

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

EVERTON SOARES CANGUSSÚ

**O ENSINO DE SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA
COM O AUXÍLIO DE LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO**

SÃO LUÍS-MA

2013

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

EVERTON SOARES CANGUSSÚ

**O ENSINO DE SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA
COM O AUXÍLIO DE LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre pelo PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão.

Orientador: Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva

SÃO LUÍS-MA

2013

Universidade Federal do Maranhão
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

EVERTON SOARES CANGUSSÚ

O ENSINO DE SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA COM
O AUXÍLIO DE LINGUAGEM DE PROGRAMAÇÃO

Área do Conhecimento: Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em:/...../.....

Prof. Dr. João de Deus Mendes da Silva
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. José Cloves Verde Saraiva
Universidade Federal do Maranhão

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto
UNESP

Aos meus pais, esposa e filhos.

AGRADECIMENTO

Ao Grande Arquiteto do Universo, pelo dom da vida.

Ao meu pai, Juraci Vales Cangussú por ensinar a ser justo e honesto e a minha mãe, Zelita Soares Cangussú pelo carinho e sabedoria cultural e Cristã, pilares de uma boa educação.

À minha esposa Adriana, por acreditar e apoiar-me sempre e aos meus filhos João Paulo, Davi Lucas e Mariana pela compreensão.

À Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, pela iniciativa de criar e implantar este audacioso projeto, que tem por fim, a melhoria do ensino de matemática básica no Brasil.

À Universidade Federal do Maranhão-UFMA, por aceitar esta parceria para qualificar professores do Estado do Maranhão e estados vizinhos.

À Capes pelo suporte financeiro.

Aos professores e amigos do Departamento de Matemática do IFMA - Monte Castelo, pelo apoio dedicado.

Aos professores do PROFMAT, em especial ao meu orientador, Professor Dr. João de Deus Mendes da Silva pela compreensão, pelas críticas, pelo incentivo e pela sua dedicação ao Programa.

Aos colegas da turma PROFMAT-MA 2011, pelos momentos de aprendizagem e companheirismo.

"... a matemática, olhada corretamente, possui não apenas verdade, mas suprema beleza - uma beleza fria e austera, como a de uma escultura... sublimemente pura e capaz de perfeição severa, tal como somente a arte de maior qualidade pode apresentar".

Bertrand Russell.

RESUMO

Este trabalho versa sobre uma metodologia de ensino de sequências de recorrência como ferramenta na resolução de problemas combinatórios, de regularidade geométrica e numérica, de dinâmica populacional e de matemática financeira. Mostra a necessidade de reconhecer padrões, de criar modelos matemáticos através de sequências numéricas ou de recorrência, e de simular e analisar resultados numéricos através do uso da tecnologia, neste caso, em específico a linguagem de programação Basic, como ferramenta de aprendizagem.

PALAVRAS CHAVE: Padrões Matemáticos, Sequências de Recorrência, Basic.

ABSTRACT

This work concerns about a teaching methodology of recurrence sequences as tool for solving combinatorial problems, numerical and geometrical regularity, population dynamics and financial mathematics. Shows the requirement of standard recognition, create mathematical models through numerical sequences or recurrence, simulate and analyze numerical results by the technology uses, in this specific situation the Basic Programming Language, as a learning tool.

KEYWORDS: Mathematical Standards, Recurrence sequences, Basic.

Lista de Figuras

Figura 1	Número triangular	22
Figura 2	Sequência dos números triangulares	22
Figura 3	Sequência dos números quadrangulares	23
Figura 4	Sequência dos números pentagonais	24
Figura 5	População de coelhos	28
Figura 6	Sequência de triângulos	37
Figura 7	Curva de Koch - etapa 1	38
Figura 8	Curva de Koch - etapa 2	38
Figura 9	Curva de Koch - etapa 3	39
Figura 10	Transformações do Floco de Neve de Koch	41
Figura 11	Hexágono e o Floco de Neve	41
Figura 12	Área do floco de neve	41
Figura 13	Quantidade de regiões em cada etapa	44

Figura 14	Quatro círculos secantes	46
Figura 15	Operações aritméticas simples	52
Figura 16	Inserindo informações	53
Figura 17	Termos de uma Progressão Geométrica	55
Figura 18	Termos de uma Progressão Aritmética	57
Figura 19	Termos de uma Sequência de Fibonacci	58
Figura 20	Sequência de Fibonacci com 1 termo	60
Figura 21	Sequência de Fibonacci com 2 termos	60
Figura 22	Sequência de Fibonacci com 12 termos	60
Figura 23	Quantidade de Palitos para formar o triângulo de ordem 4	62
Figura 24	Simulação de área e perímetro	63
Figura 25	Etapa de um perímetro dado.	64

Lista de Tabelas

Tabela 1	Análise da curva de Koch	39
Tabela 2	Análise do floco de neve de Koch	42
Tabela 3	Sequências formadas por 0 e 1	43
Tabela 4	Número de regiões R_n	45
Tabela 5	Comandos iniciais.	51
Tabela 6	Comandos de looping.	54

Sumário

1	INTRODUÇÃO.....	12
1.1	Justificativa.....	12
1.2	Objetivos.....	15
1.2.1	Objetivo Geral.....	15
1.2.2	Objetivos Específicos.....	15
1.3	Público alvo.....	16
1.4	Requisitos.....	16
1.5	Materiais e tecnologias.....	16
1.6	Recomendações Metodológicas.....	17
1.7	Dificuldades previstas.....	17
1.8	Descrição detalhada.....	17
2	PADRÕES MATEMÁTICOS.....	18
2.1	Sequências Numéricas.....	18
2.1.1	Progressão Aritmética.....	18
2.1.2	Progressão Geométrica.....	20
2.2	Números Figurados.....	22
2.2.1	Números Triangulares.....	22
2.2.2	Números Quadrangulares.....	23
2.2.3	Números Pentagonais.....	24
3	SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIA.....	26
3.1	Definição.....	26

3.2	Sequência de Fibonacci	27
3.3	Recorrências Lineares de Primeira Ordem.....	29
3.3.1	Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneas	30
3.3.2	Recorrências Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Unitários	30
3.3.3	Recorrências Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes	31
3.4	Recorrências Lineares de Segunda Ordem Homogêneas com Coeficientes Constantes	33
4	APLICAÇÕES DAS SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIA	35
4.1	Progressão aritmética	35
4.2	Progressão geométrica	36
4.3	Padrões Geométricos.....	37
4.4	Fractais	38
4.5	Análise Combinatória	43
4.5.1	Sequência Numérica	43
4.5.2	Regiões formadas por Círculos	44
4.6	Probabilidade.....	46
4.7	Dinâmica Populacional da Tilápia do Nilo	48
4.8	Financiamento.....	49
5	Linguagem de programação - BASIC.....	50
5.1	Comandos iniciais	51
5.2	Comandos de Looping	53
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES.....	65
	REFERÊNCIAS.....	68

1 INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa

Os livros didáticos de matemática utilizados no Ensino Médio, na maior parte, abordam padrões numéricos limitando-se a abordar, progressões aritméticas e geométricas. Este tratamento é reforçado pelos professores ao ensinarem progressões de forma estanque e descontextualizado.

Acreditamos que, se a abordagem desses conteúdos iniciar por meio da observação de diferentes padrões, o aluno poderá chegar às generalizações matemáticas necessárias com maior apropriação do conteúdo estudado, isto é, utilizando representações por meio da linguagem algébrica com maior coerência, propiciando ao aluno o desenvolvimento de capacidades como preconiza os PCN(1998).

“O ensino de Matemática deve garantir o desenvolvimento de capacidades como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia e estimativa". (PCN-EF,1998, p.56)

Esses padrões que nos rodeiam podem ser numéricos, geométricos, de movimento e do espaço. Os padrões estão na forma como organizamos nossos objetos, na forma como caminhamos, na enumeração de um diário de classe, no calendário, enfim, os padrões estão em várias situações cotidianas e também científicas. Realmente vivemos em um universo de padrões e a Matemática é uma das ciências responsável pela criação de teorias que revelam os segredos da natureza, mostrando variados padrões, os quais podem ser transformados em seqüências numéricas, como por exemplo, o das pétalas das margaridas seguem o padrão da seqüência de Fibonacci.

O papel do professor é apresentar o mundo dos padrões para o aluno, para que,

admirado com esta matemática observável e aparentemente agradável de estudar, ele possa se interessar pelo aprofundamento dos conceitos e realmente perceber que não se trata de uma ciência alheia à realidade. Este mundo dos padrões é na verdade, segundo DEVLIN (2002), o objeto de estudo dos matemáticos contemporâneos.

“O que o matemático faz é examinar "padrões" abstratos - padrões numéricos, padrões de forma, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc. Esses padrões tanto podem ser reais como imaginários, visuais ou mentais, estáticos ou dinâmicos, qualitativos ou quantitativos, puramente utilitários ou assumindo um interesse pouco mais recreativo. Podem surgir a partir do mundo à nossa volta, das profundezas do espaço e do tempo, ou das atividades mais ocultas da mente humana.”(DEVLIN, 2002, p. 9)

Essa maneira de olhar a matemática não é recente, desde os primórdios da civilização o homem observa padrões no comportamento das estrelas, nas estações do ano, nos números e nas formas. Um caso em particular, aconteceu com os egípcios ao organizar períodos em tempos de enchente e estiagem para o plantio às margens do Nilo.

Segundo STEWART (1996), o ser humano tem a capacidade de encontrar padrões em diversas situações, sendo uma característica inerente à mente humana.

“A mente e a cultura humanas desenvolvem um sistema formal de pensamento para reconhecer, classificar e explorar padrões. Nós o chamamos matemática. Usando a matemática para organizar e sistematizar nossas idéias a respeito de padrões, descobrimos um grande segredo: os padrões da natureza não existem somente para ser admirados, eles são pistas vitais para as regras que governam os processos naturais.”(STEWART, 1996, p. 11)

Generalizar situações que apresentam um certo padrão é um comportamento comum, tanto que, em muitas vezes esse comportamento pode nos levar a erros. Devemos aproveitar esta característica e através da coerência inerente a matemática, aperfeiçoar-se na busca de padrões através do reconhecimento destes em várias formas, da resolução de problemas que necessitem de observação, seleção dos dados, representação geométrica, algébrica ou

aritmética, interpretação e generalização. Este é um comportamento que direciona as pessoas no desenvolvimento do pensar matemático e conseqüentemente em qualquer outra forma de pensar.

A resolução de problemas é uma excelente estratégia de aprendizagem, visto que, o aluno tem a oportunidade livre de observar dados, organizá-los, representá-los e propor soluções. Esta liberdade de pensar, colabora para o despertar cognitivo.

“A resolução de problemas é peça central para o ensino de matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Esta competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação de conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de usar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.”(PCN+, 2002, p.112)

Observa-se que, em muitos casos, a práxis é discordante da teoria. Em sala de aula, em diversos momentos, é meramente a repetição de algoritmos sem significação para o aluno acompanhado de conteúdos estanques pré-selecionados pelo professor. A falta de domínio de conteúdo, de segurança no ato de ensinar de muitos professores proporcionam a extinção, propriamente dita, da geometria no ensino fundamental, o que provoca um déficit na formação do aluno difícil de ser recuperado. Há no ensino fundamental um exagero algébrico gerado por um pensamento platônico da matemática, em detrimento à busca de padrões, de estudar problemas que gerem uma reflexão por parte do aluno. Esta prática estende-se ao Ensino Médio, a ponto de estudarem funções e sequências numéricas de forma puramente algébrica e isoladas.

O ensino de matemática, devido a sua fragmentação, tornou-se a apresentação e o acúmulo de conteúdos disjuntos, onde o estudante e até mesmo o professor, estuda/ensina um compêndio de técnicas isoladas, de forma que, não consegue relacioná-las entre si e tampouco com outras áreas do conhecimento. Esta desassociação dentro do ensino de matemática, reforçada pelo conteudismo na prática docente, produz alunos com pouca formação matemática, pessoas incapazes de aplicar os mais introdutórios conceitos matemáticos no dia-a-dia.

O trabalho propõe apresentar o estudo de padrões como um todo, fixando o eixo principal sobre as sequências de recorrência, que se apresentam como uma teoria capaz de relacionar o comportamento regular de certas estruturas modeladas através de equações que podem ser manipuladas algebricamente e/ou computacionalmente. O diferencial está em oferecer uma abordagem que ao invés de fragmentar conteúdos, analisa as informações oferecidas quanto as suas regularidades, ou seja, procura buscar a ordem existente nas estruturas. Esta forma de abordar problemas, além de ser natural do ser humano, desenvolve o caráter investigativo e organizacional dos estudantes, ajudando-os na percepção de relações entre outras estruturas nas mais variadas áreas do conhecimento.

A abordagem proposta oferece o uso de uma linguagem de programação, o Basic, como forma de aplicar diretamente o conceito de recorrência e sua aplicabilidade na resolução de problemas, usando algoritmos que resolvem relações de recorrência através de procedimentos recursivos.

É importante ressaltar, que a principal função da implementação computacional não deve ser unicamente a de ensinar, mas sim também, a de criar condições de aprendizagem, onde o professor é o mediador deste processo, agindo como facilitador, criando situações que promovam a aprendizagem significativa. É papel do professor apresentar casos que despertem no aluno a predisposição para aprender, e para este fim, acredita-se que, o uso de recursos computacionais é muito importante.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Apresentar uma proposta de ensino de sequências de recorrências, com o auxílio de linguagem de programação no Ensino Médio.

1.2.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos podem-se enumerar:

- Identificar padrões pictóricos, numéricos e algébricos;
- extrair informações relevantes;
- representar o problema na forma algébrica, numérica ou pictórica, caso possível;

- generalizar dados;
- modelar problemas usando sequências de recorrência;
- resolver analiticamente problemas por meio de sequências de recorrência;
- aplicar o conceito de recorrência como ferramenta na programação em Basic;
- simular e comparar resultados através do Basic.

1.3 Público alvo

Professores e estudantes do ensino médio/técnico do IFMA - Campus Monte Castelo em São Luís/MA, bem como de outras Escolas.

1.4 Requisitos

O aluno deverá ter conhecimentos prévios sobre:

- Equações do primeiro e segundo graus;
- funções;
- geometria plana - polígonos regulares e simetrias;
- sequências numéricas: progressão aritmética e geométrica.
- conhecimentos básicos de computação: word, excel e internet.

1.5 Materiais e tecnologias

Além dos requisitos pedagógicos tradicionais, o aluno necessitará de computador com o FreeBasic instalado. Este software é de domínio público e de fácil uso. Trata-se de uma linguagem de programação que possibilitará ao aluno ter um primeiro contato com programação, percebendo assim, a necessidade do uso de conceitos recursivos para criar programas.

