UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Eduarda Ferreira Barros

Maceió, maio de 2017

Instituto de Matemática

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

EDUARDA FERREIRA BARROS

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MACEIÓ
2017

EDUARDA FERREIRA BARROS

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto

Maceió
2017

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Bibliotecária Responsável: Janaina Xisto de Barros Lima

B277e Barros, Eduarda Ferreira.
Equações diofantinas não lineares : uma proposta didática para resolução de problemas / Eduarda Ferreira Barros. – 2017.
58 f. : il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2017.

Bibliografia: f. 50-51.
Apêndices: f. 52-58.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Aritmética – Ensino médio. 3. Equações diafontinas não lineares – Resolução de problemas. I. Título.

CDU: 511.52:373.5

Folha de Aprovação

EDUARDA FERREIRA BARROS

EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 04 de maio de 2017.

Banca Examinadora:

Prof. Dr Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Presidente)

Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos- UFAL

Prof. Dr Márcio Silva Santos - UFPB

MACEIÓ - 2017

A Deus, aos meus pais e a meu tio Robin.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pelas oportunidades a mim concedidas e pela força que ele é capaz de me proporcionar.

Aos meus pais, Rubenita e José, pelo amor, carinho, confiança, dedicação que tiveram comigo, me moldando e me transformando no que sou hoje. E ainda, por todo o trabalho duro, e as inúmeras noites de sono que passaram para me proteger e me garantir uma vida digna e melhor.

Ao meu tio Robin, pelo amor, pela dedicação e por me ensinar características fundamentais para a construção do meu caráter.

Aos meus avós, Celizete e Cural (In Memorian), dos quais eu convive por muito tempo e tive a oportunidade de aprender coisas que não encontramos em livros.

Ao Lucas Senhorinho, meu noivo, por todo amor, carinho, paciência e apoio a mim prestados.

À minha família, em especial a minha irmã Iris, que nunca me deixou desistir e sempre me ensina a ter calma e confiança em mim mesma.

Ao meu orientador Gregório, pela confiança, paciência e sobretudo pelos ensinamentos e dedicações a mim concedidos.

Aos colegas da turma PROFMAT/UFAL 2014, em especial as minhas amigas e irmãs Camila e Luana, pelo carinho, companheirismo e apoio em todas as fases do mestrado.

Aos meu amigos, pelo amor, carinho e por cada momento de vida compartilhado.

Aos meus colegas de trabalho, pela confiança, paciência e por acreditarem no meu potencial.

Enfim, agradeço a todos que incentivaram, participaram e torceram, de maneira direta ou indiretamente, para a realização desse sonho. Muito obrigada!

A matemática é o alfabeto
com o qual Deus escreveu o Universo.

Galileu Galilei

RESUMO

Esta dissertação tem por objetivo apresentar propostas didáticas que auxiliem a fixação e aplicação de conteúdos de aritmética básica através dos métodos de George Pólya para resolução de problemas envolvendo equações Diofantinas não-lineares. Uma equação Diofantina é uma equação algébrica cujas incógnitas representam números inteiros. Os métodos de soluções das equações tratadas aqui requerem o conhecimento de fatos básicos sobre produtos notáveis, congruências, geometria analítica e relações métricas no triângulo. Visto que os problemas são independentes, eles podem ser usados separadamente pelo professor em diferentes momentos em diferentes turmas e níveis de ensino. O trabalho culmina com a proposta de sequências didáticas para aplicação da resolução desses problemas em sala de aula.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Não-Lineares. Resolução de Problemas. Proposta didática. Aritmética.

ABSTRACT

This dissertation aims to present didactic proposals that help to fix and apply basic arithmetic contents through George Pólya's methods for solving problems involving nonlinear Diophantine equations. A Diophantine equation is an algebraic equation whose unknowns represent integers. The solution methods of the equations treated here require knowledge of basic facts about remarkable products, congruences, analytic geometry, and metric relationships in the triangle. Since the problems are independent, it can be used by the teacher separately in different classes and levels of education. The work culminates with a proposal of didactic sequences for application of problem solving in the classroom.

Keywords: Nonlinear Diophantine Equations. Problem Solving. Didactic Proposal. Arithmetic.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Resolver problemas é considerado uma atividade de rotina para as pessoas, sejam eles de caráter científico ou apenas de senso comum. É a partir da resolução de problemas que o ser humano se coloca a pensar, ou seja, é tentando resolver um problema que ele exercita sua habilidade de raciocínio e desenvolve o seu senso crítico.

A matemática tem apresentado, ao longo dos anos, um papel fundamental no desenvolvimento da sociedade, pois nos permite resolver problemas do nosso cotidiano, apresentando muitas aplicações no mundo. É uma ferramenta essencial no desenvolvimento rápido e lógico para construção do conhecimento de outras áreas afins.

Segundo os PCN's (1997, p. 19),

> No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

O primeiro livro a tratar especificamente dos conceitos e das técnicas de resolução de problemas em Matemática que temos conhecimento é o livro *How to Solve it* (1945) de George Pólya.

Foi a partir daí, segundo Onuchic (1999), que os educadores passaram a caracterizar a educação matemática considerando o estudante como participante ativo, o problema como instrumento de trabalho e a resolução do problema como uma coordenação dos vários níveis de atividade.

Segundo Schroeder e Lester (1989, p. 31-34) *apud* Polya (1995)

> Existem três modos diferentes de abordar Resolução de Problemas, que podem nos ajudar a refletir sobre essas diferenças: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas. O professor que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de resolução de problemas de Polya ou alguma variação dele. Este modelo descreve um conjunto de quatro

> fases no processo de resolver problemas matemáticos: compreender o problema, criar um plano, levar avante esse plano e olhar de volta o problema inicial. Ao ensinar a resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada na solução de problemas rotineiros e não rotineiros. Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. Em conseqüência disso, dá-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de estruturas matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas.

Baseado no estudo de resolução de problemas e na compreensão da dificuldade que os alunos apresentam no momento de resolver um dado problema matemático, iremos focar o desenvolvimento desta dissertação no ensino de resolver problemas, ou seja, iremos propor e explicar as quatro fases, segundo Polya, para se resolver um problema. E ainda, ensinar a matemática através da resolução destes problemas, pois será a partir disso que o professor irá mostrar para o aluno a importância de se compreender e saber utilizar os conceitos matemáticos estudados.

A opção por esse estudo se deu a partir de inquietações adquiridas no decorrer da minha formação no ensino superior, como também na experiência de professora do ensino básico em escolas da rede pública e privada. Essas inquietações surgiram a partir da minha própria dificuldade na hora de resolver um problema, dificuldades essas, como: a compreensão do problema, identificar que conteúdos e conceitos matemáticos deveriam ser utilizados para resolver um dado problema, o fato de expressar com palavras e assim obter uma solução organizada e lógica para a compreensão do professor, e ainda, cometer erros algébricos muito comuns na hora de resolver estes problemas.

Para tanto, num primeiro momento, que constitui o capítulo 2, iremos expor o método proposto por Polya para a resolução de um problema. Neste capítulo, explicaremos cada passo e a maneira que o professor deve agir ao propor um problema para o seu aluno. Além disso, exemplificaremos de maneira subjetiva como poderia ser essa proposta em sala de aula, ou seja, como o aluno deve aplicar essas quatro etapas na hora de resolver um problema proposto para ele.

No capítulo 3, sugerimos todos os conceitos matemáticos básicos dos quais o professor e o aluno deverão ter conhecimento para a compreensão do estudo das equações Diofantinas não lineares que serão tratadas nessa dissertação. Fica a cargo do professor a transposição dos mesmos utilizando ou não uma linguagem mais simples e objetiva levando em consideração o grupo de alunos em questão.

No capítulo 4, introduzimos alguns conceitos relativos às equações Diofantinas não lineares, bem como apresentamos, com suas respectivas soluções, os problemas centrais que serão objeto das propostas de atividades didáticas do capítulo 5.

Concluímos esta dissertação com o capítulo 5, no qual iremos propor dois planos de aula que auxiliem e orientem o professor no desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, a proposta é para as turmas do 8º ano do ensino fundamental II. Neste plano de aula, separamos os conteúdos que podem ser revisados e atividades que podem ser desenvolvidas, atividades estas que irão preparar o aluno para problemas mais complexos e sobre os quais ele não disponha muitas informações. Já no segundo plano de aula, proposto para uma turma do 9º ano do ensino fundamental II, abrangemos conceitos que podem ser desconhecidos para o aluno por não pertencerem à grade formal de ensino, mas que estão dentro do seu nível de aprendizado, com a finalidade de preparar os alunos para a resolução dos problemas envolvendo equações Diofantinas não lineares para a resolução dos problemas de diofantinas.

2. COMO RESOLVER UM PROBLEMA

Na educação básica, o foco principal dos professores quando se trata da disciplina Matemática é a resolução de problemas. Essa é a forma mais prática de mostrar a utilidade da matemática na vida dos alunos, pois é a partir da resolução dos problemas que os conteúdos vão criando um verdadeiro sentido na cabeça deles e passam a ter uma utilidade.

