UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Uma Proposta Didática para o Ensino das Cônicas à luz da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

Welhington Sergio da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Agosto/2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586p Silva, Welhington Sergio da.
Uma proposta didática para o ensino das cônicas à luz da aprendizagem significativa de David Ausubel / Welhington Sergio da Silva. – Campina Grande, 2017.
77 f.: il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".
Referências.

1. Matemática – Estudo e Ensino. 2. Aprendizagem Significativa. 3. Cônicas. 4. Sequência Didática. I. Medeiros, Luiz Antônio da Silva. II. Título.

CDU 51(07)(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

Uma Proposta Didática para o Ensino das Cônicas à luz da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

por

Welhington Sergio da Silva †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

† Bolsista CAPES

Uma Proposta Didática para o Ensino das Cônicas à luz da Aprendizagem Significativa de David Ausubel

por

Welhington Sergio da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr. Luciana Rose de Freitas - UEPB

Prof. Dr. José Fernando Leite Aires - UFCG

Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2017

Dedicatória

Ao meu avô, José Belo da Silva Filho, (*in memorian*) pela dedicação comigo, ensinando-me valores de honra e dignidade. Levo muito dele em mim.

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida e por ter me dado coragem para enfrentar e vencer todos o desafios.

À minha amada esposa, Raquel, pelo amor, carinho, incentivo e pela compreensão do tempo sacrificado em função desse trabalho.

À minha família, especialmente à minha mãe, Maristela, pelo amor, incentivo e apoio.

Ao coordenador do PROFMAT-UFCG e orientador Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros, por ter aceitado fazer a orientação do trabalho, e pela orientação paciente, competente e encorajadora durante a realização deste trabalho.

Ao Corpo Docente, pela dedicação dispensada a nós do Corpo Discente, contribuindo de modo significativo à expansão do conhecimento adquirido.

Aos professores participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Luciana Rose de Freitas (UEPB) e Prof. Dr. José Fernando Leire Aires, pelas valiosas contribuições que enriqueceram nosso trabalho.

À minha turma, pela cumplicidade, colaboração e força amiga durante toda a caminhada acadêmica.

Agradeço à direção e aos colegas da Escola Estadual Professor Antônio Pedro de Aguiar pelo apoio durante a realização deste trabalho. E, em especial, aos alunos que participaram desta pesquisa, fazendo tudo com o maior carinho e disponibilidade para aprender.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

A disciplina de Matemática continua a ser um obstáculo na vida de boa parte dos estudantes. O formalismo exagerado e a presença de ideias abstratas podem ser alguns dos causadores de dificuldades. A Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel é uma teoria cognitivista que vem sendo utilizada em muitas áreas do ensino-aprendizagem por seus resultados satisfatórios. Em matemática, mais especificamente, no ensino de Geometria, vemos uma grande vantagem de se utilizar esta Teoria, uma vez que as etapas sugerem a possibilidade de se utilizar materiais como organizadores prévios, tais como o computador, que pode promover condições para a aprendizagem desse conteúdo. Para isso, realizamos uma pesquisa bibliográfica integrativa acerca da Teoria utilizada e desenvolvemos uma sequência didática para o ensino das Cônicas no plano. Aplicamos a sequência em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio e discorremos sobre os resultados.
Palavras Chaves: Aprendizagem Significativa. Cônicas. Sequência Didática.

Abstract

The subject of mathematics continues to be an obstacle in many student's lives. Exaggerated formalism and the presence of abstract ideas can be some of the causes of difficulties. David Ausubel's Significant Learning Theory is a cognitive theory that has been used in many areas of teaching/learning because of its satisfactory results. In mathematics, more specifically, in Geometry teaching, we see a big advantage of using this Theory since the steps suggest the possibility of using materials as previous organizers, such as the computer, that can promote conditions for the learning of this content. In order to do that, we carried out an integrative bibliographical research about the used Theory and developed a didactic sequence for the teaching of the conics in the plane. We applied the sequence in a third-year high school class and discussed the results.
Keywords: Significant Learning. Conics. Didactic sequence.

Sumário

1 Introdução **3**
- 1.1 Objetivos 5
  - 1.1.1 Objetivo Geral 5
  - 1.1.2 Objetivos Específicos 5
- 1.2 Organização 5

2 Referencial Teórico **7**
- 2.1 A Aprendizagem Significativa 7
- 2.2 Condições para uma aprendizagem significativa 9
  - 2.2.1 Predisposição para a aprendizagem 10
  - 2.2.2 Material de aprendizagem potencialmente significativo 12
- 2.3 Evidência da aprendizagem significativa 14
- 2.4 Organizadores Prévios 15
- 2.5 A Teoria da Aprendizagem Significativa em Sala de Aula 17
  - 2.5.1 Princípios de Organização Sequencial e de consolidação do conteúdo 17
  - 2.5.2 Elaboração dos Mapas Conceituais 19
  - 2.5.3 Avaliação 21
  - 2.5.4 Etapas de uma Intervenção Didática à luz da Aprendizagem Significativa 22
- 2.6 Implicações da Teoria da Aprendizagem Significativa no ensino de Matemática 24
- 2.7 Conclusão 25

3 Sequência Didática **27**
- 3.1 Objetivos da Sequência Didática 27
- 3.2 Desenvolvimento da Sequência Didática 27
  - 3.2.1 Avaliação dos conhecimentos prévios do aluno e apresentação do tema 29
  - 3.2.2 A investigação geométrica da Parábola 34
  - 3.2.3 A investigação geométrica da Elipse 36
  - 3.2.4 A investigação geométrica da Hipérbole 39
  - 3.2.5 A investigação analítica da Parábola 41
  - 3.2.6 A investigação analítica da Elipse 47

3.2.7 A investigação analítica da Hipérbole 50
3.2.8 Reconciliação integrativa 53
3.3 Avaliação 57

4 Resultados **62**
4.1 Análise do Livro Didático 62
4.2 Aplicação da Sequência Didática 65

5 Conclusões **73**

Referências Bibliográficas **74**

Capítulo 1

Introdução

Os agentes da educação escolar vêm sendo desafiados a refletirem sobre metodologias de ensino que venham conquistar a atenção e o prazer do aluno pelos conteúdos ministrados em sala de aula. Este desafio, embora não seja novidade, pois já foi identificado e já vem sendo debatido a um bom tempo por vários teóricos da educação, na atualidade tem se tornado mais delicado, por vários motivos, dentre eles, por exemplo, o processo de ensino-aprendizado tem exigido cada vez mais dedicação, tempo, conhecimento e atualização do professor, frente a uma velocidade cada vez maior em que acontece mudanças no contexto social e que surgem novas informações.

Mas, para que isso ocorra, o primeiro passo é abandonar a ideia de um modelo único de ensino, aquele em que o professor é detentor do conhecimento e o aluno é tido como um mero receptor passivo de informações, que aprende de forma mecânica ao seguir rigorosamente as prescrições dadas pelo professor. Este modelo não atende mais aos novos interesses e as necessidades da sociedade atual, "o que se deseja é que os estudantes desenvolvam competências básicas que lhes permitam desenvolver a capacidade de continuar aprendendo." (BRASIL, [6], p.14). Ou ainda, conforme Santos ([30], p. 01)

> "Ensinar a pescar ao invés de entregar o peixe pronto. Fazer do caminho, e não da chegada, a razão da jornada. Aprender com os erros. Todas essas máximas, tão embasadoras de uma nova postura diante do mundo são, também, o ponto de partida da promoção de uma aprendizagem significativa".

Refinando a discussão para o ensino de Matemática, ao objetivarmos a conquista do interesse do aluno pelos conteúdos, encontramos o desafio de mudar a visão predominante do ensino dessa disciplina que

> “se caracteriza pela lógica formal e pelo predomínio da razão absoluta, a noção da Matemática como uma coleção de verdades a serem absorvidas pelos alunos, uma disciplina cumulativa, predeterminada e incontestável [...]. Nossa sociedade em geral, e nossos alunos em particular, não veem a Matemática como a disciplina dinâmica que ela é, com espaço para a criatividade e muita emoção.” (D’AMBROSIO, [10], p. 35)

Assim, diante desse desafio, o professor de Matemática é levado a avaliar seu trabalho em sala de aula e refletir sobre a maneira como apresenta os conteúdos, a fim de que, no processo de ensino-aprendizagem dessa ciência, ocorra a apropriação significativa dos conteúdos e não seja deixado de lado seu caráter investigativo e a sua relevância no processo de compreensão de muitos fatos que nos cercam. Aprender matemática deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer matemática e de um saber pensar matemático (BRASIL, [5], p.41). Então, o que fazer para o aluno aprender de maneira significativa? As teorias de aprendizagem buscam dar suporte para que possamos responder a questões dessa natureza, logo, estudá-las é de extrema importância para o docente. E nessa perspectiva, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, quando elaborada pensando no contexto escolar e na sistemática da sala de aula, apresenta-se como um suporte teórico para o processo de ensino-aprendizagem, uma vez que esta teoria traz para a sala de aula uma nova maneira de pensar a aprendizagem do aluno e oferece subsídios para que possamos entender porque as práticas hoje utilizadas não vêm surtindo o resultado esperado na questão da aprendizagem.

A escolha do tema Cônicas se deve ao fato de notarmos que o estudo desse conteúdo não possui um lugar de destaque durante o Ensino Médio. Muitas vezes, ensinado no terceiro ano, juntamente com geometria analítica, não é suficientemente explorado, dando-se enfoque somente à parte algébrica, mais especificamente, para a identificação da cônica e alguns de seus elementos básicos. Como salienta Santos:

> “Apesar de toda a sua importância histórica e de seu relevante papel no desenvolvimento tecnológico moderno, o estudo das Cônicas no ensino médio, nos últimos anos, tem sido completamente abandonado ou relegado a um segundo plano, reduzindo-se a simples manipulação e/ou memorização de fórmulas. Esta abordagem leva a não valorização do tema pelos alunos, sentimento compartilhado, quem sabe, pelos próprios professores, que podem não estar preparados a reconhecer nem a sua beleza nem a sua importância e utilidade”. (SANTOS, [29], p. 01)

Este quadro nos motivou a pensarmos em uma Sequência Didática embasada na Teoria ausubeliana para contribuirmos para o ensino-aprendizagem das Cônicas.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Frente aos desafios do ensino de Cônicas no Ensino Médio, surge a pergunta principal e que norteia nosso trabalho: *É possível construir uma Sequência Didática contemplando o tema de Cônicas e que propicie a aprendizagem significativa desse conteúdo?*

Assim, nosso objetivo principal é: Construir uma Sequência Didática sobre Cônicas embasada na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, utilizando ferramentas que proporcionem uma aprendizagem significativa e contextualizada para o aluno.

1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, temos:

- Fazer uma revisão bibliográfica integrativa sobre a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel;
- Refletir sobre a prática do professor em sala de aula;
- Contribuir com o ensino de Cônicas em sala de aula;
- Aplicar e validar uma sequência didática para o ensino de Cônicas, utilizando como suporte a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel.

1.2 Organização

O texto está organizado em cinco capítulos. O capítulo inicial consiste em uma introdução ao tema e apresentação dos objetivos da pesquisa.

O Capítulo dois traz o resultado da pesquisa bibliográfica integrativa acerca da Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Aqui, buscamos explicar de forma clara o que é aprendizagem significativa e como ela acontece dentro da sala de aula, sem entrar em detalhes no campo cognitivo. Procuramos também refletir sobre as implicações da Teoria de Ausubel no ensino de Matemática.

O Capítulo três traz a Sequência Didática composta por atividades concebidas nas perspectivas ausubelianas de diferenciação progressiva e reconciliação integrativa e elaborada com o intuito de promover a aprendizagem significativa das Cônicas. Na sequência didática, apresentamos atividades de construção geométrica das Cônicas, seguidas de questionamentos, de modo que o aluno seja conduzido a tirar conclusões sobre propriedades gerais das Cônicas. Além de atividades que leve o aluno a caracterizar as Cônicas como lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem determinadas propriedades e condições algébricas, e como também obter a forma canônica de cada cônica.

O Capítulo quatro apresenta a análise do tratamento dado ao conteúdo de Cônicas no Livro Didático adotado pela escola em que foi aplicada a Sequência Didática e também a discussão dos resultados obtidos com a aplicação da Sequência Didática. Finalizamos com o capítulo cinco, no qual serão apresentadas as considerações finais.

Capítulo 2

Referencial Teórico

A finalidade deste capítulo é de fornecer uma visão resumida da Teoria da Aprendizagem Significativa, que tem como precursor David Ausubel[1]. Procuraremos, neste capítulo, conhecer e compreender os elementos chaves desta teoria e refletir sobre suas possíveis implicações para o ensino-aprendizagem de Matemática dentro da sala de aula.

2.1 A Aprendizagem Significativa

O mundo mudou e a necessidade de um pensar contínuo em métodos e estratégias por parte dos professores, no sentido de conduzirem seus alunos a uma aprendizagem significativa, tem se fortalecido. A busca por estratégias efetivas de aprendizagem tem sido um desafio para a humanidade. Como resultado desse trabalho contínuo, elaborado e discutido por muitos profissionais da educação e do campo da psicologia ao longo dos anos, tem-se surgimento de várias teorias da aprendizagem caracterizadas por contextos social, histórico, cultural ou mental. Esta última geralmente apresentada como teoria cognitiva, cujos principais teóricos são Jean Piaget e David Ausubel.

A Teoria da Aprendizagem significativa de David Ausubel, continuada, interpretada e complementada por Joseph Novak e Bob Gowin, tem seus pressupostos filosóficos no campo cognitivo e tem influenciado mudanças em diversas áreas do conhecimento, tais como Enfermagem, Física, Matemática e Educação de um modo geral, contribuindo para uma reflexão sobre currículo e a postura do profissional frente a escolhas de métodos que levem de fato à uma aprendizagem significativa.

Aqui vale tecer algum comentário sobre esse termo "significativo": dentre os artigos pesquisados, encontramos duas referências distintas para o termo em questão. Por um lado, alguns pesquisadores utilizam esse termo dentro de uma perspectiva de metodologias ativas, significando que a aprendizagem só é significativa quando o aluno incorpora o saber e o

[1]David Paul Ausubel (1918-2008), um expoente da psicologia educacional cuja teoria tem especial destaque para o processo ensino-aprendizagem cognitivo.

transforma dentro de um contexto social, aplicando à realidade em que o indivíduo está inserido (ver [31] e [35]) levando a Moreira e Lemos ([16], p. 48) a questionarem sobre a apropriação superficial e polissêmica do conceito. Como salienta Moreira ([24], pp. 24-25), “Toda a aprendizagem passou a ser significativa, todas as metodologias de ensino passaram a objetivar a uma aprendizagem significativa. Uma trivialização do conceito ”.

Por outro lado, a aprendizagem significativa está associada à teoria de David Ausubel, que afirma: só há aprendizagem significativa quando os novos conhecimentos são incorporados e se relacionam de maneira **não literal** (interagindo com algum conhecimento relevante já existente na estrutura cognitiva do indivíduo) e **substantiva** (os novos conhecimentos adquirem significados e os conhecimentos prévios adquirem novos significados ou maior estabilidade cognitiva) com o que o aprendiz já sabe (ver [24], p. 02 ou [19], p. 26).

Neste trabalho, estaremos considerando a noção de *aprendizagem significativa por David Ausubel*, que leva em conta a estrutura cognitiva do indivíduo e não apenas o contexto social e a realidade em que o indivíduo está inserido. Segundo Masini e Moreira ([18], p. 94), no estudo do processo de aprendizagem significativa é imprescindível considerar o mundo onde o indivíduo se situa, sendo este o ponto de partida, **porém a aprendizagem significativa só ocorre quando a nova informação “ancora-se” em conceitos relevantes preexistentes na estrutura cognitiva** (ver [21], p. 15), sendo por eles assimilados, contribuindo para a sua diferenciação, elaboração e estabilidade (ver [18], p. 14 ou [19], p. 26).

