Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Modelagem Matemática como Enfoque para o Ensino

Gilberto Faria de Araújo
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Reinaldo de Marchi**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Agosto de 2017

Modelagem Matemática como Enfoque para o Ensino

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Gilberto Faria de Araújo e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 31/08/2017.

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Junior Cesar Alves Soares
Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

A663m Araújo, Gilberto Faria de.
Modelagem Matemática como Enfoque para o Ensino / Gilberto Faria de Araújo. -- 2017
xiii, 86 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Reinaldo de Marchi.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem matemática. 2. Ensino e aprendizagem. 3. Metodologia. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "Modelagem matemática como enfoque para o ensino"

AUTOR : **Gilberto Faria de Araújo**

defendida e aprovada em 31/08/2017.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Reinaldo de Marchi Reinaldo de Marchi
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Aldi Nestor de Souza Aldi Nestor de Souza
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Junior Cesar Alves Soares Junior Cesar Alves Soares
Instituição : UNEMAT - Barra do Bugres

Cuiabá, 31/08/2017.

Dedico este trabalho a toda minha família, em particular à minha sobrinha Karolliny Vitória Sefstroem de Araújo, à minha irmã Dilma Farias de Araújo e ao meu cunhado Gilson Sefstroem.

Agradecimentos

Em primeiro momento a Deus, que aclara a todo instante minha trajetória de vida, apontando caminhos que por mim mesmo não sou capaz de percorrer, mas por tua infinita graça os trilho, me deparando, a cada instante e ao longo deste trajeto, com uma nova experiência, às vezes boa, às vezes não, mas superando os desafios, pois o meu vigor, que não veio de mim mesmo, está sempre em sintonia com sua força soberana.

Ao professor Dr. Reinaldo de Marchi, meu orientador e amigo, também meu ex-professor de duas disciplinas do mestrado, que, sem medir esforços, sempre se colocou à disposição, dedicando parte significativa de seu tempo, me apontando direções e me ajudando em todos os sentidos, para que este trabalho pudesse ganhar forma e, então, ser concluído.

Ao meu ex-professor e coordenador institucional do mestrado Dr. Geraldo Lucio Diniz, por gerir com dedicação e profissionalismo suas duas funções, e por sempre me atender com boa vontade as tantas vezes que o recorri.

Aos professores Dr. Aldi Nestor Souza, Dr. André Krindges e Dr. Martino da Costa Araújo, por também terem partilhado comigo seus conhecimentos no campo da Matemática, enquanto profissionais atuantes no mestrado.

Ao professor Dr. Junior Cesar Alves Soares, por ter se deslocado de sua cidade para compor a banca examinadora e pelos importantes apontamentos em relação a este trabalho.

Aos meus amigos e amigas do mestrado André, Almir, Júlio, Leandro, Lívia, Marcos, Melquíades, Paulo, Renato, Ricardo, Tárcis, Silvana e Zenilson, pelos momentos em que partilhamos não somente aquilo que julgamos nos ser bom, mas também os desafios, somando forças e encurtando caminhos.

Aos meus irmãos e irmãs Paulo, Zilene, Marlene, Vanderlei, Gilmar, Cleudimar e Dilma, aos meus pais Bernardino e Brazilina, e aos demais parentes que, mesmo distantes,

indiretamente também contribuíram no sentido de que eu pudesse avançar mais alguns degraus e obter o título de mestre em Matemática.

Aos profissionais pesquisadores citados neste trabalho, pelo empenho para vencer os desafios que norteiam o campo da pesquisa e pela exposição de suas ideias, que a partir de agora passam a fazer parte da minha vida enquanto profissional que também pretende refletir e aprender, pelo menos um pouco, no ambiente reservado para se discutir a modelagem matemática e, como professor de Matemática, colocá-la em prática, juntamente com meus alunos.

Resumo

Um dos objetivos principais deste trabalho é articular aspectos teóricos e metodológicos que fundamentam a utilização da modelagem matemática como ferramenta mediadora na resolução de situações-problema no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para esta finalidade, é feita uma abordagem bibliográfica qualitativa focada, além de outros, nas concepções e conceituações da modelagem segundo alguns pesquisadores dessa temática, delineando subsídios para sua implementação em atividades educativas. Como desdobramentos desse processo, é apresentada a modelagem matemática segundo um breve contexto histórico, sequenciado por sua inserção para o ensino, suas perspectivas, suas conceituações e possíveis etapas para sua aplicação, seus desafios e contribuições, bem como algumas aplicações.

Palavras-chave: modelagem matemática, ensino e aprendizagem, metodologia.

Abstract

One of the main objectives of this work is to articulate theoretical and methodological aspects that support the use of mathematical modeling as a mediator tool in solving problem situations in the teaching and learning process of Mathematics.For this purpose, a qualitative bibliographical approach is focused, along with others, in the conceptions and conceptualizations of the modeling according to some researchers of this theme, outlining subsidies for its implementation in educational activities. As results of this process, mathematical modeling is presented according to a brief historical context, sequenced by its insertion into teaching, its perspectives, its conceptualizations and possible steps for its application, its challenges and contributions, as well as some applications.

Keywords: mathematical modeling, teaching and learning, methodology.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

As práticas que norteiam os processos de ensino e aprendizagem no campo da Matemática, assim como em qualquer outra área do conhecimento, podem ser repensadas e melhoradas a partir das experiências e concepções individuais ou coletivas.

Reforçar o sentido do que se ensina em Matemática para finalidades práticas, parece ser, atualmente, um dos maiores enfoques nessa área, e é nessa direção que caminha este trabalho, que dá configuração aos primeiros contornos do interesse pessoal de encontrar na modelagem matemática uma experiência que possa ajudar a potencializar o ensino e a aprendizagem da Matemática em sala de aula ou em ambiente extraclasse. Desse modo, articular aspectos teóricos e metodológicos para propor, analisar e solucionar situações-problema de caráter prático, constituem os objetivos principais deste trabalho para colocar em curso a modelagem matemática.

A fim de superar as primeiras limitações nas ações de construção e de implementação desse ideal, são utilizadas como aporte teórico da literatura as concepções de alguns pesquisadores da área da modelagem matemática, com ênfase para o ensino, como as de Bassanezi (2004), Biembengut e Hein (2007), Burak (1992) e Barbosa (2007), dentre outras, que apontam a modelagem como possibilidade e eficácia para o profissional cumprir com diferentes objetivos de cunho prático no campo da educação, em particular no ensino e aprendizagem da Matemática, ponderando, sem limitações teóricas, possíveis conexões entre diferentes áreas do conhecimento. Com enfoque dirigido ao primado dessas argumentações que caracterizam a possibilidade de abordagem da modelagem matemática que, por sua vez, pode propiciar um tratamento interdisciplinar de questões concernentes a diferentes domínios do saber e do cotidiano, este trabalho está estruturado em quatro capítulos, sequenciados pela conclusão, pelo apêndice A e, por fim, pelas referências bibliográficas.

No primeiro capítulo, é apresentado um breve contexto histórico sobre a origem da modelagem matemática, expondo alguns resultados possivelmente oriundos desse processo, bem como relata sobre sua inserção com enfoque para o ensino, aponta alguns de seus principais precursores no Brasil, discorre sobre suas perspectivas e expõe os primeiros conceitos sobre modelagem e modelo matemático.

No segundo capítulo, é feita uma exposição sobre a modelagem matemática de acordo com alguns pesquisadores, apresentando conceitos e propostas de etapas para aplicá-la na resolução de problemas.

No terceiro capítulo, são apresentados alguns desafios e contribuições que podem surgir durante o processo de aplicação e desenvolvimento da modelagem, conforme discorrem alguns autores.

No quarto capítulo, a modelagem matemática é aplicada com base no imposto de renda, em uma conta de água e a na construção de um muro.

As considerações finais pontuam algumas reflexões sobre a aplicação e importância da modelagem matemática para fins educacionais, e para a valorização de conceitos matemáticos, além de outros.

Por fim, é apresentado o apêndice A, necessário para o desenvolvimento de algumas atividades, e a lista de referências utilizadas como suporte teórico para a escrita deste trabalho.

Capítulo 1

Modelagem Matemática

Em uma época marcada pelo surgimento de novas metodologias como forma para facilitar o processo e a dinâmica de ensino da Matemática, emerge a modelagem matemática, que consiste, além de outras finalidades, em uma alternativa que pode ressignificar e potencializar as abordagens de conceitos matemáticos articulados às situações reais.

Neste capítulo, disserta-se, brevemente, sobre a origem da modelagem matemática no contexto histórico, aponta seus principais precursores no Brasil, lista suas perspectivas centrais e apresenta-se, de forma sucinta, um conceito sobre modelagem matemática, bem como sobre modelo matemático.

1.1 Origem da Modelagem Matemática no Contexto Histórico

A origem da modelagem matemática, de acordo com alguns pesquisadores, é tão antiga quanto a própria Matemática, conforme a asserção:

> A modelagem matemática, arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações-problema de nosso meio, tem estado presente desde os tempos mais primitivos. Isto é, a modelagem é tão antiga quanto a própria Matemática, surgindo de aplicações na rotina diária dos povos antigos (Biembengut e Hein, 2007, p. 7).

Nota-se, nesse contexto, que a modelagem surgiu da necessidade das pessoas de resolverem problemas práticos, e provavelmente sempre recorreram a algum tipo de modelo com a intenção de representar e compreender situações-problema. Soma-se a essas hipóteses a afirmação:

> Lançando um olhar sobre a história da Matemática, nota-se que o seu desenvolvimento esteve frequentemente atrelado à resolução de problemas e à tentativa de modelar o mundo físico, o que culminou com o estabelecimento de modelos explicativos e interpretativos dos fenômenos relacionados a tais problemas (Rosa, Reis e Orey, 2012, p. 160).

Nesse sentido, a atividade de modelagem, resultado da ação humana como forma para resolver algum problema, mesmo que pouco sistematizada, sempre esteve presente na história da Matemática, essencialmente como possibilidade para o entendimento de fenômenos ou situações, por intermédio de construção de modelos elucidativos. Esses modelos, conforme Rosa, Reis e Orey (2012), podem ser caracterizados por formulações, por equacionamentos, bem como por teorizações referentes a algum assunto do campo da Matemática ou de outras áreas do conhecimento.

Indo ao encontro das asserções de Biembengut e Hein (2007), e de Rosa, Reis e Orey (2012), e de acordo com Silveira, Ferreira, Silva (2013), Ferreira, Silva e Freitas (2016), são apresentados três fatos da História da Matemática que podem ser destacados como resultados da utilização de processos de modelagem há muitos anos, a saber:

1.1.1 As Sete Pontes de Königsberg

Königsberg foi uma cidade localizada na antiga Prússia, dividida em quatro regiões pelo Rio Pregel, e atualmente faz parte da Rússia, com o nome Kaliningrad. Existiam sete pontes que ligavam o Rio Pregel à Königsberg, diariamente utilizadas por habitantes da cidade, bem como por visitantes. A figura 1.1 ilustra essa situação.

Essas sete pontes despertaram a curiosidade de muitas pessoas, fazendo emergir o seguinte questionamento: seria possível iniciar uma caminhada em qualquer lugar dessa cidade, passando pelas sete pontes uma única vez e ainda retornar ao ponto de partida?

Este problema é aparentemente simples, mas na época em que foi proposto, sem data precisa, serviu de grande desafio, sendo solucionado apenas pelo matemático e físico Leonhard Euler, em 1736, que transformou os caminhos em linhas e suas interseções em pontos, para explicá-lo, conforme a figura 1.2.

As linhas e seus pontos de interseção permitiram Euler concluir que o problema

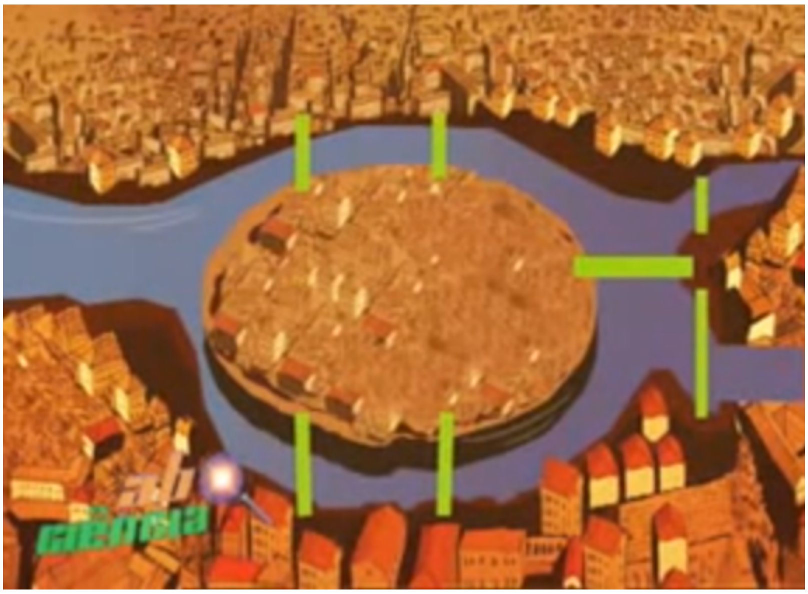


Figura 1.1: Pontes de Königsberg. (Fonte: https://goo.gl/BYqkUS. Acesso em 20/05/2017).

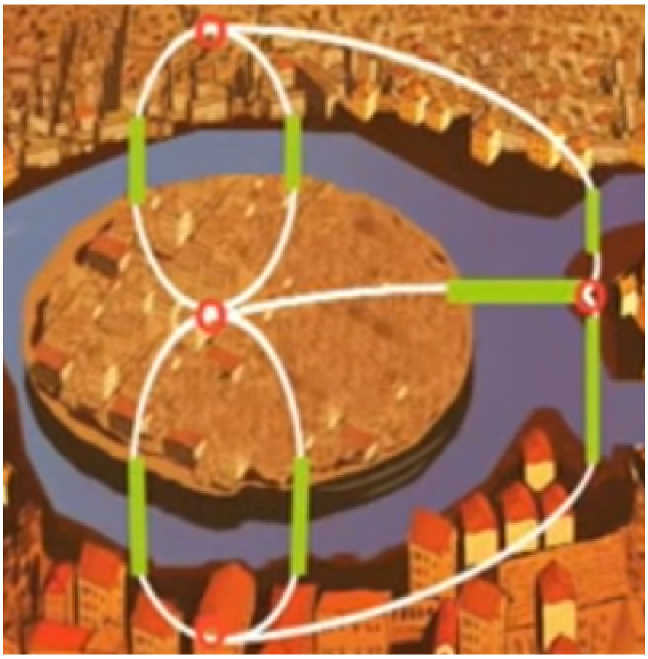


Figura 1.2: Esquema proposto por Euler. (Fonte: https://goo.gl/BYqkUS. Acesso em 20/05/2017).

não tinha solução, pois de cada ponto em seu esquema ilustrativo parte um número ímpar de caminhos, o que implica em ter que passar por uma mesma ponte pelo menos duas vezes, por qualquer caminho que escolha. Euler, além de resolver o problema, também apresentou sua solução com rigor matemático, dando origem à Teoria dos Grafos que, para efeito de esclarecimento, tem como conceito básico um par (V, A) em que V é um conjunto arbitrário, não vazio, e A é um subconjunto de V. Os elementos de V são chamados vértices e os elementos de A são chamados arestas.

Em uma linguagem moderna, pode-se dizer que as pontes deram origem a uma situação-problema, por meio da qual Euler, ao solucioná-la, esquematizou um modelo matemático simples, utilizando linhas e seus pontos de interseção.

1.1.2 Arquimedes e a Coroa do Rei Hieron

Arquimedes nasceu em 287 antes de Cristo, na cidade de Siracusa, Sicília, e é considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica. Atuou, além de inventor, nas seguintes áreas: matemática, física, engenharia e astronomia.

Um dia o Rei Hieron encomendou uma coroa de ouro a um ourives (vendedor de ouro e de prata), a qual seria entregue em um templo, como oferta para deuses. Feito o serviço, ourives entregou a coroa ao Rei. No entanto, surgiu um boato de que essa coroa não tinha sido feita somente com ouro, deixando Hieron desconfiado da honestidade do trabalho de ourives. A suspeita do Rei era de que, na confecção do objeto, tivesse usado ouro e prata. Diante da situação, Hieron pediu a seu amigo Arquimedes que procurasse uma solução para o problema, o qual propôs resolvê-lo fazendo uma análise do metal, mas isso não foi possível, pois destruiria a coroa, e o boato de que ourives havia misturado ouro e prata poderia ser falso. Em busca de uma solução, Arquimedes, em um de seus banhos, questionou a sensação de estar mais leve dentro da água e observou que o volume de água deslocado era igual ao volume de seu corpo submerso, levando-o a pensar como poderia resolver o problema. Para isso, produziu dois objetos, um de ouro e outro de prata, cada um com a mesma quantidade de massa que a coroa. Ao mergulhar esses objetos, um por vez, em um recipiente com água, Arquimedes observou que o objeto produzido com prata fez deslocar mais água que o produzido com ouro, e que a diferença entre as quantidades deslocadas de água coincidiu com a diferença entre os volumes dos objetos. A mesma experiência foi feita com a coroa, a qual elevou o nível da água mais do que o ouro e menos do que a prata. Contudo, Arquimedes concluiu que a coroa do Rei não foi confeccionada apenas com ouro, e que suas experiências o permitiram chegar ao que hoje se conhece como Teorema de Arquimedes (Princípio de Arquimedes), que se baseia no empuxo, força vertical, de baixo para cima, exercida por um fluido sobre um corpo. Esse teorema diz que um corpo totalmente ou parcialmente imerso em um fluido em equilíbrio recebe uma força vertical orientada para cima, denominada empuxo, de intensidade igual, mas de sentido contrário ao peso da porção deslocada de fluido e aplicada no ponto onde está localizado o centro de gravidade desta porção de fluido. Esse enunciado deixa implícito um modelo matemático, que relaciona empuxo e peso de fluido deslocado. Para efeito de ilustração, é considerada a figura a seguir, em que foi colocada uma esfera de chumbo em um copo com água, e que a força de empuxo é igual à quantidade de água deslocada (modelo matemático), conforme o Princípio de Arquimedes.

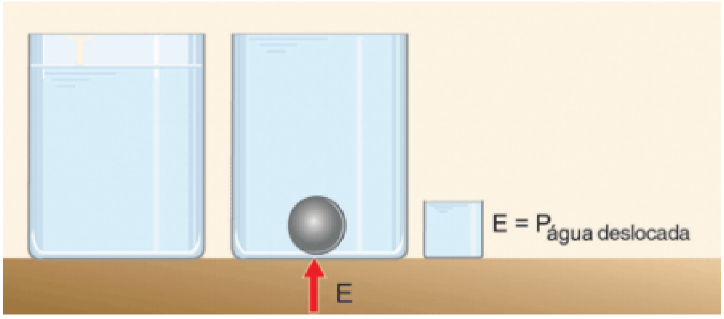


Figura 1.3: Princípio de Arquimedes. (Fonte: https://goo.gl/RNE3dn. Acesso em 20/05/2017).

É importante ressaltar que, por falta de registros precisos, há aqueles que, por intermédio de criação de hipóteses, defendem que a história sobre Arquimedes e a Coroa do Rei Hieron não ocorreu exatamente da forma como contam muitos pesquisadores, sendo muitas vezes caracterizada como uma lenda, mas não foi possível encontrar resultado de pesquisa que comprove situação contrária.

1.1.3 Modelos Geocêntrico e Heliocêntrico

Em relação aos modelos planetários, podemos destacar dois grandes nomes: Ptolomeu que nasceu em 90 depois de Cristo (d.C), em Alexandria, Egito, e é reconhecido como um cientista que desenvolveu trabalhos nas seguintes áreas: Matemática, Astrologia, Astronomia, Geografia, Cartografia, Óptica e Teoria Musical, e Copérnico que nasceu em 1473 d.C, em Toruń, Prússia Real, antiga província, situada no atual território da Polônia, e desenvolveu muitos trabalhos como jurista, astrônomo e médico, além de ter sido cónego da igreja católica, administrador e governador.

O modelo Geocêntrico do Sistema Planetário é resultado de trabalho de muitos estudiosos, por exemplo de Aristóteles, sendo sistematizado por Ptolomeu no século II, em sua obra "Almagesto". Esse modelo dominou a astronomia durante catorze séculos e serviu, na época, como representação aproximada da realidade, até ser contestado pela Teoria Heliocêntrica, apresentada por Nicolau Copérnico e seus sucessores.

Uma das hipóteses para a criação da Teoria Geocêntrica, era de que a Terra estaria fixa no centro do universo, entendido como sendo um grande círculo, no qual cada astro ficaria em movimento com velocidade própria, por intermédio de uma combinação de círculos. Para estabelecer a posição dos astros no modelo Geocêntrico, Ptolomeu e seu predecessores, a partir das observações, fizeram muitos cálculos trigonométricos, com a Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno girando ao redor da terra, cujo resultado do processo encontra-se, resumidamente, na figura 1.4.

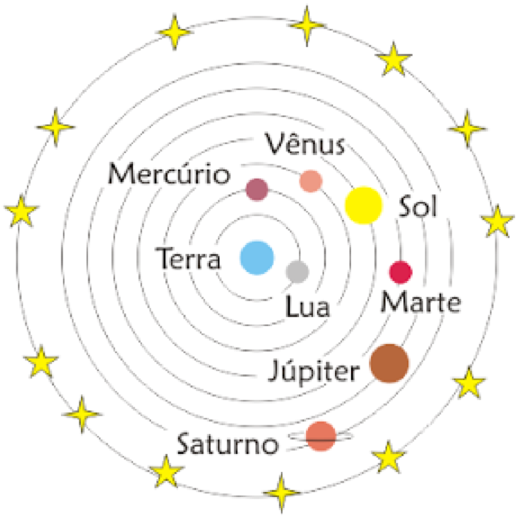


Figura 1.4: Modelo Geocêntrico. (Fonte: https://goo.gl/scQsE7. Acesso em 25/07/2017).

Embora refutado o modelo Geocêntrico de Ptolomeu, as posições dos astros nele estabelecidas, por meio de ferramentas matemáticas, serviram como boa aproximação para a posição dos planetas, razão pela qual foi bem-sucedido durante tantos séculos. É importante ressaltar que, caso Galileo Galilei não tivesse fabricado instrumentos de observação astronômicos (telescópios) a grandes distâncias, talvez o Modelo Geocêntrico ainda continuasse predominando.

A Teoria Heliocêntrica, válida até hoje, tem como base a hipótese de que o Sol está fixo no centro do sistema solar e os planetas giram em sua volta, inclusive a lua, que gira em torno da Terra e, portanto, em torno do Sol. Aproximadamente, em 260 antes de Cristo, a ideia, fundamentada em recursos matemáticos, de que a Terra orbita o Sol, já havia sido sugerida pelo astrônomo grego Aristarco, mas sem aceitação, e somente 18 séculos depois a hipótese heliocêntrica foi retomada, reavaliada e desenvolvida por Copérnico e seus sucessores. Uma das características mais importantes da teoria de Copérnico é de que a Terra é apenas um dos planetas que giram em torno do Sol, e com base nos cálculos das distâncias relativas desses planetas, bem como da Lua, ao Sol, foram invertidas as posições ocupadas pela Terra e pelo Sol no Modelo Geocêntrico, mostrando que há similaridade entre esses modelos. A figura 1.5 consiste em uma representação simplificada do Modelo Heliocêntrico.