1.6 Recomendações Metodológicas

O trabalho está direcionado a professores, como referência teórico-metodológica para a docência e a alunos do Ensino Básico.

1.7 Dificuldades previstas

Levando em consideração que os alunos estão acostumados a professores que ministram aulas com enfoque eminentemente algébrico, a dificuldade maior será na modelagem dos problemas, visto que, não estão acostumados com a observação e tratamento de informações com caráter de regularidade. A fim de contornar o problema, o professor deverá iniciar seu trabalho abordando inicialmente padrões geométricos, passando a padrões numéricos e, vice versa. Após o traslado entre estas duas formas de representação, aplicar as sequências aritméticas e geométricas a problemas pictóricos. Daí, inserir a modelagem e resolução de problemas através de sequências de recorrência. Somente após todo esse estudo, abordar os problemas usando a linguagem de programação Basic, criando programas para simular resultados.

1.8 Descrição detalhada

Na modalidade de curso de extensão, este trabalho requer, como sugestão, um total de 20 horas-aula. A sequência didática apresentada no texto através dos capítulos 2, 3, 4 e 5 pode ser distribuída ao longo da carga horária da seguinte forma:

- observação e seleção de dados em padrões geométricos e numéricos - 2 horas-aula;
- organização dos dados e representação algébrica dos padrões - 2 horas-aula;
- problemas envolvendo Progressões Aritmética e Geométrica - 4 horas-aula;
- sequências de recorrência - 6 horas-aula;
- implementação do basic - 6 horas-aula.

2 PADRÕES MATEMÁTICOS

Associaremos a idéia de padrão a algum tipo de regularidade como a simetria observada em várias formas geométricas, as sequências numéricas e as sequências lógicas. Dessa forma, não corremos o risco de transformar a idéia de padrão em simplesmente uma repetição ou na busca incessante de regularidades em qualquer ente observável.

O nosso objetivo é estudar sequências numéricas ou sucessões, entretanto, em alguns momentos, apresentaremos alguns padrões geométricos que nos levarão a regularidades numéricas.

2.1 Sequências Numéricas

Em matemática a idéia de sequência numérica está ligada diretamente a idéia de funções. Uma sequência de números reais é uma função

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n) \end{aligned}$$

ou seja, uma lei que associa a cada número natural n um único número real $u(n)$. Denota-se uma sequência por

$$(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots)$$

ou simplesmente por $\{u_n\}$. As mais conhecidas na educação básica são a *Progressão Aritmética* e a *Progressão Geométrica*.

2.1.1 Progressão Aritmética

É uma sequência numérica $\{u_n\}$ onde cada termo, a partir do segundo, é formado pelo termo anterior acrescido de um mesmo número real, chamado de razão, representado por r .

Consequentemente, se a sequência $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots)$ é uma progressão aritmética, então existe um número real r , tal que, $u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = u_4 - u_3 = \dots = u_{n+1} - u_n = \dots = r$.

Uma sequência do tipo $(3, 5, 7, 9, \dots)$ é uma progressão aritmética onde $u_1 = 3$ e $r = 2$. Para determinarmos o termo seguinte basta acrescentarmos 2 unidades ao termo anterior, ou seja, $u_2 = u_1 + r = 3 + 2 = 5$ e assim por diante. Seguindo este raciocínio, seja uma progressão aritmética $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots)$ de razão r , podemos escrever:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + r \\ u_3 &= u_2 + r \\ u_4 &= u_3 + r \\ \dots &\dots \\ u_n &= u_{n-1} + r, \end{aligned}$$

somando membro a membro todos os $n - 1$ termos, obtemos

$$u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-1} + (n - 1)r,$$

anulando os termos semelhantes, concluímos que um termo qualquer $\{u_n\}$, chamado de **termo geral**, pode ser escrito por

$$u_n = u_1 + (n - 1)r. \quad (2.1)$$

A partir desta expressão, qualquer termo da sequência $\{u_n\}$ pode ser calculado, desde que tenhamos os valores do primeiro termo u_1 , e da razão r , visto que, o valor de n é definido pelo termo procurado. Por exemplo, para calcular o vigésimo primeiro termo da sequência $(2, 5, 8, \dots)$, basta tomarmos $u_1 = 2$, $r = 8 - 5 = 5 - 2 = 3$ e $n = 21$ na equação (2.1), teremos $u_{21} = 2 + (21 - 1) \cdot 3 = 2 + 60 = 62$, portanto o termo procurado é 62.

Uma propriedade curiosa, descoberta por Gauss¹, é que a soma dos termos equidistantes de uma progressão aritmética é constante. Isto é, por exemplo, considerando a progressão aritmética $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)$, verificamos que $2 + 20 = 5 + 17 = 8 + 14 = 11 + 11$. Segue que, se tomarmos uma progressão aritmética de n termos $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n)$, observa-se que $u_1 + u_n = u_2 + u_{n-1} = u_3 + u_{n-2} = \dots$. Assim, a **Soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética**, denotada por S_n , definida por $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + \dots$ pode ser reescrita

¹O alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Aos 7 anos de idade calculou a soma dos naturais de 1 a 100, usando uma propriedade da soma dos termos de uma progressão aritmética. Publicou importantes trabalhos em diversas áreas da matemática, física e astronomia.

como $S_n = (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \dots + (u_1 + u_n)$ em um total de $\frac{n}{2}$ parcelas iguais a $(u_1 + u_n)$, logo

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}. \quad (2.2)$$

Por exemplo, para determinar a soma dos 21 primeiros termos da sequência $(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, \dots)$, basta considerar na expressão (2.2) os valores $u_1 = 2$, $n = 21$ e $u_{21} = 62$. Segue que, a soma dos 21 primeiros termos é $S_{21} = \frac{(2 + 62) \cdot 21}{2} = 672$.

2.1.2 Progressão Geométrica

É uma sequência $\{u_n\}$ não nula, onde cada termo, a partir do segundo, é formado pelo termo anterior multiplicado por um mesmo número real não nulo, chamado de razão, denotado por q . Se a sequência $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots)$ é uma progressão geométrica, então existe um número real $q \neq 0$, tal que, $\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_3}{u_2} = \frac{u_4}{u_3} = \dots = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots = q$ e $u_1 \neq 0$.

Uma sequência do tipo $(2, 6, 18, 54, \dots)$ é uma progressão geométrica onde $u_1 = 2$ e $q = 3$. Para determinarmos o termo seguinte basta multiplicarmos por 3 o termo anterior. Organizando esta forma de pensar, considerando dado u_1 e q ,

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 \cdot q \\ u_3 &= u_2 \cdot q = u_1 \cdot q^2 \\ u_4 &= u_3 \cdot q = u_1 \cdot q^3 \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ u_n &= u_{n-1} \cdot q = u_1 \cdot q^{n-1}. \end{aligned}$$

Logo, o **termo geral** u_n de uma progressão geométrica é dado por

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1}. \quad (2.3)$$

Por exemplo, para encontrar o décimo sexto termo da sequência $(2, 6, 18, 54, \dots)$, basta tomar na fórmula (2.3) $u_1 = 2$ e $q = \frac{6}{2} = 3$. Segue que, $u_{16} = 2 \cdot 3^{16-1} = 2 \cdot 3^{15} = 28.697.814$.

Para determinar a **Soma dos n primeiros termos** S_n de uma progressão geométrica $(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots)$ temos que observar duas opções em relação a q :

- $q \neq 1$

A soma é dada por

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n \quad (I),$$

multiplicando (I) por q , obtemos

$$qS_n = q.u_1 + q.u_2 + q.u_3 + \cdots + q.u_{n-1} + q.u_n$$

e usando o fato de que $u_2 = u_1.q$; $u_3 = u_2.q$; \cdots ; $u_{n-1}.q$, chegamos a expressão

$$qS_n = u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_n + u_n.q \quad (II).$$

Fazendo (I) - (II),

$$S_n - qS_n = u_1 - u_n.q,$$

como $u_n = u_1.q^{n-1}$, concluímos que

$$S_n = u_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (2.4)$$

- **q=1**

Basta observar que a sequência será constante com n termos iguais a u_1 , logo

$$S_n = n.u_1$$

Para calcular a soma dos dezesseis primeiros termos da sequência $(2, 6, 18, 54, \cdots)$, basta substituir $u_1 = 2$, $q = 3$ e $n = 16$ em (2.4), daí podemos concluir que $S_{16} = 2 \cdot \frac{3^{16-1} - 1}{3 - 1} = 3^{15}$.

Em uma progressão geométrica, considerando uma razão não nula $-1 < q < 1$, podemos verificar que os termos desta sequência aproximam-se indefinidamente de um valor limite, como por exemplo, na sequência seguinte $(10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \cdots, (10 \cdot \frac{1}{10})^{n-1}, \cdots)$, onde $u_1 = 10$ e $q = \frac{1}{10}$, podemos perceber que ao passo que aumentamos o valor de n a expressão $(\frac{1}{10})^{n-1}$ aproxima-se indefinidamente de zero, daí analisando este resultado em (2.4) podemos concluir que a **Soma dos infinitos termos** S desta progressão é $S = 10 \cdot \frac{0 - 1}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{10}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{100}{9}$.

Generalizando, podemos afirmar que a **Soma dos infinitos termos** de uma progressão geométrica de razão não nula $-1 < q < 1$ é dada por

$$S = \frac{u_1}{1 - q}. \quad (2.5)$$

Caso $|q| > 1$ a **Soma dos infinitos termos** não pode ser representada por uma número, pois os termos aumentarão indefinidamente, conseqüentemente, não poderemos calcular a **Soma dos infinitos termos**.

2.2 Números Figurados

São números que podem ser representados por uma construção geométrica de pontos equidistantes. Se estes formarem um polígono regular, são chamados de números poligonais. Destacaremos os números triangulares, quadrangulares e pentagonais.

2.2.1 Números Triangulares

São números que podem ser representados por pontos organizados em forma de um triângulo equilátero.

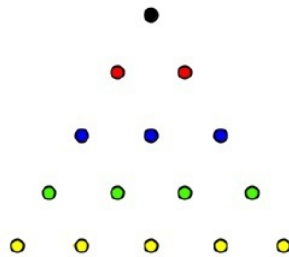


Figura 1: Número triangular

Observe que, se desmembrarmos a figura (1) em vários triângulos, percebemos mais facilmente a sequência formada.

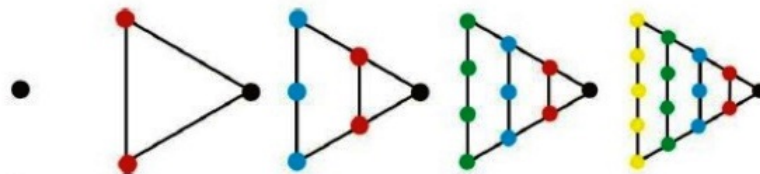


Figura 2: Sequência dos números triangulares

Fonte: Disponível em <http://logicamentepedagogia.blogspot.com.br/2010/04/capitulo-5-quinta-noite-26.html>

Nota-se que, se considerarmos na figura (2) a quantidade de pontos em cada triângulo como um termo de uma sequência numérica, podemos associar a sequência de

triângulos a uma sequência numérica dada por $(1, 3, 6, 10, 15)$. Representando cada termo desta sequência por T_n e observando a sequência, podemos concluir que,

$$\begin{aligned} T_1 &= 1 \\ T_2 &= 1 + 2 \\ T_3 &= 1 + 2 + 3 \\ &\dots \quad \dots \\ T_n &= 1 + 2 + \dots + n. \end{aligned}$$

Portanto, T_n é a soma dos n primeiros inteiros positivos, ou seja, é a soma dos termos de uma progressão aritmética de n termos, onde $r = 1$, $u_1 = 1$ e $u_n = n$, logo substituindo esses valores em (2.2) obtemos a expressão

$$T_n = \frac{(1+n) \cdot n}{2}.$$

2.2.2 Números Quadrangulares

São números que podem ser representados por pontos organizados em forma de um quadrado.

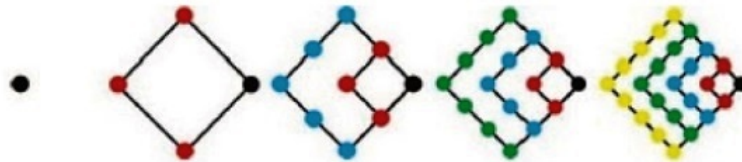


Figura 3: Sequência dos números quadrangulares

Fonte: Disponível em <http://logicamentepedagogia.blogspot.com.br/2010/04/capitulo-5-quinta-noite-26.html>

De maneira semelhante aos números triangulares, a quantidade de pontos em um quadrado Q_n pode ser determinada inferindo, a partir da figura (3), o seguinte raciocínio:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 \\ Q_2 &= 1 + 3 \\ Q_3 &= 1 + 3 + 5 \\ &\dots \quad \dots \\ Q_n &= 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1. \end{aligned}$$

Daí, segue que, Q_n é determinado pela soma dos n primeiros número inteiros ímpares. Portanto, usando a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética,

representada pela expressão (2.2), concluímos que

$$Q_n = \frac{(1 + 2n - 1) \cdot n}{2} = n^2.$$

2.2.3 Números Pentagonais

São números que podem ser representados por pontos organizados em forma de um pentágono regular.

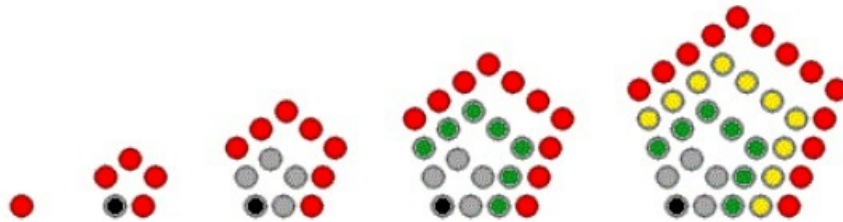


Figura 4: Sequência dos números pentagonais

A partir da figura (4) podemos associar cada número pentagonal P_n com a quantidade de pontos da figura que o representa e formar a sequência numérica $(1, 5, 12, 22, 35, \dots)$. Podemos observar que

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 \\ P_2 &= 1 + 4 \\ P_3 &= 1 + 4 + 7 \\ P_4 &= 1 + 4 + 7 + 10 \\ &\dots \quad \dots \end{aligned}$$

Percebe-se que a sequência formada pelas parcelas da soma acima é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, onde $u_1 = 1$ e $q = 3$, logo $u_n = 1 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 2$, daí segue que, $P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \dots + (3n - 2)$, logo substituindo em (2.2), chegamos a expressão

$$P_n = \frac{(1 + 3n - 2) \cdot n}{2},$$

e portanto, qualquer número pentagonal P_n pode ser calculado pela fórmula

$$P_n = \frac{(3n - 1) \cdot n}{2}.$$

É importante fazermos uma releitura dos tópicos deste capítulo sob novas abordagens, ou seja, tentarmos outra forma de modelagem dos padrões citados, preferencialmente partindo da modelagem através de sequências de recorrência e verificando numericamente os

resultados usando programas em Basic.

