b>Figura 4 -</b>	<b>Quadrúpedes (1922) - lápis e aquarela .....</b>	<b>24</b>
<b>Figura 5 -</b>	<b>Mosaicos de Alhambra.....</b>	<b>25</b>
<b>Figura 6 -</b>	<b>Translação .....</b>	<b>26</b>
<b>Figura 7 -</b>	<b>Rotação .....</b>	<b>27</b>
<b>Figura 8 -</b>	<b>Reflexão em relação à reta <math>r</math> .....</b>	<b>27</b>
<b>Figura 9 -</b>	<b>Distância <math>d(P_1, P_2)</math> entre dois pontos <math>P_1 = (x_1, y_1)</math> e <math>P_2 = (x_2, y_2)</math> .....</b>	<b>29</b>
<b>Figura 10 -</b>	<b>Se um ponto <math>R</math> está na reta <math>r</math>, então <math>R_1</math> está na reta <math>r_1</math> .....</b>	<b>31</b>
<b>Figura 11 -</b>	<b>Toda isometria é sobrejetiva .....</b>	<b>33</b>
<b>Figura 12 -</b>	<b>Translação <math>t_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)</math> .....</b>	<b>34</b>
<b>Figura 13 -</b>	<b>Reflexão <math>\bar{r}(x_1, y_1) = (x_1, -y_1)</math> e <math>\bar{r}(x_2, y_2) = (x_2, -y_2)</math> .....</b>	<b>35</b>
<b>Figura 14 -</b>	<b>Rotação de centro <math>O</math> e ângulo <math>\theta</math>, leva <math>P_1</math> em <math>P'_1</math> .....</b>	<b>35</b>
<b>Figura 15 -</b>	<b>Translação do ponto <math>P = (a, b)</math> para a origem <math>O</math> por <math>t^{-1}_{(a,b)}</math> .....</b>	<b>39</b>
<b>Figura 16 -</b>	<b>Rotação de um ângulo <math>\theta</math> do plano <math>\mathbb{R}^2</math> pela rotação <math>r_\theta</math> em torno do ponto <math>P = (a, b)</math> .....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 17 -</b>	<b>Translação do plano <math>\mathbb{R}^2</math> para o ponto <math>P = (a, b)</math> .....</b>	<b>40</b>
<b>Figura 18 -</b>	<b>Translação de <math>P</math> para <math>P'</math>. Reflexões de <math>P</math> para <math>P_1</math>, de <math>P_1</math> para <math>P_2</math>, de <math>P_2</math> para <math>P_3</math> e de <math>P_3</math> para <math>P_4 = P'</math> .....</b>	<b>42</b>
<b>Figura 19 -</b>	<b>Rotação de <math>P</math> para <math>P'</math>. Reflexão de <math>P</math> para <math>P_1</math>, rotação de <math>P_1</math> para <math>P_2</math>, reflexão de <math>P_2</math> para <math>P_3</math> e rotação <math>P_3</math> para <math>P_4 = P'</math> .....</b>	<b>43</b>
<b>Figura 20 -</b>	<b>Reflexão com deslizamento: <math>(t_{(c,ac)} \circ \bar{r}_m)(x, y) = t_{(c,ac)}(\bar{r}_m(x, y)) = t_{(c,ac)}(x_1, y_1) = (x_2, y_2)</math>....</b>	<b>45</b>
<b>Figura 21 -</b>	<b><math>f</math> com três pontos fixos <math>A, B</math> e <math>C</math> não colineares, <math>f = I_d</math> .....</b>	<b>47</b>
<b>Figura 22 -</b>	<b>Uma rotação igual à composição de duas reflexões. <math>\bar{r}_m(P) = P_1</math>, <math>\bar{r}_l(P) = P_2</math>, <math>\bar{r}_l(P_1) = P_3</math> e <math>(\bar{r}_m \circ \bar{r}_l)(P) = P_3</math> .....</b>	<b>49</b>
<b>Figura 23 -</b>	<b>Tesselação não simétrica .....</b>	<b>52</b>
<b>Figura 24 -</b>	<b>Tesselação simétrica (Hexágono regular) .....</b>	<b>53</b>
<b>Figura 25 -</b>	<b>Tesselação simétrica (Quadrado) .....</b>	<b>53</b>

Figura 26 -	Simetrias do quadrado .....	54
Figura 27 -	Nós e vértices: 4 vértices ( $A, B, C, D$ ) e 5 nós ( $A, B, C, D, F$ ) .....	55
Figura 28 -	Tesselação Monoédricas: polígonos congruentes entre si .....	55
Figura 29 -	Tesselação regular $\{3,6\}$ .....	56
Figura 30 -	Tesselação semirregular (4,8,8) .....	57
Figura 31 -	Tesselação demirregular. Nós diferentes: (3,3,3,3,3,3) e (3,4,3,3,4). .....	57
Figura 32 -	Tesselação periódica .....	58
Figura 33 -	Quadriláteros irregulares (protoladrilhos): kite(pipa) e dart(dardo) .....	58
Figura 34 -	Tesselação aperiódica formada pelos protoladrilhos <i>kite</i> e <i>dart</i> .....	59
Figura 35 -	Únicos tipos de Tesselações regulares .....	60
Figura 36 -	Divisão de um dos $q$ polígonos regulares em $p$ triângulos .....	61
Figura 37 -	Tesselação semirregular do tipo (4,8,8) .....	63
Figura 38 -	Tesselação semirregular do tipo (3, $b, c$ ) .....	64
Figura 39 -	Tesselação semirregular do tipo (3, 12, 12) .....	65
Figura 40 -	Tesselação semirregular tipo (5, $c, c$ ) .....	66
Figura 41 -	Tesselação semirregular ( $a, b, c$ ), onde $a$ é ímpar .....	67
Figura 42 -	Tesselação semirregular (4, $b, c$ ) .....	69
Figura 43 -	Tesselação semirregular (4,6,12) .....	71
Figura 44 -	Tesselação semirregular (3, $b,c,d$ ) .....	72
Figura 45 -	Tesselações semirregulares (3, $b, c, d, e$ ) .....	74
Figura 46 -	Tesselação semirregular (3, 4, 3, 3, 4) .....	75
Figura 47 -	Tesselação semirregular (3, 3, 3, 3, 6) .....	75
Figura 48 -	Tesselação por rotação .....	77
Figura 49 -	Passo a passo para formar uma figura base de uma Tesselação a partir de um triângulo equilátero com rotações de regiões .....	78
Figura 50 -	Passo a passo para formação de uma Tesselação com peixes que tem como base um triângulo equilátero .....	79
Figura 51 -	Tesselação por rotação com figuras humanas. Escher – Circulação de 1938 .....	80
Figura 52 -	Tesselação por translação .....	80
Figura 53 -	Passo a passo para formar uma figura base de uma tesselação a partir do quadrado com translações de regiões .....	81

<b>Figura 54 -</b>	<b>Formação de uma tesselação tendo como figura base um pássaro ...</b>	<b>82</b>
<b>Figura 55 -</b>	<b>Tesselação por translação (Escher – 1983) .....</b>	<b>82</b>
<b>Figura 56 -</b>	<b>Tesselação por reflexão Escher - Anjos e Demônios, lápis, tinta-da-china, crayon e guache - 1941.....</b>	<b>83</b>
<b>Tabela 1 -</b>	<b>Tabela de Tesselações (3, <i>b</i>, <i>b</i>)</b>	<b>68</b>
<b>Tabela 2 -</b>	<b>Tesselação tipo (4, <i>b</i>, <i>c</i>) com <i>b</i> e <i>c</i> pares .....</b>	<b>70</b>

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1	A MATEMÁTICA E A ARTE .....	15
1.2	O ARTISTA E A TÉCNICA .....	16
<b>2</b>	<b>MAURITS CORNELIS ESCHER .....</b>	<b>20</b>
2.1	A HISTÓRIA DA ARTE E DA VIDA DE ESCHER .....	20
2.2	A ALHAMBRA E A ARTE DE ESCHER .....	23
<b>3</b>	<b>ISOMETRIAS .....</b>	<b>26</b>
3.1	ISOMETRIAS NO PLANO .....	26
3.2	ISOMETRIAS NO PLANO EUCLIDIANO COM COORDENADAS .....	28
3.3	ROTAÇÕES E REFLEXÕES .....	39
3.4	REFLEXÕES COM DESLIZAMENTOS .....	44
3.5	O TEOREMA DAS TRÊS REFLEXÕES .....	46
<b>4</b>	<b>TESSELAÇÕES .....</b>	<b>51</b>
4.1	TESSELAÇÕES E SIMETRIAS .....	51
4.2	TIPOS DE TESSELAÇÕES NO PLANO .....	54
<b>4.2.1</b>	<b>Monoédricas .....</b>	<b>55</b>
<b>4.2.2</b>	<b>Regulares .....</b>	<b>56</b>
<b>4.2.3</b>	<b>Semirregulares .....</b>	<b>56</b>
<b>4.2.4</b>	<b>Demirregulares .....</b>	<b>57</b>
<b>4.2.5</b>	<b>Periódicas .....</b>	<b>58</b>
<b>4.2.6</b>	<b>Não periódicas ou aperiódicas .....</b>	<b>58</b>
4.3	TESSELAÇÕES REGULARES .....	59
4.4	TESSELAÇÕES SEMIRREGULARES .....	62
<b>4.4.1</b>	<b>Tesselações Semirregulares do tipo (a,b,c) .....</b>	<b>63</b>
4.4.1.1	Tesselações Semirregulares do tipo (a,b,c), onde pelo menos um dos valores é ímpar .....	64
4.4.1.2	Tesselações Semirregulares do tipo (a,b,c), onde todos os valores são pares .....	69
<b>4.4.2</b>	<b>Tesselações Semirregulares do tipo (a, b, c, d) .....</b>	<b>71</b>

<b>4.4.3</b>	<b>Tesselações Semirregulares do tipo <math>(a, b, c, d, e)</math> .....</b>	<b>73</b>
<b>5</b>	<b>A MATEMÁTICA E NA ARTE .....</b>	<b>77</b>
<b>5.1</b>	<b>ALGUMAS APLICAÇÕES NAS OBRAS DE ESCHER .....</b>	<b>77</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>84</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>86</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 A MATEMÁTICA E A ARTE

A Matemática e a Arte por vezes se relacionam, podendo ser na emoção sentida por quem as contempla ou até pelas técnicas e objetos concretos ou abstratos que utilizam. Esse trabalho que é a dissertação do curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – Profmat, realizado na Universidade Estadual do Ceará – UECE, vai oportunizar a quem o ler, essa constatação. E usaremos a Arte com Tesselacões do holandês Maurits Cornelis Escher. Mas antes de tratar do tema objeto desse trabalho devo trazer alguns elementos que me motivaram a manifestar minhas impressões sobre essa relação entre a Arte e a Matemática, em particular a Geometria Plana, nessa quadra de minha vida acadêmica. Sempre me encantei com a Geometria e cheguei a manifestar em várias ocasiões esse meu encantamento nas aulas de Geometria do Profmat tão bem proferidas pelo professor Tiago Caúla Ribeiro, nas apresentações das demonstrações de belos teoremas ou soluções de problemas mais elaborados. Note que aqui já qualifico esses teoremas de belos como se estivesse tendo um deleite visual ao admirar um quadro ou uma escultura. E faço isso com tranquilidade, afinal de contas o próprio professor Antonio Caminha Muniz Neto o faz quando escreve o prefácio de sua coleção de sucesso Tópicos de Matemática Elementar editada pela SBM, ao fazer referência aos teoremas de Geometria “[...] vários belos teoremas clássicos de Geometria”. (NETO, 2013, p. VII).

Em outra ocasião, essa bem antes de iniciar o mestrado, ainda na minha graduação, me deparo com outro prefácio de um livro de Matemática: Curso de Análise volume 1, publicado pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA do saudoso professor Elon Lages Lima, que nos deixou no dia 07 de maio de 2017, tendo vivido intensamente 87 anos, dos quais a sua grande maioria dedicados ao ensino da matemática. Ao iniciar o prefácio da primeira edição ele transcreve um diálogo entre o cantor e instrumentalista que fez sucesso no mundo todo com o jazz, Louis Armstrong e uma senhora:

“- What is jazz. Mr. Armstrong?

- My dear lady, as long as you have to ask that question, you will never know it.”

(LIMA, 1976).

Aqui cabe uma pergunta: que mensagem o professor Elon quis passar para o leitor de seu livro quando abre o prefácio que tem a missão de apresentar de forma sucinta o objetivo da obra, um diálogo com um artista sobre a sua Arte? Atrevo-me a dizer que mesmo o professor não fazendo mais nenhuma referência a este diálogo no prefácio do citado livro, ele quis passar a mensagem que essa parte da Matemática é uma obra de arte tal qual o jazz e, que, portanto, faz manifestar em quem a aprecia emoções diversas que o próprio texto parece não suscitar.

E por último, nas aulas de Geometria Analítica do Profmat com o professor Claudemir Silvino Leandro, que em certa ocasião relatava um diálogo que teve com um aluno em outra universidade, quando o aluno o perguntou e ele prontamente o respondeu:

“- Professor Claudemir pra que serve esse tema da Matemática?

- Para contemplação meu caro aluno. Afinal pra que serve uma pintura, uma escultura ou uma música?”

Confesso que, apesar de em algumas oportunidades em minha vida de professor/estudante ter sentido um prazer ao me deparar com algumas proposições de Matemática, sobretudo em Geometria, ainda não tinha ouvido um professor de Matemática com competência comprovada, expressar com tanta tranquilidade que a Matemática se iguala às obras de Arte nas diversas categorias. Claro que me senti representado e por isso, mesmo tendo a intensão de fazer esse trabalho em Geometria, mas não relacionado ao trabalho de um artista gráfico, me submeti ao conselho do Professor Claudemir Leandro, que orienta essa dissertação, a mudar para esse tema.

A primeira gravura de Escher que me deparei foi Queda d'água, na capa de um livro de Física do ensino médio, que pode ser vista na Figura 1. Essa gravura me levou ao encantamento de como não conseguia percorrer seus traços sem me perder da compreensão que meu juízo esperava, pois é a realidade em que vivo.

## 1.2 O ARTISTA E A TÉCNICA

Ao atender o conselho do professor Claudemir Leandro, fui conhecer um pouco da vida de Escher. Maurits Cornelis Escher (1898-1972) foi um artista gráfico holandês. Ficou conhecido pelas suas xilogravuras, litografias e meios-tons, que tendem a representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano, explorações do infinito e as metamorfoses - padrões geométricos entrecruzados que se transformam gradualmente para formas completamente diferentes.

Aqui trataremos da relação de parte da obra de M.C. Escher com a Geometria Plana no que se refere às Isometrias e isso diz respeito ao preenchimento regular do plano – as Tesselações. Tesselação ou recobrimento do plano é um padrão de figuras planas que cobrem inteiramente o plano sem superposições das figuras nem espaços vazios entre elas.

**Figura 1 – Queda d'água – Litografia 1961**



Fonte: <http://artefontedeconhecimento.blogspot.com.br>

Dizemos que as peças ou tesselas cobrem ou pavimentam o plano e que o padrão resultante é uma Tesselação ou pavimentação do plano. Também existem Tesselações de partes de um plano ou de outras superfícies como a esférica. As Tesselações ou ainda mosaicos foram usados desde a antiguidade em pisos e recobrimentos de paredes e como padrões para tapetes, móveis, tapeçarias, tecelagem, vestuário e outros objetos das civilizações babilônica, grega, chinesa, entre outras, sendo que muitos apresentam padrões geométricos com simetrias ornamentais, formando desenhos harmoniosos (BARBOSA, 1993), portanto as Tesselações estão presentes ao longo da história desde a arquitetura antiga

até a arte moderna em diferentes culturas. Porém, é recente a exploração das propriedades geométricas das Tesselacões por polígonos.

Antes de prosseguir apresentando um pouco da vida de Escher, entendemos ser de bom alvitre esclarecer ao leitor sobre as técnicas de xilografia e litografia usadas em sua arte.

Xilogravura ou xilografia significa gravura em madeira. É uma antiga técnica, de origem chinesa, em que o artesão utiliza um pedaço de madeira para entalhar um desenho, deixando em relevo a parte que pretende fazer a reprodução. Em seguida, utiliza tinta para pintar a parte em relevo do desenho. Na fase final, é utilizado um tipo de prensa para exercer pressão e revelar a imagem no papel ou outro suporte. Um detalhe importante é que o desenho sai ao contrário do que foi talhado, o que exige um maior trabalho ao artesão. Existem dois tipos de xilogravura: a xilogravura de fio e a xilografia de topo que se distinguem através da forma como se corta a árvore. Na xilogravura de fio (também conhecida como madeira à veia ou madeira deitada) a árvore é cortada no sentido do crescimento, longitudinal; na xilografia de topo (ou madeira em pé) a árvore é cortada no sentido transversal ao tronco. (<https://pt.wikipedia.org/wiki/Xilogravura>).

Litogravura ou Litografia trata-se de um método de impressão a partir de imagem desenhada sobre base, em geral de calcário especial, conhecida como "pedra litográfica". Após desenho feito com materiais gordurosos (lápiz, bastão, pasta etc.), a pedra é tratada com soluções químicas e água que fixam as áreas oleosas do desenho sobre a superfície. A impressão da imagem é obtida por meio de uma prensa litográfica que desliza sobre o papel. A flexibilidade do processo litográfico permite resultados diversos em função dos materiais empregados: em lugar da pedra, cada vez mais são usadas chapas de plástico ou metal, em particular de zinco. O desenho, por sua vez, altera sua fisionomia de acordo com o uso de pena, lápis ou pincel. Testes de cor, texturas, graus de luminosidade e transparência conferem às litografias distintos aspectos. (<http://7dasartes.blogspot.com.br/2011/09/o-que-e-litografia.html>).

A arte produzida por Tesselacões por vezes são contempladas sem que o espectador imagine que naquela disposição de polígonos ou figuras não poligonais justapostos existam propriedades de elementos da Geometria Plana, imaginando que ali se trata de uma obra de Arte sem rigor matemático. Pretendo nesse trabalho mostrar com contornos nítidos, sempre que puder, o uso que Escher fez das isometrias na divisão regular de superfícies, quando produz o recobrimento do plano com figuras diversas. Mas antes devemos conhecer um pouco da história da arte que encantou o mundo e também da vida desse grande artista. Um pouco da biografia de Escher se faz relevante, afinal ao conhecer a vida do artista, talvez nos facilite a desejada compreensão de sua arte além de, mesmo através de uma biografia, nos aproximar mais do sujeito do qual se escreve. Entendo que conhecer a biografia de alguém é de certa forma tornar-se um conhecido ou alguém que partilha a vida do biografado.

E para conhecer a vida de Escher, tive a grata felicidade de um colega e amigo do mestrado, Diarley Emanuel, disponibilizar-me por empréstimo um livro que apresenta a vida e a arte de Escher. E o que mais me anima na leitura desse livro é o fato do autor que se interessou pela vida e arte de Escher para escrevê-lo é um matemático. Esse fato nos leva a crer que o escritor de formação matemática enxergou na arte de Escher uma relação profunda com a matemática. Esse livro foi escrito por Bruno Ernst em 1978 e publicado pela editora Taschen, mas a edição que disponho é de 1991. Ernst conviveu com Escher durante doze meses através de visitas semanais que eram feitas de longas conversas. Dessa convivência tão intensa resultou uma amizade com base em confiança mútua. E dessa confiança Bruno Ernst produziu um livro de título **“O espelho mágico de M. C. Escher”**. Um livro que foi todo revisado pelo próprio Escher, o que nos garante, portanto a fidedignidade das informações. E é desse livro que colho as principais informações da vida de Escher.

Também tive acesso a um documentário no canal youtube, que recomendo para quem quiser conhecer um pouco do artista e da pessoa de Escher. O título desse documentário **“Escher – Metamorfose”**, onde se conhece um pouco do contexto social, político, econômico em que ele viveu, bem como parte de sua vida conjugal e familiar e ainda momentos que sofreu preconceito por causa de seus trabalhos. Esse documentário de 59 minutos se encontra no endereço <https://www.youtube.com/watch?v=pVwrUUwzBRo>.”

Ao nos aprofundar na vida de Escher percebemos facilmente que ele não era uma pessoa de boas relações sociais. Até chegou a escrever certa vez para um amigo: [...] “é uma pena que o mundo em que vivemos seja um caos tão sem esperança. É um mundo insondável, selvagem e perigoso, um jogo irracional. Eu, pessoalmente prefiro viver em abstrações que nada tem a ver com a realidade”.

Aqui pretendo discorrer sobre a vida de Escher até o momento em que na sua arte produziu Tesselacões. Depois trataremos das definições de Tesselacões, isometrias e os seus tipos - translação, rotação e reflexão. E por último identificaremos seu uso na obra de Escher.

Agora vamos nos deter na história de sua arte e de sua vida.

## 2 MAURITS CORNELIS ESCHER

### 2.1 A HISTÓRIA DA ARTE E DA VIDA DE ESCHER

Maurits Cornelis Escher nasceu no ano de 1898, em Leeuwarden capital da província da Frísia na Holanda, uma pequena cidade de 84,1 km<sup>2</sup> de extensão. Era filho de um engenheiro hidráulico. Escher nunca se destacou na escola, chegando a não alcançar em algumas oportunidades o desempenho mínimo para aprovação. Não se identificava muito com as ciências tradicionais, inclusive com a matemática. Porém começou a se destacar nas aulas de desenho, e como o seu pai achava que ele devia se profissionalizar na área de ciências exatas, o matriculou em 1919 na Escola de Arquitetura e Artes Decorativas na cidade de Haarlem, sob a orientação de um arquiteto bem renomado desta escola. Não precisou de muito tempo na Escola de Arquitetura para que seus professores concluíssem que Escher não tinha aptidão para ser Arquiteto. Escher não hesitou em se transferir para a área de Artes Decorativas, onde o professor de origem portuguesa Samuel Jesserum de Mesquita lhe ensinou xilogravura entre várias técnicas de gravuras. Nessa escola estudou até o ano de 1922, mas o seu professor De Mesquita, por quem Escher tinha elevada estima, nunca perdeu o vínculo com o artista, pois recebia frequentemente mostras dos trabalhos que Escher ia criando para que emitisse opinião sobre elas. Na primavera de 1922, Escher viajou para a Itália central interessado pelas paisagens e arquitetura a fim de reproduzi-las. Foi lá que Escher fez as primeiras xilogravuras. Uma senhora que estava hospedada na mesma pensão que Escher, vendo seu interesse, o sugeriu que fosse ao sul da Itália que certamente iria ter vasto material para trabalhar. E assim fez Escher. Lá realmente se encantou com as paisagens encontradas e com a arquitetura de elementos romanos, gregos e árabes. Na pensão onde se hospedara encontrou uma jovem de nome Jetta Umiker filha de um suíço que se tornou esposa de Escher em 1924. O pai de Jetta foi morar em um subúrbio de Roma no que fora acompanhado pelo novo casal. Em 1926 Escher se torna pai e então decide alugar um apartamento maior onde teve a sua disposição um quarto exclusivo para o seu estúdio e pela primeira vez sentiu que podia trabalhar com tranquilidade. Na Itália Escher viajava sempre na primavera em busca de paisagens que pudesse replicar usando a sua técnica de xilogravura ou litografia.

Abruzos é uma região da Itália Central onde as paisagens têm aspectos sombrios. Foi na primavera de 1929 que Escher viajou para lá. Em Castrovalva ele produziu uma de suas mais belas gravuras de paisagens em litografia – Castrovalva. Ver Figura 2.

Vários críticos elogiaram generosamente pela primeira vez uma obra de Escher. A paisagem representada em *Castrovalva* passa-nos uma impressão de uma vastidão ilimitada. Nessa época de sua vida, ele ainda era muito desconhecido. Tinha feitos algumas poucas exposições e ilustrou alguns livros. Vender uma obra era muito difícil, mas o pai de Escher tinha condições favoráveis e daí saía o amparo para o artista.

**Figura 2 – Castrovalva (1930) – Litografia**



Fonte: <https://theartstack.com/artist/m-c-escher/castrovalva>.

Somente bem mais tarde, em 1951 é que sua arte foi lhe render algum dinheiro que pudesse custear suas despesas. Nessa época Escher já era muito conhecido, mas não pelas gravuras, mas pela reprodução gráfica referente a propriedades matemáticas que o fascinava.

Voltando a sequência cronológica da vida do nosso artista, chegamos em 1935 e nesse período o fortalecimento do fascismo de Mussolini na Itália incomodava Escher que não suportava o fanatismo e a hipocrisia tão em voga na época. Envolvido no seu trabalho, nas suas próprias ideias, não sentia nenhum interesse pela política. O modelo Fascista era forte e tinha uma estratégia de conquista que atingisse o emocional das pessoas, então:

Os jovens e as crianças surgiram como o alvo principal da política educacional e de propaganda do Fascismo, pois através deles poderiam entrar na vida privada e pública da população italiana. As escolas, as universidades, as associações de trabalhadores (Dopolavoro), o cinema e as organizações da juventude assumiram a função de educar o “novo homem” e de divulgar a cultura política do novo regime. Nas instituições do Fascismo, meninos e meninas recebiam uma educação voltada para a vida fascista, onde aprendiam que valores internalizar, como se comportar no dia a dia, a quem idolatrar e que papéis sociais assumir. Os meninos eram educados para serem bons pais de família, bons trabalhadores e bons soldados, enquanto as meninas aprendiam que a função da mulher era cuidar do lar, do marido, da prole, além de reproduzir o maior número de filhos para que compusessem os exércitos de trabalhadores e soldados do Fascismo. (ROSA, 2009).

Quando George, o seu filho mais velho de nove anos foi obrigado a vestir o uniforme-Ballila da juventude fascista, Escher não suportando mais as características impositivas do regime de Mussolini, preferiu deixar a Itália, mudando-se para Suíça. Infelizmente a nova morada não dispunha de fontes inspiradoras, pois a paisagem que predominava nessa nova morada era a brancura da neve.

Escher fazia muitas viagens acompanhado de sua mulher Jetta, usando as gravuras que produzia como moeda de compra dos serviços das embarcações. E essas viagens, sobretudo as do sul da Espanha, tiveram uma grande influência em sua obra. Foi exatamente em uma dessas viagens com Jetta que estiveram em Granada na Espanha e visitaram a Alhambra pela segunda vez. Dessa vez passaram mais tempo do que da primeira, quando Escher já havia se encantado com os mosaicos dos mouros.

A cidade de Granada fica no coração da Andaluzia. Foi a primeira cidade da Espanha ocupada pelos mouros, ainda no século VIII e assim permaneceu até o século XV, quando foi conquistada pelos reis católicos. A Alhambra ou, preferencialmente, Alambra (em árabe: "a Vermelha") localiza-se na cidade Granada, em posição dominante no alto numa elevação arborizada na parte sudeste da cidade.

Trata-se dum rico complexo palaciano e fortaleza que alojava o monarca da Dinastia Nasrida e a corte do Reino de Granada. O seu verdadeiro atrativo, como noutras obras muçulmanas da época, são os interiores, cuja decoração está no cume da arte islâmica. Esta importante atração turística espanhola exhibe os mais famosos elementos da arquitetura islâmica no país, juntamente com estruturas cristãs do século XVI e intervenções posteriores em edifícios e jardins que marcam a sua imagem tal como pode ser vista na atualidade.

No interior do recinto da Alhambra fica o Palácio de Carlos V, um palácio erguido pelo Imperador Carlos V do Sacro Império Romano Germânico em 1527, juntamente com os vizinhos Generalife (uma villa que inclui extensos jardins e hortas) e o bairro do

Albaicín, constitui o sítio inscrito na lista de Património Mundial da UNESCO " Alhambra, Generalife e Albaicín, Granada".

A Alhambra foi a última resistência árabe na Espanha. É difícil saber o que é lenda ou o que de fato aconteceu na fortaleza: amores, conspirações, séculos de história. O domínio árabe deixou sua marca entalhada nas paredes. E foi exatamente de observações intensas feitas por Escher e sua esposa aos ornamentos mouriscos que decoravam o teto, o chão e as paredes da Alhambra que ele lançou os fundamentos para sua obra revolucionária no âmbito da divisão regular da superfície.