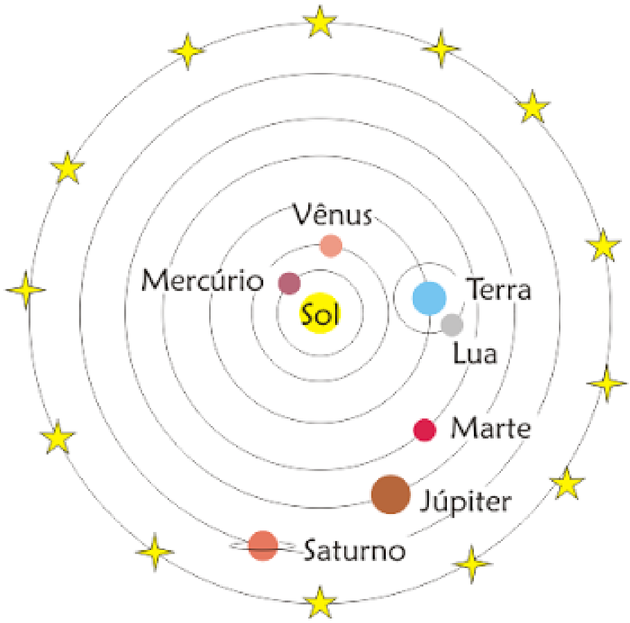


Figura 1.5: Modelo Heliocêntrico. (Fonte: https://goo.gl/scQsE7. Acesso em 25/07/2017).

Comparando as figuras referentes aos modelos Geocêntrico e Heliocêntrico, vemos que, de fato, há semelhanças entre ambos.

Um dos sucessores de Copérnico que contribuíram significativamente no campo da pesquisa e com resultados que produziram impactos relevantes na ciência, é Johannes Kepler, que nasceu em 27 de dezembro de 1571, em Weil der Stadt, Württemberg, atual Alemanha, o qual atuou como astrônomo e matemático. As ideias de Kepler convergiram desde o início de suas pesquisas em defesa ao modelo Heliocêntrico proposto por Copérnico, e dando continuidade ao que se tinha comprovado em relação a esse modelo, dentre outros, suas observações o levaram a convencer-se de que existe uma força capaz de manter os planetas em órbita ao redor do Sol, o que procurou provar em alguns de seu trabalhos. Frequentemente observando os movimentos do planeta Marte, em 1609 Kepler publicou uma de suas obras intitulada “Nova astronomia”, na qual, além de outros, fez a descrição da variação dos movimentos desse planeta, e somando-se ao que Ptolomeu, Tycho Brahe e

Copérnico haviam escrito sobre os planetas, chegou-se à conclusão de que os movimentos dos astros celestiais são elípticos, e não circulares como muitos pensavam. Ressalta-se que, conforme Tossato e Mariconda (2010), Brahe, assim como Ptolomeu, não acreditava na hipótese heliocêntrica, mesmo assim seus trabalhos foram importantes para Kepler concluir sobre os movimentos dos planetas, a partir dos quais estabeleceu três leis, assim resumidas:

1. Lei das órbitas elípticas ou Primeira lei de Kepler: a órbita de cada planeta tem a forma de uma elipse, com o Sol em um de seus focos, conforme ilustra a figura 1.6.

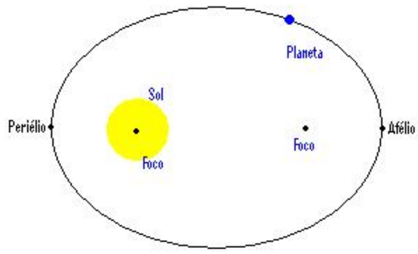


Figura 1.6: Ilustração para a Primeira Lei de Kepler. (Fonte: https://goo.gl/nY8uq5. Acesso em 25/07/2017).

2. Lei das áreas ou segunda lei de Kepler: um planeta não se move em torno do Sol com velocidade constante, mas de tal forma que um segmento traçado desse planeta ao Sol varre áreas iguais em intervalos de tempo também iguais. A figura 1.7 aponta um aspecto simplificado dessa situação.

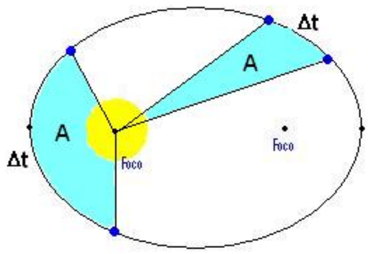


Figura 1.7: Ilustração para a Segunda Lei de Kepler. (Fonte: https://goo.gl/Kq1Yij. Acesso em 25/07/2017).

A linha que liga o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

3. Lei dos Períodos (Lei harmônica) ou terceira lei de Kepler: o quadrado do período orbital de cada planeta é diretamente proporcional ao cubo de sua distância média

ao Sol, que matematicamente pode ser traduzido por:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \text{constante}$$

Resume-se, portanto, que as leis e modelos estabelecidos por Kepler são oriundos da soma de resultados de trabalhos desenvolvidos por pesquisadores que defendiam as hipóteses geocêntricas e de outros que trabalhavam em favor das hipóteses heliocêntricas.

1.2 Inserção da Modelagem Matemática com Enfoque para o Ensino e Aprendizagem da Matemática

Os registros que se tem sobre as tentativas do homem de modelar os eventos que ocorrem na natureza dão visibilidade de que os processos de modelagem são utilizados desde o início da história da humanidade, mas conforme aponta Biembengut (2009), em especial na década de 1960, com o movimento denominado "utilitarista", no qual foram defendidas aplicações práticas dos conceitos do campo da Matemática, tanto na ciência quanto no meio social, é que profissionais, pesquisadores e professores de vários países, deram início a movimentos que valorizaram a construção de modelos matemáticos com finalidades voltadas para o ensino e aprendizagem da Matemática. A autora salienta ainda que na década de 1960 houve muitos movimentos com temas conduzidos pela valorização e aplicação de ferramentas Matemáticas para solucionar problemas oriundos de situações reais. Da lista de movimentos, destaca-se "Lausanne Symposium", que ocorreu na Suíça, em 1968, cujo foco central foi debater sobre como ensinar Matemática de forma útil, priorizando a realidade do estudante a partir de questões contextualizadas e intermediadas pela modelagem. Biembengut (2009) também aponta que os movimentos pelas mudanças, em particular da prática docente, no cenário internacional, influenciaram, quase que ao mesmo tempo, professores de Matemática brasileiros a adotar a modelagem como recurso para o ensino e aprendizagem de Matemática.

1.3 Modelagem Matemática e Seus Principais Precursores no Brasil

Nas últimas décadas a modelagem matemática vem ganhando posição de relevância no Brasil, sendo objeto de estudo de muitos pesquisadores, principalmente do campo da Educação Matemática.

Segundo Biembengut (2009), no Brasil a modelagem matemática surgiu por volta da década de 1970, como proposta para a prática pedagógica, e seu fortalecimento no cenário brasileiro se deu devido a vários grupos de estudiosos e pesquisadores. Conforme Biembengut (2007, 2009), três precursores podem ser citados como atuantes principais no processo de consolidação da modelagem no ensino de Matemática no Brasil, a saber: Aristides Camargos Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi.

Biembengut (2007, 2009) relata que Barreto se dedicava sem medir esforços na intenção de modelar matematicamente suas músicas, e a partir da década de 1970 começou a explorar a modelagem matemática em sua prática de sala de aula na graduação, na PUC - Rio de Janeiro, com a finalidade de melhorar a qualidade de ensino nas disciplinas: Prática de Ensino, Fundamentos da Matemática e Cálculo Diferencial e Integral. Salienta a autora que os frequentes questionamentos "para que serve isto"? é que despertaram em Barreto o interesse por mudanças em sua prática enquanto professor, levando-o a desenvolver sua primeira experiência pedagógica na área da modelagem com 212 estudantes do curso de Engenharia, em 1976, o que lhe permitiu perceber que os alunos se sentiram mais interessados e motivados em aprender e, além disso, Barreto passou a pensar a modelagem como proposta para o ensino, com possibilidades para ser disseminada. A autora evidencia ainda que Barreto orientou os dois primeiros trabalhos na área de modelagem, a nível de mestrado, na PUC - RJ, sendo o primeiro, em 1976, de autoria de Celso Braga Wilmer, com o tema "Modelos na Aprendizagem Matemática", e o segundo, em 1979, escrito por Jorge E. Pardo Sánchez, de Costa Rica, sobre "Estratégia Combinada de Módulos Instrucionais e Modelos Matemáticos Interdisciplinares para o Ensino e Aprendizagem da Matemática em Nível de 2º grau: estudo exploratório". Esses resultados apontam parte do início da disseminação da modelagem no Brasil como ferramenta importante para o ensino.

Segundo Biembengut (2009), as práticas de Barreto na área da modelagem lhe impulsionaram a defender sua proposta em muitos Eventos de Educação Matemática, tanto nacionais quanto internacionais, conquistando adeptos importantes, como o professor Rodney Carlos Bassanezi. A pesquisadora acrescenta que a proposta de Barreto implicava em apresentar uma situação-problema a qual era capaz de fomentar a motivação dos alunos em aprender as teorias em matemática, uma vez que eram desenvolvidas em consonância com situações práticas. Segundo Biembengut (2009), Barreto dispunha de uma coleção de modelos matemáticos de várias áreas, que eram utilizados em suas exposições, uma das quais aconteceu em 1979, na Universidade de Campinas (SP) - Unicamp, quando ministrou um seminário sobre "Modelos Matemáticos", a convite do professor Ubiratan D'Ambrosio, e Bassanezi se fazia presente, favorecendo a divulgação da modelagem matemática.

Ubiratan D'Ambrósio, conforme mencionado, é outro protagonista que se configura no rol dos precursores da modelagem matemática no Brasil, o qual atuou como representante brasileiro na comunidade internacional de Educação Matemática, fomentando e coordenando, nas décadas de 1970 e 1980, cursos e projetos na Unicamp, potencializando a formação de grupos em algumas áreas do conhecimento, por exemplo em modelagem. Segundo Biembengut (2009), os primeiros contatos de D'Ambrósio com a modelagem aconteceram na década de 1960, época em que atuava como professor e pesquisador nos Estados Unidos na Brown University, localizada em Providence, na University, em Kingston como também na State University of New York, em Buffalo - New York, retornando ao Brasil em 1972, quando foi para a Unicamp.

Rodney Carlos Bassanezi, professor e pesquisador de renome, atuando na Unicamp, também adotou a prática da modelagem matemática em sala de aula, nos cursos de graduação, de pós-graduação e de formação continuada, contribuindo significativamente na disseminação da modelagem por todo o Brasil. Biembengut (2009) relata que na década de 1980 Bassanezi coordenou um curso, com duração de uma semana, de Cálculo Diferencial e Integral, para 30 professores de várias Instituições de Educação Superior da região sul do Brasil, promovido pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp (IMECC), o qual não possuía um método de ensino prefixado e também não se tinha a intenção de trabalhar seguindo o método tradicional. Para o desenvolvimento das aulas, além de promover outros encaminhamentos, o professor Bassanezi conversou com os participantes do curso, lhes propondo que se reunissem formando grupos e que sugerissem problemas que envolvessem o Cálculo Diferencial e Integral como ferramenta para resolvê-los, mas a maioria das questões que foram propostas era similar às que estavam listadas no livro texto, ou seja, sem novidades. Pode-se dizer que esses procedimentos utilizados por Bassanezi constituem alguns passos da inovação de sua prática docente, a partir dos quais os professores e/ou alunos foram instigados a pensar em algo diferente, que convergisse, preferencialmente, para a contextualização, o que também é possível com o auxílio da modelagem.

Conforme Biembengut (2009), em 1982 foi oferecido o primeiro curso de Pós-Graduação em modelagem matemática na Universidade Estadual de Guarapuava-PR, quando foram convidados professores da Unicamp para ministrá-lo. Esse curso ficou sob a coordenação do professor Bassanezi, o qual sugeriu uma alteração no método tradicional que configurava o programa da pós-graduação, propondo que os participantes fizessem uma visita às empresas da cidade e, a partir da realidade local, levantassem problemas de interesse para serem investigados. Nesse processo, questões sobre chimarrão, abelhas, fabricação de papel, dentre outras, foram listadas e serviram de suporte para o desenvolvimento das atividades de forma diferenciada, impulsionando as ações sobre modelagem. Bassanezi potencializou a realização de vários outros cursos na área da modelagem em muitas instituições de ensino brasileiras.

Segundo Biembengut (2009), Barreto e Bassanezi não atuaram na educação básica com suas experiências em modelagem matemática, mas sempre que faziam divulgação de seus trabalhos em eventos, a modelagem era expressa em um contexto geral, indicando os resultados positivos e orientando professores da educação básica a fazer adaptações nos modelos por eles propostos, no sentido de que pudessem trabalhá-los com seus alunos. Em relação aos precursores da modelagem matemática, afirma a autora:

> Não há como subestimar o mérito e a validade das propostas dos precursores. Importa, antes de tudo, reconhecer as contribuições positivas oriundas pelos precursores da modelagem na educação; daquele pequeno grupo de professores que teve a iniciativa em realizar propostas de ensino de matemática por outros vieses e, por consequência, se motivou a contar sobre esta realização para outro professor, e para tantos outros (Biembengut, 2009, p. 13).

De fato, esses precursores da modelagem instituíram novas possibilidades no campo da Matemática, com incidência, também, em outras áreas do conhecimento, promovendo mudanças e estimulando inovação.

1.4 Perspectivas de Modelagem Matemática Apontadas por Kaiser e Sriraman

O conhecimento sobre as perspectivas dos principais pesquisadores da área da modelagem matemática é fundamental para quem pretende implementá-la em sua prática profissional, tanto para desenvolver pesquisas quanto para finalidades pedagógicas, pois, nesse contexto, facilita delinear, entre as perspectivas, aquelas que melhor se adéquam à atividade a ser desenvolvida, de acordo com a afirmação:

> Conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos relevantes em cada uma delas é potencializar a prática de modelagem em sala de aula, uma vez que os professores podem trabalhar com estas atividades de modo a contemplar diferentes perspectivas e, consequentemente, os diferentes aspectos inerentes às atividades de modelagem (Almeida e Vertuan, 2010, p. 31).

Nota-se também, nesse contexto, que essas perspectivas pressupõem diferentes formas para o profissional se organizar e desenvolver atividades de modelagem.

As publicações sobre modelagem matemática frequentemente apontam diferentes interesses e objetivos em relação a esse assunto, principalmente quando se trata do desenvolvimento de atividades de modelagem. Segundo Kaiser e Sriraman (2006), a classificação pautada nesses diferentes objetivos e interesses apresentados na literatura é importante, pois ajuda a melhorar as discussões, implicando em um melhor entendimento sobre o que é modelagem matemática. Nesse sentido, a partir do reconhecimento de características inerentes às atividades sobre modelagem relatadas por alguns pesquisadores e analisando os objetivos e interesses principais expostos nas redações de algumas publicações da Revista ZDM - Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (Revista Central de Educação Matemática), Kaiser e Sriraman (2006) sistematizaram seis perspectivas, as quais são hoje conhecidas como perspectivas internacionais de modelagem matemática, a saber: realística ou aplicada, contextual, sociocrítica, epistemológica ou teórica, cognitiva e educacional. Essas perspectivas podem ser assim detalhadas:

1) Perspectiva realística ou aplicada: tem por base as situações-problema reais, provenientes da indústria ou da ciência, cujo objetivo é desenvolver nos alunos as habilidades de resolução de problemas aplicados.

2) Perspectiva contextual: considera a inclusão da modelagem matemática na sala de aula a partir de situações-problema reais, cujo foco é motivar os alunos no processo de construção da aprendizagem, auxiliando-os na interpretação de problemas e na obtenção de modelos matemáticos.

3) Perspectiva sociocrítica: dá ênfase a uma reflexão crítica sobre a função e a natureza dos modelos matemáticos, bem como sobre o papel da matemática na sociedade. Essa perspectiva também está relacionada à concepção de formar sujeitos autônomos e capazes de reconhecerem seus direitos e deveres.

4) Perspectiva epistemológica ou teórica: aborda as situações-problema enfatizando um contexto estritamente matemático por meio da modelagem e, nesse sentido, uma das prioridades é desenvolver conceitos aliados às teorias matemáticas.

5) Perspectiva cognitiva: tem por base a psicologia cognitiva, ou seja, se fundamenta basicamente na análise da atenção, da percepção, da criatividade e da resolução de problemas. Nessa perspectiva é possível analisar e compreender os processos cognitivos que se desenvolvem ao longo da atividade de modelagem.

6) Perspectiva educacional: faz a integração entre as perspectivas realística e epistemológica, pois tem como base situações-problema reais, se preocupando, ao mesmo tempo, com o desenvolvimento da parte matemática teórica. Essa perspectiva possui objetivos didáticos, quando se faz referência à estrutura e ao desenvolvimento dos processos de aprendizagem, ou objetivos conceituais, quando a ênfase é referente à introdução de novos conceitos.

Barbosa e Santos (2007), a partir da análise dessas perspectivas, fizeram três novas classificações, observando os objetivos didáticos de cada uma, a saber:

- o desenvolvimento da teoria matemática (epistemológica, educacional e contextual);
- o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados (realística);
- a análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos na sociedade (sociocrítica). (Barbosa e Santos, 2007, p. 2).

Dessa forma, essas perspectivas apontam possibilidades para desenvolver atividades de modelagem matemática desde questões mais abertas, que podem ser fundamentadas nas perspectivas realística e sociocrítica, ou situações-problema mais estruturadas, que podem ser desenvolvidas de acordo com as perspectivas epistemológica e contextual, sinalizando ainda que, em uma mesma atividade, é possível contemplar várias perspectivas.

1.5 Conceito de Modelagem Matemática e de Modelo Matemático Segundo Bean

Conforme o Dicionário Aurélio (2010), "modelagem" pode significar "dar forma ou contorno a algo por meio de um modelo", ou seja, é ação de modelar, e, "modelo", além de outros significados, é "aquilo que serve de referência ou que é dado para ser reproduzido". Observa-se, nesses conceitos, que tanto a expressão "modelagem" quanto a palavra "modelo" podem referir-se a situações concretas ou simplesmente imaginárias, o que não é diferente quando combinadas com o termo "Matemática", mas o foco da maioria dos pesquisadores na área da modelagem matemática é pensá-la como forma de solucionar algum problema da realidade. Observa-se ainda que o mesmo dicionário ao trazer os significados da palavra "definir", uma das possibilidades é "dizer o que pensa a respeito de algo", esclarecendo, portanto, a razão pela qual algumas definições sobre uma mesma situação, muitas vezes divergem em alguns pontos, e isso poderá ser motivo de reflexão sobre a forma com que alguns estudiosos conceituam ou definem um mesmo "objeto". Dale William Bean, no fim da década de 1990, começou a estudar e a escrever seus trabalhos, principalmente artigos, sobre modelagem matemática, e vem contribuindo significativamente com suas publicações sobre esse assunto, tanto em matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Segundo esse autor:

> A essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual características pertinentes a um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras e representadas em termos matemáticos (o modelo) (Bean, 2001, p. 53).

Dessa forma, a modelagem matemática é um processo dinâmico e abrangente, que pode ser utilizada para atribuir forma a algum fenômeno ou situação, por intermédio de um modelo, de acordo com o interesse e os objetivos do modelador. Bean (2007), compreende a modelagem em termos de premissas e de formulação de pressupostos, ou seja, a entende a partir de elementos iniciais dos quais emergem ideias guias que possibilitam desenvolver um raciocínio e entender algum fenômeno, e acrescenta que a "modelagem" possui sentido abrangente quando é caracterizada pelo termo "matemática", consistindo em "uma atividade, entre uma variedade de possíveis atividades, utilizada para lidar com situações problemáticas empregando a linguagem matemática" (Bean, 2007, p. 48). Nota-se que o autor encaminha a modelagem como um recurso por meio do qual muitos problemas podem ser resolvidos. Quanto ao conceito de modelagem matemática, o pesquisador afirma que:

> É uma atividade humana na qual uma parte da realidade está conceitualizada, de forma criativa, com algum objetivo em mente. O cerne da modelagem reside no recorte e na formulação de um isolado, ou seja, na conceitualização de um fenômeno com fundamento em premissas e pressupostos que remetem tanto ao fenômeno quanto aos objetivos do modelador (Bean, 2009, p. 91).

Ressalta-se que ao conceituar modelagem matemática, Bean a enfatiza como uma condição possível para solucionar problemas voltados para situações práticas, a qual também pode ser entendida como um caminho para o modelador dar forma a algum fenômeno da realidade, estruturando-o de acordo com seus objetivos.

No que concerne a um modelo matemático, Bean (2009, p. 7) diz ser "uma construção simbólica conceitual, expressa principalmente na linguagem matemática, que auxilia na interpretação/compreensão e/ou tomada de decisões". Nesse sentido, os modelos matemáticos servem essencialmente para dar uma orientação ao pensamento, influenciando um novo comportamento da pessoa frente à realidade. É importante acrescentar que, por esse viés, um modelo matemático dá aspectos à solução de alguma situação-problema, ao passo que a modelagem matemática constitui-se no processo através do qual essa solução é obtida.

Bean (2009) ao conceituar modelagem e modelo matemático pressupõe, também, condições para ensinar e desenvolver conceitos matemáticos de forma contextualizada, por intermédio de situações-problema, evidenciando uma possível articulação da Matemática com outras áreas do conhecimento. Nesse contexto, a utilização de atividades de modelagem com finalidades voltadas para o ensino, além de outros benefícios, possibilita que sejam desenvolvidas competências e habilidades no aluno, o que está em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), conforme a asserção:

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (Brasil, 2006, p. 111).

Assim, a modelagem matemática pode ser um caminho viável para integralizar uma formação por meio da qual o aluno possa melhorar a leitura, a análise, a compreensão e sua apropriação em situações-problema, estabelecendo estratégias sobre elas.

De acordo com Bean (2007), o uso de um modelo já existente, significa a reprodução da realidade, e, no caso de sua criação, que consiste no processo de modelagem, implica a transformação da realidade, que vem ao encontro da necessidade de se estabelecer novas concepções no âmbito pedagógico. Assim, nesse cenário de busca por uma reconfiguração do ensino de matemática, que passa por uma espécie de crise de identidade, a criação de modelos matemáticos propicia um caminho de acesso ao conhecimento de forma contextualizada, dinâmica e menos formal, possível aos mais variados níveis de escolaridade.

É importante ressaltar que é frequente em situações práticas o uso de modelos, já prontos, apenas como reprodução da realidade nas mais diversas situações, por exemplo, modelo para a construção de uma casa e modelo para o cálculo de juros simples, mas a modelagem aponta um caminho contrário a essa prática, que é revelar as etapas, em um processo dinâmico de construção do conhecimento, até a obtenção de um modelo e, por fim, sua aplicação.

Do ponto de vista conceitual, de acordo com as redações dos pesquisadores sobre modelagem, não existe uma definição única, tanto para o que seja modelagem matemática quanto para o que seja modelo matemático, o que também é apresentado no próximo capítulo, para efeito de um melhor entendimento sobre o tema, embora conceitos sobre tais situações já tenham sido explanados com base no entendimento de Bean.