Segundo Pólya (1995, p. V)

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

Neste capítulo, iremos propor métodos que orientem e auxiliem o professor no momento de propor um problema matemático em sala de aula. Além disso, iremos expor alguns passos importantes que tanto o professor quanto o aluno devem ter conhecimento para obterem êxito na resolução de problemas.

Nas aulas de matemática, segundo os PCN’s

> A resolução de problemas, na perspectiva indicada pelos educadores matemáticos, possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança (BRASIL, 1997, p.40).

Pólya propõe no seu livro “*A arte de resolver problemas - Um novo aspecto do método matemático”*(1995) que o aluno antes de resolver um problema deve considerar as seguintes etapas: a compreensão do problema; o estabelecimento de um plano; a execução do plano; e por fim, o retrospecto. Essas seriam as 4 fases que garantiriam o melhor resultado na resolução de um problema.

Segundo Tao (2013), além de se compreender as estratégias e perspectivas propostas por Polya, é de grande importância perceber o problema, ou seja, entender com que tipo de problema se está trabalhando. Para ele há três tipos principais de problemas, que são eles: o do tipo mostre que...ou calcule..., nos quais os dados são fornecidos de maneira clara e direta; o do tipo encontre... ou determine..., neste caso, a resolução se dá por meio de tentativa e erro; e o outro seria o do tipo existe ou não..., nesta situação, o problema se torna mais complexo, pois precisamos verificar se a sentença é verdadeira ou falsa e se podemos fornecer ou não uma demonstração para a mesma.

Inicialmente, antes de propor a resolução de um problema, o professor, precisa levar em consideração alguns pontos, como: “Será que o problema é de fácil compreensão?”, “Será que todo conteúdo necessário à solução do problema é de conhecimento do aluno?”, “Será que o meu aluno conseguirá identificar com clareza todas as incógnitas e as condicionantes do problema?”, entre outras.

Levando em consideração as etapas propostas por Pólya para a resolução de um problema, o aluno deve começar pelo enunciado do problema, ou seja, pela *compreensão do problema*. Analisar o enunciado como um todo, levando em consideração todos os dados fornecidos e quais os de grande importância para resolver este exercício. É nessa fase que o aluno e o professor devem levar em consideração alguns questionamentos, como: “Qual é a incógnita?”, “Qual a condicionante?”, “Quais as partes principais do problema?”.

A segunda etapa é a *elaboração de um plano*. Este é um dos momentos mais delicados e importantes na resolução de um problema, pois o aluno pode demorar mais do que o esperado e não identificar os meios necessários para chegar à solução. Neste momento, outras indagações podem surgir, como:Será que eu já vi algum problema desses antes?”, “Será que todos os dados do problema são necessários para resolvê-lo?”.

Ainda, sobre a segunda fase, o professor deve estar pronto para questionar, auxiliar e orientar os alunos no momento em que estes estiverem resolvendo um problema, oferecendo meios para que o aluno crie uma independência para resolver os seus problemas. Em paralelo, ele deve estar ciente que se o aluno não apresentar progresso ao resolver o problema proposto, ele deve oferecer caminhos, sem oferecer a resposta, que auxiliem o aluno a chegar ao resultado desejado.

A terceira etapa é a *execução do plano.*É a fase a resolução do problema em si. É nessa fase que o aluno usa os conhecimentos adquiridos, bem como sua criatividade e capacidade de argumentação para, seguindo o plano, tentar resolver o problema proposto.

É neste momento que o professor deve exigir que o aluno expresse seus argumentos da forma mais clara e detalhada possível, para facilitar a compreensão futura da argumentação e solução do problema.

A última fase é o *retrospecto.* Esta etapa deve ser considerada pelo professor como uma das mais importantes, pois é neste momento que o aluno revisará e validará todos os conceitos e operações matemáticas utilizadas por ele. Além disso, é examinando o seu resultado obtido que o aluno aperfeiçoa a sua capacidade de resolver problemas.

Exemplo: Tomemos, para ilustrar as quatro fases para resolução de um problema, citado anteriormente, o seguinte exemplo: *O cubo de um número ímpar é um número par ou ímpar?*

Para compreender e discutir o problema acima, o aluno precisa conhecer o conceito de número par ou ímpar e entender o termo cubo de um número e o seu desenvolvimento.

O professor ao propor esse problema deve deixar claro para o estudante que o interesse dele é saber se todo número ímpar quando elevado ao cubo é um número par ou ímpar, pois um aluno do ensino básico sempre tentará resolver a questão substituindo casos específicos.

Inicialmente, o professor deve manter um diálogo com seu aluno, propondo passos para a resolução deste problema, como (suposição de um diálogo esperado):

- Qual a incógnita?
- *Resposta: o cubo do número.*
- Quais são os dados do problema?
- *Resposta: o número ímpar.*
- Qual é a condição para resolver este problema?
- *Resposta: o cubo do número ímpar.*
- Os dados do problema são suficientes para resolver o problema?
- *Resposta: Sim.*

Feito essas indagações, o professor deve dar um tempo para que o seu aluno assimile tudo o que lhe foi questionado e qual caminho ele deve tomar para resolver esse problema. Após o tempo decorrido, o mesmo pode propor a exposição das ideias de cada aluno no quadro. Caso estes não tenham conseguido resolver o exercício durante o tempo determinado, o professor deve continuar questionando-os da seguinte maneira:

- Você já viu algum problema parecido com esse?
- O que é o cubo de um número?
- O que é um número ímpar?
- Como podemos representar um número ímpar de forma genérica?

Após estes últimos questionamentos, o professor deve dar mais um tempo para que seu aluno tente executar o plano elaborado por ele para resolver este problema. Por fim, após a resolução do exercício proposto é de fundamental importância que o aluno revise toda a sua solução obtida, para que assim, ele verifique se todos os conceitos e cálculos desenvolvidos por ele foram válidos ou não.

Solução (Desejada): Essa parte seria o cálculo desejado, porém os questionamentos e os passos estão logo acima.

Seja x um número ímpar. Então, $x = 2k + 1, k \in Z$.

Assim, o cubo de x será dado por

$$x^3 = (2k + 1)^3 = (2k)^3 + 3 \cdot (2k)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 2k \cdot 1^2 + 1^3$$

Logo, $x^3 = 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = 2(4k^3 + 6k^2 + 3k) + 1$.

Tomando $q = (4k^3 + 6k^2 + 3k)$,como $q \in \mathbb{Z}$, temos que $x^3 = 2q + 1$. Ou seja, o cubo de um número ímpar é sempre ímpar.

3. BASE CONCEITUAL DE MATEMÁTICA

Neste capítulo abordaremos conceitos básicos necessários para que o professor compreenda e desenvolva os métodos de resolução das Equações Diofantinas Não Lineares na sala de aula.

As definições a seguir são baseadas em DANTE (2012), OLIVEIRA (2010), HEFEZ (2013) e OLIVEIRA et. al. (2008).

3.1. DIVISÃO EUCLIDIANA

Teorema: Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

Demonstração:

Considere um conjunto S representado por

$$S = \{\, x = a - by, \qquad y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Existência :

Pela propriedade Arquimediana[1], existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$,ou seja, $a - nb > 0$. Assim, S é não vazio. Note que o conjunto S é limitado inferiormente. Então, pelo Princípio da Boa Ordenação[2], existe $r \in \mathbb{Z}$ com r sendo o menor elemento de S. Suponhamos que $r = a - bq$. Como $r \geq 0$, basta-nos mostrar que $r < |b|$. Suponhamos, agora, por contradição, que $r \geq |b|$. Logo, existe $t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $r = t + |b|$, ou seja, $0 \leq t < r$. O que é um absurdo, pois r é o menor elemento de S.

Unicidade:

Suponhamos que existem $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, com $0 \leq r_1 < |b|$ e $0 \leq r_2 < |b|$. Daí, temos que $b(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$, e ainda, $r_2 - r_1 = 0$. Logo, $r_2 = r_1$. Como $b \neq 0$, concluímos que $q_2 = q_1$.

---

[1] Propriedade Arquimediana: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Então existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $nb > a$.

[2] Princípio da Boa Ordenação: Se S é um subconjunto não vazio de Z e limitado inferiormente, então S possui um menor elemento.

3.2. PARIDADE DOS NÚMEROS

Denominamos números pares aos inteiros múltiplos de 2, ou seja, a todos os inteiros da forma $2k$, onde k é algum inteiro. Do mesmo modo, denominamos números ímpares aos inteiros que não são múltiplos de 2 , ou seja, todos os inteiros da forma $2\,k\,+\,1$, onde k é algum número inteiro.

Teorema:Todo número inteiro é ou par ou ímpar, ou seja, os números inteiros estão particionados em dois subconjuntos: os dos números pares e ímpares.