Esses aspectos relevantes - uma proposição, uma ideia ou um conceito - preexistentes na estrutura cognitiva que servem de ancoradouro para a nova informação são chamados *subsunçores*. Na área da Geometria Plana, por exemplo, se os conceitos de paralelismo e de ângulos determinados por duas retas paralelas cortadas por uma transversal já existem na estrutura cognitiva do estudante, esses conceitos servirão de subsunçores para novas informações, como, por exemplo, a definição de figuras planas como paralelogramo, losango e retângulo.

De acordo com Moreira ([20]), uma teoria de aprendizagem é uma construção humana para interpretar sistematicamente a área de conhecimento, chamada aprendizagem, e que procura explicar o que é aprendizagem, porque funciona e como funciona. A teoria de Ausubel, fundamentada na aprendizagem cognitiva, pode ser compreendida segunda as palavras de Masini e Moreira ([18], p.95): “A aprendizagem cognitiva é aquela que resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, e esse complexo organizado é conhecido como estrutura cognitiva”.

Para os autores acima citados, entende-se que a aprendizagem, não mecânica, pressupõe a existência de uma estrutura cognitiva organizada na qual se processam a integração de novas ideias e informações com essa estrutura de modo a permitir que novos conceitos possam ser aprendidos ou retidos na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam estáveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem para as novas ideias e conceitos, transformando ou ampliando o significado desses subsunçores (MOREIRA, [21], p. 16).

Desta forma, o subsunçor vem a ser um dos elementos mais importantes na aquisição de uma aprendizagem significativa uma vez que se trata de um conhecimento dinâmico, não estático, que pode evoluir ou até involuir, estabelecido na estrutura cognitiva do individuo e que permite, por interação, a aquisição de outros significados, outros conhecimentos (ver [24], p. 04). Nesta perspectiva, os professores/educadores devem inicialmente traçar estratégias e situações didáticas com o objetivo de identificar esses conhecimentos prévios e basear o ensino naquilo que os alunos já sabem, uma vez que "os estudantes trazem sempre algo deles próprios para a negociação, não sendo, pois, uma tábua rasa para nela se escrever ou um contentor vazio para se encher".(NOVAK & GOWIN, [27], p.37)

A construção ou aquisição de um subsunçor é um processo cognitivo complexo que envolve a construção de conceito na estrutura cognitiva do aprendiz, que vai além dos objetivos deste trabalho. O leitor interessado em mais informações pode consultar Ausubel ([2]) ou Moreira ([19]).

2.2 Condições para uma aprendizagem significativa

Para a ocorrência da aprendizagem significativa, a teoria ausubeliana fundamenta-se em dois pressupostos: o material deve ser potencialmente significativo e o aluno deve apresentar uma predisposição para aprender. Na Figura 2.1, podemos ver um esquema, resumido, com os princípios associados à ocorrência da aprendizagem significativa.

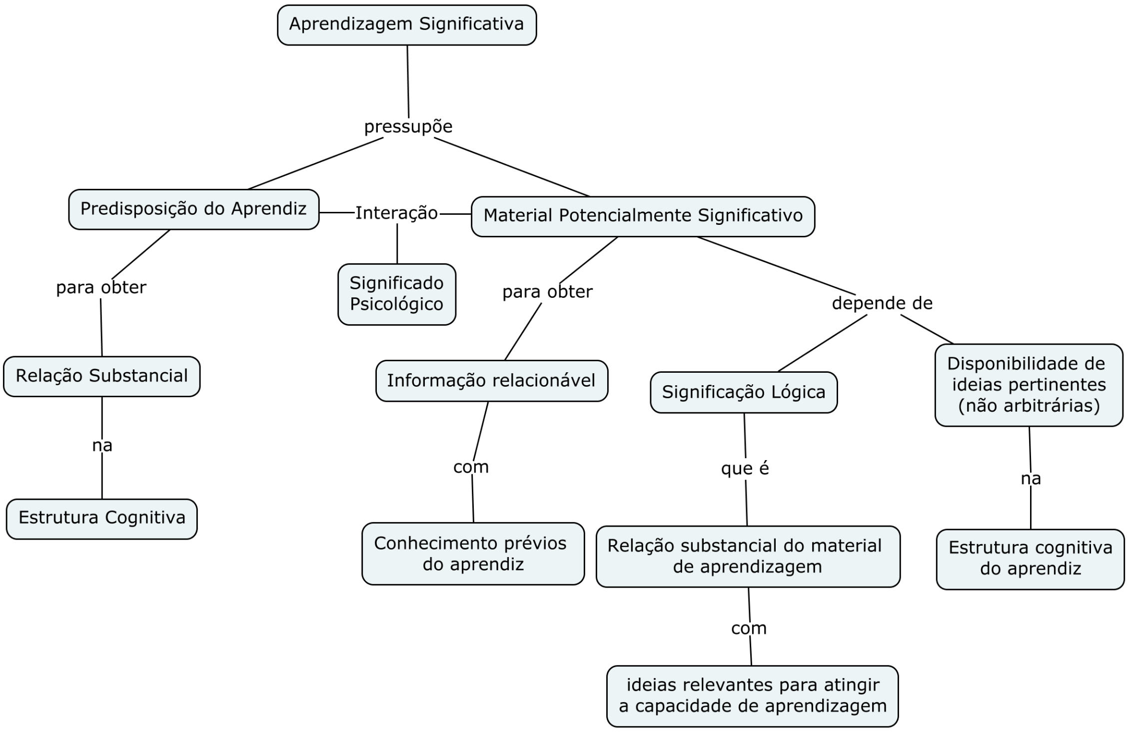


Figura 2.1: Mapa Conceitual sobre as condições para ocorrência da Aprendizagem Significativa - Fonte: o autor.

2.2.1 Predisposição para a aprendizagem

Para que ocorra a aprendizagem significativa, é necessário que o aluno manifeste uma disposição para estabelecer uma relação, não arbitrária e não literal, entre os novos conceitos, potencialmente significativos e os conceitos relevantes disponíveis em sua estrutura cognitiva (MASINI & MOREIRA, [18], p. 23). Em outras palavras, o aprendiz deve apresentar uma motivação voluntária e consciente para aprender, ou seja, ele deve se predispor a relacionar (diferenciando e integrando) os novos conhecimentos à estrutura cognitiva prévia, modificando-a, enriquecendo-a, elaborando-a e criando novos significados a esse novo material cognitivo ([24], p. 08). Esta predisposição não se trata exatamente de motivação, ou de gostar da matéria.

Neste contexto, Lemos ([16], p. 49) reforça essa premissa, corroborando com Moreira, ao afirmar ser essencial para a aprendizagem significativa que o aprendiz, além de assumir o compromisso de aprender, decida aprender de forma significativa, perceba a informação, interprete-a, represente-a mentalmente e construa, ao longo do processo, representações externas que reflitam, da melhor maneira possível, os atributos que ele reprensentou mentalmente.

Dentro desse pressuposto, destacamos alguns fatos, adaptados de Neto ([26], p. 125), que devem ser considerados para evitar a desmotivação dos aprendizes:

a) o apego à 'literalidade das repostas' por parte de certos professores;

b) a experiência crônica de fracasso associada à ansiedade elevada, em uma determinada disciplina, em função de falta de aptidão do aluno ou de ensino ineficiente;

c) a pressão para revelar domínio ou desenvoltura e não deixar transparecer falta de entendimento, por meio da verbalização inócua de algumas ideias sem a compreensão dos conceitos que lhes são subjacentes.

De fato, quando refletimos sobre as dificuldades dos alunos em Matemática, procurando identificar fatores que acarretam essas dificuldades, vemos que elas não se resumem apenas aos conteúdos da disciplina em si, mas passam também pela falta de motivação dos alunos para a realização de atividades propostas. Além disso, outro fator que também contribui para a desmotivação dos alunos para aprender Matemática "está relacionado à falta da relação dos conteúdos com o cotidiano ou com situações concretas. O tratamento abstrato e desvinculado da realidade, dado aos conteúdos matemáticos, tem dificultado a aprendizagem na medida em que o aluno não percebe a sua importância e não consegue atribuir significado ao que lhe é ensinado, não tendo motivação para aprender." (JESUS *et al*, [13], p. 02). Portanto, é necessário envolver os alunos em "legítimas experiências matemáticas, ou seja, experiências semelhantes às dos matemáticos". (D'AMBROSIO, [10], p. 35)

Quanto ao constrangimento dos alunos em apresentarem respostas para às atividades trabalhadas em sala de aula, isso pode ser superado, caso o professor abandone a atitude de condenação do aluno diante de um erro, como se ele fosse o único culpado ao errar, e passe a caracterizar o erro como uma oportunidade para o aluno desenvolver, a partir dele, novas hipóteses, reconstruindo a resposta errada até chegar à resolução correta. De acordo com Baltazar ([3], p. 17), "ao cometer um erro, o aluno expressa o que sabe e o que não sabe, oferecendo ao professor uma oportunidade de ajudá-lo a adquirir o conteúdo que lhe falta, ou ainda, levá-lo a compreender por que errou". Portanto, visto desta forma, o erro pode contribuir de forma positiva para o processo de ensino-aprendizagem.

Objetivando motivar os alunos durante suas aulas, o professor pode lançar mão das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs), por exemplo, no ensino de Matemática já podemos encontrar diversos relatos de experiência de atividades explorando softwares, como o *GeoGebra*, o *Maxima*, entre outros.

> "As tecnologias da comunicação, além de serem veículos de informações, possibilitam novas formas de ordenação da experiência humana, com múltiplos reflexos, particularmente na cognição e na atuação humana sobre o meio e sobre si mesmo. A utilização de produtos do mercado da informação [...], além de possibilitar novas formas de comunicação, gera novas formas de produzir o conhecimento". (BRASIL, [5], pp. 135-136)

Contudo, a simples integração de recursos computacionais na sala de aula não é, por si só, garantia de maior qualidade do processo de ensino-aprendizagem, pois se mesmo com a presença do computador a forma de ensinar e aprender continua sendo a tradicional, isto é, o professor como transmissor do conhecimento e o aluno como receptor passivo, então o computador está se reduzindo a um mero adereço tecnológico. Para que isso não aconteça, o professor precisa elaborar atividades de aprendizagem "que aproveitem as especificidades dos recursos computacionais para disparar investigação matemática e para revelar aspectos dos conceitos que ficariam ocultos com recursos ou representações convencionais". (GIRALDO *et al*, [11])

2.2.2 Material de aprendizagem potencialmente significativo

Uma das formas de promover diferentes experiências de aprendizagem é através do uso de materiais didáticos. Pedagogos como Castelnuovo, Dienes, Montessori e Gattegno já defendiam o uso de materiais didáticos no ensino da Matemática e, desde então, a utilização de materiais tem sido não só a ser sustentada por psicólogos e educadores, como também fortemente veiculada nos currículos e programas de Matemática em diferentes países. (BOTAS & MOREIRA, [4])

Entende-se aqui por material didático todo ou qualquer material que o professor possa utilizar em sala de aula, desde os mais simples, como o pincel, o quadro branco, o livro didático, os textos impressos, até os materiais mais sofisticados e modernos, como softwares computacionais.

De acordo com Graells (2000, *apud* BOTAS & MOREIRA, [4], p. 257), algumas das funções que os materiais didáticos podem desempenhar no ensino são: "fornecer informação; proporcionar o treino e o exercício de capacidades; cativar o interesse e motivar o aluno; avaliar as capacidades e conhecimentos; proporcionar simulações, com o objetivo da experimentação, observação e interação". Ainda conforme Castoldi e Polinarski,

> "Com a utilização de recursos didático-pedagógicos, pensa-se em preencher as lacunas que o ensino tradicional geralmente deixa, e com isso, além de expor o conteúdo de uma forma diferenciada, fazer dos alunos participantes do processo de aprendizagem". (CASTOLDI & POLINARSKI, [8], p. 02)

Diante do exposto, vemos que o material didático tem um papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, pois atua como um mediador entre os alunos, professores e o conhecimento. Por conta dessa importância, faz-se necessário realizar uma escolha criteriosa desse material. Masini e Moreira ([18], p. 23) pontuam dois fatores importantes a serem considerados na escolha do material: "a natureza do material a ser aprendido e a natureza da estrutura cognitiva do aprendiz". Em relação à natureza do material, deve ser "logicamente significativa", ou seja, deve ser suficientemente não arbitrária (plausível, sensível e não aleatória) e não literal (não ao pé da letra), de modo que possa ser relacionável à estrutura cognitiva do aluno. Quanto a natureza cognitiva do aprendiz, "nela devem estar disponíveis os subsunçores específicos com os quais o novo material é relacionável". Nesta conexão não literal, a aprendizagem da informação não dependerá das palavras específicas que foram usadas no momento da recepção da informação, ou seja, uma vez aprendido determinado conteúdo o indivíduo conseguirá explicá-lo com as suas próprias palavras.

Corroborando com Masini e Moreria, Neto pontua que

> "O relacionamento não arbitrário ocorrerá quando o material exibir suficiente plausibilidade ou não-casualidade para proporcionar suporte ideacional que possibilite sua interação com diferentes subsunçores, que os seres humanos são capazes de armazenar em sua estrutura cognitiva [...]. O relacionamento substantivo, por sua vez, requer que o material de aprendizagem seja não-arbitrário e implica o não prejuízo da compreensão se características diferentes, que conservam a mesma essência do material a ser aprendido, são utilizadas em uma determinada tarefa de aprendizagem". (NETO, [26], p. 119)

Assim, de acordo com a teoria ausubeliana, é no curso da aprendizagem significativa que o significado lógico do material de aprendizagem se transforma em significado psicológico para o sujeito. Moreira adverte sobre o uso de materiais não significativos ou quando existe um desequilíbrio cognitivo que impossibilita a aprendizagem significativa.

> "Quando o material de aprendizagem não é potencialmente significativo (não é relacionável de maneira substantiva e não-arbitrária à estrutura cognitiva), não é possível aprendizagem significativa. De maneira análoga, quando o desequilíbrio cognitivo gerado pela experiência não assimilável é muito grande, não ocorre acomodação. Tanto num caso, como no outro, a mente fica como estava". (MOREIRA, [19], p. 05)

Moreira ([24], p. 08) enfatiza ainda "que o material só pode ser potencialmente significativo, não significativo: não existe livro significativo, nem aula significativa, nem problema significativo, pois o significado está nas pessoas, não nos materiais". Assim, no contexto escolar, o aluno é que atribui significados aos materiais de aprendizagem e estes significados atribuídos podem não ser aqueles aceitos no contexto da matéria de ensino.

Em suma, esses dois pressupostos para ocorrência da aprendizagem significativa estão ligados intrinsecamente. Por um lado, se o aprendiz tiver a intenção de apenas memorizar o conteúdo de maneira arbitrária e literal, não importa o quão potencialmente significativo possa ser o material a ser aprendido, a aprendizagem será mecânica. Por outro lado, por mais disposto que o indivíduo esteja para aprender, se o material não for relacionável à sua estrutura cognitiva, a aprendizagem significativa também não ocorrerá. (MOREIRA, [20])

2.3 Evidência da aprendizagem significativa

Do ponto de Ausubel (1968), a compreensão genuína de um conceito ou de uma proposição implica na posse de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis. Neste sentido, ao se buscar evidências de que ocorreu aprendizagem significativa, deve-se ter o cuidado de propor questões de forma a evitar respostas mecanicamente memorizadas. Para tanto, Ausubel recomenda que questões e problemas sejam formulados de maneira nova e não familiar, que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido. Uma vez que, "uma longa experiência em fazer exames faz com que os alunos se habituem a memorizar não só proposições e fórmulas, mas também causas, exemplos, explicações e maneiras de resolver problemas típicos". (MOREIRA, [21], pp. 27-28)

Buscando facilitar a aprendizagem significativa, pode-se lançar mão de instrumentos que já se mostraram eficazes neste sentido. Segundo Moreira ([21], p. 28), testes de compreensão podem ser utilizados para buscar evidências de aprendizagem significativa, mas devem ser apresentados em um contexto, escrito de modo não convencional como encontrados nos livros instrucionais, buscando diferenciar conceitos ou proposições relacionadas ou similares. O mesmo autor chama a atenção para o fato de que se um aluno não for capaz de resolver um problema, não significa que deixou de haver uma aprendizagem significativa, por isso a avaliação passa por um aspecto qualitativo da solução.