## 2.2 A ALHAMBRA E A ARTE DE ESCHER

Com relação à divisão cíclica da superfície Escher disse: “esta é a fonte mais rica de inspiração de onde jamais bebi e ela ainda não está seca, de modo algum”. Escreveu sobre esse tema um extenso ensaio com detalhes técnicos. A respeito das propriedades geométricas com as quais se deparou, disse ainda: “as leis matemáticas não são nenhuma invenções ou criações humanas. Elas “são”, elas existem completamente independentes da mente humana.” É bom informar que Escher, bem antes de se encantar com a Alhambra, já tinha uma predisposição para criar com a técnica da divisão regular da superfície. Em Haarlem, no ano de 1922, ainda na época que estudava com seu estimado professor De Mesquita, produziu a xilogravura Oito Cabeças, mostrada na Figura 3. Escher fez uma matriz onde gravou oito cabeças diferentes.

**Figura 3 – Oito Cabeças (1922) – Xilogravura**



Fonte: <http://papodesenho.blogspot.com.br/2013/01/m-c-escher-tessellations>

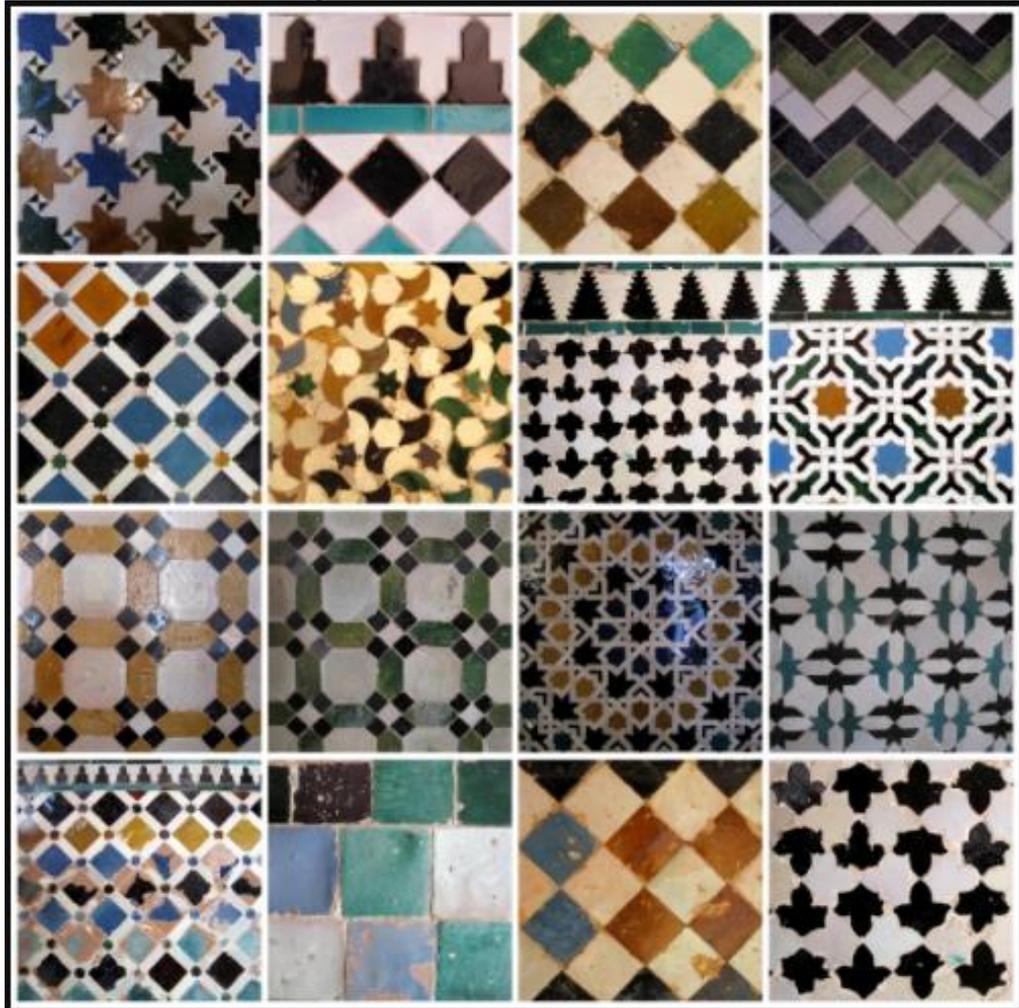
Já depois da primeira visita a Alhambra, Escher se sentiu motivado para as Tesselações e se esforçou para produzir um trabalho com essa técnica. Então como primeiro ensaio de divisão regular de superfícies, usando gravuras de animais, o que conseguiu fazer e com muito esforço, usando lápis e aquarela foi o desenho de quadrúpedes que mostramos na Figura 4.

**Figura 4 – Quadrúpedes (1922) - lápis e aquarela**



Fonte: (ERNST, 1991) O espelho mágico de M. C. Escher.

Mas agora, depois da segunda visita em 1936, mais demorada e com mais experiência, Escher enxergou mais uma vez que na divisão regular de uma superfície estão contidas muitas possibilidades. Ao regressar investigou profundamente as réplicas que tinham feito das ilustrações vistas em Alhambra. Na Figura 5 mostramos alguns desses mosaicos de Alhambra. Nesse período Escher leu livros sobre ornamentação e ensaios matemáticos que não compreendeu e em 1937, realizou em breves esboços, um sistema muito prático que, em 1941 e 1942, fixou por escrito.

**Figura 5 – Mosaicos de Alhambra**

Fonte: <http://www.elblogdelatabla.com/2013/08/mosaicos-luz-y-color-en-la-alhambra.html>.

Para entendermos melhor os padrões das Tesselções de Escher, é importante conhecermos alguns movimentos que podemos fazer com figuras do plano de modo que elas mudem de posição, mas mantenham as suas aparências: formas e tamanhos. Esses movimentos são estudados na matemática com o nome de Isometrias.

### 3 ISOMETRIAS

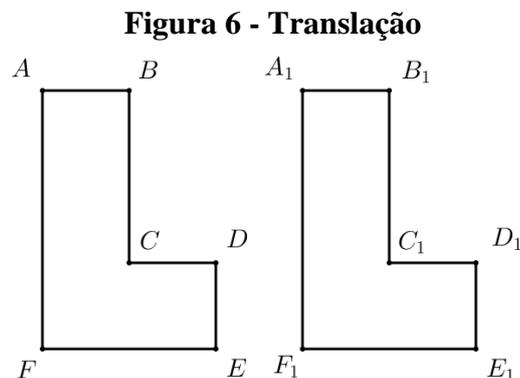
#### 3.1 ISOMETRIAS NO PLANO

Inicialmente vamos apresentar sem muito rigor matemático a definição de isometria e em seguida apresentaremos as isometrias como uma função definida do plano no plano.

Isometrias são transformações geométricas que preservam as distâncias entre os pontos e as amplitudes dos ângulos. Transformam uma figura em outra “geometricamente igual”: cada segmento da figura transformada tem o mesmo tamanho do seu correspondente na figura original, podendo variar a direção ou o sentido, e cada ângulo transformado mantém a sua amplitude inicial. Portanto, uma isometria pode mudar apenas a posição da figura na qual ela foi aplicada.

Existem exatamente quatro tipos de isometrias no plano: translação, rotação, reflexão, reflexão com deslizamento. Vamos trabalhar para identificar o uso dessas isometrias, ou seja, esses movimentos, em figuras planas. Nota-se facilmente que a reflexão com deslizamento é o fruto de uma reflexão seguida de uma translação ou de uma translação seguida de uma reflexão, então vamos tratar apenas das três isometrias. Para isso vamos preliminarmente, usando a intuição que a geometria plana nos oferece, verificar algumas propriedades dessas três transformações.

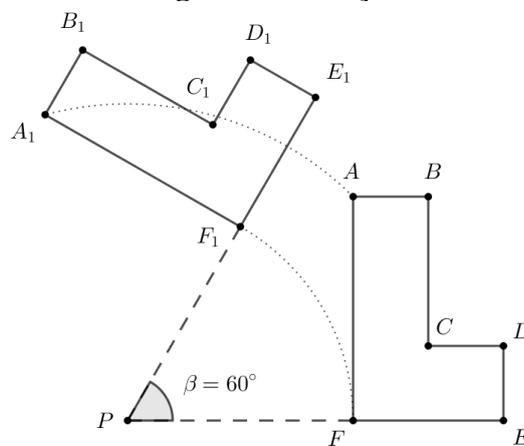
Em uma translação (Figura 6) temos que qualquer segmento de reta é transformado em um segmento de reta paralelo e com o mesmo comprimento; qualquer ângulo é transformado em um ângulo congruente (de mesma medida) e todos os pontos da figura inicial e os seus respectivos transformados definem a mesma direção, o mesmo sentido e estão à mesma distância.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em uma rotação (Figura 7) qualquer segmento de reta é transformado em um segmento de reta com o mesmo comprimento (não necessariamente paralelo). Qualquer ângulo é transformado em um ângulo congruente e para se definir uma rotação é necessário fixar um ponto do plano, digamos  $P$  e um ângulo segundo o qual será feita a rotação, digamos um ângulo de medida  $\beta = 60^\circ$ . Nesse caso, todos os pontos da figura inicial giram em torno do ponto  $P$ , segundo um ângulo de medida  $\beta = 60^\circ$  e um sentido. O sentido da rotação pode ser o mesmo dos ponteiros de um relógio (dito sentido negativo) ou contrário ao sentido dos ponteiros do relógio (dito sentido positivo).

**Figura 7 - Rotação**

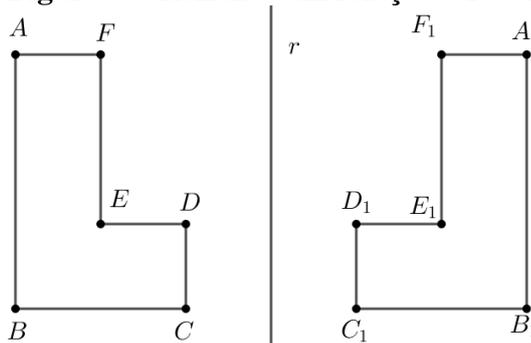


Fonte: Elaborada pelo autor.

Em uma reflexão qualquer segmento de reta é transformado em um segmento de reta com o mesmo comprimento (não necessariamente paralelo), qualquer ângulo é transformado em um ângulo congruente.

Para se fazer uma reflexão (Figura 8), precisamos de uma reta, digamos  $r$ . Nesse caso, a reflexão em torno de  $r$  deixa invariantes os pontos de  $r$  (transforma pontos de  $r$  neles próprios) e cada ponto  $F$  que não pertence a  $r$  é transformado em um ponto  $F_1$  tal que  $r$  é a mediatriz do segmento  $FF_1$ , ou seja, a distância de  $F$  a  $r$  é igual à distância de  $F_1$  a  $r$  e o segmento de reta determinado por  $F$  e  $F_1$  é perpendicular à reta  $r$ .

**Figura 8 – Reflexão em relação à reta  $r$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

É bom informar que existe uma reflexão – reflexão por um ponto – que equivale a uma rotação de  $180^\circ$ .

Sempre que possível, iremos apresentar as isometrias no plano sob o ponto de vista de duas abordagens da Geometria: a sintética e a analítica. Entendemos que o uso dessas duas abordagens fortalece a compreensão dos resultados apresentados. Na abordagem sintética da geometria euclidiana, em que certas noções geométricas são consideradas primitivas, e é utilizado o raciocínio dedutivo a partir de axiomas e teoremas para obter proposições verdadeiras, não utilizamos coordenadas. Podemos dizer que a Geometria Sintética trata os entes geométricos da forma que se apresentam de fato, sem o uso da álgebra no seu estudo e proposições; já na geometria analítica se faz uso da álgebra e representamos um ponto no plano por um par ordenado de números reais, as coordenadas. E é a partir daí que prosseguiremos.

### 3.2 ISOMETRIA NO PLANO EUCLIDIANO COM COORDENADAS

Preliminarmente vamos considerar conhecidas as noções básicas de ponto, reta, comprimento, círculo e ângulo. E ainda os fatos mais elementares da geometria plana, dentre os quais que por dois pontos dados passa uma, e somente uma reta; que por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela, bem como uma única perpendicular a essa reta.

Vamos definir objetivamente o plano euclidiano por coordenadas. Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais, então o plano euclidiano é o seguinte conjunto:

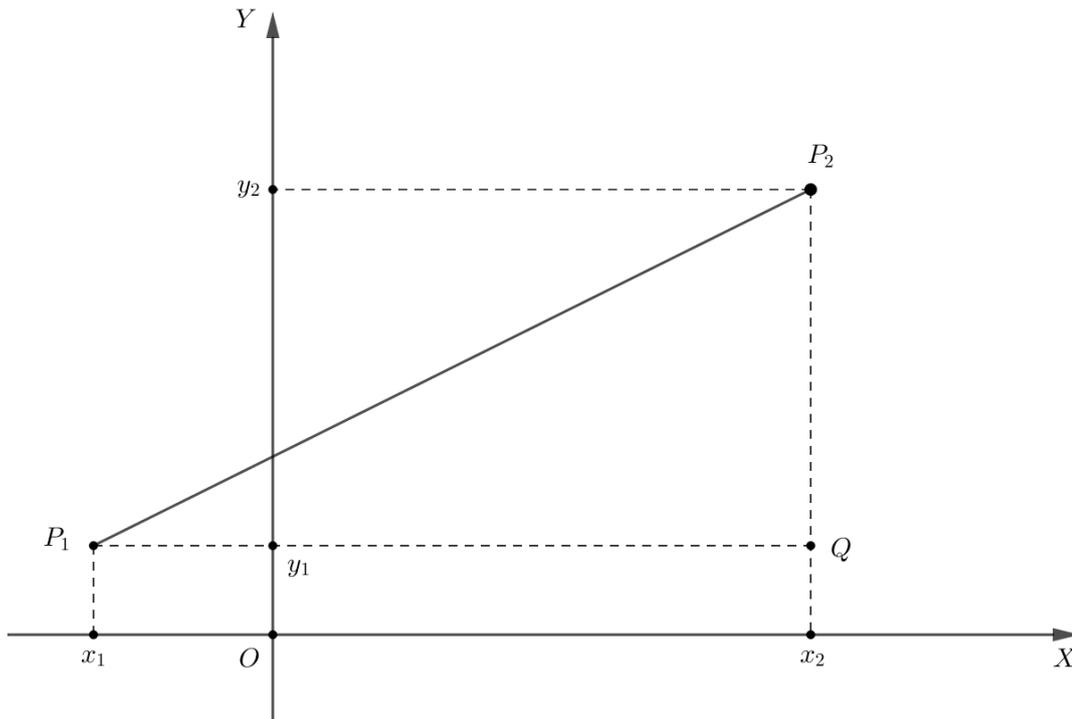
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$$

Juntamente com a distância euclidiana  $d(P_1, P_2)$  entre dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Como no nosso estudo precisaremos da clareza do significado da distância entre dois pontos no plano, dada em termos das coordenadas desses pontos, achamos por bem apresentar esse resultado de uma forma mais explícita.

**Figura 9 – Distância  $d(P_1, P_2)$  entre dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  indicados no plano  $\mathbb{R}^2$  com um sistema formado por um par de eixos  $OX$  e  $OY$ , perpendiculares que têm a mesma origem  $O$ , onde  $OX$  é horizontal e  $OY$  é vertical (Figura 10).

Tomaremos nesse sistema mais um ponto  $Q = (x_2, y_1)$ . Note que os pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_1)$  têm a mesma ordenada, logo o segmento  $P_1Q$  é horizontal (paralelo ao eixo  $OX$ ) e  $P_2 = (x_2, y_2)$  e  $Q = (x_2, y_1)$  têm a mesma abscissa, daí o segmento  $P_2Q$  é vertical (paralelo ao eixo  $OY$ ). Observa-se que o triângulo  $P_1P_2Q$  é retângulo em  $Q$ .

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no referido triângulo, temos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2)^2 &= d(P_1, Q)^2 + d(Q, P_2)^2 \\ d(P_1, P_2)^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\ d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{aligned}$$

Agora podemos definir isometria, afirmando que uma isometria euclidiana ou isometria de  $\mathbb{R}^2$  é uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que preserva distância euclidiana, isto é:

$$d(f(P_1), f(P_2)) = d(P_1, P_2) \text{ para todo } P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2.$$

Se  $f$  e  $g$  são isometrias, então sua composição  $h = (f \circ g)$  também é uma isometria  $h$ , definida para todo  $P \in \mathbb{R}^2$  por  $h(P) = f(g(P))$ . Claro que  $h = (f \circ g)$  impõe aplicar primeiro  $g$  e depois  $f$ .

Apresentaremos agora exemplos mais fundamentais de isometrias e acredito mais inteligíveis. Porém, antes estabeleceremos algumas propriedades básicas desse tipo de função.

**Proposição 3.2.1.** *Toda isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é injetiva.*

**Prova:** De fato, se  $f(P) = f(Q)$ , então  $d(f(P), f(Q)) = 0$ , ora como  $f$  é uma isometria então  $d(P, Q) = 0$ , logo,  $P = Q$ . Daí  $f(P) = f(Q)$  implica  $P = Q$ . ■

Sejam  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria e  $P$  e  $Q$  pontos distintos de  $\mathbb{R}^2$ . Se  $f(P) = P_1$  e  $f(Q) = Q_1$ , então  $f$  transforma todo ponto  $R$  do segmento  $PQ$  num ponto  $R_1$  do segmento  $P_1Q_1$ .

Com efeito, como  $R$  pertence ao segmento  $PQ$ , temos:

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$$

Sendo  $f$  uma isometria, temos  $d(P_1, Q_1) = d(P, Q)$ ,  $d(P_1, R_1) = d(P, R)$  e por último  $d(R_1, Q_1) = d(R, Q)$ . Logo,  $d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1)$ , e daí concluímos com tranquilidade que  $R_1$  pertence ao segmento de reta  $P_1Q_1$ .

Diante desse resultado acima, podemos afirmar seguramente a seguinte propriedade:

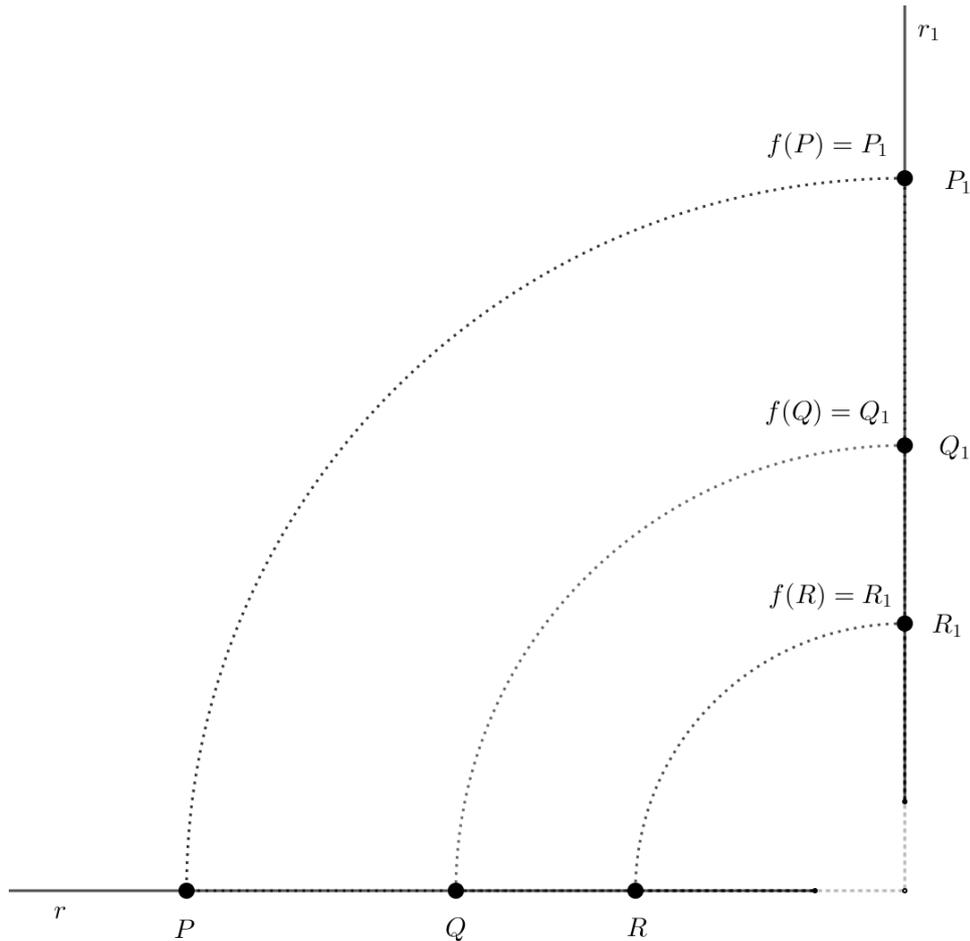
**Proposição 3.2.2.** *A imagem de uma reta  $r$  por uma isometria  $f$  é uma reta  $r_1 = f(r)$ .*

**Prova:** De fato, sejam  $P, Q$  pontos distintos de  $r$  e  $P_1 = f(P)$ ,  $Q_1 = f(Q)$  suas imagens por  $f$ . Chamemos de  $r_1$  a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $Q_1$ . Dado qualquer outro ponto  $R$  na reta  $r$ , afirmamos que sua imagem  $R_1 = f(R)$  deve pertencer à reta  $r_1$  conforme a Figura 11. Se não, vejamos, suponhamos que  $Q$  esteja entre  $P$  e  $R$ , isto é, que  $Q$  pertença ao segmento  $PR$ . Então, como acabamos de ver,  $Q_1$  está no segmento de reta  $P_1R_1$ , logo  $R_1$  pertence à reta  $r_1$  que liga  $P_1$  a  $Q_1$ . Os casos em que  $R$  está entre  $Q$  e  $P$  ou  $P$  está entre  $Q$  e  $R$  se conclui analogamente. Até agora mostramos que os pontos da reta  $r$  são transformados pela isometria  $f$  em pontos da reta  $r_1$ .

Reciprocamente, se  $R_1$  é um ponto da reta  $r_1$  suponhamos que  $P_1$  esteja entre  $R_1$  e

$Q_1$ , ou seja, que  $P_1$  pertença ao segmento de reta  $R_1Q_1$ . Seja  $R$  o ponto da reta  $r$ , situado à esquerda do segmento  $PQ$  e tal que  $d(R, Q) = d(R_1, Q_1)$ . Então  $f(R)$  é o ponto de  $r_1$ , à esquerda do segmento  $P_1Q_1$  e tal que  $d(f(R), Q_1) = d(R_1, Q_1)$ , logo  $f(R) = R_1$ . Assim, todos os pontos da reta  $r_1$  são imagens por  $f$  de pontos da reta  $r$ , ou seja  $r_1 = f(r)$ . Isso conclui a prova de que  $f(r) = r_1$ . ■

**Figura 10** – Se um ponto  $R$  está na reta  $r$ , então  $R_1$  está na reta  $r_1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Proposição 3.2.3.** *Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.*

**Prova:** De fato, se  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma isometria e as retas  $r, s$  em  $\mathbb{R}^2$  são paralelas, suas imagens  $r_1 = f(r)$  e  $s_1 = f(s)$  devem ser paralelas, pois se existisse um ponto  $P_1$  ao mesmo tempo em  $r_1$  e em  $s_1$ , teríamos  $P_1 = f(P)$ , com  $P$  em  $r$  e  $P_1 = f(Q)$ , com  $Q$  em  $s$ . Ocorre porém que  $f$  é injetiva e isso obrigaria a seguinte igualdade  $P = Q$ , e aí as retas  $r$  e  $s$  teriam um ponto  $P = Q$  em comum, contrariando o fato de que são paralelas. ■

Após esse resultado, convém chamar a atenção para o fato de que uma isometria  $f$

não transforma uma reta  $r$  numa reta  $f(r) = r_1$ , necessariamente paralela a  $r$ .

**Proposição 3.2.4.** *Toda isometria transforma um triângulo retângulo em outro triângulo retângulo.*

**Prova:** De fato, sejam  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria e  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Seja  $A_1 = f(A)$ ,  $B_1 = f(B)$  e  $C_1 = f(C)$ . Ao aplicar o Teorema de Pitágoras no triângulo  $ABC$ , temos que:

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$$

Como  $f$  é uma isometria, portanto preserva distância, então:

$$d(B_1, C_1)^2 = d(A_1, B_1)^2 + d(A_1, C_1)^2$$

Segue-se daí que o triângulo  $A_1B_1C_1$  é retângulo em  $A_1$ . ■

Podemos dizer que as isometrias transformam retas perpendiculares em retas perpendiculares, isto é, preservam ângulos retos. De uma maneira mais geral, quanto às transformações feitas pelas isometrias aos ângulos podemos afirmar que:

**Proposição 3.2.5.** *Uma isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  preserva quaisquer ângulos.*

**Prova:** De fato, sejam dados um ângulo qualquer  $\widehat{ABC}$  em  $\mathbb{R}^2$  e uma isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , temos que  $A_1 = f(A)$ ,  $B_1 = f(B)$  e  $C_1 = f(C)$  e daí concluímos que os triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$  são congruentes, pois afinal de contas  $f$  preserva distâncias. Logo seus ângulos correspondentes são iguais e em particular temos  $\widehat{ABC} = \widehat{A_1B_1C_1}$ . ■

**Proposição 3.2.6.** *Uma isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é sobrejetiva, isto é, sua imagem é  $\mathbb{R}^2$ .*

**Prova:** Seja  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma isometria e  $P_1$  um ponto de  $\mathbb{R}^2$ . Dados  $R$  e  $Q$  pontos diferentes e pertencentes a  $\mathbb{R}^2$ . Note que  $f(R) \neq f(Q)$ , pois toda isometria é injetiva (**Proposição 3.2.1**), então temos os seguintes casos:

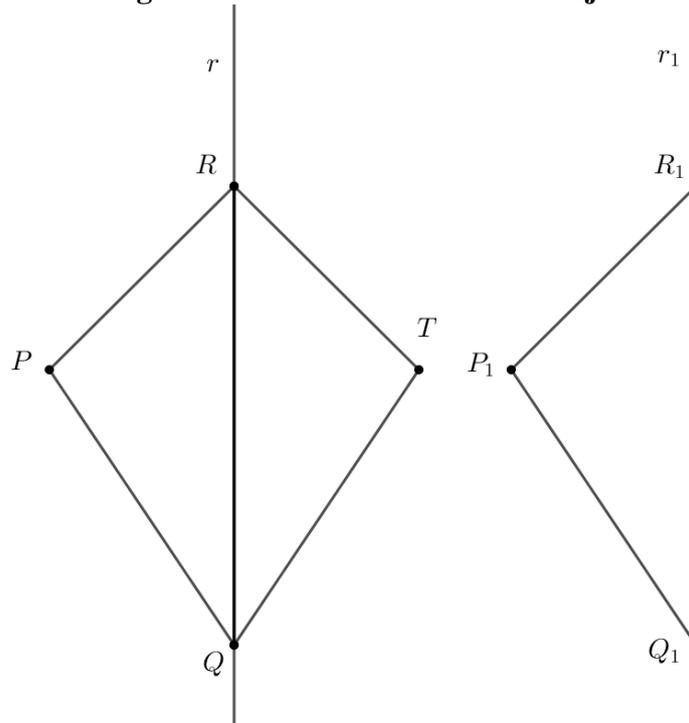
(i)  $f(R) = P_1$  ou  $f(Q) = P_1$ , então a demonstração está concluída.

(ii) Agora supondo  $f(R) \neq P_1$  e  $f(Q) \neq P_1$  e fazendo  $f(R) = R_1$  e  $f(Q) = Q_1$ , existem dois casos possíveis para os pontos  $P_1, R_1$  e  $Q_1$ :

Caso 1:  $P_1, R_1$  e  $Q_1$  são colineares, então esses três pontos estão numa reta  $r_1$  tal que  $R, Q \in r$  com  $f(r) = r_1$ . Logo existe  $P \in r$  tal que  $f(P) = P_1$ .