Demonstração:

Pelo Algoritmo de Euclides, todo número inteiro n pode ser escrito como $n = 2k + r$, onde r são os restos possíveis na divisão de n por 2, ou seja, $0 \leq r < 2$. Daí, temos dois casos:

(i) se $r = 0$, então, por definição, n é um número par;

(ii) se $r = 1$, concluímos que n é ímpar.

3.2.1. PROPRIEDADES DA ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

Seja *a, b* números pares e *c, d* números ímpares, então:

(i) $a + b = 2k + 2t = 2(\,k + t\,) = 2q, \quad q \in \mathbb{Z}$; (par)

(ii) $c + d = (2k + 1) + (2t + 1) = 2(\,k + t + 1\,) = 2q, \quad q \in \mathbb{Z}$;(par)

(iii) $a + c = 2k + (2t + 1) = 2(\,k + t\,) + 1 = 2q + 1, \quad q \in \mathbb{Z}$; (ímpar)

(iv) $a \cdot b = 2k \cdot 2t = 2(2\,k \cdot t\,) = 2q, \quad q \in \mathbb{Z}$; (par)

(v) $c \cdot d = (2k + 1) \cdot (2t + 1) = 2(\,2kt + k + t) + 1 = 2q + 1, \quad q \in \mathbb{Z}$; (ímpar)

Os casos de subtração são análogos aos da soma e os de divisão não serão exibidos, pois não são úteis para o desenvolvimento do trabalho.

3.3. NÚMEROS PRIMOS E COMPOSTOS

Definição: Um número inteiro p, $p \geq 2$, é dito primo se os únicos divisores que ele tem são 1 e ele mesmo; caso contrário, esse número é composto.

Exemplos: Os números 7, 11 e 13 são primos, enquanto os números 4, 16 e 33 são compostos.

Lema (Gauss) Sejam a, b e c números inteiros. Se $a|bc$ e $(a,b) = 1$, então $a|c$.
Demonstração:

Se $a|bc$ então existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = ka$.
Pelo algoritmo de Euclides estendido[1] temos que se $(a,b) = 1$, então existem m e n números inteiros tais que

$$ma + nb = 1.$$

Multiplicando a equação acima por c, obtemos

$$mac + nbc = c.$$

Substituindo bc por ka temos

$$mac + nka = c \Longrightarrow a(mc + nk) = c.$$

Como $mc + nk$ é um número inteiro, concluímos que $a|c$.

Proposição: (Lema de Euclides) Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.
Demonstração:
Suponhamos que $p \nmid a$, então $(p,a) = 1$.Como $p|ab$, temos pelo Lema de Gauss que $p|b$. De maneira análoga, mostramos que $p|a$.

Teorema: (Teorema Fundamental da Aritmética) Todo número inteiro maior do que 1 pode ser escrito de maneira única como um produto de fatores primos.

---

[1] Algoritmo de Euclides estendido: Dados dois números $a, b \in \mathbb{N}$ podemos escrever o $(a,b) = ma + mb$, com m e n números inteiro.

Demonstração:

Inicialmente vamos mostrar que um número natural n se escreve como o produto de números primos. E, em seguida, que essa escrita é única.

Utilizando um dos métodos de indução ,temos:

(i) Para $n = 2$, nada há o que verificar;

(ii) Suponhamos que seja válido para todo número natural menor do que n. Queremos mostrar que também é válido para n.

Se n for primo nada temos que demonstrar. Então, suponhamos que n é composto. Assim, por definição, existem n_1, n_2 naturais tais que

$$n = n_1 \cdot n_2 \text{ , com } 1 < n_1 < n \text{ e } 1 < n_2 < n.$$

Logo, pela hipótese de indução existem $p_1 , p_2 , \dots , p_r$ e $q_1 , q_2 , \dots , q_s$ números primos que

$$n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r$$

$$n_2 = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$$

Daí, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$.

Portanto, n se escreve como o produto de números primos.

Vamos provar a unicidade. Suponha, por contradição que existem $p_1 , p_2 , \dots , p_r$ *e* $q_1 , q_2 , \dots , q_s$ números primos tais que, $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$.
Como $p_1|n$, então $p_1|q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s$. Assim, pela proposição acima $p_1|q_1$ *ou* $p_1|q_2$ *ou* ... $p_1|q_r$. Daí, concluímos que $p_1 = q_j , 1 \leq j \leq s$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar que $p_1 = q_1$. Repetindo o processo r vezes, a hipótese de indução nos leva a $r = s$ e os p_i *e* q_j são iguais aos pares.

Existem inúmeras outras proposições e teoremas interessantes sobre os números primos, mas que são dispensáveis para o desenvolvimento deste trabalho.

3.4. PRODUTOS NOTÁVEIS

Durante o estudo do cálculo algébrico, algumas expressões representadas por produtos de expressões algébricas, aparecem com muita frequência. É por esse motivo e pelo fato de auxiliarem na fatoração de polinômios que elas são denominadas Produtos Notáveis.

Proposição: Dados a e b números reais, temos:

i. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

ii. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

iii. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$;

iv. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

v. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Demonstração:

Sejam a e b números reais quaisquer. Então, usando as propriedades de distributividade e comutatividade, temos:

i. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

ii. $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

iii. $(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$.

iv. $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2(a+b)$

$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

v. $(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2(a-b)$

$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

3.5. SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

Um sistema de Equações Lineares é um conjunto finito de m equações lineares aplicados a um mesmo conjunto de n incógnitas e representado algebricamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde os $a_{ij}'s$ e os $b_i's$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, são números reais dados.

Neste trabalho utilizaremos apenas o sistema de equações com duas incógnitas, então não será necessário o aluno ter conhecimento de escalonamento ou até mesmo de matrizes para resolver os problemas aqui propostos.

Exemplo: João possui 14 reais e deseja gastar esse dinheiro em chocolates e sanduíches para distribuir com 6 amigos, de modo que cada um fique exatamente com um chocolate ou um sanduíche. Sabendo que cada chocolate custa 2 reais e cada sanduíche custa 3 reais, quantos chocolates e sanduíches João deve comprar?

Para resolvermos esse problema algebricamente podemos chamar x a quantidade de chocolates e y a quantidade de sanduíches. Deste modo, obteríamos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (*)$$

Note que, o exemplo acima é formado por duas equações e duas incógnitas. Para resolver esse tipo de sistema existem dois métodos básicos que serão exibidos a seguir.

3.5.1. MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Esse método consiste em isolar uma das incógnitas e substituir a expressão encontrada na outra equação. Obtendo assim, uma equação do 1º grau com apenas uma incógnita.

Solução: Se isolarmos x na segunda equação do sistema $(*)$ obtemos, $x = 6 - y$. Daí, substituindo essa expressão encontrada na primeira equação de $(*)$ chegamos que $2(6 - y) + 3y = 14$, ou seja $y = 2$. Assim, $x = 4$.

3.5.2. MÉTODO DA ADIÇÃO

Esse método consiste em manipular as equações de modo que consigamos eliminar uma das incógnitas ao somarmos as equações dadas.

Solução: Dado o sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ x + y = 6 \end{cases}$.

Se multiplicarmos a segunda equação por -2 obtemos:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 14 \\ -2x - 2y = -12 \end{cases}$$

Se somarmos as equações obtidas teremos que $y = 2$. Deste modo, $x = 4$.

3.6. EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Definição: A equação do segundo grau com coeficientes a, b e c é uma expressão da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e $c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e x é uma incógnita real a ser determinada.

O método para resolver esse tipo de equação foi muito discutida nas civilizações egípcias e babilônicas, porém os árabes tiveram um papel fundamental na resolução desse tipo de equação. Esse método de completar quadrados, utilizado atualmente, era muito requerido por Bháskara (século XII), mas também foi demonstrado geometricamente por outro matemático chamado al-Khwarizmi ($\approx 790 - \approx 850$). Porém, mesmo assim, a nenhum dos dois foi atribuído a invenção da fórmula que usamos hoje.

Inicialmente, divide-se a equação do 2º grau pelo coeficiente a, ou seja,

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \qquad (1.1)$$

Note que,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2}$$

Então, se completarmos o quadrado na equação (1.1) obtemos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

Daí,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Em geral, chamamos de discriminante a expressão representada por $b^2 - 4ac$ e a denotamos por Δ (lê-se delta). Assim, podemos reescrever a igualdade anterior como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Analisando a equação obtida, em $\mathbb{R}$, vemos que a equação possui solução apenas para $\Delta \geq 0$ e assim

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ou seja, as raízes da equação desejada são obtidas por

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

3.7. RELAÇÕES MÉTRICAS E TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

No estudo do triângulo retângulo descobrimos, através da semelhança de triângulos, inúmeras expressões matemáticas que relacionam todas as suas medidas, porém, o teorema de Pitágoras é uma das fundamentais.