Outra ferramenta de avaliação que pode ser utilizada como recursos para a obtenção de evidências da aprendizagem significativa são os *Mapas Conceituais*. Conforme Mamede *et al*.

> "Exames escritos podem não ser suficientes ou adequados para mensurar a interrelação de conceitos e compreensões do estudante acerca de um dado objeto em estudo. Algumas experiências utilizando mapas conceituais [...] facilitam a visualização do processo de raciocínio e elaboração do conhecimento demonstrando o trabalho do estudante (ou do grupo) na integração de conceitos com vínculos de causa-efeito, dependência, tempo, qualificação, contexto, dentre outros elementos". (MAMEDE *et al*, [17], p. 200)

A técnica dos mapas conceituais foi desenvolvida em 1972 por Joseph D. Novak e seus colaboradores, em um programa de pesquisa da Universidade de Cornell, nos Estados Unidos, contemplando diversas áreas do conhecimento sob uma perspectiva construtivista, cuja fundamentação teórica encontra-se na Teoria de Aprendizagem Significativa de David Ausubel. Em sua teoria, Ausubel nunca falou em mapas conceituais. (Moreira, [23])

De acordo com Novak e Gowin ([27], p. 31), "os mapas conceituais têm por objetivo representar relações significativas entre conceitos na forma de proposições. Uma proposição consiste em dois ou mais termos conceituais ligados por palavras de modo a formar uma unidade semântica". Portanto, mapas conceituais são representações concisas das estruturas conceituais que estão sendo ensinadas e, como tal, provavelmente facilitam a aprendizagem dessas estruturas.

Segundo Moreira ([21]), os mapas conceituais podem ser utilizados para averiguar o conhecimento prévio dos alunos sobre certos conceitos, instrumento de avaliação, revisão de conceitos e resumo de conteúdos. Porém, mostra-se ser um instrumento que pode auxiliar o professor a conhecer a forma do aluno associar diferentes conceitos, possibilitando que esse interfira de forma direta nas lacunas apresentadas pelos alunos.

Para a elaboração desses mapas conceituais, partimos essencialmente de três princípios da teoria ausubeliana:

> "1) A estrutura cognitiva é organizada hierarquicamente, com os conceitos e as proposições menos inclusivos, mais específicos, subordinados aos conceitos e proposições mais gerais e abrangentes. 2) Os conceitos da estrutura cognitiva estão sujeitos a uma diferenciação progressiva, acompanhada do reconhecimento de uma maior abrangência e especificidade nas regularidades dos objetos ou acontecimentos, e de cada vez mais ligações preposicionais com outros conceitos. 3) A reconciliação integradora ocorre quando dois ou mais conceitos são relacionados em termos de novos significados preposicionais e/ou quando se resolvem conflitos de significados entre conceitos". (NOVAK & GOWIN, [27], p. 113).

Independente do método ou instrumento escolhido, é necessário buscar uma avaliação que priorize a participação ativa dos alunos no processo de ensino-aprendizagem, com uma avaliação não somente quantitativa, mas com um teor qualitativo. Sendo assim, é fundamental analisar a mudança conceitual ocorrida no aluno, a aquisição de novos conhecimentos e também verificar se o mesmo aprendeu ou não de forma significativa, isto é, se ele foi capaz de relacionar o novo material com algum conhecimento pré-existente em sua memória e exteriorizá-lo.

2.4 Organizadores Prévios

Caso os conhecimentos preexistentes não possuam ideias que possam atuar como subsunçores para a nova aprendizagem, Ausubel propõe uma estratégia para facilitar a aprendizagem significativa, que consiste na utilização de materiais introdutórios adequados, claros e estáveis, elaborados em um nível mais alto de abstração e generalidade, com potencial para servirem de âncora à nova aprendizagem e também desenvolverem subsunçores que facilitem a aprendizagem subsequente. Estes materiais que devem ser oferecidos aos alunos antes do conteúdo, são chamados por ele de *organizadores prévios* (Moreira, 1998). Para Ausubel,

> “[...] a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber [...], ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida que funcionam como pontes cognitivas”. (Moreira, [22], p. 02)

Desta forma, os organizadores prévios devem apontar o conteúdo mais importante na estrutura cognitiva do aprendiz e explicitar sua relevância para a aprendizagem do novo material, dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes, prover elementos organizacionais inclusivos que levem em consideração, mais eficientemente, e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material.

Os exemplos de uso de Organizadores Prévios verificados em Masini e Moreira ([18]) fazem referências ao ensino da Biologia, Literatura e Física, não havendo exemplos para o ensino de conteúdos Matemáticos.

No ensino de Matemática, por exemplo, proporcionar aos alunos o contato com alguns fatos do passado é uma dinâmica interessante para introduzir um novo objeto matemático em sala de aula, ou seja, pode-se lançar mão dos contextos da História da Matemática como organizadores prévios. Moreira ([24], p. 11) exemplifica o que poderia servir como organizador prévio, citando, por exemplo, que pode ser um enunciado, uma pergunta, uma situação problema, uma demonstração ou um filme. Neste trabalho, por exemplo, faremos uso do GeoGebra e de apresentações comparativas como organizadores prévios para o ensino de Cônicas.

No entanto, Moreira ([22], p. 03) considera que os organizadores prévios devem satisfazer três condições:

1. Identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância desse conteúdo para a aprendizagem do novo material;

2. Apresentar o novo material de aprendizagem em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes;

3. Prover elementos organizacionais inclusivos que levem em consideração e ponham em destaque o conteúdo específico do novo material.

Moreira ([24], p. 11 e [22], p. 03) destaca que existem dois tipos de organizadores prévios: *comparativo* e o *expositivo*. Na Tabela 2.1 destacamos a diferença entre eles.

Tipo	Definição	Utilidade
Expositivo	Quando o material é totalmente não familiar ao aprendiz	suprir a falta de conceitos, ideias ou proposições relevantes à aprendizagem do novo material, servindo de ponto de ancoragem inicial
Comparativo	Quando o material é relativamente familiar ao aprendiz	integrar e discriminar os novos conhecimentos à estrutura cognitiva do aprendiz.

Tabela 2.1: Tipos de Organizadores Prévios.

Moreira ([24]) ainda reforça a necessidade de se utilizar os organizadores prévios em sala de aula quando não existem subsunçores relevantes à aprendizagem de novos conhecimentos, sendo necessária a construção desses subsunçores antes de prosseguir com a situação formal de ensino. No entanto, o autor salienta que os organizadores podem ser ineficazes quando não existem um corpo de conhecimentos estáveis na estrutura cognifica que se relacione aos novos conhecimentos.

> "[...] a aprendizagem significativa depende fortemente, fundamentalmente, da disponibilidade de conhecimentos prévios adequados, dificilmente um recurso instrucional poderia substituí-los quando tal disponibilidade não existe. A solução óbvia desse problema é a construção prévia dos conhecimentos necessários". (MOREIRA, [24], p. 21)

2.5 A Teoria da Aprendizagem Significativa em Sala de Aula

2.5.1 Princípios de Organização Sequencial e de consolidação do conteúdo

Para Moreira & Masini ([18], p. 47), a falicilitação de uma aprendizagem significativa em sala de aula é a manipulação deliberada dos atributos relevantes da estrutura cognitiva para propósitos pedagógicos. Moreira ([24], p. 21) cita que Ausubel recomendava o uso dos princípios da organização sequencial e da consolidação para facilitar a aprendizagem significativa (ver Tabela 2.2).

Quanto à organização sequencial, segundo os autores pesquisados, fica mais fácil para o aluno organizar seus subsunçores. hierarquicamente se na matéria de ensino os tópicos estiverem sequenciados em termos de dependências naturais, uma vez que o fato de a compreensão de um conteúdo pressupõe, frequentemente, o entendimento prévio dos conteúdos que o antecedem. Por outro lado, o Princípio de consolidação significa que a aprendizagem não é imediata e que exercícios, resoluções de situações problemas, discriminações,

Princípio	Objetivo
Organização Sequencial	maximar o efeito das dependências hierárquicas naturais existentes do conteúdo.
Consolidação	assegurar a continuidade da matéria e o sucesso na aprendizagem sequêncialmente organizada.

Tabela 2.2: Princípios facilitadores da Aprendizagem Significativa.

diferenciações e integrações são importantes antes da introdução de novos conhecimentos. (MOREITA, [24], p. 21)

Além dos princípios acima, Ausubel menciona outros dois princípios fundamentais relativos à programação eficiente do conteúdo em sala de aula. São eles: a *Diferenciação Progressiva* e *Reconciliação Integrativa*.

Diferenciação progressiva: esse princípio propõe que, na programação de um conteúdo, as ideias e os conceitos devem ser preferencialmente trabalhados em uma ordem crescente de especificidade, dos mais gerais para os mais específicos e progressivamente diferenciados, introduzindo os detalhes específicos necessários (MASINI & MOREIRA, [18] p.29). Por exemplo, primeiro o aluno aprende que prisma, pirâmide, cone, cilindro, e esfera são sólidos geométricos, depois ele aprenderá que prisma e pirâmide são poliedros, enquanto, cone, cilindro e esfera são corpos redondos. Para fazer tal proposição, baseia-se em duas hipóteses:

> " 1) É menos difícil para o ser humano captar aspectos diferenciados de um todo mais inclusivo previamente aprendido do que chegar ao todo a partir de suas partes diferenciadas previamente aprendidas;
> 2) A organização do conteúdo de um corpo de conhecimento na mente de um indivíduo é uma estrutura hierárquica na qual as ideias mais inclusivas estão no topo da estrutura e, progressivamente, incorporam proposições, conceitos e fatos menos inclusivos e mais diferenciados". (AUSUBEL (*apud* MOREIRA, [19], p.19))

Corroborando com Ausubel, Novak e Gowin ([27], p.115) acrescentam que "os conceitos nunca são 'finalmente aprendidos', mas sim permanentemente enriquecidos, modificados e tornados mais explícitos e inclusivos à medida que se forem progressivamente diferenciando".

Reconciliação integrativa: esse princípio propõe que, na apresentação de um conteúdo, o professor procure tornar claras as semelhanças e diferenças entre o novo material apresentado e o que já existe na estrutura cognitiva, buscando explorar explicitamente, relações entre conceitos e proposições e destacar diferenças e similaridades relevantes existentes. (MASINI & MOREIRA, [18] p.30 ou MOREIRA [19], p. 41)

A Figura 2.2 apresenta um esquema hierárquico de conceitos e a recomendação para as direções da *diferenciação progressiva* e da *reconciliação integrativa*. Note que é usada a dimensão vertical para demonstrar a hierarquia dos conceitos. Os conceitos mais gerais ou abrangentes são colocados no topo e, à medida que se desce, vêm os menos abrangentes. As setas contínuas representam a *diferenciação progressiva* e as setas descontínuas representam a *reconciliação integrativa*. Assim, para se atingir a diferenciação progressiva, é preciso "descer" dos conceitos gerais para os específicos, por outro lado, ao "subir" novamente até os gerais, atinge-se a reconciliação integrativa.

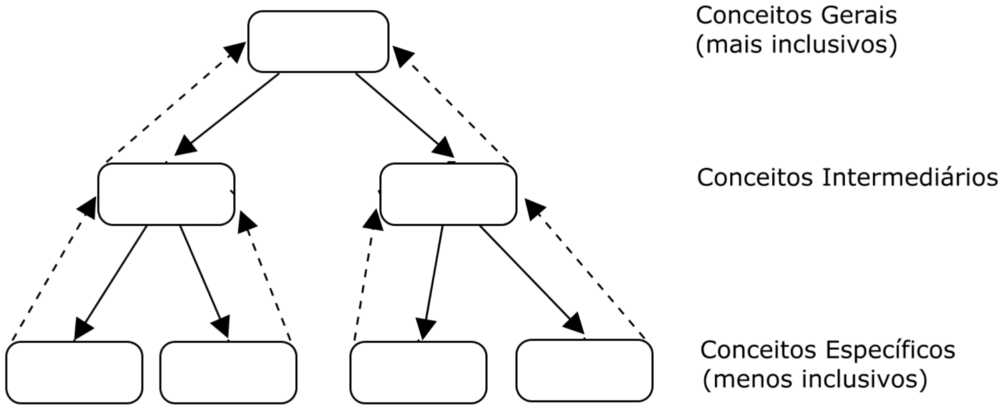


Figura 2.2: Representação esquemática do modelo de *diferenciação progressiva* e *reconciliação integrativa* - (Fonte: adaptada, Moreira & Masini, [18], p. 24).

A diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa são processos simultâneos, objetivando a organização da estrutura cognitiva, diferenciando o que for diferente e integrando o que for semelhante. São processos da dinâmica da estrutura cognitiva. Desta forma, o que foi diferenciado pode vir a ser integrado e o que foi reconciliado pode vir a ser diferenciado. A estrutura cognitiva não é estática, ela é organizada na perspectiva do indivíduo.

2.5.2 Elaboração dos Mapas Conceituais

Na elaboração dos mapas conceituais, em geral, segue-se um modelo hierárquico, isto é, o tema principal fica no topo, dentro de uma figura (retângulo, elipse, círculo), logo abaixo se coloca os conceitos relacionados com o principal, também dentro de uma figura e unido por um segmento ou seta, com uma palavra, que estabelece uma conexão entre os elementos conceituais. A Figura 2.3 mostra um mapa conceitual construído segundo os procedimentos propostos.

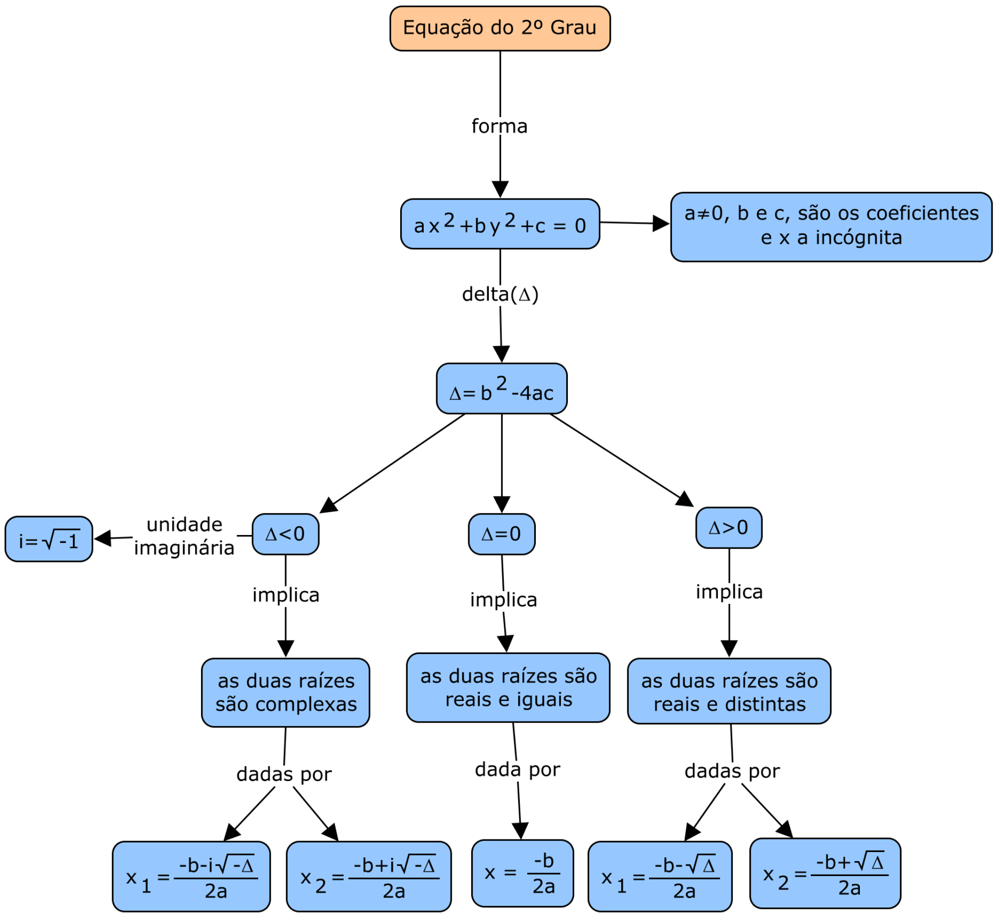


Figura 2.3: Mapa Conceitual sobre Equação do 2º grau e suas raízes - Fonte: o autor.