Capítulo 2

Modelagem Matemática Segundo Alguns Pesquisadores

Este capítulo consiste na busca por respostas para algumas perguntas que circulam no contexto da modelagem, em especial quanto à sua utilização para fins pedagógicos. Para esta finalidade, são considerados alguns trabalhos escritos pelos pesquisadores Bassanezi, Biembengut e Hein, Burak e Barbosa, com enfoque centrado nas concepções desses autores sobre o desenvolvimento da modelagem matemática como subsídio para o ensino e aprendizagem.

2.1 Modelagem matemática segundo Bassanezi

Implementar uma prática, no contexto escolar, que possibilite a formação de um cidadão crítico, autônomo e participativo, é um dos propósitos que emergem das ações dos profissionais preocupados e comprometidos com a educação, o que é inerente a Rodney Carlos Bassanezi.

Vincular a situações reais o que é ensinado na escola, é um dos principais objetivos de Bassanezi, que, sem medir esforços, muito tem contribuído com seus trabalhos referentes à educação, tanto nas instituições de ensino quanto em outros ambientes. Bassanezi (2004) salienta que um novo modelo de educação, menos alienado e mais comprometido com as realidades das pessoas e sociedades, é possível, mas, para isso, é necessário lançar mão de instrumentos matemáticos inter-relacionados a outras áreas do conhecimento, e acrescenta:

> É também nessa capacidade de estabelecer relações entre os campos da matemática e os outros, evitando reproduzir modos de pensar estanques fracionados, que, a nosso ver, está o futuro da formação de novos quadros de professores e pesquisadores, prontos a enfrentar o desafio de pensar a unidade da multiplicidade (Bassanezi, 2004, p. 15).

Nesse contexto, o papel da escola precisa ser repensado, principalmente no que diz respeito a um ensino organizado de forma fragmentada, que está inerte em relação a este cenário de mudanças incessantes e, consequentemente, não atende às demandas deste novo paradigma. Para promover a conexão da matemática com outras áreas do conhecimento, é preciso que o profissional se reposicione, no sentido de se reencontrar e, assim, estabelecer novas abordagens no âmbito pedagógicos, propiciando o processo de instituição do conhecimento, que vá ao encontro dessa nova realidade.

Bassanezi (2004) argumenta que na própria atividade de ensino, elementar e médio, deve-se questionar a razão pela qual a matemática é ensinada, não no sentido de que seja extinta do programa escolar ou dirigida somente a quem pretende utilizá-la futuramente, mas na intenção de instigar a importância de se trabalhar os conteúdos matemáticos em consonância com situações cotidianas. Frente a esse novo olhar, novas formas para se trabalhar matemática são sugeridas por muitos estudiosos e pesquisadores, particularmente por Bassanezi, que vê nas ações de modelar (modelagem) grandes possibilidades para se fazer a conexão dos conteúdos matemáticos com situações da realidade. Para o autor, a modelagem tem se mostrado eficaz tanto como método científico destinado à pesquisa quanto como estratégia de ensino e aprendizagem. Ascendente ao processo de construção matemática, tem-se a "modelagem matemática" que, segundo Bassanezi (2004, p. 16) "consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real". Nota-se que o discurso do autor evolui sinalizando a importância de se trabalhar na dinâmica de transformação do movimento que diz respeito ao fazer matemático, pautando-se em uma nova realidade, que consiste, essencialmente, numa prática pedagógica que promova a relação de reciprocidade entre conteúdos matemáticos e questões reais.

Segundo Bassanezi (2004, p. 17), "a modelagem matemática, em seus vários aspectos, é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la". Assim, nesse cenário de inovação das atividades de ensino, no qual as experiências mais relevantes na área pedagógica apontam para novas ações no contexto escolar, a modelagem matemática configura possibilidades de aprendizagem em sinergia com os propósitos educacionais. Proporcionar a formação do sujeito, articulada à sua realidade, mediando teoria e prática como elementos indissociáveis, constitui, também, ressignificar a prática docente, bem como as experiências dos alunos em ambientes de estudo. Alimentando a dinâmica de busca por mudanças no contexto educacional sustentada por situações reais, afirma o autor:

> Quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender, ou de agir sobre ela - o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo (Bassanezi, 2004, p. 19).

Nota-se nesta inferência que refletir sobre a realidade na intenção de entendê-la e de nela atuar, tendo como base os fenômenos ou fatos que a compõem, constitui, dependendo do caso, seguir uma trajetória nem sempre evidente, porém, a partir de alguns de seus elementos, considerados fundamentais, torna-se possível alcançar o objetivo, o de obter um modelo. Bassanezi (2004) acentua que o termo modelo, usado em muitas situações, possui ambiguidade, mas o considera no sentido de que refere-se à representação de um sistema. Bassanezi (2004, p. 20) diz que "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado", é o que se chama "modelo matemático", mas cada autor se aventura a dar sua própria definição. Nesse sentido, relevante não são as diferentes formas que se tem para definir um modelo matemático, mas, importante, é a função que esse modelo possui ao representar o eixo central de uma investigação.

O autor elucida que um modelo matemático é formulado em concordância com os aspectos dos fenômenos ou questões analisadas e classificado de acordo com a matemática utilizada, em:

> Linear ou não-linear, conforme suas equações básicas tenham estas características; Estático, quando representa a forma do objeto - por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo; Dinâmico, quando simula variações de estágios do fenômeno - por exemplo, crescimento populacional de uma colmeia; Educacional, quando é baseado num número pequeno ou simples de suposições, tendo quase sempre, soluções analíticas; Aplicativo, aquele baseado em hipóteses realísticas e que, geralmente, envolve inter-relações de um grande número de variáveis,

> fornecendo em geral sistemas de equações com numerosos parâmetros; Estocástico ou determinístico, de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações. Os modelos estocásticos são aqueles que descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos e os modelos determinísticos são baseados na suposição de que se existem informações suficientes em um determinado instante ou num estágio de algum processo, então todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente (Bassanezi, 2004, p. 20 - 22).

Essas classificações apontam que um modelo matemático pode assumir aspectos simples ou complexos, dependendo, sobretudo, das características do objeto analisado.

Bassanezi (2004) evidencia que a modelagem matemática consiste em uma ação contínua e dinâmica, útil para se fazer previsão de tendências, e se torna eficiente a partir do momento em que o modelador passa a ter consciência de que, ao explorá-la, está, de alguma forma, trabalhando com aproximações da realidade. Notabiliza também que devem ser equilibrados o conteúdo e a linguagem matemática usados na construção de modelos, bem como limitados tanto ao tipo de problema quanto ao objetivo que se pretende alcançar. O autor ressalta também que sua intenção com modelagem matemática no ensino e aprendizagem é estimular professores de matemática e alunos a desenvolverem suas habilidades com a prática da modelagem.

Bassanezi (2004, p. 25) adverte que "a modelagem não deve ser utilizada como uma panaceia descritiva adaptada a qualquer situação da realidade". Nesse caso, pode-se dizer que a modelagem matemática possui limitações e, portanto, não é um recurso a partir do qual resolvem-se todos os problemas da realidade. Assim, torna-se necessário o modelador avaliar em que situação é possível ter a modelagem como ferramenta para resolver um problema.

Segundo Bassanezi (2004), o processo de modelagem matemática ocorre seguindo algumas etapas que, de acordo com sua visão, é composto por: experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. Essas etapas podem ser detalhadas da seguinte forma:

1) **Experimentação**: etapa da atividade laboratorial na qual se processa a obtenção dos dados. Os métodos experimentais surgem de acordo com a natureza do experimento e do objetivo da pesquisa.

2) **Abstração**: refere-se ao procedimento que deve levar à formulação do modelo matemático. Nesta fase, procura-se determinar:

a) a seleção das variáveis;

b) a problematização ou formulação do problema teórico numa linguagem própria da área em que está trabalhando;

c) a formulação de hipóteses, as quais dirigem a investigação e são geralmente formulações gerais que permitem ao pesquisador inferir situações empíricas e específicas;

d) a simplificação, a qual consiste basicamente em delimitar e isolar o campo de estudo de maneira apropriada, possibilitando o tratamento que precisa ser dado ao problema, sem afetar sua relevância.

3) **Resolução**: etapa em que é obtido o modelo matemática, quando substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática. Ressalta-se ainda que a resolução de um modelo sempre está, de certa forma, submissa ao grau de complexidade empregado em sua formulação e, dependendo do caso, somente será visualizada com o auxílio de métodos computacionais, dando apenas uma solução numérica aproximada.

4) **Validação**: consiste no processo de aceitação ou não do modelo proposto e, simultaneamente com as hipóteses que lhe são atribuídas, deve ser testado em confronto com os dados empíricos, comparando sua solução e previsão com os valores obtidos no sistema real.

5) **Modificação**: esta etapa ocorre se os fatores ligados ao problema original provocarem a rejeição do modelo que, nesse caso, precisa ser reformulado, fazendo modificações nas variáveis.

É importante ressaltar que as etapas que compõem o processo de modelagem, propostas por Bassanezi, configuram possibilidades de instituição do ensino e aprendizagem em caráter reflexivo, indo ao encontro do modelo de educação que hoje se espera.

Para a obtenção de modelos, é comum os pesquisadores usarem figuras que fornecem uma representação reduzida e prática dos aspectos desejáveis e inerentes ao processo de modelagem. A figura 2.1, sugerida por Bassanezi, ilustra de forma simplificada as etapas de modelagem matemática que já foram expostas, juntamente com outras informações relevantes, que se movem agregadas às atividades intelectuais desse processo.

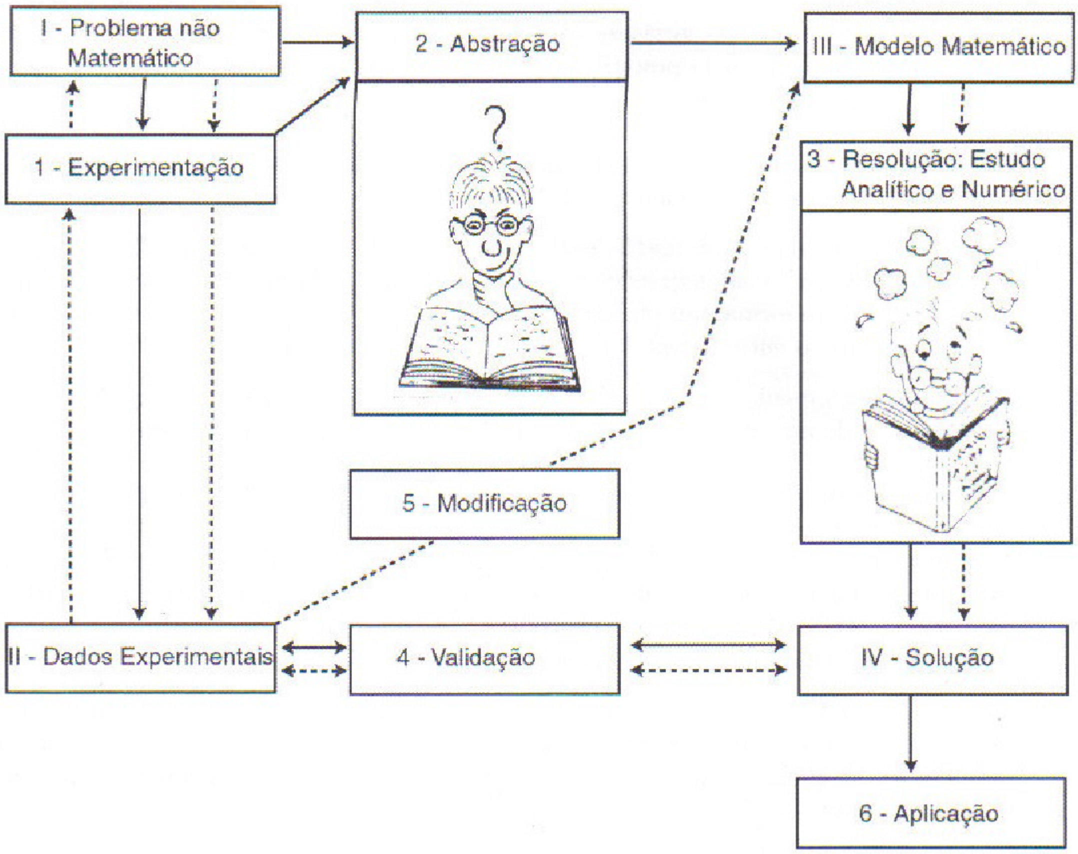


Figura 2.1: Etapas de Modelagem Matemática. (Fonte: Bassanezi, 2004, p. 27).

Bassanezi (2004), revela a importância do trabalho com modelagem matemática como alternativa possível para conduzir o processo de ensino e aprendizagem de forma satisfatória, podendo fazer previsão a partir de situações-problema e tomar decisão, o que está em consonância com a afirmação:

> A modelagem matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Uma modelagem eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim, participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças (Bassanezi, 2004, p. 177).

Acrescenta-se, nesse sentido, que um trabalho sobre modelagem matemática bem planejado, que é um dos caminhos possíveis para se alcançar a qualidade e a eficiência, possui aspectos importantes, que contribuem significativamente no processo de formação do aluno.

2.2 Modelagem Matemática Segundo Biembengut e Hein

Na natureza, nem sempre é possível identificar os fenômenos ou eventos apenas por suas manifestações imediatas. Por esta razão, é comum, e de certa forma natural, a pessoa, com sua intuição, despertar seus estímulos reflexivos, observar, criar hipóteses e construir modelos, com a intenção de compreender os fatos, conforme defendem Maria Salett Bienbengut e Nelson Hein (2007). Esses autores salientam que modelar é uma prática importante para a vida, pois propicia o entendimento e explicação de muitas situações-problema, com implicações no reposicionamento do homem frente à realidade. A asserção a seguir evidencia que a prática para a obtenção de modelos em situações reais está intrínseca nas ações humanas:

> Na verdade o ser humano sempre recorreu aos modelos, tanto para comunicar-se com seus semelhantes como para preparar uma ação. Nesse sentido, a modelagem, arte de modelar, é um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento (Biembengut e Hein, 2007, p. 11).

Dessa forma, pode-se dizer que modelar é uma atividade que pode ajudar a desenvolver e a potencializar a criatividade, bem como a tomar decisões, ou seja, é um exercício intelectual que estimula e promove a reflexão e o agir, importantes no processo de construção do conhecimento.

Segundo Biembengut e Hein (2007 p. 12), “modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo”, cuja criação é inerente ao ser humano e pode ser utilizado para interpretar os fenômenos naturais e sociais. Os autores complementam que “o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas” (Biembengut e Hein, 2007, p. 12). Constata-se, dessa forma, que a modelagem matemática como “um processo”, significa não apenas apresentar ao sujeito um produto (resultado), mas, sim, permitir-lhe seguir algumas etapas para obter um modelo, o qual, em caráter científico e, mesmo em sua forma simplificada, reproduzirá em parte ou na essência o comportamento do objeto de estudo. Nota-se também, na concepção de Biembengut e Hein, que o modelador precisa dominar de antemão um conjunto de ferramentas matemáticas para conseguir sucesso na atividade de modelagem.

Procurar entender, nas mais variadas concepções, o que é modelagem matemática, bem como o que é um modelo, constitui parte essencial de uma pesquisa cuja intenção é aplicar, de alguma forma, a modelagem matemática, mas o conceito sobre "modelo matemático" também merece atenção nesse processo que, no entendimento de Biembengut e Hein (2007, p. 12), é "um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real". Assim, um modelo matemático não necessariamente tem como configuração uma fórmula, divergindo, portanto, do senso comum.

Biembengut e Hein (2007, p. 12) reforçam que "na ciência, a noção de modelo é fundamental. Em especial a Matemática, com sua arquitetura, permite a elaboração de modelos matemáticos, possibilitando uma melhor compreensão, simulação e previsão do fenômeno estudado". Nesse sentido, a modelagem torna-se importante não apenas para resolver problemas da Matemática pela Matemática, mas é também útil para outras áreas do conhecimento. Os pesquisadores ressaltam que:

> A modelagem matemática é, assim, uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma solução particular, mas que também sirvam, posteriormente, como suporte para outras aplicações e teorias. Genericamente, pode-se dizer que matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir (Biembengut e Hein, 2007, p. 13).

Dessa forma, a modelagem matemática apresenta grandes possibilidades para resolver problemas de vários aspectos, minimizando, de certo modo, a distância entre fatos, e, na oportunidade, utilizá-la no sentido de consolidar a escola como um centro de transformação de práticas, preparando o aluno para ser agente dessa transformação, é vital.

Biembengut, com ampla experiência em pesquisas desde 1986, compreende que a modelagem matemática na sala de aula pode proporcionar a criação de um modelo de caráter inédito (único) ou mesmo a recriação de um modelo já existente, dependendo dos propósitos e finalidades do professor. Seus esforços aguçam que as atividades sobre modelagem, no contexto pedagógico, são facilmente adaptadas aos mais variados níveis de escolaridade, do fundamental ao superior, o que pode ser certificado em seus livros sobre modelagem, bem como em artigos, os quais também trazem uma série de possibilidades para o profissional interessado em somar à sua prática educativa a modelagem matemática.

Biembengut e Hein (2007) compreendem a modelagem matemática em sala de aula como tendo similaridade à matemática aplicada, mas que os objetivos para cada uma dessas situações são diferentes, os quais, necessariamente, precisam ser entendidos, no sentido de evitar possíveis divergências no que concerne ao contexto pedagógico. Os pesquisadores pontificam que fazem uso da modelagem quando há uma situação-problema e os modelos já existentes não são suficientes para solucioná-la. Para os autores, o propósito de caráter essencial da modelagem na matemática aplicada é extrair o que há de mais importante da situação-problema e então criar um modelo matemático em sua forma simplificada, a fim de resolver uma situação, aperfeiçoando uma teoria, uma técnica, uma tecnologia, etc. Porém, no processo de educação realizado em um sistema escolar de ensino (educação escolar), o objetivo é promover conhecimentos acadêmicos que possam valer as pessoas viverem, sobreviverem e atuarem em comunidade (Biembengut e Hein, 2007).

Os pesquisadores evidenciam que com relação à educação escolar formal, existe um programa curricular que precisa ser seguido de acordo com a fase escolar, o curso e a intenção da instituição, e quando um profissional se dispõe a fazer uso da modelagem matemática na educação precisa ser claro em seus propósitos, visto que atualmente há várias concepções de modelagem matemática na educação, bem como intenções.

Biembengut e Hein (2007) também defendem a inserção da modelagem matemática no currículo de Matemática e compreendem que a ação de fazer modelagem nas aulas implica ensinar o educando a pesquisar, despertando seu senso crítico, além de desenvolver os conteúdos programáticos. Nesse sentido, os autores incentivam que a modelagem seja adaptada para a sala de aula como estratégia de ensino, a fim de proporcionar o discente a explorar com produtividade o que está posto como conteúdo programático, até mesmo não programático, acrescentado que esse procedimento também pode despertar o interesse do educando por tópicos matemáticos ainda não estudados, quanto para outras áreas do conhecimento, indo além do que tradicionalmente é feito, conforme discorrem:

> Dessa forma, a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo que aprende a arte de modelar, matematicamente. Isso porque é dada ao aluno a oportunidade de estudar situações-problema por meio de pesquisa, desenvolvendo seu interesse e aguçando seu senso crítico (Biembengut e Hein, 2007, p. 18).

Em consonância com o que defendem Biembengut e Hein, ressalta-se que resolver situações-problema possibilita colocar o sujeito para questionar a realidade na qual está inserido e constitui, atualmente, um dos maiores movimentos na prática educativa, bem como um dos objetivos que emergem da proposta de modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem. Para os pesquisadores, fazer com que os alunos aprendam a desenvolver pesquisa enquanto aprendem conteúdos, significa, também, ensiná-los a julgar, a avaliar e a tomar suas próprias decisões.

A modelagem matemática ganha espaço em direção às novas tendências e aponta para a remoção de fronteiras entre áreas do conhecimento, mas para implementá-la no ensino é preciso permitir que se manifeste o desejo por mudanças e ter determinação, visto que esta prática exige uma nova postura do profissional, sobretudo no que diz respeito às pesquisas e ao embasamento na literatura a que faz referência à modelagem, que está em consonância com a afirmação:

> A condição necessária para o professor implementar modelagem no ensino - modelação - é ter audácia, grande desejo de modificar sua prática e disposição de conhecer e aprender, uma vez que essa proposta abre caminho para descobertas significativas. Um embasamento na literatura disponível sobre modelagem matemática, alguns modelos clássicos e sobre pesquisa e/ou experiências no ensino são essenciais (Biembengut e Hein, 2007, p. 29).

Dessa forma, vale ressaltar ainda que a prática com modelagem implica em instituir uma oportunidade na qual o professor, também responsável pelos encaminhamentos, que não são tão evidentes, não apenas ensina, mas também se torna um dos protagonistas da aprendizagem.

Biembengut e Hein (2007, p.13), descrevem, em três etapas, os passos a serem seguidos no processo de modelagem matemática na sala de aula, subdivididas em duas subetapas cada, a saber:

1. **Interação**
    - reconhecimento da situação-problema;
    - familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico).
2. **Matematização**
    - formulação do problema (hipótese);

- resolução do problema em termos do modelo.

3. **Modelo matemático**
   - interpretação da solução;
   - validação do modelo (avaliação).

Essas etapas podem ser assim detalhadas:

Na etapa da interação coletam-se os dados e faz-se a identificação da atividade a ser desenvolvida e a fundamenta. Uma vez esboçada a situação que se pretende estudar, deve ser feito um estudo referente ao assunto, seja por meio de artifícios diretos ou indiretos, na intenção de obter o máximo possível de informações sobre a situação-problema, no sentido de facilitar o andamento da atividade na próxima etapa.

A etapa da matematização está diretamente relacionada à organização dos dados e criação do modelo. Segundo Biembengut e Hein (2007), esta é a etapa de maior complexidade da modelagem, na qual deve ocorrer a tradução da situação-problema para a linguagem matemática. Logo, nessa fase da atividade de modelação, a criatividade e a capacidade de argumentação são essenciais, visto que o uso da linguagem ou escrita matemática deve ser sistematizado de forma concisa.

Na formulação do problema, observam-se os procedimentos a seguir, segundo Biembengut e Hein (2007, p.14):

a) classificar as informações (relevantes e não relevantes), identificando fatos envolvidos;

b) decidir quais os fatores a serem observados, levantando hipóteses;

c) selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas;

d) selecionar símbolos apropriados para essas variáveis; e

e) descrever essas relações em termos matemáticos.

Para Biembengut e Hein (2007), o objetivo principal neste momento do processo de modelação consiste em chegar a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráfico, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução. Formulada a situação-problema, passa-se à resolução do problema em termos do modelo, fazendo uso do conjunto de ferramentas de que dispõe.

Tendo criado o modelo, volta-se à pergunta inicial para verificar sua validade na solução da situação-problema. Esse processo de validação tem como finalidade garantir se o modelo poderá ser aplicado ou não. Caso, em segunda hipótese, o modelo não responda de forma condicente à pergunta geradora, deve-se retomar os dados da matematização para melhorar ou reelaborar o modelo. Isso significa, segundo (Biembengut e Hein, 2007, p. 15), que se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa - matematização - mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc. Os pesquisadores orientam que é importante, ao concluir a atividade, elaborar um relatório fazendo o registro de todos os tópicos considerados fundamentais em seu desenvolvimento, no intuito de proporcionar o uso do modelo de forma adequada.