Neste trabalho, utilizaremos apenas o teorema de Pitágoras para a resolução de alguns problemas propostos e, por esse motivo, omitimos a demonstração de algumas relações métricas.

3.7.1. RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

PROPOSIÇÃO: Seja ABC um triângulo retângulo em A, com catetos $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ e hipotenusa $\overline{BC} = a$. Sendo H o pé da altura relativa à hipotenusa, $\overline{AH} = h$, $\overline{BH} = m$ e $\overline{CH} = n$, temos:

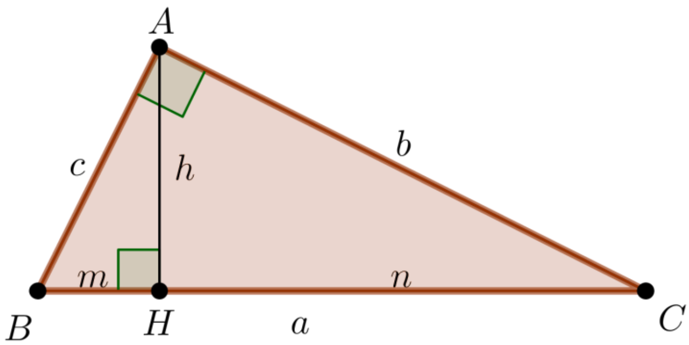
(i) $c^2 = am$;

(ii) $ah = bc$;

(iii) $b^2 = an$;

(iv) $h^2 = mn$.

Figura 1: Relações Métricas no Triângulo Retângulo

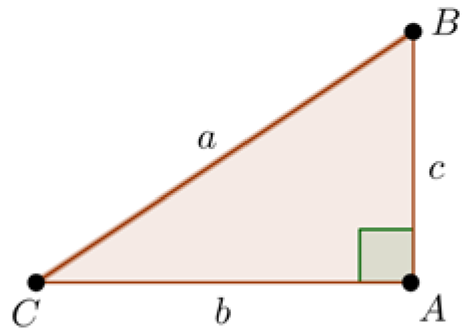


Fonte: Autora, 2017.

3.7.2. TEOREMA DE PITÁGORAS

TEOREMA (Pitágoras): "Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa a é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos b e c."

Figura 2: Triângulo retângulo



Fonte: Autora, 2017.

Demonstração:
Utilizando as relações métricas (i) e (ii) e sabendo que $a = m + n$, temos que

$$c^2 + b^2 = am + an = a \cdot (m + n).$$

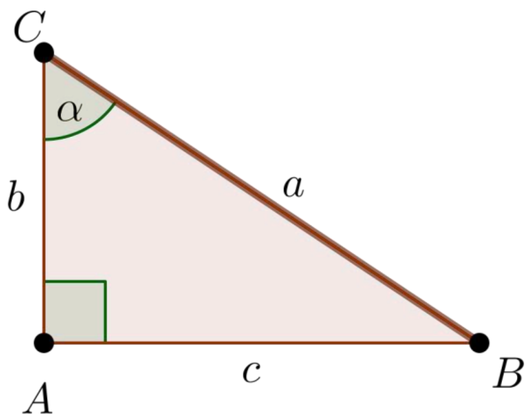
Daí, concluímos que $c^2 + b^2 = a^2$.

3.7.3. RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Dado um triângulo ABC retângulo em A, se considerarmos o ângulo $A\hat{C}B$ como sendo igual a α, como na figura a seguir, podemos definir três razões entre os lados do triângulo ABC, que denominamos razões trigonométricas de α.

Inicialmente definiremos a hipotenusa como o lado oposto ao ângulo reto, o cateto oposto, como sendo o lado oposto ao ângulo considerado e o cateto adjacente como o lado adjacente ao ângulo dado. Considerando a figura a seguir definiremos o seno, cosseno e tangente do ângulo α.

Figura 3: Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo



Fonte: Autora, 2017.

Seno: é a razão entre as medidas do cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa. Notação:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

Neste caso, temos que $sen\ \hat{B} = \frac{b}{a}$ e $sen\ \hat{C} = \frac{c}{a}$.

Cosseno: é a razão entre as medidas do cateto adjacente ao ângulo e a hipotenusa. Notação:

$$cos\ \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa}$$

Logo, temos que $cos\ \hat{B} = \frac{c}{a}$ e $cos\ \hat{C} = \frac{b}{a}$.

Tangente: é a razão entre as medidas dos catetos oposto e adjacente ao ângulo. Notação:

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}$$

Portanto, $tg\ \hat{B} = \frac{b}{c}$ e $tg\ \hat{C} = \frac{c}{b}$.

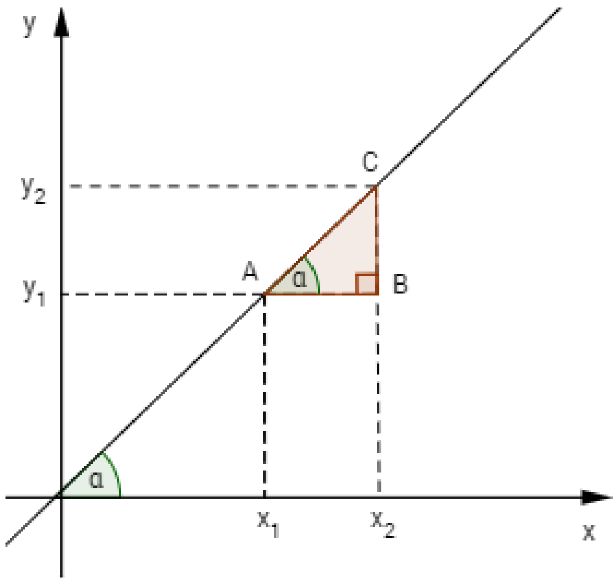
3.8. EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO

No estudo da Geometria Espacial, uma das noções intuitivas é que dois pontos distintos determinam uma reta. Ou seja, dados dois pontos distintos, existe uma única reta que passa pelos dois pontos. Da mesma forma, dado um ponto $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{y_1})$ e o coeficiente angular(declividade) $\boldsymbol{m}$, onde $m = tg\alpha$, também determinam uma reta.

Considere $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{y_2})$ um ponto qualquer dessa reta, veremos que se pode chegar a uma equação, de variáveis $\boldsymbol{x_2}$ e $\boldsymbol{y_2}$ **,** a partir do ponto dado e do coeficiente angular.

Analisando a figura abaixo e usando a relação trigonométrica da $tg\alpha$ no triângulo retângulo ABC,

Figura 4: Gráfico da reta



Fonte: Autora, 2017.

Obtemos a equação da reta, dada por:

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1).$$

3.9. ELIPSE

A elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano cujas somas das distâncias a dois pontos fixos, chamados de focos, é uma constante fixa maior que a distância entre os focos.

Com objetivo de obter uma equação cartesiana para a elipse, consideremos inicialmente os dois focos como $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$ no plano, cuja distância entre eles seja $2c$. Podemos construir um gráfico, ponto a ponto, considerando que a soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 sejam sempre um constante $2a$, tal que $2a > 2c$.

Se considerarmos os pontos no plano e o centro na origem, pela definição, temos que dado qualquer ponto $P(x, y)$sobre a curva

$$PF_1 + PF_2 = A_1F_1 + A_2F_2 = A_1A_2 = 2a,$$

obtemos:

$$PF_1 + PF_2 = 2a.$$

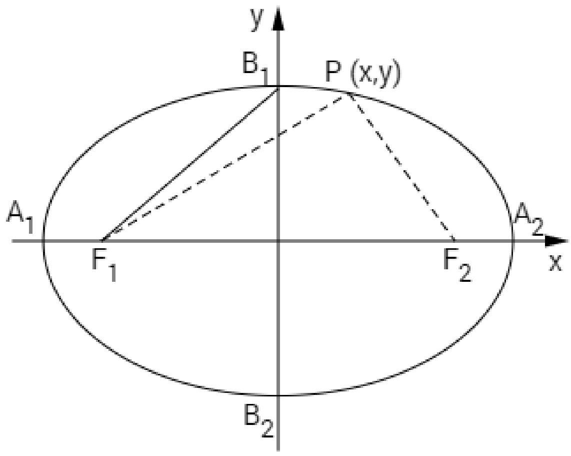
Logo, utilizando o fato de que a distância entre dois pontos quaisquer $C(x_1, y_1)$ e $D(x_2, y_2)$ é dada por $\acute{D}C = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, então

$$\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Desenvolvendo a igualdade acima e substituindo $a^2 - c^2$ por b^2, obtemos a equação da elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Figura 5: Elipse



Fonte: Autora, 2017.