A princípio, no entanto, figuras geométricas nada significam em um mapa conceitual. Assim como nada significam o comprimento e a forma das linhas ligando conceitos em um desses diagramas, a menos que estejam acopladas a certas regras. O fato de dois conceitos estarem unidos por uma linha é importante porque significa que há, no entendimento de quem fez o mapa, uma relação entre esses conceitos, mas o tamanho e a forma dessa linha são, a priori, arbitrários. (MOREIRA, [22])

Novak e Gowin ([27], p.49) listam algumas atividades de elaboração dos mapas conceituais, pelos alunos:

1. Selecionem um ou dois parágrafos especialmente significativo, tentando identificar todos os conceitos do assunto em questão;

2. Preparem uma lista com esses conceitos e identifique os mais importantes;

3. Enumerem essas palavras de forma hierárquica, ordenando do mais inclusivo até todos serem ordenados. Pode-se haver sequências hierárquicas diferentes;

4. Agora comecem a elaborar um mapa, utilizando a lista ordenada, formando um tipo de “árvore” com diversas ramificações. Incentive os alunos, sugerindo palavras de

ligação adequadas para formar as proposições;

5. Procurem, a seguir, ligações cruzadas entre conceitos de uma secção do mapa a outra parte da "árvore" de conceitos;

6. Peçam que eles leiam seus mapas para os colegas, segundo sua interpretação;

7. Por fim, façam as correções necessárias para que todos possam compreender sua interpretação.

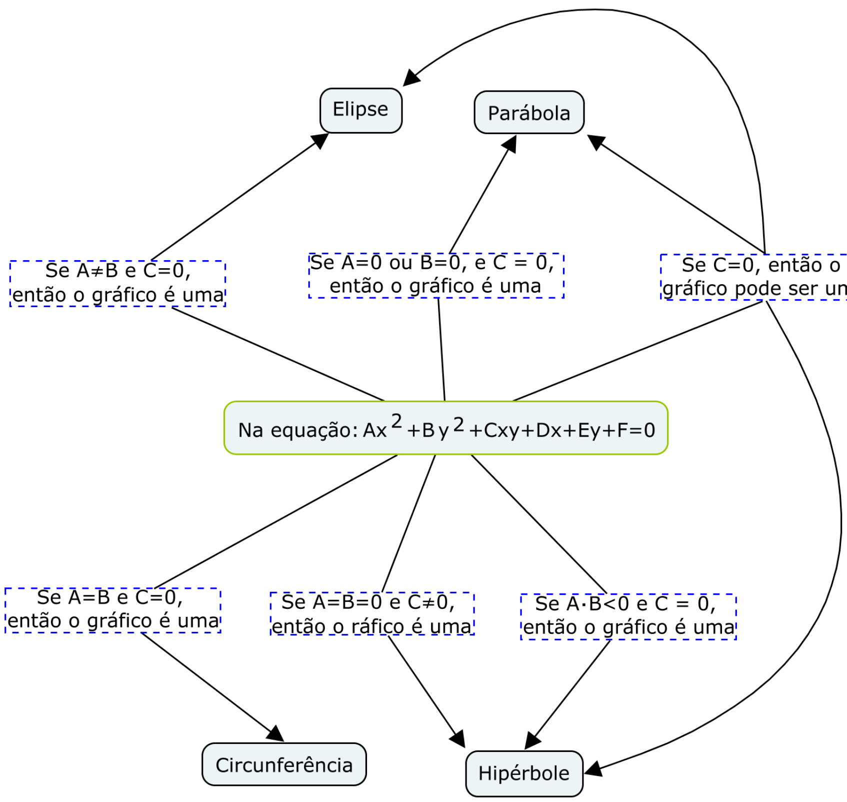


Figura 2.4: Alguns descritores algébricos das Cônicas - Fonte: o autor.

2.5.3 Avaliação

A necessidade de acompanhar a aprendizagem à medida que ela acontece, a fim de corrigi-la, clarificá-la e consolidá-la é fundamental na abordagem ausubeliana, uma vez que sem a certeza da acomodação da teoria prévia, fica a incerteza de evidências da aprendizagem significativa. Por isso, a etapa da avaliação é tão importante quanto o fato de organizar e planejar todo o conteúdo.

Segundo Moreira ([24], p. 23), a avaliação da aprendizagem significativa deve, sobretudo, avaliar a compreensão, captação de significados, capacidade de transferência do conhecimento a situações não conhecidas, propondo progressivamente ao aprendiz situações novas ao longo do processo instrucional, que requeira máxima transformação do conhecimento adquirido. Para tanto, o aluno deve ser capaz de externalizar os significados que estão sendo aprendidos, explicando e justificando razoavelmente as suas respostas.

O mesmo autor ([21], p. 68) indica a possibilidade do uso de mapas conceituais como um instrumento didático eficaz para a avaliação, quando estes são usados como termo de comparação com mapas traçados pelos alunos ou quando são utilizados como referencial para a elaboração de testes de compreensão. O autor, em outros artigos ([21] e [25]), conclui que a avaliação da aprendizagem significativa deve ser formativa e somativa. **Formativa** porque é contínua e realizada ao longo de uma fase de sua aprendizagem, em geral ocupada com os significados em construção e **Somativa** porque busca avaliar o alcance de determinados objetivos da aprendizagem ao final de uma fase do processo de aprendizagem.

Na fase de avaliação formativa, o professor deve anotar qualquer evidência de aprendizagem significativa e pode lançar mão de vários instrumentos, tais como seminários, questionários, discussão em grupos etc. Já a avaliação somativa consiste, em geral, de uma prova ou exame final e deve ser individual, na qual deverão ser propostas questões/situações que impliquem compreensão, evidenciem a aquisição de significados e alguma capacidade de transferência dos significados aprendidos.

Lemos ([15], p. 32) ressalta a importância de discutir o resultado dos exames no sentido de que possa permitir ao aluno corrigir ou confirmar suas ideias. Isso estaria de acordo com a teoria ausubeliana, uma vez que, permitiria a acomodação do novo material dentro dos princípios de reconciliação integrativa e diferenciação progressiva. A mesma autora enfatiza que neste contexto a avaliação deixa de ser punitiva, favorecendo a autonomia do aprendiz ao mesmo tempo que esclarece a sua própria aprendizagem.

2.5.4 Etapas de uma Intervenção Didática à luz da Aprendizagem Significativa

Ausubel não propôs um modelo fixo de passo a passo para a implementação de uma Intervenção Didática à luz da teoria da Aprendizagem Significativa. No entanto, como já vimos nas seções anteriores, ele deixou muitas orientações sobre os requisitos fundamentais para que esta aprendizagem aconteça. Fundamentado nessas orientações, Moreira ([25], 2017)), estudioso dessa teoria, propôs um modelo de planejamento e implementação da aprendizagem significativa no ensino. São oito as etapas propostas por Moreira:

1. *Definir o tópico específico a ser abordado*: nessa etapa, devem-se identificar os conceitos mais relevantes e as relações hierárquicas entre eles, considerando-se sua importância no contexto da disciplina e sua inclusividade - deve ter amplitude de maneira que venha a ancorar as ideias e os conceitos que serão trabalhados durante o curso.

2. *Criar/propor situações*: estas situações devem ser criadas/propostas para o aprendiz, de modo que o professor consiga conduzir o aluno a exteriorizar o seu conhecimento prévio. Esta informação pode ser obtida por meio de "discussão, questionário, mapa conceitual, mapa mental, situação-problema" ou outro método que estimule a participação do aprendiz.

3. *Propor situações-problema iniciais*: a partir do conhecimento prévio do aluno, identificado na etapa anterior, devem ser propostas situações-problema para preparar o aprendiz para a introdução do conhecimento, as quais podem funcionar como organizador prévio. Estas situações-problema podem ser propostas, por exemplo, através de simulações computacionais, demonstrações, vídeos e problemas do cotidiano.

4. *Apresentação do conhecimento que deve ser ensinado-aprendido*: essa apresentação deve ser feita levando em conta a diferenciação progressiva, ou seja, as ideias e conceitos mais gerais, inclusivos, da disciplina devem ser apresentados no início para, progressivamente, serem diferenciados. Ou seja, deve-se passar a visão inicial do todo, do que é mais importante na unidade de ensino e, progressivamente ir abordando aspectos mais específicos.

5. *Dar continuidade à apresentação do conhecimento*: devem-se retomar os aspectos mais gerais, estruturantes do conteúdo da unidade de ensino, ou seja, fazer uma breve revisão de conceitos relevantes para a sequência das atividades, abrindo espaço para discussão e perguntas dos alunos. Essa retomada pode ser feita, por exemplo, através de exposição oral e de um recurso computacional. As novas apresentações de conteúdo devem ser em nível mais complexo, com novos exemplos, e promover a reconciliação integrativa, isto é, esclarecer semelhanças e diferenças existentes em relação aos exemplos e às situações já trabalhados, além de permitir que sejam trabalhadas eventuais contradições (reais e aparentes). Note que, dependendo da extensão do conteúdo programático, essa etapa pode se repetir várias vezes.

6. *Conclusão da unidade*: devem-se dar continuidade ao processo de diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa, através de alguma outra atividade colaborativa (apresentação ou leitura de texto ou outro recurso) que leve os alunos a interagirem socialmente, negociando significados, tendo o professor como mediador. Quanto as novas situações-problema propostas, elas devem ser propostas e trabalhadas em níveis mais altos de complexidade em relação às situações anteriores.

7. *Avaliação da aprendizagem*: essa avaliação deve ser feita continuamente, ao longo do processo de implementação. Deve-se ir registrando tudo que possa ser considerado evidência de aprendizagem significativa do conteúdo trabalhado, após o término, deve-se realizar uma atividade somativa com questões que impliquem reflexão e compreensão do aluno e, idealmente, alguma capacidade de transferência.

8. *Avaliação da própria Sequência Didática*: se a avaliação do desempenho dos alunos fornecer evidências de aprendizagem significativa como: captação de significados, compreensão, capacidade de explicar e de aplicar o conhecimento para resolver situações-problema, então, podemos dizer que a Sequência Didática obteve êxito.

2.6 Implicações da Teoria da Aprendizagem Significativa no ensino de Matemática

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, Novak e Gowin, têm sido discutida e implementada por vários teóricos em diferentes áreas do conhecimento. É uma teoria que permeia todas as etapas da complexa estrutura do processo de ensino-aprendizagem, sendo, portanto, empregada desde a revisão da estrutura curricular de disciplinas ou cursos (ver [32], [33]), até a reflexão e preparação das etapas de planejamento e apresentação dos conteúdos. Talvez, por isso, essa teoria é considerada tão apropriada ao ensino dentro da sala de aula, uma vez que, ela potencializa o ensino por recepção (o que deve ser aprendido é apresentado ao aprendiz na sua forma final), mais comum na estrutura educacional da maioria das escolas brasileiras.

Em relação ao ensino-aprendizagem de matemática, as etapas do processo de aprendizagem significativas por meio de organizadores avançados permitem ao professor relacionar o conhecimento prévio dos aprendizes aos novos conhecimentos de modo bem mais atrativo, promovendo o estímulo necessário para motivar e encorajar os aprendizes a participarem ativamente das discussões em sala de aula. Com efeito, para Ausubel, a motivação do aprendiz é considerada essencial à aprendizagem.

Para Adhikai (ver [1]), a aprendizagem verbal expositiva de Ausubel é um dos métodos mais importantes para a instrução de matemática. Para o autor, ao tratar de conceitos abstratos, a teoria de aprendizagem de Ausubel é a mais adequada e cita exemplos de como o professor, seguindo o método ausubeliano, pode facilitar a aprendizagem significativa. Por exemplo, o professor de Matemática pode utilizar da técnica de resolução de problemas, usar algum material de som, imagens e animação, entre outros, para criar um ambiente favorável de sala de aula, encorajando os alunos a tomarem a iniciativa de explorar, verificar, interagir e despertar o prazer de estudar a matemática.

A Teoria de Ausubel promove também um debate sobre o processo de avaliação dentro da sala de aula, ver, por exemplo, Lemos ([15]). Esse debate, dentro da perspectiva ausubeliana, aponta para mudanças de paradigmas, nas quais, a prevalência de avaliações tradicionais dá margem a outros instrumentos de medida da aquisição de aprendizagem.

Do ponto de vista do processo instrucional, as etapas do processo de ensino, segundo a teoria de aprendizagem ausubeliana e suas implicações, no ensino-aprendizagem de matemática podem ser resumidas como segue:

- Na etapa do planejamento, o professor é convidado a refletir e identificar os conceitos que serão ensinados e as relações hierárquicas entre eles, para sequenciar o conteúdo. Essa etapa também permite uma autorreflexão do saber do professor, auxiliando-o a estruturar sua prática docente. A identificação dos conceitos mais relevantes necessários à apresentação do novo conteúdo orienta o professor a buscar informações do que os alunos devam saber para servir de subsunçor para o novo material, contribuindo, dessa forma, com um planejamento mais efetivo.

- A próxima etapa do método ausubeliano é o momento em que o professor deve conduzir o aluno a exteriorizar o seu conhecimento prévio no nível mais alto de abstração dos conceitos relativos àquela unidade de ensino, e proporcionar a interação ativa dos aprendizes, enfatizando a motivação e o uso da linguagem verbal ou simbólica específica da área que favorece à formação de conceitos. Nessa etapa a escolha de material potencialmente significativo e os organizadores prévios devem ser considerados a relacionar o conhecimento prévio (mesmo que não lapidado, cujas definições podem ser próprias dos aprendizes) com aquilo que vai ser aprendido.

- As etapas de reconciliação integrativa e diferenciação progressiva ajudam a fixar os conceitos e as definições matemáticas com maior precisão através do paralelo formado a partir da análise de similaridades e diferenças entre os conceitos e entidades matemáticas. O Princípio de consolidação assegura a contínua prontidão da matéria de ensino, aumentando a probabilidade de Êxito na aprendizagem sequencialmente organizada.

- A etapa de avaliação permite ao professor verificar se as relações hierárquicas entre os conceitos foram observadas pelos aprendizes. Promove uma reflexão mais profunda do aprendiz sobre a compreensão do conteúdo trabalhado e de suas relações entre si, além de estimular o uso da linguagem matemática.