Os autores compreendem que é possível desenvolver atividades com modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem, e reforçam que essa prática pode ocorrer em qualquer nível de escolaridade.

Biembengut e Hein (2007), no livro intitulado modelagem matemática no Ensino, apresentam sete propostas norteadoras para o ensino de Matemática que servem como modelos para desenvolver atividades de modelação em sala de aula, a saber: embalagens, construção de casas, a arte de construir e analisar ornamentos, razão áurea, abelhas, cubagem de madeira e criação de perus. Essas propostas são importantes para o processo de construção do conhecimento, podendo ser executadas em vários níveis de escolaridade.

2.3 Modelagem Matemática Segundo Burak

A busca por mudanças no contexto pedagógico tornou-se comum em todos os lugares, em razão das novas demandas e exigências no contexto social, cultural, dentre outros, implicando na urgência de uma nova prática docente em sala de aula. Na ação e na necessidade de redirecionar o olhar para a Matemática e de remodelá-la a partir de novas perspectivas, está Dionísio Burak, que há muitos anos vem contribuindo por um modelo de educação no qual os alunos possam vislumbrar a conexão dos conteúdos matemáticos com situações cotidianas.

Para Burak (1992, p. 62), a "modelagem matemática constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões". A forma como o autor concebe a modelagem matemática evidencia a importância de se trabalhar a Matemática a partir de elementos que fazem parte da vida do sujeito, ajudando-o em sua formação em caráter abrangente.

A nível de mestrado e de doutorado, Burak desenvolveu suas pesquisas com enfoque voltado para a modelagem matemática, dirigida para a formação continuada de professores de Matemática da educação básica, enfatizando a importância de, nas atividades sobre modelagem, os próprios alunos contemplarem o tema gerador a ser estudado. Em relação à modelagem matemática como prática pedagógica, o autor afirma que:

> A modelagem matemática como uma alternativa de ensino da matemática procura dar ao aluno mais liberdade para raciocinar, conjecturar, estimar e dar vazão ao pensamento criativo estimulado pela curiosidade e motivação. O ensino através da modelagem procura propiciar o emergir de situações-problema as mais variadas possíveis, sempre dentro de um contexto fazendo com que a matemática estudada tenha mais significado para o aluno (Burak, 1987, p.20-21).

As colocações do pesquisador vão ao encontro de uma prática educativa que contempla uma formação pautada na liberdade e na construção reflexiva do conhecimento matemático.

Burak, em seus trabalhos, prioriza, com certa particularidade, a modelagem matemática como metodologia de ensino e aprendizagem para a educação básica, alinhando alguns desafios que precisam ser superados, os quais, em síntese, são:

a) descobrir como trabalhar as atividades de modelagem matemática de modo que ao longo de seu desenvolvimento, o aluno possa construir seu conhecimento matemático tendo como base temas de seu interesse;

b) superar a visão linear dos conteúdos matemáticos prefixados pelos currículos escolares;

c) proporcionar formas de encaminhamentos que favoreçam a formação de um cidadão crítico.

Observa-se que, sendo superados esses desafios, o aluno participante desse processo de formação diferenciada, se torna mais ativo e coautor de sua aprendizagem.

Burak (1987) salienta que um dos méritos de se aplicar a modelagem matemática em sala de aula é a oportunidade que essa prática propicia de um mesmo conteúdo poder ser estudado e explorado nas mais variadas situações, possibilitando ao aluno a fixação das ideias essenciais sobre o assunto e aguçando significativamente sua percepção e compreensão da importância da Matemática em seu cotidiano. Conforme Burak (1992), as atividades de modelagem são definidas de acordo com as necessidades, conforme a situação do momento. O autor reforça ainda que a forma de trabalho com a modelagem matemática não pode constituir em um processo rígido, e os conteúdos a serem explorados devem ser observados pelo professor, na intenção de saber se estão de acordo com o nível de escolaridade dos alunos participantes da atividade.

O autor relata que quando desenvolvia atividades de modelagem como alternativa para o ensino e aprendizagem de Matemática em cursos de formação continuada para professores inexperientes, a maioria se sentia inseguro, pensando ser possível trabalhar apenas conteúdos mais simples. Pode-se dizer que a insegurança do professor era uma consequência de trabalho com conteúdos em sua forma linear, o que não ocorre na modelagem matemática. O autor acrescenta que em suas experiências com modelagem em turmas divididas em grupos, um mesmo tema era desenvolvido seguindo as mais variadas direções, isso em razão do tipo de abordagem que cada grupo enfatizava.

No que concerne à aplicação da modelagem matemática como proposta para o ensino e aprendizagem, Burak e Klüber (2007), apresentam cinco justificativas, as quais, resumidamente, são:

a) A construção e o desenvolvimento de conceitos e dos conteúdos matemáticos, que acontecem de forma dinâmica, estabelecendo a relação de cooperação entre professor e aluno;

b) A contextualização das situações, que é entendida como a relação entre os conteúdos e temas nos diversos contextos, sejam eles no âmbito social, econômico ou cultural;

c) A integração com outras áreas do conhecimento, que se caracteriza como uma ação interdisciplinar, uma vez que permite a interação da Matemática com outros campos dos saberes;

d) A socialização favorecida pelo trabalho em grupo, que é compreendida como um processo de ação compartilhada entre alunos, professor e sociedade;

e) A ruptura com o currículo linear, que é fundamental, pois constitui uma das características mais importantes no processo de modelagem.

Segundo Burak (2004), as atividades de modelagem, além de outros, propiciam não somente o ensino, mas também a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos e de livre escolha dos alunos, o professor precisa investigar para compreender e atuar na realidade que norteia o objeto de estudo, às vezes tendo que trocar diálogo com outros profissionais.

Quanto ao "modelo matemático", Burak (1992) o concebe como uma representação em linguagem matemática, geralmente sob a forma de uma equação, inequação, sistema de equações, a planta baixa de uma casa ou um mapa, uma tabela. Porém, na modelagem matemática a ideia de modelo fica ampliada, constituindo-se como qualquer representação que permite uma tomada de decisão. O autor salienta que ao desenvolver os conteúdos matemáticos partilhando sua importância com conceitos de outros áreas do conhecimento, no processo de construção de um modelo, implica a possibilidade de construção de novos conceitos, oriundos de uma ação interdisciplinar.

A educação básica é a principal referência nas pesquisas desenvolvidas por Burak, na qual, segundo o autor, a construção de modelos não se faz necessária, nem é o fim da modelagem, mas dependendo do caso pode obtê-los. Compreende, desta forma, que nesta etapa da educação, a maior importância na atividade de modelagem está focada no processo de construção do conhecimento matemático, ou seja, no ensino e na aprendizagem, e o modelo matemático, nesse caso, não constitui a parte mais importante da ação.

Em diferentes artigos Burak descreve o processo de modelagem em sala de aula em cinco etapas diretrizes, conduzidas pelo interesse do aluno ou do grupo e pelas necessidades do nível de ensino no qual a atividade será desenvolvida. Essas etapas são:

a) escolha do tema;

b) pesquisa exploratória;

c) levantamento dos problemas;

d) resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema;

e) análise crítica da(s) solução(es).

Detalhando as etapas:

Escolha do tema:

A escolha do tema, de acordo com a concepção de Burak não precisa ter ligação direta com a Matemática ou com conteúdos matemáticos, e ocorre no momento em que são apresentados aos alunos alguns temas que possam despertar-lhes interesse ou os próprios alunos o sugerem, desde que seja algo que o grupo queira pesquisar. Nesse caso, é importante que o professor atue com postura de mediador, a fim de promover o melhor encaminhamento no sentido de que a escolha dos alunos seja apreciada. É importante ressaltar que a metodologia de ensino e aprendizagem adotada por Burak se fundamenta em uma compreensão de ciências, sem excluir a Matemática. É por esse viés que o pesquisador combina a reflexão de aspectos que dizem respeito à Matemática, à modelagem e ao âmbito pedagógico. Em síntese, a metodologia defendida por Burak não é fácil de ser executada caso exista um currículo linear preestabelecido, o qual necessariamente precisa ser seguido. De acordo com Burak (2007), a construção do conhecimento referente a qualquer assunto torna-se mais eficiente quando parte das informações que cada aluno ou cada grupo já possui sobre o tema a ser desenvolvido.

Pesquisa exploratória:

Tendo definido o tema a ser explorado, os alunos são estimulados a buscar auxílios teóricos diversificados, que contenham, preferencialmente, informações e noções prévias a respeito da atividade em curso. A pesquisa pode ser desenvolvida em caráter bibliográfico ou ser apreciada com um trabalho de campo, que pode ajudar muito nos desdobramentos do objeto de estudo, favorecendo o processo investigativo e o conhecimento de aspectos diversos da ação proposta, conforme expressa o pesquisador:

> A modelagem enseja, ainda de forma natural e indissociável, o ensino e a pesquisa, pois ao trabalhar com temas diversos, de livre escolha do grupo ou dos grupos, favorece a ação investigativa como forma de conhecer, compreender e atuar naquela realidade. Não se pode intervir, de forma adequada, numa realidade que não se conhece. Assim, ao trabalhar um tema, procura-se conhecer as várias dimensões ou aspectos envolvidos que compõem essa realidade (Burak, 2004, p.5).

Levantamento dos problemas:

Depois de realizada a pesquisa, e de posse dos recursos materiais, os alunos são incentivados a conjecturar sobre tudo que, de alguma forma, possui relação com a matemática, elaborando problemas desde os mais elementares aos mais complexos, permitindo-lhes vislumbrar as possibilidades tanto de aplicar quanto de aprender conteúdos matemáticos. Dessa forma, os problemas levantados pelos alunos determinam os conteúdos a serem trabalhados, e isso, muitas vezes, é motivo de preocupação para alguns professores, que recebem currículos com conteúdos ordenados, em consonância com as séries, desafio a ser superado.

Resolução dos problemas e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema:

Nesse estágio de desenvolvimento da atividade, procura-se, com o auxílio do conteúdo matemático, dar resposta aos problemas que foram enumerados. Segundo Burak, nessa etapa é oportunizada a construção dos modelos matemáticos, como uma representação, podendo ser fórmulas, tabelas ou mesmo equações não inéditas (equações já conhecidas). Ressalta-se ainda que os casos de modelos de funções também podem ocorrer, dependendo da situação-problema que os alunos estiverem investigando.

Análise crítica das soluções:

Esta etapa é marcada pela criticidade, a qual contribui para a formação de sujeitos criativos e participativos, conforme infere:

> A análise crítica das soluções é a etapa marcada pela criticidade, não apenas em relação à matemática, mas em outros aspectos, como a viabilidade e a adequabilidade das soluções apresentadas, que muitas vezes são lógica e matematicamente coerentes, porém inviáveis para a situação em estudo. É uma etapa que favorece a reflexão acerca dos resultados obtidos no processo e como estes podem ensejar a melhoria das decisões e ações (Burak, 2007, p. 4).

É importante acrescentar que esta etapa do trabalho potencializa a criatividade do aluno, pois a liberdade para questionar as soluções é concebida como uma das prioridades no processo de desenvolvimento da atividade.

Para Burak, um trabalho com modelagem matemática, realizado de acordo com essas cinco etapas, favorece a interação com o meio onde ocorrem as situações-problema, que é o ponto de partida do cotidiano do aluno, e contribui diretamente para o desenvolvimento intelectual, formando sujeito mais crítico e capaz de questionar, bem como de procurar soluções para os problemas cotidianos.

2.4 Modelagem Matemática Segundo Barbosa

Os argumentos sobre a importância da Matemática como ferramenta para solucionar problemas práticos constituem parte dos discursos que circulam no contexto pedagógico, e reforçados continuamente por muitos pesquisadores, por exemplo por Jonei Cerqueira Barbosa.

Como referência nacional e internacional, Barbosa tem contribuído significativamente nas tendências que dizem respeito à modelagem matemática e a concebe, no contexto educacional, "como um ambiente de aprendizagem, no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade" (Barbosa, 2001, p. 6). Esse procedimento, que ocorre a partir de um convite e que dá lugar a uma prática pedagógica diferenciada, possibilita o encaminhamento e o desenvolvimento dos conceitos e ideias matemáticas em caráter mais aberto e natural, visto que o foco norteia uma situação do dia a dia. Quanto ao modelo matemático, o autor tem como concepção ser qualquer representação matemática da situação em estudo.

Barbosa (2004) salienta que a atividade de modelagem pode cooperar no sentido de desafiar até mesmo alguns conhecimentos dados como prontos e incontestáveis, bem como colocar lentes críticas sobre as aplicações matemáticas, além de desenvolver nas pessoas o senso crítico, o que lhes permite uma participação mais ativa no meio social, conforme reforça:

> Com essa perspectiva, creio que modelagem pode potencializar a intervenção das pessoas nos debates e nas tomadas de decisões sociais que envolvem aplicações da Matemática, o que me parece ser uma contribuição para alargar as possibilidades de construção e consolidação de sociedades democráticas (Barbosa, 2004, p. 2).

Pelo que argumenta o pesquisador, pode-se acrescentar que a ação de modelar ilumina a prática pedagógica, favorecendo o desenvolvimento intelectual do aluno, inclusive sua autonomia.

Em muitas de suas publicações, Barbosa afirma que a modelagem matemática na Educação Matemática veio da Matemática Aplicada, mas que há diferenças claras entre uma modelagem e outra. Para Barbosa (2011), "a principal das diferenças refere-se ao propósito, ou seja, à intenção". O autor afirma que o modelador profissional possui objetivo mais usual, que é o de solucionar um problema, enquanto os professores e os alunos estão envolvidos em ambiente de estudo com propósitos pedagógicos, ou seja, com finalidades voltadas para a aprendizagem, que possui aspectos específicos. O autor entende que o processo de modelagem para efeito de ensino e aprendizagem ocorre em ritmos diferentes e que a maior importância está no desenvolvimento da atividade, que evolui em caráter investigativo, e não no modelo matemático final. Barbosa (2011) acrescenta que o acompanhamento e o controle das ações no processo de modelagem matemática na sala de aula ocorrem sem tratar com rigor a linguagem matemática, diferentemente do que acontece quando a atividade é exigida de um modelador profissional.

É possível observar, sem muito esforço, que há diferentes formas para se conceber a modelagem matemática, mas para Barbosa (2011), mais importante que previamente entendê-la é o educador compreender o que ocorre quando a implementa na sala de aula. O autor também é defensor da inclusão da modelagem matemática na proposta curricular referente à Matemática voltada para os níveis fundamental e médio, e entre os objetivos que justificam a razão para esta finalidade, o principal deles é oportunizar aos alunos a reflexão da natureza e da função dos modelos matemáticos na sociedade. Barbosa sugere três casos a partir dos quais o professor pode implementar a modelagem matemática em sua prática na sala de aula, que estão simplificados a seguir:

Caso 1: o professor leva para a sala de aula uma situação-problema e os alunos, juntamente com o professor, buscam caminhos para solucioná-la. Nesse caso, não é preciso buscar recursos fora da sala de aula, pois todo o trabalho se dá a partir da situação e do problema oferecidos pelo professor, cuja resolução é partilhada com os alunos.

Caso 2: o professor leva para a sala de aula uma situação-problema e os alunos coletam as informações qualitativas e quantitativas, necessárias para a sua resolução, e, juntos com o professor, simplificam e resolvem o problema.

Caso 3: Os alunos, juntos com o professor, participam de todas as etapas do processo de modelagem, desde a escolha da situação-problema até a sua resolução.

Em todos os casos, o professor atua como copartícipe, promovendo os encaminhamentos e dialogando com os discentes acerca de todo o processo de desenvolvimento da atividade, com os alunos sendo mais presentes apenas no terceiro caso.

Na tabela a seguir, tem-se uma configuração de como se dá a participação do professor e do aluno em cada caso, de acordo com o que sugere Barbosa.

Segundo o autor, esses casos não são estanques mas, sim, possibilidades. Nesse sentido, o pesquisador sugere uma prática não engessada, que propicia refletir e alimentar a modelagem matemática em sala de aula, motivando professor e alunos a se envolverem nesse processo, podendo, de diversas formas, implementar a modelagem no currículo. De fato, para quem é inexperiente com essa nova tendência no campo da Matemática, é importante observar suas limitações, reelaborando sua prática, à medida que for se

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Elaboração da situação-problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Dados qualitativos e quantitativos	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Resolução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Tabela 2.1: Interação professor e aluno em atividade de modelagem. (Fonte: Barbosa, 2001, p. 40).

inserindo nas ações sobre modelagem. É importante ressaltar também que os casos listados por Barbosa, como propostas para a modelagem em sala de aula, apontam alternativas para o desenvolvimento de atividades, a partir dos mais diversos contextos que norteiam a prática docente, conforme discorre:

> Os três casos ilustram a flexibilidade da modelagem aos diversos contextos escolares e para os vários momentos do currículo. Em certos períodos, a ênfase pode recair em projetos pequenos de investigação, como no caso 1; em outros, pode estar em projetos mais longos, como no caso 3. Não creio que as atividades de modelagem devam focar apenas num tipo de organização curricular, mas vários, de modo a se nutrirem reciprocamente (Barbosa, 2001, p. 40).

Nota-se, nas sugestões do autor, a busca pela superação das dificuldades, não apenas em relação àquelas que dizem respeito à Matemática em si, mas como um todo, privilegiando, com certa particularidade, a formação do aluno enquanto sujeito participativo, crítico e formador de opinião.

Nota-se nos discursos de Bassanezi, de Biembengut e Hein, de Burak e de Barbosa, a existência de algumas diferenças e também de semelhanças em relação às suas concepções sobre modelagem matemática.

Um consenso nas concepções dos pesquisadores é que a modelagem matemática contribui de forma positiva nas atividades de sala de aula, potencializando significativamente a função prática da Matemática para solucionar problemas emergentes de situações reais. As diferenças nas visões dos autores ficam basicamente centradas na forma como concebem modelagem matemática e modelo matemático, e no processo de condução de uma atividade de modelagem a partir de situações-problema.

Capítulo 3

Modelagem Matemática: Desafio e Contribuição no Ensino da Matemática

Conforme relatam alguns autores, o uso da modelagem matemática como recurso para o ensino da Matemática, tanto em sala de aula quanto em ambientes extraclasse, tem, de certa forma, revelado desafios, às vezes mais para alguns, mas também apontado grandes contribuições aos praticantes dessa nova tendência. No contexto pedagógico, os desafios do professor são basicamente decorrentes de um programa linear de conteúdos preestabelecido pela instituição de ensino e de ter que romper com alguns de seus costumes em sua prática de trabalho tradicional, mas com as atividades de modelagem pode ganhar novas aptidões profissionais, principalmente no campo da Matemática. Por ou lado, com o rompimento do método tradicional de ensino, os alunos são desafiados porque são levados a enfrentar abordagens diversificadas e distintas das habituais, mas também se beneficiam, pois passam a aprender a partir de um processo dinâmico e investigativo, por meio de conteúdos matemáticos vinculados a situações práticas. Diante disso, neste capítulo são discutidos, em dois tópicos, os desafios e as contribuições da modelagem no ensino da Matemática, de acordo com os apontamentos de alguns pesquisadores.

3.1 Modelagem Matemática como Desafio no Ensino da Matemática

A modelagem matemática consiste em uma alternativa importante para se ensinar Matemática em ambiente pedagógico, pois propicia inovação da prática docente, possibilitando, sobretudo, o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos articulados aos processos de investigação, de problematização e de transformação de fenômenos ou situações da realidade em modelos matemáticos, por intermédio da linguagem natural traduzida para a linguagem matemática. Essa nova tendência na área do ensino tem feito emergir expectativas em alguns profissionais da educação que pretendem trabalhar algo diferenciado com seus alunos, a fim não apenas de mostrar que a Matemática não pode ser esquecida enquanto ferramenta importante nas mais diversas aplicações, mas também de fazer com que os estudantes se sintam mais motivados em aprender conceitos matemáticos a partir de situações práticas e que possuem aplicabilidade. Embora tenha tanta beleza a maioria dos discursos sobre a prática da modelagem matemática, nas atividades que envolvem sua realização os envolvidos podem se deparar com muitos desafios, conforme evidenciam alguns pesquisadores.

Blum (1989), em relação à implantação da modelagem matemática, lista alguns pontos críticos em relação ao aluno, ao ensino e ao professor. Por exemplo, na falta de experiência tanto do aluno quanto do professor, pode haver complicações na interpretação e assimilação dos temas abordados, bem como na formulação de questões frente a uma nova situação. O professor caso adira a modelagem, a qual demanda tempo para ser desenvolvida, pode ter dificuldades para trabalhar tanto os programas linearmente estabelecidos nos planos da instituição de ensino quanto os conceitos matemáticos tradicionalmente apresentados, os quais são necessários na sociedade competitiva para o ingresso na universidade. Por fim, para a prática da modelagem, o docente precisa de maior disponibilidade, necessária para a busca de conhecimentos não apenas matemáticos, mas de modo a garantir a transdisciplinaridade, fundamental para abordar o tema, e, pelo que se observa, o professor possui pouco tempo para se dedicar a temas fora da Matemática.

Segundo Bassanezi (2004), apesar de muitos argumentos favoráveis à prática da modelagem matemática, há aqueles que colocam obstáculos, principalmente no que concerne à sua aplicação em cursos regulares. Esses obstáculos, segundo o autor, podem ser de três tipos, como os instrucionais, que, no caso de cursos regulares, há um programa que precisa ser totalmente desenvolvido e a modelagem pode se dar em um processo longo, não sobrando tempo para cumpri-lo. Por outro lado, há professores que têm dúvida se as aplicações e conexões da Matemática com outras áreas do conhecimento fazem parte do ensino de conteúdos matemáticos, alegando que tais práticas tendem a descaracterizar a estética, a beleza e a universalidade da Matemática. Talvez, por questão de comodidade, preferem acreditar que a Matemática é precisa e, portanto, intocável, não sendo possível contextualizá-la com outras áreas, em particular no que concerne a questões políticas e socioculturais. O pesquisador também destaca obstáculos que dizem respeito aos estudantes, os quais diante da utilização da modelagem fogem da rotina do ensino tradicional, com o qual estão acostumados, e precisam se inserir em um novo processo, podendo, com isso, se perderem e se tornarem apáticos nas aulas. Acostumados a presenciar o professor como transmissor de conhecimentos, os estudantes, quando são posicionados no centro do processo de construção do ensino e aprendizagem, e que também passam a ser responsáveis pelos resultados esperados e pela dinâmica da ação, a aula se desenvolve em ritmo mais lento. Outra fator é que não existe turma homogênea e isso pode, dependendo do caso, se caracterizar como um obstáculo para alguns alunos ao tentar relacionar os conhecimentos teóricos com as questões práticas do estudo ou o tema escolhido não ser motivador, provocando desinteresse. Quanto aos professores, Bassanezi elenca alguns obstáculos relacionados ao fato de não se sentirem preparados para desenvolver modelagem em seus cursos, principalmente por não terem conhecimento do processo ou mesmo por medo de se encontrarem em situações embaraçosas nas aplicações matemáticas envolvendo áreas que desconhecem, acrescentado também que alguns professores acreditam que podem perder muito tempo na preparação das aulas para desenvolver atividades de modelagem, ficando impossibilitados de cumprir todo o programa do curso. O autor alega que sua experiência pessoal ou de colegas com a aplicação da modelagem em cursos regulares, por exemplo, em cálculo diferencial e integral ou mesmo na educação básica, apontou que os obstáculos que foram listados podem, de fato, se manifestar.