A elipse é formada pelos seguintes elementos:

- $F_1 e F_2$ são os focos da elipse e a distância entre eles é a distância focal $2c$.
- Os pontos $A_1(-a,0)$ e $A_2(a,0)$ formam o segmento $A_1\acute{}A_2$ que é denominado eixo maior da elipse e sua medida equivale a $2a$(medida citada na definição).
- Os pontos $B_1(0,b)$e $B_2(0,-b)$ formam o segmento $B_1\acute{}B_2$ que é denominado eixo menor, cuja medida é $2b$.
- O ponto O é o centro da elipse.
- O número $e = \frac{c}{a}$ é a excentricidade da elipse.

Observação: Considerando o triângulo retângulo B_1OF_2, temos pelo Teorema de Pitágoras que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.10 CONGRUÊNCIA

Nesta sessão iremos abordar alguns teoremas e proposições que são de grande importância para a resolução de equações Diofantinas não lineares.

Seja m um número natural. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m forem iguais. Além disso, denotaremos por

$$a \equiv b \quad mod\, m \ .$$

Exemplo: $17 \equiv 7 \quad mod\ 5$, pois os restos da divisão de 17 e 7 por 5 é 2.

Proposição: Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que

(i) Se $a \equiv a \quad mod\, m$;

(ii) Se $a \equiv b \quad mod\, m$, então $b \equiv a \quad mod\, m$;

(iii) Se $a \equiv b \quad mod\, m$ e $b \equiv c \quad mod\, m$, então $a \equiv c \quad mod\, m$.

Demonstração**:**

OS itens (i) e (ii) são de fácil demonstração. Portanto, basta-nos demonstrar o item (iii).

Se $a \equiv b \quad mod\, m$, então existem $q_1, q_2,\ r_1, \in \mathbb{Z}$ tais que,

$$a = q_1 \cdot m + r_1 \quad e \quad b = q_2 \cdot m + r_1 \quad com,\ 0 \le r_1 < m.$$

Como $b \equiv c \quad mod\, m$, temos que existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que, $c = q \cdot m + r_1$.

Logo, por definição, $a \equiv c \quad mod\, m.$

Proposição: Dados $a, b, m \in \mathbb{Z}$ e $m > 1$. Então, $a \equiv b \quad mod\, m$ se, e somente se, $m|\ b - a$.

Demonstração:

$\Longrightarrow$) Se $a \equiv b \quad mod\, m$, então existem $q_1, q_2\ ,\ r_1, \in \mathbb{Z}$ tais que:

$$\begin{cases} a = q_1 \cdot m + r_1 \\ b = q_2 \cdot m + r_1 \end{cases} \Longrightarrow\ b - q_2 \cdot m = a - q_1 \cdot m \Longrightarrow\ b - a = (q_1 - q_2) \cdot m$$

Logo, $b - a$ é divisível por $m.$

$\Longleftarrow$)Se $m|\ b - a$, então existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que, $b - a = q \cdot m.$

Por outro lado, pela divisão euclidiana, existem $q_1, q_2\ ,\ r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\begin{cases} a = q_1 \cdot m + r_1 \\ b = q_2 \cdot m + r_2 \end{cases} \text{com },\ 0 \le r_1 < m\, e\ ,\ 0 \le r_2 < m$$

Subtraindo a segunda equação do sistema pela primeira obtemos

$$b - a = (q_1 - q_2) \cdot m + (r_2 - r_1).$$

Analisando a expressão acima temos duas conclusões: $r_2 - r_1$ é múltiplo de m ou $r_2 - r_1 = 0$. Porém, como $0 \leq r_2 - r_1 < m$, temos $r_2 = r_1$.

Assim, $a \equiv b \mod m$.

Proposição: Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$,

(i) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$, então $ac \equiv bd \mod m$.

Demonstração:

Se $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$ então , se acordo com a proposição anterior, temos

$$m \mid b - a \Longrightarrow b - a = q_1 \cdot m \text{ , com } q_1 \in \mathbb{Z};$$

$$m \mid d - c \Longrightarrow d - c = q_2 \cdot m \text{ , com } q_1 \in \mathbb{Z}.$$

(i) Somando as duas equações encontradas obtemos

$$(b - a) + (d - c) = q_1 \cdot m + q_2 \cdot m = (q_1 + q_2) \cdot m \Rightarrow$$

$$(b + d) - (a + c) = (q_1 + q_2) \cdot m$$

Assim, $m \mid (b + d) - (a + c)$, ou seja, $a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) No segundo caso, multiplicando $b = a + q_1 \cdot m$ por $d = c + q_2 \cdot m$ obtemos:

$$bd = ac + aq_2 m + cq_1 m + q_1 q_2 m^2 \Rightarrow$$

$$bd - ac = (aq_2 + cq_1 c + q_1 q_2 m) \cdot m$$

Logo, $m \mid bd - ac$. Ou seja, $ac \equiv bd \mod m$.

Corolário: Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \mod m$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \mod m$.

Demonstração:

Por indução sobre n temos:

(i) Para $n = 1$ obtemos que $a \equiv b \mod m$;

(ii) Suponhamos que $a^n \equiv b^n \mod m$ é válida para todo n. Queremos mostrar que a sentença também é válida para $n + 1$.

Pela item (ii) da proposição anterior temos que,

$$\begin{cases} a \equiv b \mod m \\ a^n \equiv b^n \mod m \end{cases} \Longrightarrow a^n \cdot a \equiv b^n \cdot b \mod m.$$

Deste modo, $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \mod m$.

4. EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES

Definição: Uma equação Diofantina é uma equação algébrica cujas incógnitas representam números inteiros.

Uma equação que contenha uma expressão do tipo $x^2, y^{-2}, x \cdot y, \frac{\sqrt{y}}{z}$, $sen(x), e^{x+z}$, entre outras, é chamada não-linear em $x, y, z,$ ..., porque ela não pode ser escrita como$ax + by + cz + \cdots = constante$ que é uma equação linear em. $x, y, z, ..$,e outras.

Nesse capítulo iremos apresentar, com suas respectivas soluções, os problemas envolvendo equações Diofantinas não-lineares que são o principal objeto de estudo desse trabalho.

Os exemplos (1, 4, 5), (2), (3) abaixo, são propostos por Moreira (2012, p. 178, 181 e 193), Tao (2013, p. 29) e Fomin (2012, p. 112), respectivamente.

Problema 1: *Determinar as soluções inteiras de* $x^2 + y^2 = z^2$.

Solução:

Inicialmente para resolver o problema acima, o aluno precisa compreender que a solução desejada é uma expressão de números inteiros que associem as três incógnitas. Essa primeira etapa caracterizamos por compreensão do problema.

Em seguida, ele deve criar um plano. Neste caso, a melhor ideia é usar a paridade dos números que auxiliará no desenvolver da solução.

A terceira etapa consiste na execução do plano. Nesta fase, a ideia inicial serviria com ponto de partida para resolver o problema, que juntamente com produtos notáveis e congruências o aluno conseguiria concluir a solução do mesmo.

Resolvendo o problema temos que, se x, y *e* z primos relativos dois a dois, chamaremos (x, y, z) de terna pitagórica primitiva. Assim, x *e* y não podem ser ambos pares.

Suponhamos que x é par. Deste modo, y será impar e teremos:

$$(2k)^2 + (2q + 1)^2 = 4k^2 + 4q^2 + 4q + 1$$

Ou seja,$x^2 + y^2 \equiv 1 \ mod\ 4.$

Note que, o quadrado de um número sempre deixa resto 0 ou 1 quando dividido por 4.Como queremos que $x^2 + y^2$ nos dê um quadrado perfeito, temos que x *e* y *não* podem ser ambos ímpares, pois o resto na divisão por 4 seria 2. Logo, z é impar.

Por outro lado,$x^2 = z^2 - y^2 = (z - y)(z + y)$. Como,$y$ *e* z são ímpares temos:

(i) $z + y$ é par;

(ii) $mdc(y, z) = 1$;

(iii) $mdc(z + y, z) = 1$;

(iv) $z - y$ é par.

Deste modo, concluímos que $mdc(2z, z + y) = mdc(z - y, z + y) = 2$. Assim, $\frac{z-y}{2}$ e $\frac{z+y}{2}$ são coprimos e seu produto é um quadrado perfeito.

Logo, pelo Teorema Fundamental da Aritmética, existem m, n naturais tais que

$$\frac{z-y}{2} = m^2 \text{ e } \frac{z+y}{2} = n^2.$$

Daí, temos que$x = 2mn$, com $mdc(m, n) = 1$.

Assim, as ternas pitagóricas primitivas que são solução da equação desejada são da forma $(2mn, n^2 - m^2, n^2 + m^2)$.

Após o desenvolver de todas as questões o professor pode propor ao aluno que utilize de uma verificação numérica para garantir que sua solução é válida para todo número inteiro. Deste modo, o mesmo já estaria se utilizando da quarta fase que é o retrospecto. Por exemplo, $m = 2$ e $n = 3$ teremos que a terna $(12,5,13)$ é uma solução inteira da equação $x^2 + y^2 = z^2$.