Caso 2:  $P_1, R_1$  e  $Q_1$  não são colineares. Considerando o triângulo  $P_1R_1Q_1$  e construindo os triângulos  $PRQ$  e  $TRQ$  congruentes ao triângulo  $P_1R_1Q_1$  com  $P$  e  $T$  em semiplanos opostos em relação à reta  $\overleftrightarrow{RQ}$  (Figura 11), as semirretas  $\overrightarrow{RP}$  e  $\overrightarrow{RT}$  são levadas em semirretas diferentes com origem  $R_1$ , pois  $f$  é injetiva,  $P \neq T$  e  $\overline{RP} = \overline{RT}$ .

**Figura 11 – Toda isometria é sobrejetiva**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, eles formam ângulos de mesma medida que  $P_1\widehat{R_1}Q_1$  com a semirreta  $\overrightarrow{R_1Q_1}$ . Logo como  $f$  preserva distância,  $f(P) = P_1$  ou  $f(T) = P_1$ . ■

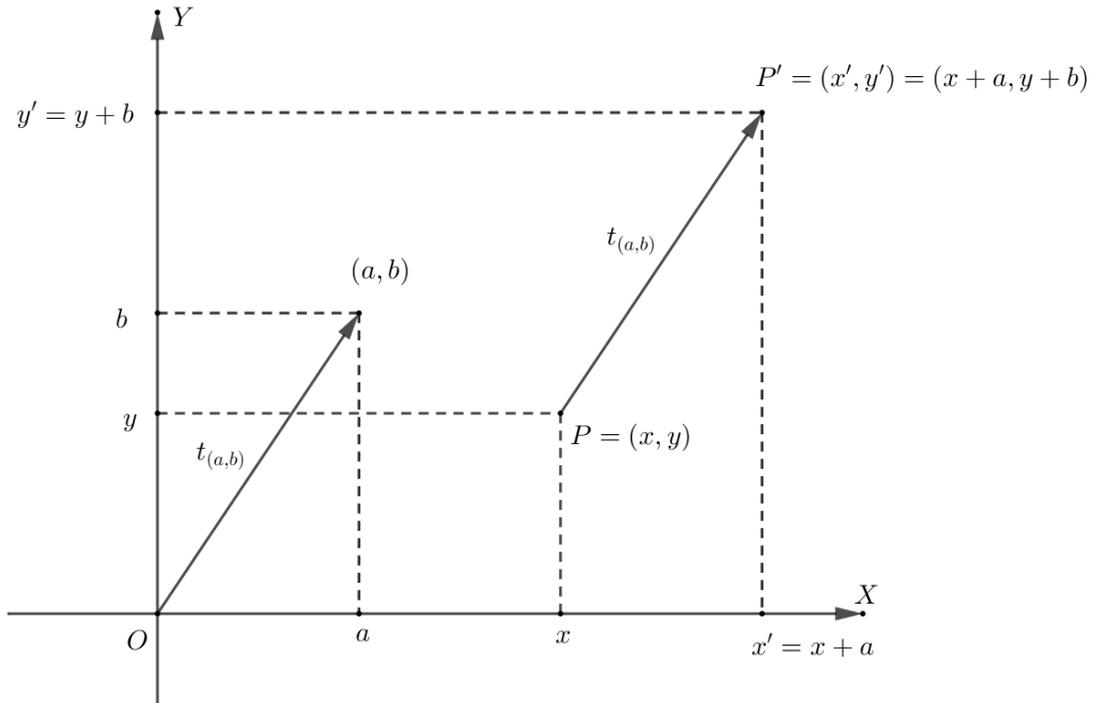
Agora, finalmente vamos apresentar exemplos fundamentais de isometrias. Nesses exemplos que se seguem,  $f$  é definida pela determinação das coordenadas  $x'$  e  $y'$  de  $f(P)$  em função das coordenadas  $x, y$  de  $P$ .

**Exemplo 3.2.1.** A translação  $t_{(a,b)}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dada por  $t_{(a,b)}(x, y) = (x', y')$  onde:

$$x' = x + a \text{ e } y' = y + b.$$

Podemos dizer que cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é levado pela translação  $t_{(a,b)}$  ao ponto  $(x + a, y + b) \in \mathbb{R}^2$ , claramente apresentado na Figura 12.

**Figura 12 – Translação  $t_{(a,b)}(x, y) = (x + a, y + b)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que dados dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  ambos em  $\mathbb{R}^2$  a distância entre suas imagens por  $t_{(a,b)}$  é dada por:

$$d(t_{(a,b)}(x_1, y_1), t_{(a,b)}(x_2, y_2)) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2}$$

$$d(t_{(a,b)}(x_1, y_1), t_{(a,b)}(x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + b - y_1 - b)^2}$$

$$d(t_{(a,b)}(x_1, y_1), t_{(a,b)}(x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(t_{(a,b)}(x_1, y_1), t_{(a,b)}(x_2, y_2)) = d(P_1, P_2),$$

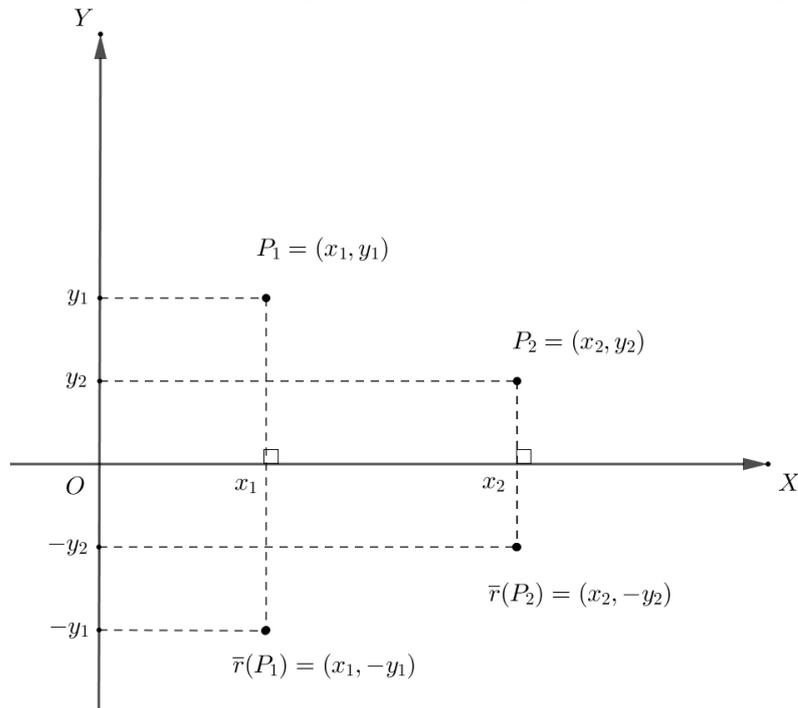
o que era de se esperar, afinal a isometria preserva distâncias.

**Exemplo 3.2.2.** A reflexão  $\bar{r}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  em relação ao eixo-x é dada por  $\bar{r}(x, y) = (x', y')$  onde:

$$x' = x \text{ e } y' = -y$$

Podemos dizer que cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é levado pela reflexão  $\bar{r}$  ao ponto  $(x, -y) \in \mathbb{R}^2$ . E fica claro que aqui também se preserva distâncias, pois  $d(\bar{r}(P_1), \bar{r}(P_2)) = d(P_1, P_2)$  o que se nota claramente na Figura 13.

**Figura 13 – Reflexão  $\bar{r}(x_1, y_1) = (x_1, -y_1)$  e  $\bar{r}(x_2, y_2) = (x_2, -y_2)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

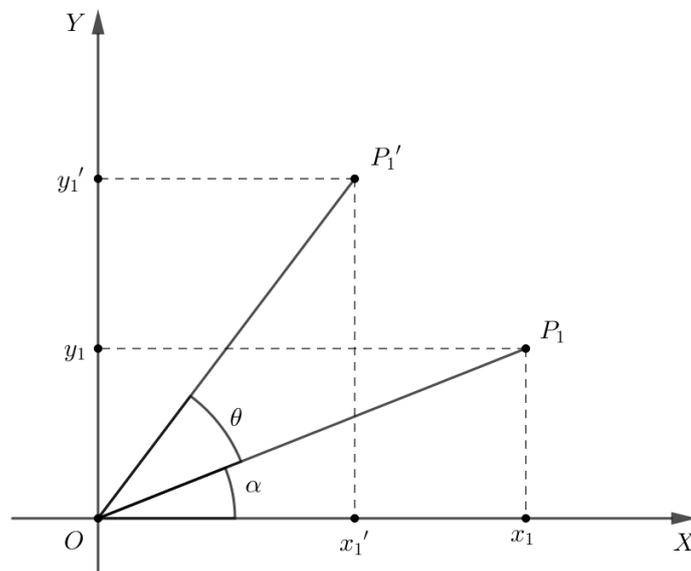
**Exemplo 3.2.3.** A rotação  $r_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de um ângulo  $\theta$  em relação à origem  $(0, 0)$  é dada por  $r_\theta(x, y) = (x', y')$ , onde:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \text{ e } y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Podemos dizer que cada ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é levado pela rotação  $r_\theta$  ao ponto

$$(x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \in \mathbb{R}^2$$

**Figura 14 – Rotação de centro O e ângulo  $\theta$ ,  
leva  $P_1$  em  $P'_1$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para esclarecer melhor a relação que a rotação  $r_\theta$  estabelece entre o ponto original  $P_1$  e sua imagem  $r_\theta(P_1) = P'_1$ , visitaremos o cálculo e para isso vejamos na página anterior a Figura 14.

Aplicando a trigonometria do triângulo retângulo nos dois triângulos formados pela origem  $O$ , os pontos  $P_1, P'_1$ , e as abscissas  $x_1$  e  $x'_1$  sendo retângulos nos pontos que coincidem com suas abscissas, temos os seguintes resultados:

$$\cos\alpha = \frac{x_1}{OP_1} \quad \text{sen}\alpha = \frac{y_1}{OP_1} \quad (1)$$

$$x'_1 = \overline{OP'_1} \cos(\theta + \alpha) \quad y'_1 = \overline{OP'_1} \text{sen}(\theta + \alpha) \quad (2)$$

$$x'_1 = \overline{OP'_1} (\cos\theta \cos\alpha - \text{sen}\theta \text{sen}\alpha) \quad y'_1 = \overline{OP'_1} (\text{sen}\theta \cos\alpha + \text{sen}\alpha \cos\theta) \quad (3)$$

Substituindo (1) em (3) e usando o fato de que  $\overline{OP_1} = \overline{OP'_1}$ , pois é o raio do arco no qual  $r_\theta$  leva  $P_1$  em  $P'_1$  temos:

$$x'_1 = (x_1 \cos\theta - y_1 \text{sen}\theta) \quad y'_1 = (x_1 \text{sen}\theta + y_1 \cos\theta)$$

No exemplo da rotação  $r_\theta$ , não fica muito claro que distâncias são preservadas, daí mostraremos esse fato a seguir.

$$\begin{aligned} d(r_\theta(P_1), r_\theta(P_2)) &= d(P'_1, P'_2) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 \cos\theta - y_2 \text{sen}\theta - x_1 \cos\theta + y_1 \text{sen}\theta)^2 + (x_2 \text{sen}\theta + y_2 \cos\theta - x_1 \text{sen}\theta - y_1 \cos\theta)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + (y_2 - y_1)^2 (\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta)} \\ d(P'_1, P'_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = d(P_1, P_2), \end{aligned}$$

como queríamos.

Já sabemos que toda isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é bijetiva, pois já mostramos que é injetiva (**Proposição 3.2.1**) e sobrejetiva (**Proposição 3.2.6**) e como tal possui inversa  $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que também é uma isometria, obviamente. Seguramente podemos afirmar que para todo ponto  $P_1 \in \mathbb{R}^2$  sua imagem pela inversa  $f^{-1}$  é um único ponto  $P \in \mathbb{R}^2$ , de tal forma que  $f(P) = P_1$ .

Uma isometria particular é a identidade  $I_d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $I_d(P) = P$ , ou seja que deixa qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$ , invariante, isto é, transforma qualquer ponto de  $\mathbb{R}^2$  nele mesmo:

$$I_d(x, y) = (x, y),$$

para qualquer  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Da bijetividade das isometrias  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  segue o seguinte resultado:

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I_d, \text{ pois}$$

$$f(f^{-1}(P_1)) = f(P) = P_1 \text{ e } f^{-1}(f(P)) = f^{-1}(P_1) = P$$

No **Exemplo 3.2.1**, da translação  $t_{(a,b)}$  é de fácil conclusão que  $t^{-1}_{(a,b)} = t_{(-a,-b)}$ , bem como no **Exemplo 3.2.2**, na reflexão que sua inversa  $\bar{r}^{-1} = \bar{r}$ ; porém mostraremos o cálculo da inversa da rotação  $r_\theta^{-1}$  do **Exemplo 3.2.3**. Como a inversa  $r_\theta^{-1}$  leva o ponto  $(x', y')$  no ponto  $(x, y)$ , então para determinar a expressão da inversa devemos escrever as coordenadas do ponto  $(x, y)$  em função das coordenadas do ponto  $(x', y')$ .

Seja a rotação  $r_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $r_\theta(x, y) = (x', y')$  tal que:

$$x' = (x \cos \theta - y \sin \theta) \quad (4)$$

$$y' = (x \sin \theta + y \cos \theta) \quad (5)$$

Agora, multiplicando-se (4) por  $\cos \theta$  e (5) por  $\sin \theta$ , teremos,

$$x' \cos \theta = (x \cos^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta) \quad (6)$$

$$y' \sin \theta = (x \sin^2 \theta + y \cos \theta \sin \theta) \quad (7)$$

Somando-se (6) e (7) chegamos ao seguinte resultado,

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = x \cos^2 \theta - y \sin \theta \cos \theta + x \sin^2 \theta + y \cos \theta \sin \theta$$

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = x(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$x' \cos \theta + y' \sin \theta = x$$

De modo análogo, multiplicando-se (4) por  $\sin \theta$  e (5) por  $\cos \theta$ , chegaremos a,

$$x' \sin \theta = x \cos \theta \sin \theta - y \sin^2 \theta \quad (8)$$

$$y' \cos \theta = x \cos \theta \sin \theta + y \cos^2 \theta \quad (9)$$

Agora subtraindo-se (8) de (9) e observando a relação fundamental da trigonometria, chegamos ao resultado,

$$-x' \sin \theta + y' \cos \theta = y$$

Portanto está definida a inversa da isometria por rotação,  $r^{-1}_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  com  $r^{-1}_\theta(x', y') = (x, y)$ , tal que

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \theta + y' \operatorname{sen} \theta \\y &= -x' \operatorname{sen} \theta + y' \cos \theta\end{aligned}$$

Vamos apresentar a solução de um exercício de isometria por rotação.

**Exemplo 3.2.4.** Mostre que  $(r_\theta \circ r_\alpha) = r_{(\theta+\alpha)}$  e que  $r_\theta^{-1} = r_{-\theta}$ .

**Solução:** Ora,  $(r_\theta \circ r_\alpha) = r_\theta(r_\alpha)$

$$\begin{aligned}(r_\theta \circ r_\alpha)(x, y) &= r_\theta(r_\alpha)(x, y) = r_\theta(x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha, x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) \\&= ((x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha) \cos \theta - (x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) \operatorname{sen} \theta, \\&\quad (x \cos \alpha - y \operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \theta + (x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha) \cos \theta) \\&= (x \cos \alpha \cos \theta - y \operatorname{sen} \alpha \cos \theta - x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta - y \operatorname{sen} \alpha \cos \theta, \\&\quad x \cos \alpha \operatorname{sen} \theta - y \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta + x \operatorname{sen} \alpha \cos \theta + y \cos \alpha \cos \theta) \\&= (x(\cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta) - y(\operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \cos \alpha \operatorname{sen} \theta), \\&\quad x(\cos \alpha \operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \alpha \cos \theta) + y(\cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta)) \\&= (x \cos(\alpha + \theta) - y \operatorname{sen}(\alpha + \theta), x \operatorname{sen}(\alpha + \theta) + y \cos(\alpha + \theta)) \\&= r_{(\theta+\alpha)}(x, y), \text{ portanto,} \\(r_\theta \circ r_\alpha) &= r_{(\theta+\alpha)}, \text{ como queríamos.}\end{aligned}$$

Com relação a segunda parte do problema, já sabemos que:

$$\begin{aligned}r_\theta(x, y) &= (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta) \text{ e} \\r_\theta^{-1}(x, y) &= (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta, -x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta)\end{aligned}$$

Ocorre que  $\cos \theta = \cos(-\theta)$  e que  $\operatorname{sen} \theta = -\operatorname{sen}(-\theta)$  e daí fazendo essas substituições na última equação, obtemos o seguinte resultado:

$$r_\theta^{-1}(x, y) = (x \cos(-\theta) - y \operatorname{sen}(-\theta), x \operatorname{sen}(-\theta) + y \cos(-\theta)) = r_{-\theta}(x, y),$$

como queríamos.

**Exemplo 3.2.5.** Mostre que qualquer reta,  $r: ax + by + c = 0$ , é, um conjunto de pontos equidistantes de dois pontos  $P$  e  $Q$  adequadamente escolhidos.

**Solução:** Por escolha adequada de eixos, podemos assumir que o eixo- $x$  esteja sobre a reta  $r$ , que será expressa nesse sistema de eixos adequado, pela equação  $y = 0$ . Então  $r$  é o conjunto

de pontos equidistantes de dois pontos  $P = (0, -b)$  e  $Q = (0, b)$ , porque dado um ponto qualquer  $S = (x, y)$  em  $\mathbb{R}^2$ , ele será equidistante de  $P$  e  $Q$

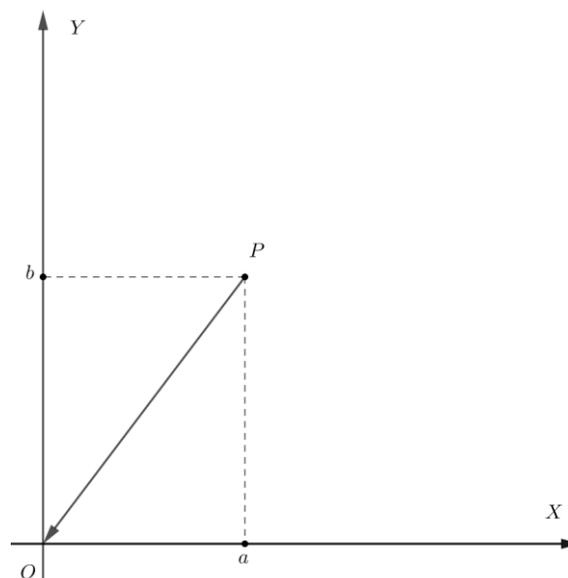
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow d(S, P) = d(S, Q) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - 0)^2 + (y + b)^2} = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - b)^2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y + b)^2 = x^2 + (y - b)^2 \\ &\Leftrightarrow 2by = -2by \\ &\Leftrightarrow y = 0, \text{ pois } b \neq 0, \text{ já que } P \text{ e } Q \text{ são distintos.} \end{aligned}$$

Reciprocamente, quaisquer dois pontos,  $P$  e  $Q$ , podem ser tomados como  $(0, -b)$  e  $(0, b)$ , escolhendo a reta que passa por  $P$  e  $Q$  para ser o eixo  $-y$  e o ponto médio do segmento  $PQ$  como a origem  $O$  do sistema. Esses cálculos mostram que o conjunto de pontos equidistantes de dois pontos  $P$  e  $Q$  é uma reta, expressa pela equação  $y = 0$ .

### 3.3 ROTAÇÕES E REFLEXÕES

Rotacionar o plano  $\mathbb{R}^2$  em torno da origem  $O$  ou em torno de um ponto qualquer  $(a, b)$ , não produz diferenças, afinal são apenas dois pontos e portanto possuem as mesmas propriedades geométricas. Nota-se facilmente que isso é de fato verdade, pois podemos transportar o ponto  $(a, b)$  para a origem  $O$  pela isometria de translação  $t^{-1}_{(a,b)}$  conforme Figura 15.

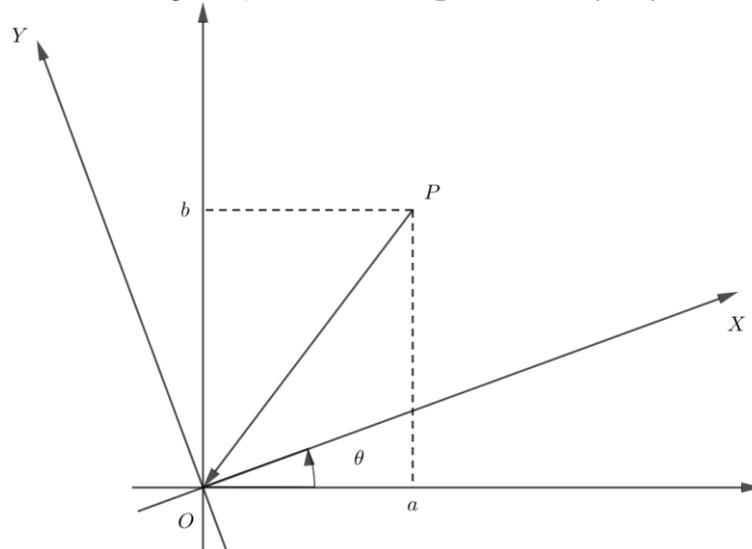
**Figura 15 – Translação do ponto  $P = (a, b)$  para a origem  $O$  por  $t^{-1}_{(a,b)}$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

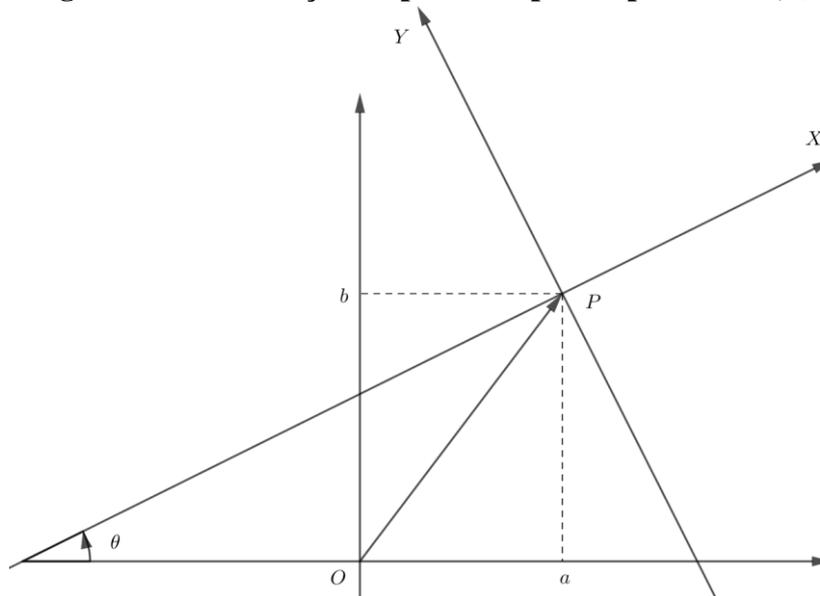
Então podemos rotacionar o plano  $\mathbb{R}^2$  de um ângulo  $\theta$  em torno de um ponto qualquer  $(a, b)$ , transladando o ponto  $(a, b)$  para origem como já vimos na Figura 15, depois rotacionando de um ângulo  $\theta$  sobre a origem  $O$ , como representamos na Figura 16 e em seguida transladando a origem  $O$  para o ponto  $(a, b)$ , como vemos na Figura 17.

**Figura 16 – Rotação de um ângulo  $\theta$  do plano  $\mathbb{R}^2$  pela rotação  $r_\theta$  em torno do ponto  $P = (a, b)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

**Figura 17 – Translação do plano  $\mathbb{R}^2$  para o ponto  $P=(a,b)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim a rotação de um ângulo  $\theta$  do plano  $\mathbb{R}^2$  em torno de um ponto  $P = (a, b)$ , existe e é a isometria  $(t_{(a,b)} \circ r_\theta \circ t_{(a,b)}^{-1})$ . Essa isometria é chamada na linguagem algébrica de conjugado da rotação  $r_\theta$  pela translação  $t_{(a,b)}$ .

Do mesmo modo podemos obter uma reflexão em relação a qualquer reta  $s$ , conjugando a reflexão  $\bar{r}$  com uma isometria  $f$  que transporta o eixo- $x$  para a reta  $s$ . Caso a reta  $s$  passe na origem  $O$  do sistema de eixos do plano, então a isometria  $f$  será uma rotação  $r_\beta$  que leva o eixo- $x$  para a reta  $s$ . Caso a reta  $s$  não passe na origem, a isometria será  $f = (r_\beta \circ t)$  onde  $t$  é a translação que leva a origem  $O$  para a reta  $s$ . Nesse caso se a reta  $s$  intersecta o eixo- $x$  em  $x = c$ , por exemplo, então a translação será  $t_{(c,0)}$  e se a reta intersectar o eixo- $y$  em  $y = d$ , a translação será  $t_{(0,d)}$ . Portanto as reflexões são isometrias importantes, afinal todas as isometrias podem ser geradas de suas composições. E mais ainda, quando se pode afirmar que qualquer isometria é a composição de uma, duas ou três reflexões.

Antes vamos mostrar que qualquer translação ou rotação é a composição de duas reflexões.