2.7 Conclusão

O ensino de matemática está alicerçado no modelo axiomático e, portanto, apresentado de modo sequencial, hierárquico, com alto nível de abstração de seus conceitos. Nesse sentido, o processo de ensino de matemática, em muitas situações, não se enquadra na concepção construtivista ou comportamentalista, sendo necessário o ensino que considere a aprendizagem receptiva, não passiva, dos conteúdos.

Dessa forma, a teoria da Aprendizagem Significativa pode ser aplicada de modo satisfatório ao ensino de matemática, uma vez que, conserva a estrutura natural das relações entre conceitos dessa área do conhecimento, ao tempo que fornece condições para planejar, executar e avaliar todo o processo de ensino de forma a não provocar uma ruptura no atual sistema de ensino, mas promover situações potencialmente significativas para a ocorrência da aprendizagem.

Assim como outros autores, mencionados no texto, concordamos que o ensino de matemática tem suas peculiaridades, uma vez que, trata de conceitos com alto grau de abstração, com formação do raciocínio lógico, com pensamentos indutivos e dedutivos. Por isso, o professor de matemática deve conhecer todas, se não a maioria, das teorias e métodos de ensino dado a complexidade e diversidade dessa área do conhecimento.

Diante do exposto, apresentamos a Teoria da Aprendizagem Significativa (T.A.S) como uma alternativa viável para o professor de matemática, descrevendo as etapas para a construção de uma sequência didática fundamentada em diretrizes e princípios que norteiam a teoria e facilita a aprendizagem significativa definida por Ausubel.

Acreditamos que não há um único método ou o "método" mais apropriado para se ensinar um conteúdo de matemática, mas a pesquisa aponta que a T.A.S pode, no ensino de matemática, fornecer bons resultados.

Capítulo 3

Sequência Didática

Nesta seção, apresentaremos nossa proposta Didática. A presente proposta didática foi fundamentada na teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, abordada no capítulo 2, e na utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra.

3.1 Objetivos da Sequência Didática

A sequência didática tem como objetivos principais:

- Despertar o interesse para o estudo de figuras Cônicas;
- Desenvolver a capacidade de investigação de conceitos matemáticos;
- Construir o conhecimento sobre as Cônicas, com auxílio do software educativo GeoGebra;
- Estabelecer conjecturas sobre o que está sendo estudado;
- Promover a compreensão dos assuntos tratados e que estes sejam levados à vida dos participantes.

3.2 Desenvolvimento da Sequência Didática

Definidos o local e os participantes da pesquisa, deve-se definir as etapas da Sequência Didática, começando por um levantamento dos conhecimentos prévios que servirão de subsunçores ou como indicativo da necessidade de definir os organizadores prévios. Em seguida, desenvolver as atividades da sequência didática com todos os elementos necessários a uma aprendizagem significativa e contextualizada.

1°. Momento: Avaliação dos Conhecimentos Prévios		
Aulas	**Conteúdos**	**Objetivos**
1 e 2	Levantamento dos conhecimentos prévios; Aplicações das Cônicas e apresentação do tema.	Classificar as Cônicas com base na sua representação geométrica, usando a linguagem própria dos alunos; Motivar os alunos para o estudo das Cônicas.
2°. Momento: Investigação Geométrica das Cônicas		
Aulas	**Conteúdos**	**Objetivos**
3 a 5	Investigação Geométrica das Cônicas: Definição e elementos.	Perceber as Cônicas como lugar geométrico; Identificar seus principais elementos; Definir as Cônicas.
3°. Momento: Investigação Analítica das Cônicas		
Aulas	**Conteúdos**	**Objetivos**
6 a 8	Investigação Analítica das Cônicas	Obter a forma canônica das Cônicas.
4°. Momento: Reconciliação Integrativa		
Aulas	**Conteúdos**	**Objetivos**
13 e 14	Cônicas: Questões contextualizadas e dissertativas.	Estabelecer a integração dos saberes abordados nos momentos anteriores.
5°. Momento: Avaliação		
Aulas	**Conteúdos**	**Objetivos**
15 e 16	Cônicas: Questões dissertativas e objetivas.	Avaliar: compreensão, transferência, capacidade de explicar, descrever, e enfrentar situações novas.

Tabela 3.1: Etapas do desenvolvimento da sequência didática.

Para melhor entender a Sequência Didática, a Tabela 3.1 apresenta as etapas e momento de cada etapa. A Sequência Didática começa com uma consulta ou levantamento prévio do conhecimento dos alunos sobre Cônicas. Nos três primeiros momentos, é feita a diferenciação progressiva, isto é, as ideias mais gerais e inclusivas são apresentadas em primeiro lugar, e em seguida, são progressivamente diferenciadas, em seus detalhes e especificidades. No quarto momento, é realizada a reconciliação integrativa, ou seja, são exploradas as relações entre ideias, apontados os pontos semelhantes e diferenciações significativas, reconciliando inconsistências reais ou aparentes. No quinto momento é feita uma valiação.

Recomendação Inicial: Como esta sequência didática explorará muito o software GeoGebra, torna-se muito interessante, caso a escola possua um laboratório de informática que acomode o público alvo, o professor pensar em uma aula de iniciação ao software GeoGebra para os seus alunos, para ensiná-los os comandos básicos do software e auxiliá-los para que eles mesmos consigam fazer as construções e manipulações.

3.2.1 Avaliação dos conhecimentos prévios do aluno e apresentação do tema

Nesta seção, iremos propor uma discussão, em nível bem introdutório, com questões qualitativas. Uma vez que as questões qualitativas prestam-se muito bem para mapear como se apresentam os conhecimentos mais gerais e inclusivos (subsunçores) dos aprendizes sobre um determinado tema. Desse modo, podemos ter clareza de quais são os conhecimentos prévios dos alunos sobre o tema em questão. Apresentaremos o tema da sequência Didática e algumas aplicações referentes a este tema.

Objetivos: Fazer com que os alunos externalizem seus conhecimentos prévios sobre o tópico de Cônicas; conquistar a atenção e o empenho dos alunos para estudar o conteúdo de Cônicas.

Duração: 02 aulas de 45 minutos.

Material didático: Computador com software de geometria dinâmica, Datashow e joguinho computacional Movimento de Projéteis.

Orientações Metodológicas: Para esta etapa deixamos as seguintes orientações:

Seções Cônicas por um plano

De acordo com a teoria Ausubeliana, a primeira etapa consiste na apresentação do tema, expondo o conteúdo de forma mais geral para o mais específico. Nesse contexto, uma discussão qualitativa é proposta, na qual o professor pode utilizar material concreto e recursos tecnológicos para mapear o conhecimento prévio dos aprendizes.

A atividade proposta preocupa-se em apresentar o conteúdo a ser estudado, ao mesmo tempo que realiza um levantamento do conhecimento dos alunos acerca do tema. Desse modo, materiais concretos são apresentados e suas formas, como modelo da base e superfície, são comparadas com o conhecimento dos alunos.

Nesta etapa, pretende-se classificar as Cônicas com base na sua representação geométrica, usando a linguagem própria dos alunos. Aqui, o professor ainda investiga as propriedades que os alunos observam em cada cônica, se é limitada, se é “aberta” ou “fechada”, se é simétrica, se é plana e onde a encontramos em nossa sociedade, em que áreas do conhecimento elas costumam aparecer.

Após a discussão qualitativa, a atividade se desenvolve com o uso do GeoGebra ou outro software de Geometria Dinâmica apresentando as Cônicas pela caracterização da interseção de um plano com um cone duplo, Figura 3.1. Uma construção no GeoGebra para ilustrar dinamicamente o movimento de um plano seccionando, um cone duplo para que se obtenha parábolas, elipses e hipérboles, está disponível para download em ([36]). Nesta fase, a interação dos alunos com o software é fundamental para que eles percebam a invariância das formas obtidas quando intersectamos o cone com um plano específico.

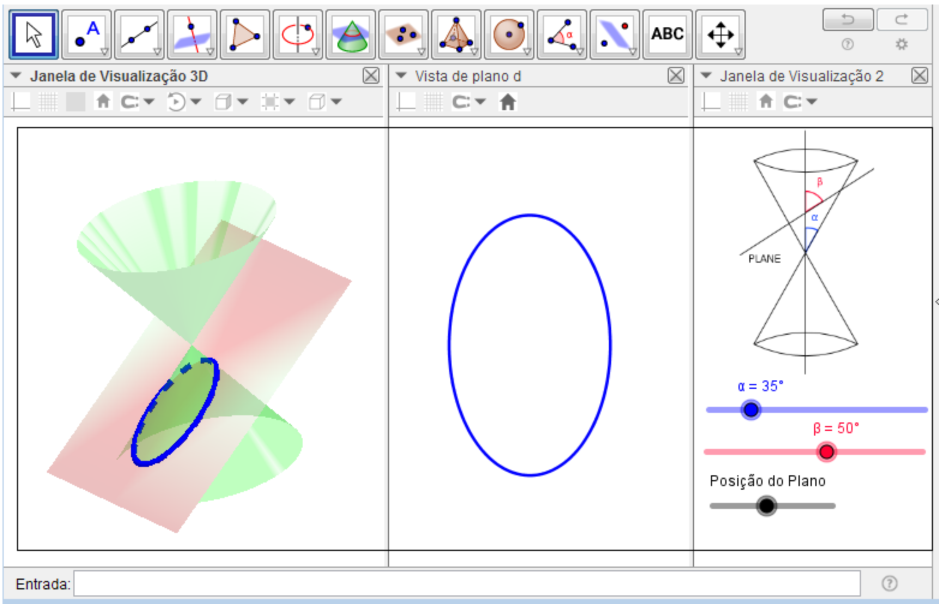


Figura 3.1: Simulação no GeoGebra da Interseção de um plano com um cone duplo - Fonte: Print Screen de [36].

Algumas aplicações das Cônicas

Uma vez estabelecida a classificação das Cônicas pela forma geométrica como elas se apresentam, o professor busca motivar o estudo do conteúdo, apresentando ou relacionando-as com a prática. Assim, busca-se questionar os alunos em que áreas do conhecimento elas aparecem. Esse levantamento é posto em correspondência com uma apresentação de slides que apresentam as Cônicas estando relacionadas a várias áreas do conhecimento.

Movimento planetário

Na astronomia, Kepler mostrou que os planetas do sistema solar descrevem órbitas elípticas, as quais têm o sol num dos focos. Também os satélites artificiais enviados para o espaço percorrem trajetórias elípticas, Figura 3.2.

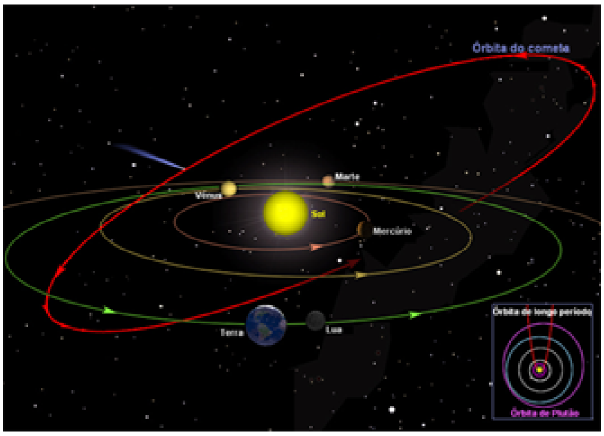


Figura 3.2: Sistema solar - Fonte: [37].

O sistema LORAN de localização em navegação

Este sistema permite ao navegante de um navio ou avião achar sua posição sem confiar em marcos visíveis. Usando para isso o conceito de lugar geométrico que define a hipérbole. Seu princípio básico de funcionamento é bastante simples.

O LORAN deve estar conectado a no mínimo três torres de transmissão. Cada estação emite sinais repetidos, na velocidade da luz, pulsando em intervalos de tempos específicos. Estes sinais alcançam o receptor LORAN, localizado a bordo do navio ou avião.

Cada par de estações dá uma hipérbole que contém a posição do navegante, assim sua posição exata é o ponto onde as três hipérboles intersectam, Figura 3.3.

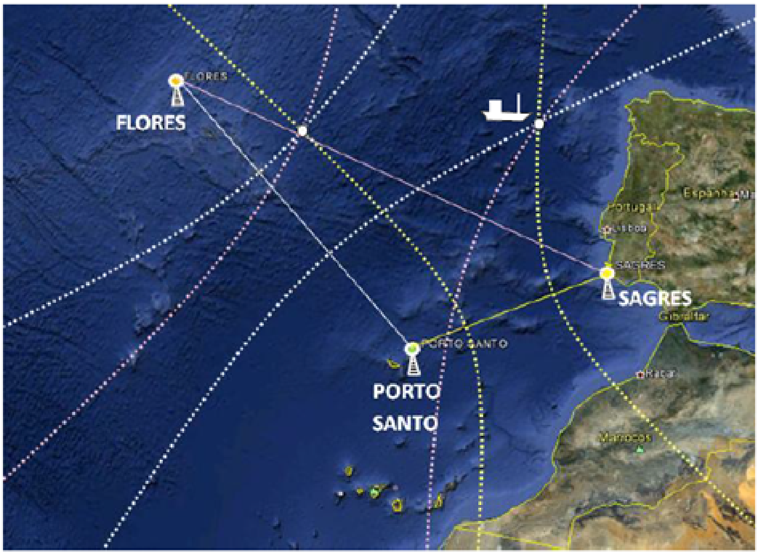


Figura 3.3: Sistema hiperbólico de antenas - Fonte: Correia, [9], p. 110.

As Cônicas na Engenharia e Arquitetura

Em engenharia e arquitetura, como no caso das pontes, estádios, cúpulas de igrejas, torres e arcos, usam-se as Cônicas devido às suas propriedades físicas e até mesmo estéticas. Um Exemplo é o cabo de suspensão de uma ponte, quando o peso total é uniforme distribuído segundo o eixo horizontal da ponte, toma a forma de uma parábola, como se pode ver na Figura 3.4(b). Já a planta do Coliseu em Roma, como se pode ver na Figura 3.4(a), tem a forma de uma elipse.

As curvas hiperbólicas também são utilizadas na arquitetura como pode ser observado, por exemplo, na catedral de Brasília, ver Figura 3.4(c).

(a) Coliseu em Roma - Fonte: [43]

(b) Cabos de suspensão - Fonte: [42]

(c) Catedral de Brasília - Fonte: [44]

Figura 3.4: Cônicas na Engenharia e Arquitetura.

Lançamento de Projéteis

Quando lançamos um objeto para o alto, ele é desacelerado pela força gravitacional. A trajetória do objeto depende do ângulo de lançamento. Considerando o ângulo de lançamento a partir da linha horizontal, a trajetória é parabólica, desde que o ângulo seja diferente de 90 graus, Figura 3.5.

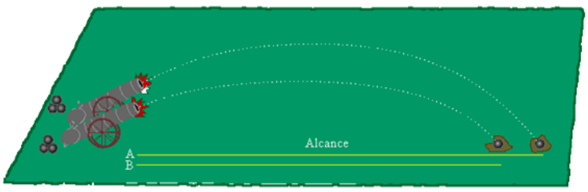


Figura 3.5: Lançamento de projéteis - Fonte [41].

As Cônicas na Medicina

A *litotripsia* (do grego: lithos = pedra; trîpsis = esmagamento ou trituração) existe desde os primeiros anos da década de 80 e é uma técnica médica que procura implodir ou triturar os cálculos que se formam no organismo por meio de um aparelho chamado Litotritor, Figura 3.6. Este aparelho possui um espelho elíptico que faz com que as ondas de choque criadas fora do corpo pelo aparelho viajem através da pele e tecidos até encontrarem os cálculos mais densos, pulverizando-os. O espelho elíptico do Litotritor concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão (propriedade focal da elipse).