Note que, para determinar todas as soluções inteiras dessa equação basta-nos considerar x, y e z primos relativos dois a dois. Pois, se houver um primo p tal que p divida o $mdc(x, y)$, então p dividirá $x^2 + y^2$. Ou seja, existiria $\left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p}\right)$ que é uma terna pitagórica.

Lema: Um número inteiro n pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos, $n = x^2 - y^2$, se e somente se, n é ímpar ou múltiplo de 4.

Demonstração:

⇒Se n pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos, então n é um número ímpar ou múltiplo de 4.

Se $n = x^2 - y^2$, então vamos analisar os possíveis casos de paridade para x e y.

(i) Se x for ímpar e y par, teremos

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (2k+1)^2 - (2q)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 4q^2 \\ &= 2(2k^2 + 2k - 2q^2) = 2t + 1, \text{ com } t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(ii) Se ambos forem ímpares, obtemos

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (2k+1)^2 - (2t+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 4t^2 - 4t - 1 \\ &= 4(k^2 + k - t^2 - t) = 4q, \text{ com } q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(iii) No caso em que ambos sejam pares, teremos

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= (2k)^2 - (2t)^2 \\ &= 4k^2 - 4t^2 \\ &= 4(k^2 - t^2) = 4p, \text{ com } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Assim, n é múltiplo de 4 ou é ímpar.

⇐Se n for um número ímpar ou múltiplo de 4, então ele pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos.

Considerando n como um número ímpar, então $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{Z}$. Deste modo, podemos escrever n da forma $n = 2k + 1 = (k+1)^2 - k^2$.

Já, se n for múltiplo de 4, temos $n = 4k$, com $k \in \mathbb{Z}$. Daí obtemos,

$$n = 4k = (k+1)^2 - (k-1)^2.$$

Portanto, n pode ser escrito como a diferença de dois quadrados perfeitos.

A partir desse teorema podemos propor ao nosso aluno resolver o problema abaixo, com $x, y \in \mathbb{Z}$.

Problema 2: *Determine as soluções inteiras de cada equação abaixo.*

a) $x^2 - y^2 = 32$

b) $x^2 - y^2 = 30$

Solução:

a) Como 32 é múltiplo de 4 então, pelo teorema acima demonstrado, temos que existem dois quadrados perfeitos cuja a diferença é 32.

Note que,

$$x^2 - y^2 = 32$$
$$(x - y)(x + y) = 4 \cdot 8$$

Podemos considerar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

que tem como solução$x = 6ey = 8$.

b) No segundo item não podemos usar o teorema, pois 30 não é ímpar e também não é múltiplo de 4.

Neste caso, utilizando produtos notáveis temos:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = 30$$

Fatorando 30 como o produto de dois números distintos obtemos*:*

$$30 = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 6 \cdot 5$$

Se considerarmos $x - y = 1$ e $x + y = 30$ teremos $x = \frac{31}{2}$ e $y = \frac{29}{2}$ que não são números inteiros. Analisando os outros três sistemas obteremos resultados não-inteiros. Deste modo, a equação $x^2 - y^2 = 30$ não possui soluções inteiras.

Problema 3: *Determine todos os inteiros n para os quais a equação* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{(a+b)}$ *tenha alguma solução inteira* a *e* b *(com* a, b *e* $a + b$ *não-nulos).*

Solução:

Para resolver este exemplo utilizaremos das quatro fases para resolver um problema. Inicialmente o aluno deverá compreender o exemplo. Neste caso, o aluno deve ter maturidade para compreender que ele deseja encontrar um número inteiro n que assegure que a equação possuirá soluções a e b inteiras.

Na segunda fase ele deve criar um plano. Neste momento, ele deve observar que ao desenvolver a equação dada ele obterá uma equação do 2º grau de incógnita a. Isso facilitará a execução do plano e o auxiliará na conclusão do problema, pois ao analisar as raízes da equação ele usará o fato delas precisarem ser inteiras.

A partir da equação dada obtemos:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{n}{(a+b)} \Rightarrow \frac{b+a}{a\cdot b}=\frac{n}{(a+b)} \Rightarrow (a+b)^2 = nab\ (*)$$

Desenvolvendo o trinômio quadrado perfeito encontrado temos

$$a^2+2ab+b^2-nab=0 \Longrightarrow$$

$$a^2+(2-n)ba+b^2=0$$

uma equação do 2º grau sob a variável *a*. Temos

$$\Delta = [(2-n)b]^2-4b^2 \Longrightarrow$$

$$\Delta = (4b^2-4b^2n+n^2b^2)-4b^2 \Longrightarrow$$

$$\Delta = n^2b^2-4b^2n.$$

Isso implica,

$$a=\frac{-(2-n)b \pm \sqrt{n^2b^2-4b^2n}}{2} \Longrightarrow$$

$$a=\tfrac{b}{2}\left[(n-2)\pm\sqrt{n^2-4n}\right].$$

Completando quadrados

$$a=\tfrac{b}{2}\left[(n-2)\pm\sqrt{(n-2)^2-4}\right].$$

Neste momento o aluno pode não saber qual será o próximo passo deve ser tomando. Então, o professor pode propor que o mesmo leve em consideração o fato do número a e b serem inteiros e questioná-lo sobre que condição a raiz acima seria inteira.

Analisando a expressão de a e sabendo que a, b e n são inteiros temos que $(n-2)^2-4$ deve ser um quadrado perfeito.

Note que, $(n-2)^2-4=(n-2-2)(n-2+2)=(n-4)n.$ Ou seja, para obtermos um quadrado perfeito $n=0$ ou $n=4$. Deste modo, estudando cada caso separadamente temos:

(i) Se $n = 0$, substituindo *n* em $(*)$, obtemos $(a+b)^2 = 0$. Isso só ocorrerá se $a + b = 0$, o que é uma contradição pois $a + b$ é não nulo;

(ii) No caso em que $n = 4$, em $(*)$ teremos

$$(a+b)^2 = 4ab$$
$$(a-b)^2 = 0$$

Assim, concluímos que $a = b$. Logo, a resposta do problema é $n = 4$.

Após resolver o problema o aluno deve ser estimulado a revisar a sua solução para que o mesmo tenha certeza dos resultados obtidos e, além disso, propor substituir o valor de n por *4* para se obter os possíveis soluções da equação.

Problema 4: *Determinar valores m,n inteiros tais que* $3^m + 7 = 2^n$.

Solução:

Utilizando congruências temos que

$$3^m + 7 \equiv 1 \ mod\ 3 \ \text{ e } \ 2 \equiv -1 \ mod\ 3.$$

Então, para $2^n \equiv 1 \ mod\ 3$ o número n deve ser par.

Considerando n um número par, então

$$3^m + 7 = 2^{2k} \Longrightarrow$$
$$3^m + 7 = 4^k \Longrightarrow$$
$$3^m = 4^k - 7.$$

Note que $4^k - 7 \equiv 1 \ mod\ 4$, assim $3^m \equiv 1 \ mod\ 4$. O que nos leva a conclusão de que m é par, ou seja,

$$3^{2t} + 7 = 2^{2k}, \text{ com } k,t \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$2^{2k} - 3^{2t} = 7 \Longrightarrow$$
$$(2^k - 3^t)(2^k + 3^t) = 7.$$

Como 7 é primo, temos as seguintes fatorações *-1* e *-7* ou *1* e *7.*

Portanto, $2^k - 3^t = 1$ e $2^k + 3^t = 7$ para $k = 2$ e $t = 1$. O que nos dá $m = 2$ e $n = 4$ é a única solução da equação desejada.

Problema 5: *Mostre que o quadrado de um número ímpar sempre deixa resto 1 quando dividido por 8.*

Solução:

Seja x um número ímpar, então $x = 2k + 1$, com k um número inteiro.

Queremos mostrar que $x^2 = 8t + 1$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Dado então $x = 2k + 1$ temos

$$x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1.$$

Se k for um número par, ou seja, $k = 2q, q \in Z$, obtemos

$$x^2 = 4(2q)^2 + 4(2q) + 1 = 16q^2 + 8q + 1$$
$$x^2 = 8(2q^2 + q) + 1 = 8t + 1,$$

com $t = 2q^2 + q$ e $t \in \mathbb{Z}$.

Se k for ímpar, então

$$x^2 = 4(2q + 1)^2 + 4(2q + 1) + 1 = 4(4q^2 + 4q + 1) + 8q + 4 + 1$$
$$= (16q^2 + 16q + 4) + 8q + 4 + 1 = 8(2q^2 + 3q + 1) + 1 = 8t + 1,$$

com $t = 2q^2 + 3q + 1$ e $t \in \mathbb{Z}$.

Assim, concluímos que o quadrado de um número ímpar sempre deixa resto 1 quando dividido por 8.

Problema 6: *Determinar todas as soluções inteiras da equação* $a^2 + 3b^2 = 13c^2$.