3 SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIA

Considerar a sequência $u(n)$ dada por

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots \quad (3.1)$$

É importante lembrar que $n \in \mathbb{N}$.

3.1 Definição

A sequência (3.1) é dita recorrente de ordem k se existirem k coeficientes $a_1(n)$, $a_2(n)$, $a_3(n)$, \dots , $a_k(n)$ com $a_k(n) \neq 0$ e $f(n)$, ambas funções de n , e um número $m \geq 1$ tais que, para qualquer $n \geq m$, vale:

$$u_{n+k} = a_1(n)u_{n+k-1} + a_2(n)u_{n+k-2} + \dots + a_k(n)u_n + f(n). \quad (3.2)$$

A relação (3.2) chama-se, neste caso, de Equação de Recorrência Linear de ordem k . Se $f(n) = 0$ para todo n , (3.2) é dita *homogênea*, caso contrário, é dita *completa*. As relações de recorrência são acompanhadas de valores iniciais que são usados como ponto de partida para construção da sequência e também como elementos indispensáveis na resolução de equações de recorrência. A expressão *recorrente* se explica pelo fato da determinação de cada termo se basear no retorno aos precedentes.

Neste trabalho nos deteremos a relações de recorrência de primeira e segunda ordens, com coeficientes constantes, homogêneas e completas. Em vários momentos usaremos os termos sequência de recorrência e equação de recorrência como sinônimos.

3.2 Sequência de Fibonacci

Leonardo de Pisa (1175-1240), conhecido como Fibonacci (Filho de Bonaccio) publicou em um de seus livros intitulado *Liber Abacci*, que significa *Livro do Ábaco*, um problema referente a coelhos que tornou-se muito conhecido, a ponto de atribuir-se a ele uma sequência numérica, chamada Sequência de Fibonacci. O livro publicado em 1202 e republicado em 1228 trata de Aritmética e Álgebra, abordados sob a forma de problemas, em especial, o sistema hindú de numeração, o Teorema do Resto Chinês, problemas de mensuração, movimentação de caixa e o problemas dos coelhos. Esta obra foi responsável pela divulgação do sistema de numeração posicional hindú na Europa, apresentando uma forma moderna de contar e operar com números.

O problema dos coelhos consiste do seguinte texto: *Quantos casais de filhotes de coelhos nascem no decorrer de um ano, partindo inicialmente de um casal de coelhos filhotes?* Para a resolução devem ser feitas algumas considerações, que são:

- A situação é fictícia;
- Os coelhos estão isolados, ou seja, nenhum coelho entra, nem sai do experimento;
- Nenhum coelho morre;
- O par de coelhos só podem procriar após 1 mês de vida;
- O casal tem apenas um casal de filhotes por mês;

Desta forma, no primeiro mês temos apenas um casal de coelhos, ainda filhotes. No segundo mês, temos o mesmo casal, no entanto, já podem procriar. No terceiro mês, temos o casal inicial e mais o casal de filhotes. No quarto mês, o casal inicial gera um novo casal de filhotes e seu primeiro casal de filhotes já é capaz de procriar. Enfim, a projeção deste padrão de comportamento para do primeiro mês ao sexto pode ser visto no organograma representado na figura (5).

Os pares de coelhos adultos são representados pela cor cinza e os filhotes pela cor branca. Organizando sequencialmente o total de casais de coelhos em cada mês, a considerar



Figura 5: População de coelhos

Fonte: Sung, Vitor. 2002.

do primeiro mês, encontramos a seguinte relação:

1º mês	→	1 casal
2º mês	→	1 casal
3º mês	→	2 casais
4º mês	→	3 casais
5º mês	→	5 casais
6º mês	→	8 casais
...		...

Observando a relação entre a número de meses e o quantidade de casais, é possível estabelecer uma expressão matemática? O que desejamos é estabelecer um padrão de comportamento na relação acima. Note que, se buscarmos relacionar o índice representativo do mês com a quantidade de casais, usando os seis primeiros meses, podemos perceber o seguinte modelo:

1º mês	→	1 casal
2º mês	→	1 casal
3º mês	→	2 casais = 1 casal + 1 casal
4º mês	→	3 casais = 1 casal + 2 casais
5º mês	→	5 casais = 2 casais + 3 casais
6º mês	→	8 casais = 3 casais + 5 casais
...		...

Percebemos que, os dois primeiros meses se repetem e os demais são formados pela adição dos dois meses anteriores. Já que observamos um possível padrão numérico, vamos

associar a uma sequência numérica. Considerando a sequência

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u(n), \end{aligned}$$

onde u_n representa o total de casais de coelhos no mês n , podemos associar

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= 1 \\ u_3 &= 2 = u_1 + u_2 \\ u_4 &= 3 = u_2 + u_3 \\ u_5 &= 5 = u_3 + u_4 \\ u_6 &= 8 = u_4 + u_5 \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Observando esta forma de comportamento, inferimos que para o n -ésimo mês teremos

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad \text{e} \quad u_1 = u_2 = 1, \text{ onde } n \geq 3.$$

Como para cada $n \geq 3$ podemos associar um valor u_n , concluímos que o problema pode ser representado por uma sequência, conhecida como Sequência de Fibonacci. No entanto, cada termo da sequência, a partir do terceiro, necessita dos dois anteriores para ser plenamente determinado, logo a sequência em questão, é uma sequência de recorrência.

O entrave desta lei de formação da sequência é a necessidade de recorrer aos termos anteriores para determinar um termo qualquer. A fim de solucionar este problema, temos por objetivo, encontrar, se possível, uma fórmula fechada para determinar cada termo da sequência. E para isso, faremos uso de alguma teoria sobre sequências de recorrência.

3.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Se tomarmos em (3.2) o valor de $k = 1$, teremos uma Equação de Recorrência Linear de ordem 1 ou, também conhecida como, Equação de Recorrência Linear de primeira ordem. Ou seja,

$$u_{n+1} = a_1 u_n + f(n). \tag{3.3}$$

3.3.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Basta tomarmos (3.3) com $f(n) = 0$. Ou seja, teremos equações da forma

$$u_{n+1} = a_1 u_n. \quad (3.4)$$

Resolver uma equação de recorrência significa encontrar uma fórmula fechada para u_{n+k} , ou seja, uma expressão que depende de n e de outras constantes, mas não depende do termo anterior. Em relação a equações do tipo (3.4), procederemos da seguinte forma.

Considere $u_{n+1} = 2u_n$ e $u_1 \neq 0$. Variando o valor de n ,

$$\begin{aligned} u_2 &= 2u_1 \\ u_3 &= 2u_2 \\ u_4 &= 2u_3 \\ \dots &\quad \dots \\ u_n &= 2u_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados das equações acima, tem-se

$$u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot \dots \cdot u_n = 2u_1 \cdot 2u_2 \cdot 2u_3 \cdot \dots \cdot 2u_n.$$

Como por definição, $u_n \neq 0$, simplificando os fatores correspondentes, obtém-se $u_n = (2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)u_1$, como há $n - 1$ fatores iguais a 2, conclui-se que:

$$u_n = 2^{n-1} u_1.$$

Então, com um procedimento simples é possível encontrar uma fórmula fechada para este tipo de recorrência.

3.3.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Unitários

Em (3.3), considera-se $a_1 = 1$ e $f(n) \neq 0$, tem-se:

$$u_{n+1} = u_n + f(n). \quad (3.5)$$

Variando o valor de n na equação (3.5), obtem-se:

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + f(1) \\ u_3 &= u_2 + f(2) \\ u_4 &= u_3 + f(3) \\ &\dots \quad \dots \\ u_n &= u_{n-1} + f(n-1). \end{aligned}$$

Somando e cancelando os termos simétricos, obtemos

$$u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Considere, por exemplo, a sequência $u_{n+1} = u_n + 3^n$ e $u_1 = 1$. Variando o valor de $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 3 \\ u_3 &= u_2 + 3^2 \\ u_4 &= u_3 + 3^3 \\ &\dots \quad \dots \\ u_n &= u_{n-1} + 3^{n-1}. \end{aligned}$$

temos: Ou seja, $u_n = u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k$ e como $\sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1}$ e $u_1 = 1 = 3^0$

$$u_n = 3^0 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1},$$

utilizando a soma dos termos de uma progressão geométrica, dada pela expressão (2.4), obtemos

$$u_n = 1 \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

e portanto, uma fórmula fechada para a recorrência dada é

$$u_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

3.3.3 Recorrências Lineares de Primeira Ordem com Coeficientes Constantes

Para visualizar tal recorrência, toma-se em (3.3) $a_1 \neq 0$ e $f(n) \neq 0$, ou seja,

$$u_{n+1} = a_1 u_n + f(n). \tag{3.6}$$

Para resolver este tipo de recorrência deve fazer uma substituição, como pode-se ver no modelo a seguir.

Seja, por exemplo, a recorrência $u_{n+1} = 2u_n + 1$ com $u_1 = 2$, perceba que é da forma (3.6). Inicialmente, encontre a solução para a recorrência do tipo (3.3), dada por $y_{n+1} = 2y_n$, que por ter sido feita anteriormente é, em particular, $y_n = 2^{n-1}$.

Toma-se a substituição $u_n = y_n t_n$, ou seja, $u_n = 2^{n-1} t_n$ em $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Assim, temos $2^n t_{n+1} = 2^n t_n + 1$ e logo

$$t_{n+1} = t_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Variando n natural,

$$\begin{aligned} t_2 &= t_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ t_3 &= t_2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ t_4 &= t_3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &\dots \quad \dots \\ t_n &= t_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Somando membro a membro e cancelando os simétricos, tem-se

$$t_n = t_1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

por ser a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{2}$, substituindo em (2.4), concluímos que

$$t_n = t_1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1.$$

Como $u_n = 2^{n-1} t_n$ e $u_1 = 2$, podemos concluir que, $t_1 = 2$ e substituindo em

$$t_n = t_1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1,$$

temos

$$t_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Segue que, como $u_n = 2^{n-1} t_n$ e $t_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, e portanto, a solução da

relação de recorrência é

$$u_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 1.$$

3.4 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Homogêneas com Coeficientes Constantes

Uma equação de recorrência (3.2) é de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes se tomarmos $k = 2$ e $f(n) = 0$, ou seja, é da forma

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n. \quad (3.7)$$

onde $a_2 \neq 0$.

Uma sequência da forma $u(n) = q^n$ é solução da equação (3.7) se q é raiz da equação

$$q^{n+2} = a_1 q^{n+1} + a_2 q^n.$$

Simplificando por q^n , tal que, $q \neq 0$, obtemos

$$q^2 = a_1 q + a_2. \quad (3.8)$$

A equação (3.8) é conhecida como *polinômio característico* da equação de recorrência (3.7). A solução geral de (3.7) depende do tipo das raízes q_1 e q_2 encontradas em (3.8), ou seja:

- Se as raízes de (3.8) forem reais e distintas, então a solução geral será

$$u_n = \alpha q_1^n + \beta q_2^n,$$

onde α e β são constantes determinadas usando os valores iniciais da recorrência (3.7).

- Se a raiz for dupla, então a solução geral será

$$u_n = \alpha q_1^n + n \beta q_2^n,$$

onde α e β são constantes determinadas usando os valores iniciais da recorrência (3.7).

- Se as raízes forem complexas, logo uma será o conjugado da outra, com módulos (ρ)

iguais e argumentos (θ) opostos. Logo a solução geral será,

$$u_n = \alpha \rho^n \cos(n\theta) + \beta \rho^n \operatorname{sen}(n\theta),$$

onde α e β são constantes determinadas usando os valores iniciais da recorrência (3.7).

Retomando à Sequência de Fibonacci,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{e} \quad u_0 = u_1 = 1, \text{ onde } n \geq 0. \quad (3.9)$$

Podemos classificá-la como uma equação de recorrência de segunda ordem e homogênea. Dessa forma é possível encontrar uma fórmula fechada, ou seja, uma expressão que fornecerá a quantidade de casais para uma etapa n qualquer.

O polinômio característico de (3.9) é

$$q^2 = q + 1.$$

As raízes do polinômio característico são $q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Como as raízes são distintas, a solução geral é

$$u_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Como $u_1 = u_2 = 1$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} 1 = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ 1 = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima encontramos $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ e $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto, a fórmula fechada para (3.9) é

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (3.10)$$

Enfim, a partir de (3.10) é possível determinar qualquer termo da sequência de Fibonacci. Uma forma de visualizar os resultados numéricos desta sequência será apresentada no capítulo 5.

4 APLICAÇÕES DAS SEQUÊNCIAS DE RECORRÊNCIA

Este capítulo apresenta algumas aplicações de sequências de recorrência lineares na modelagem e na solução de problemas. Como este trabalho está direcionado ao nível básico de ensino, algumas aplicações não serão abordadas, mas poderão ser consultadas em livros descritos na bibliografia. Além da aplicação na Sequência de Fibonacci introduzida no capítulo 3, mostraremos também, aplicações em Progressões Aritmética e Geométrica, sequências geométricas, análise combinatória, probabilidade, dinâmica populacional e Matemática financeira.

4.1 Progressão aritmética

Considere a sequência

$$u_1 = a, u_2 = a + r, u_3 = a + 2r, \dots$$

pela definição de progressão aritmética, vale a relação $u_{n+1} = u_n + r$ e, também, $u_{n+2} = u_{n+1} + r$. Isolando o valor de r em ambas as equações e comparando-as, temos:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$$

e, conseqüentemente,

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n. \tag{4.1}$$

Logo, uma progressão aritmética é uma sequência de recorrência linear homogênea de ordem 2. O polinômio característico de (4.1) é

$$q^2 = 2q - 1$$

e suas raízes são iguais, ou seja,

$$q_1 = q_2 = 1.$$

A solução da equação é da forma

$$u_n = \alpha q_1^n + n\beta q_2^n \quad (4.2)$$

Substituindo $q_1 = q_2 = 1$, $u_1 = a$ e $u_2 = a + r$ na equação (4.2) encontramos o sistema

$$\begin{cases} a = \alpha + \beta \\ a + r = \alpha + 2\beta \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos $\alpha = a - r$ e $\beta = r$. Voltando a (4.2) e substituindo estes valores, concluímos que, a fórmula fechada para o termo geral da progressão aritmética é

$$u_n = a + (n - 1)r.$$

O nosso objetivo nesta abordagem não é de oferecer uma proposta de resolução de questões de progressão aritmética através de sequências de recorrência, mas sim de mostrar que a progressão aritmética pode ser modelada através de sequências de recorrência.