**Teorema 3.3.1.** *Qualquer translação ou rotação é a composição de duas reflexões. Reciprocamente, a composição de duas reflexões é uma rotação ou uma translação.*

**Prova:** Escolhendo adequadamente o eixo- $y$ , digamos, como uma reta paralela ao sentido da translação, podemos supor que a translação dada é  $t_{(0,d)}$ . Seguramente podemos afirmar que  $t_{(0,d)}$  é a composição da reflexão  $\bar{r}$  em relação à reta  $y = 0$ , ou seja,  $\bar{r}_{(y=0)}$  e a reflexão  $\left(t_{(0,\frac{d}{2})} \circ \bar{r}_{(y=0)} \circ t^{-1}_{(0,\frac{d}{2})}\right)$ , como mostra a Figura 18 e confirmado pelos resultados das aplicações das isometrias abaixo. Note que queremos provar a igualdade da translação  $t_{(0,d)}$  com a composição das duas reflexões apresentadas, que levam o ponto  $P = (x, y)$  ao ponto  $P' = (x', y')$ , então,

$$P = (x, y) \longrightarrow (x, y + d) = P', \text{ pela translação } t_{(0,d)}.$$

Vejamos a aplicação das duas reflexões:

$$P = (x, y) \longrightarrow (x, -y) = P', \text{ pela reflexão } \bar{r}_{(y=0)}.$$

Agora pela reflexão conjugada  $\left(t_{(a,\frac{d}{2})} \circ \bar{r}_{(y=0)} \circ t^{-1}_{(a,\frac{d}{2})}\right)$ .

$$P_1 = (x, -y) \longrightarrow \left(x, -y - \frac{d}{2}\right) = P_2, \text{ pela translação } t^{-1}_{(0,\frac{d}{2})}.$$

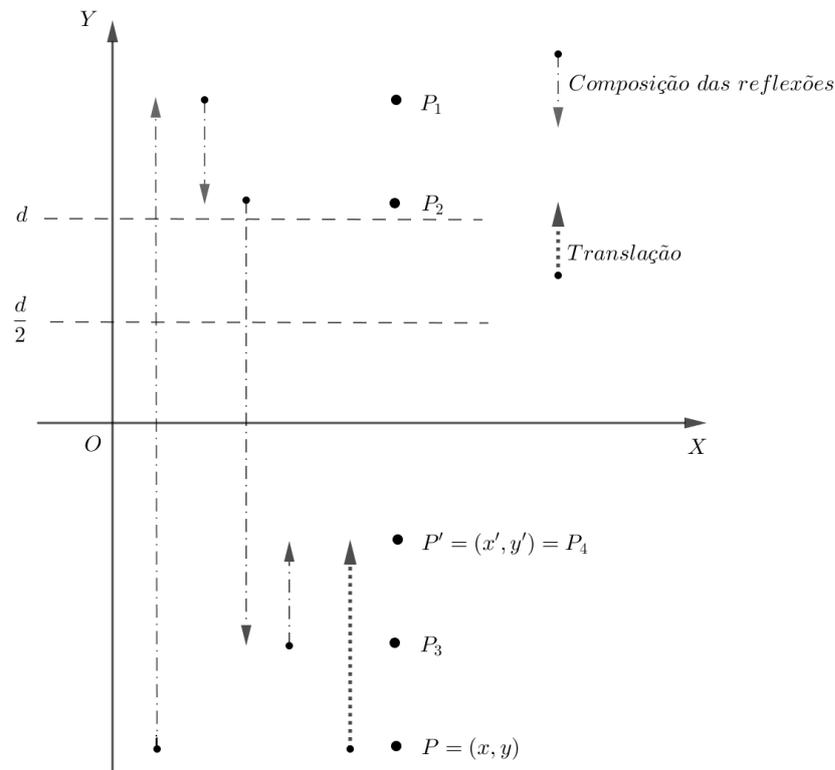
$$P_2 = \left(x, -y - \frac{d}{2}\right) \longrightarrow \left(x, y + \frac{d}{2}\right) = P_3, \text{ pela reflexão } \bar{r}_{(y=0)}.$$

$$P_3 = \left(x, y + \frac{d}{2}\right) \longrightarrow (x, y + d) = P_4, \text{ pela translação } t_{(0,\frac{d}{2})}.$$

Agora afirmamos que uma translação é a composição de duas reflexões, isto é,

$$\left(t_{(0,\frac{d}{2})} \circ \bar{r}_{(y=0)} \circ t^{-1}_{(0,\frac{d}{2})}\right) \circ (\bar{r}_{(y=0)})(x, y) = t_{(0,d)}(x, y).$$

**Figura 18 – Translação de  $P$  para  $P'$ . Reflexões de  $P$  para  $P_1$ , de  $P_1$  para  $P_2$ , de  $P_2$  para  $P_3$  e de  $P_3$  para  $P_4 = P'$**



Fonte: Elaborada pelo autor

Por escolha adequada da origem  $O$  podemos supor que a rotação dada é  $r_\theta$ . Seguramente podemos afirmar que  $\bar{r}_\theta$  é a composição da reflexão  $\bar{r}_{(y=0)}$  com a reflexão  $(r_{\frac{\theta}{2}} \circ \bar{r}_{(y=0)} \circ r^{-1}_{\frac{\theta}{2}})$  obtida rotacionando o eixo- $x$  de um ângulo  $\frac{\theta}{2}$ . Podemos observar pelos cálculos abaixo e pela Figura 19 que segue.

$$P = (x, y) \longrightarrow (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = P', \text{ pela rotação } r_\theta.$$

Agora vamos fazer a transformação usando as duas reflexões:

$$P = (x, y) \longrightarrow (x, -y) = P_1, \text{ pela reflexão } \bar{r}_{(y=0)}.$$

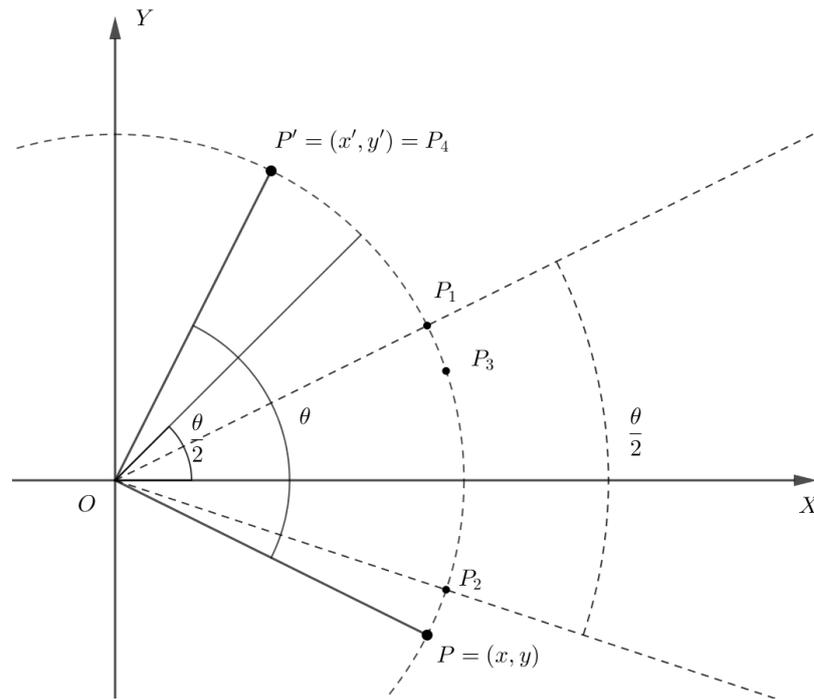
$$P_1 = (x, -y) \longrightarrow \left( x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2}, -x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right) = P_2, \text{ por } r^{-1}_{\frac{\theta}{2}}.$$

$$P_2 = \left( x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2}, -x \sin \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \right) \longrightarrow \\ \left( x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2}, x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) = P_3, \text{ por } \bar{r}_{(y=0)}.$$

$$P_3 = \left( x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2}, x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) \longrightarrow \\ \left( \left( x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} - \left( x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\ \left. \left( x \cos \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} + \left( x \sin \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( x \cos^2 \frac{\theta}{2} - y \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - x \sin^2 \frac{\theta}{2} - y \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\
&\quad \left. x \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} - y \sin^2 \frac{\theta}{2} + x \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} + y \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\
&= \left( x \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - y \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right), x \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \right) + y \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \\
&= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) = P_4 = P', \text{ por } r_{\frac{\theta}{2}}.
\end{aligned}$$

**Figura 19 – Rotação de  $P$  para  $P'$ . Reflexão de  $P$  para  $P_1$ , rotação de  $P_1$  para  $P_2$ , reflexão de  $P_2$  para  $P_3$  e rotação  $P_3$  para  $P_4 = P'$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Reciprocamente, suponhamos que temos as reflexões  $\bar{r}_m$  e  $\bar{r}_l$  em relação às retas  $m$  e  $l$ , respectivamente. Podemos escolher a reta  $l$  para ser o eixo- $x$ , então  $\bar{r}_l = \bar{r}_{(y=0)}$ . Se a reta  $m$  encontrar a reta  $l$ , fazamos do ponto de interseção a origem  $O$  do sistema de eixos. Nesse caso,  $\bar{r}_m$  o  $\bar{r}_l = r_\theta$ , conforme o segundo cálculo acima, tomando  $\frac{\theta}{2}$  para ser o ângulo entre as retas  $m$  e  $l$ . Agora se a reta  $m$  não intersecta a reta  $l$ , então  $\bar{r}_m$  o  $\bar{r}_l = t_{(0,d)}$ , conforme o primeiro cálculo acima, tomando uma das retas como o eixo- $x$  e  $\frac{d}{2}$  como a distância entre as retas. E finalmente fica provado o teorema. ■

Fazer uma escolha conveniente da origem do sistema de eixos, ou equivalentemente, mover com translações ou rotações com o objetivo de simplificar as coordenadas, tornam muito mais fáceis algumas provas. Apresentaremos um exemplo, mostrando uma forma interessante de se provar a desigualdade triangular, usando isometrias.

**Exemplo 33.1.**(Desigualdade triangular) Para quaisquer pontos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  prove a validade da desigualdade:  $d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$ .

**Solução:** Inicialmente faça a translação do ponto  $P_1$  para a origem  $O$  do sistema de eixos; em seguida rotacione o sistema de eixos até que o eixo- $x$  atinja o ponto  $P_2$ . Daí teremos os três pontos quaisquer com as seguintes coordenadas:  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (x_2, 0)$  e  $P_3 = (x_3, y_3)$ . Então a desigualdade relacionando a distância entre os pontos ficará assim:

$$\sqrt{x_3^2 + y_3^2} \leq \sqrt{x_2^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_3^2}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e dividindo toda desigualdade por 2, obtemos o seguinte resultado:

$$x_2 x_3 - x_2^2 \leq x_2 \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_3^2}$$

Elevando-se novamente ao quadrado cada lado e dividindo-se tudo por  $x_2$  teremos o resultado abaixo:

$$(x_3 - x_2) \leq \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_3^2}$$

Note que, se  $x_2 = 0$  e estando  $P_2$  já no eixo- $x$ , teríamos  $P_1 = P_2$ , e daí a desigualdade é verdadeira, pois  $d(P_1, P_2) = 0$  e  $d(P_1, P_3) = d(P_2, P_3)$ . Elevando-se tudo ao quadrado temos,

$$(x_3 - x_2)^2 \leq (x_3 - x_2)^2 + y_3^2,$$

que seguramente é verdadeira, logo, é verdadeira também a desigualdade inicial.

No caso de  $P_1, P_2$  e  $P_3$  serem colineares, com  $P_2$  entre  $P_1$  e  $P_3$  poderíamos rotacionar o eixo- $x$  até que os três pontos estivessem no eixo- $x$ . Note que nesse caso  $y_3 = 0$  e então teríamos a igualdade

$$(x_3 - x_2)^2 = (x_3 - x_2)^2$$

O que nos garantiria que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

### 3.4 REFLEXÕES COM DESLIZAMENTOS

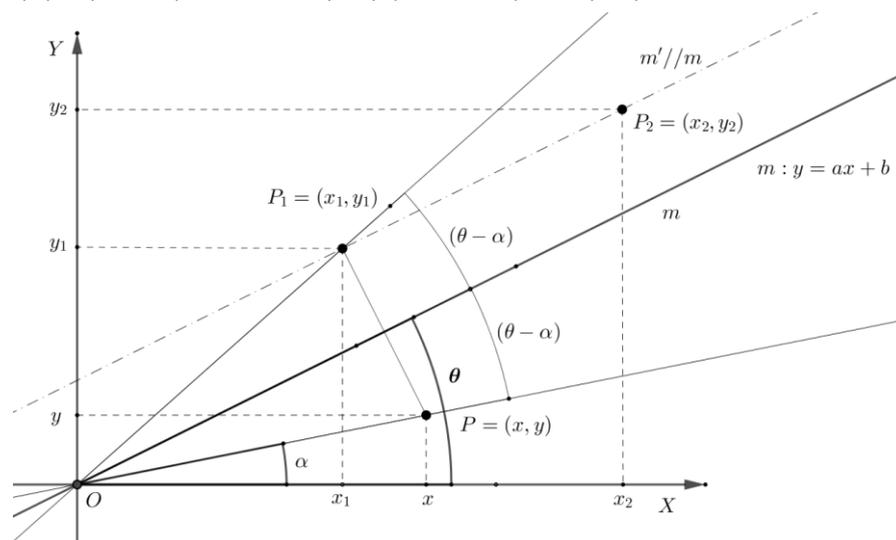
A isometria de reflexão difere das isometrias de rotação e translação quanto à orientação da figura transformada pela isometria. A isometria por reflexão inverte a orientação da figura. Veja que a reflexão  $\bar{r}$  em relação ao eixo- $x$ , quando aplicada ao ponto  $P = (x, y)$ , tem o seguinte resultado:  $\bar{r}(P) = \bar{r}(x, y) = (x, -y) = P_1$ , portanto inverte a orientação do plano quando fixa o eixo- $x$  e inverte o eixo- $y$ . Lembre-se que, de uma forma

mais geral, na reflexão o ponto  $P_1$  chama-se o simétrico de  $P$ , sempre que a reta  $l$ , em relação a qual a reflexão está definida é a mediatriz do segmento  $PP_1$ . Se  $P$  pertence à reta  $l$ , diremos que  $P$  é o simétrico dele próprio, ou seja, a reflexão é invariante em relação aos pontos que pertencem à reta  $l$ . Reciprocamente, se  $P_1$  é o simétrico de  $P$  em relação a uma dada reta  $l$ , então  $P$  é o simétrico de  $P_1$  em relação à mesma reta  $l$ . Tomemos agora uma reta  $m$  como referência e façamos uma reflexão  $\bar{r}_m$  em relação à  $m$ . Em seguida, façamos uma translação  $t_{(a,b)}$  no sentido paralelo ao da reta  $m$ , do resultado da reflexão em relação à  $m$ . Veja que esse movimento é exatamente uma composição das duas isometrias, ou seja,  $(\bar{r}_m \circ t_{(a,b)})$  ou  $(t_{(a,b)} \circ \bar{r}_m)$ . Essa isometria é chamada de reflexão com deslizamento. Veja que fica fácil dizer que uma reflexão comum é a composição de uma reflexão com a translação trivial,  $t_{(0,0)}$ .

Tomemos uma reflexão  $\bar{r}_m$ . Se a equação da reta  $m$  é  $y = ax + b$ , então qualquer translação que for paralela à reta  $m$ , comporá com  $\bar{r}_m$  uma reflexão deslizante. Por exemplo, a translação  $t_{(c,ca)}$  que transforma qualquer ponto  $P = (x,y)$  no ponto  $P_1 = (x+c, y+ca)$ . Vamos apresentar na Figura 20 a transformação do ponto  $P$  no ponto  $P_2$  através da reflexão com deslizamento formada pela composição da reflexão em relação à reta  $m$  com uma translação  $t_{(c,ca)}$ .

**Figura 20 – Reflexão com deslizamento:**

$$(t_{(c,ac)} \circ \bar{r}_m)(x, y) = t_{(c,ac)}(\bar{r}_m(x, y)) = t_{(c,ac)}(x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para determinar a representação do ponto  $P_2$  em função do ângulo  $\theta$  e das coordenadas do ponto original  $P$ , basta usarmos inicialmente a trigonometria básica do triângulo retângulo e depois a definição de translação.

Note que,

$$\cos \alpha = \frac{x}{OP} \quad \text{e} \quad \text{sen} \alpha = \frac{y}{OP} \quad (10)$$

$$x_1 = \overline{OP_1} \cos(2\theta - \alpha) = \overline{OP_1} (\cos 2\theta \cos \alpha + \text{sen} 2\theta \text{sen} \alpha) \quad (11)$$

$$y_1 = \overline{OP_1} \text{sen}(2\theta - \alpha) = \overline{OP_1} (\text{sen} 2\theta \cos \alpha - \cos 2\theta \text{sen} \alpha) \quad (12)$$

Agora, substituindo as equações (10) nas equações (11) e (12) e ainda considerando o fato de que  $\overline{OP} = \overline{OP_1}$ , temos o seguinte resultado:

$$x_1 = x \cos 2\theta + y \text{sen} 2\theta \quad \text{e} \quad y_1 = x \text{sen} 2\theta - y \cos 2\theta$$

Esse é o resultado da reflexão  $\bar{r}_m$  aplicada no ponto  $P(x, y)$ , ou seja:

$$\bar{r}_m(x, y) = (x_1, y_1) = (x \cos 2\theta + y \text{sen} 2\theta, x \text{sen} 2\theta - y \cos 2\theta)$$

Em seguida aplicamos a translação  $t_{(c,ca)}(x_1, y_1) = (x_1 + c, y_1 + ca)$  e finalmente temos:

$$(t_{(c,ca)} \circ \bar{r}_m)(x, y) = (x \cos 2\theta + y \text{sen} 2\theta + c, x \text{sen} 2\theta - y \cos 2\theta + ac),$$

que são as coordenadas de um ponto fruto de uma reflexão com deslizamento de um ponto  $P$  submetido a uma reflexão em relação à reta  $m$  que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo- $x$  e em seguida uma translação  $t_{(c,ac)}$  paralela à reta  $m$ .

### 3.5 O TEOREMA DAS TRÊS REFLEXÕES

As razões para o fato, citado na seção (3, 3), que qualquer isometria é uma reflexão, a composição de duas reflexões ou a composição de três reflexões, é que qualquer isometria é determinada pela sua aplicação em um triângulo. Para apresentarmos o teorema título dessa seção, se faz necessário visitarmos antes dois lemas. E para entendermos os lemas com precisão veremos duas proposições importantes.

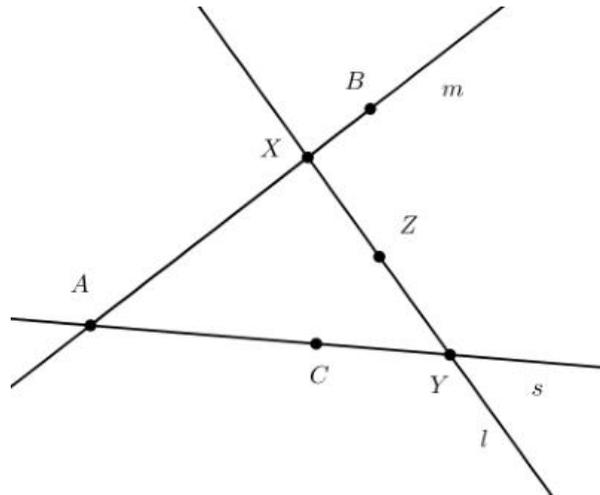
**Proposição 3.5.1** *Uma isometria  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que possui dois pontos fixos distintos é a função identidade.*

**Prova:** Com efeito, sejam  $A$  e  $B$  os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , tais que  $f(A) = A$  e  $f(B) = B$ . Se existisse  $X' \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $X' = f(X) \neq X$ , então o ponto  $A$  seria ponto médio do segmento  $XX'$ , pois  $d(A, X) = d(f(A), f(X)) = d(A, X')$ . Analogamente, o ponto  $B$  seria ponto médio do segmento  $XX'$ , logo  $A = B$ . Isso mostra que uma isometria  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , diferente da identidade, possui no máximo um ponto fixo. Portanto, como a isometria em questão possui dois pontos fixos distintos,  $f(X) = X$  para todo  $X \in \mathbb{R}$  e  $f = I_d$ . ■

**Proposição 3.5.2** Se uma isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  possui três pontos fixos não colineares, então  $f$  é a isometria identidade.

**Prova:** De fato, sejam  $A, B$  e  $C$  os pontos não colineares no plano  $\mathbb{R}^2$ , tais que,  $f(A) = A$ ,  $f(B) = B$  e  $f(C) = C$ . Considere as retas  $m = AB$  e  $s = AC$ , conforme Figura 21.

**Figura 21 –  $f$  com três pontos fixos  $A, B$  e  $C$  não colineares,  $f = I_d$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

A imagem da reta  $m$  pela isometria  $f$  é a reta que passa pelos pontos  $f(A)$  e  $f(B)$ . Assim, a restrição da isometria  $f/m$  é uma isometria da reta  $m$  com dois pontos fixos distintos  $A$  e  $B$ . Pela Proposição 3.5.1., tem-se  $f(X) = X$  para todo  $X \in m$ . Analogamente, temos que  $f(Y) = Y$  para todo  $Y \in s$ . Seja agora  $Z$  um ponto qualquer do plano  $\mathbb{R}^2$ . Façamos passar por  $Z$  uma reta  $l$  que intersecta as retas  $m$  e  $s$  nos pontos  $X$  e  $Y$ . Como  $f(X) = X$  e  $f(Y) = Y$ , então  $f$  tem dois pontos fixos distintos, o que torna todos os pontos de  $l$ , pontos fixos por  $f$  e em particular  $f(Z) = Z$ . Como o ponto  $Z$  foi tomado de forma arbitrário em  $\mathbb{R}^2$ , concluímos que  $f(Z) = Z$  para todo  $Z \in \mathbb{R}^2$  e  $f$  é a identidade. ■

Depois de vistos essas proposições, podemos apresentar o seguinte lema.

**Lema 3.5.1.** Qualquer isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é determinada pelas imagens  $f(A), f(B)$  e  $f(C)$  de três pontos  $A, B$  e  $C$ , não alinhados.

**Prova:** Vamos supor que existem duas isometrias  $f, g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tais que,  $f(A) = g(A)$ ,  $f(B) = g(B)$  e  $f(C) = g(C)$ , onde  $A, B$  e  $C$  são os três pontos não alinhados de  $\mathbb{R}^2$ . Afirmamos seguramente que  $(f^{-1} \circ g)(A) = A$ , pois  $(f^{-1} \circ g)(A) = f^{-1}(g(A)) = f^{-1}(f(A)) = A$ . Analogamente, podemos garantir que  $(f^{-1} \circ g)(B) = B$  e  $(f^{-1} \circ g)(C) = C$ . Observamos que a isometria  $(f^{-1} \circ g)$ , em  $\mathbb{R}^2$ , possui três pontos fixos distintos. Logo,

pela Proposição 3.5.2.,  $(f^{-1} \circ g) = I_d$  e daí tiramos que  $f = g$ , portanto as imagens  $f(A)$ ,  $f(B)$  e  $f(C)$ , de três pontos  $A, B$  e  $C$ , não alinhados, determinam uma única isometria. ■

**Corolário 3.5.1.** *Se  $l$  é um conjunto de pontos equidistantes de dois pontos  $P$  e  $Q$ , então a reflexão em relação à  $l$  leva  $P$  em  $Q$ .*

**Prova:** Conforme o Exemplo 3.2.5., podemos assumir  $P = (0, -b)$  e  $Q = (0, b)$  de onde segue que  $l$  é a reta  $y = 0$ . Mas a reflexão  $\bar{r}_{(y=0)}$ , leva  $(x, y)$  em  $(x, -y)$  e portanto a reflexão em relação à  $l$  troca  $P$  por  $Q$ . ■

**Teorema 3.5.1.** *Qualquer isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é a composição de uma reflexão, a composição de duas reflexões ou a composição de três reflexões.*

**Prova:** Escolha três pontos  $A, B$  e  $C$  não alinhados e considere suas imagens  $f(A)$ ,  $f(B)$  e  $f(C)$ . Se  $f$  tem dois pontos fixos, ou seja, dois dos pontos  $A, B$  e  $C$  coincidem com suas imagens, por exemplo,  $f(A) = A$  e  $f(B) = B$ , então a reflexão  $\bar{r}_l$  em relação à reta  $l$  que passa pelos pontos  $A$  e  $B$ , deve levar  $C$  para  $f(C)$  (Corolário 3.5.1.), porque  $C$  e  $f(C)$  são equidistantes de  $A = f(A)$  e de  $B = f(B)$ , afinal,  $d(C, A) = d(f(C), f(A)) = d(f(C), A)$  e  $d(C, B) = d(f(C), f(B)) = d(f(C), B)$ . Essa reflexão, portanto, leva os pontos  $A, B$  e  $C$  em  $f(A)$ ,  $f(B)$  e  $f(C)$ , respectivamente e, assim, coincide com  $f$  (Lema 3.5.1.).

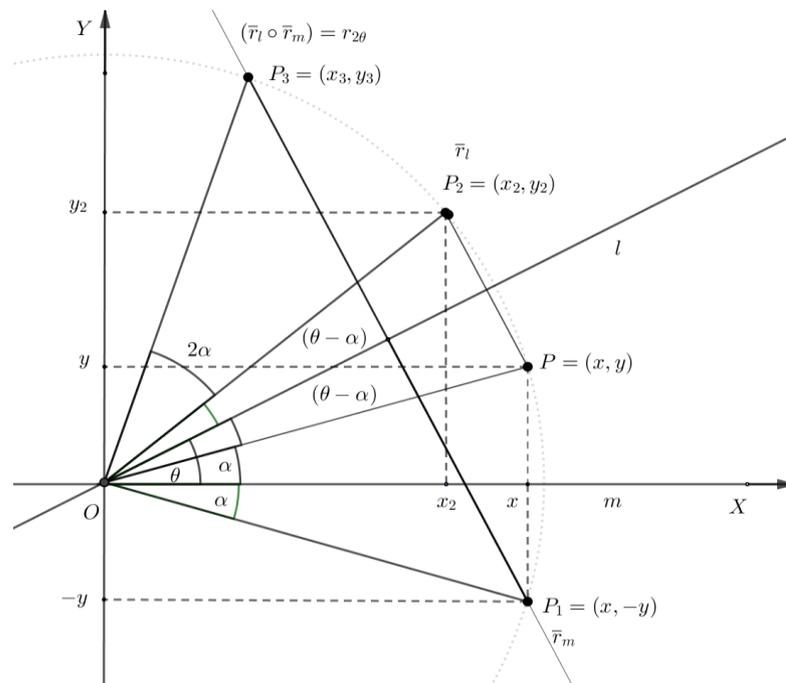
Se  $f$  tem apenas um ponto fixo, ou seja, apenas um dos pontos  $A, B$  e  $C$  coincide com a sua imagem, digamos  $A = f(A)$ , então aplique primeiro a reflexão  $\bar{g}_m$ , em relação à reta  $m$  de pontos equidistantes de  $B$  e  $f(B)$ . A partir daí  $A = f(A)$  é equidistante de  $B$  e  $f(B)$ , afinal  $d(A, B) = d(f(A), f(B)) = d(A, f(B))$ , portanto ela é fixada por  $\bar{g}_m$  que leva os pontos  $A$  e  $B$  nas suas imagens  $f(A)$  e  $f(B)$ , respectivamente. Se  $\bar{g}_m$  também leva  $C$  em  $f(C)$ , terminamos a prova. Se não, realizamos uma segunda reflexão  $\bar{h}_n$  em relação a reta  $n$  que passa por  $f(A)$  e  $f(B)$ , e então concluiremos como acima que  $(\bar{g}_m \circ \bar{h}_n)(C) = f(C)$ . E seguramente podemos afirmar que  $(\bar{g}_m \circ \bar{h}_n)$  leva  $A, B$  e  $C$  em,  $f(A)$ ,  $f(B)$  e  $f(C)$ , respectivamente e, portanto, coincide com  $f$  (Lema 3.5.1.). Finalmente, se nenhum dos pontos  $A, B$  e  $C$  coincide com suas imagens  $f(A)$ ,  $f(B)$  e  $f(C)$  pela isometria  $f$ , então realizaremos três reflexões nas retas  $l, m$  e  $n$ , respectivamente equidistantes de  $A$  e  $f(A)$ ,  $B$  e  $f(B)$  e  $C$  e  $f(C)$ . Observa-se de forma similar que a composição de uma reflexão, a composição de duas reflexões ou a composição de três reflexões levam  $A$  em  $f(A)$ ,  $B$  em  $f(B)$  e  $C$  em  $f(C)$  e, portanto, coincide com  $f$  (Lema 3.5.1.). ■

Vamos apresentar um exemplo pertinente ao teorema acima, onde uma rotação é igual à composição de duas reflexões.

**Exemplo 3.5.1.** *Sejam  $\bar{r}_m$  e  $\bar{r}_l$  as reflexões em relação às retas  $m$  e  $l$ , respectivamente, e  $\theta$  o ângulo da reta  $m$  para a reta  $l$ . Prove que a composição dessas duas reflexões ( $\bar{r}_m \circ \bar{r}_l$ ) é igual à isometria dada pela rotação de um ângulo  $2\theta$  em torno do ponto de interseção das retas  $m$  e  $l$ , ou seja,  $(\bar{r}_m \circ \bar{r}_l) = r_{2\theta}$ .*

**Solução:** Considere um sistema de eixos ortogonais no qual a reta  $m$  seja o eixo horizontal e a origem  $O$  seja o ponto de interseção das retas  $m$  e  $l$ . Dado um ponto arbitrário,  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , se verifica facilmente pela Figura 22 quais isometrias transformam  $P$  em  $P_1, P_2$  e  $P_3$ , a saber:  $P_1$  é a reflexão  $\bar{r}_m$  do ponto  $P$  em relação à reta  $m$ ,  $P_2$  é a reflexão  $\bar{r}_l$  de  $P$  em relação à reta  $l$  e  $P_3$  a composição das duas reflexões, ou seja,  $(\bar{r}_m \circ \bar{r}_l)$ . Ainda pela figura, nota-se que, sendo  $P_3$  a reflexão de  $P_1$  por  $\bar{r}_l$ , o ângulo  $\widehat{POP_3}$  mede  $(\theta - \alpha) + (\theta - \alpha) + 2\alpha = 2\theta$ , ou seja,  $P_3$  é a imagem de  $P$  pela rotação  $r_{2\theta}$ , como se esperava.