Solução:

Dada a equação $a^2 + 3b^2 = 13c^2$, se a dividirmos por c^2 obtemos $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + 3\left(\frac{b}{c}\right)^2 = 13$. Se chamarmos $\left(\frac{a}{c}\right) = x$ e $\left(\frac{b}{c}\right) = y$ teremos $x^2 + 3y^2 = 13$, que é uma elipse centrada na origem do plano cartesiano e que possui como uma de suas soluções os pares $(\pm 1, \pm 2)$.

Note que, se considerarmos a reta que passa pelos pontos $(-1, -2)$, $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$ e tem como coeficiente angular um número racional $\frac{m}{n}$; e a elipse dada, encontraremos $x, y \in \mathbb{Z}$ que são soluções de ambas as equações.

A reta considerada acima tem como equação $y = \frac{m}{n}x + \frac{m-2n}{n}$.

Então, para resolvermos o problema, basta encontrarmos a solução do sistema

$$\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 13 \\ y = \dfrac{m}{n}x + \dfrac{m-2n}{n} \end{cases}$$

Usando o método da substituição obtemos

$$x^2 + 3\left(\frac{m}{n}x + \frac{m-2n}{n}\right)^2 = 13 \Longrightarrow$$

$$x^2 + \frac{3}{n^2}(mx + m - 2n)^2 = 13 \Longrightarrow$$

$$x^2 + \frac{3}{n^2}[m(x+1) - 2n]^2 = 13 \Longrightarrow$$

$$x^2 + \frac{3}{n^2}[m^2(x+1)^2 - 4mn(x+1) + 4n^2] = 13 \Longrightarrow$$

$$x^2 + \frac{3}{n^2}[m^2(x^2+2x+1) - 4mnx - 4mn + 4n^2] - 13 = 0 \Longrightarrow$$

$$x^2\,\frac{(n^2+3m^2)}{n^2} + x\,\frac{(6m^2-12mn)}{n^2} + \frac{(3m^2-12mn-n^2)}{n^2} = 0.$$

Multiplicando a equação acima por $\dfrac{n^2}{n^2+3m^2}$ teremos que

$$x^2 + x\,\frac{(6m^2-12mn)}{n^2+3m^2} + \frac{(3m^2-12mn-n^2)}{n^2+3m^2} = 0.$$

Note que, $x = -1$ é solução da equação, pois pertence a reta e a elipse. Então, utilzando uma das relações de Girard, temos:

$$x = \frac{n^2+12mn-3m^2}{n^2+3m^2} = \frac{a}{c}.$$

Deste modo, substituindo a expressão encontrada pra x no sistema inicial

$$y = \frac{m}{n}\left(\frac{n^2+12mn-3m^2}{n^2+3m^2}\right) + \frac{m-2n}{n}.$$

Logo,

$$y = \frac{2mn+6m^2-2n^2}{n^2+3m^2} = \frac{b}{c}.$$

Como ambas coordenadas possuem mesmo denominador temos que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = \frac{k}{d}(n^2 + 12mn - 3m^2)$$

$$b = \frac{k}{d}(2mn + 6m^2 - 2n^2)$$

$$c = \frac{k}{d}(n^2 + 3m^2)$$

Onde $d = mdc(n^2 + 12mn - 3m^2, 2mn + 6m^2 - 2n^2, n^2 + 3m^2)$.

5. PLANO DE AULA

Neste capítulo iremos apresentar alguns planos de aula, como forma de direcionar qual problema o professor deve propor e para que tipo de aluno. Além disso, iremos sugerir várias atividades de ordem gradativa que possam auxiliar o professor na revisão de cada conteúdo em específio e preparar o aluno para a resolução de problemas de equação Diofantina não linear.

Os problemas enunciados sobre equações diofantinas não lineares podem ser trabalhados com os alunos de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental II, com o objetivo de desenvolver alguns conceitos matemáticos da grade curricular em questão.

TABELA 1: Proposta de plano de aula

Plano de aula **Data: __/__/___**	
I-	***Dados de Identificação*** ***Escola:*** ***Professor(a):*** ***Disciplina: Matemática*** ***Turma: 8º e 9º ano do Ensino Fundametal II***
II-	***Tema:*** Resolução de problemas envolvendo equações diofantinas não lineares.
III-	***Objetivos:*** • ***Objetivo Geral:*** Desenvolver a capacidade de resolver problemas matemáticos a partir de uma argumentação teórica. • ***Objetivo Específico:*** Identificar meios e conceitos necessários para se resolver um problema matemático.

IV-	***Desenvolvimento do Tema:*** Aula expositiva e dialogada. Nesta aula, iniciaremos com a apresentação do conceito de uma equação diofantina não linear, exemplificando-a. Em seguida, será feito um embasamento teórico através de um aprofundamento de conceitos tido como prévios. Logo depois, expor métodos para auxiliar a resolução de um problema. Por fim, concluiríamos com a resolução de alguns problemas envolvendo equações diofantinas não lineares.
V-	***Recursos didáticos:*** Quadro branco, giz, apagador, material de estudo, entre outros.
VI-	***Avaliação:*** Avaliação diagnóstica, formativa ou somativa. Estas podem ser realizadas a partir de diálogos, atividades diárias ou uma avaliação final.

5.1. PLANO DE AULA PARA O 8º ANO

Um dos conteúdos estudados no 8º ano são as expressões algébricas, onde o aluno deve interpretar um problema ou sentença matemática criando uma expressão que melhor represente aquela situação.

Nesta seção, iremos apresentar algumas equações matemáticas nas quais os alunos teram que usar essa interpretação para resolvê-las. Além disso, iremos propor uma notação diferente para o estudo da divisão euclidiana.

Para sugerir esses problemas e melhorar o desempenho dos alunos, o professor terá que revisar alguns conteúdos básicos, como: paridade dos números, divisão Euclidiana, produtos notáveis e potenciação. Cabendo a ele analisar e decidir quanto tempo e quais conteúdos devem ser mais explanados ou não.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas:

- **AULA 1**

Paridade dos números

- Conceito de número par e ímpar;
- Propriedades da adição e multiplicação dos números pares e ímpares.

Produtos Notáveis

- O quadrado da soma e da diferença;
- Produto da soma pela diferença;
- O cubo da soma e da diferença.

Exercício proposto (APÊNDICE A)

- **AULA 2**

Divisão Euclidiana

- Teorema

Congruência

- Definição;
- Alguns resultados principais.

Potenciação

- Definição;
- Diferença entre a potenciação de número inteiro com expoente par e ímpar.

Exercício Proposto (APÊNDICE B)

- **AULA 3**

Resolução de Problemas matemáticos

- Definição de equações diofantinas não lineares;
- Orientar os alunos sobre as quatro fases que este deve seguir para obter a melhor solução de um problema.

Exercício Proposto (APÊNDICE C)

5.2. PLANO DE AULA PARA O 9º ANO

Para o estudo das equações Diofantinas não lineares, a grade curricular do 9º ano do ensino Fundamental II é uma das melhores, pois engloba vários conceitos matemáticos básicos que são de suma importância para resolvê-las.

Neste plano de aula, iremos sugerir para o professor os conteúdos que devem ser trabalhados, os conceitos que devem ser revisados e alguns exemplos e atividades que podem ser executados em sala de aula.

Sugestões para o desenvolvimento das aulas:

- **AULA 1**

Sistema de equação com duas incógnitas

- Método da adição;
- Método da substituição**.**

Produtos Notáveis

- O quadrado da soma e da diferença;
- Produto da soma pela diferença;
- O cubo da soma e da diferença.

Exercício proposto (APÊNDICE D)

AULA 2

Equação do 2º grau

- Método de resolução.

Exercício Proposto (APÊNDICE E)

- **AULA 3**

Relações métricas e Trigonométricas no triângulo retângulo

- Teorema de Pitágoras;
- Seno, cosseno e tangente.

Equação de uma reta no plano

- Definição;
- Coeficiente angular.

Elipse

- Equação algébrica.

Exercício Proposto (APÊNDICE F)

- **AULA 4**

Resolução de Problemas matemáticos

- Definição de equações diofantinas não lineares;
- Orientar os alunos sobre as quatro fases que este deve seguir para obter a melhor solução de um problema.

Exercício Proposto (APÊNDICE G)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante todo o processo de desenvolvimento do trabalho podemos observar a importância de Polya como referencial clássico nas propostas de resolução de um problema. Pois, foi a partir dele que estudos foram realizados sobre o desenvolvimento do ensino da matemática através da resolução de problemas.

O ensino de matemática baseado na resolução pode ser uma excelente proposta para o desenvolvimento do nossos alunos em alguns pontos específicos, como: o raciocínio, das capacidades de interpretações, independência na tomada de decisão, e principalmente, na argumentação. Esses pontos, entre outros, são os que melhor caracterizam a importância do processo de ensino e aprendizagem por meio da construção e desenvolvimento de conceitos partindo da resolução de um problema.