4.2 Progressão geométrica

Uma progressão geométrica de razão q , da forma

$$u_1 = a, u_2 = aq, u_3 = aq^2, \dots$$

pode ser reescrita usando a relação

$$u_{n+1} = qu_n. \quad (4.3)$$

Portanto, uma progressão geométrica é uma sequência de recorrência linear homogênea de ordem 1. Variando o valor de $n \geq 1$ em (4.3), chegamos a

$$\begin{aligned} u_2 &= qu_1 \\ u_3 &= qu_2 \\ u_4 &= qu_3 \\ \dots &\dots \\ u_n &= qu_{n-1}. \end{aligned}$$

Multiplicando cada termo e simplificando os fatores iguais, chegamos a

$$u_n = (q \cdot q \cdot \dots \cdot q)u_1,$$

como q aparece $n - 1$ vezes e $u_1 = a$ concluímos que, a fórmula fechada para o termo geral da progressão geométrica é

$$u_n = aq^{n-1}.$$

4.3 Padrões Geométricos

Considere a sequência de estruturas triangulares representada na figura (6). Desejamos encontrar uma expressão que relaciona a quantidade de segmentos necessários para a construção de um triângulo de ordem n .

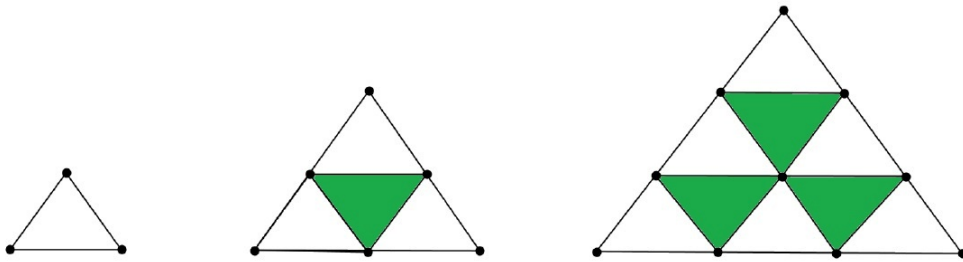


Figura 6: Sequência de triângulos

Fonte: Disponível em <http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/06/tcl-e-aplicacoes-nas-equacoes-de.html>

Seja u_n a quantidade de segmentos de reta necessários para construir a n -ésima estrutura. Visualmente, percebe-se que $u_1 = 3$, $u_2 = u_1 + 3 \cdot 2$ e $u_3 = u_2 + 3 \cdot 3$. Inferimos que, $u_{n+1} = u_n + 3(n + 1)$, com $n \geq 1$. Temos então uma sequência de recorrência linear de primeira ordem. Para resolver esta sequência de recorrência, variando o valor de n temos,

$$u_2 = u_1 + 3 \cdot 2$$

$$u_3 = u_2 + 3 \cdot 3$$

$$u_4 = u_3 + 3 \cdot 4$$

$$\dots \quad \dots$$

$$u_n = u_{n-1} + 3 \cdot n$$

Somando os membros das equações acima, obtemos $u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_{n-1} + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + 3 \cdot n$, simplificando os termos simétricos correspondentes temos,

$$u_n = u_1 + 3 \cdot (2 + 3 + \dots + n).$$

Usando a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, representada pela expressão (2.2), e como pelo enunciado $u_1 = 3$, concluímos que a fórmula fechada para recorrência em questão é

$$u_n = \frac{3}{2}(n^2 + n).$$

4.4 Fractais

Os Fractais¹ são formas geométricas que apresentam padrões que se repetem infinitamente, onde cada uma das partes repetidas desta figura são semelhantes a toda ela, ou seja, são autosemelhantes.

O nosso objetivo é analisar o fractal conhecido como o *Floco de neve de Koch*, construído pelo matemático sueco Helge Von Koch (1870-1924), a partir da *Curva de Koch*. A curva de Koch é construída segundo as etapas:

1. toma-se um segmento AB de comprimento $l_0 = l$, divide-se o seu comprimento por 3 e no lugar do segmento médio constre-se um triângulo equilátero de lado igual aos segmentos adjacentes, obtendo assim, 4 segmentos de comprimento $l_1 = \frac{l_0}{3}$, como na figura (7);



Figura 7: Curva de Koch - etapa 1

Fonte: SALLUM, ÉLVIA MUREB. 2005

2. divide-se o comprimento de cada novo segmento por três e construir no lugar de cada segmento médio um triângulo equilátero de lado igual aos segmentos adjacentes, gerando 4 novos segmentos de comprimento $l_2 = \frac{l_1}{3}$, como na figura (8);



Figura 8: Curva de Koch - etapa 2

Fonte: SALLUM, ÉLVIA MUREB. 2005

¹Do Latin *Fractus* que significa quebrado ou irregular.

3. repete-se o processo para cada segmento da figura anterior, formando no lugar de cada segmento, 4 novos segmentos de comprimento $l_3 = \frac{l_2}{3}$, como na figura (9);

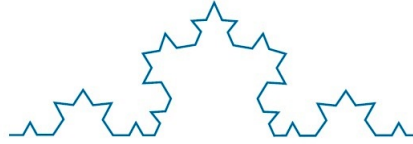


Figura 9: Curva de Koch - etapa 3

Fonte: SALLUM, ÉLVIA MUREB. 2005

4. repete-se o processo indefinidamente.

Para melhor compreender a sequência de dados das etapas, vamos organizá-los na tabela (1).

Etapa	Número de segmentos	Comprimento de cada lado	Perímetro
inicial	1	l_0	l_0
1	4	$l_1 = \frac{l_0}{3}$	$4.l_1$
2	4^2	$l_2 = \frac{l_1}{3}$	$4^2.l_2$
3	4^3	$l_3 = \frac{l_2}{3}$	$4^3.l_3$
...
n	4^n	$l_n = \frac{l_{n-1}}{3}$	$4^n.l_n$

Tabela 1: Análise da curva de Koch

Observando a tabela (1), temos que l_n é o lado da figura na etapa n , chamando de p_n o perímetro da curva na etapa n , pela análise feita na tabela (1), concluímos por recorrência que

$$p_n = 4^n.l_n, \quad (4.4)$$

Precisamos encontrar uma fórmula fechada para p_n , para isso devemos expandir a recorrência $l_n = \frac{l_{n-1}}{3}$, com $l_0 = l$

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{l_0}{3} \\ l_2 &= \frac{l_1}{3} \\ l_3 &= \frac{l_2}{3} \\ &\dots \\ l_n &= \frac{l_{n-1}}{3} \end{aligned}$$

Multiplicando termo a termo e simplificando os fatores correspondentes, multiplicando os n fatores $\frac{1}{3}$ e substituindo $l_0 = l$, obtemos

$$l_n = \frac{l}{3^n}. \quad (4.5)$$

Substituindo (4.5) em (4.4), obtemos

$$p_n = l \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n. \quad (4.6)$$

Logo, a partir da sequência (4.6) podemos encontrar o perímetro em qualquer etapa n . A *Curva de Koch* permite identificar pela geometria diversas sequências de recorrência e podemos fazer alguns questionamentos pertinentes, tais como:

- Com as transformações, como varia o número de lados?
- Como varia o comprimento dos lados da curva?
- Como varia o perímetro da curva?
- O perímetro é finito ou infinito?

Pela tabela (1) podemos perceber que o número de lados varia segundo uma progressão geométrica de razão 4, o comprimento de cada lado varia segundo uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$ e o perímetro varia de acordo com a expressão (4.6), que podemos facilmente perceber, que trata-se de uma progressão geométrica de infinitos termos onde a razão $q = \frac{4}{3} > 1$ e portanto a soma cresce sem limite. No capítulo 5, faremos uma simulação numérica para analisar o comportamento do perímetro desta curva.

Após construirmos e analisarmos a *Curva de Koch* podemos usar as conclusões para estudar o *Floco de neve de Koch*. Para construí-lo devemos aplicar a mesma idéia da *Curva de Koch* a um triângulo equilátero de lado l . A partir daí, usa-se os dados da análise descrita na tabela (4.5), para observamos a área, pois agora trata-se de uma figura fechada. Após realizar quatro transformações no triângulo equilátero (etapa inicial), podemos observar o comportamento geométrico deste fractal na figura (10).

Observando a etapa 1, podemos facilmente ver que podemos circunscrevê-la em um hexágono regular de lado $L = \frac{l}{\sqrt{3}}$, o mesmo acontece com as outras etapas, como podemos visualizar na figura (11). Desta forma, podemos estimar a área do *Floco de neve de Koch* através do hexágono regular supracitado. Como a área do hexágono regular é dada por $A_h = \frac{l^2\sqrt{3}}{2}$,

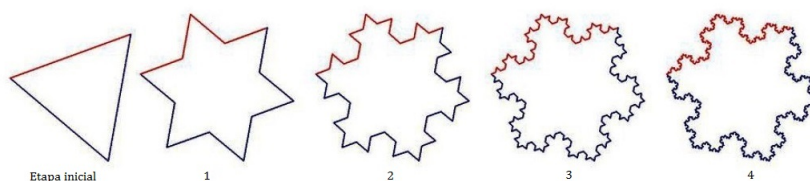


Figura 10: Transformações do Floco de Neve de Koch

Fonte: GOMES, ANTONIO DO NASCIMENTO.

podemos inferir que a área do *Floco de neve de Koch* deve ser menor ou igual a área do hexágono. Logo podemos supor que sua área seja finita.

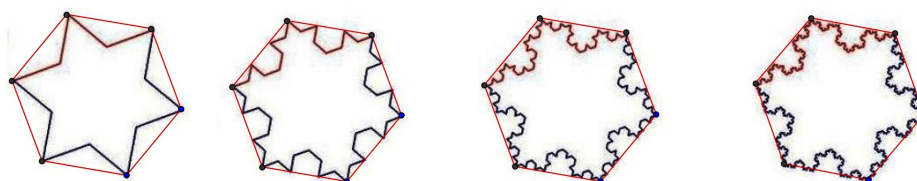


Figura 11: Hexágono e o Floco de Neve

Analisando a figura (11), em relação ao *Floco de neve de Koch*, podemos perceber que as cópias geradas a cada iteração são semelhantes à figura inicial, portanto suas áreas, assim como seus lados, são proporcionais.

Isolando a etapa 1 apresentada na figura (10), obtemos a figura (12).

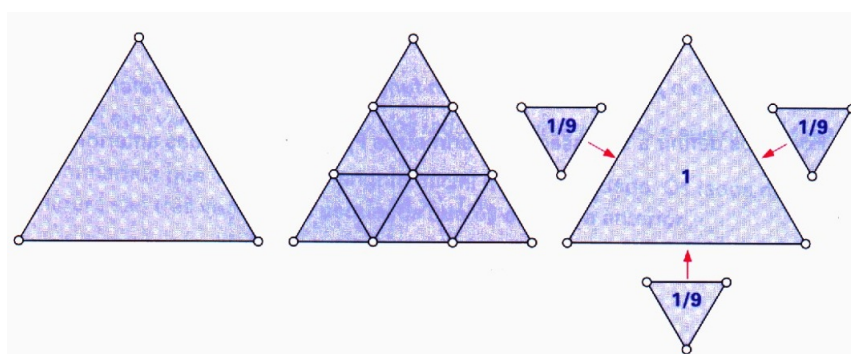


Figura 12: Área do floco de neve

Fonte: BATANETE, ANA. CASTRO, ANDREIA. LAGO, HIRLLANY (2004)

Observe que, podemos relacionar a área de cada cópia do triângulo inicial com o próprio triângulo inicial. Como a área do triângulo inicial é $A_0 = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, concluímos que a área de cada cópia apresentada na figura (12) é $\frac{1}{9} \cdot A_0$, logo a área total da etapa 1 será calculada pela soma da área do triângulo inicial (A_0) com o produto do número de cópias pela área de cada cópia, ou seja, $A_1 = A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 = A_0 + A_0 \left(\frac{1}{3}\right)$. Estendendo este raciocínio, podemos produzir a tabela (2).

Etapa	Número de cópias em cada etapa	Comprimento de cada lado	Área
inicial	0	l	A_0
1	3.1	$\frac{l}{3}$	$A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 = A_0 + A_0 \left(\frac{1}{3}\right)$
2	3.4	$\frac{l}{3^2}$	$A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 = A_0 + A_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9}\right)$
...
n	$3 \cdot 4^n$	$\frac{l}{3^n}$	$A_0 + 3 \cdot \frac{1}{9} A_0 + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots + 3 \cdot 4^n \left(\frac{1}{9}\right)^n = A_0 + A_0 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$

Tabela 2: Análise do floco de neve de Koch

Ao observar as iterações apresentadas na tabela (2), observamos que a área total (A_t) da figura limite, chamada *Floco de neve de Koch*, é dada por A_0 somado com a soma dos termos de uma progressão geométrica (S) com primeiro termo igual a $\frac{A_0}{3}$ e razão $\frac{4}{9} < 1$, ou seja, $A_t = A_0 + S$. Como as iterações ocorrem indefinidamente e a razão da progressão é menor que 1, então a soma dos infinitos termos da progressão geométrica é um número finito, que de acordo com a expressão (2.4), é dada por

$$S = \frac{\frac{A_0}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5} A_0,$$

e como $A_0 = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$, a área total (A_t) do *Floco de neve de Koch* é

$$A_t = \frac{2l^2 \sqrt{3}}{5}. \quad (4.7)$$

Diferentemente do caso do perímetro da *Curva de Koch*, a área do *Floco de neve de Koch* pode ser calculada, mesmo sendo uma figura de perímetro infinito, tornando-se uma característica importante deste fractal, e nada intuitivo. Duas perguntas a serem feitas são:

- Dado um triângulo equilátero de lado l , em que etapa o perímetro supera um valor p fixo em \mathbb{R} ?
- Em qual etapa a área atinge um valor limite?

Perguntas como essas poderão ser respondidas, mais facilmente, de forma computacional, como veremos no capítulo seguinte.

4.5 Análise Combinatória

4.5.1 Sequência Numérica

Quantas são as seqüências de n termos, pertencentes ao conjunto $\{0, 1\}$, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0? Nesta questão deveremos encontrar uma equação de recorrência que permita calcular o número de seqüências de n termos formadas pelos algarismos 0 e 1, onde a quantidade de algarismos 0 deve ser ímpar, por exemplo, as seqüências $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$ e $(1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1)$. Vejamos uma tabela para analisar a situação.