**Figura 22 – Uma rotação igual à composição de duas reflexões.**  
 $\bar{r}_m(P) = P_1, \bar{r}_l(P) = P_2, \bar{r}_l(P_1) = P_3$  e  $(\bar{r}_m \circ \bar{r}_l)(P) = P_3$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, vamos mostrar usando as coordenadas cartesianas. É bom lembrar que as coordenadas das imagens sempre as escrevemos em função das coordenadas do ponto original. Observando os triângulos retângulos da figura, tiramos as seguintes equações:

$$\cos\alpha = \frac{x}{OP} \quad \text{e} \quad \sin\alpha = \frac{y}{OP} \quad (13)$$

$$x_2 = \overline{OP_2} \cos(2\theta - \alpha) \quad \text{e} \quad y_2 = \overline{OP_2} \sin(2\theta - \alpha) \quad (14)$$

$$x_2 = \overline{OP_2}(\cos 2\theta \cos \alpha + \sin 2\theta \sin \alpha) \text{ e } y_2 = \overline{OP_2}(\sin 2\theta \cos \alpha - \cos 2\theta \sin \alpha) \quad (15)$$

Substituindo as equações (13) nas equações (15) e como  $\overline{OP} = \overline{OP_2}$ , afinal o triângulo  $POP_2$  é isósceles de base  $PP_2$ , pois  $P_2$  é a imagem de  $P$  pela reflexão  $\bar{r}_l$ , então temos:

$$x_2 = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta) \text{ e } y_2 = (x \sin 2\theta - y \cos 2\theta) \quad (16)$$

Portanto, a reflexão de um ponto arbitrário  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  em relação à reta  $l$  é dada por:

$$\bar{r}_l(x, y) = (x \cos 2\theta + y \sin 2\theta, x \sin 2\theta - y \cos 2\theta); \quad (17)$$

como  $\bar{r}_m(x, y) = (x, -y)$ , então,  $(\bar{r}_l \circ \bar{r}_m)(x, y) = \bar{r}_l(\bar{r}_m(x, y)) = \bar{r}_l(x, -y)$ , então temos

$$(\bar{r}_l \circ \bar{r}_m)(x, y) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta) \quad (18)$$

Do Exemplo 3.2.3, observamos que a rotação de um ponto arbitrário  $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , em torno da origem  $O$ , de um ângulo igual a  $2\theta$  é igual a:

$$r_{2\theta}(x, y) = (x \cos 2\theta - y \sin 2\theta, x \sin 2\theta + y \cos 2\theta) \quad (19)$$

E, portanto, a solução do exercício está feita na igualdade das equações (18) e (19), como vemos.

$$(\bar{r}_l \circ \bar{r}_m)(x, y) = r_{2\theta}(x, y).$$

## 4 TESSELAÇÕES

### 4.1 TESSELAÇÕES E SIMETRIAS

Trataremos agora das Tesselacões, seus principais tipos, bem como as formas de construí-los. Antes iremos apresentar formalmente algumas definições no plano  $\mathbb{R}^2$  que compõem esse estudo e julgamos pertinentes nessa etapa.

**Definição 4.1.1.** *Dois polígonos  $p_1$  e  $p_2$  no plano são congruentes se existe uma isometria entre eles, ou seja, existe  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que leve  $p_1$  em  $p_2$ , ou ainda,  $f(p_1) = p_2$ . De forma intuitiva podemos movimentar um polígono até que se sobreponham completamente, usando apenas as isometrias de translação, rotação e reflexão.*

**Definição 4.1.2.** *Tesselação  $T$  é uma divisão de uma superfície em polígonos congruentes que não se sobrepõem e tampouco deixam lacunas, chamados de tesselas, ladrilhos ou mosaicos. Aqui chamaremos de ladrilhos.*

**Definição 4.1.3.** *Uma Tesselação  $T$  é simétrica se todo ladrilho  $\pi_1$  pode ser enviado para qualquer outro ladrilho  $\pi_2$  e preserva a Tesselação, isto é, qualquer ladrilho  $\pi_1$  pode ser enviado para o ladrilho  $\pi_2$  por uma isometria de  $f: T \rightarrow T$ .*

**Definição 4.1.4.** *As isometrias  $f: T \rightarrow T$  são chamadas simetrias de  $T$  e elas formam um grupo chamado grupo de simetrias de  $T$  representado por  $\Gamma$ .*

Dessa forma  $T$  é simétrica se seu grupo de simetrias contém elementos suficientes para levar qualquer ladrilho em qualquer outro ladrilho, ou seja, dados quaisquer  $\pi_1$  e  $\pi_2$  em  $T$ , então existe  $f$  em  $\Gamma$  tal que  $f(\pi_1) = \pi_2$ .

Como usamos o conceito de grupo na definição acima, achamos por bem apresentar aqui sua definição, lembrando da seção 3.2 que toda isometria  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é bijetiva e portanto tem inversa e um elemento neutro (no caso função identidade  $I_d$ ). Segue a definição do grupo  $\Gamma$ .

**Definição 4.15.** *Seja  $\Gamma$  um conjunto não vazio de isometrias e  $(f, g) \longrightarrow (f \circ g)$  e uma lei de composição interna em  $\Gamma$ . Dizemos que  $\Gamma$  é um grupo em relação à lei de composição*

de isometrias quando,

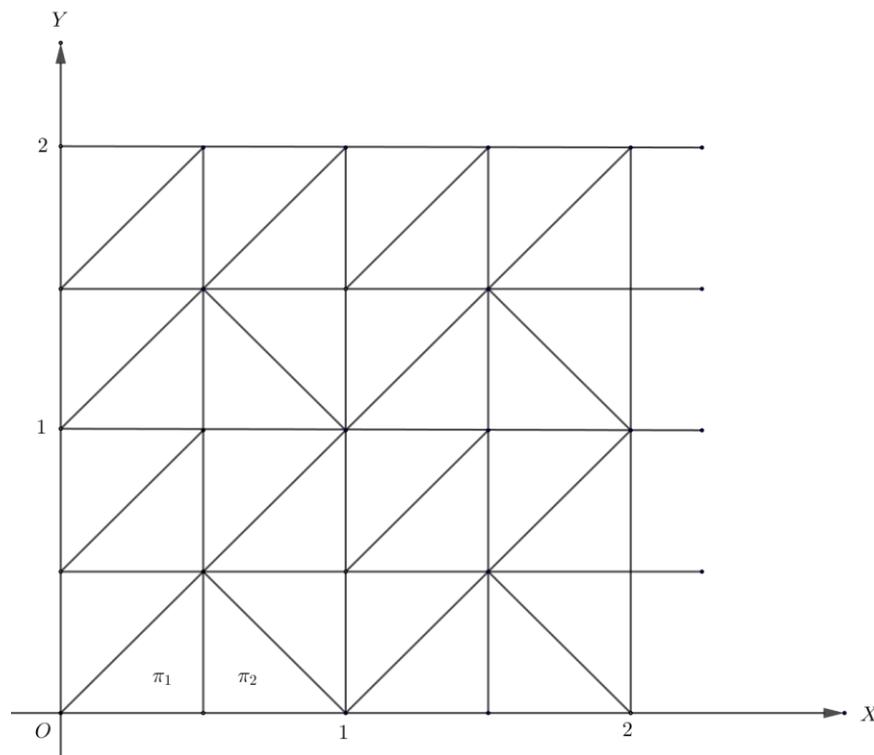
a)  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$  pra qualquer que seja  $f, g$  e  $h$  em  $\Gamma$ , isto é, vale a propriedade associativa;

b) Existe  $I_d \in \Gamma$  de maneira que  $(f \circ I_d) = (I_d \circ f) = f$ , para qualquer  $f \in \Gamma$ , ou seja, existe elemento neutro;

c) Todo elemento de  $\Gamma$  é invertível em relação a composição, isto é, para qualquer  $f \in \Gamma$ , existe  $f^{-1} \in \Gamma$  tal que  $(f^{-1} \circ f) = (f \circ f^{-1}) = I_d$

Voltando às simetrias, podemos apresentar um exemplo de uma tesselação  $T$  que não é simétrica, conforme a Figura 23.

**Figura 23 – Tesselação não simétrica**

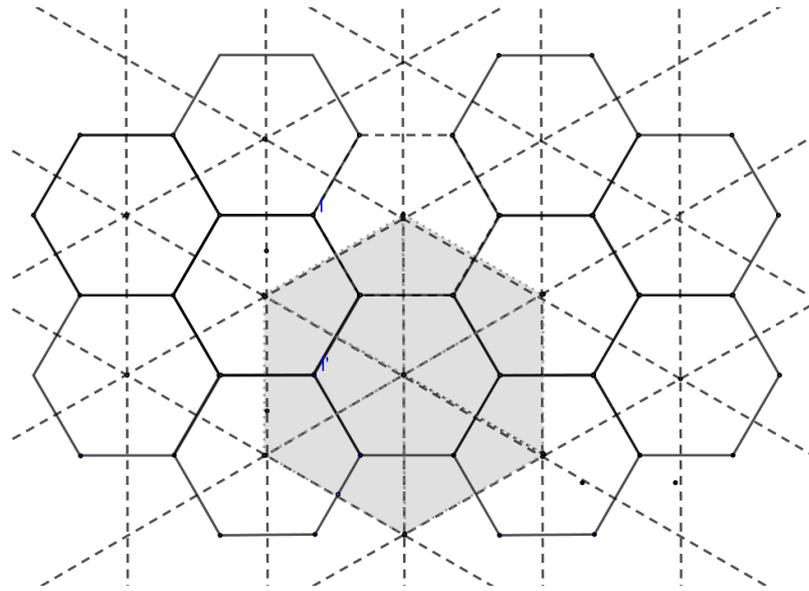


Fonte: Elaborada pelo autor.

As simetrias desta tesselação são precisamente as translações em  $\mathbb{R}^2$  com coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . Assim, mesmo que todos os ladrilhos sejam congruentes, não existe simetria de  $T$  que leve o ladrilho  $\pi_1$  em  $\pi_2$ .

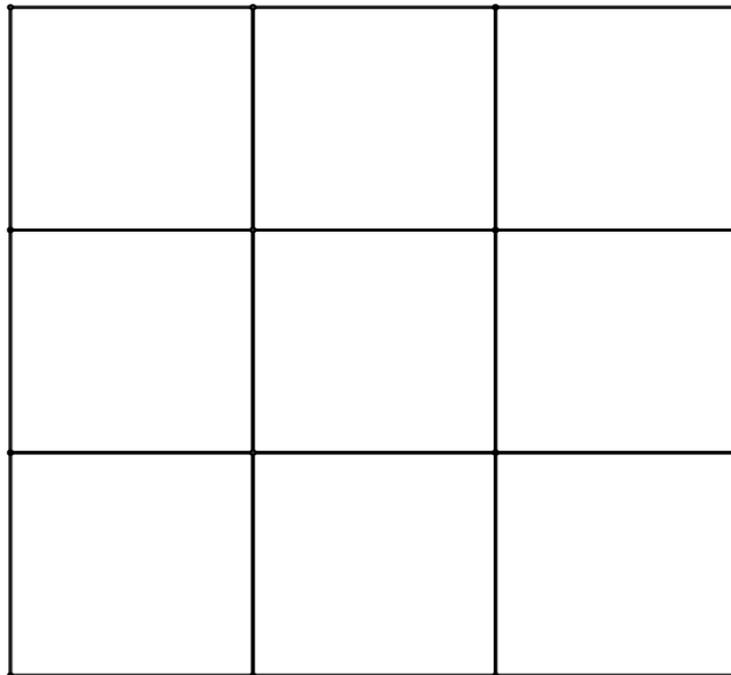
As Tesselações simétricas mais comuns no  $\mathbb{R}^2$  são as baseadas no triângulo equilátero, no hexágono regular onde vemos na Figura 24 e as que são baseadas no quadrado conforme Figura 25.

**Figura 24 – Tesselação simétrica (Hexágono regular)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

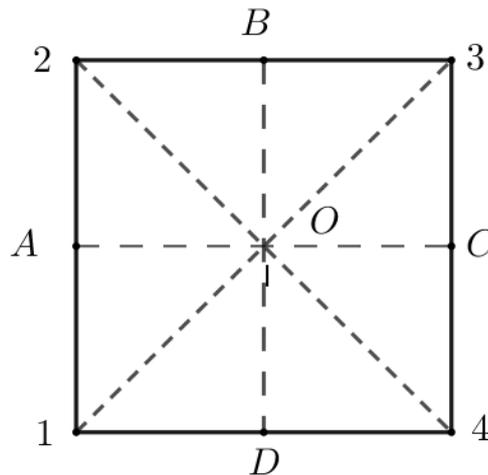
**Figura 25 - Tesselação simétrica (Quadrado)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Em cada uma dessas Tesselações existem várias simetrias que levam um ladrilho sobre si mesmo. Por exemplo, tomemos a Figura 26. Todas as 8 simetrias do quadrado são simetrias da Tesselação quadrado. Note que as simetrias do quadrado são 4 rotações  $r_{90^\circ}$  em torno do ponto  $O$  e 4 reflexões (duas reflexões, uma  $\bar{r}_{AC}$  e outra  $\bar{r}_{BD}$  mais duas reflexões, uma  $\bar{r}_{13}$  e outra  $\bar{r}_{24}$ ).

**Figura 26 – Simetrias do quadrado**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Devido a isso, a Tesselação obtida subdividindo cada quadrado em oito triângulos tem o mesmo grupo da tesselação quadrada.

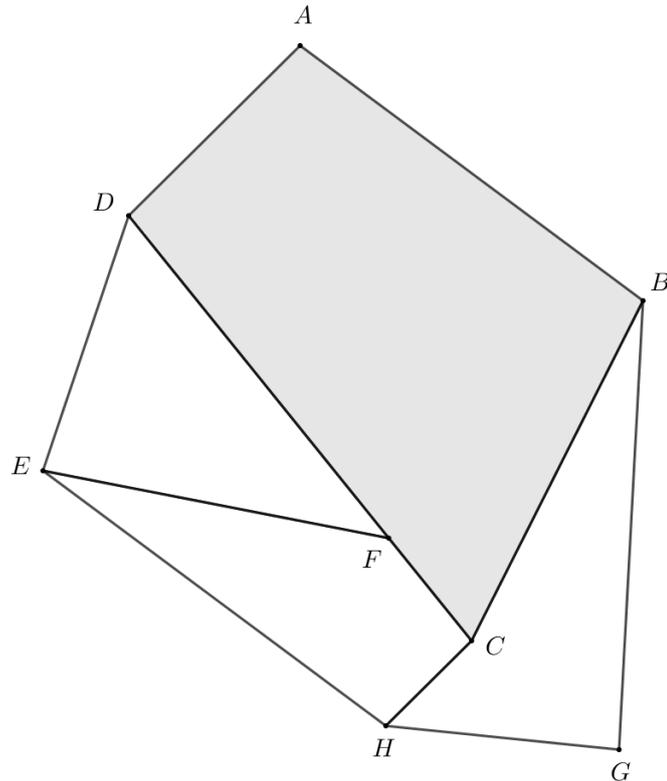
Poderíamos continuar dando esse enfoque mais abstrato e com uma matemática mais elaborada, no entanto, não nos afastando do objetivo do PROFMAT, vamos agora apresentar os tipos de Tesselações no plano e tomaremos a linguagem da geometria plana, portanto usaremos doravante os polígonos como as partes que compõem uma Tesselação e trataremos de algumas notações usuais. Para isso faremos uso de conhecimentos da geometria plana e por fim procuraremos identificar de que fez uso Maurits Cornelis Escher para realização de boa parte de sua obra artística.

#### 4.2 TIPOS DE TESSELAÇÕES NO PLANO

As Tesselações que trataremos aqui são exclusivamente formadas por polígonos regulares que farão a cobertura de toda superfície de parte do plano; já que cobrir todo o plano não é possível na prática, muito embora na Geometria o seja.

Precisamos nomear os entes formadores dos polígonos que compõem uma tesselação: nós de uma tesselação são todos os vértices dos polígonos usados na tesselação; arestas são os segmentos de retas que tem como extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de um polígono. Talvez se pergunte por que chamar vértice de nó se são a mesma coisa? É um engano pensar assim. Pode ocorrer de uma Tesselação ter um polígono com número maior de nós do que de vértices em sua fronteira. Basta ver a Figura 27, onde o polígono sombreado tem 4 vértices e 5 nós.

**Figura 27 – Nós e vértices: 4 vértices ( $A, B, C, D$ )  
e 5 nós ( $A, B, C, D, F$ )**



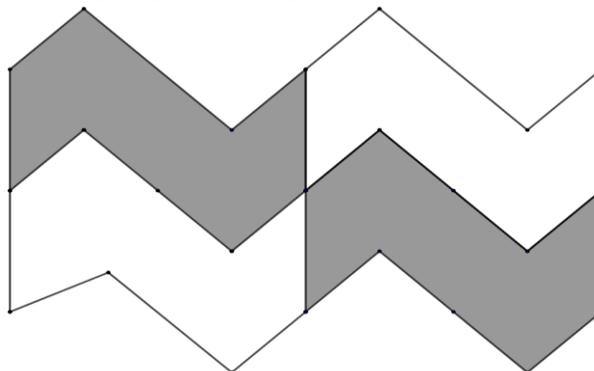
Fonte: Elaborada pelo autor.

De acordo com os tipos de polígonos e a disposição desses polígonos é que classificamos as Tesselações:

#### 4.2.1 Monoédricas

São Tesselações formadas por polígonos congruentes entre si. É bom lembrar da Definição 4.1.1 de congruência: dois polígonos são congruentes se existe uma isometria entre eles. Temos um exemplo na Figura 28.

**Figura 28 – Tesselação Monoédricas:  
polígonos congruentes entre si**



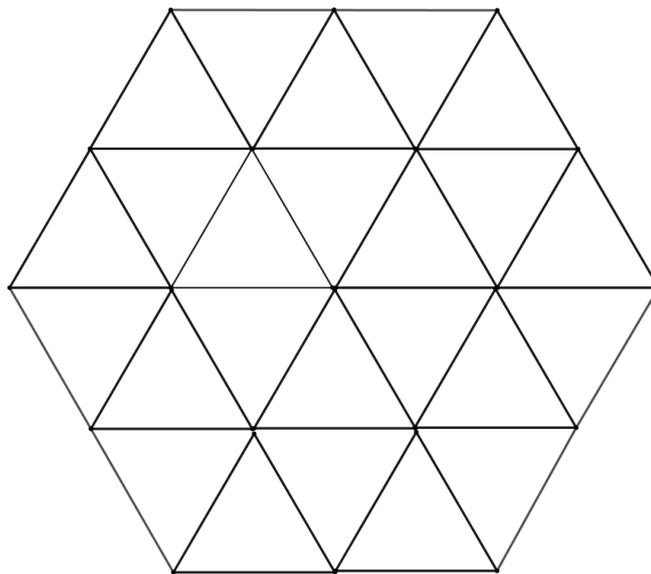
Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.2.2 Regulares

São Tesselações formadas por polígonos regulares e congruentes entre si. Podemos ainda dizer que essas Tesselações formada por um único polígono regular são também chamadas de pavimentações platônicas (BARBOSA,1993).

Veja um exemplo de Tesselações regulares na Figura 29. A notação desse tipo de tesselação é  $\{p, q\}$ , onde  $q$  polígonos regulares com  $p$  lados estão ao redor de cada vértice ou nó.

**Figura 29 – Tesselação regular  $\{3,6\}$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

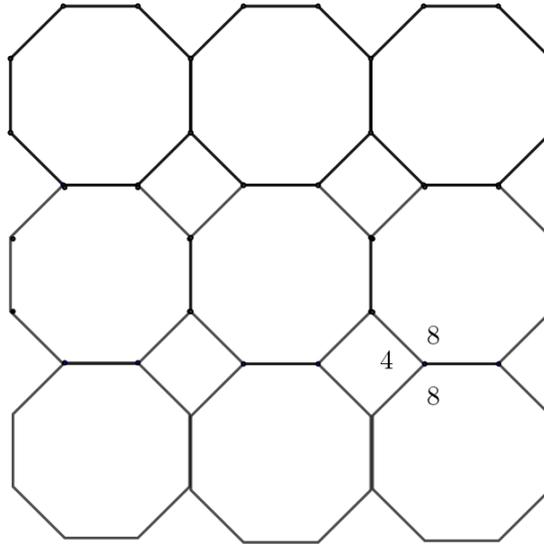
### 4.2.3 Semirregulares

São Tesselações compostas de dois ou mais polígonos regulares, mas possuem o mesmo tipo de nó, ou seja, os polígonos que compartilham cada nó são do mesmo tipo.

A notação desse tipo de tesselação é feita tomando o número de lados de cada polígono que compartilham um nó. Digamos que temos em cada nó, um polígono com  $m$  lados, dois polígonos com  $n$  lados e um polígono com  $p$  lados, sendo que os polígonos de  $n$  lados ficam separados pelos polígonos de  $m$  e  $p$  lados. Sua representação é a seguinte:  $(m, n, p, n)$ .

Veja um exemplo na Figura 30.

**Figura 30 – Tesselação semirregular (4,8,8)**

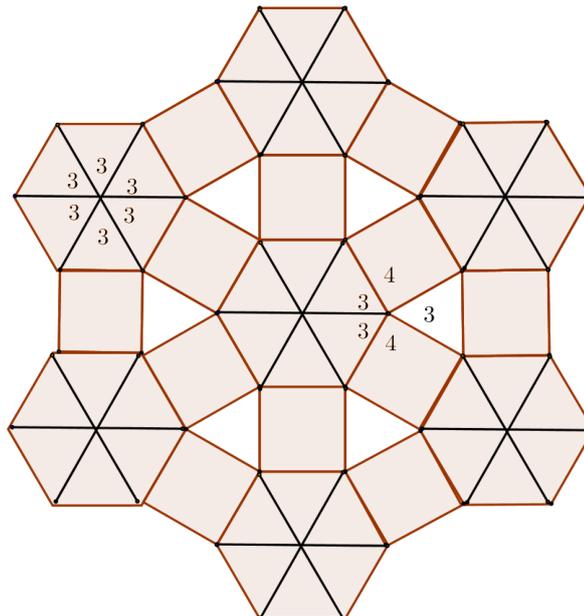


Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.4 Demirregulares

Esse tipo de tesselação é formado também por polígonos regulares diferentes, ocorre que ela possui diferentes tipos de nós. Observe um exemplo na Figura 31 uma tesselação demirregular com um nó  $(3,3,3,3,3,3)$  e outro nó  $(3,4,3,3,4)$ , portanto é uma tesselação que não podemos representar com os lados dos polígonos que a compõe, diferentemente das semirregulares.

**Figura 31 – Tesselação demirregular. Nós diferentes:  $(3,3,3,3,3,3)$  e  $(3,4,3,3,4)$**

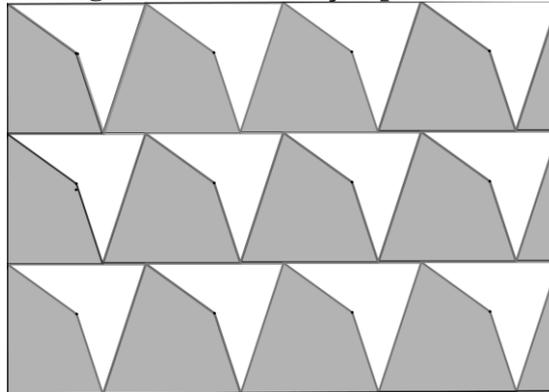


Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.5 Periódicas

A tesselação é dita periódica quando um ladrilho, ou um conjunto de ladrilhos é levado por uma translação  $t_{(a,b)}$  a outro ladrilho ou conjunto de ladrilhos idênticos aos de partida. Irá ocorrer com a translação a superposição completa da região idêntica a original.

**Figura 32 – Tesselação periódica**



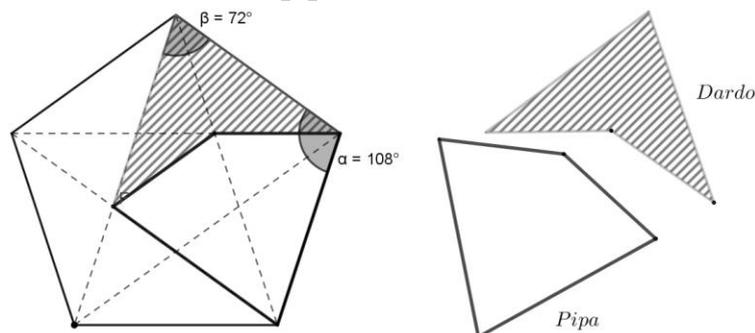
Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.2.6 Não periódicas ou aperiódicas

São Tesselações onde não existem padrões repetidos. Qualquer que seja a isometria aplicada a qualquer região da tesselação, jamais levará a uma região idêntica. As peças que compõem uma tesselação aperiódica são chamadas de protoladrilhos.

Foi o matemático e físico inglês Roger Penrose que percebeu como é possível recobrir o plano de maneira não periódica utilizando apenas dois quadriláteros irregulares que depois foram chamados em inglês, por conta dos seus formatos, de *kite* que significa pipa e *dart* que significa dardo. Esses quadriláteros irregulares podem ser construídos a partir de um pentágono regular e são partes de um losango com ângulos internos de  $72^\circ$  e  $108^\circ$  como podemos conferir na Figura 33.

**Figura 33 – Quadriláteros irregulares (protoladrilhos): kite(pipa) e dart(dardo)**



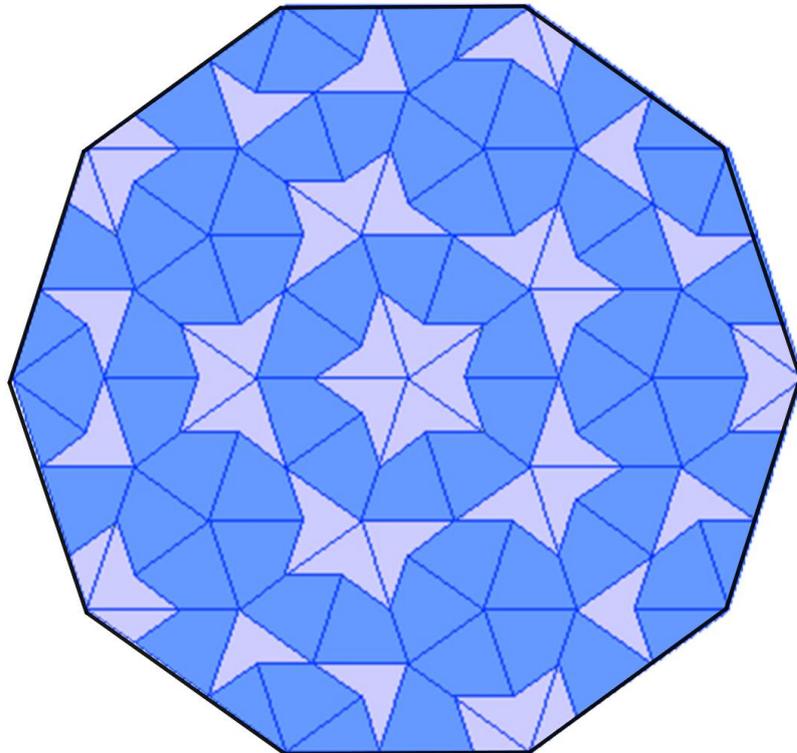
Fonte: Elaborada pelo autor.

Convém informar que Tesselações periódicas podem ser feitas também com esses protoladrilhos, como já vimos na Figura 32.

Para se construir uma Tesselação aperiódica com os quadriláteros *kite* e *dart* devemos unir os polígonos de tal forma que fiquem juntos os vértices correspondentes ou de mesmos nomes.

Apresentamos agora um exemplo de uma Tesselação aperiódica na Figura 34 que ficou conhecido como o mais notável conjunto de protoladrilhos construído por Roger Penrose.