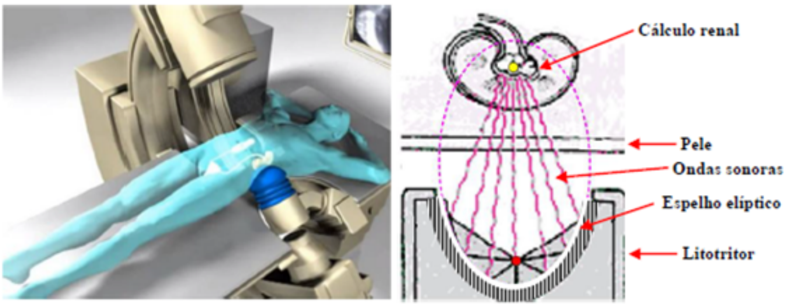


Figura 3.6: Ilustração da litotripsia extracorpórea - Fonte: Correia, [9], p. 106.

O *sistema de iluminação dos dentistas*, Figura 3.7, usa refletores elípticos como forma de concentrar o máximo de luz num ponto específico dos dentes do paciente, evitando também o desconforto do encandeamento que os raios luminosos provocariam.

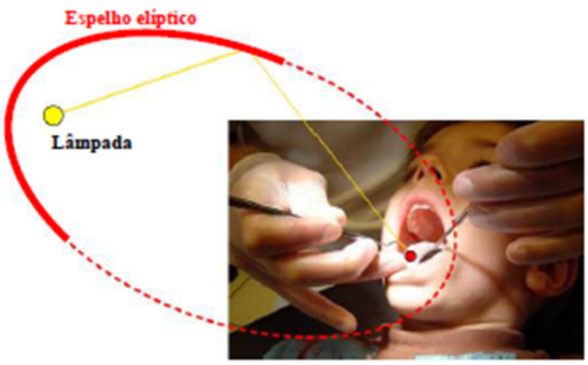


Figura 3.7: Sistema de iluminação dos dentistas - Fonte: Correia, [9], p. 106.

A maioria das pequenas lesões de pele, incluindo cistos, sebáceos e lesões suspeitas de carcinoma basocelular e epidermoide, pode ser removida com uma *Incisão Elíptica*, Figura 3.8.

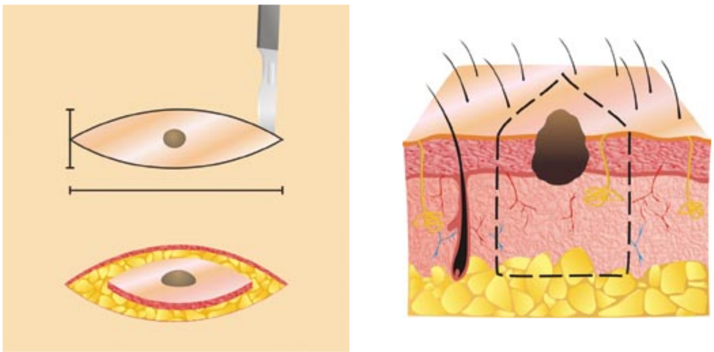


Figura 3.8: Incisão Elíptica - Fonte: [38]

3.2.2 A investigação geométrica da Parábola

Nesta seção, iremos propor atividades aos alunos, usando o GeoGebra como organizador prévio, para abordar: a parábola como lugar geométrico, sua definição, seus elementos e sua forma canônica.

Objetivos: Fazer com que os alunos percebam a parábola como lugar geométrico; identificar os elementos da parábola - foco, diretriz, eixo e vértice; definir o que é parábola.

Material didático: Computador com software GeoGebra e Datashow.

Duração: 01 aula de 45 minutos.

Orientações Metodológicas: Entendemos que a definição algebrizada e formal, baseada em *lugar geométrico*, sem uma ilustração geométrica, pode dificultar a compreensão do conceito e das propriedades das Cônicas. Dessa forma, uma atividade que explore inicialmente as propriedades geométricas das Cônicas pode contribuir para uma aprendizagem significativa desse conteúdo. O trabalho do professor como mediador nesta atividade é fundamental, pois é ele quem vai direcionar e motivar o aluno a visualizar e explorar o material em seus detalhes. A seguir trazemos uma proposta de construção da Parábola no software GeoGebra.

1. Crie uma reta definida por dois pontos. Utilizando a função exibir objeto oculte os pontos A e B que surgem na construção. Utilizando a função renomear, renomeie a reta construída como d;

2. Crie um ponto F fora da reta d, um ponto A sobre d e trace o segmento AF;

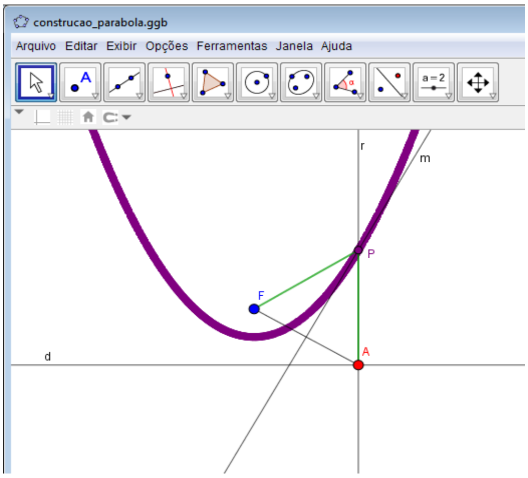
3. Por A trace uma reta r perpendicular a d;

4. Trace a mediatriz m do segmento AF;

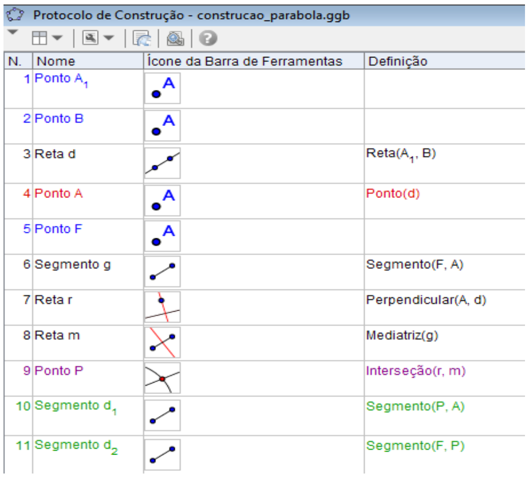
5. Utilize a ferramenta interseção de dois objetos e encontre o ponto $P \in m \cap r$;

6. Traçar, dando destaque, os segmentos AP e FP, renomeando seus rótulos como, d_1 e d_2, respectivamente, e por fim oculte esses rótulos.

O resultado junto com o protocolo de construção, podem ser observados na Figura 3.9.



(a) Construção


Protocolo de Construção - construcao_parabola.ggb

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição
1	Ponto A_1		
2	Ponto B		
3	Reta d		Reta(A_1, B)
4	Ponto A		Ponto(d)
5	Ponto F		
6	Segmento g		Segmento(F, A)
7	Reta r		Perpendicular(A, d)
8	Reta m		Mediatriz(g)
9	Ponto P		Interseção(r, m)
10	Segmento d_1		Segmento(P, A)
11	Segmento d_2		Segmento(F, P)

(b) Protocolo de construção

Figura 3.9: Construção da Parábola como lugar geométrico - Fonte: o autor.

Durante a exploração da construção o professor pode fazer os seguintes questionamentos.

Questionamentos:

1. O que podemos afirmar sobre o triângulo APF?

2. O que podemos afirmar sobre os lados AP e FP do triângulo APE?

3. Mova o ponto A sobre a reta d e responda novamente as duas perguntas anteriores.

4. De acordo com as conclusões anteriores e observando na Janela de Álgebra os valores de d_1 e d_2 (comprimentos de AP e FP, respectivamente), o que podemos concluir sobre a distância do ponto P ao ponto A e ao ponto F?

5. O que podemos dizer sobre as distâncias de P ao ponto F e à reta d?

6. Habilite o rastro do ponto P e mova o ponto A sobre a reta d. Como você descreve a figura formada?

7. De acordo com as conclusões obtidas, como poderíamos definir a figura formada?

Resultados esperados:

Seguindo os passos propostos, isto é, a construção da parábola e um posicionamento mediador do professor com questionamentos que levem os alunos a explorarem a construção e a perceberem as propriedades geométricas da parábola, espera-se obter os seguintes resultados.

Definição: Sejam d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d. A **parábola** $\mathscr{P}$ de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos P do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d. Em linguagem matemática, temos

$$\mathscr{P} = \{P \mid d(P,F) = d(P,d)\}.$$

Terminologia: Acompanhe a Figura 3.10

- *Foco e Diretriz*: a reta d é denominada *diretriz* da parábola enquanto que o ponto F chamamos de *foco* da parábola.
- *Reta focal*: é a reta l perpendicular a diretriz d e que passa pelo foco F.
- *Vértice*: é ponto V da parábola que pertence a reta focal l.

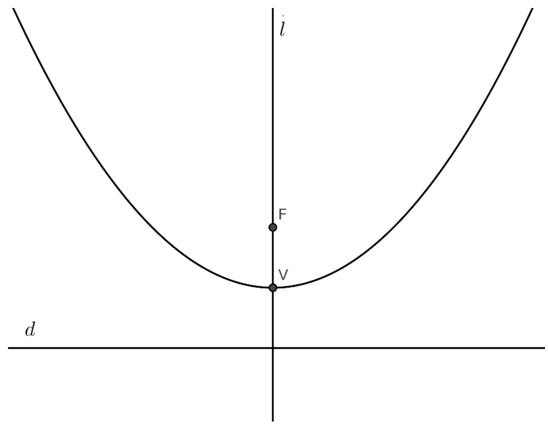


Figura 3.10: Elementos da parábola - Fonte: o autor.

3.2.3 A investigação geométrica da Elipse

Nesta seção, iremos propor atividades aos alunos, usando o GeoGebra como organizador prévio, para abordar: a elipse como lugar geométrico, a sua definição, os seus elementos e sua forma canônica.

Objetivos: Fazer com que os alunos percebam que a soma das medidas dos segmentos EF_1 e EF_2 construídos é constante. Percebam, também, a elipse como lugar geométrico e conheçam seus elementos.

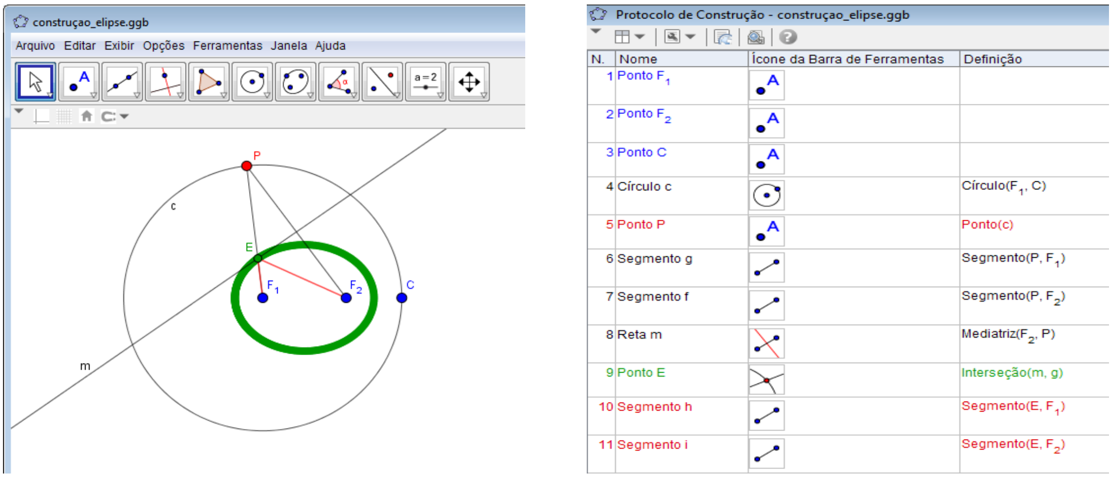
Material didático: Computador com software GeoGebra e Datashow.

Duração: Uma aula de 45 minutos.

Orientações Metodológicas: O professor deve adotar uma postura mediadora, direcionando os alunos através do diálogo a visualizarem e explorarem a construção geométrica em seus detalhes. Uma forma de construção da elipse no software GeoGebra pode ser vista a seguir.

1. Crie dois pontos F_1 e F_2 na área de trabalho;
2. Crie uma circunferência c com centro em F_1 e raio $r > d(F_1, F_2)$, qualquer;
3. Utilize a função esconder objeto para esconder o ponto A que surge no passo anterior;
4. Crie um novo ponto P sobre a circunferência c e trace os segmentos F_1P e F_2P;
5. Trace a mediatriz m do segmento F_2P;
6. Utilize a ferramenta interseção de dois objetos e encontre o ponto $P \in m \cap F_1P$;
7. Trace, dando destaque, os segmentos EF_1 e EF_2, renomeando seus rótulos como, d_1 e d_2, respectivamente, e por fim ocultar esses rótulos.

O resultado junto com o protocolo de construção, podem ser observados na Figura 3.11.



(a) Construção (b) Protocolo de construção

Figura 3.11: Construção da Elipse como lugar geométrico - Fonte: o autor.

A fim de motivar os alunos a visualizarem e explorarem a construção da elipse, o professor pode fazer os seguintes questionamentos.

Questionamentos:

1. O que podemos concluir sobre o ponto E, pertencente a mediatriz de PF_2, em relação aos pontos P e F_2?

2. Que relação você observa entre a medida do segmento PF_1 e as medidas dos segmentos EF_1 e EF_2?

3. No campo de entrada digite o comando $d = d_1 + d_2$. Na janela de Álgebra observe os valores de d_1, d_2(medida dos segmentos EF_1 e EF_2, respectivamente) e o valor de d (soma das medidas desses segmentos). Agora, Mova o ponto P sobre a circunferência e observe o que acontece com esses três valores. Que conclusão podemos tirar?

4. Habilite o rastro do ponto E e mover o ponto P, fazendo-o percorrer sobre a circunferência. Como você descreve a figura formada?

5. O que acontece com a figura formada quando:

   a) Aproximamos F_1 de F_2 (sem fazer concidirem) e fazemos o ponto P percorrer a circunferência;

   b) Aproximamos F_1 de F_2, de modo que coincidam, e fazemos o ponto P percorrer a circunferência;

   c) Afastamos F_2 de F_1, aproximando F_2 da circunferência, e fazemos o ponto P percorrer a circunferência.

   d) Afastamos F_2 de F_1, de modo que F_2 pertença a circunferência, e fazemos o ponto P percorrer a circunferência.

6. De acordo com as conclusões obtidas, como poderíamos definir a figura formada?

Resultados esperados:

Definição: Uma **elipse** $\mathscr{E}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos cuja soma das distâncias é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja, sendo, $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, temos

$$\mathscr{E} = \{P \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a\}.$$

Terminologia: Acompanhe a Figura 3.12

- *Focos*: os pontos fixos F_1 e F_2;
- *Reta Focal*: a reta l que contém os focos;
- *Vértices*: os pontos A_1 e A_2 de interseção da elipse com a reta focal l, são chamados vértices da elipse sobre a reta focal, e os pontos B_1 e B_2 vértices da elipse sobre a reta não focal;
- *Eixo não focal*: o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$;
- *Eixo Focal*: o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;
- *Centro*: o ponto médio C do segmento A_1A_2.

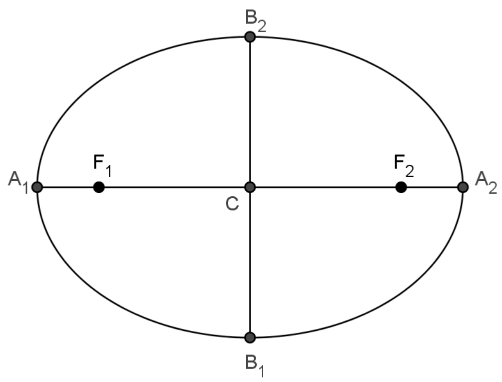


Figura 3.12: Elementos da elipse - Fonte: o autor.