Número de termos (n)	Seqüências x_n	Quantidade de seqüências
1	(0)	$1 = 2^0$
2	(0,1) e (1,0)	$2 = 2^1$
3	(0,1,1); (1,0,1); (1,1,0) e (0,0,0)	$4 = 2^2$
4	(0,1,1,1); (1,0,1,1); (1,1,0,1); (1,1,1,0); (0,0,0,1); (0,0,1,0); (0,1,0,0) e (1,0,0,0)	$8 = 2^3$
...
n	$(1,0,1,0,1, \dots, 0,1); \dots$	2^{n-1}

Tabela 3: Seqüências formadas por 0 e 1

Pelo raciocínio descrito na tabela (3), tudo parece indicar que 2^{n-1} representa o número de seqüências de n termos formadas pelos algarismos 0 e 1, em que o algarismo 0 aparece um número ímpar de vezes. Entretanto, devemos comprovar o resultado e para isso, vamos utilizar seqüências de recorrência. Considere u_n a quantidade de seqüências de n termos formadas pelos algarismos 0 e 1. Para calcular o número total de seqüências de n termos basta observar que para cada termo da seqüência teremos duas escolhas (0 ou 1), ou seja, duas possibilidades, logo pelo princípio multiplicativo da análise combinatoria, podemos concluir que o número de seqüências de n termos é

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^n.$$

Segue que $2^n - u_n$ representa a quantidade de seqüências de n termos formadas por 0 e 1, em que o algarismo 0 aparece um número par de vezes.

Considerando u_{n+1} como o número de seqüências de $n+1$ termos formadas pelos algarismos 0 e 1, onde este termo a mais em relação a x_n pode ser 1 ou 0. Logo, u_{n+1} será igual ao número de seqüências u_n acrescentada do algarismo 1 mais o número de seqüências

$2^n - u_n$ acrescentadas do algarismo 0, enfim

$$u_{n+1} = u_n + (2^n - u_n) = 2^n.$$

Da recorrência $u_{n+1} = 2^n$, podemos observar que

$$\begin{aligned} u_2 &= 2^1 \\ u_3 &= 2^2 \\ u_4 &= 2^3 \\ &\dots \quad \dots \\ u_n &= 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Portanto, o número de sequências de n termos formadas pelos algarismos 0 e 1, em que o algarismo 0 aparece um número ímpar de vezes, é dado por

$$u_n = 2^{n-1},$$

o que comprova a indicação inicial.

4.5.2 Regiões formadas por Círculos

Determine o número máximo de regiões em que n círculos podem dividir o plano. Este problema propõe encontrarmos o número de regiões formadas por n círculos secantes. Afim de fazermos uma análise prévia, tomemos como referência a figura (13).

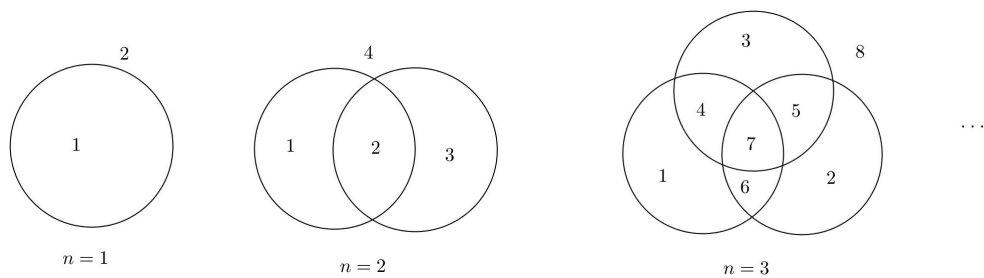


Figura 13: Quantidade de regiões em cada etapa

A partir de uma observação direta, podemos montar a seguinte tabela (4) .

Usando o raciocínio apresentado na tabela (4), aparentemente o número de regiões em cada etapa n pode ser calculado por $R_n = 2^n$. Entretanto, esta observação é preliminar, precisamos analisar usando sequências de recorrências e comparar os resultados.

Observando mais cuidadosamente a figura (13), podemos observar que quando

Quantidade de círculos (n)	Quantidade de regiões R_n
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
\dots	\dots
n	2^n

Tabela 4: Número de regiões R_n

acrescentamos um novo círculo, este é subdividido em no máximo o dobro da quantidade de arcos. Cada um destes arcos subdivide uma região existente formando o dobro de regiões, ou seja, o círculo $n + 1$ sofre $2n$ novas divisões pelos n círculos anteriores. Consequentemente, o número de regiões é

$$R_{n+1} = R_n + 2n \quad \text{e} \quad R_1 = 2.$$

Expandindo R_{n+1} , temos

$$\begin{aligned} R_2 &= R_1 + 2 \\ R_3 &= R_2 + 4 \\ R_4 &= R_3 + 6 \\ &\dots \quad \dots \\ R_n &= R_{n-1} + 2(n-1). \end{aligned}$$

Somando membro a membro a sequência acima, obtemos

$$R_2 + R_3 + R_4 + \dots + R_{n-1} + R_n = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \dots + R_{n-1} + (2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1)),$$

simplificando as parcelas correspondentes, substituindo $R_1 = 2$ e aplicando a soma dos $n - 1$ termos da progressão aritmética a $(2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1))$ chegamos a

$$R_n = 2 + \frac{(2 + 2(n-1)) \cdot (n-1)}{2}$$

e portanto, concluímos que o número máximo de regiões R_n formadas por n círculos secantes é determinada pela recorrência

$$R_n = n^2 - n + 2.$$

Portanto, o resultado encontrado é diferente da expressão encontrada na análise preliminar do problema. Observe que, devemos ser muito cautelosos ao generalizar certos padrões, por este motivo, o uso de técnicas comprovadamente eficazes torna-se indispensável. Quando fizemos a primeira generalização, usamos apenas três etapas, vejamos a quarta etapa:

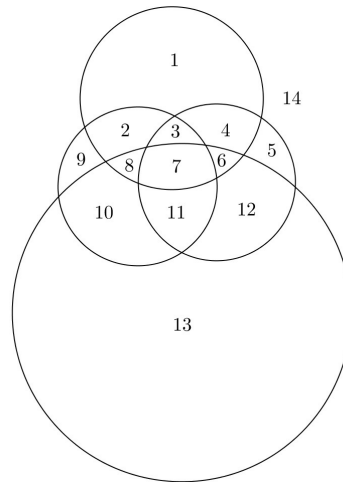


Figura 14: Quatro círculos secantes

A partir da quarta etapa, observamos que a primeira generalização falha, pois $R_4 = 2^4 = 16 \neq 14$, isso deve-se ao fato de o quarto círculo não dividir duas regiões, especificamente, regiões 1 e 11 como visto na figura (14). Enquanto que, pelo método de modelagem por seqüências de recorrência, temos $R_4 = 4^2 - 4 + 2 = 14$ e, portanto verifica-se o resultado esperado.

4.6 Probabilidade

Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem a iniciou tem a probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Sheila ganhar a n -ésima partida?

Considere p_n a probabilidade de Sheila ganhar a n -ésima partida, conseqüentemente, a probabilidade dela perder é $1 - p_n$, pois são probabilidades complementares. Considerando o fato de Sheila ganhar a $(n + 1)$ -ésima partida pode ter acontecido duas situações na n -ésima partida, ela ter vencido ou perdido. Caso tenha vencido a probabilidade da partida seguinte é 0,6, logo como são eventos independentes, a probabilidade solicitada no problema seria apenas o produto $0,6 \cdot p_n$. Se considerarmos que ela tenha perdido a n -ésima partida (probabilidade complementar), então a probabilidade de ganhar a seguinte é 0,4, daí a probabilidade solicitada seria $0,4 \cdot (1 - p_n)$. Portanto, como ela poderia "ganhar a n -ésima e ganhar a próxima partida" ou "perder a n -ésima e ganhar a próxima partida", trata-se de eventos mu-

tuamente exclusivos, logo $p_{n+1} = 0,6.p_n + 0,4.(1 - p_n)$, ou seja, $p_{n+1} = 0,2.p_n + 0,4$. Como Helena iniciou a primeira partida, Sheila tem probabilidade inicial de 0,4, então $p_1 = 0,4$.

Para resolver a recorrência, tomaremos uma sequência auxiliar formada apenas pela parte homogênea, ou seja, $x_{n+1} = 0,2x_n$. Encontrando uma solução não nula, temos

$$\begin{aligned}x_2 &= 0,2x_1 \\x_3 &= 0,2x_2 \\x_4 &= 0,2x_3 \\&\dots \dots \\x_n &= 0,2x_{n-1}.\end{aligned}$$

Multiplicando termo a termo ambos os membros e simplificando os termos correspondentes, encontramos $x_n = (0,2)^{n-1}.x_1$, considerando $x_1 = 1$, concluímos que uma solução particular é $x_n = (0,2)^{n-1}$. Substituindo na recorrência $p_n = x_n.y_n$, obtemos $p_n = (0,2)^{n-1}.y_n$. Usando este resultado em $p_{n+1} = 0,2.p_n + 0,4$, chegamos a $y_{n+1} = y_n + \frac{0,4}{(0,2)^n}$, com $y_1 = \frac{p_1}{x_1} = \frac{0,4}{1} = 0,4$. Expandindo y_{n+1} , temos

$$\begin{aligned}y_1 &= 0,4 \\y_2 &= y_1 + \frac{0,4}{(0,2)^1} \\y_3 &= y_2 + \frac{0,4}{(0,2)^2} \\&\dots \dots \\y_n &= y_{n-1} + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}\end{aligned}$$

Somando as expressões e simplificando, obtemos $y_n = 0,4 + \frac{0,4}{(0,2)} + \frac{0,4}{(0,2)^2} + \dots + \frac{0,4}{(0,2)^{n-1}}$ e por se tratar da soma dos termos de uma progressão geométrica de razão $q = \frac{1}{(0,2)}$ e primeiro termo $y_1 = 0,4$, encontramos $y_n = 0,4 \frac{1 - (0,2)^n}{0,8(0,2)^{n-1}}$. Finalmente, substituindo y_n em $p_n = (0,2)^{n-1}.y_n$, concluímos que a probabilidade de Sheila ganhar a n -ésima partida pode ser determinada pela recorrência

$$p_n = \frac{1 - (0,2)^n}{2} \quad \text{com} \quad p_1 = 0,4.$$

4.7 Dinâmica Populacional da Tilápia do Nilo

As tilápias são peixes de água doce, da família *Cichlidae* que apresentam três estágios em seu ciclo de vida: ovos, jovens e adultos. Os adultos férteis se reproduzem aproximadamente no quarto mês de idade. Em condições normais (temperatura da água acima de 20°C), a tilápia pode desovar a cada dois meses. As fêmeas põe os ovos e os machos fecundam. Após a eclosão o número de larvas depende do tamanho da fêmea, variando de 100 a 600 por desova com uma taxa de mortalidade de 50%. Num processo contínuo de criação desses peixes é recomendável que existam um macho para cada duas fêmeas.

Após modelagem do problema, descrita em BASSANEZI (2004), e considerando u_n a quantidade de peixes no estágio $n \geq 2$ (cada estágio tem dois meses), chega-se a seguinte equação:

$$u_n = u_{n-1} + \alpha u_{n-2} \quad n \geq 2.$$

com $u(0) = u_0$ e $u_1 = u_0$

Trata-se de uma recorrência de segunda ordem e, portanto devemos usar equação característica. Supondo uma solução do tipo $u_n = q^n$ e substituindo na equação de recorrência, $q^n = q^{n-1} + \alpha q^{n-2}$, simplificando por q^{n-2} , obtemos a equação característica

$$q^2 - q - \alpha = 0.$$

As raízes são $q_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$ e $q_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2}$. Como as raízes são reais e distintas, a solução geral é dada por

$$u_n = Aq_1^n + Bq_2^n.$$

Substituindo os valores de q_1 e q_2 , temos

$$u_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^n. \quad (1)$$

Tomando $u(0) = u_0$ e $u_1 = u_0$, resolvendo o sistema de equações e substituindo em (1) concluímos que a equação que modela o problema em função de cada estágio n é dada por

$$u_n = u_0 \frac{(1 + \sqrt{1 + 4\alpha})}{2\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^n - u_0 \frac{(1 - \sqrt{1 + 4\alpha})}{2\sqrt{1 + 4\alpha}} \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4\alpha}}{2} \right)^n.$$

4.8 Financiamento

Na compra de uma casa é feito um financiamento do valor c_0 que deve ser pago em 15 anos, em parcelas mensais fixas e iguais a k . Devemos determinar o juro mensal cobrado neste empreendimento. Considere c_0 a dívida inicial. Então a dívida c_n num mês n é dada pela dívida corrigida do mês anterior menos a parcela paga no mês, ou seja,

$$c_{n+1} = c_n + \alpha c_n - k = (1 + \alpha)c_n - k.$$

Nosso objetivo é encontrar uma fórmula fechada para c_n . Expandindo a recorrência, temos

$$c_1 = (1 + \alpha)c_0 - k$$

$$c_2 = (1 + \alpha)c_1 - k = (1 + \alpha)^2 c_0 - (1 + \alpha)k - k$$

$$c_3 = (1 + \alpha)c_2 - k = (1 + \alpha)^3 c_0 - (1 + \alpha)^2 k - (1 + \alpha)k - k$$

... ..

$$c_n = (1 + \alpha)c_{n-1} - k = (1 + \alpha)^n c_0 - k(1 + (1 + \alpha) + (1 + \alpha)^2 + \dots + (1 + \alpha)^{n-1}).$$

Como em c_n temos uma soma dos termos de uma progressão geométrica, podemos concluir que

$$c_n = (1 + \alpha)^n c_0 - k \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{\alpha}.$$

5 Linguagem de programação - BASIC

Atualmente, é indispensável recorrer ao tratamento computacional em matemática. Tratando-se de ensino-aprendizagem, a utilização do computador como veículo de aprendizagem é um fato, pois reúne em uma só ferramenta teoria e prática. Nossa proposta é usar uma linguagem de programação para fortalecer e desenvolver os conceitos de recorrência como forma de abordagem em problemas que apresentam padrões de comportamento numérico ou geométrico.

Usaremos a linguagem de programação BASIC, compilada pelo software FREEBASIC, pois agrega em si, comandos simples que podem ser aplicados em sala de aula sem muita dificuldade e por se tratar de um software que está disponível gratuitamente no endereço <http://www.freebasic.net/get>. Esta abordagem computacional poderia ser também implementada usando outros softwares, como por exemplo, o Scilab, Matlab, octave, Fortran, C++ e outros.

Como suporte de estudo, usaremos como tutorial os seguintes materiais:

- Curso de programação de jogos utilizando os Compiladores qbasic e freebasic, disponível no blog <http://www.desenvolvedoresdejogos.blogspot.com>.
- Projeto Aplicando Geometria Analítica na Construção de um Video-Game Simples, desenvolvido pelo Professor Paulo Cezar, disponível no endereço <http://wwwimpa.br/~pcezar/cursos/bienal>.

Este capítulo não tem a intenção de ser um curso de BASIC, mas de usar a programação como ferramenta para mostrar a importância da recorrência nos algoritmos de programação e calcular termos de seqüências. Como o algoritmo trabalha recursivamente, é possível obter os resultados numéricos da seqüências de recorrências sem que seja necessário encontrar as fórmulas fechadas, como faremos em alguns exemplos.