**Figura 34 – Tesselação aperiódica formada pelos protoladrilhos *kite* e *dart***



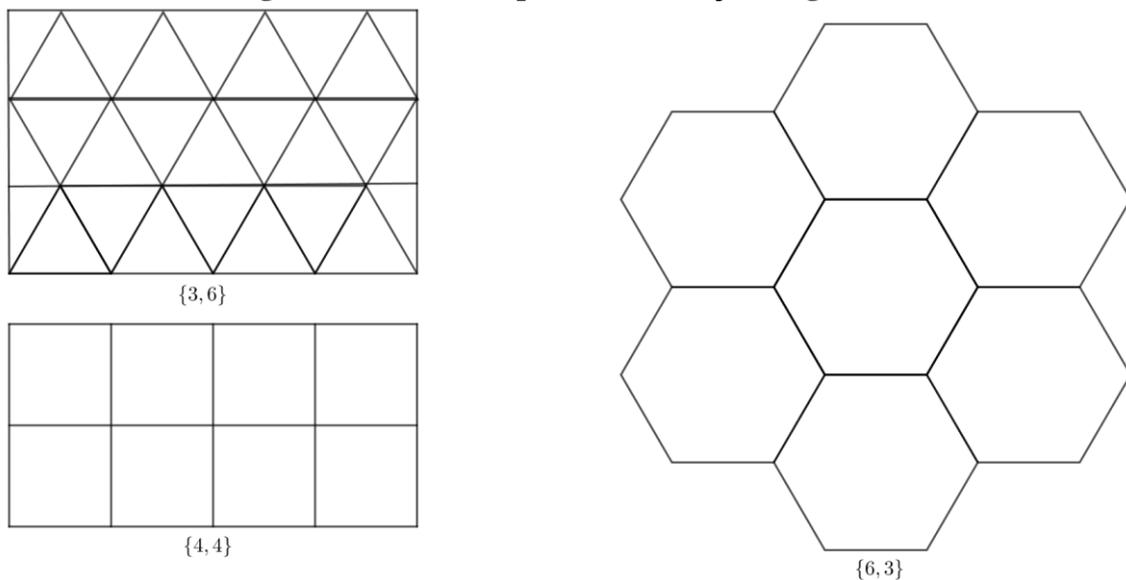
Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/segundoprot.htm>

### 4.3 TESSELAÇÕES REGULARES

Preliminarmente devemos lembrar que quando falamos de Tesselações regulares, estamos falando do recobrimento do plano com um único tipo de polígono regular. Obviamente não podemos construir Tesselações regulares com qualquer tipo de polígono regular, pois em torno de cada nó devemos ter uma quantidade de polígonos regular cuja soma de seus ângulos internos com vértices nesse nó seja  $360^\circ$ . É claro também que quanto maior o número de lados de um polígono regular, maior será a medida de seu ângulo interno.

Analisando o polígono regular com o menor número de lados, ou seja o triângulo equilátero, vemos que em torno de um nó podemos ter seis triângulos equilátero, pois a soma dos seus ângulos internos em torno desse nó é  $360^\circ$  e esses triângulos cobrem o plano; o polígono com quatro lados é o quadrado, cuja soma de quatro ângulos internos em torno de um nó é também  $360^\circ$ ; com cinco lados temos o pentágono regular cujos ângulos internos de  $108^\circ$  não somam  $360^\circ$  com uma quantidade inteira de vezes e por fim com seis lados temos o hexágono regular, cujos ângulos internos de  $120^\circ$  em número de três completam um ângulo de uma volta. E digo por fim com seis lados, porque qualquer polígono regular com número de lados maior do que seis, terá um ângulo interno maior do que  $120^\circ$  e menor do que  $180^\circ$ . Nesse caso implica que devemos ter em torno de cada nó, uma quantidade de polígonos maior do que 2 e menor do que 3, ou seja um número não inteiro. Isso significa que não temos também uma quantidade inteira de polígonos regulares. Portanto, os triângulos equiláteros, os quadrados e os hexágonos regulares são os únicos polígonos regulares que podem construir uma Tesselação. Veja a Figura 35.

**Figura 35 – Únicos tipos de Tesselações regulares**



Fonte: Elaborada pelo autor.

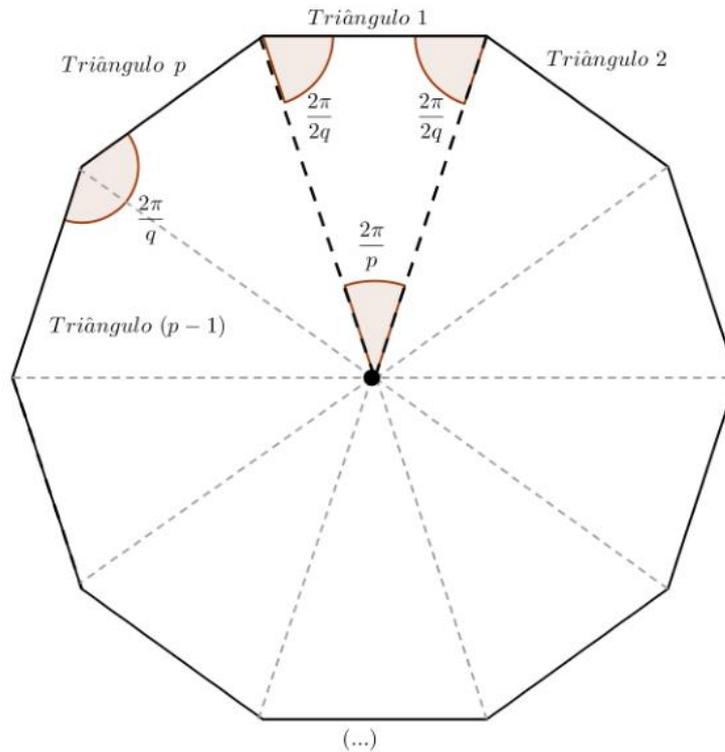
Para não deixar dúvidas vamos nos valer da seguinte proposição:

**Proposição 4.3.1.** *Existem apenas três Tesselações regulares no Plano Euclidiano, quais sejam, aquelas formadas por triângulos equiláteros, por quadrados ou por hexágonos regulares.*

**Prova:** Seja a tesselação regular  $\{p, q\}$ . Portanto temos  $q$  polígonos regulares de  $p$  lados ao redor de cada vértice e a medida do ângulo interno desse polígono é  $\frac{2\pi}{p}$ . Agora divida cada polígono regular de  $p$  lados em  $p$  triângulos, cada um com vértice no centro do polígono

regular, sendo o lado oposto a esse vértice um lado do polígono regular. Observe que o ângulo do centro terá medida igual a  $\frac{2\pi}{p}$ . Então esse triângulo será isósceles com ângulos da base tendo medidas iguais a metade da medida do ângulo interno do polígono regular, ou seja,  $\frac{2\pi}{2q}$ . Para melhor compreensão veja a Figura 36.

**Figura 36 – Divisão de um dos  $q$  polígonos regulares em  $p$  triângulos**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Daí temos os três ângulos de um dos  $p$  triângulos,  $\frac{2\pi}{2q}$ ,  $\frac{2\pi}{2q}$  e  $\frac{2\pi}{p}$ . Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $\pi$  temos:

$$\frac{2\pi}{2q} + \frac{2\pi}{2q} + \frac{2\pi}{p} = \pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{q} + \frac{2\pi}{p} = \pi$$

Multiplicando toda equação acima por  $\frac{pq}{\pi}$  temos o seguinte resultado:

$$2p + 2q = pq \Leftrightarrow pq - 2p - 2q = 0 \Leftrightarrow pq - 2p - 2q + 4 = 4$$

Fatorando o primeiro membro dessa equação chegamos a um resultado mais prático de análise, ou seja:

$$pq - 2p - 2q + 4 = 4 \Leftrightarrow p(q - 2) - 2(q - 2) = 4 \Leftrightarrow (q - 2)(p - 2) = 4$$

$$(q - 2)(p - 2) = 4 \quad (20)$$

Como os valores de  $p$  e  $q$  são números inteiros positivos e o menor valor de  $p$  é 3, pois o triângulo é o polígono de menor número de lados, então a equação (20) tem apenas três soluções inteiras positivas, conforme mostramos abaixo:

1. Se  $p = 3 \Rightarrow q = 6$ , ou seja, a tesselação regular será do tipo  $\{3, 6\}$ ;
2. Se  $p = 4 \Rightarrow q = 4$ , ou seja, a tesselação regular será do tipo  $\{4, 4\}$ ;
3. Se  $p = 6 \Rightarrow q = 3$ , ou seja, a tesselação regular será do tipo  $\{6, 3\}$ .

Note que se  $q$  assumir outros valores, não teremos soluções inteiras para  $p$ . Portanto concluímos que existem apenas três tesselações regulares no Plano Euclidiano. As formadas por 6 triângulos equilátero e congruentes em torno de cada nó, representada por  $\{3, 6\}$ ; as formadas por 4 quadrados congruentes ao redor de cada nó, representada por  $\{4, 4\}$ , e por fim as formadas por 3 hexágonos regulares congruentes ao redor de cada nó, representada por  $\{6, 3\}$ . ■

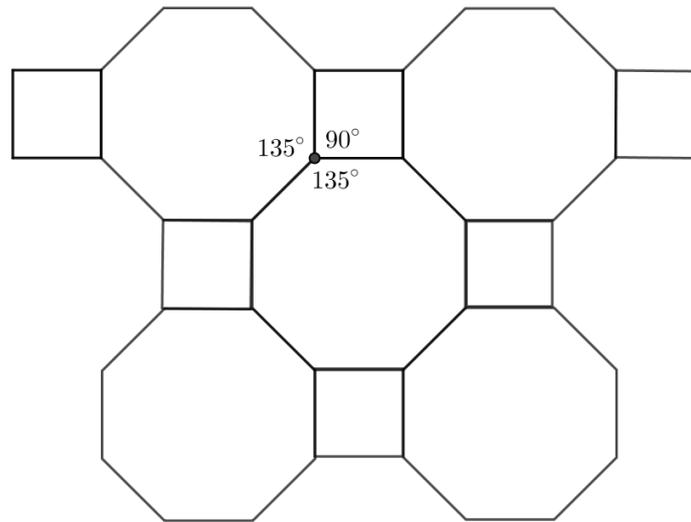
Tratamos aqui nessa seção de Tesselações formadas por polígonos regulares e congruentes entre si. Uma tesselação feita pela repetição de um único polígono. E polígonos regulares de tipos diferentes podem pavimentar completamente o plano? É o que vamos responder na seção seguinte, onde veremos algumas Tesselações semirregulares que respondem afirmativamente essa questão.

#### 4.4 TESSELAÇÕES SEMIRREGULARES

Na seção 2.2 apreciamos algumas Tesselações que fazem parte da decoração do Castelo de Alhambra na cidade espanhola de Granada. Essas Tesselações eram formadas por mais de um tipo de polígono regular. Relembre que foram essas Tesselações o maior elemento motivador para o nosso artista Escher aprofundar-se como o fez na produção de desenhos com essa técnica de revestimento do plano. A partir desse momento iremos descobrir se existem e, se existirem, como são possíveis suas formações.

Vamos lembrar alguns pressupostos matemáticos que já foram tratados na seção anterior, necessários para que isso se concretize. O primeiro é saber que os polígonos regulares usados podem ser de tipos diferentes, mas os seus lados devem ser congruentes e a soma dos seus ângulos internos em torno de um vértice ou nó é  $360^\circ$ . Vejamos um exemplo na Figura 37 de uma tesselação do tipo  $(4, 8, 8)$ , ou seja, em torno de um nó temos um quadrado, um octógono e outro octógono.

**Figura 37 – Tesselação semirregular do tipo (4,8,8)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

É sabido que o polígono regular de menor ângulo interno é o triângulo equilátero, pois tem três ângulos de  $60^\circ$ . Observe que  $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ . Dessa forma podemos ter, no máximo seis ângulos de  $60^\circ$  adjacente a um vértice, portanto, seis é o número máximo de polígonos que devemos ter em torno de um vértice em uma tesselação. E ainda podemos dizer mais com relação ao número máximo de polígonos regulares em torno de um vértice: como não existe outro polígono regular com ângulo interno medindo  $60^\circ$ , então os seis polígonos regulares só podem ser triângulos equiláteros e nenhum outro. Logo a tesselação é do tipo  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ .

Não fica difícil concluir que o número mínimo de polígonos regulares em torno de um vértice em uma tesselação não pode ser dois. Claro que dois polígonos convexos ao dividirem um vértice, seus dois ângulos internos adjacentes não somarão  $360^\circ$ , pois cada um desses ângulos mede menos do que  $180^\circ$ . Daí podemos afirmar que o número mínimo de polígonos regulares em torno de um vértice são três. Portanto, conforme a quantidade e o tipo de polígonos em torno de um vértice, as Tesselações possíveis são as que possuem em torno de seus vértices três polígonos regulares, quatro ou cinco, já que com seis a única é do tipo  $(3, 3, 3, 3, 3, 3)$ . Daí podemos afirmar que as Tesselações semirregulares são do tipo  $(a, b, c)$ ,  $(a, b, c, d)$ ,  $(a, b, c, d, e)$  ou  $(a, b, c, d, e, f)$ . Resta-nos encontrar quais são esses tipos.

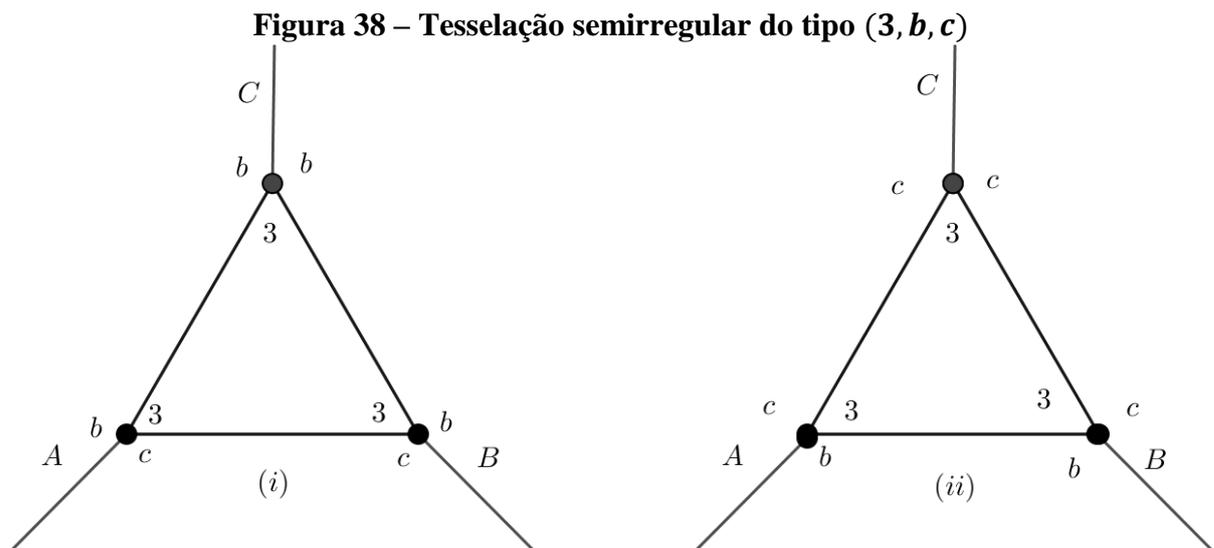
#### 4.4.1 Tesselações Semirregulares do tipo $(a, b, c)$

Vamos começar com as Tesselações formadas com três polígonos regulares, em torno de um vértice. Já deu pra perceber que na identificação dessas Tesselações

semirregulares usaremos critérios que dependem, em cada caso, do número de polígonos regulares em torno de cada vértice da Tesselação. E na identificação das possíveis Tesselações do tipo  $(a, b, c)$ , dividiremos nossa análise em dois casos: o primeiro, formado pelas Tesselações em que pelo menos um dos polígonos que a compõem tem uma quantidade ímpar de lados, ou seja pelo menos um dos valores  $a, b$  ou  $c$  é ímpar e o segundo caso, pelas tesselações em que todos os valores  $a, b$ , e  $c$  são pares. (Vamos convencionar doravante que sempre quando falarmos em polígonos ele será regular, quando não o for explicitaremos).

#### 4.4.1.1 Tesselações Semirregulares do tipo $(a, b, c)$ , onde pelo menos um dos valores é ímpar

Um jeito bom de fazer essa análise é pensar nos tipos de polígonos diferentes que poderiam compor essa tesselação. Pensemos num tipo de tesselação  $(a, b, c)$  que tenha triângulos, isto é, do tipo  $(3, b, c)$ . Note que as possíveis permutações com os valores  $3, b$  e  $c$ , produzem vértices equivalentes e, portanto, nos levam a um mesmo tipo de Tesselação. Então consideraremos sem perda de generalidade o tipo  $(3, b, c)$ , ou seja onde  $a = 3$ . Uma tesselação do tipo  $(3, b, c)$ , tem pelo menos um triângulo em torno de seus vértices como mostra a Figura 38. Nesta figura temos um triângulo com vértices nos pontos  $A, B$  e  $C$  em duas situações diferentes. A primeira em (i) nos vértices  $A$  e  $B$  temos o polígonos com mesmo número de lados - o primeiro um triângulo, o segundo um  $b$  - ágono (polígono com  $b$  lados) e o terceiro um  $c$  - ágono (polígono com  $c$  lados).



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe em (i) que o vértice  $A$  é caracterizado por  $(3, b, c)$ . Para que a tesselação seja semirregular precisamos que os vértices  $B$  e  $C$  sejam do tipo  $(3, b, c)$  ou equivalente. Isso

ocorre com o vértice  $B$  que é do tipo  $(3, c, b)$ , mas não ocorre com o vértice  $C$  que é do tipo  $(3, b, b)$ . Veja que para essa Tesselação ser semirregular devemos ter  $b = c$ . Com facilidade se observa a mesma conclusão quando se analisa (ii). Portanto a única possibilidade de termos uma Tesselação com três polígonos em torno de um vértice onde um deles é um triângulo, é o caso em que os outros dois polígonos são congruentes, ou seja, são vértices do tipo  $(3, b, b)$  ou  $(3, c, c)$ .

Vamos considerar que seja do tipo  $(3, c, c)$ . Então em torno de cada vértice temos um triângulo equilátero e dois polígonos de  $c$  lados, lembrando que a soma dos ângulos em torno de cada vértice igual a  $360^\circ$  e chamando de  $\alpha_n$  o ângulo interno de um polígono regular de  $n$  lados, temos:

$$\alpha_3 + \alpha_c + \alpha_c = 360^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 2\alpha_c = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha_c = 150^\circ$$

Portanto temos um  $c$ -ágono, um polígono de  $c$ -lados, cujo ângulo interno vale  $150^\circ$ . Agora aplicando a equação (21) que nos dá o valor do ângulo interno em função do número de lados  $n$  de um polígono regular, determinaremos a quantidade  $c$  de lados do polígono.

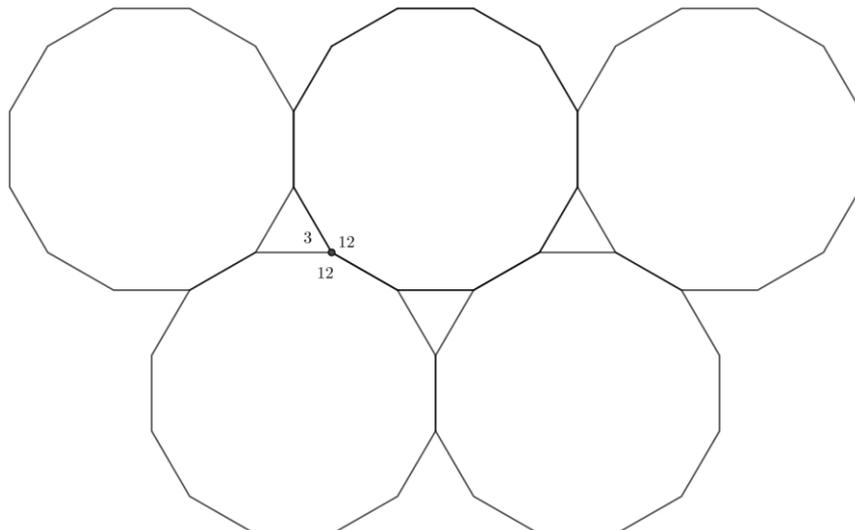
$$\alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n} \quad (21)$$

Para o  $c$ -ágono em questão temos:

$$\alpha_c = \frac{(c-2)180^\circ}{c} \Leftrightarrow 150^\circ = \frac{(c-2)180^\circ}{c} \Leftrightarrow c = 12$$

Então teremos em cada vértice um triângulo e dois dodecágonos, conforme se verifica na Figura 39.

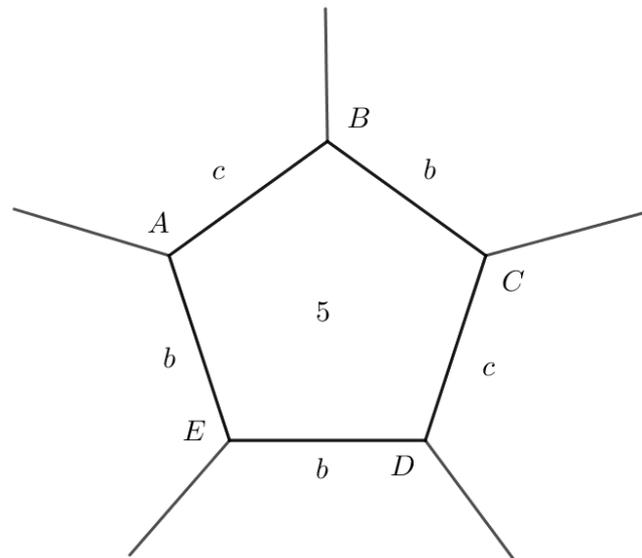
**Figura 39 – Tesselação semirregular do tipo (3, 12, 12)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Com cuidado da pra se verificar nessa análise que a condição para que a Tesselação fosse semirregular, ou seja todos os vértices do mesmo tipo e com isso tivéssemos  $b = c$ , foi o fato de que o polígono que tomamos como centro tinha uma quantidade ímpar de lados. Vamos continuar com essa conclusão e analisar de maneira mais rápida quando tivermos um pentágono no centro. E usando o entendimento anterior teríamos Tesselações do tipo  $(5, b, b)$  ou  $(5, c, c)$ , conforme a Figura 40.

**Figura 40 – Tesselação semirregular tipo  $(5, c, c)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Igualmente ao cálculo quando tínhamos triângulo no centro de nossa figura, calculemos o valor do ângulo interno do  $c$  – ágono.

$$\alpha_5 + \alpha_c + \alpha_c = 360^\circ \Leftrightarrow 108^\circ + 2\alpha_c = 360^\circ \Leftrightarrow \alpha_c = 126^\circ$$

Sabemos que a menor quantidade de polígonos em torno de um vértice de uma tesselação regular são três hexágonos, cujos ângulos internos valem  $120^\circ$ . Com isso já poderíamos garantir que seria impossível formar tesselações com polígonos de ângulo interno igual  $126^\circ$ , já que quanto maior o ângulo interno, maior a quantidade de lados do polígono. Mesmo assim faremos a seguinte análise: depois do hexágono temos o heptágono regular cujos ângulos internos valem  $128,57^\circ$  portanto, maior do que  $126^\circ$ , isto é:

$$(\alpha_6 = 120^\circ) < (\alpha_c = 126^\circ) < (\alpha_7 = 128,57^\circ),$$

logo não existe nenhum polígono regular cuja medida dos seus ângulos internos seja  $126^\circ$ , o que ainda podemos mais uma vez confirmar, utilizando agora a equação (21) que nos dará o valor de  $c$ , número de lados do polígono.

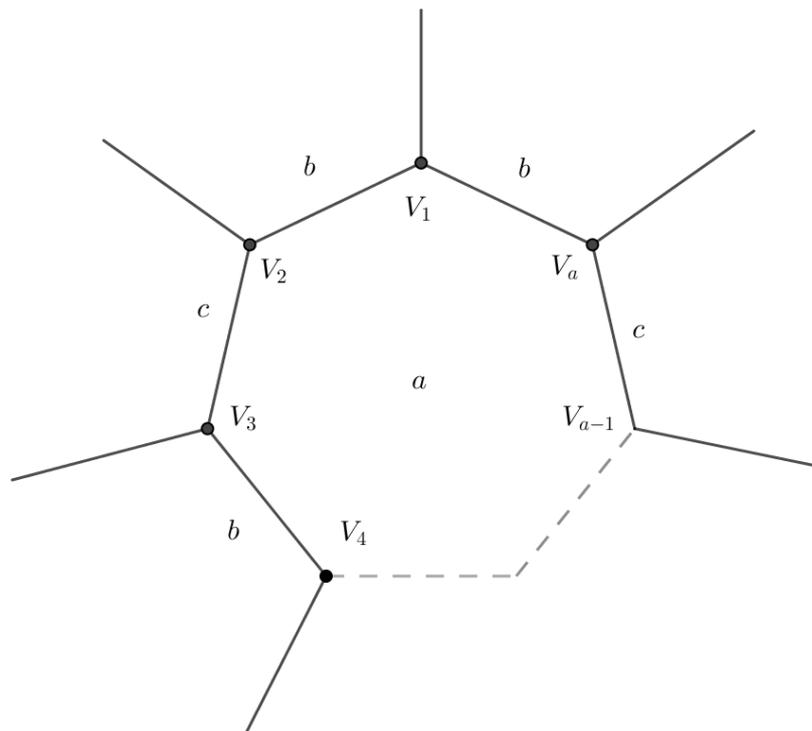
$$\alpha_c = \frac{(c-2)180}{c} \Leftrightarrow 126^\circ = \frac{(c-2)180}{c} \Leftrightarrow c = \frac{360^\circ}{54^\circ} = 6,66 \dots$$

Note que  $c = 6,66 \dots$  não é uma quantidade inteira de lados.

Analogamente poderíamos mostrar que as Tesselações do tipo  $(a, c, c)$  quando  $a = 7$ , teríamos o número  $c = 5,6$ . E quando  $a = 9$ , teríamos o número  $c = 5,1$ . Como o número  $c$  representa uma quantidade inteira de lados de um polígono, concluímos ser impossível ter Tesselações do tipo  $(5, c, c)$ ,  $(7, c, c)$  e  $(9, c, c)$ .

Vamos fazer uma demonstração de forma generalizada, tomando novamente pelo menos um polígono com número ímpar de lados. Então seja um  $a$  – ágono regular, onde  $a$  é um inteiro positivo ímpar e  $a \geq 3$ . Sejam os  $a$  vértices do  $a$  – ágono regular representados por  $V_1, V_2, \dots, V_{a-1}, V_a$ . Vamos supor que temos um  $b$  – ágono vizinho ao lado  $V_1V_2$ . Então teremos um  $c$  – ágono no lado  $V_2V_3$ , um  $b$  – ágono no lado  $V_3V_4$ , e assim por diante, conforme a Figura 41.

**Figura 41 – Tesselação semirregular  $(a, b, c)$ , onde  $a$  é ímpar**



Fonte: Elaborada pelo autor

Observe que o vértice  $V_1$  é do tipo  $(a, b, b)$ , mas como a Tesselação é do tipo  $(a, b, c)$ , concluímos que  $b = c$ . Nossa tarefa agora é identificar os polígonos que vão compartilhar os vértices do tipo  $(a, b, b)$ , sendo  $a \geq 3$  um número ímpar. Sabemos que

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_b = 360^\circ, \text{ ou seja,}$$

$$\alpha_a + 2\alpha_b = 360^\circ \quad (22)$$

Sabemos que para um  $a$  – *ágono* e um  $b$  – *ágono* valem os seguintes resultados para os seus ângulos internos  $\alpha_a$  e  $\alpha_b$ :

$$\alpha_a = \frac{(a-2)180^\circ}{a} = \left(1 - \frac{2}{a}\right) 180^\circ \quad (23)$$

$$\alpha_b = \frac{(b-2)180^\circ}{b} = \left(1 - \frac{2}{b}\right) 180^\circ \quad (23)$$

Substituindo as equações (23) e (24) na equação (22), temos:

$$\left(1 - \frac{2}{a}\right) 180^\circ + 2\left(1 - \frac{2}{b}\right) 180^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{a}\right) + 2\left(1 - \frac{2}{b}\right) = 2,$$

que podemos ainda escrever do seguinte modo:

$$\left(1 - \frac{2}{a}\right) + \left(2 - \frac{4}{b}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{a} = 1 - \frac{4}{b} = \frac{b-4}{b}$$

O que nos dá finalmente a seguinte relação:

$$a = \frac{2b}{b-4}$$

Como  $a$  e  $b$  são números inteiros positivos, então a fração  $a = \frac{2b}{b-4}$  também deve ser um número inteiro positivo. Logo  $b - 4 > 0$ , ou seja,  $b > 4$ , de onde se conclui que  $b \geq 5$ . Fazendo uma manipulação adequada, para uma análise mais fácil, podemos ter o seguinte resultado:

$$a = \frac{2b}{b-4} = \frac{2(b-4) + 8}{b-4} = 2 + \frac{8}{b-4}$$

Lembre que  $b \geq 5$ , logo  $b - 4 \geq 1$ , daí vem  $\frac{8}{b-4} \leq 8$  e então,

$$a = 2 + \frac{8}{b-4} \leq 2 + 8 = 10, \text{ ou seja, } a = \frac{2b}{b-4} \leq 10$$

Como  $a$  é inteiro positivo ímpar e ainda  $3 \leq a \leq 10$  então,  $a = 3, 5, 7, 9$ . Agora isolando  $b$  na equação:

$$\frac{2}{a} = 1 - \frac{4}{b}, \text{ ficaremos com a seguinte equação, } b = \frac{4a}{a-2}.$$

Portanto temos uma relação entre o número de lados dos dois polígonos em torno dos vértices  $V$  do tipo  $(a, b, b)$ , gerando a tabela abaixo, onde de uma forma geral explica o que já tínhamos entendido de uma forma particular.