Segundo Bassanezi (2004), o pouco tempo para cumprir com a lista de conteúdos que compõem as atividades escolares, a inércia dos alunos para desenvolver a modelagem e a falta de experiência dos docentes são desafios que podem ser minimizados por meio de alterações no processo de modelagem, observando atentamente as modificações no sentido de evitar prejuízos.

3.2 Modelagem Matemática como Contribuição no Ensino da Matemática

De acordo com o que revelam alguns pesquisadores, a modelagem matemática no ensino apresenta aspectos que culminam em resultados satisfatórios no exercício profissional docente, tornando crescente a sua utilização em ambientes pedagógicos. É importante ressaltar também que a modelagem, no processo de construção do conhecimento, favorece substancialmente as ações de cooperação e de interação entre alunos e professor, bem como entre escola e sociedade, em consonância com a afirmação:

> Em sala de aula a modelagem matemática pode ser vista como uma atividade essencialmente cooperativa, na qual a cooperação e a interação entre os alunos e entre professor e aluno têm um papel importante na construção do conhecimento. Por outro lado, a relação com a sociedade também pode ser fortemente estimulada, uma vez que o problema investigado pelo aluno tem nela a sua origem (Pinheiro, 2005, p. 71).

Pinheiro enfatiza a modelagem como uma abordagem que vai ao encontro das novas tendências no campo da Matemática, particularmente apontando que o objeto de estudo surge de uma situação real.

Segundo Blum (1989), embora a modelagem ofereça desafios a seus usuários, é fundamental pensar nas contribuições que essa atividade propicia ao conhecimento e que, na verdade, se sobrepõem aos obstáculos. Quanto à implantação da modelagem como recurso pedagógico, esse autor apresenta alguns argumentos favoráveis em relação ao aluno, ao ensino e ao professor. Conforme Blum, o contato do aluno com questões pautadas em sua realidade, por intermédio da modelagem, desperta-lhe interesse e motivação para aprender Matemática, bem como desenvolve suas habilidades para a pesquisa e levantamento de hipóteses de acordo com suas necessidades. Quanto ao ensino, a atividade de modelagem torna-se uma possibilidade para a reorganização do currículo matemático tradicional, pela inserção de estudos temáticos com foco na articulação da Matemática com outras ciências, estimulando uma nova compreensão da realidade. De acordo com o entendimento de Blum, o professor pode evoluir intelectualmente, pois as atividades sobre modelagem permitem uma relação de troca de experiências com os alunos, bem como com o meio social, ressaltando ainda que o docente fica na condição de orientador e de pesquisador nesse processo.

Bassanezi (2004) aponta alguns argumentos que configuram contribuições para o ensino da Matemática por meio da modelagem, a saber: Argumento formativo, Argumento de competência crítica, Argumento de utilidade, Argumento intrínseco, Argumento de aprendizagem, Argumento de alternativa epistemológica. De acordo com o autor, o argumento formativo se caracteriza basicamente por enfatizar as aplicações matemáticas por meio da modelagem matemática, bem como a resolução de problemas como técnica para fortalecer a capacidade e atitudes dos alunos, possibilitando que se desenvolvam como sujeitos capazes de explorar, de criar e de ter habilidades para solucionar problemas, ao passo que o argumento de competência crítica tem como foco preparar os alunos para situações reais da vida, enquanto atuantes no meio social e com capacidade para formar suas próprias opiniões, reconhecendo e compreendendo aplicações que envolvem conceitos matemáticos. O argumento de utilidade dá ênfase ao fato de que o conhecimento matemático pode deixar o aluno preparado para fazer uso da Matemática como ferramenta para solucionar problemas em diferentes situações e áreas do conhecimento, enquanto que o argumento intrínseco considera que a inclusão da modelagem, a resolução de problemas e suas aplicações proporcionam aos alunos grandes possibilidades para o entendimento e interpretação da Matemática nos mais variados aspectos. O argumento de aprendizagem tem por finalidade sustentar que as aplicações por meio da modelagem propiciam ao aluno melhores condições para entender e valorizar a Matemática e a sua linguagem, e também para compreender os conceitos e resultados matemáticos. No que concerne ao argumento de alternativa epistemológica, pode-se dizer, conforme Bassanezi, que a modelagem se adapta às questões referentes ao programa de pesquisa em história e filosofia da matemática (Programa Etnomatemática), com implicações no contexto pedagógico, que, em síntese, tem por finalidade central dar sentido às maneiras de saber e de fazer das mais variadas culturas, bem como identificar de que forma os grupos como as comunidades, as famílias, as tribos, dentre outros, realizam suas atividades no campo da matemática.

A modelagem é uma possibilidade de caráter relevante nas ações inerentes aos processos que norteiam a prática docente e pode ser utilizada como forma de ultrapassar as dificuldades que se manifestam frequentemente no campo da Matemática, particularmente quando se trata da sala de aula, onde o ensino de conceitos matemáticos muitas vezes não é tarefa fácil, pois, dependendo do caso, as concepções que se pretende construir são muito abstratos e se tornam ainda mais sem sentido quando desvinculadas das situações concretas. Uma das contribuições da modelagem no ensino da matemática é revelada na afirmação:

> A modelagem no ensino é apenas uma estratégia de aprendizagem, onde o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado. Com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural (Basssanezi, 2004, p. 38).

Nesse contexto, Bassanezi reforça que a modelagem pode servir como recurso didático para instituir uma aprendizagem de forma significativa, pautada não apenas na figura do professor, mas também no ambiente em que o aluno está inserido. É importante ressaltar que, de acordo com o pesquisador, as discussões que emergem a partir do tema escolhido para desenvolver a modelagem propiciam a preparação do aluno como sujeito participativo na sociedade na qual está inserido.

Conforme Kaiser e Sriraman (2006), as atividades sobre modelagem matemática estimulam princípios pautados em processos de investigação, de experimentação e de questionamentos construtivos a respeito da Matemática enquanto ferramenta para solucionar problemas. Diante de uma situação-problema, investigar e questionar constituem ações fundamentais, pois possibilitam saber se, a partir do objeto focado para estudo, é possível formular ou não modelos matemáticos, de acordo com as finalidades preestabelecidas. A investigação como estratégia para o ensino de conteúdos matemáticos, por meio da modelagem, também pode proporcionar ao aluno um melhor entendimento sobre o papel da Matemática, particularmente dos modelos matemáticos, relativos aos aspectos sociais e culturais.

Conforme Bueno (2011), a prática com modelagem matemática, dentre outros, suscita momentos de reflexão e de aprendizagem, valorizando vários aspectos de caráter educativo, e acrescenta:

> 1) Ao trabalhar modelagem matemática, é importante valorizar suas raízes filosóficas e sua evolução como ciência.
>
> 2) Considerar a realidade, na qual educador e estudantes estão inse-

> ridos, é relevante em atividades de modelagem.
>
> 3) Existem maneiras diferentes de conceber e de fazer modelagem matemática. Contudo, é importante trabalhar modelagem sem considerá-la um receituário "pronto e acabado" (Bueno, 2011, p. 97).

Nota-se que a autora lista pontos positivos e fundamentais que norteiam o processo de desenvolvimento de atividades que envolvem a modelagem matemática, enfatizando a importância dessa prática, sem considerá-la engessada.

Capítulo 4

Modelagem Matemática: Imposto de Renda, Conta de Água e Construção de um Muro

Neste capítulo, colocamos em curso algumas aplicações da modelagem matemática, priorizando uma evolução gradativa de sua abordagem, ocupando lugar, em primeiro momento, algumas questões sobre a tabela progressiva do imposto de renda. Em seguida, consideramos uma conta de água como base para o desenvolvimento desse processo, ficando para o terceiro momento mais um caso de sua aplicação, referente a uma das etapas da construção de um muro.

4.1 Breve histórico sobre o Imposto de Renda

O imposto sobre a renda (IR) ou imposto sobre o rendimento consiste em uma prestação pecuniária obrigatória (tributo) existente em vários países, em que cada contribuinte, seja pessoa física ou pessoa jurídica, é obrigado a pagar uma certa quantia, em porcentagem, de sua renda para o governo, conforme a legislação. O IR é obrigatório a partir de um limite mínimo de rendimentos tributáveis, seja por produção em trabalho, capital investido, ou por ambos, de acordo com a tabela produzida pelo órgão fiscalizador de cada país.

Segundo Cristóvão Barcelos de Nóbrega (2014), no século XV, na Inglaterra, houve algumas tentativas que resultaram em insucesso quando tentaram instituir um imposto sobre a renda dos trabalhadores. Conforme o autor, alguns estudiosos e pesquisadores consideram que em 1404 foi criada uma tributação sobre os rendimentos nesse país, mas os documentos que tratavam desse assunto foram incinerados, pois havia muita resistência a esse tipo de ação do governo. Há historiadores e pesquisadores que defendem que o início do imposto de renda ocorreu na Inglaterra, mas em 1799, como forma para amenizar as dificuldades financeiras do país, devido à guerra contra a França; outros dizem que seu marco zero se deu em Florença, Itália, no século XV; e também há aqueles que consideram o marco inicial do imposto de renda na França, em 1710; ou seja, há divergências quanto ao exato local onde teve origem o IR.

Conforme Nóbrega (2014), o IR se configura como uma das principais fontes de recurso para o governo, e conhecer sua evolução é extremamente importante, principalmente por causa de suas características especiais, desconhecidas por muitas pessoas que são obrigadas a apresentar a declaração e que apenas sabem da existência do imposto sobre a renda, perdendo, de alguma forma, por não terem conhecimento sobre o assunto. Segundo o autor, o IR, como questão política e social, é o tributo que mais pode ajudar a redistribuir renda, podendo cobrar mais de quem ganha mais e cobrar menos daqueles que ganham menos, diminuindo as desigualdades sociais.

Nóbrega (2014) acentua que a ideia sobre a cobrança de IR chegou ao Brasil no início do reinado de D. Pedro II, com a publicação da Lei nº 317, de 21 de outubro de 1843, a qual fixou a despesa e orçou a receita para os exercícios de 1843-1844 e 1844-1845. Em seu art. 23, ficou estabelecido um imposto, com alíquotas que variaram de 2% a 10%, sobre os vencimentos oriundos dos cofres públicos, que vigorou durante dois anos, e que tinha como característica fundamental uma tributação exclusiva na fonte.

Discussões e mudanças sobre o IR no Brasil vêm ganhando espaço desde 1843, e muitas dificuldades são listadas ao longo da história, merecendo destaque a grande extensão territorial que, quando ainda não se tinha a tecnologia como aparato, um dos grandes desafios era sobre que estratégia utilizar para cobrar imposto que abrangesse todo o território nacional, de acordo com suas especificidades.

De acordo com Nóbrega (2014), o ano de 1922 ficou na história financeira do Brasil, pois, com base na Lei nº 4.625, de 31 de dezembro, foi oficialmente instituído o imposto geral sobre a renda no país. A proposta foi discutida, teve vários críticos, mas conseguiu aprovação no Congresso Nacional. A Lei nº 4.625 assegurou em seu art. 31 o imposto geral sobre a renda, devido, anualmente, por toda pessoa física ou jurídica, residente no território do país, com incidência, em cada caso, sobre o conjunto líquido dos rendimentos de qualquer origem. Com essa lei, a cobrança do IR tornou-se mais segura e não pontual e restrita como antes, e em pouco tempo o tributo passou a ser o mais conhecido do país, ocupando a primeira posição em arrecadação desde 1979. É importante ressaltar que o produto da arrecadação do IR não tem uma destinação específica, sendo parte das receitas orçamentária, que são utilizadas para o financiamento de políticas públicas.

Nota-se que a cada ano as regras para o preenchimento e entrega da declaração do imposto de renda evolui, com a finalidade, além de outros, de facilitar a vida dos contribuintes, mas é grande o número de pessoas que pouco conhecem sobre esse assunto e que terminam recorrendo a terceiros para fazerem suas declarações.

Na década de 1990, com o avanço da tecnologia, a receita Federal entrou na era digital. Em 1991, os contribuintes passaram a ter a opção de entregar a declaração em disquete; em 1997, foi possível fazer a entrega via internet; em 2013, as novidades permitiram o trabalhador preencher e enviar sua declaração por intermédio de dispositivos móveis, como os tablets e smartfones, e as inovações não param, porém muitos as desconhecem.

Conforme notícia divulgada em https://goo.gl/7dyjGhwww.globo.com, acessada em 01/07/2017, a declaração de imposto de renda apresenta algumas vantagens, mesmo para quem não tem a obrigação de apresentá-la, a saber:

1) O contribuinte pode apresentar a declaração ao consulado de um país para a emissão de visto de viagem ao exterior, a qual facilita sua aprovação;

2) Quem teve retenção ou pagamento de imposto em algum mês durante o ano, mesmo não se enquadrando em nenhum dos requisitos de obrigatoriedade de entrega da declaração, pode recuperar o valor do imposto pago, o qual é restituído ao declarante, observando os reajustes de acordo com a taxa Selic (Sistema especial de liquidação e custódia, que é a taxa básica de juros da economia no Brasil);

3) A declaração, entregue por quem não é obrigado apresentá-la, faz com que fique demonstrada ao Fisco (administração encarregada de calcular e arrecadar os impostos) a condição de livre da obrigação, visto que não atingiu os limites de rendimentos considerados tributáveis e obrigatórios;

4) A declaração apresentada serve como documento para comprovação dos rendimentos e dos pagamentos realizados ao longo do ano calendário, importante em muitas situações.

Contudo, um estudo sobre a evolução histórica do imposto de renda e de suas implicações, pode ajudar a minimizar problemas que muitas vezes afetam o contribuinte, e é possível promovê-lo desde cedo em ambiente escolar, proporcionando ao educando condições para conhecer as principais ações que podem influenciar, diretamente ou indiretamente, seus direitos e deveres.

4.2 Modelagem Matemática: Imposto de Renda

As mudanças que transitam nos campos político e social são frequentes e geralmente vêm acompanhadas de muitas informações que ocupam lugar na vida das pessoas. Essas transformações, por vezes divulgadas pela mídia, nem sempre são compreendidas, pois a linguagem utilizada para expressá-las às vezes não condiz com as características particulares de alguns de seus receptores. Assim, é importante construir uma visão reflexiva, interpretativa e crítica da realidade, possibilitando o sujeito situar-se como parte do ambiente em que vive, tomando posse de seus direitos e reconhecendo seus deveres. Para isso, é importante potencializar a contextualização no ambiente escolar, fomentando a interação entre as possíveis áreas do conhecimento, que é uma das possibilidades pressupostas pela modelagem matemática.

O processo de modelagem pode ser utilizado para traduzir os valores de uma tabela de imposto de renda a partir de conceitos simples sobre função, e, além de outros, se configura como um caminho possível para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática. A exposição de atividade dessa natureza propicia, por exemplo, compreender sobre salário mensal bruto, descontos oficiais obrigatórios, salário mensal líquido, e imposto de renda retido na fonte (IRRF) e alíquota efetiva.

O salário bruto é a remuneração mensal que um trabalhador recebe sem considerar as deduções, por exemplo aquelas referentes ao INSS (Instituto Nacional do Seguro Social, criado em 1988) e ao imposto de renda.

Por exemplo, para saber quanto ganha, em valor líquido, um trabalhador registrado em carteira, é preciso fazer algumas deduções, de acordo com as fundamentações legais. Optamos por considerar apenas o INSS, o imposto de renda e a dedução por dependente, por serem mais frequentes, ou seja, delineamos a situação-problema para esses casos particulares. Ressaltamos que o valor mensal, por dependente, para a declaração do IR em 2017, ano-calendário (ano base) de 2016, é de R$ 189,59, de acordo com a Lei nº 13.149, de 21 de julho de 2015, art. 3º (i), que também foi encontrado em https://goo.gl/WN7L2J, acesso em 25/07/2017.

Para o desenvolvimento dessa atividade, consideramos as tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente, do Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF) e do INSS, exercício 2017, ano para base de cálculo mensal 2016, embora as tabelas anuais também possam ser utilizadas para finalidades análogas a essa.

	Base de Cálculo (R$)	IR	Parcela a deduzir do IR em reais
Faixa 1	Até $1.903,98$	$0,0\%$	-
Faixa 2	De $1.903,99$ até $2.826,65$	$7,5\%$	$142,80$
Faixa 3	De $2.826,66$ até $3.751,05$	$15,0\%$	$354,80$
Faixa 4	De $3.751,06$ até $4.664,68$	$22,5\%$	$636,13$
Faixa 5	Acima de $4.664,68$	$27,5\%$	$869,36$

Tabela 4.1: Tabela progressiva para base de cálculo - IRPF.
(Fonte:https://goo.gl/DvjRwj. Acesso em 25/07/2017).

Salário de contribuição em reais	Alíquota
Até R$ $1.659,38$	8%
De R$ $1.659,39$ a R$ $2.765,66$	9%
De R$ $2.765,67$ até R$ $5.531,31$	11%

Tabela 4.2: Tabela para empregado, empregado doméstico e trabalhador avulso - INSS.
(Fonte: https://goo.gl/71xqSB. Acesso em 25/07/2017).

A partir das alíquotas, dos valores em reais e das faixas pertencentes a essas tabelas, é possível promover, em sala de aula, discussões sobre porcentagem, regra de três simples, intervalos reais e fazer simulações, conforme o nível de escolaridade dos alunos.

A parcela do salário bruto de um trabalhador, considerada para base de cálculo do IR, é aquela que obtemos após algumas deduções, dependendo da realidade de cada pessoa, conforme veremos. Após obtermos a base de cálculo, devemos observar em que faixa da tabela vigente do IRPF pertence essa base, pois é nessa faixa que encontramos a alíquota e, na sequência, a parcela a deduzir, para encontrarmos o valor a ser retido na fonte, geralmente utilizado para a gestão dos serviços públicos.

Possivelmente, na maioria das situações-problema existe implícito algum modelo matemático e, dependendo do caso, o grau de dificuldade para expô-lo pode ser elementar ou não. Na situação particular, referente à tabela progressiva do IRPF que expomos, o modelo matemático implícito, que fornece o IRRF, pode ser facilmente obtido, e se configura como uma opção para quem pretende desenvolver modelagem em ambiente pedagógico, partindo de algo mais básico, para favorecer a compreensão dos alunos, e evoluir gradativamente para a resolução de problemas mais complexos.

Para explicitarmos o modelo matemático que fornece o imposto de renda retido na fonte, a partir da tabela progressiva (tabela 4.1), vamos utilizar as notações e procedimentos listados a seguir, observando que, para obtermos o IRRF, precisamos aplicar o valor percentual à base de cálculo, subtraindo do resultado a respectiva parcela indicada em cada faixa.

- $x =$ base de cálculo;
- $f(x) =$ imposto de renda retido na fonte, ou seja, f é função da base de cálculo;
- Na primeira faixa da tabela, para valores da base de cálculo de até R$ $1.903,98$, a alíquota é zero e não há parcela a deduzir, consequentemente $f(x) = 0$ (não há IRRF), com $0 \leq x \leq 1903,98$;
- Na segunda faixa, para base de cálculo variando de $1.903,99$ até $2.826,65$ reais, a alíquota é de $7,5\% = 0,075$ e a parcela a deduzir é de R$ $142,80$. Assim, $f(x) = 0,075x - 142,80$, com $1903,98 < x \leq 2826,65$;
- Na terceira faixa, com valor da base de cálculo de $2.826,66$ até $3.751,05$ reais, a alíquota é de $15,0\% = 0,15$ e a dedução é de R$ $354,80$. Portanto, $f(x) = 0,15x - 354,80$, com $2826,65 < x \leq 3751,05$;
- Na quarta faixa, para variação da base de cálculo de $3.751,06$ até $4.664,68$ reais, a alíquota é de $22,5\% = 0,225$ e a parcela a deduzir é de R$ $636,13$. Logo, $f(x) = 0,225x - 636,13$, com $3751,05 < x \leq 4664,68$;
- Na quinta e última faixa da tabela, para a base de cálculo acima de R$ $4.664,68$, a alíquota é de $27,5\% = 0,275$ e a parcela a deduzir é de R$ $869,36$. Por fim, $f(x) = 0,275x - 869,36$, com $x > 4664,68$.

É importante ressaltar que exploramos de forma bastante natural, em todas as etapas de construção de $f(x)$, conceitos de função afim, definida por $f(x) = ax + b$, com

a e b constantes reais, na variável real x, fazendo apenas adequações desse caso particular de função com a situação-problema. As constantes a e b são chamadas, respectivamente, de taxa de variação e coeficiente linear. O gráfico de uma função afim é uma reta cuja inclinação, em relação ao eixo horizontal, pode ser explicada tomando como base a taxa de variação, que, quanto menor, tendendo a zero, mais diminui a inclinação da reta em relação ao eixo horizontal, e, quanto maior a taxa de variação, mais a reta tende a ganhar configuração vertical. Em cada faixa da tabela progressiva do IRPF, conforme estamos trabalhando, a alíquota no modelo matemático é a taxa de variação, e a parcela a deduzir é o coeficiente linear. Em sala de aula, os conceitos sobre função afim podem ser explicados ao longo do desenvolvimento de uma atividade de modelagem como a que estamos desenvolvendo. A tabela de contribuição referente ao INSS pode facilmente ser utilizada para desenvolver modelagem e também é uma opção para explicar conceitos de função afim.

De acordo com o processo de matematização, que foi desenvolvido a partir das faixas da tabela do IRPF, $f(x)$ ficou definida por várias sentenças (intervalos), e pode assim ser escrita:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x \leq 1903,98 \\ 0,075x - 142,80, & \text{se } 1903,98 < x \leq 2826,65 \\ 0,15x - 354,80, & \text{se } 2826,65 < x \leq 3751,05 \\ 0,225x - 636,13, & \text{se } 3751,05 < x \leq 4664,68 \\ 0,275x - 869,36, & \text{se } x > 4664,68. \end{cases}$$

A função $f(x)$ está definida de $[0, +\infty)$ em $[0, +\infty)$, e o esboço de seu gráfico pode ser obtido, em sala de aula, observando que para cada faixa, traduzida para intervalo, o gráfico de $f(x)$ é constituído por segmentos de reta, pois as sentenças que compõem $f(x)$ estão escritas de acordo com a definição de uma função afim. A figura 4.1 é um esboço do gráfico de $f(x)$.