5.1 Comandos iniciais

Em linguagem de programação, as tarefas a serem realizadas pelo programa tem nomes específicos, chamados comandos. Apresenta-se na tabela (5), alguns comandos, sua função e aplicação.

Comando	Função	Modelo
REM ou '	Insere observações no programa.	REM// Este texto é um comentário// 'Este texto é um comentário.
CLS	Limpa a tela do computador	CLS
PRINT	Comando de saída, imprime na tela.	PRINT "Este texto aparecerá no video."
INPUT	Comando de entrada de dados.	INPUT "Entre com a variável", Var
\$	Apresenta um string (número ou palavra).	Nome\$
LOCATE X,Y	Localiza a mensagem no vídeo (O vídeo tem 40 colunas e 20 linhas).	Locate 5,38: Print"MENU"Imprime a palavra MENU na linha 5 e coluna 38.
SLEEP	Comando de espera.	SLEEP 'congela a tela até apertar uma tecla; SLEEP 5 ' congela a tela por 5 segundos.
END	Fim do programa.	END
+	Adição	2+3
-	Subtração	5-2
*	Multiplicação	4*2
/	Divisão	8/2
SQR	Raiz quadrada	SQR(4) 'Raiz quadrada de 4.
$x^{(1/n)}$	Raiz enésima de x	$8^{(1/3)}$ ' Raiz cúbica de 8.
ABS	Valor absoluto.	ABS(-3) ' Valor absoluto de -3.

Tabela 5: Comandos iniciais.

Usando os comandos apresentados na tabela (5), apresentaremos alguns exemplos iniciais.

Exemplo 1. Realizar operações aritméticas simples.

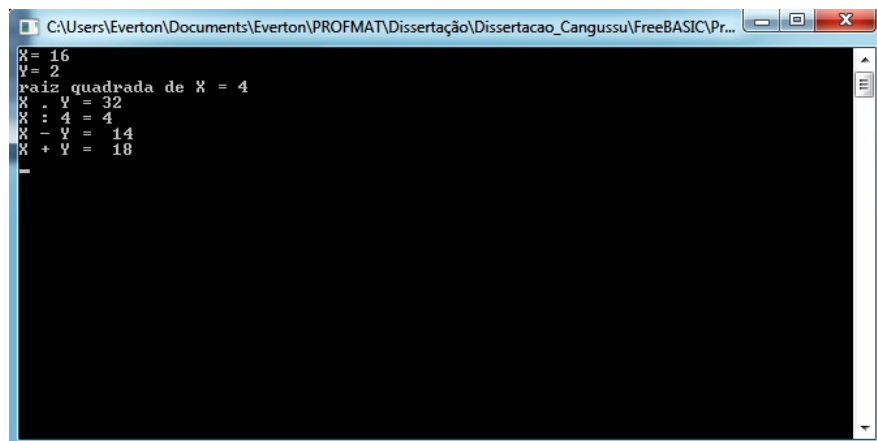
Com valores de x e y pré-definidos diretamente no algoritmo, calculamos a soma, subtração, multiplicação, divisão e raiz quadrada dos valores.

```

Cls
'Limpa a tela X=16:
'Declara que x=16 y=2:
Print "X=";X REM// Aparece na tela a informação x= <valor de x>//
Print "Y=";y
Print "raiz quadrada de X ="; X^(1/y)
Print "X . Y =";X*2
Print "X : 4 ="; x/4
Print "X - Y = "; x-y
Print "X + Y = "; x+y
Sleep
End

```

Executando o algoritmo através do FreeBasic aparecerá a tela apresentada na figura (15).



```

C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
X= 16
Y= 2
raiz quadrada de X = 4
X . Y = 32
X : 4 = 4
X - Y = 14
X + Y = 18

```

Figura 15: Operações aritméticas simples

Exemplo 2. Realizar inserção de informações.

Neste exemplo, usamos o comando **Input** para inserir informações em forma de texto, usando o símbolo \$ e após isso irá imprimir na tela a informação fornecida em uma localização especificada pelo comando **Locate**.

```

Cls
Input "Por favor digite seu nome:",nome$ '$ acompanha uma variável alfa numérica
locate 10,20: Print"Seu nome e "; nome$
Sleep 5
End

```

Após executar o programa, obtemos a seguinte tela (Figura 16).

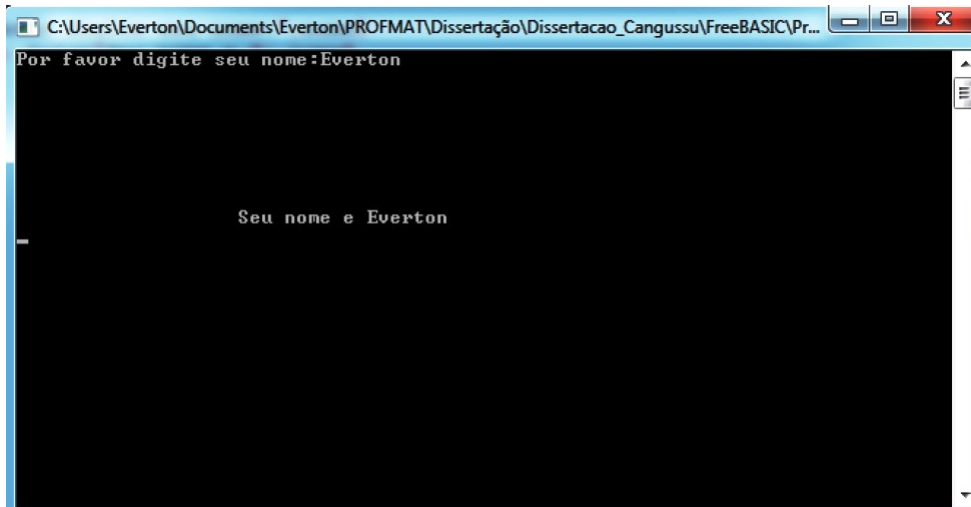


Figura 16: Inserindo informações

A partir dos exemplos acima, é possível fazer variações ampliando a funcionalidade dos programas e criando outros mais complexos.

5.2 Comandos de Looping

Para resolver problemas onde a variável sofre alterações periódicas necessitamos inserir comandos de repetição ou looping. Outra ferramenta importante, é a declaração das variáveis, como o BASIC é uma linguagem não estruturada, não precisamos declarar as variáveis, no entanto, para estudos posteriores é importante tal atitude.

O Basic processa seis tipos de dados:

- **Integer:** Valores inteiros, variando de -32768 a 32768;
- **Long Integer:** Valores inteiros, porém maiores, variando de -2147483648 a 2147483648;
- **Single:** Valores Decimais;
- **Double:** Valores decimais com faixa maior;
- **String:** Qualquer variável, ou seja, número ou palavras.

Para declarar variáveis no algoritmo usamos o comando **Dim**, como por exemplo, desejamos que a variável x seja um número inteiro, então no início do algoritmo escrevemos

Dim x as integer. O software irá interpretar x como número inteiro variando de -32768 a 32768.

Quando desejamos que uma ou mais variáveis sofram variação, é necessário usar comandos de Looping. Os mais usuais estão apresentados na tabela (6).

Comando	Função	Modelo
DO/LOOP	Comando de Looping, sob condição numerica.	Do ... Loop
WHILE/WEND	Também realiza looping, sob condição numérica.	While <condição> ... Wend
FOR/NEXT	Comando de looping, variando índice.	For <Var>=<n> to < K > Next <Var>
IF / THEN	Realiza uma função caso uma sentença seja verdadeira.	IF N<10 Then Print"O número é =", N End If
IF/THEN/ELSE	Comando se/então/Senão.	If N<10 Then Print "Número maior que 10" Else Print"Número menor que 10"

Tabela 6: Comandos de looping.

A partir destes comandos é possível realizar ações mais complexas, como resolver problemas que exigem condicional e criar sequências numéricas usando recorrência. Como podemos observar nos exemplos a seguir.

Exemplo 3. Calcular os k primeiros termos de uma progressão geométrica dados os valores do primeiro termo e a razão.

Neste exemplo, deveremos a partir da razão e primeiro termo, calcular os termos seguintes, multiplicando cada termo anterior pela razão. Deveremos calcular os termos até o k -ésimo termo. Através do comando **Input** o computador vai atribuir às variáveis a , q e k , valores fornecidos pelo usuário para o primeiro termo, razão e quantidade de termos da progressão geométrica, respectivamente. Após inserir as informações solicitadas, o programa irá através do comando **Sleep**, fornecer uma pausa para observação, que pode ser interrompida por um toque em qualquer tecla. Para fazer o valor dos índices dos termos da progressão geométrica sofrerem variação de 1 até k , usamos o comando **For n=1 to k** para calcular cada termo a_n e, através do comando **Print** o programa mostra na tela os valores de a_n , e para que o valor de n aumente uma unidade a cada etapa, usamos o comando **Next n**. O programa irá parar de calcular os valores de a_n quando $n=k$, logo depois mostrará na tela a sequência formada. Estas etapas podem ser visualizadas no quadro abaixo.


```

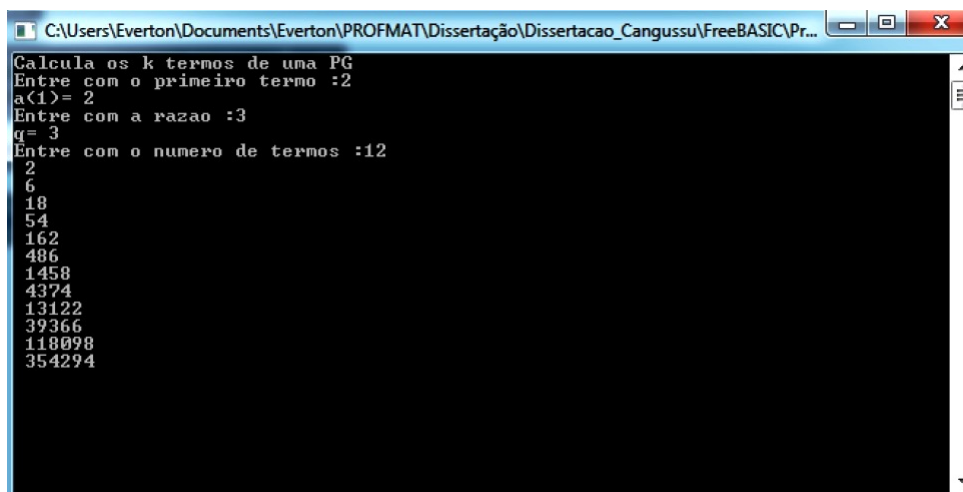
Cls
Print "Calcula os k termos de uma PG"
Dim n as Integer
Dim a as Integer
Dim k as Integer

Input "Entre com o primeiro termo :", a
Print "a(1)=";a
Input "Entre com a razao :", q
Print "q=";q
Input "Entre com o numero de termos :", k

For n=1 to k
 $a_n = a * q^{(n-1)}$ 
Print  $a_n$ 
Next n
sleep
End

```

Mostrando a tela representada na figura (17).



```

C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
Calcula os k termos de uma PG
Entre com o primeiro termo :2
a(1)= 2
Entre com a razao :3
q= 3
Entre com o numero de termos :12
2
6
18
54
162
486
1458
4374
13122
39366
118098
354294

```

Figura 17: Termos de uma Progressão Geométrica

Exemplo 4. Calcular os termos menores ou iguais a um valor N dado em uma progressão aritmética com primeiro termo e razão inseridos pelo usuário.

Para criar os termos de uma progressão aritmética precisamos do primeiro termo e a partir daí somar a razão para encontrar o segundo termo e, a partir daí, cada termo

será a soma do anterior com a razão. Para que o programa o computador entenda esta sequência de operações, precisamos informar a sequência de comandos descrita no quadro abaixo. Detalhadamente, através do comando **Input** o computador vai atribuir às variáveis a , r e N , valores fornecidos pelo usuário para o primeiro termo, razão e termo limitador da sequência, respectivamente. Após inserir as informações solicitadas, o programa irá através do comando **Sleep 2**, fornecer uma pausa de 2 segundos para observação, que pode ser previamente interrompida por um toque em qualquer tecla. Para fazer o computador calcular cada termo usaremos o comando **Do**, onde ele mostrará os valores de a e depois irá calcular o próximo termo da sequência somando o valor de a anterior com a razão r , fazendo com que a partir daí o a assuma um novo valor que será testado pela condição **Loop Until $a > N$** , se $a > N$ então o programa irá retornar ao comando **Do** e refazer a operação, este procedimento se repetirá até o momento em que o valor de a superar o valor de N . Após este momento, o programa vai apresentar todos os elementos calculados na tela e dará uma pausa para observação, que pode ser finalizada através de um toque em qualquer tecla.

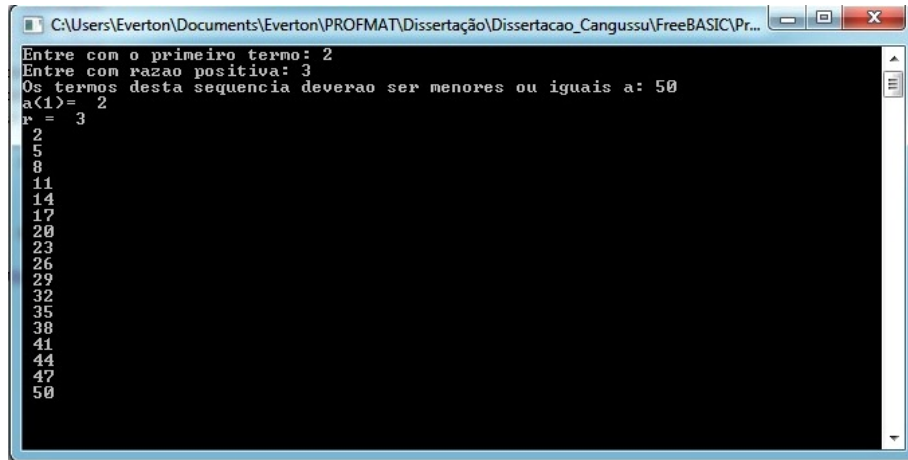
```

Cls
Dim a As Integer
Dim r As Integer
Dim N As Integer
Input "Entre com o primeiro termo: ", a
Input "Entre com a razao positiva: ", r
Input "Os termos desta sequencia deverão ser menores ou iguais a: ", N
Print "a(1)= "; a
Print "r = "; r
Sleep 2
Do
Print a
a=a+r
Loop Until a>N
Sleep
End

```

Perceba que o comando usado neste programa é diferente do anterior. A razão da mudança é que o Exemplo 3, queríamos determinar uma quantidade específica de termos, ou calcular o n -ésimo termo. Já no Exemplo 4, queremos que o programa calcule os termos que não superam um valor dado, ou seja, não conseguimos especificar o termo desejado, apenas

iserimos uma condição a ser satisfeita. O resultado obtido ao aplicar o Exemplo 4 no FreeBasic é a imagem (18).



```

C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangusu\FreeBASIC\Pr...
Entre com o primeiro termo: 2
Entre com razao positiva: 3
Os termos desta sequencia deverao ser menores ou iguais a: 50
a(1)= 2
r = 3
2
5
8
11
14
17
20
23
26
29
32
35
38
41
44
47
50

```

Figura 18: Termos de uma Progressão Aritmética

Exemplo 5. Calcular os termos da sequência de Fibonacci menores que um valor especificado.