**Tabela 1 – Tabela de Tesselações  $(3, b, b)$**

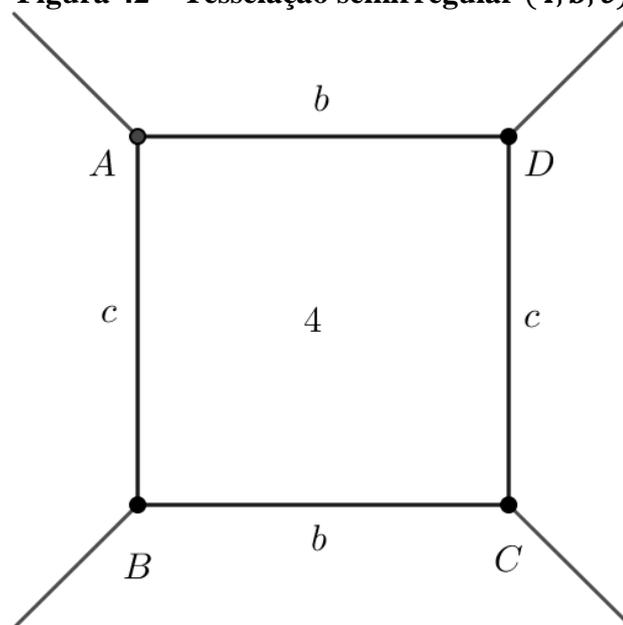
$a$	$b$	Tesselação do tipo $(3, b, b)$
3	12	$(3, 12, 12)$
5	$20/3$	Impossível
7	$28/5$	Impossível
9	$36/7$	Impossível

Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 4.4.1.2 Tesselações Semirregulares do tipo $(a, b, c)$ , onde todos os valores são pares.

Vamos analisar tomando o polígono cuja quantidade de lados é um número par. E tomaremos o polígono que possui o menor número par de lados, o quadrado. Considere então o quadrado  $ABCD$  onde cada vértice é comum a três polígonos, um quadrado, um  $b$  – ágono e um  $c$  – ágono, portanto são do tipo  $(a, b, c)$ , com  $b$  e  $c$  pares. Fazemos o quadrado um dos polígonos, digamos  $a = 4$ , então teremos vértices  $(4, b, c)$  e já sabemos que a mudança da ordem dos valores  $4, b$  e  $c$  levam sempre a vértices equivalentes, então seja  $(4, b, c)$  o nosso vértice para análise, conforme a Figura 42.

**Figura 42 – Tesselação semirregular  $(4, b, c)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Nessa Tesselação onde todos os polígonos são pares, já temos um deles definido que é o quadrado. Devemos determinar os possíveis valores pares para  $b$  e  $c$  de tal modo que exista a tesselação tipo  $(4, b, c)$ . Novamente vamos usar o fato de que a soma dos ângulos internos dos três polígonos em torno de um vértice é igual a  $360^\circ$ .

$$\begin{aligned} \alpha_4 + \alpha_b + \alpha_c &= 360^\circ, \text{ como } \alpha_4 = 90^\circ, \text{ então temos} \\ \alpha_b + \alpha_c &= 270^\circ \end{aligned} \tag{25}$$

Substituindo as equações (23) e (24) em (25), temos:

$$\left(1 - \frac{2}{b}\right) 180^\circ + \left(1 - \frac{2}{c}\right) 180^\circ = 270^\circ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{b}\right) + \left(1 - \frac{2}{c}\right) = \frac{2}{3}$$

Isolando os termos em  $b$  e  $c$ , chegamos à equação:

$$\frac{2}{b} + \frac{2}{c} = 2 - \frac{3}{2}, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{2}{b} + \frac{2}{c} = \frac{1}{2} \tag{26}$$

Como  $b$  e  $c$  são números inteiros pares, podemos escrevê-los na seguinte forma:  $b = 2p$  e  $c = 2m$  com  $p$  e  $m$  inteiros positivos. Podemos inserir esses valores na equação (26), de onde segue:

$$\frac{2}{2p} + \frac{2}{2m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$$

Isolando a variável  $p$ , temos,

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} \Leftrightarrow \frac{1}{p} = \frac{m-2}{2m}$$

De onde tiramos finalmente o seguinte resultado,

$$p = \frac{2m}{m-2} \tag{27}$$

Como  $p$  e  $m$  são inteiros positivos, então para que o denominador  $m - 2$  seja positivo devemos ter  $m \geq 3$ . Note que podemos escrever a equação (27) da seguinte forma:

$$p = \frac{2m}{m-2} \Leftrightarrow p = \frac{2(m-2) + 4}{m-2} \Leftrightarrow p = 2 + \frac{4}{m-2}$$

Como  $p$  é um número inteiro, então  $(m - 2)$  deve ser um divisor de 4, logo,  $m$  atinge seu valor máximo quando  $(m - 2) = 4$ , ou seja quando  $m = 6$ , assim concluímos que  $3 \leq m \leq 6$  m. E finalmente usando a equação (27) podemos encontrar os valores possíveis para  $b$  e  $c$  de tal modo que  $(4, b, c)$  seja uma tesselação onde todos os polígonos tenham lados em quantidades pares. Veja a agora a Tabela 2.

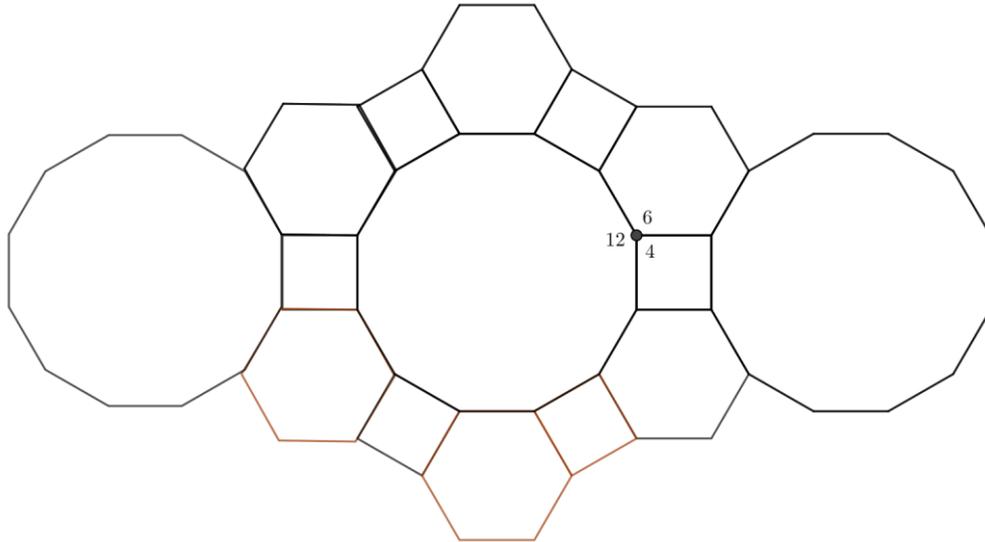
**Tabela 2 – Tesselação tipo  $(4, b, c)$  com  $b$  e  $c$  pares**

$m$	$p$	$a$	$b$	Tesselação do tipo $(4, b, b)$
3	6	12	6	$(4,12,6)$
4	4	8	8	$(4,8,8)$
5	10/3	20/3	10	Impossível
6	3	6	12	$(4,6,12)$

Fonte; Elaborada pelo autor.

Já tivemos a oportunidade de ver um desenho da tesselação  $(4,8,8)$  na Figura 37 3 e agora apresentamos a tesselação do tipo  $(4,6,12)$  na Figura 43.

**Figura 43 – Tesselação semirregular (4,6,12)**



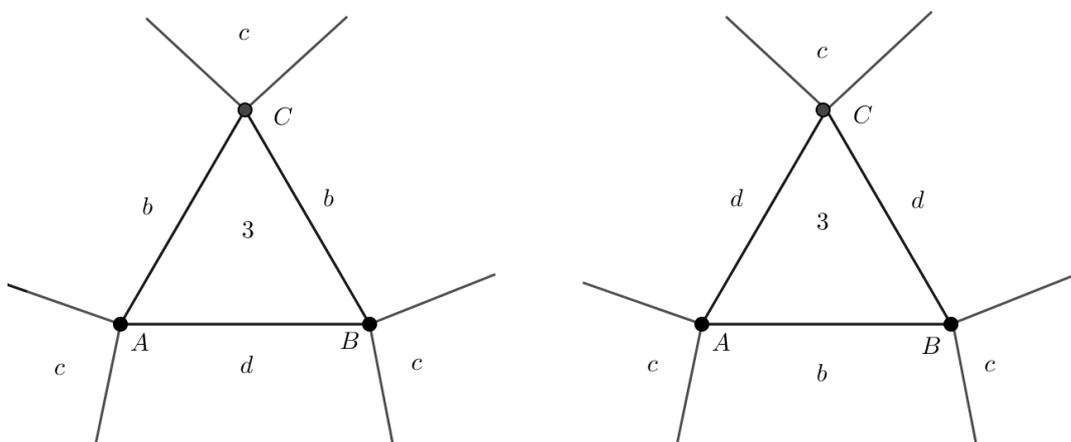
Fonte: Elaborada pelo autor.

#### 4.4.2 Tesselações Semirregulares do tipo $(a, b, c, d)$

Analisaremos agora Tesselações semirregulares do tipo  $(a, b, c, d)$ , ou seja, com quatro polígonos regulares em torno de cada vértice. E para fazer essa investigação vamos dividir o nosso estudo em dois casos: (i) Tesselações do tipo  $(a, b, c, d)$  que possuem triângulos equiláteros e (ii) Tesselações do tipo  $(a, b, c, d)$  que não usam triângulos equiláteros. Note que esses dois casos abarcam todas as possibilidades, pois são excludentes.

Começaremos nosso estudo com Tesselações que fazem uso de triângulos equiláteros. Analogamente aos casos anteriores assumiremos  $a = 3$  e lembrando que trocando a ordem dos números  $a, b, c$  e  $d$ , nos levam a vértices equivalentes, daí usaremos o tipo  $(3, b, c, d)$ . Chamemos de  $A, B$  e  $C$  os três vértices do triângulo apresentado na Figura 44.

**Figura 44 – Tesselação semirregular  $(3, b, c, d)$**



Fonte: Elaborada pelo autor.

No triângulo da esquerda observe os 4 polígonos em torno dos vértices  $A$  e  $B$ , um triângulo, um  $b$ -ágono, um  $c$ -ágono e um  $d$ -ágono, ou seja são do tipo  $(3, b, c, d)$ . Veja agora que o vértice  $C$  pode ser do tipo  $(3, b, c, b)$  nesse triângulo ou  $(3, d, c, d)$  no triângulo da direita. Ocorre que para ser uma tesselação semirregular os vértices devem ser do mesmo tipo, daí concluímos que  $b = d$ . Portanto se uma tesselação é do tipo  $(3, b, c, d)$ , devemos ter  $b = d$ , ou seja, ela é, de fato, do tipo  $(3, b, c, b)$  e ainda fica claro que não existe nenhuma tesselação do tipo  $(3, b, c, d)$  com  $b \neq d$ .

Agora já podemos avançar na procura dos valores de  $b$  e  $c$  de tal modo que as condições exigidas sejam satisfeitas.

Já sabemos que a soma dos ângulos em torno de cada um dos vértices é  $360^\circ$ , então temos,

$$\alpha_3 + 2\alpha_b + \alpha_c = 360^\circ \Leftrightarrow 60^\circ + 2\alpha_b + \alpha_c = 360^\circ \Leftrightarrow 2\alpha_b + \alpha_c = 300^\circ$$

O mesmo procedimento das seções anteriores poderia ser aplicado aqui, mas é possível analisar de uma forma mais simples. Pois bem, na última equação acima vamos atribuir valores para  $b$  e observar as possibilidades para  $c$ .

Para  $b = 3$ ,  $\alpha_b = 60^\circ$ , e daí  $\alpha_c = 300^\circ - 120^\circ = 180^\circ$ . O que é impossível, pois nos polígonos convexos seus ângulos internos são menores do que  $180^\circ$ .

Para  $b = 4$ ,  $\alpha_b = 90^\circ$ , e daí  $\alpha_c = 300^\circ - 180^\circ = 120^\circ$  que é o ângulo interno de um hexágono regular. Desse modo, nossa tesselação será do tipo  $(3, 4, 6, 4)$ .

Para  $b = 5$ ,  $\alpha_b = 108^\circ$ , e daí  $\alpha_c = 300^\circ - 216^\circ = 84^\circ$ , que também é impossível de ocorrer, pois não existe um polígono regular com ângulo interno igual a  $84^\circ$ .

Para  $b = 6$ ,  $\alpha_b = 120^\circ$ , e daí  $\alpha_c = 300^\circ - 240^\circ = 60^\circ$ , que é o ângulo interno de um triângulo equilátero. Desse modo, nossa tesselação será do tipo  $(3, 6, 3, 6)$ .

Para  $b = 7$ ,  $\alpha_b = \alpha_7 \approx 128,57^\circ$ , e então  $\alpha_c = 300^\circ - 257,14^\circ = 42,86^\circ$ , o que é impossível, pois não existe polígono regular com ângulo interno menor do que  $60^\circ$ .

Ainda podemos observar que  $b \geq 7$ , então,  $\alpha_b > 120^\circ$  e  $\alpha_c < 60^\circ$ , o que é impossível pois não existe polígono regular com ângulo interno menor do que  $60^\circ$ . Assim concluímos que as Tesselações do tipo  $(3, b, c, d)$  são somente as seguintes:  $(3, 4, 6, 4)$  e  $(3, 6, 3, 6)$ .

Agora vamos analisar as Tesselações do tipo  $(a, b, c, d)$  que não usam triângulos equiláteros. Vamos começar usando o polígono de menor número de lados que não seja o triângulo, ou seja, o quadrado. Como a tesselação em estudo é do tipo  $(4, b, c, d)$ , com quatro polígonos em torno de um vértice então temos a soma dos quatro ângulos interno que

compartilham cada vértice igual a  $360^\circ$ .

$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c + \alpha_d = 360^\circ$$

Veja que não podemos ter triângulos, então o polígono regular que tem a menor quantidade de lados é o quadrado, portanto analisemos a possibilidade da seguinte igualdade  $b = c = d = 4$ . Logo a equação acima será:

$$\alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ$$

Perceba que, de fato as condições exigidas para a formação de uma tesselação são satisfeitas. Essa é uma tesselação regular do tipo  $(4,4,4,4)$ . Mas note ainda que se substituíssemos qualquer um dos quadrados por outro polígono regular com mais de quatro lados, esse teria um ângulo interno maior do que  $90^\circ$  o que levaria a soma para um valor maior do que  $360^\circ$ . A não ser que trocássemos também algum quadrado por algum triângulo, o que não é o caso. Portanto a única tesselação sem triângulos com quatro polígonos em torno de um nó é a do tipo  $(4,4,4,4)$ .

#### 4.4.3 Tesselações Semirregulares do tipo $(a, b, c, d, e)$

Iniciaremos essa análise imaginando que essas Tesselações não tenham triângulos equiláteros na sua formação. Ora, então teríamos no mínimo, do ponto de vista de quantidade de lados, uma formação apenas por quadrados, e então em torno de um nó ou vértice, teríamos:

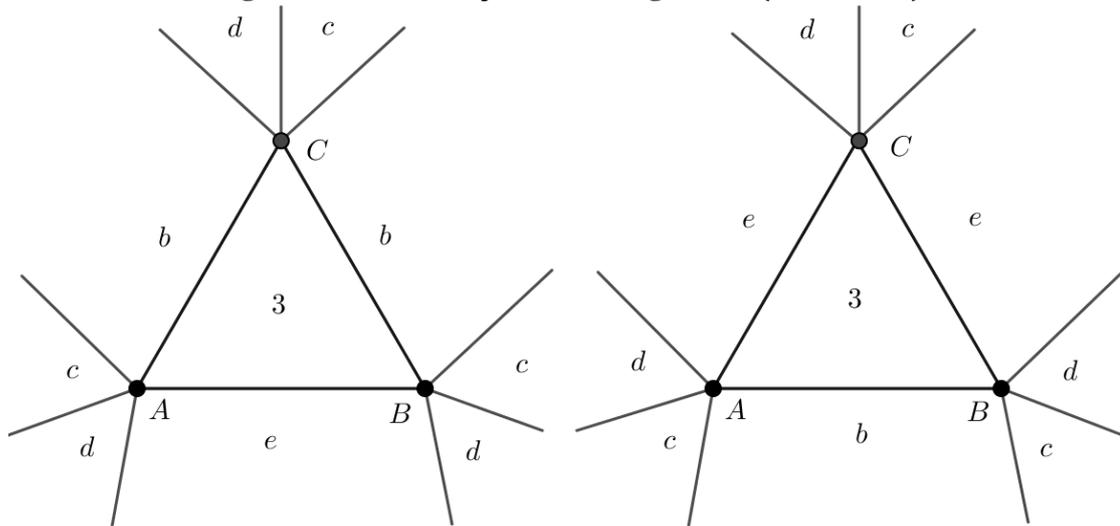
$$\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c + \alpha_d + \alpha_e = \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 5(90^\circ) = 450^\circ$$

O que não é possível. Mas mesmo introduzindo um triângulo, bem como dois triângulos ainda não teríamos essa condição impositiva satisfeita, pois,

$$\alpha_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_4 + \alpha_4 = 60^\circ + 60^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 390^\circ$$

Portanto fica fácil concluir que em uma tesselação formada com cinco polígonos em torno de um vértice, deve ter na sua formação pelo menos três triângulos equiláteros. Depois dessa conclusão, iremos fazer a nossa análise nos apoiando mais uma vez nas figuras possíveis para a formação da tesselação desejada. Então observemos a Figura 45, onde temos um triângulo  $ABC$  em duas situações.

**Figura 45 – Tesselações semirregulares (3, b, c, d, e)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

No triângulo da esquerda e da direita observe os polígonos em torno dos vértices  $A$  e  $B$ , ambos são do tipo  $(3, b, c, d, e)$ . Ocorre que para a formação de uma tesselação semirregular, os vértices devem ser todos do mesmo tipo. E no triângulo da esquerda o vértice  $C$  é do tipo  $(3, b, c, d, b)$ , quando deveria ser igual aos vértices  $A$  e  $B$ , do tipo  $(3, b, c, d, e)$ , logo concluímos que para a formação da tesselação semirregular, devemos ter  $b = e$ . No triângulo da direita o vértice  $C$  é do tipo  $(3, e, c, d, e)$ , quando deveria ser igual aos vértices  $A$  e  $B$ , do tipo  $(3, b, c, d, e)$ .

Para atender a condição de formação da Tesselação semirregular, novamente chegamos a conclusão que  $b = e$ . Portanto a tesselação em questão deve ser do tipo  $(3, b, c, d, b)$  que substituindo os valores possíveis para o número de lados dos polígonos temos as seguintes possibilidades:  $(3, 3, c, d, 3)$  e  $(3, b, 3, 3, b)$ .

Agora podemos aplicar a soma dos ângulos internos em torno de um vértice e descobrir os valores possíveis para  $b, c$  e  $d$ .

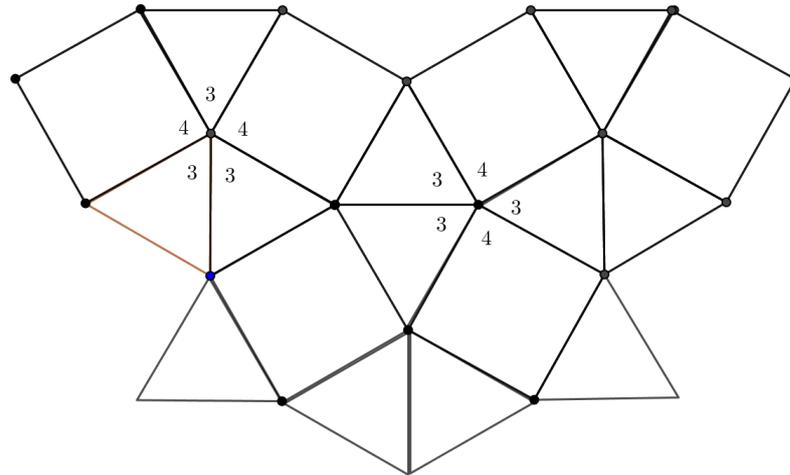
No caso do tipo  $(3, b, 3, 3, b)$ , devemos ter:

$$3\alpha_3 + 2\alpha_b = 360^\circ \Leftrightarrow 3(60^\circ) + 2\alpha_b = 360^\circ$$

$$2\alpha_b = 180^\circ \Leftrightarrow \alpha_b = 90^\circ$$

Neste caso a tesselação será do tipo  $(3, 4, 3, 3, 4)$  que mostramos na Figura 46.

**Figura 46 – Tesselação semirregular (3, 4, 3, 3, 4)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

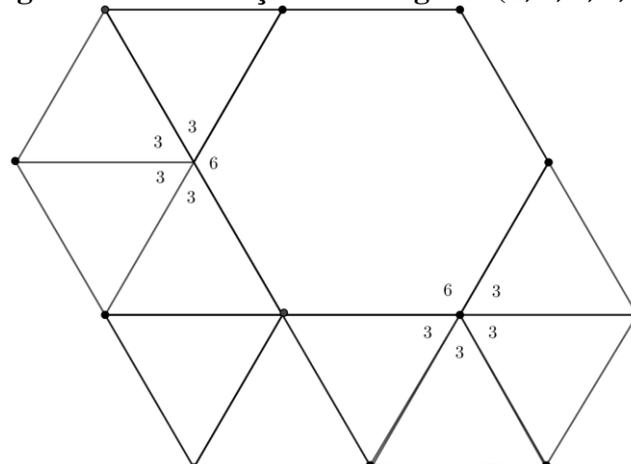
No caso do tipo  $(3, 3, c, d, 3)$  temos a seguinte equação:

$$3\alpha_3 + \alpha_c + \alpha_d = 360^\circ \Leftrightarrow 3(60^\circ) + \alpha_c + \alpha_d = 360^\circ$$

$$\alpha_c + \alpha_d = 180^\circ$$

De posse dessa última equação podemos aplicar o mesmo procedimento que foi usado na seção 4.4.2, e então podemos atribuir valores para  $c$  e determinar os valores correspondentes para  $d$ . Claro que de acordo com as propriedades dos ângulos internos de um polígono regular. Isso sendo feito, facilmente encontramos que para  $c = 3$ , temos  $d = 6$ ; para  $c = 4$ , temos  $d = 4$  e para  $c = 6$ , temos  $d = 3$ . Lembre que para  $c = 5$ , não existem polígonos regulares que tenha o valor do ângulo encontrado como ângulo interno; e para valores de  $c \geq 7$ , implicará em um valor de ângulo interno de um polígono regular menor do que  $60^\circ$  e isso é uma impossibilidade, pois o menor ângulo interno de um polígono regular mede  $60^\circ$ , ângulo de um triângulo equilátero. Portanto as Tesselações deverão ser do tipo  $(3,3,4,4,3)$  ou  $(3,3,3,6,3)$ , que equivale a  $(3,3,3,3,6)$  que mostramos na Figura 47.

**Figura 47 – Tesselação semirregular (3, 3, 3, 3, 6)**



Fonte: Elaborada pelo autor.

Portanto temos oito Tesselações semirregulares que foram determinadas ao longo das seções anteriores. Essas Tesselações se dividem em três grupos: três que são formadas por três polígonos regulares em torno de seus vértices e são do tipo  $(3,12,12)$ ,  $(4,8,8)$  e  $(4,6,12)$ ; duas formadas por quatro polígonos regulares em torno dos seus vértices e são do tipo  $(3,6,3,6)$  e  $(3,4,6,4)$  e por fim três formadas por cinco polígonos regulares em torno de seus vértices, a saber,  $(3,3,3,6,3)$ ,  $(3,3,4,4,3)$  e  $(3,4,3,3,4)$ . As propriedades geométricas dessas Tesselações foram usadas pelo artista gráfico holandês Maurits Cornelis Escher na construção de boa parte de sua obra artística. E pretendemos mostrar um pouco dessa relação da arte de Escher com a Geometria no próximo capítulo.

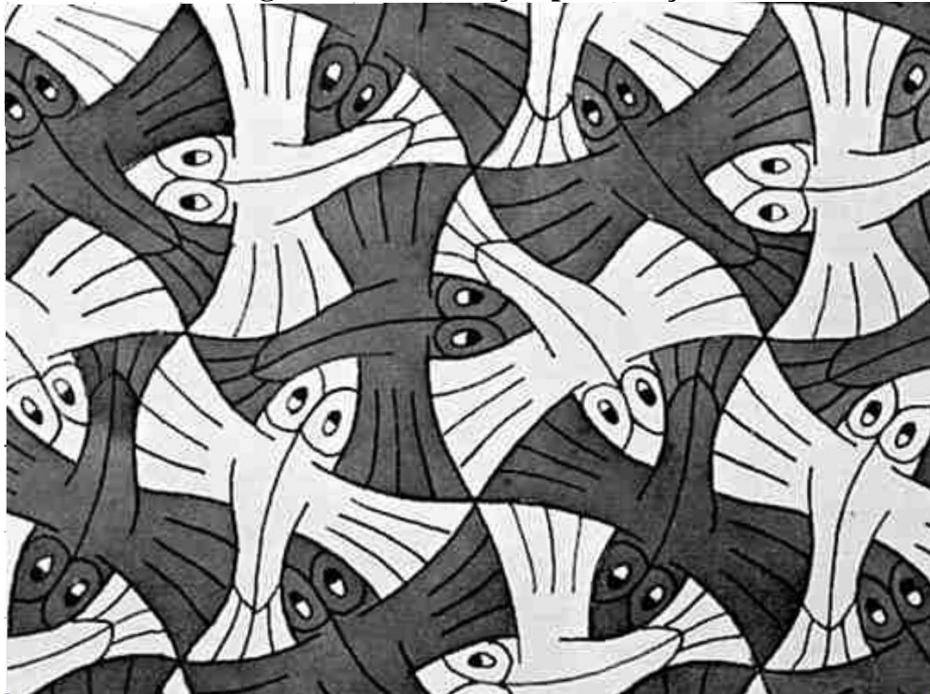
## 5 A MATEMÁTICA NA ARTE

### 5.1 ALGUMAS APLICAÇÕES NAS OBRAS DE ESCHER

A obra de Maurits Cornelis Escher não se limitou ao revestimento do plano, as Tesselações. No entanto aqui tratamos da geometria no plano e nos limitaremos a apresentar algumas aplicações na obra de Escher do que aqui se estudou, tendo o plano como base. É vasta a sua produção nesse aspecto, mas iremos apresentar produções que fizeram uso das rotações, translações e reflexões na sua consecução. Claro que na produção de algumas dessas Tesselações, Escher usou apenas uma isometria, porém em outras usou mais de uma. Não é difícil entender que se pode usar uma isometria na confecção de uma Tesselação e na confecção dessa mesma Tesselação se usar outra ou a composição de isometrias diferentes da primeira.

A forma de apresentar a etapa derradeira dessa dissertação é a seguinte: inicialmente apresentaremos a obra de Escher e em seguida identificaremos o uso da isometria que foi utilizada. Veja na Figura 48 uma Tesselação construída por rotação.