Observe que o intervalo do gráfico de $f(x)$ referente à base de cálculo para a qual a alíquota é 0,0% (taxa de variação nula), e não há parcela a deduzir (coeficiente linear também nulo), não possui inclinação em relação ao eixo horizontal e coincide com esse eixo, e isso significa que não há imposto de renda a ser retido na fonte. Porém, no intervalo de

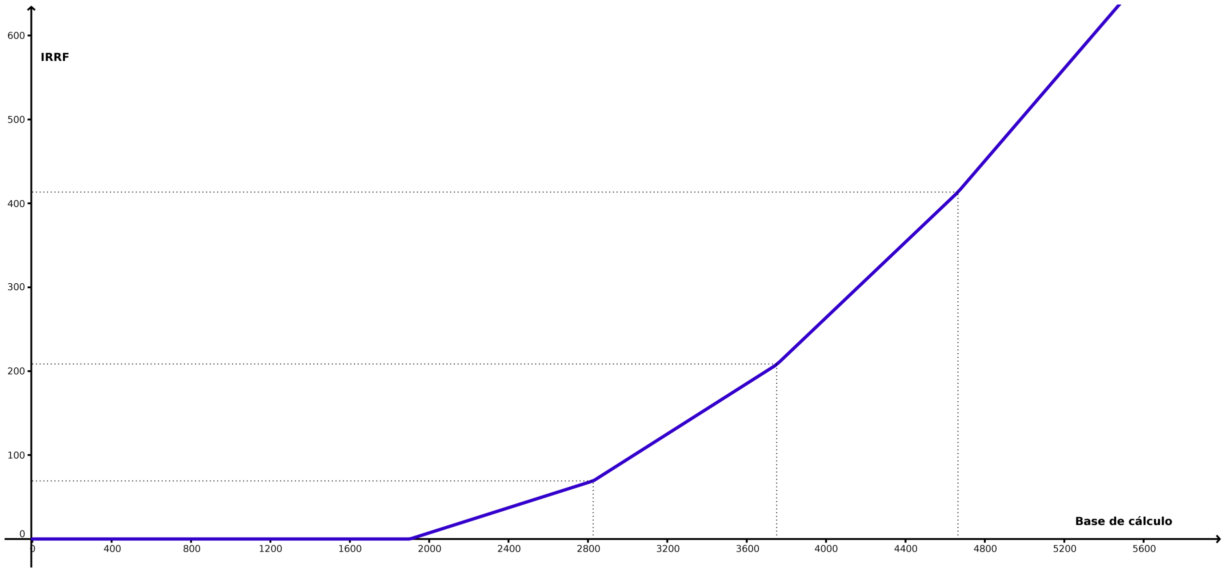


Figura 4.1: Imposto de renda mensal retido na fonte em função da base de cálculo.

maior alíquota, $27,5\%$ (maior taxa de variação), aplicada à base de cálculo, a inclinação do gráfico de $f(x)$ é maior, o que implica em um maior valor do IRRF em relação aos demais casos. Para as situações em que as taxas de variação são positivas, excetuando-se a alíquota nula, $0,0\%$, a função $f(x)$ é crescente, ou seja, o IRRF aumenta à medida que aumenta o valor x da base de cálculo. O gráfico de $f(x)$ aponta que os valores que essa função pode assumir na última faixa da tabela não têm limitação, ou seja, não existe, nesse caso, um maior valor que limita $f(x)$ à direita.

Para efeito de ilustração, se um contribuinte registrado em carteira recebe mensalmente o valor bruto de R\$ $2000,00$, e possui um dependente, primeiro precisamos aplicar a alíquota de incidência para o cálculo da contribuição a ser paga ao INSS, que é de 9%, de acordo com a tabela 4.2. Do valor restante, subtrairmos R\$ $189,59$, que é a dedução mensal, por dependente, para o ano-calendário de 2016, restando, portanto, a base de cálculo, caso não haja mais dedução a fazer. Esses procedimentos podem, respectivamente, ser resumidos assim:

- $9\%.2000 = 180$ (valor a ser pago ao INSS). Então, $2000 - 180 = 1820$
- $1820 - 189,59 = 1830,41$.

Logo, $x =$ R\$ $1830,41$ é a base de cálculo para o IR. Como R\$ $1830,41 <$ R\$ $1903,98$, temos $f(1830,41) = 0$ (não há IRRF), conforme o modelo para $f(x)$. Para encontrarmos o salário líquido desse trabalhador, devemos subtrair do salário bruto a contribuição paga ao INSS, o IRRF, que nesse caso é 0 (zero), mas não o valor por dependente. Assim, $2000 - 180 - 0 = 1820$. Portanto, R\$ $1820,00$ corresponde ao salário líquido.

Para validarmos a função que encontramos no processo de modelagem, vamos considerar algumas aplicações, utilizando $f(x)$ e o simulador disponível na página da receita federal.

1) Um trabalhador de uma empresa afirmou que durante o ano de 2016 recebeu mensalmente o valor bruto de R\$ $2500,00$, e que não possuía dependente. Nessas condições, qual foi o imposto de renda mensal retido na fonte? Para encontrarmos a base de cálculo, primeiro devemos calcular a contribuição paga ao INSS. Conforme a tabela 4.2 referente ao INSS, a alíquota incidente em R\$ 2500 é de 9%. Então, $9\%.2500 = 225$. Assim, $2500 - 225 = 2275$. Logo, R\$ 225,00 corresponde ao valor mensal pago ao INSS, e R\$ 2275,00 é a base de cálculo. De acordo com a função $f(x)$, $1903,98 < x = 2275,00 \leq 2826,65$, portanto, devemos utilizar:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 0,075x - 142,80 \\
f(2275) &= 0,075.2275 - 142,80 \\
f(2275) &= 170,73 - 142,80 \\
f(2275) &= 27,83
\end{aligned}
$$

Desse modo, o valor de imposto retido na fonte foi de R\$ $27,83$.

Para validarmos o modelo, fizemos a simulação na página da receita federal, e seguiu o resultado (figura 4.2).

Cálculo Mensal 2017 | Cálculo Anual EX 2017/AC 2016

Simulação de Alíquota Efetiva

Imposto de Renda da Pessoa Física - 2017

IMPOSTO SOBRE A RENDA MENSAL - Valores em Reais

1. Rendimentos tributáveis	2.500,00
2. Deduções	
2.1 Previdência Oficial	225,00
2.2 Dependente (quantidade) 0	0,00

O valor da dedução é R$ 189,59 mensais, por dependente.

2.3 Pensão alimentícia	0,00
2.4 Outras deduções	0,00

Previdência Privada, Funpresp, FAPI e Parcela isenta de aposentadoria, reserva remunerada, reforma e pensão para declarante com 65 anos ou mais, caso não tenha sido deduzida dos rendimentos tributáveis. Carne-Leão: Livro Caixa.

2.5 Total de Deduções	**225,00**

* Para mais informações sobre deduções verificar IN RFB nº 1500, de 2014.

3. Base de cálculo (1 - 2.5)	**2.275,00**
4. Imposto	**27,83**

Demonstrativo da Apuração do Imposto

	Faixa da Base de Cálculo	Alíquota	Valor do Imposto
1ª Faixa	1.903,98	Isento	0,00
2ª Faixa	371,02	7,5%	27,83
3ª Faixa	0,00	15,0%	0,00
4ª Faixa	0,00	22,5%	0,00
5ª Faixa	0,00	27,5%	0,00
Total	**2.275,00**	---	**27,83**

5. Alíquota efetiva - % **1,11** **Percentual do imposto sobre os rendimentos tributáveis.**

Senhor contribuinte, apesar do seu rendimento estar na faixa de 7,50%, sua alíquota efetiva é de 1,11%

Figura 4.2: Simulação para o salário de 2500 reais e sem dependente. (Fonte: https://goo.gl/DvjRwj. Acesso em 30/07/2017).

O resultado dessa simulação, além de explicitar o IRRF e outros, aponta que a base de cálculo é distribuída de acordo com a evolução das faixas e das respectivas alíquotas. Outra informação interessante nessa simulação é a alíquota efetiva de $1,11\%$. Essa alíquota significa o quanto o imposto pago representa, em termos percentuais, sobre o rendimento tributável, e pode ser calculada por meio de uma regra de três simples, como:

$$2500 \longleftrightarrow 100\%$$
$$27,83 \longleftrightarrow a\%$$

Logo, $a = 1,11\%$.
2) Cada um dos dois funcionários de uma empresa recebeu mensalmente, em 2016, o valor bruto de R$ 3700,00. Porém, um desses trabalhadores tinha 1 dependente e o outro tinha 2 dependentes. Em relação a qual desses funcionários o imposto de renda mensal retido na fonte foi maior?

Para encontrarmos a base de cálculo para o IR, precisamos, primeiro, fazer algumas deduções, conforme os procedimentos:

- A contribuição mensal paga ao INSS foi a mesma em relação aos dois funcionários, pois o valor bruto mensal pago a cada um foi o mesmo, e o cálculo dessa contribuição não depende do número de dependentes. Como R$ 3700,00 está na terceira e última linha da tabela do INSS e a alíquota de incidência, nesse caso, é de 11%, então $11\%.3700 = 407$ reais, contribuição mensal paga ao INSS por cada funcionário. Assim, $3700 - 407 = 3293$ reais, valor restante até esta fase do processo.

- De acordo com a Lei nº 13.149, de 21 de julho de 2015, art. 3º (i), para o ano de 2017 e ano-calendário 2016, a dedução mensal por dependente é de R$ $189,59$. Portanto, em relação ao trabalhador que tinha 1 dependente, devemos fazer a operação $3293-1.(189,59) = 3103,41$ reais. E, de acordo com a situação do outro funcionário, que tinha 2 dependentes, fazemos $3293-2(189,59) = 3293-379,18 = 2913,82$ reais. Logo, as bases de cálculo para o IR mensais, conforme o número de dependentes dos trabalhadores, são $x_1 =$ R$ $3103,41$ e $x_2 =$ R$ $2913,82$.

- De acordo com a função $f(x)$ (modelo matemático), $f(x_1) = 0,15x_1 - 354,80$, se $2826,65 < x_1 = 3103,41 \leq 3751,05$, então $f(3103,41) = 0,15.(3103,41) -$

$354,80 = 110,7115$ reais. Como $x_2 =$ R\$ $2913,82$ pertence ao mesmo intervalo que $x_1 =$ R\$ $3103,41$, então $f(x_2) = 0,15x_2 - 354,80$. Desse modo, obtemos $f(2913,82) = 0,15.(2913,82) - 354,80 = 82,273$ reais.

Portanto, os impostos mensais retidos na fonte foram de R\$ $110,71$, em relação ao funcionário com 1 dependente, e de R\$ $82,28$, em relação ao trabalhador com 2 dependentes.

Ao fazermos as simulações na página da r5eceita federal, considerando, para cada funcionário, o salário bruto mensal, o valor mensal pago ao INSS e o número de dependentes, obtivemos os resultados liustrados nas figuras 4.3 e 4.4, referentes, respectivamente, ao funcionário com 1 dependente e àquele com 2 dependentes.

Cálculo Mensal 2017 | Cálculo Anual EX 2017/AC 2016

Simulação de Alíquota Efetiva

Imposto de Renda da Pessoa Física - 2017

IMPOSTO SOBRE A RENDA MENSAL - Valores em Reais

1. Rendimentos tributáveis 3.700,00

2. Deduções

2.1 Previdência Oficial 407,00

2.2 Dependente (quantidade) 1 189,59

O valor da dedução é R$ 189,59 mensais, por dependente.

2.3 Pensão alimentícia 0,00

2.4 Outras deduções 0,00

Previdência Privada, Funpresp, FAPI e Parcela isenta de aposentadoria, reserva remunerada, reforma e pensão para declarante com 65 anos ou mais, caso não tenha sido deduzida dos rendimentos tributáveis. Carne-Leão: Livro Caixa.

2.5 Total de Deduções **596,59**

* Para mais informações sobre deduções verificar IN RFB nº 1500, de 2014.

3. Base de cálculo (1 - 2.5) **3.103,41**

4. Imposto **110,71**

Demonstrativo da Apuração do Imposto

	Faixa da Base de Cálculo	Alíquota	Valor do Imposto
1ª Faixa	1.903,98	Isento	0,00
2ª Faixa	922,67	7,5%	69,20
3ª Faixa	276,76	15,0%	41,51
4ª Faixa	0,00	22,5%	0,00
5ª Faixa	0,00	27,5%	0,00
Total	**3.103,41**	---	**110,71**

5. Alíquota efetiva - % **2,99** **Percentual do imposto sobre os rendimentos tributáveis.**

Senhor contribuinte, apesar do seu rendimento estar na faixa de 15,00%, sua alíquota efetiva é de 2,99%

Figura 4.3: Simulação para o salário de 3700 reais e um dependente. (Fonte: https://goo.gl/DvjRwj. Acesso em 30/07/2017).

Cálculo Mensal 2017 | Cálculo Anual EX 2017/AC 2016

Simulação de Alíquota Efetiva

Imposto de Renda da Pessoa Física - 2017

IMPOSTO SOBRE A RENDA MENSAL - Valores em Reais

1. Rendimentos tributáveis	3.700,00
2. Deduções	
2.1 Previdência Oficial	407,00
2.2 Dependente (quantidade) 2	379,18
O valor da dedução é R$ 189,59 mensais, por dependente.	
2.3 Pensão alimentícia	0,00
2.4 Outras deduções	0,00
Previdência Privada, Funpresp, FAPI e Parcela isenta de aposentadoria, reserva remunerada, reforma e pensão para declarante com 65 anos ou mais, caso não tenha sido deduzida dos rendimentos tributáveis. Carne-Leão: Livro Caixa.	
2.5 Total de Deduções	**786,18**
* Para mais informações sobre deduções verificar IN RFB nº 1500, de 2014.	
3. Base de cálculo (1 - 2.5)	**2.913,82**
4. Imposto	**82,28**

Demonstrativo da Apuração do Imposto

	Faixa da Base de Cálculo	Alíquota	Valor do Imposto
1ª Faixa	1.903,98	Isento	0,00
2ª Faixa	922,67	7,5%	69,20
3ª Faixa	87,17	15,0%	13,08
4ª Faixa	0,00	22,5%	0,00
5ª Faixa	0,00	27,5%	0,00
Total	**2.913,82**	---	**82,28**

5. Alíquota efetiva - % 2,22 **Percentual do imposto sobre os rendimentos tributáveis.**

Senhor contribuinte, apesar do seu rendimento estar na faixa de 15,00%, sua alíquota efetiva é de 2,22%

Figura 4.4: Simulação para o salário de 3700 reais e dois dependentes. (Fonte: https://goo.gl/DvjRwj. Acesso em 30/07/2017).

Esses resultados apontam que embora os dois trabalhadores ganhassem o mesmo salário bruto, o imposto mensal retido na fonte em relação àquele com 2 dependentes era menor, observamos ainda que o salário líquido mensal desse funcionário era maior. Para isso, subtraímos do salário bruto a parcela paga ao INSS e o valor referente ao IRRF, considerando as duas situações, conforme os cálculos:

Para o funcionário com 1 dependente: $3700 - 407 - 110,71 = 3182,29$ reais (salário líquido mensal); e para o trabalhador com 2 dependentes: $3700 - 407 - 82,28 = 3210,72$ reais (salário líquido mensal).

Nessa primeira etapa de aplicação da modelagem matemática, notamos que o desenvolvimento de uma atividade com esse enfoque dá realce às diferentes formas de valorizar, de conhecer e de interpretar as questões que compõem a realidade. Observamos também que a conexão, nem sempre evidente, entre a Matemática e os eventos práticos, pode ser aclarada, além de outros, por intermédio da pesquisa, da contextualização e da ruptura com o currículo linear, referente ao caso de inserção do processo de modelagem matemática em sala de aula, conforme discorrem Bassanezi (2004), Biembengut e Hein (2007), Burak e Klüber (2007), visto que durante as etapas de resolução de um problema, intermediado pela modelagem, geralmente os tópicos matemáticos não se manifestam na ordem em que são listados nos currículos tradicionais. Esse caso pode ser elucidado em relação ao que ocorreu ao fazermos a primeira aplicação da modelagem pautada no IR, a qual possibilitou contemplar, dentre outros, função afim, intervalos reais e função definida por várias sentenças, assuntos que, de acordo com o currículo tradicional, geralmente são tratados em momentos distintos.

4.3 Modelagem Matemática: Conta de Água

A água é um dos recursos naturais indispensáveis para a vida, sem a qual é impossível a continuidade da existência humana e dos ecossistemas no planeta em que vivemos.

Existiu época em que muitos tinham a ideia de que a água era um recurso natural inesgotável, dado a sua abundância na natureza, mas a atual realidade aponta que cada vez mais torna-se escassa essa fonte de vida inevitável, e quando se fala em sua economia, seja para fins domésticos ou industriais, parece que muitos ainda não acreditam que precisam se disciplinar para evitar gastos desnecessários.

Nessa época de crise hídrica, o desperdício e a pouca disponibilidade de água em nosso planeta vêm ganhando visibilidade e têm despertado a atenção das autoridades que, por vezes, pedem a reflexão da sociedade sobre a importância da água para a vida, bem como sobre a possibilidade de faltá-la futuramente.

A modelagem matemática em sala de aula, com base na conta de água, é importante não apenas para ensinar aos alunos conceitos matemáticos, mas constitui, também, possibilidade para despertar o uso consciente da água, evitando desperdícios e protegendo as fontes onde esse recurso natural ainda pode ser encontrado.

Para implementarmos esta atividade, consideramos a conta de água de um cliente (não identificado aqui) de Cuiabá - MT. Nessa cidade, a CAB (Companhia de Águas do Brasil) é a concessionária dos serviços de água e esgoto. A CAB Cuiabá utiliza como modelo de estrutura tarifária uma tabela progressiva, na qual o cálculo do valor da fatura depende da categoria do imóvel, que pode ser residencial social, residencial, comercial, público ou industrial, e também do volume de água consumido, apurado com o auxílio de hidrômetros, o qual é transformado em valor faturado.

A concessionária orienta que como o valor do metro cúbico de água aumenta a cada faixa, é fundamental que o cliente controle seu consumo, pois o valor da fatura poderá aumentar, inclusive nos casos em que há desperdícios e vazamentos. A figura 4.5, disponibilizada pela CAB Cuiabá, consiste em uma tabela que resume valores importantes, pois ajudam a entender as tarifas pagas pelos consumidores. Embora na tabela apareçam números decimais na coluna de consumos em metros cúbicos (m^3) por mês, nesse caso a concessionária considera apenas valores inteiros (traduzidos por números naturais) para efeito de cobrança. Outras informações relevantes são de que, para todas as categorias, ao se efetuar a leitura no hidrômetro, consumos mensais iguais ou inferiores a $10m^3$ são faturados com base em $10m^3$, que é o consumo mensal mínimo adotado pela concessionária, por mais que essa quantidade não seja consumida em um mês, em consonância com a nota explicativa no rodapé da tabela de estrutura tarifária. Para consumos superiores a $10m^3$, o total consumido é distribuído de acordo com a evolução das faixas na categoria e respectivas taxas, observando que, em qualquer caso, a tarifa de esgoto corresponde a 90% da tarifa de água consumida, que também pode ser conferida na nota explicativa da figura 4.5.

As informação contidas na fatura referente ao consumo de água, juntamente com

Estrutura tarifária				
Categoria	Tipo	Consumo (m^3/mês)	Tarifa	
			Água (R$/$m^3$)	Esgoto
1	Residencial Social	00 a 10	1,55	90%
2	Residencial	00 a 10	3,11	90%
		10,1 a 20	3,81	90%
		20,1 a 30	6,37	90%
		30,1 a 50	7,79	90%
		> 50	10,31	90%
3	Comercial	00 a 10	4,84	90%
		> 10	7,31	90%
4	Industrial	00 a 10	5,68	90%
		> 10	8,43	90%
5	Pública	00 a 10	6,08	90%
		> 10	9,96	90%

Nota explicativa: 1) Tarifa de esgoto = 90 % da tarifa de água
2) Tarifa de água: consumo mínimo de $10m^3$/mês

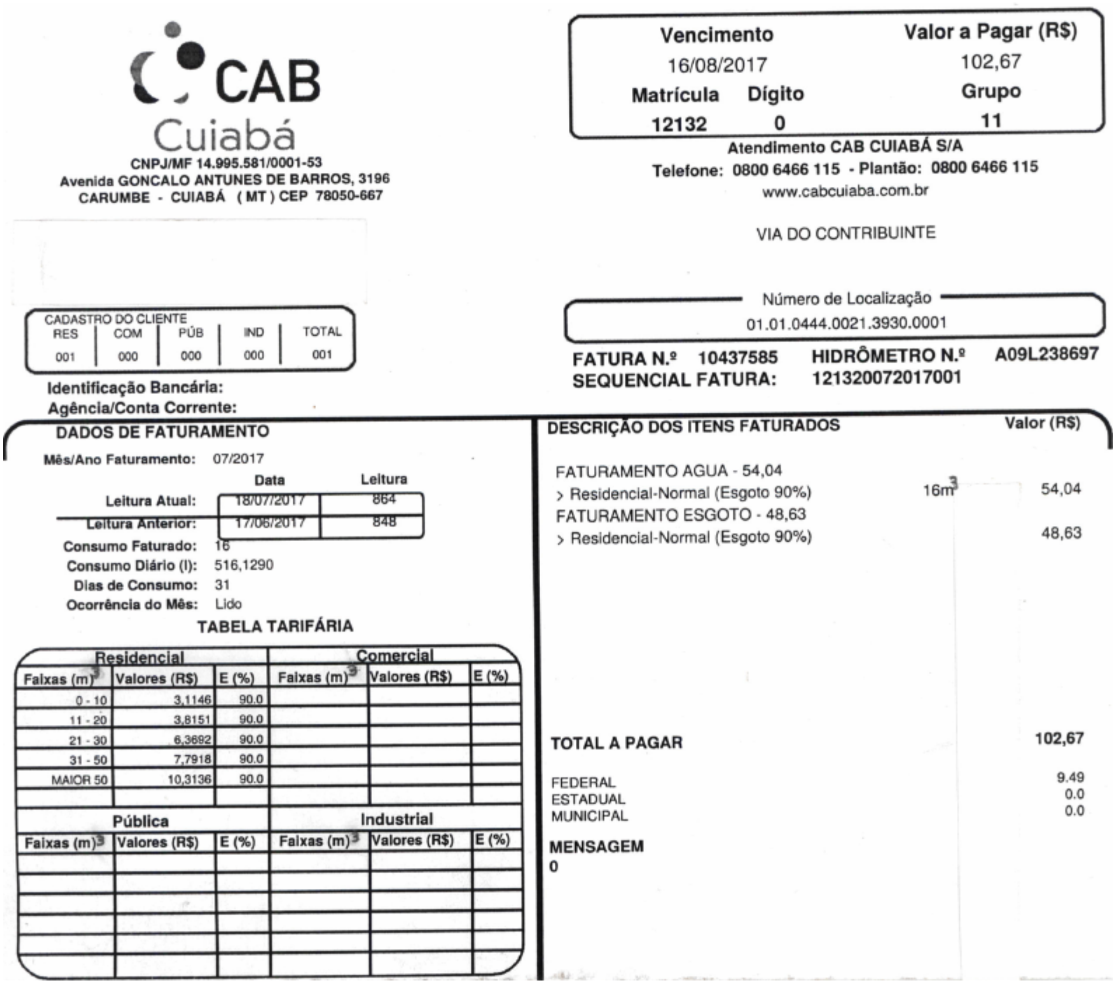
Figura 4.5: Tabela progressiva para o consumo de água para diferentes categorias. (Fonte: https://goo.gl/DTi1KJ. Acesso em 31/07/2017).

aquelas da estrutura tarifária, são fundamentais para o processo de desenvolvimento do problema, intermediado pela modelagem.

Os valores discriminados na conta facilitam substancialmente, além de outros, explicitar o modelo matemático que relaciona o consumo de água mensal, em metros cúbicos, com a tarifa a ser paga pelo consumidor. A figura 4.6 é referente à cópia de uma conta de água, utilizada para implementarmos essa atividade.