Como em uma sequência de Fibonacci cada termo a partir do terceiro é formado pela soma dos dois anteriores, devemos fixar os valores dos dois primeiros $X_0=1$ e $X_1=1$ e partir daí, calcular os outros termos pela soma dos anteriores até superar um valor especificado pelo usuário. o algoritmo no quadro abaixo é uma adaptação do algoritmo apresentado pelo Professor Paulo César em seu Projeto Aplicando Geometria Analítica na Construção de um Video-Game Simples, disponível em <http://www.impa.br/pcezar/cursos/bienal>.

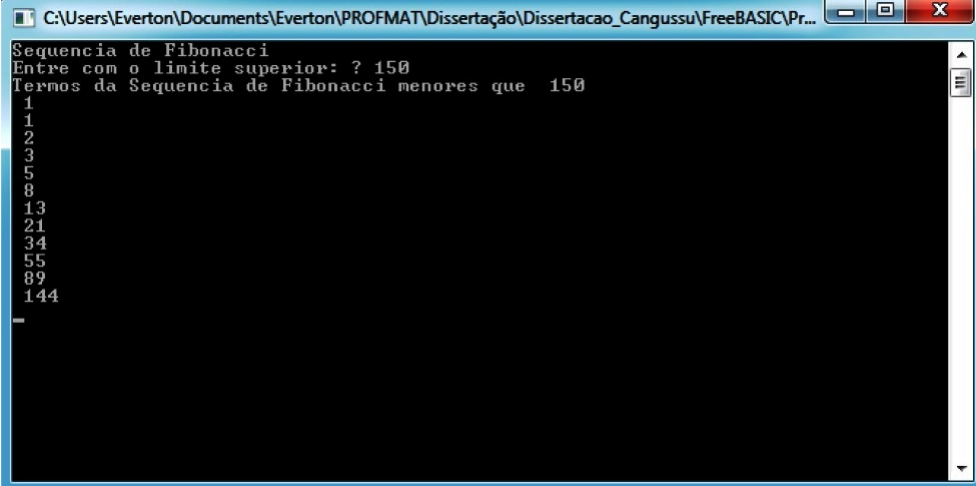
Através do comando **Input** o computador vai atribuir a variável N , o valor fornecido pelo usuário para limitar os termos da sequência. Após inserir as informações solicitadas, o programa irá também atribuir a X_0 e X_1 o valor de 1. Através do comando **Print**, irá mostrar na tela a frase "Termos da Sequencia de Fibonacci menores que" e mostrar o valor de N . Atribuirá a X a soma de X_0 com X_1 . Neste caso, irá através do comando **Do While** $X < N$ julgar o valor de N , se satisfeita a condição, mostrará o valor de X na tela e mudará os valores de X_0 e X_1 , para que seja calculado o próximo termo e, por meio do comando **Loop** retornar ao teste **Do While** $X < N$ que se for satisfeito, repetirá o processo, caso contrário, finalizará o programa e mostrará todos os valores calculados, dando uma pausa para observação.

```

Cls
Print"Sequencia de Fibonacci"
Input "Entre com o limite superior: ";N
X0 = 1
X1 = 1
Print "Termos da Sequencia de Fibonacci menores que "; N
Print X0
Print X1
X = X0 + X1
Do WHILE X < N
Print X
X0 = X1
X1 = X
X = X0 + X1
Loop
Sleep

```

Os resultados obtidos são então impressos na tela, como podemos ver na figura (19).



```

C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
Sequencia de Fibonacci
Entre com o limite superior: ? 150
Termos da Sequencia de Fibonacci menores que 150
1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144

```

Figura 19: Termos de uma Sequência de Fibonacci

Exemplo 6. Calcular os k primeiros termos da sequência de Fibonacci.

Neste caso, tomaremos um caminho diferente, este algoritmo difere do anterior, pois teremos que calcular uma quantidade específica de termos. Após inserir e mostrar as informações iniciais, através do comando **Input** e **Print**, de acordo com o número de termos N , julgaremos as informações inseridas da seguinte forma:

- Usando o comando **If n=1 Then** o programa analisará a quantidade de termos inserida (N), caso N=1, a condição exigida no comando será satisfeita e mostrará na tela apenas o primeiro termo X0, caso contrário, o programa irá julgar a condição seguinte.
- Através o comando **Elseif n=2 Then**, sabendo que $N \neq 1$, o programa analisará o valor de N. Se N=2, a condição será satisfeita e o programa mostrará o valor dos dois primeiros termos, ou seja, X0 e X1. Caso $N \neq 2$, irá recair na condição seguinte.
- Finalmente, usando o comando **Else**, o programa imprimirá os valores dos dois primeiros termos X0 e X1, e como $N > 2$, calculará os termos seguintes usando o comando **For i=1 To N-2**, conforme Exemplo 3.

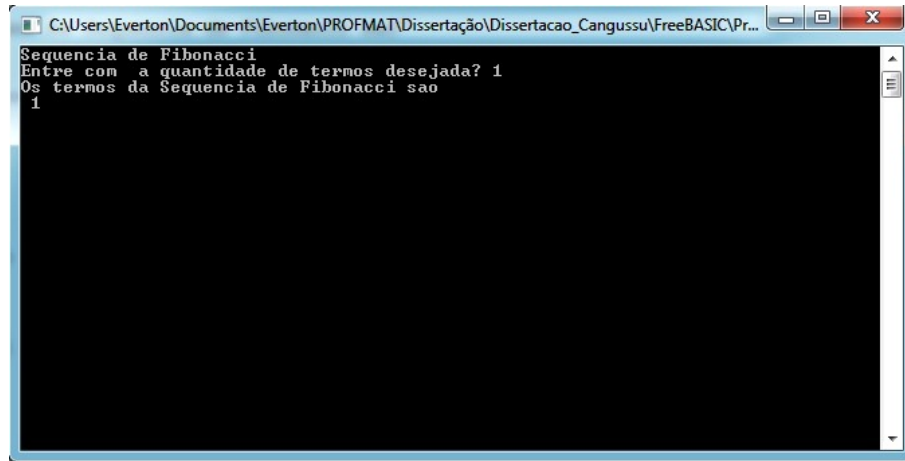
Calculado os termos ele sairá da condição **If** através do comando **EndIf** e mostrará os valores calculados.

```

Cls
Print"Sequencia de Fibonacci"
Input "Entre com a quantidade de termos desejada";N
X0 = 1
X1 = 1
Print "Os termos da Sequencia de Fibonacci sao"
If n=1 Then
Print X0
Elseif n=2 Then
Print X0
Print X1
Else
Print X0
Print X1
X = X0 + X1
For i=1 To N-2
Print X
X0 = X1
X1 = X
X = X0 + X1
Next i
End If
Sleep

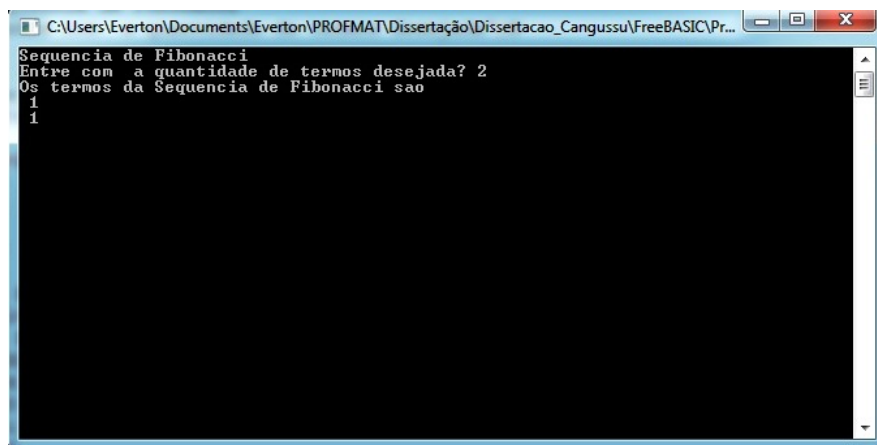
```

Se a quantidade de termos for igual a 1, gerará a imagem da figura (20), ou caso a quantidade de termos seja igual a 2, gerará a imagem da figura (21) ou, caso a quantidade de termos seja maior que 2, gerará a imagem da figura (22).



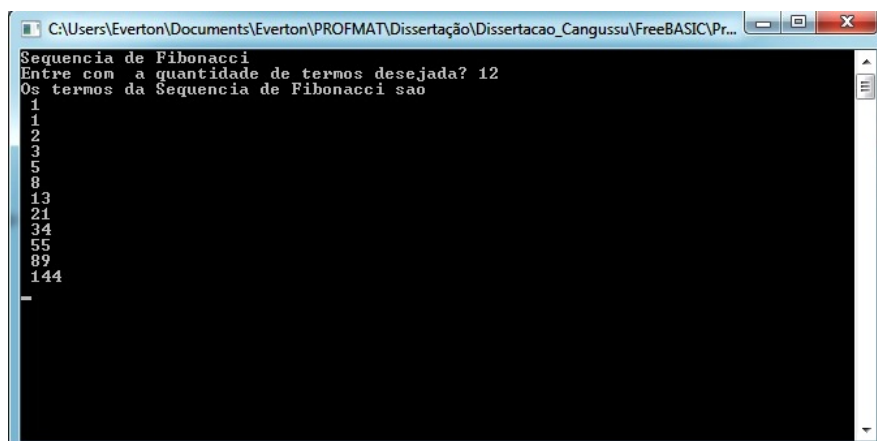
```
C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
Sequencia de Fibonacci
Entre com a quantidade de termos desejada? 1
Os termos da Sequencia de Fibonacci sao
1
```

Figura 20: Sequência de Fibonacci com 1 termo



```
C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
Sequencia de Fibonacci
Entre com a quantidade de termos desejada? 2
Os termos da Sequencia de Fibonacci sao
1
1
```

Figura 21: Sequência de Fibonacci com 2 termos



```
C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertação\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
Sequencia de Fibonacci
Entre com a quantidade de termos desejada? 12
Os termos da Sequencia de Fibonacci sao
1
1
2
3
5
8
13
21
34
55
89
144
```

Figura 22: Sequência de Fibonacci com 12 termos

Exemplo 7. Calcular a quantidade de palitos necessários para formar o triângulo de ordem N , usando a relação de recorrência $u_{n+1} = u_n + 3(n + 1)$, com $n \geq 1$, segundo modelo proposto na Seção (4.3).

Como é óbvio a quantidade de palitos para formar o triângulo de ordem 1, o programa apresentará a quantidade de palitos necessários para formar o triângulo de ordem $N > 1$. Basta tomar a partir da relação de recorrência sugerida e calcular os termos seguintes. O algoritmo usa o fato de o triângulo de ordem $i=1$ possuir $X=3$ palitos e através do comando **Do WHILE** $i < N$, onde N é triângulo de ordem N informado, atribui a $X1$ o valor de entrada X , calcula o próximo termo através da expressão $X = X1+3*(i+1)$ e varia o valor de i através da expressão $i=i+1$, realizando este processo enquanto o valor de i for inferior ao valor de N . Quando i for superior a N o programa pára e imprime na tela a frase "A quantidade de palitos necessarios para construir os triangulos é" e mostra so lado o último valor calculado de X .

```

Cls
Print"Numero de palitos para formar triangulos."
Input "Entre com o numero de triangulos: ";N
i=1
X = 3
Do WHILE i < N
X1 = X
X = X1+3*(i+1)
i=i+1
Loop
Print "A quantidade de palitos necessarios para construir os triangulos é: ";X
Sleep

```

Após as operações o programa mostra a tela apresentada na figura (23).

Como podemos perceber, em muitos casos, o uso do computador proporciona uma visualização dos resultados sem que seja necessário cálculos exaustivos e demonstrações. Dessa forma, torna-se útil como simulação numérica e também como verificação das informações obtidas por via analítica. Em muitos casos, torna-se inviável fazer certas análises numéricas pela dificuldade dos cálculos envolvidos e pelo tempo dispensado.

Exemplo 8. Analisar alguns resultados sobre o *Floco de neve de Koch* apresentado na seção (4.4). Como já obtivemos uma fórmula para sua área e para o perímetro, vamos produzir um algoritmo para calcular áreas e perímetros de acordo com a etapa n e com o valor do lado do triângulo inicial l .

```

C:\Users\Everton\Documents\Everton\PROFMAT\Dissertaçao\Dissertacao_Cangussu\FreeBASIC\Pr...
Numero de palitos para formar o triangulo de orden N.
Entre com a orden do triangulo: ? 4
A quantidade de palitos necessarios para construir o triangulo e: 30

```

Figura 23: Quantidade de Palitos para formar o triângulo de ordem 4

O primeiro modelo que apresentaremos abaixo, calcula a área e o perímetro em cada etapa (transformação).

```

Cls
Print"Calculo da area e do perimetro do Floco de Neve de Koch."
Print"p: Perimetro e A: Area."
Input "Informar o comprimento do lado do triangulo inicial ";l
Input "Entre com a quantidade de etapas desejadas";N
Print "O perimetro e igual a:"
p=3*l
A0=((l^2)*(3^(1/2)))/4
For i=0 To N
Print "n=";i,
Print"p= "; p,
If i<1 Then
Print"A= "; A0
Else
Print"A= "; A
Endif
p = 3*l*(4/3)^(i+1)
PG=(3/5)*(1-(4/9)^(i+1))
A=A0*(1+PG)
Next i
Sleep

```

A figura (24) mostra a tela após uma simulação para o algoritmo acima com 30

etapas em um triângulo de lado 10cm .

```

Calculo da area e do perimetro do Floco de Neve de Koch.
p: Perimetro e A: Area.
Informar o comprimento do lado do triangulo incial ? 10
Entre com a quantidade de etapas desejadas? 30
O perimetro e igual a:
n= 0      p= 30      A= 43.30127
n= 1      p= 40      A= 57.73503
n= 2      p= 53.33333  A= 64.15003
n= 3      p= 71.11111  A= 67.00114
n= 4      p= 94.81481  A= 68.2683
n= 5      p= 126.4198  A= 68.83148
n= 6      p= 168.5597  A= 69.08179
n= 7      p= 224.7462  A= 69.19304
n= 8      p= 299.6617  A= 69.24248
n= 9      p= 399.5489  A= 69.26445
n= 10     p= 532.7318  A= 69.27422
n= 11     p= 710.3091  A= 69.27856
n= 12     p= 947.0787  A= 69.28049
n= 13     p= 1262.772  A= 69.28135
n= 14     p= 1683.696  A= 69.28172
n= 15     p= 2244.927  A= 69.2819
n= 16     p= 2993.237  A= 69.28197
n= 17     p= 3990.982  A= 69.28201
n= 18     p= 5321.31  A= 69.28202
n= 19     p= 7095.079  A= 69.28203
n= 20     p= 9460.105  A= 69.28203
n= 21     p= 12613.47  A= 69.28203
n= 22     p= 16817.96  A= 69.28203
n= 23     p= 22423.96  A= 69.28204
n= 24     p= 29898.61  A= 69.28204
n= 25     p= 39864.81  A= 69.28204
n= 26     p= 53153.08  A= 69.28204
n= 27     p= 70870.77  A= 69.28204
n= 28     p= 94494.36  A= 69.28204
n= 29     p= 125992.5  A= 69.28204
n= 30     p= 167990  A= 69.28204

```

Figura 24: Simulação de área e perímetro

Podemos perceber que a área se aproxima bastante do um valor $69,29$, enquanto que o perímetro cresce indefinidamente.