Concordamos com Fischer (2001, p.61) *apud* Damaceno (2011) que diz:

> Quando expõe seus pensamentos, explica como interpretou um problema e demonstra o raciocínio que usou para resolvê-lo, o aluno organiza ideias e reflete sobre tudo aquilo que aprendeu. Ao avaliar os procedimentos de resolução utilizada pelos colegas, ele descobre novos caminhos para calcular. De tão importantes e úteis, essas situações de intercâmbio de informações precisam ser recorrentes, fazendo parte da rotina.

O professor que busca através da resolução de problemas ensinar conceitos e desenvolvê-los, ele consegue dar significado ao conteúdo estudado pelo seu aluno. Ele, através disso, alcança um melhor desempenho e interesse do aluno pelo conteúdo estudado e principalmente pela própria matemática.

Porém, neste trabalho, nós propomos que o processo de ensino e aprendizagem por meio de resolver problemas se dê de forma simples e gradativa, onde as atividades iniciais sejam de fácil interpretação e somente ao longo da aulas o grau de dificuldade pode ficar mais elevado. Assim, o professor, ao invés de assustar o seu aluno, ele atraíra e desenvolverá o gosto pelo estudo da matemática.

Observamos que nenhuma proposta de ensino é garantia para o progresso do ensino em sala de aula, mas consideramos que toda a forma de sugestão pode ser de grande valia. Ao escolhermos o método de resolução de problemas para o desenvolvimento do estudo da matemática, nós professores podemos estar cientes que estaremos preparando o nosso aluno, não apenas para a compreensão e desenvolvimento dos conteúdos, mas estamos dando a chance do aluno ter uma visão diferente de mundo, ajudando-o a ser um indivíduo que constrói e modifica o mundo que o cerca.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais : matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

DAMACENO, Daiane S. et al. **A resolução de problemas e os aspectos significativos da sua prática nas salas de aulas de matemática.** Paraná, out. 2011. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/nupem/anais_vi_epct/trabalhos_completos/Ciencias_exatas.html> Acesso em: 19 de jan. 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto VOAZ Matemática.** _ 1. Ed. São Paulo: Ática, 2012.

FOMIN, D.;GENKIN, S.;ITENBERG, **I.Círculos Matemáticos – A experiência Russa**. Traduçãode Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MOREIRA, C. T.; MARTÍNEZ, F. E.; SALDANHA, N.C. **Tópicos de Teoria dos Números.**1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

OLIVEIRA, C. N. C. de et al. **Para viver juntos: Matemática, 9º ano: Ensino Fundamental,** São Paulo: Edições SM, 2008.

OLIVEIRA, K.; FERNÁNDEZ, A. **Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

ONUCHIC, L. De La R. **Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.(Org.) PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: CONCEPÇÃO E PERSPECTIVAS. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-218.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas – um novo aspecto no método matemático.** Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: interciência,1995.

TAO, Terence. **Como Resolver Problemas Matemáticos - Uma perspectiva pessoal.** 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

APÊNDICE A

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

Série: 8º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 1

1. Como escrever dois números pares consecutivos? E dois números ímpares consecutivos?

2. Maria e colegas estão sentados em volta de uma mesa circular, e isso de modo que ambos os vizinhos de cada colega são do mesmo sexo. Sabendo que cinco dos colegas de Maria são homens, pergunta-se a quantidade de mulheres.

3. Desenvolva os seguintes expressões :

   a) $(7a - b)^2$
   b) $(a^2 + 4b)^2$
   c) $(3x - a)(3x + a)$
   d) $(2a + 1)^3$
   e) $(3b - 2)^3$

4. (OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15$, qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

   a) 64
   b) 109
   c) 120
   d) 124
   e) 154

5. O cubo de um número ímpar é par ou ímpar?

6. O quadrado de um número ímpar somado com o cubo de um número par é sempre par? Justifique sua resposta.

APÊNDICE B

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

Série: 8º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 2

1. Ache o quociente e o resto da divisão

   a) De 27 por 5
   b) De 38 por 7

2. (ENC-2002) O resto da divisão do inteiro N por 20 é 8. Qual é o resto da divisão de N por 5?

3. (ENC 98) O resto da divisão de 12^{12} por 5 é:

   a) 0
   b) 1
   c) 2
   d) 3
   e) 4

4. Prove que $(999994)^{1234567890} - 1$ é divisível por 333331.

5. Prove que se n é ímpar então $n^2 - 1$ é divisível por 8.

APÊNDICE C

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

Série: 8º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 3

1. Mostre que o quadrado de um número ímpar sempre deixa resto 1 quando dividido por 8.

2. Mostre, para todo $n \in \mathbb{N}$, que

a) $10^{2n} \equiv 1 \; mod \; 11$
b) $10^{2n+1} \equiv -1 \; mod \; 11$

3. Mostre que $13^{3n} + 17^{3n} \equiv 0 \; mod \; 45$, para todo número natural ímpar n.

4. Determinar valores m, n inteiros tais que $3^{\mathrm{m}} + 7 = 2^{\mathrm{n}}$.

APÊNDICE D

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

Série: 9º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 4

1. Uma certa importância deve ser dividida entre 10 pessoas em partes iguais. Se a partilha fosse feita somente entre 8 dessas pessoas, cada uma destas receberia R$ 5000,00 a mais. Calcule a importância.

2. Passarinhos brincam em voltade uma velha árvore. Se dois passarinhos pousam em cada galho, um passarinho fica voando. Se todos os passarinhos pousam, com três em cada galho, um galho fica vazio. Quantos são os passarinhos?

3. (OBM) Se $x + y = 8$ e $xy = 15,$ qual é o valor de $x^2 + 6xy + y^2$?

   f) 64
   g) 109
   h) 120
   i) 124
   j) 154

4. O cubo de um número ímpar é par ou ímpar?

APÊNDICE E

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

Série: 9º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 5

1. Determine dois números consecutivos ímpares cujo produto seja 195.

2. A diferença entre as idades de dois irmãos é de 3 anos e o produto de suas idades é 270. Qual é a idade de cada um?

3. Leia o texto e resolva a equação.

   Você sabia que a equação do 2º grau também serve para mandar mensagens de amor? Tente resolvê-la.

$$x^2 - 2amox + a^2m^2o^2 - t^2e^2 = 0$$

4. (Gazeta Matemática, Romênia) Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabendo que a equação

$$(ax - b)^2 + (bx - a)^2 = x,$$

   tem uma raiz inteira, encontre os valores de suas raízes.

APÊNDICE F

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

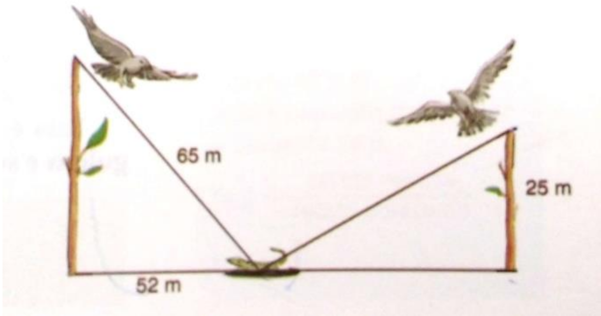
Série: 9º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 6

1. Dois gaviões, cada um no topo de uma árvore, avistam um lagarto entre duas árvores e lemçam-se ao mesmo tempo em direção ao lagarto. Se ambos percorreram a mesma distância até chegar ao lagarto, calcule o que se pede em cada item:

a) A altura da árvore maior.
b) A distância que havia entre o lagarto e a árvore menor.



(fonte: Oliveira, 2008)

2. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto (1, 6) e tem inclinação de 45º.

3. (UFT-TO) Considere $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $b \in \mathbb{R}$. Encontre os valores de b, tais que no plano cartesiano xy, a reta $y = x + b$ intercepta a elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ em um único ponto. A soma dos valores de b é:

a) 0
b) 2
c) $2\sqrt{5}$
d) $\sqrt{5}$
e) $-2\sqrt{5}$

4. (Fuvest-SP) A elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4}$ e a reta $y = 2x + 1$, do plano cartesiano, se interceptam nos pontos A e B. Pode-se, pois, afirmar que o ponto médio do segmento AB é:

a) $\left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{3}\right)$ c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{-5}{3}\right)$ d) $\left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e) $\left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

APÊNDICE G

ESCOLA: ___________________________________

Aluno(a): ___________________________________

Professor(a):________________________________

Série: 9º ano **Turma:**___

Data: ___/___/___

ATIVIDADE 7

1. Determine todos os inteiros *n* para os quais a equação $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{n}{(a+b)}$ tenha alguma solução inteira *a* e *b* (com *a*, *b* e *a* + *b* não-nulos).

2. Encontre todos os triângulos retângulos com lados inteiros e um cateto igual a 30.

3. Determinar todas as soluções naturais da equação $x^2 - y^2 = 1988$.

4. Determinar todas as soluções inteiras da equação $a^2 + 3b^2 = 13c^2$.