3.2.4 A investigação geométrica da Hipérbole

Nesta seção, iremos propor atividades aos alunos, usando o GeoGebra como organizador prévio, para abordar: a hipérbole como lugar geométrico, a sua definição, os seus elementos e sua forma canônica.

Objetivos: Fazer com que os alunos percebam que a diferença das medidas dos segmentos EF_1 e EF_2 construídos é constante. Percebam, também, a hipérbole como lugar geométrico e conheçam seus elementos.

Material didático: Computador com software GeoGebra e Datashow.

Duração: 01 aula de 45 minutos.

Orientações Metodológicas: A seguir, trazemos uma proposta de construção da hipérbole no software GeoGebra, que pode servir de suporte para o professor usar em sua aula para, juntamente com seus alunos, explorar e visualizar propriedades desta curva.

1. Criar dois pontos F_1 e F_2 na área de trabalho;

2. Criar uma circunferência c com centro em F_1 e raio $r < d(F_1, F_2)$, qualquer;

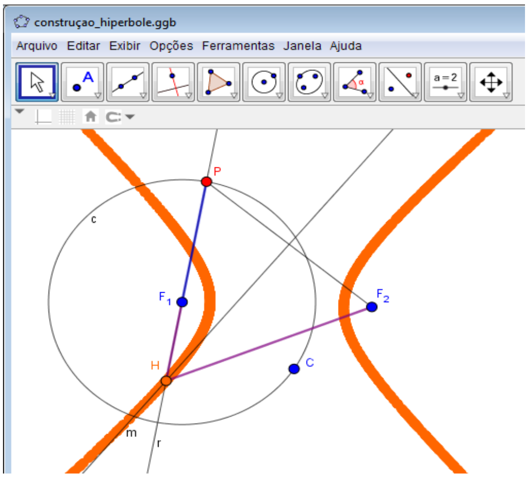
3. Utilizar a função esconder objeto para esconder o ponto A que surge no passo anterior;

4. Criar um novo ponto P sobre a circunferência c e traçar a reta r definida pelos pontos F_1 e P, e traçar o segmento F_2P;

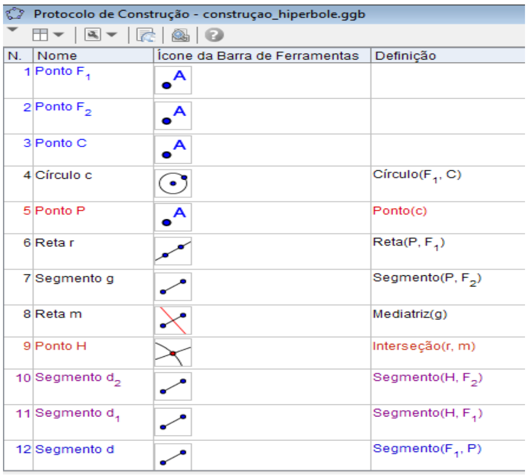
5. Traçar a mediatriz m do segmento F_2P e determinar a interseção H da mediatriz m com a reta r;

6. Trace, dando destaque, os segmentos HF_1, HF_2 e PF_1, renomeando seus rótulos como, d_1, d_2 e d, respectivamente, e por fim ocultar esses rótulos.

O resultado junto com o protocolo de construção, podem ser observados na Figura 3.13.



(a) Construção



Protocolo de Construção - construçao_hiperbole.ggb

N.	Nome	Ícone da Barra de Ferramentas	Definição
1	Ponto F_1		
2	Ponto F_2		
3	Ponto C		
4	Círculo c		Círculo(F_1, C)
5	Ponto P		Ponto(c)
6	Reta r		Reta(P, F_1)
7	Segmento g		Segmento(P, F_2)
8	Reta m		Mediatriz(g)
9	Ponto H		Interseção(r, m)
10	Segmento d_2		Segmento(H, F_2)
11	Segmento d_1		Segmento(H, F_1)
12	Segmento d		Segmento(F_1, P)

(b) Protocolo de construção

Figura 3.13: Construção da Hipérbole como lugar geométrico - Fonte: o autor.

A fim de alcançar os objetivos pensados para esta atividade, o professor durante a exploração da construção da hipérbole pode fazer questionamentos como os que se seguem.

Questionamentos:

1. O que podemos concluir sobre o ponto H, pertencente a mediatriz de PF_2, em relação aos pontos P e F_2?

2. Na janela de Álgebra observe os valores de d_1, d_2(medida dos segmentos HF_1 e HF_2, respectivamente) e o valor de d (medida do segmento PF_1), você consegue identificar alguma relação entre eles? Agora, mova o ponto P sobre a circunferência e observe o que acontece com esses três valores. Que conclusão podemos tirar?

3. Como você expressaria, algebricamente, a relação entre as distâncias dos segmentos HF_1 e HF_2 em função do segmento PF_1?

4. Habilite o rastro do ponto H e mova o ponto P, fazendo-o percorrer a circunferência. Como você descreve a figura formada?

5. O que acontece com a figura formada quando afastamos F_1 e F_2 e fazemos o ponto P percorrer a circunferência;

6. De acordo com as conclusões obtidas como poderíamos definir a figura formada?

Resultados esperados:

Definição: Uma **hipérbole** $\mathscr{H}$ de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos cujo módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$. Ou seja, sendo, $0 \leq a < c$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, temos

$$\mathscr{H} = \{P \mid |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a\}.$$

Terminologia: Acompanhe a Figura 3.14.

- *Focos*: os pontos fixos F_1 e F_2;
- *Reta Focal*: a reta l que contém os focos;
- *Vértices*: os pontos A_1 e A_2 de interseção da hipérbole com a reta focal l;
- *Eixo Focal*: o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$;
- *Centro*: o ponto médio C do eixo focal A_1A_2.
- *Reta não focal*: a reta l' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal;
- *Eixo não focal*: o segmento B_1B_2, perpendicular ao eixo focal que tem ponto médio C e comprimento $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$. Os pontos B_1 e B_2 são chamados vértices imaginários da hipérbole.

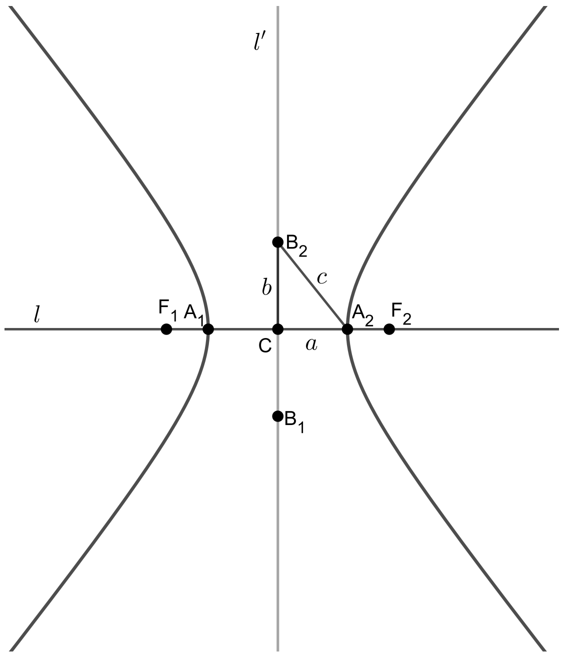


Figura 3.14: Elementos da hipérbole - Fonte: o autor.

3.2.5 A investigação analítica da Parábola

Nesta seção, vamos caracterizar a parábola como lugar geométrico dos pontos do plano, cujas coordenadas satisfazem determinadas propriedades e condições algébricas, ou seja, vamos aplicar o método da Geometria Analítica para descrever e resolver problemas geométricos envolvendo a parábola.

Objetivos: Obter a forma canônica da parábola.

Material didático: Quadro branco e pincel.

Duração: 03 aulas de 45 minutos.

Orientações Metodológicas: Através de aulas expositivas e dialogadas o professor deve adotar um sistema de eixos ortogonais adequado para obter a forma canônica da parábola.

Equação da parábola com vértice na origem do sistema

Dada uma parábola de foco F e diretriz d com $d(F,d) = 2p$ - o número $2p$ é chamado **parâmetro** da parábola - tome o sistema XOY (veja Figura 3.15) tal que a origem O coincida com o vértice V da parábola e o eixo OX coincida com o eixo focal. Suponha ainda que F esteja à direita da diretriz.

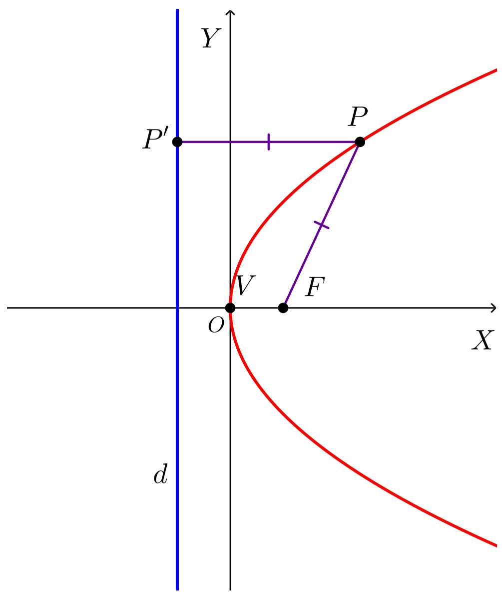


Figura 3.15: Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo OX à direita da diretriz - Fonte: o autor.

Um ponto P qualquer da parábola satisfaz a definição usual da curva, isto é,

$$d(P,F) = d(P,d).$$

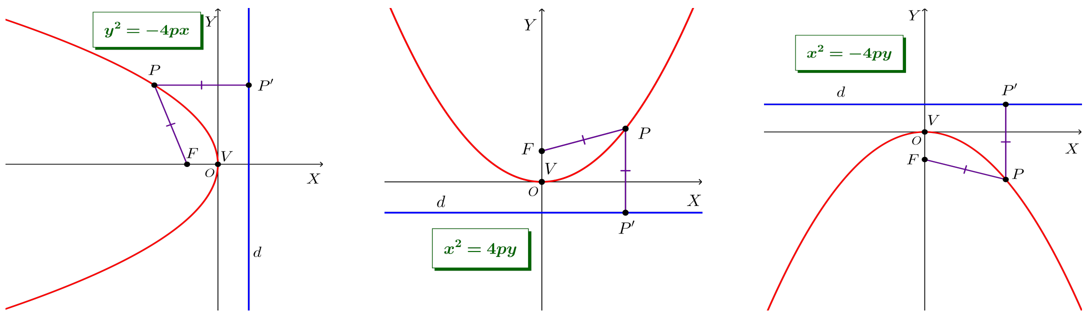
Seja P' o pé da perpendicular à diretriz d passando por P. Então $d(P,d) = d(P,P')$. Como $P' = (-p,y)$, temos que:

$$d(P,F) = d(P,P') \Rightarrow \sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-(-p))^2+(y-y)^2}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, simplificando e isolando y, tem-se:

$$y^2 = 4px, \ x \geq 0, \ p > 0.$$

que é a *Equação Canônica da Parábola* de vértice na origem do sistema e foco à direita da diretriz. Caso F estivesse à esquerda da diretriz, ou sobre o eixo OY(acima ou abaixo da diretriz) a equação correspondente em cada caso poderia ser obtida pelo mesmo processo acima e cujas formas são, respectivamente, $y^2 = -4px, x^2 = 4py$ e $x^2 = -4py$.



(a) Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo OX à esquerda da diretriz

(b) Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo OY acima da diretriz

(c) Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo OY abaixo da diretriz

Figura 3.16: Equações da Parábola com vértice na origem e foco sobre os eixos coordenados - Fonte: o autor.

Translação

Quando trabalhamos com a geometria dinâmica, temos a liberdade do movimento sobre as figuras estudadas, conhecidas as coordenadas do ponto e/ou a equação de uma curva, podemos movê-los no plano por meio, por exemplo, da translação, sem alterar suas características originais. O problema destes movimentos está na referência do plano, inicialmente partimos do plano cartesiano com os eixos bem definidos, após uma translação, mudamos o centro do plano de posição. Assim, as coordenadas dos pontos e consequentemente a equação de uma curva deve ser adaptada ao novo plano.

Consideremos um ponto $O' = (x_0, y_0)$ do plano cartesiano, tomemos dois eixos $O'X'$ e $O'Y'$ de mesma direção e sentido dos eixos OX e OY, respectivamente, que se intersectam em O', determinando ali suas origens. O novo plano cartesiano definido pelos eixos $O'X'$ e $O'Y'$ é uma translação do plano XOY, Figura 3.17.

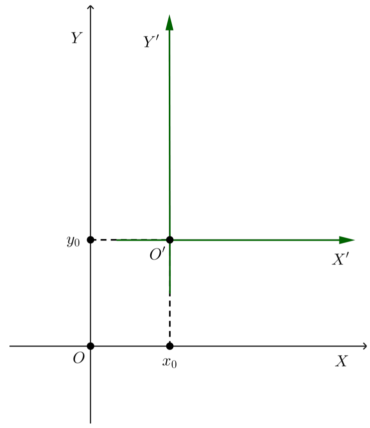


Figura 3.17: Planos cartesianos XOY e $X'O'Y'$ - Fonte: o autor.

Seja $P = (x_P, y_P)$ um ponto do plano. Determinaremos suas coordenadas no sistema $X'O'Y'$, Figura 3.18. É fácil ver a relação entre as coordenadas:

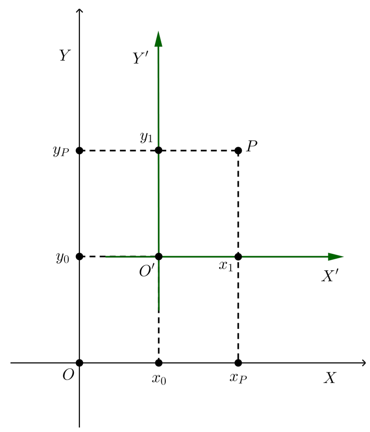


Figura 3.18: Conversão de coordenadas via uma translação - Fonte: o autor.

Note que, $P = (x_1, x_2) = (x_P - x_0, y_P - y_0)$, deste modo podemos transformar as coordenadas de P do sistema XOY para $X'O'Y'$ usando a conversão:

$$\begin{cases} x_1 & = & x_P - x_0 \\ y_1 & = & y_P - y_0 \end{cases}$$

Exemplo 1. Determinar as coordenadas do ponto $A = (-1, 2)$ do sistema XOY para o sistema $X'O'Y'$ de origem $O' = (2, 1)$.

Usando a fórmula de translação, temos $A = (-1-2, 2-1) = (-3, 1)$, no plano $X'O'Y'$.

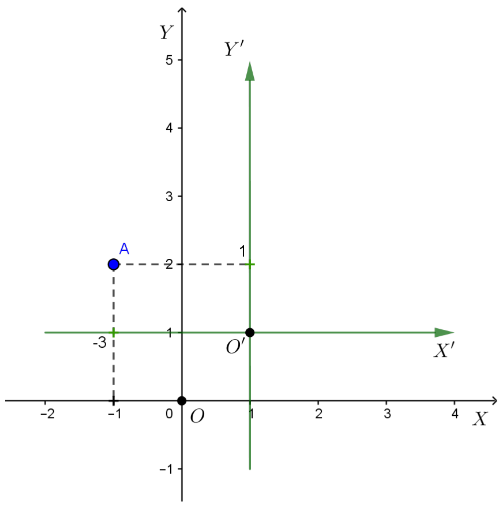


Figura 3.19: Translação - Fonte: o autor.

Exemplo 2. Escrever uma equação da reta $x+y=1$ no sistema $X'O'Y'$ de centro $O'=(1,2)$.