Como saber o número de transformações necessárias para chegar a um determinado perímetro? E o comprimento do lado das cópias nesta etapa?

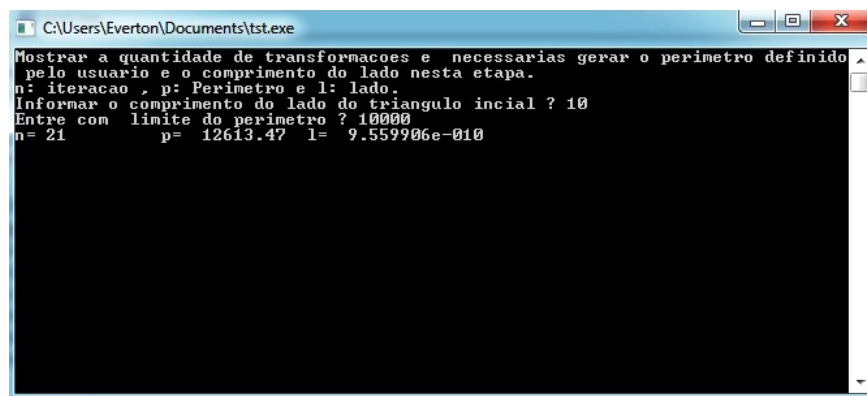
Para responder essas perguntas, o uso do computador é muito importante, pois se desejarmos saber em qual etapa (transformação) o perímetro ultrapassa um valor limite p muito grande, torna-se inviável fazer estes cálculos manualmente ou mesmo através de uma calculadora. Neste sentido, o uso de um programa que resolva este problema é indispensável. A seguir apresenta-se um algoritmo que resolve esse problema.

```

Cls
Print"Mostrar a quantidade de transformacoes e necessarias gerar o perimetro definido
pelo usuario e o comprimento do lado nesta etapa."
Print"n: iteracao , p: Perimetro e l: lado."
Input "Informar o comprimento do lado do triangulo inicial ";l
Input "Entre com limite do perimetro ";k
p=3*l
i=1
Do WHILE p <= k
p = 3*l*(4/3)^(i+1)
i=i+1
Loop
l=l/(3^i)
Print "n=";i,
Print"p= "; p,
Print "l= ";l
Sleep

```

Considere uma simulação numérica para um perímetro proposto $p = 10000$ com o lado do triângulo inicial $l = 10$. A figura (25) apresenta o número de transformações que gera o primeiro perímetro maior que o proposto p , pois o valor exato possivelmente, com esses dados, não existe. Mostra também o comprimento de cada lado das cópias geradas nesta mesma etapa.



```

C:\Users\Everton\Documents\tst.exe
Mostrar a quantidade de transformacoes e necessarias gerar o perimetro definido
pelo usuario e o comprimento do lado nesta etapa.
n: iteracao , p: Perimetro e l: lado.
Informar o comprimento do lado do triangulo inicial ? 10
Entre com limite do perimetro ? 10000
n= 21      p= 12613.47  l= 9.559906e-010

```

Figura 25: Etapa de um perímetro dado.

Tomando os exemplos acima como referência e usando a bibliografia sugerida no início do capítulo, o estudante é capaz de criar programas mais completos e complexos, de acordo com a necessidade dos problemas propostos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E RECOMENDAÇÕES

O trabalho apresenta uma proposta metodológica para o ensino de sequências de recorrência na sua forma analítica, geométrica e numérica usando como recurso didático auxiliar a linguagem de programação Basic. Acredita-se que a proposta é viável, visto que, a abordagem tomada é diferenciada em relação ao método tradicional, pois introduzimos o estudo de sequências de recorrência, estamos ampliando o horizonte do aluno na forma de observar padrões. Modelando padrões geométricos ou numéricos e fazendo simulações, através de linguagem de programação, é possível melhorar a visualização dos resultados.

Esta forma de abordagem, incentivando essa mudança de representação de um mesmo problema matemático está referenciada por Raymond Duval ¹ (2009, p.37) que em sua *teoria de representação semiótica* adota o termo *registro de representação* para os graus de liberdade que o sujeito pode dispor a fim de formar idéias mais complexas e relacionadas entre si.

Em matemática, os objetos de estudo, inacessíveis pela percepção, são abordados pela sua representação, que pode ser de várias formas, como por exemplo, a sequência dos números triangulares que podem ser, através da modelagem matemática, representados por uma sequência numérica e, esta sequência, pode ser representada por uma expressão algébrica, chamada termo geral. Lembrando que, ainda podemos, através da programação, abordar o termo geral a fim de obter tanto a representação geométrica, quanto numérica.

Segundo Flores (2006, p. 80), a contribuição de Duval para o ensino/aprendizagem em matemática está em propor o uso de mais de um registro de representação semiótico para garantir a aprendizagem, pois o aluno deve fazer a *conversão* de registros de representação, que nada mais é, que passar de um registro para outro, como citado no exemplo anterior. Esta proposta de conversão, tem como um dos propósitos, não confundir objeto de estudo e o conteúdo de sua representação, visto que, através da conversão de registros disporemos de pelo menos dois registros de representação.

¹Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação. Desenvolveu estudos em Psicologia Cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França no período de 1970 a 1999.(Flores, p.78)

“Compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas.”(DUVAL,2008, p. 15)

A modelagem matemática é um processo de construção de modelos matemáticos, que visa elaborar e refinar representações que buscam descrever ou explicar uma situação real. Grosso modo, podemos dizer que a modelagem complementa o conceito de conversão de registro de representação, pois através dela podemos fazer a passagem de um tipo de registro para outro, incorporando ao processo o significado das informações contidas em cada registro, ampliando assim, o conceito de registro para modelo matemático.

“Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações de realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual.”(Bassanezi, 2004, p. 24)

O uso da linguagem de programação como ferramenta de ensino/aprendizagem tem o objetivo de agregar à teoria de registros de representações ao atrativo tecnológico que os computadores produzem nos estudantes, bem como, fazer o *tratamento* de sequências de recorrências através do pensamento recursivo inerente aos programas desenvolvidos para simular numericamente os padrões propostos no trabalho, especialmente os que não podem ser feitos manualmente.

Os conceitos abordados necessitam de poucos pré-requisitos, estudados no Ensino Fundamental, permitindo que a proposta seja abordada a partir do 8º ano da Educação Básica. Tornando-se um incentivador do estudo de padrões matemáticos e da inserção de linguagem de programação como um fator motivacional, haja visto, os estudantes terem um verdadeiro fascínio pelo uso de tecnologia. É importante salientar que, o uso de linguagem de programação, favorece o ensino/aprendizagem de matemática, pois exige do aluno a necessidade de descrever, raciocinar, relacionar e visualizar registros de representação.

Desta forma, o estudante perceberá vários padrões de comportamento numérico, algébrico e geométrico, desde o ensino fundamental, em contra posição a proposta atual, que visa oferecer esta abordagem de padrões na sua forma mais simplificada, limitando-se ao estudo das progressões aritméticas e geométricas, enfim, apenas dois modelos de representação.

O trabalho propôs apresentar uma abordagem sobre sequências de recorrências, partindo do conceito de padrões e, através da modelagem matemática, representar os vários registros semióticos e usar o conceito de conversão para transitar entre as representações algébricas, numéricas e geométricas.

É importante em trabalhos complementares a este, que se proponha a partir de linguagem de programação em basic ou usando programas mais eficientes, como C++ , Fortran, Matlab, Scilab e outros, a representação geométrica do *Floco de neve de Koch*, bem como, a resolução de problemas de recorrência mais complexos e simulações numéricas. Ressalta-se também, a importância de reforçar o aspecto analítico do estudo em questão, através das demonstrações dos teoremas e propriedades abordados e não demonstrados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, RODNEY CARLOS. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 2ª ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BATANETE, ANA. CASTRO, ANDREIA. LAGO, HIRLLANY. *Fundamentos e Ensino de Álgebra: natureza - caos ou ordem?* Coimbra: Universidade de Coimbra, 2004. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2005/natureza.pdf>. Acesso em: 16 de março de 2013 às 10:21 h.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002.

CARVALHO, PAULO CEZAR PINTO. *Aplicando Geometria analítica na construção de um vídeo-game simples*. In. Biental da Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Disponível em: <http://www.impa.br/~pcezar/cursos/biental>. Acesso em: 04/02/2013 às 17:01 h.

DALBERTO, FRANCÉLI. VIELMO, SANDRA ELIZA. *Fractais: Uma Abordagem da Matemática do Ensino Médio no GeoGebra*. In. Caderno de Oficinas da VI Biental da Sociedade Brasileira de Matemática. Campinas: IMECC - Unicamp, 2012. Disponível em: http://bientaldematematica.org.br/sites/bientaldematematica.org.br/files/Oficinas_1.pdf. Acesso em: 16 de março de 2013 às 10:12 h.

DEVLIN, K. *Matemática - a ciência dos padrões*. Porto: Porto editora, 2002.

DUVAL, R. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de represen-*

tação semiótica. 4 ed. Campinas, Papirus, 2008, p. 11-33.

DUVAL, R. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradução: Lênio Levy e Marisa Silveira. São Paulo: Editora da Física, 2009.

FLORES, CLÁUDIA REGINA. *Registros de representação semiótica em matemáticas: história, epistemologia, aprendizagem*. Bolema, Rio Claro (SP), Ano 19, nº 26, 2006, pp. 77 a 102. Disponível em: http://www.ced.ufsc.br/claudiaflores/PESQUISA/textos_publicados/Registros_de_representacao_semiotica_em_matematica_historia_epistemologia_aprendizagem.pdf. Acesso em: 22 de março de 2013 às 22:26 h.

GOMES, ANTONIO DO NASCIMENTO. SALVADOR, JOSÉ ANTONIO. *Dobras, Cortes, Padrões ... Fractais no Ensino de Matemática*. In. Caderno de Oficinas da VI Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Campinas: IMECC - Unicamp, 2012. Disponível em: http://bienaldematematica.org.br/sites/bienaldematematica.org.br/files/Oficinas_1.pdf. Acesso em: 16 de março de 2013 às 10:12 h.

LIMA, ELON. CARVALHO, PAULO CEZAR P. WAGNER, EDUARDO e MORGADO, AUGUSTO CESAR. *A matemática do ensino médio - vol. 2*. 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

MARKUCHEVITCH, A.I. *Coleção Iniciação na Matemática - Sequências Recorrentes*. Tradução: M. Dombrovsky. Moscou: Editora Mir, 1985.

MENEGASSI, MARIA ELVIRA JARDIN. SILVA, MERCEDES MATTE DA. *Mini curso: Análise de problemas envolvendo padrões numéricos*. In. Relatos de Experiências do IX ENEM. Belo horizonte - MG, 2007. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Trabalhos/RE21461236053T.doc. Acesso em: 25 de janeiro de 2013 às 11:15 h.

NOLIBUS, DENILSON AMARAL. *Relações de recorrência e aplicações*. Campinas, SP: Dissertação de Mestrado Profissional IMECC - UNICAMP, 2010. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/postrad/mestprof/dissertações-defendidas-no-ano-de-2010>. Acesso em: 26 de dezembro de 2012, às 15:26 h.

PEREIRA, LÍVIA DA CÁ. *Sequência de Fibonacci: história, propriedades e relações com a razão áurea*. Disc. Scientia. Série: Ciências Naturais e Tecnológicas, S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81,

2008. Disponível em: <http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2008/fibonacci.pdf>. Acesso em: 19 de dezembro de 2012 às 20:49 h.

POLLMAN, HÉCTOR SOZA. *Equações de Recorrência*. Revista Eureka!, Rio de Janeiro, 2000. Nº 9. p. 33-40. Disponível em: http://www.obm.org.br/opencms/revista_eureka/. Acesso em: 18 de janeiro de 2013 às 0:33 h.

SALLUM, ÉLVIA MUREB. *Fractais no ensino médio*. Revista do professor de matemática - RPM, Rio de Janeiro, 2005. V. 57. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/conheca/fractais.pdf>. Acesso em: 11 de março de 2013 às 17:18 h.

SANTOS, JOSÉ PLÍNIO DE O.. MELLO, MARGARIDA P. e MURARI, IDANI T. C.. *Introdução à análise combinatória*. 3ª ed. rev. - Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

SOUZA, EDNILSON SERGIO RAMALHO DE. *Modelagem Matemática no ensino de Física - Registros de Representação Semiótica*. Belém, PA: Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática - UFPA, 2010. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Fisica/dissertacao_ednilson_souza.pdf. Acesso em: 26 de março de 2013 às 0:35 h.

STEWART, I. *Os números da natureza*. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

SUNG, VICTOR SAE HON. *Sequência de Fibonacci e suas aplicações*. São Carlos - SP: Monografia de Conclusão do Curso de Matemática DM - UFSCAR, 2012. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/dm/attachments/article/5/MonografiaVictor.pdf>. Acesso em: 19 de dezembro de 2012 às 20:52 h.

Curso de programação de jogos usando os compiladores Qbasic e FreeBasic. Disponível em: <http://www.desenvolvedoresdejogos.blogspot.com.br>. Acesso em: 28/01/2013 às 15:01h.

<http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/06/tcl-e-aplicacoes-nas-equacoes-de.html>. Acesso em: 10/12/2013 às 23:30h.

<http://logicamentopedagogia.blogspot.com.br/2010/04/capitulo-5-quinta-noite-26.html>. Acesso em: 15/02/2013 às 02:21h.