A fatura do cliente registra que em um mês foram consumidos $16m^3$ de água, na categoria de imóvel residencial, gerando um total a pagar no valor de R$ 102,67. Com base nessas e outras informações relevantes sobre a fatura, vamos escrever o modelo matemático que relaciona a quantidade mensal, em m^3, de água consumida com o valor total a pagar.

Como uma quantidade qualquer de água consumida, maior que $10m^3$, é distribuída de acordo com a evolução das faixas e respectivas taxas, para gerar a tarifa, o modelo



CAB Cuiabá

CNPJ/MF 14.995.581/0001-53
Avenida GONCALO ANTUNES DE BARROS, 3196
CARUMBE - CUIABÁ (MT) CEP 78050-667

Vencimento	Valor a Pagar (R$)
16/08/2017	102,67

Matrícula	Dígito	Grupo
12132	0	11

Atendimento CAB CUIABÁ S/A
Telefone: 0800 6466 115 - Plantão: 0800 6466 115
www.cabcuiaba.com.br

VIA DO CONTRIBUINTE

CADASTRO DO CLIENTE

RES	COM	PÚB	IND	TOTAL
001	000	000	000	001

Número de Localização
01.01.0444.0021.3930.0001

FATURA N.º 10437585 HIDRÔMETRO N.º A09L238697
SEQUENCIAL FATURA: 121320072017001

Identificação Bancária:
Agência/Conta Corrente:

DADOS DE FATURAMENTO

Mês/Ano Faturamento: 07/2017

	Data	Leitura
Leitura Atual:	18/07/2017	864
Leitura Anterior:	17/06/2017	848

Consumo Faturado: 16
Consumo Diário (l): 516,1290
Dias de Consumo: 31
Ocorrência do Mês: Lido

TABELA TARIFÁRIA

Residencial			Comercial		
Faixas (m^3)	Valores (R$)	E (%)	Faixas (m^3)	Valores (R$)	E (%)
0 - 10	3,1146	90.0			
11 - 20	3,8151	90.0			
21 - 30	6,3692	90.0			
31 - 50	7,7918	90.0			
MAIOR 50	10,3136	90.0			
Pública			**Industrial**		
Faixas (m^3)	Valores (R$)	E (%)	Faixas (m^3)	Valores (R$)	E (%)

DESCRIÇÃO DOS ITENS FATURADOS — Valor (R$)

FATURAMENTO AGUA - 54,04
> Residencial-Normal (Esgoto 90%) $16m^3$ 54,04
FATURAMENTO ESGOTO - 48,63
> Residencial-Normal (Esgoto 90%) 48,63

TOTAL A PAGAR 102,67

FEDERAL 9.49
ESTADUAL 0.0
MUNICIPAL 0.0

MENSAGEM
0

Figura 4.6: Conta de água fornecida pela CAB-Cuiabá.

matemático não será obtido por uma aplicação direta. Para esta finalidade, vamos utilizar as notações:

- Faixas: F_1, F_2, F_3, F_4 e F_5, pois a fatura apresenta cinco faixas na categoria residencial;

- a = quantidade de água faturada mensalmente, em m^3, observando que deve ser distribuída em harmonia com a evolução das faixas na categoria, caso seja superior a $10m^3$;

- $C(a)$ = valor mensal a pagar pelo consumo de água faturado, acrescido de 90% de seu valor, referente ao esgoto.

$F_1 : 0 \leq a \leq 10$. Neste caso, paga-se pela tarifa mínima referente a $10m^3$, com taxa de R\$ $3,1146$ o m^3, conforme a fatura, acrescida de 90% de seu valor relativo ao esgoto, isto é:

$$\begin{aligned}
C(a) &= C(10)\\
C(a) &= 10.3,1146 + \frac{90}{100}.10.3,1146\\
C(a) &= 10.3,1146.\left(1 + \frac{90}{100}\right)\\
C(a) &= 10.3,1146.1.9\\
C(a) &= 59,1774
\end{aligned}$$

Para o cálculo de $C(10)$, explicitamos a origem do fator $1,9$, que será utilizado de forma direta nas próximas aplicações.

F_2 : $11 \leq a \leq 20$. Nesta situação, o total a pagar é aquele referente aos primeiros $10m^3$, isto é, $C(10)$, acrescido da tarifa relativa a $(a-10)m^3$ na segunda faixa, com taxa R\$ $3,8151$ o m^3, bem como de 90% dessa tarifa equivalente ao valor a ser pago pelo esgoto, ou seja:

$$\begin{aligned}
C(a) &= C(10) + (a-10).3,8151.1,9\\
C(a) &= 59,1774 + 7,2487a - 72,4869\\
C(a) &= 7,2487a - 13,3095
\end{aligned}$$

Para prosseguirmos, precisamos determinar $C(20)$, que é o valor a ser pago pelo consumo referente a $20m^3$ de água, a saber:

$$\begin{aligned}
C(20) &= 7,2487.20 - 13,3095\\
C(20) &= 131,6645
\end{aligned}$$

F_3 : $21 \leq a \leq 30$. O que dever ser feito neste caso e nos dois últimos, é análogo ao que fizemos em relação às situações em F_1 e F_2. Portanto, para evitarmos repetições, vamos proceder com esses casos finais de forma sucinta. Desse modo, o cliente deverá pagar pelo consumo a o total:

$$C(a) = C(20) + (a - 20).6,3692.1,9$$
$$C(a) = 131,6645 + 12,1015a - 242,0296$$
$$C(a) = 12,1015a - 110,3651$$

Para o próximo cálculo, faz-se necessário o valor de $C(30)$. Logo:

$$C(30) = 12,1015.30 - 110,3651$$
$$C(30) = 252,6799$$

F_4 : $31 \leq a \leq 50$. Assim, o total a pagar pelo consumo da quantidade a é:

$$C(a) = C(30) + (a - 30).7,7918.1,9$$
$$C(a) = 252,6799 + 14,8044a - 444,1326$$
$$C(a) = 14,8044a - 191,4527$$

Agora, calculando $C(50)$, temos:

$$C(50) = 548,7673$$

F_5 : $a > 50$. Finalmente, pelo consumo a, neste caso, paga-se:

$$C(a) = C(50) + (a - 50).10,3136.1,9$$
$$C(a) = 548,7673 + 19,5958a - 979,7920$$
$$C(a) = 19,5958a - 431,0247$$

Em síntese, os cálculos anteriores nos permitem escrever o modelo matemático $C(a)$, dado por:

$$C(a) = \begin{cases} 59,1774, & \text{se } 0 \leq a \leq 10 \\ 7,2487a - 13,3095, & \text{se } 11 \leq a \leq 20 \\ 12,1015a - 110,3651, & \text{se } 21 \leq a \leq 30 \\ 14,8044a - 191,4527, & \text{se } 31 \leq a \leq 50 \\ 19,5958a - 431,0247, & \text{se } a \geq 51 \end{cases}$$

Como a é um inteiro não negativo e $C(a)$ está definida por várias sentenças, seu gráfico consiste de segmentos pontilhados, conforme a figura 4.7.

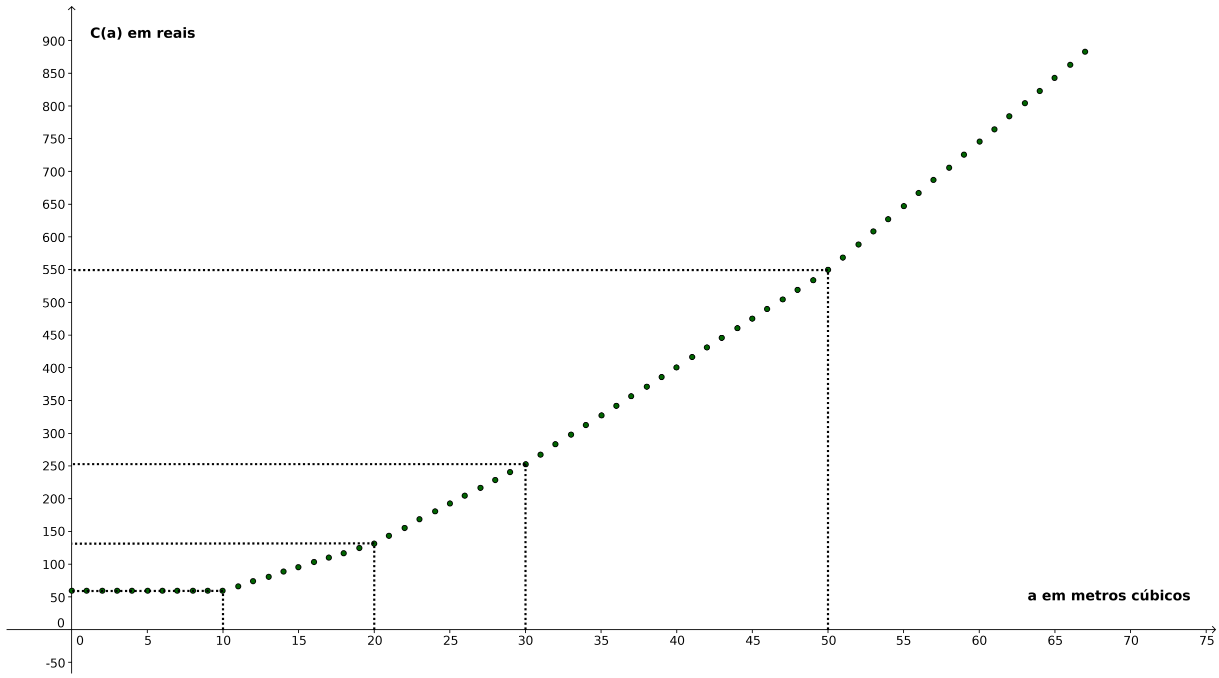


Figura 4.7: $C(a)$ em função da quantidade de água faturada.

Para efeito de comparação, vimos que $C(30) = 252,6799$, no entanto, o valor da fatura para $a = 60m^3$ é $C(60) = 19,5958.60 - 431,0247$, ou seja, $C(60) = 744,7233$. Como $2C(30) = 505,3598$ e $744,7233 - 505,3598 = 239,3635$, então pelo consumo de $60m^3$ de água, a fatura a pagar é de R\$ $239,3635$ mais cara que o dobro de $C(30)$.

Nesse segundo momento de aplicação da modelagem matemática, novamente recorremos aos conceitos inerentes à função afim, porém o processo de obtenção do modelo não se deu segundo uma aplicação direta, devido às características particulares que compõem a fatura, e isso é, de certa forma, importante nas etapas progressivas de produção do conhecimento. Outro fato relevante nessa atividade é aquele referente ao gráfico do modelo C(a), que não é de uso comum, mas útil em muitas situações, quando o domínio da função é composto apenas por valores inteiros positivos (números naturais). É notório também que o desenvolvimento de uma atividade dessa natureza, seja em sala de aula ou em ambiente extraclasse, serve para fins educativos em relação ao uso consciente da água e constitui, a partir do modelo, em uma possibilidade para se fazer projeções sobre possíveis reduções nos gastos.

Uma validação para o modelo C(a) pode ser feita com base na fatura (figura 4.6) que utilizamos para desenvolver essa atividade, a qual aponta que o consumo de $16m^3$, que pertence ao intervalo $11 \leq a \leq 20$, gerou um valor a pagar de R$ $102,67$. Substituindo $a = 16m^3$ em $C(a) = 7,2487a - 13,3095$ e fazendo as contas, encontramos $C(16) = 102,66954$, que confere com o valor da fatura, após a aproximação.

Trabalhando agora com a hipótese de que o consumidor pretenda, em relação à sua fatura, diminuir todos os seus pontos de consumo de água em 26%, quanto passará a pagar? Como a fatura foi gerada com base em $16m^3$ de água, diminuindo em 26% todos os pontos de consumo, implica que o cliente passará a consumir $16 - 26\%.16 = 16 - 4,16 = 11,84m^3$. Porém, de acordo com a CAB Cuiabá, para gerar a tarifa, deve ser representado por um número inteiro o total de água consumida. Assim, por aproximação, a quantidade de água a ser tarifada é de $12m^3$, que está no intervalo $11 \leq a \leq 20$. Substituindo $a = 12m^3$ em $C(a) = 7,2487a - 13,3095$ e fazendo as contas, obtemos $C(12) = 73,6749$. Portanto, o valor da tarifa, neste caso, passa a ser de R$ $73,67$, o que representa uma economia de R$ $29,00$, pois $102,67 - 73,67 = 29$.

4.4 Modelagem Matemática: Construção de Um Muro

A construção de um muro geralmente remete à utilização de operações matemáticas que podem ser traduzidas por modelos matemáticos, que servem, dentre outros, para conduzir à exatidão das medidas, bem como à estimativa de gastos.

Para implementarmos a criação de modelos matemáticos, a partir da construção de um muro, fizemos o recorte para os casos que dizem respeito às possibilidades de distribuição de pilares, considerando-os igualmente espaçados nas etapas de obtenção de cada modelo.

O imóvel a ser cercado é um lote retangular de área urbana, localizado em Várzea Grande - MT, que possui os seguintes limites e confrontações: 12,00 metros de frente com a rua 02; 12,00 metros de fundos com o lote 06; 30,00 metros do lado direito com o lote

03 e 30,00 metros do lado esquerdo com o lote 05, com área de $360m^2$. Portanto, trata-se de um problema procedente de uma situação real.

A parte de extensão do muro que possui limites e confrontações com os terrenos vizinhos, será construída observando que cada proprietário pagará o equivalente à metade dos gastos nos trechos adjacentes aos outros três lotes. Assim, fica estabelecido que nessa extensão apenas metade do muro ficará interna ao imóvel, e quanto à sua dimensão restante, que possui limite e confrontação com a rua 02, os gastos não serão divididos, e também somente metade do muro nessa extensão ficará interna ao terreno. Essas hipóteses são importantes, pois influenciam em todo o projeto de construção do muro.

Nessa construção serão distribuídos pilares iguais, de seção transversal quadrada, de lado 0,15 metro, igualmente espaçados. Excetua-se ainda que, necessariamente, em cada canto do imóvel será colocado um pilar, e nos cantos da frente para a rua 02 serão dispostos dois portões, que devem ocupar os espaços de $1,10m$ e $3,10m$, um para acesso de carro e outro para pedestre, com ambos os espaços limitados por pilares, e a distância entre as faces dos pilares não pode ser nula. Desse modo, seis pilares devem ocupar posições predefinidas.

Com base nessas descrições, vamos fazer um desenho simplificado do terreno, indicando suas medidas e encontrar os modelos matemáticos, relacionando, com o número de pilares, a distância entre dois pilares consecutivos quaisquer.

A figura 4.8 consiste em um desenho simplificado do terreno.

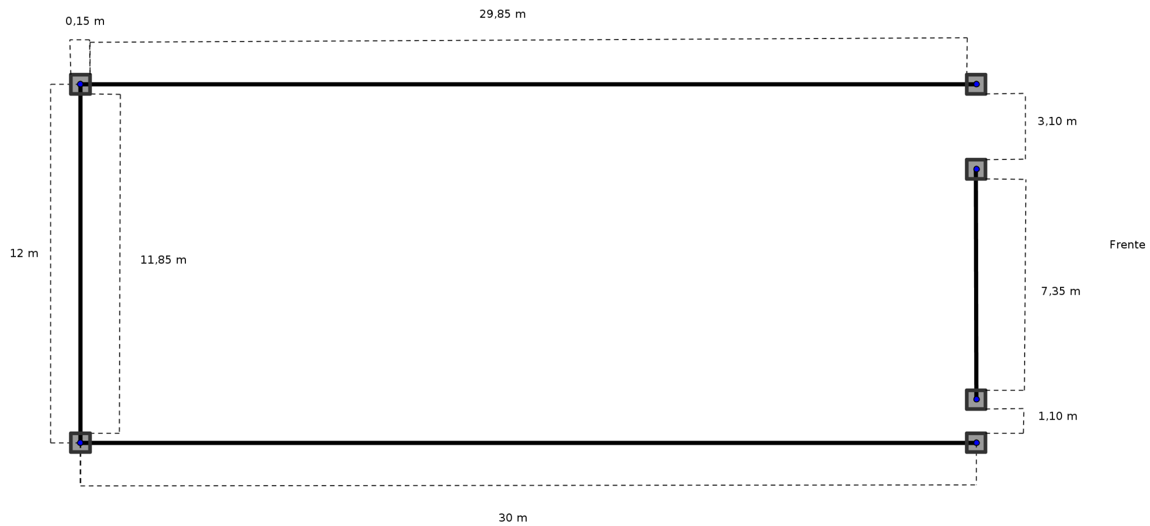


Figura 4.8: Terreno.

Para encontrarmos o modelo matemático que expressa o valor do espaçamento entre dois pilares consecutivos quaisquer, em função do número de pilares, dividimos em três casos, a, b e c, os processos de matematização.

$a)$ Vamos, primeiro, procurar uma solução para a distância entre os pilares, que serão distribuídos entre os dois portões, frente para a rua 02. Nesse caso, de acordo com o enunciado, dois pilares devem ser considerados fixos, centrados nas extremidades do segmento de 7,5m, lembrando que cada pilar tem seção transversal quadrada com 0,15m de lado. Portanto, somente ao longo de 7,35m restantes podem ser colocados outros pilares. Para esta finalidade, utilizaremos as notações:

- D_n é a distância entre dois pilares consecutivos, logo é um número real positivo;
- n é o número de pilares a serem inseridos no segmento $7,35m$, portanto é um número natural, que será melhor definido com base na condição de existência para D_n e após ter a função $D(n) = D_n$ explicitamente escrita.

Conjecturando um modelo matemático:

É fundamental observarmos que nos extremos do intervalo de $7,35m$ estão as faces dos dois pilares fixos. Portanto, nenhum outro pilar, central a esse segmento, pode ter face que também ocupe essas extremidades, pois, por hipótese, é diferente de zero a distância entre as faces de dois pilares consecutivos. Se D_n for maior ou igual a $7,35m$, torna-se impossível colocar pilar nessa extensão, pois $7,35m$ é a distância entre os pilares fixos, ou seja, nesse segmento somente é possível colocar pelo menos um pilar se, e somente se, $0 < D_n < 7,35m$. Para conjecturarmos um modelo matemático, vamos considerar alguns casos particulares, atribuindo valores a n. Interno ao segmento a seguir, vamos considerar $n = 1$ pilar, a uma mesma distância das faces dos outros dois pilares fixos.

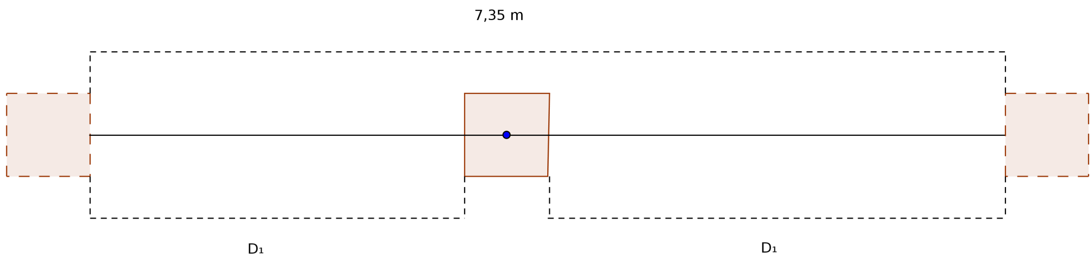


Figura 4.9: Um pilar.

Observamos que com a inserção de um pilar, obtemos 2 espaços de distância D_1 cada.

Desse modo, podemos escrever :

$$2D_1 + 1.0,15 = 7,35.$$

Isolando D_1, obtemos:

$$D_1 = \frac{7,35 - 0,15}{2} = 3,6m.$$

Assim, a distância entre os pilares é $D_1 = 3,6m$.

Considerando agora a configuração para $n = 2$ pilares, temos a seguinte representação:

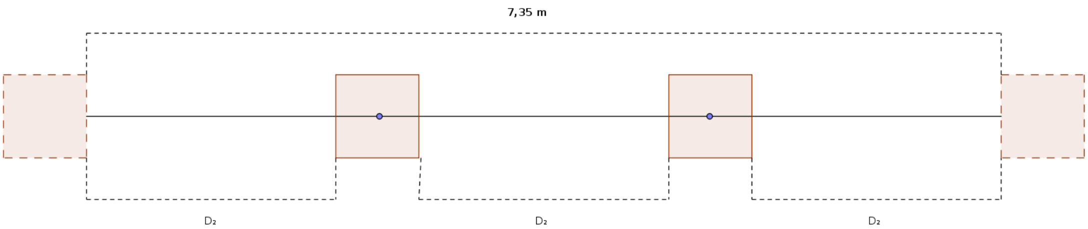


Figura 4.10: Dois pilares.

Neste caso, vemos que a distância de 7,35m fica fracionada em 3 distâncias D_2 mais 2 vezes a largura de um pilar. Segue, portanto que:

$$3D_2 + 2.0,15 = 7,35.$$

Então:

$$D_2 = \frac{7,35 - 2.0,15}{3} = 2,35m.$$

Para $n = 3$, temos a seguinte situação:

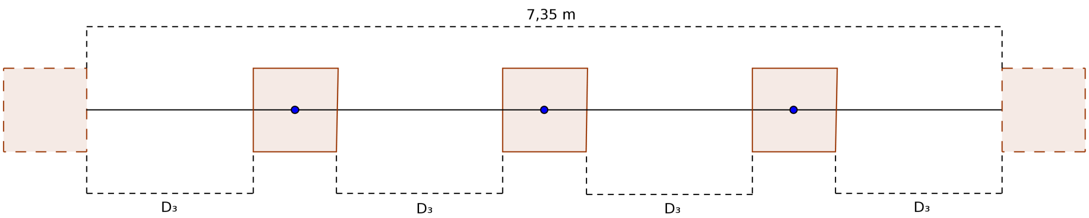


Figura 4.11: Três pilares.

Agora, 7,35m fica dividido em 4 distâncias D_3, mais 3 vezes a largura de um pilar.

Dessa forma, vale:

$$4D_3 + 3.0,15 = 7,35$$

$$D_3 = \frac{7,35 - 3.0,15}{4} = 1,725m.$$

Para o caso de inserção de n pilares, a imagem abaixo ilustra essa situação:

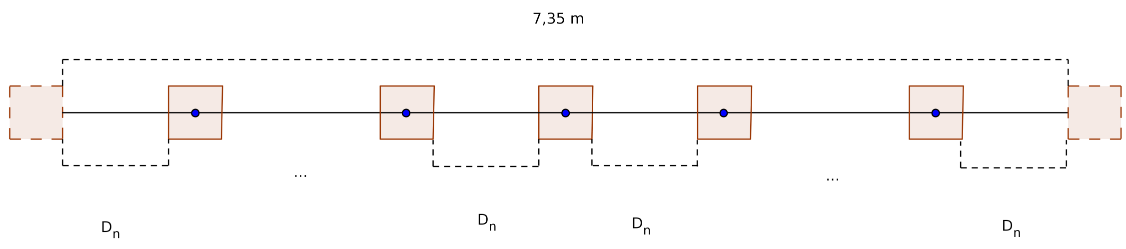


Figura 4.12: n pilares.