**Figura 48 – Tesselação por rotação**

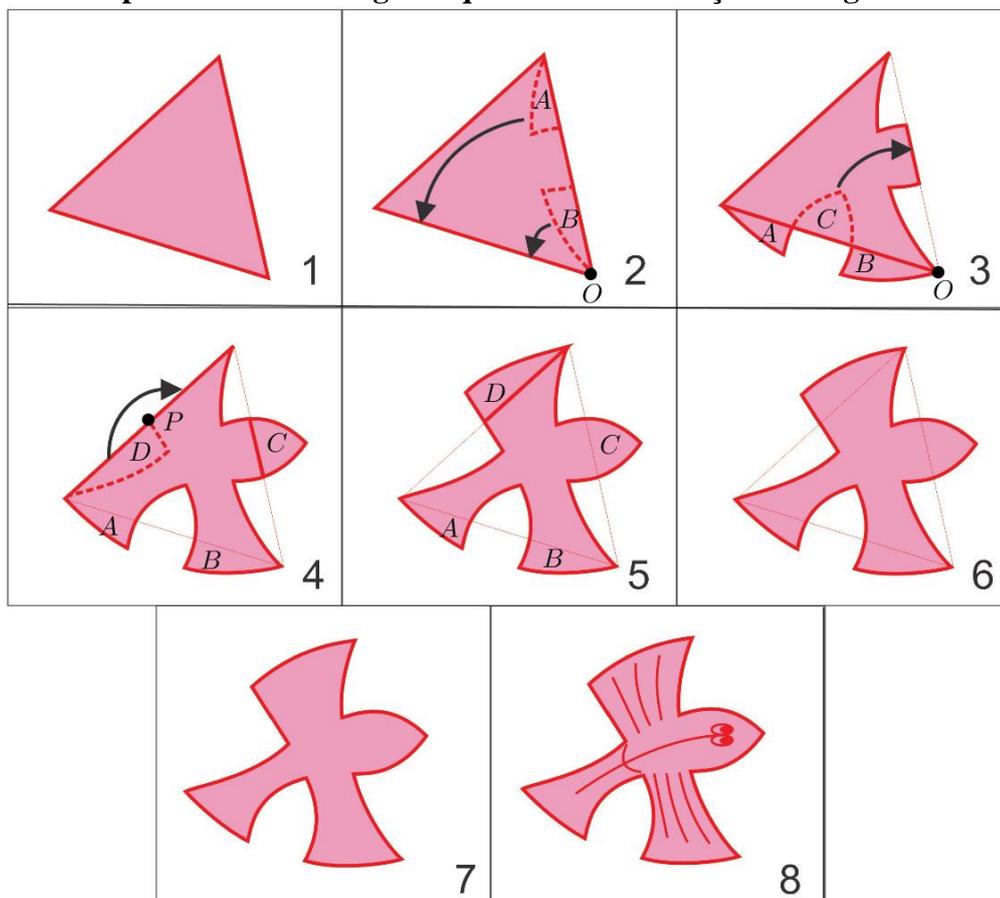


Fonte: <http://www.artisoo.com/pt/peixe-voador-p-44636.html>

Podemos dizer que nessa Tesselação temos peixes com asas. Note que a rotação realizada é de um ângulo de  $60^\circ$  em torno do ponto de interseção das asas dos três peixes pretos e dos três peixes brancos.

Agora usaremos a Figura 49 para entender as rotações aplicadas na formação da figura base usada na construção da Tesselação. Inicialmente temos no quadro 1 um triângulo equilátero que servirá de base. No quadro 2 observe o recorte feito criando a região *A* e a região *B* que experimentarão uma rotação de  $60^\circ$  em torno do ponto *O* como mostra o quadro 3. No quadro 3 ainda temos a região *C* que se submete a uma rotação de  $-60^\circ$ . Note que as extremidades da região *C* coincidem com as extremidades internas das regiões *A* e *B* rotacionadas.

**Figura 49 – Passo a passo para formar uma figura base de uma Tesselação a partir de um triângulo equilátero com rotações de regiões.**



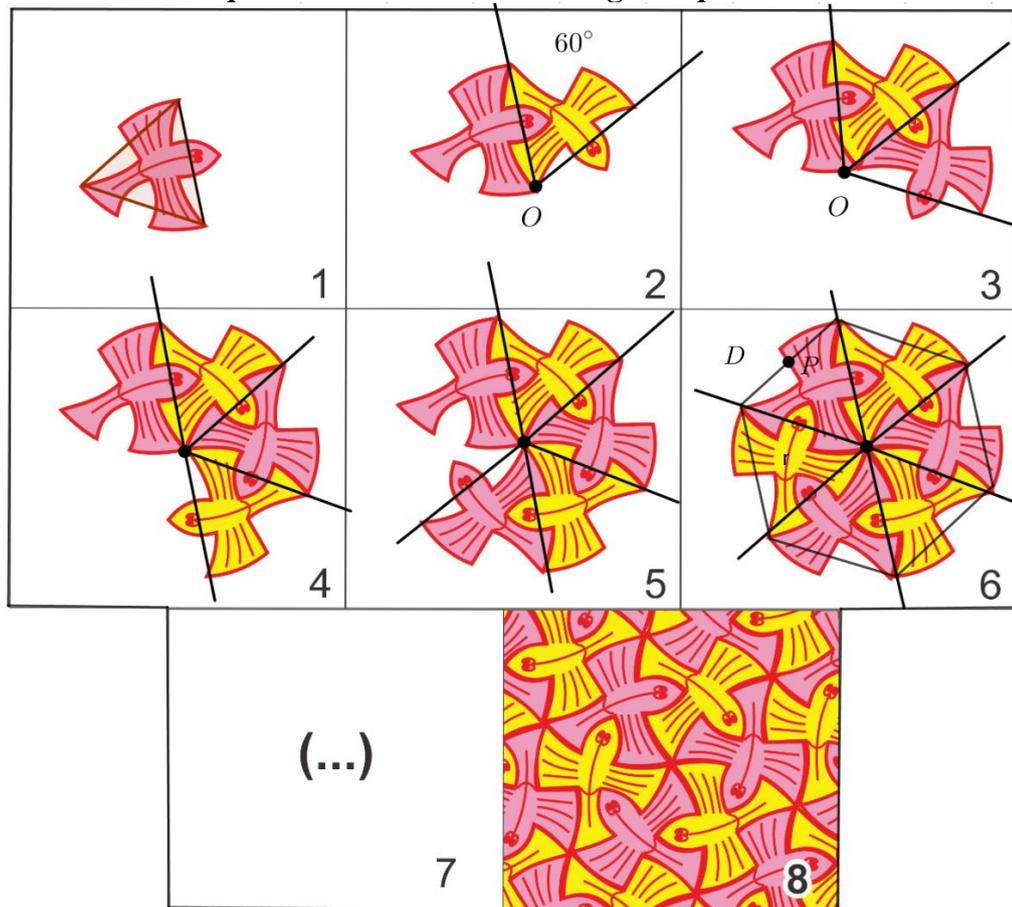
Fonte: Adaptada da dissertação de mestrado Leitão (2015, p.51)

No quadro 4 um recorte cria a região *D* que sofrerá uma rotação de  $-180^\circ$  em torno do ponto *P*, conforme já se vê no quadro 5. Note que o ponto *P* é o ponto médio do lado do triângulo. E daí vai a parte mais artística, dando vida à figura no quadro 8 quando finalmente se formará a figura base da Tesselação que será formada também por rotação.

Vejamos agora a formação da Tesselação indicada na Figura 50. Observe que no quadro 1 temos apenas a figura base ainda com o triângulo equilátero. Em seguida no quadro

2 a figura base sofre uma rotação de  $-60^\circ$  em torno do ponto  $O$  e esse movimento vai se repetindo por mais cinco vezes até completar as seis figuras como mostra o quadro 8. Note que no quadro 6 temos a formação de um hexágono regular que poderia servir de figura base, rotacionando as seis regiões  $D$  de um ângulo de  $-180^\circ$  em torno dos pontos  $P$  que são pontos médios dos lados do hexágono.

**Figura 50 – Passo a passo para formação de uma Tesselação com peixes que tem como base um triângulo equilátero**



Fonte: Adaptada da dissertação de mestrado Leitão (2015, p.52)

Apresentamos mais uma obra de Escher, tendo a rotação como ferramenta para sua construção na Figura 51 da página seguinte. E neste caso a figura final é um ser humano.

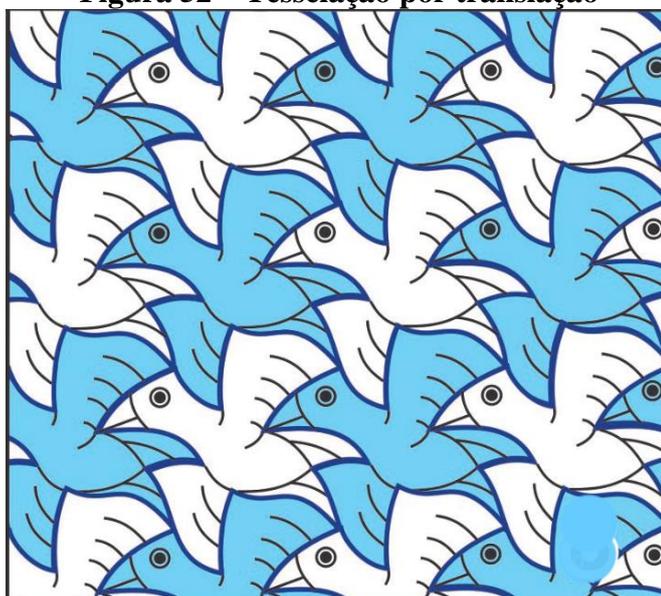
**Figura 51 – Tesselação por rotação com figuras humanas. Escher – Circulação de 1938**



Fonte: <https://br.pinterest.com/kisupa/artists-i-like-escher-mc/?lp=true>

Agora apresentaremos a Tesselação por translação, onde a figura base de um pássaro é formada a partir de translações de regiões de um quadrado. Na Figura 52 mostramos Tesselação já pronta e só na página seguinte mostraremos a formação da figura base.

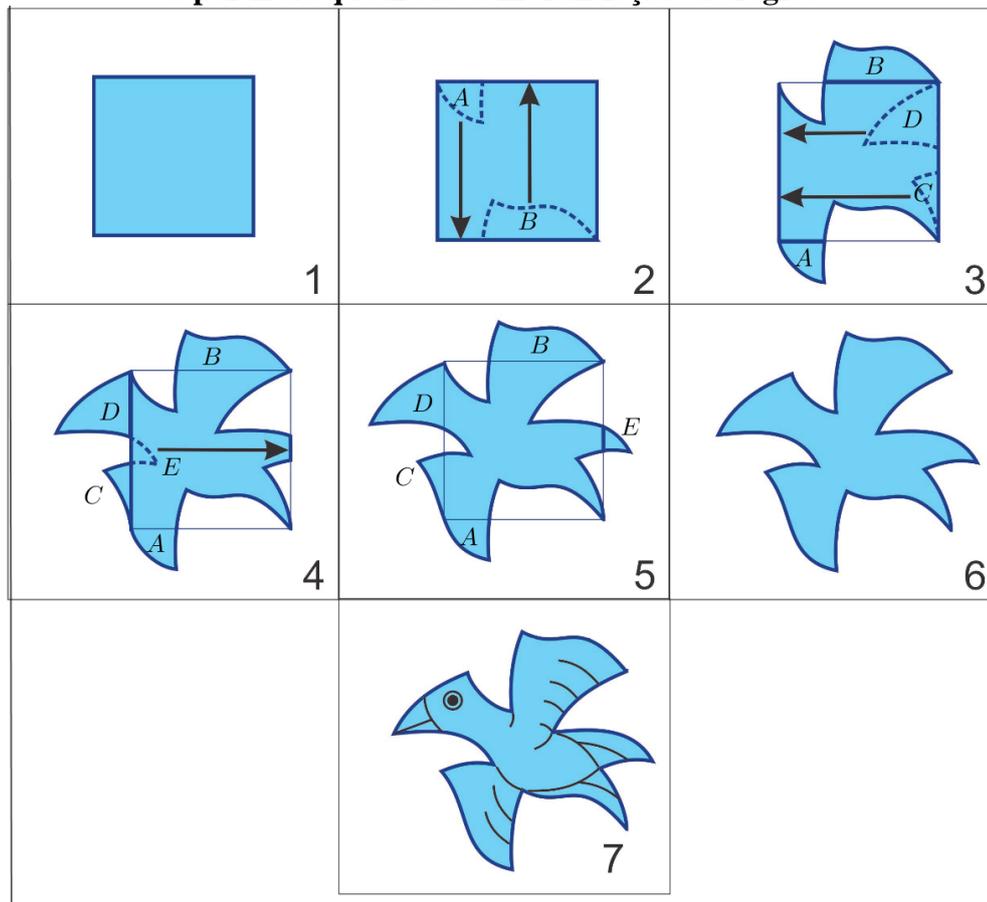
**Figura 52 – Tesselação por translação**



Fonte: <https://br.pinterest.com/pin/380272762265892317/>

Agora vejamos a formação e sua figura base. Observe na Figura 53 que as regiões  $A, B, C, D$  e  $E$ , sofrem translações claras, culminando com a formação da figura básica de um pássaro. Com a observação dos sete quadros o processo se torna autoexplicativo.

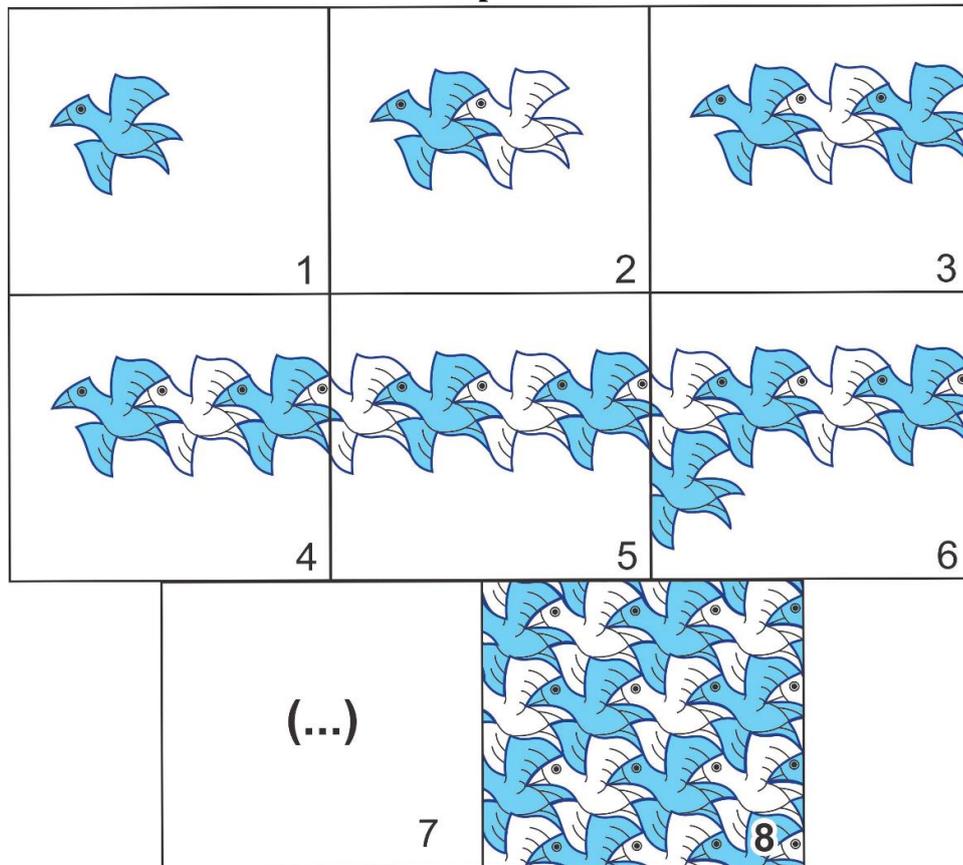
**Figura 53 – Passo a passo para formar uma figura base de uma tesselação a partir do quadrado com translações de regiões**



Fonte: Adaptada da dissertação de mestrado Leitão (2015, p.52)

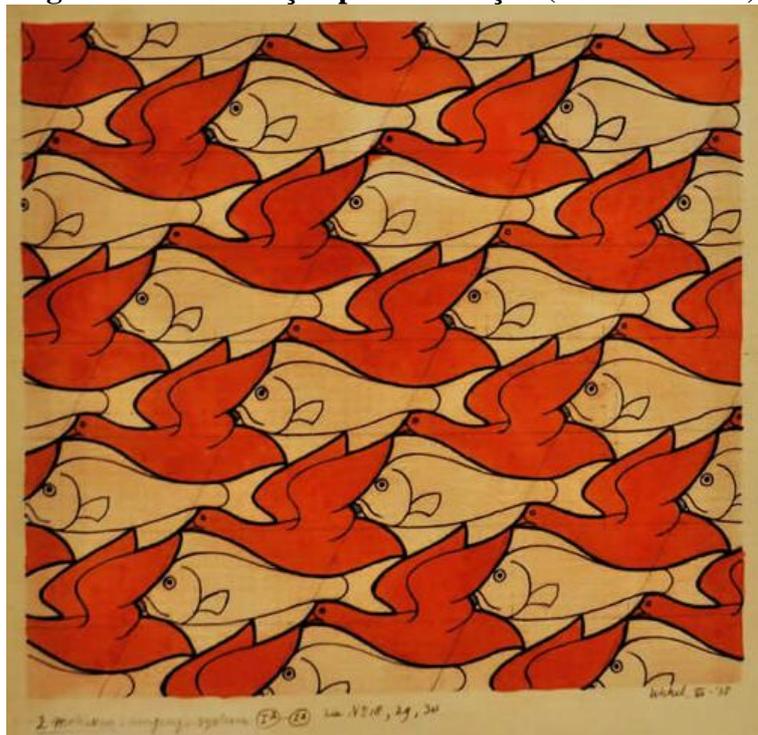
E agora vejamos a justaposição de vários pássaros recobrimdo o plano através também de translações como mostra a Figura 54. Note que no quadro 1, temos a figura base de um pássaro. No quadro 2 temos uma primeira translação para esquerda do pássaro inicial. O mesmo ocorre no quadro 3 com outra translação para esquerda do segundo pássaro. Em seguida temos seguidas translações desse pássaro e entendemos que com a observação atenta dos sete quadros o processo se torna autoexplicativo.

**Figura 54 – Formação de uma tesselação tendo como figura base um pássaro**



Fonte: Dissertação de mestrado Leitão (2015, p.53)

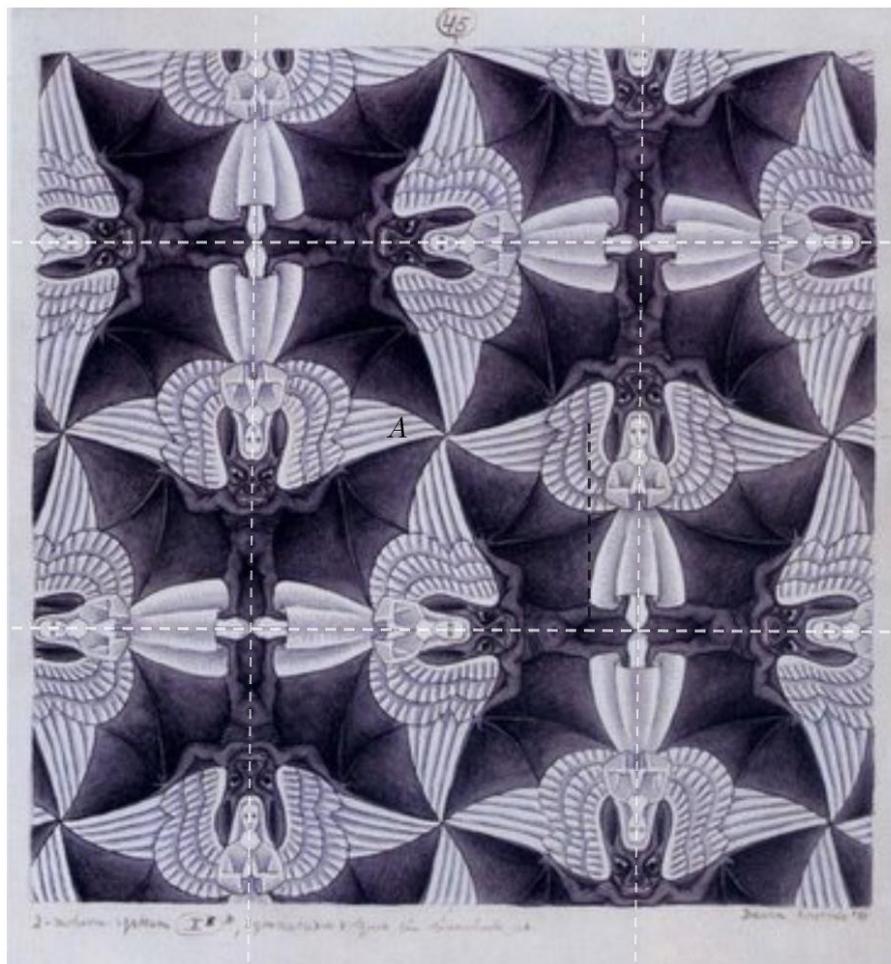
**Figura 55 – Tesselação por translação (Escher – 1983)**



Fonte: <http://passarinhando.com.br/index.php/component/k2/item/717>

Para apresentar o uso da reflexão nas obras de Escher, vamos apresentar um desenho que pode ser construído a partir da reflexão em torno das linhas brancas verticais ou horizontais. Essa obra de arte de Escher denomina-se "Anjos e Demônios" e foi feita em nanquim no ano de 1941. É interessante ressaltar que se observarmos o ponto *A* na interseção das pontas das asas no centro do quadrado, perceberemos que também se aplica nessa Tesselação a isometria por rotação. Aliás, é comum na obra de Escher encontramos desenhos que podem fazer uso de mais de uma isometria para sua construção como esse da Figura 56.

**Figura 56 - Tesselação por reflexão Escher - Anjos e Demônios, lápis, tinta-da-china, crayon e guache - 1941.**



Fonte: [www.google.com.br/search?q=escher+anjos+e+demônio](http://www.google.com.br/search?q=escher+anjos+e+demônio)

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando me convenci de realizar esse trabalho que anuncia uma relação da Arte com a Matemática através da obra de um artista, pensei: vou ter a oportunidade de conhecer alguém e um pouco de sua vida, vou contemplar parte da obra de um artista e ainda vou constatar a relação que existe entre sua obra e a Matemática. Vejam só - gosto de conhecer pessoas, estimo a arte e afeição a matemática. Então esse trabalho será com certeza muito prazeroso, como o foi, e ainda será a etapa conclusiva do meu Mestrado em Matemática. Portanto, foi motivado por esses sentimentos que me pus a realizá-lo.

Depois de pronto, devo dizer que tudo que conheci do artista M. C. Escher, acrescentou ao meu ser, pois somos seres inconclusos, estamos permanentemente em formação. Afinal isso é a vida – uma permanente formação, uma aprendizagem constante.

Tiramos um ensinamento de que a Matemática não é somente uma ciência a serviço da tecnologia. Que Ela não se basta apenas com sua função utilitarista do ponto de vista produtivo, ou seja, de colaborar com a tecnologia para gerar riqueza material. Ela também e felizmente, se apresenta como algo que nos é útil do ponto de vista afetivo e emocional e que nos dá alegria, prazer e encantamento em si.

Para a sua realização tivemos que pesquisar em sites na internet e em vários livros. Porém me sinto no dever ético e moral de ressaltar o apoio determinante que tive no livro da Coleção do Professor de Matemática de autoria do saudoso professor Elon Lages Lima, Coordenadas no Plano, bem como outro, do mesmo autor intitulado Isometrias, ambos publicados pela Sociedade Brasileira de Matemática - SBM.

Essa dissertação me propiciou, embora que ainda superficial, o conhecimento e aprendizado de dois instrumentos de produção de textos importantíssimos para quem lida com a Matemática: o geogebra e o latex que são grafados normalmente como GeoGebra e LaTeX. O GeoGebra é um software livre de matemática que permite realizar construções geométricas com a utilização de pontos, retas, segmentos de reta, polígonos entre outras. Esse eu já conhecia, mas nunca havia usado para produção de textos como fiz nesse trabalho. Das cinquenta e seis figuras aqui usadas, quarenta e cinco foram construídas com o uso do GeoGebra. Já o LaTeX, não era do meu conhecimento se quer a sua existência, mas ao ser apresentado me encantei com o seu resultado. Também é de livre acesso. O LaTeX é utilizado amplamente na produção de textos matemáticos e científicos devido a sua alta qualidade tipográfica. Uma das principais vantagens é que ele permite criar documentos de aparência verdadeiramente profissional com a edição eloquente de textos e fórmulas matemáticas que

oferecem ao produto final um visual muito agradável. Sou grato aos professores que nos incentivaram para o seu uso e desejo que seu conhecimento e uso sejam uma prática constante no nosso meio acadêmico.

Voltando para o trabalho em si, torço para quem o ler, ao se deparar com os escritos sobre isometrias, tenha a oportunidade de conhecer um pouco dessa relação tão importante para a Geometria Plana, bem como a sua função na construção das Tesselções de Escher. Manifesto aqui a minha vontade de que as proposições e teoremas fortaleçam as compreensões, sobretudo dos professores de Matemática da educação básica em geral e em particular do ensino médio. Reconheço que a matemática aqui utilizada não é de difícil compreensão e por isso pode ser acessada por qualquer pessoa que domine os conhecimentos básicos de Geometria Plana.

Atrevo-me a dizer que são belos sim, os teoremas, os corolários e as proposições. Entendo que as relações geométricas no plano já existem, estão lá. Estão prontas para serem garimpadas e achadas pelos matemáticos que sabem, por habilidade e perseverança em que águas devem usar suas peneiras e bateias a procura de sua pepita que certamente já está no seu imaginário. E então encontram esses resultados tão encantadores da Geometria. Portanto, concludo dizendo que o encantamento pela matemática, assim como pela arte são gestados no mesmo ventre, ou seja, possuem a mesma raiz.

## REFERÊNCIAS

- BARBOSA, R. M. **Descobrimdo padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.
- BERRO, Roberto Tadeu. **Relações entre arte e matemática: um estudo da obra de Maurits Cornelis Escher**. 2008. 111 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade São Francisco, São Paulo, 2008. Disponível em: <[http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos\\_teses/2011/matematica/maio/dissertacao\\\_roberto\\\_tadeu\\\_berro.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2011/matematica/maio/dissertacao\_roberto\_tadeu\_berro.pdf)>. Acesso em: 26 fev. 2017.
- CARNEIRO, Francisco de Assis Saraiva. **Isometrias e homotetias no plano**. 2015. 68 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Disponível em: <[https://sca.proformat-sbm.org.br/sca\\_v2/get\\_tcc3.php?id=79088](https://sca.proformat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=79088)>. Acesso em: 06 fev. 2017.
- DIAS, Cláudio Carlos. **Desafio geométrico: módulo I (Matemática na prática. Curso de especialização para prof. do ensino médio de matemática)**. Cuiabá, MT: Central de textos, 2010. Disponível em: <<http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/DesafioGeometricoModuloI.pdf>>. Acesso em: 06 fev. 2017.
- DOMINGUES, Higino Huguerose ; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1982.
- ERNST, Bruno. **O Espelho Mágico de M. C. Escher**. 2. ed. Alemanha: Taschen, 1991.
- LEITÃO, Maria Robervânia. **Tesselações no ensino de geometria euclidiana**. 2015. 58 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2015. Disponível em: <<http://www.repositorio.ufc.br/handle/riufc/14718>>. Acesso em: 05 fev. 2017.
- LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. Coleção do Professor de Matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.
- LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. Coleção do Professor de Matemática. 6. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- LIMA, Elon Lages. **Curso de análise volume 1**. Projeto Euclides. 14. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- NETO, Antonio Caminha Muniz. **Tópicos de Matemática Elementar volume 2: geometria euclidiana plana**. Coleção do Professor de Matemática. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- ROSA, Cristina Sousa. **Pequenos soldados do Fascismo: a educação militar durante o governo de Mussolini**. 2009. 20f. Artigo (Doutorado em História Social) - Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: <<http://www.uel.br/revistas/uel/index.php/antiteses/article/viewFile/2704/3929>>. Acesso em: 23 fev. 2017.

SANTOS, Marli Regina dos. **Pavimentações do plano:** um estudo com professores de matemática e arte. 2006. 177 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2006. Disponível em: <[http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91130/santos\\_mr\\_me\\_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y](http://base.repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/91130/santos_mr_me_rcla.pdf?sequence=1&isAllowed=y)>. Acesso em: 10 fev. 2017.

STILLWELL, John. **Geometry of Surfaces.** New York: Springer Verlag, 1992.