Portanto, de modo análogo aos casos anteriores, podemos conjecturar que a inserção de n pilares produz $n+1$ espaços de medida D_n. Segue então que:

$$(n+1)D_n + n.0,15 = 7,35.$$

Isolando D_n nessa expressão, obtemos o modelo matemático:

$$D_n = \frac{7,35 - 0,15n}{n+1}.$$

De um modo simplificado, observamos que D_n deve satisfazer as desigualdades $0 < D_n < 7,35$, ou seja:

$$0 < \frac{7,35 - 0,15n}{n+1} < 7,35.$$

A primeira desigualdade implica que $n < 49$ e a segunda é certamente verdadeira para todo $n > 0$. Com isso, temos determinado o domínio da função D_n:

$$D_n = \frac{7,35 - 0,15n}{n+1}, \ n \in \mathbb{N}, \ 1 \leq n \leq 48.$$

O gráfico de D_n está representado pela 4.13:

É importante observar que o aspecto do gráfico de D_n aponta que aumentando o número de pilares, a distância entre dois pilares consecutivos quaisquer diminui.

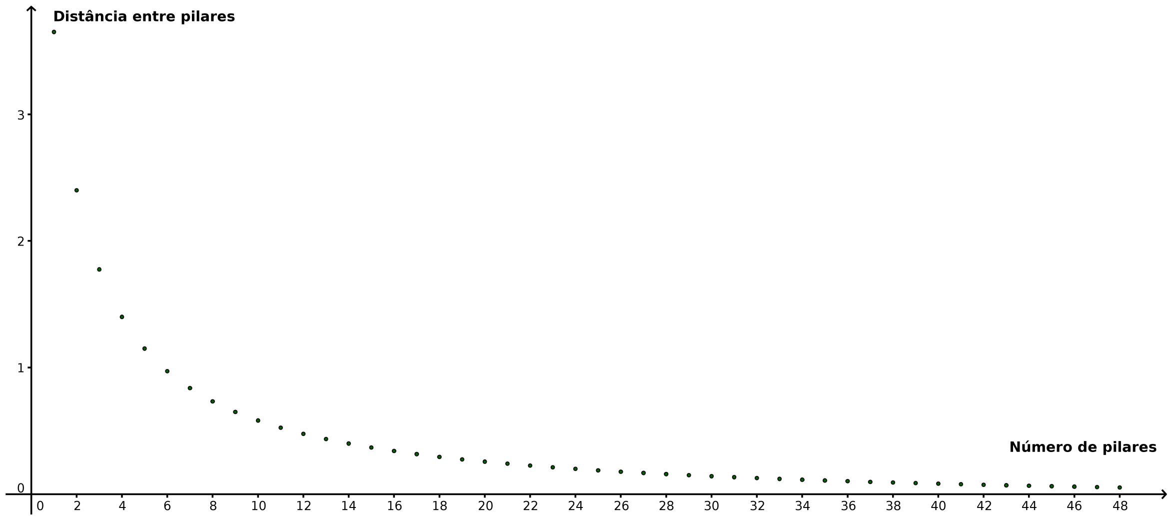


Figura 4.13: Gráfico de D_n.

Podemos generalizar a fórmula $D(n, l, d)$, considerando um intervalo de medida l, pilar quadrado de largura d e n o número de pilares entre os pilares fixos. Obtemos que a distância l é fracionada em $n+1$ espaçamentos de medida $D(n, l, d)$ e n vezes a largura d de um pilar. Logo:

$$(n+1)D(n, l, d) + nd = l.$$

Portanto,

$$D(n, l, d) = \frac{l - nd}{n+1}. \tag{4.1}$$

Vale ressaltar que $D_n = D(n,\ 7,35,\ 0,15)$, equivale à aplicação particular que fizemos.

b) Conforme a figura 4.8, nos fundos do lote há, em cada canto, dois pilares fixos de seção transversal quadrada, de lado 0,15m. Logo, análogo ao que foi feito no caso a), vamos considerar pilares que devem ser distribuídos internamente ao longo do segmento de 11,85m. Para isso, são importantes as notações:

- T_r representa a distância entre dois pilares sucessivos e
- r é o número de pilares.

Assim, $0 < T_r < 11,85m$. Conforme a fórmula (4.1), com $l = 11,85$ e $d = 0,15$, segue que:

$$T_r = D(r,\ 11,85,\ 0,15) = \frac{11,85 - 0,15r}{r+1}.$$

Análogo ao que foi feito no caso a), $0 < T_r < 11,85m$ implica que:

$$T_r = \frac{11,85 - 0,15r}{r+1}, \ r \in \mathbb{N}, \ 1 \leq r \leq 78.$$

c) Em relação ao lado direito ou esquerdo do terreno, vemos na figura 4.8 que $l = 29,85$, $d = 0,15$. Denotando por E_s o espaçamento entre os pilares, s o número de pilares e utilizando a fórmula (4.1), temos:

$$E_s = D(s, \ 29,85, \ 0,15) = \frac{29,85 - 0,15s}{s+1}.$$

Como $0 < E_s < 29,85$, concluímos que:

$$E_s = \frac{29,85 - 0,15s}{s+1}, \ s \in \mathbb{N}, 1 \leq s \leq 198.$$

Para que a distância entre dois pilares consecutivos quaisquer seja a mesma quando forem distribuidos nos intervalos de $7,35m$, $11,85m$ e nos dois lados de $29,85m$, devemos solucionar as condições:

$$D_n = T_r = E_s.$$

Primeiramente é importante observar que se resolvermos a equação $D_n = T_r$, isto é, determinarmos valores para n e r, o valor de s também ficará determinado. Desse modo, nos concentraremos em resolver a equação $D_n = T_r$, ou seja:

$$\frac{7,35 - 0,15n}{n+1} = \frac{11,85 - 0,15r}{r+1}$$

$$(7,35 - 0,15n)(r+1) = (11,85 - 0,15r)(n+1)$$

$$7,35r + 7,35 - \cancel{0,15nr} - 0,15n = 11,85n + 11,85 - \cancel{0,15nr} - 0,15r$$

$$7,5r - 12n = 4,5.$$

Multiplicando essa última equação por 2, obtemos:

$$15r - 24n = 9,$$

que é equivalente a:

$$5r - 8n = 3. \tag{4.2}$$

Essa é uma equação diofantina que precisa ser solucionada no conjunto dos números inteiros positivos, pois n e r representam quantidade de pilares, com $1 \leq n \leq 48$ e $1 \leq r \leq 78$.

Conforme os Teoremas A.1 e A.2 no Apêndice, a equação $5r - 8n = 3$ possui solução nos inteiros, visto que $mdc(5, -8) = mdc(5, 8) = 1$ e $1 \mid 3$.

Para encontrarmos uma solução particular, fazemos as divisões sucessivas:

$$8 = 5.1 + 3$$
$$5 = 3.1 + 2$$
$$3 = 2.1 + 1.$$

Logo:

$$1 = 3 - 1.2$$
$$1 = 3 - 1(5 - 1.3)$$
$$1 = -5 + 2.3$$
$$1 = -5 + 2(8 - 1.5)$$
$$1 = 8.2 + 5.(-3).$$

Assim, obtemos a combinação linear:

$$1 = 5.(-3) - 8.(-2).$$

Multiplicando essa equação por 3, resulta:

$$5(-9) - 8(-6) = 3.$$

Com isso, obtemos uma solução particular $(r_0, n_0) = (-9, -6)$ para a equação (4.2). Pelo Teorema A.1, a solução geral desta equação é da forma:

$$r = r_0 + \frac{b}{d}t \quad \text{e} \quad n = n_0 - \frac{a}{d}t,$$

ou ainda:

$$r = -9 - 8t \quad \text{e} \quad n = -6 - 5t.$$

Lembrando que $1 \leq n \leq 48$ e $1 \leq r \leq 78$, seguem:

$$1 \leq -9 - 8t \leq 48 \quad \text{e} \quad 1 \leq -6 - 5t \leq 78.$$

Daí, concluímos que $-10 \leq t \leq -2$.

Agora vamos escrever s em função do parâmetro t. Para isso, observamos que $E_s = T_r$ implica:

$$\begin{gathered}
\frac{29,85 - 0,15s}{s+1} = \frac{11,85 - 0,15r}{r+1} \\
(29,85 - 0,15s)(r+1) = (11,85 - 0,15r)(s+1) \\
29,85r + 29,85 - \cancel{0,15rs} - 0,15s = 11,85s + 11,85 - \cancel{0,15rs} - 0,15r \\
12s - 30r = 18.
\end{gathered}$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por 6, encontramos:

$$2s - 5r = 3.$$

Como $r = -9 - 8t$, temos:

$$s = \frac{3+5r}{2} = \frac{3+5(-9-8t)}{2} = \frac{-42-40t}{2} = -21 - 20t.$$

Portanto, as soluções para o nosso problema são as ternas (n, r, s), descritas pelas equações

$$\begin{cases} n = -6 - 5t, \\ r = -9 - 8t, \\ s = -21 - 20t, \\ -10 \leq t \leq -2 \end{cases}$$

Fazendo os cálculos e dispondo-os em uma tabela, obtemos os seguintes resultados:

Os valores para n, r e s dispostos na tabela acima constituem as possibilidades que levam a um mesmo espaçamento entre dois pilares consecutivos quaisquer, ou seja,

t	n	r	s
-10	44	71	179
-9	39	63	159
-8	34	55	139
-7	29	47	119
-6	24	39	99
-5	19	31	79
-4	14	23	59
-3	9	15	39
-2	4	7	19

Tabela 4.3: Ternas obtidas a partir dos valores de t.

$D_n = T_r = E_s$. Porém, por uma questão de viabilidade, redução de gastos e fins práticos, a terna $(4, 7, 19)$ parece ser a que melhor contempla o problema, pois aponta a menor quantidade de pilares que podem ser inseridos nas dimensões do terreno, além dos pilares fixos, conduzindo à maior distância entre dois pilares sucessivos, de valor que pode ser explícito para $n = 4$ ou $r = 7$ ou $s = 19$. Substituindo $n = 4$ em $D(n)$ e fazendo as contas, encontramos $D(4) = 1,35m$, que é um valor razoável para fins práticos. Por outro lado, a terna $(44, 71, 179)$ aponta a possibilidade de uso de uma maior quantidade possível de pilares de modo que a distância entre dois pilares consecutivos quaisquer ainda seja a mesma, ou seja,$D_{44} = T_{71} = E_{179} = 0,017m = 1,7cm$. No entanto, para fins práticos, essa distância não é viável, além de não conduzir à minimização dos gastos.

Os modelos matemáticos D_n, T_r e E_s, podem ser explorados de diversas formas, dependendo de cada situação e interesse. Por exemplo, uma maneira de reduzir significativamente os gastos pode ser conduzida com a hipótese de não importar que os pilares fiquem com o mesmo valor de espaçamento em todas as dimensões do terreno, o que remete a outro problema. Para isso, devemos aumentar a distância entre dois pilares consecutivos, diminuindo, consequentemente, a quantidade de pilares a ser utilizada nos segmentos que foram considerados para a obtenção dos modelos. Para efeito de ilustração, substituindo $n = 2$, $r = 9$ e $s = 3$, respectivamente, em D_n, T_r e E_s, encontramos, após fazer as contas, $D_2 = 2,35m$, $T_9 = 2,85m$ e $E_3 = 2,85m$, que resultou em uma mesma distância entre dois pilares consecutivos nos lados direito, esquerdo e nos fundos do terreno (por uma questão puramente particular), e essas distâncias também são razoáveis para fins práticos, destacando ainda que a quantidade de pilares, neste caso, é significativamente pequena, aportando à minimização dos gastos.

Uma aplicação de modelagem matemática como a que foi utilizada em uma das etapas de construção do muro, permite explorar conceitos matemáticos que exigem mais do modelador que aqueles que foram utilizados em relação ao imposto de renda e à conta de água, pois nesse caso os modelos não estavam evidentes, necessitando, em nossas considerações, atribuir, em relação ao cálculo de D_n, alguns valores à variável n, de forma ordenada, perceber a regularidade nas etapas, a partir da qual foi possível conjecturar o modelo D_n, que serviu de padrão, pois não foi necessário aplicar o mesmo processo para obter os demais modelos matemáticos. Atividade dessa natureza, além de outros, propicia momentos de discussão sobre diversos assuntos como função quociente, cujo domínio é o conjunto dos números naturais, esboço de gráfico composto por pontos, estudo de equações diofantinas, precisão de medidas e projeções para reduzir possíveis gastos.

Vale ressaltar também que as atividades de modelagem sobre o imposto de renda, a conta de água e a construção do muro, possibilitam a consolidação de um conhecimento que vai ao encontro das asserções de Kaiser e Sriraman (2006) em relação às perspectivas da modelagem matemática, que consistem basicamente no desenvolvimento da teoria matemática, no desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados e na análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos para fins práticos. Embora não mencionadas, as etapas de modelagem propostas por Bassanezi, Biembengut e Hein, Burak e Barbosa foram parcialmente ou totalmente contempladas. A listagem das etapas foi evitada no sentido de facilitar a dinâmica do processo.

Conclusão

Este trabalho, procedente do interesse de encontrar na modelagem matemática subsídios para fins educacionais, em particular para o ensino de conceitos do campo da Matemática articulados a situações reais, despertou a busca por leitura pautada na literatura que trata dessa temática. Nesse processo, foi possível delinear, a partir da compreensão e apontamentos de alguns pesquisadores, que da mesma forma que há diferentes concepções para se conceber a modelagem matemática, também há diversas possibilidades para abordá-la, inclusive de aplicá-la com finalidades voltadas para o ensino e aprendizagem da Matemática.

Um consenso nas diferentes perspectivas sobre a modelagem matemática, de acordo com os autores citados neste trabalho, é que esse tema propicia contribuições positivas para efeito educativo, e que, em linhas gerais, constitui possibilidade promissora para despertar a investigação, a reflexão, a compreensão e a explicação para situações reais, o que, de fato, culminou com o que foi feito em relação à resolução das atividades mediadas pela modelagem no quarto capítulo.

As aplicações da modelagem, além de outros, apontam para a valorização de conceitos matemáticos quando utilizados como recurso para dar explicações a questões que têm impacto no cotidiano das pessoas, e também podem ser úteis para despertar no estudante o interesse pela Matemática, para solucionar problemas que possuem aspectos práticos. Porém, essa forma de tratamento à Matemática, aponta traços e desdobramentos que implicam em mudanças na postura do profissional em relação a um modelo clássico de resolver questões, em particular em sua forma de apresentar atividades para fins educacionais, pois as questões a serem tratadas geralmente remetem o profissional ao planejamento e à pesquisa, o que pode não ocorrer a curto prazo, conforme Bassanezi (2004) e Biembengut e Hein (2007). Portanto, uma nova estratégia metodológica precisa ser adotada por quem pretende implementar a modelagem matemática como mediadora nos processos de resolução de problemas.

Outro fato relevante no desenvolvimento de atividades mediadas pela modelagem, é que as ferramentas matemáticas que precisam ser utilizadas ao longo do processo, não têm uma ordem linear para efeito de aplicações, variando substancialmente em relação às mais diversas situações. Um exemplo que pode elucidar um caso como esse, são aquelas aplicações, no quarto capítulo, que deram origem a funções quocientes e que dizem respeito a uma das etapas de construção de um muro quando, em algum momento, fez-se necessária a resolução de uma equação a duas variáveis no conjunto dos números inteiros positivos (equação diofantina), assunto que não é de tratamento comum nas aulas de Matemática e que também, de acordo com os currículos clássicos, parece não estar vinculado à necessidade de estudá-lo quando tópicos sobre funções são ensinados em sala de aula. Desse modo, a utilização da modelagem pode reportar o modelador a situações inesperadas e que, para a continuação do desenvolvimento do processo, dependendo do caso, uma pausa talvez seja necessária, para a pesquisa e a conceituação sobre algum recurso matemático a ser utilizado na atividade em curso, mediada pela modelagem matemática.

Referências Bibliográficas

[1] Almeida, Lourdes Maria Werle, Vertuan, Rodolfo Eduardo. *Perspectiva educacional e perspectiva cognitivista para a modelagem matemática: um estudo mediado por representações semióticas.* Revista de Modelagem na Educação Matemática. Blumenal, v.1, n.1, p.28-42, 2010.

[2] Barbosa, Jonei Cerqueira. *Modelagem Matemática na sala de aula. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.* Minicurso GT 10, Modelagem Matemática. Anais... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

[3] Barbosa, Jonei Cerqueira. *Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores.* Tese de Doutorado, UNESP, Rio Claro, 2001.

[4] Barbosa, Jonei Cerqueira, SANTOS, Marluce Alves dos. *Modelagem Matemática, perspectivas e discussões.* Encontro Nacional de Educação Matemática, 9., Belo Horizonte. Anais. Recife: SBEM, 2007.

[5] Bassanezi, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática..* São Paulo, Ed. Contexto, 2004.

[6] Bean, Dale William . *Modelagem: uma conceituação criativa da realidade.* IV Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, v. 4, p. 90-104, 2009.

[7] Bean, Dale William . *Práticas Culturais e Modelos Matemáticos.* VI Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, Londrina, 2009.

[8] Bean, Dale William. *Uma Mudança na Base Conceitual.* Conferencia Nacional de Modelagem Matemática. Ouro Preto: UFOP, p.35-58, 2007.

[9] Bean, Dale William . *O que é modelagem matemática?* Educação matemática em Revista, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001.

[10] Biembengut, Maria Salett. *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das Propostas primeiras às propostas atuais.* Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, p. 7-32, 2009.

[11] Biembengut, Maria Salett, HEIN, Nelson. *Modelagem Matemática no Ensino.* 4ª. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

[12] Blum, Werner. *Applications and Modelling in Mathematics teaching - a review of arguments and instructional aspects.* Lecture given at the Fourth Interaction Conference on the Teaching Mathematical Modelling and Applications. Chichester: Roskilde University, 1989.

[13] Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Orientações Curriculares para o ensino médio - Volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

[14] Buarque, Aurélio. *Dicionário Aurélio da língua portuguesa.* Curitiba, Editora Positivo, 2010.

[15] Bueno, Vilma Candida. *Concepções de modelagem matemática e subsídios para a educação matemática: quatro maneiras de compreendê-la no cenário brasileiro.* Dissertação - Universidade Federal de Ouro Preto - MG, 2011.

[16] Burak, Dionísio. *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.* Campinas-SP, Tese (Doutorado em Educação)-Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas - Unicamp, 1992.

[17] Burak, Dionísio. *Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino de matemática na 5ª série.* Rio Claro-SP, Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - IGCE, Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita Filho-UNESP, 1987.

[18] Burak, Dionísio. *Modelagem Matemática e a Sala de Aula.* Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, v. 1, p. 1-10, 2004.

[19] Burak, Dionísio, KLÜBER, Tiago Emanuel. IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, MG, p 1-19, 2007.

[20] Da Nóbrega, Cristóvão Barcelos. *História do imposto de renda no Brasil, um enfoque da pessoa física (1922-2013).* Receita Federal, 2014.

[21] Freitas, Joelma de Fátima Rodrigues Batista. *As Dimensões Crítica e Reflexiva da Modelagem Matemática no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) em Cursos de Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância.* Ouro Preto - MG, Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - ICEB, Universidade Federal de Ouro Preto - UFOP, 2016.

[22] Kaiser, Gabriele, Sriraman, Bharath. *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. v.38, n.3. p. 302-310, 2006.

[23] Pinheiro, Nilcéia Aparecida Maciel. Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático. Florianópolis, Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, 306 f., 2005.

[24] Rosa, Milton, Reis, Frederico da Silva, Orey, Daniel Clark. *A modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática.* Acta Scientiae, v. 14, n. 2, p. 159-184, 2012.

[25] Silveira, Alexis; Ferreira, Gessé Pereira; Silva, Leonardo Andrade. *A evolução da modelagem matemática ao longo da história, o surgimento da modelagem no Brasil e suas contribuições enquanto estratégia de ensino de matemática.* Actas del VII CIBEM ISSN, v. 2301, n. 0797, p. 2875-2882, 2013.

[26] Tossato, Claudemir Roque, Mariconda, Pablo Rubén. *O método da astronomia segundo Kepler.* Scientiae Studia, v. 8, n. 3, p. 339-366, 2010.

Apêndice A

Equações Diofantinas

Definição A.1 *Uma equação do tipo*

$$ax + by = c \tag{A.1}$$

sendo a, b, c números inteiros, a e b não nulos simultaneamente, é chamada de ***equação diofantina*** *linear com duas variáveis inteiras x e y.*

Teorema A.1 *Se uma equação da forma* (A.1) *possui uma solução particular* (x_0, y_0)*, com $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$, então essa equação possui infinitas soluções, todas da forma*

$$x = x_0 + \frac{b}{d}t, \; y = y_0 - \frac{a}{d}t, \tag{A.2}$$

com $t \in \mathbb{Z}$ e $d = mdc(a, b)$, ou seja, d é o máximo divisor comum de a e b.

Demonstração. Sejam (x_0, y_0) uma solução particular e (x_k, y_k) uma outra solução da equação (A.1). Portanto, podemos escrever

$$ax_0 + by_0 = c = ax_k + by_k,$$

o que implica em

$$a(x_k - x_0) = b(y_0 - y_k). \tag{A.3}$$

Como $d = mdc(a, b)$ divide a (que denotamos por $d \mid a$), concluímos que existe um inteiro p tal que $a = pd$. De modo análogo, $d \mid b$ implica que $b = qd$ para algum inteiro q.

Substituindo a e b na equação (A.3), resulta que

$$p(x_k - x_0) = q(y_0 - y_k). \tag{A.4}$$

A condição $mdc(a, b) = d$ nos permite escrever $mdc\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = mdc(p, q) = 1$. Isso significa que p e q não possuem divisores em comum. Este fato e a equação (A.4) implicam que $p \mid (y_0 - y_k)$, ou seja, existe um inteiro t tal que $y_0 - y_k = pt$, ou ainda, $y_k = y_0 - \frac{a}{d}t$. Agora substituindo $y_0 - y_k = pt$ na equação (A.4), obtemos $q(y_0 - y_k) = qpt = p(x_k - x_0)$. Simplificando essa expressão e isolando x_k, encontramos $x_k = x_0 + qt$, ou equivalentemente, $x_k = x_0 + \frac{b}{d}t$.

Falta apenas provar que o par (x, y) descrito nas equações (A.2) é solução de (A.1). De fato,

$$\begin{aligned} ax + by &= a\left(x_0 + \frac{b}{d}t\right) + b\left(y_0 - \frac{a}{d}t\right) \\ &= ax_0 + \frac{ab}{d}t + by_0 - \frac{ab}{d}t \\ &= ax_0 + by_0 = c \end{aligned}$$

■

Observamos que para garantir a existência de soluções para a equação diofantina (A.1), precisamos da existência de uma solução particular (x_0, y_0). O próximo teorema apresenta as condições que asseguram quando uma equação diofantina com duas variáveis possui pelo menos uma solução.

Teorema A.2 *Sejam a e b inteiros não nulos. Se $d = mdc(a, b)$ divide c, então a equação*

$$ax + by = c$$

tem solução.

Demonstração. Para a demonstração desse teorema vamos utilizar a identidade de Bezout, a qual afirma que existem inteiros m e n tais que

$$am + bn = d.$$

Da hipótese de que $d \mid c$, temos que existe r inteiro tal que $c = d.r$. Multiplicando a identidade de Bezout por r, resulta

$$a(mr) + b(nr) = d.r = c.$$

Isso significa que $x_0 = mr$ e $y_0 = nr$ é uma solução particular de (A.1).

■