Tomando $x_P = x_1 + x_0$ e $y_P = y_1 + y_0$, temos:

$$(x_1+1)+(y_1+2)=1 \Rightarrow x_1+y_1=-2.$$

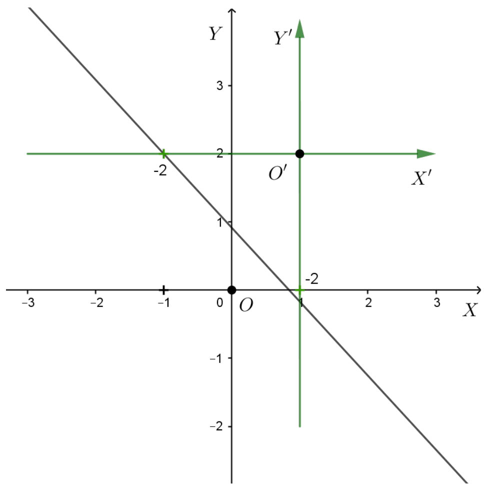


Figura 3.20: Translação - Fonte: o autor.

Equação da parábola com vértice $V=(x_0,y_0)$

Para obter a forma canônica da parábola de vértice $V=(x_0,y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX, consideramos um sistema de coordenadas $O'X'Y'$ com origem $O=V=(x_0,y_0)$ e eixos $O'X'$ e $O'Y'$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

Consideremos o caso em que o foco F está à direita da diretriz d. Sabemos que a equação da parábola no sistema de coordenadas $O'X'Y'$, é $(y')^2=4p(x')$.

Além disso, nesse sistema de coordenadas, o foco é $F = (p,0)$, o vértice é $V = (0,0)$; a diretriz é $d : x = -p$ e a reta focal é $l : y' = 0$.

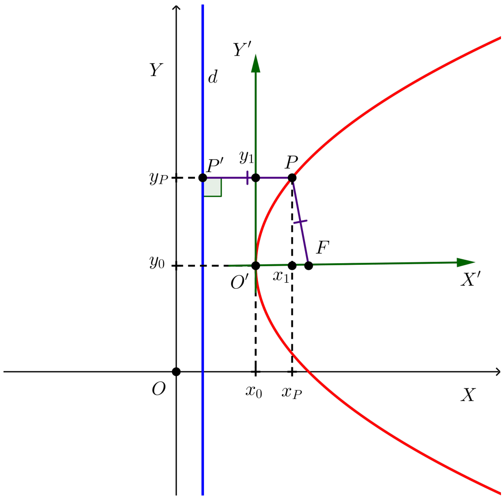


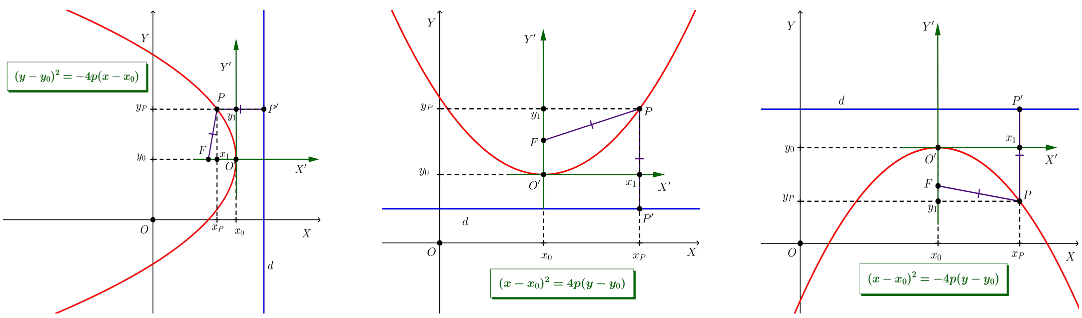
Figura 3.21: Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo a OX e foco à direita da diretriz - Fonte: o autor.

Como $x = x' + x_0$ e $y = y' + y_0$, temos que a equação da parábola no sistema XOY é

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).$$

No sistema de eixos XOY, a parábola tem foco $F = (x_0 + p, y_0)$, vértice $V = (x_0, y_0)$, diretriz $d : x - x_0 = -p$, ou seja, $d : x = x_0 - p$ e reta focal $l : y - y_0 = 0$, ou seja, $l : y = y_0$.

Caso F estivesse à esquerda da diretriz, ou o eixo de simetria fosse paralelo à OY, com o foco acima ou abaixo da diretriz, a equação correspondente em cada caso poderia ser obtida pelo mesmo processo acima, veja Figura(3.22).



(a) Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo a OX e foco à esquerda da diretriz.

(b) Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo a eixo OY e foco acima da diretriz.

(c) Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$, eixo paralelo a OY e foco abaixo da diretriz.

Figura 3.22: Equações da Parábola com vértice $V = (x_o, y_0)$ - Fonte: o autor.

3.2.6 A investigação analítica da Elipse

Nesta seção, vamos caracterizar a elipse como lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem determinadas propriedades e condições algébricas, ou seja, vamos aplicar o método da Geometria Analítica para descrever e resolver problemas geométricos.

Objetivos: Obter a forma canônica da Elipse.

Material didático: Quadro branco e pincel.

Duração: 02 aulas de 45 minutos.

Orientações Metodológicas: Através de aulas expositivas e dialogadas o professor deve adotar um sistema de eixos ortogonais adequado para obter a forma canônica da elipse.

Equação da Elipse com vértice na origem do sistema

Considere uma elipse com centro C na origem do sistema de coordenadas, eixo maior A_1A_2, com $A_1 = (-a,0)$, $A_2 = (a,0)$ e $a > 0$, eixo menor B_1B_2, com $B_1 = (0,-b)$, $B_2 = (0,b)$ e $b > 0$, e focos $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$, $c > 0$, ver Figura (3.23). Além disso, $0 < c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

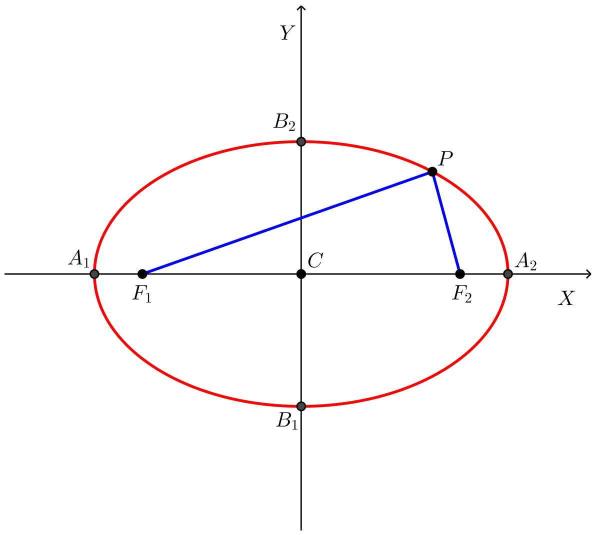


Figura 3.23: Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo OX - Fonte: o autor.

Pela definição usual da elipse, sabemos que um ponto $P = (x,y)$ pertence à curva se, e somente se, $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$, ou seja,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Inicialmente, vamos eliminar o primeiro radical da equação anterior.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow \\
(x+c)^2+y^2 &= 4a+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow \\
a^2-cx &= a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Daí, elevando ambos os membros ao quadrado, temos

$$\begin{aligned}
a^4+c^2x^2-2a^2cx &= a^2x^2+a^2c^2-2a^2cx+a^2y^2 \Rightarrow \\
(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 &= a(a^2-c^2).
\end{aligned}$$

Como a e c são números reais positivos e $a > c$, resulta que $a^2-c^2 > 0$. Sabemos que $b^2 = a^2-c^2 > 0$, substituindo esta informação na equação anterior ela pode ser reescrita como segue

$$b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo esta equação por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1,$$

que é a *forma Canônica da Elipse de centro na origem do sistema e reta focal coincidente com o eixo OX*. Caso a elipse tivesse centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY, a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima, veja Figura (3.24).

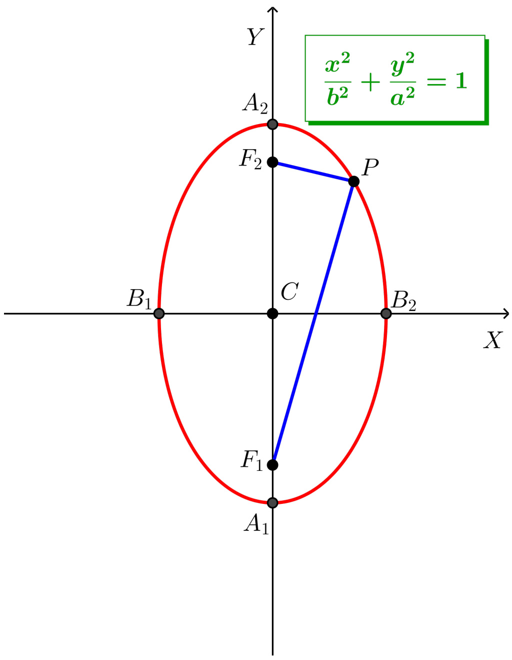


Figura 3.24: Elipse com centro na origem e focos sobre o eixo OY - Fonte: o autor.

Note a inversão da posição dos parâmetros a e b. Conclui-se, portanto, que o parâmetro a estará sempre como denominador na fração da coordenada (x ou y) do eixo onde se encontra os focos.

Equação da Elipse com centro C no ponto $O' = (x_0, y_0)$

Sendo o plano $O'X'Y'$ tal que $O' = (x_0, y_0)$ e os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ são paralelos aos eixos OX e OY, respectivamente, ver Figura (3.25).

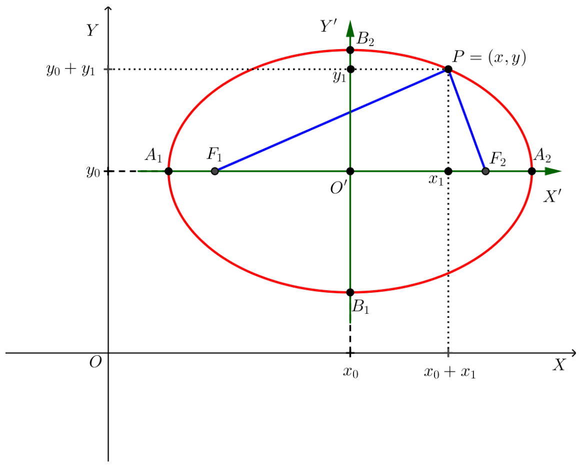


Figura 3.25: Elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX- Fonte: o autor.

Temos que $P(x, y)$ pode ser escrito do seguinte modo,

$$P(x, y) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1).$$

Temos que a equação da elipse no plano $O'X'Y'$ é dada por

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Como, $x_1 = x - x_0$ e $y_1 = y - y_0$, a última equação acima pode ser reescrita como segue

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

que é a *Equação da Elipse de centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à OX no sistema XOY*. Caso o centro continuasse sendo no ponto $O' = (x_0, y_0)$, mas o eixo focal fosse paralelo ao eixo OY, a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima, veja Figura (3.26).

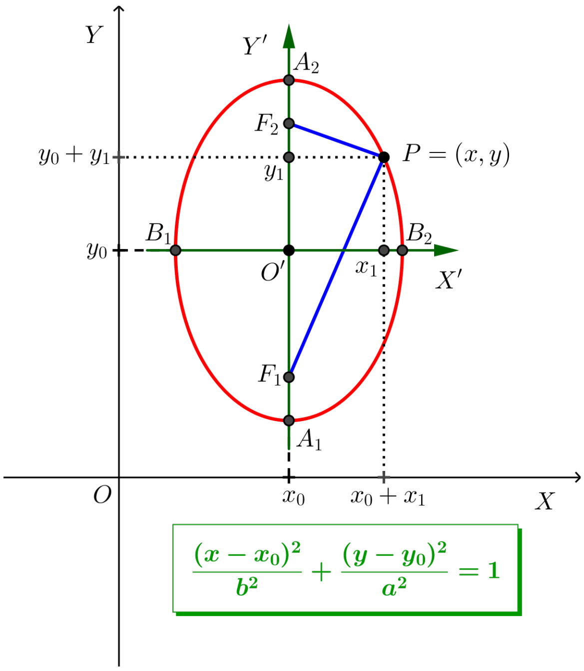


Figura 3.26: Elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY - Fonte: o autor.

3.2.7 A investigação analítica da Hipérbole

Nesta seção, vamos caracterizar a hipérbole como lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem determinadas propriedades e condições algébricas, ou seja, vamos aplicar o método da Geometria Analítica para descrever e resolver problemas geométricos.

Objetivos: Obter a forma canônica da hipérbole.

Material didático: Quadro branco e pincel.

Duração: 02 aulas de 45 minutos.

Orientações Metodológicas: Através de aulas expositivas e dialogadas o professor deve adotar um sistema de eixos ortogonais adequado para obter a forma canônica da hipérbole.

Equação da Hipérbole com vértice na origem do sistema

Dada uma hipérbole de focos F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$, $c > 0$, e eixo focal igual a $2a$, $0 < a < c$, tome o sistema XOY (veja Figura 3.27) tal que a origem O coincida com o centro da hipérbole e o eixo OX coincida com o seu eixo focal (real).

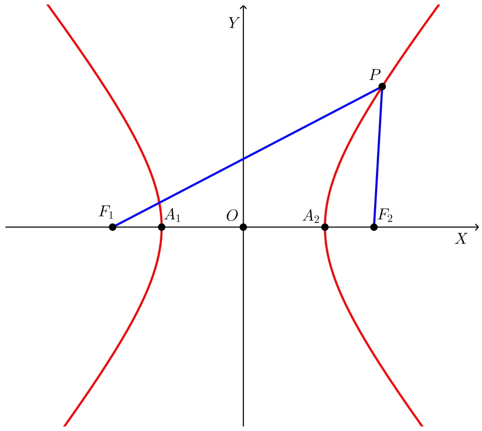


Figura 3.27: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo OX - Fonte: o autor.

Pela definição usual da hipérbole, sabemos que um ponto $P = (x,y)$ pertence à curva se, e somente se, o módulo da diferença das distâncias de P aos focos F_1 e F_2 é constante e igual a $2a$,

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a,$$

isto é,

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a \quad \text{ou} \quad d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a.$$

Como, $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$, usando a fórmula para calcular a distância entre dois pontos no plano, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad \text{ou} \quad \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a.$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividindo esta equação por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que é a *forma Canônica da Hipérbole de centro na origem do sistema e reta focal coincidente com o eixo OX*. Caso a hipérbole tivesse centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY, a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima, veja Figura (3.28).

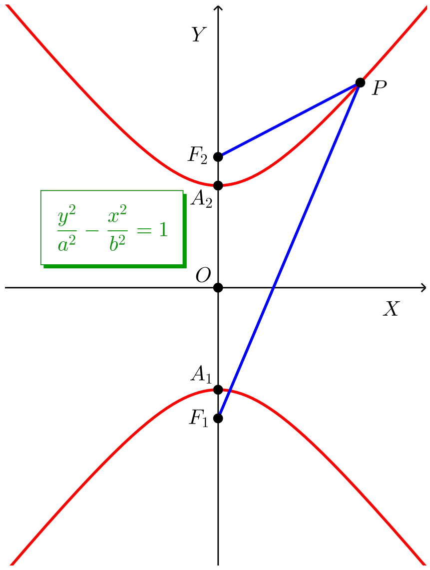


Figura 3.28: Hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo OY - Fonte: o autor.

Equação da Hipérbole com centro C no ponto $O' = (x_0, y_0)$

Suponha agora que a hipérbole tenha centro diferente da origem do sistema e eixo focal paralelo ao eixo do sistema. Sendo o plano $O'X'Y'$ tal que $O' = (x_0, y_0)$ e os eixos $O'X'$ e $O'Y'$ são paralelos aos eixos OX e OY, respectivamente, ver Figura (3.29).

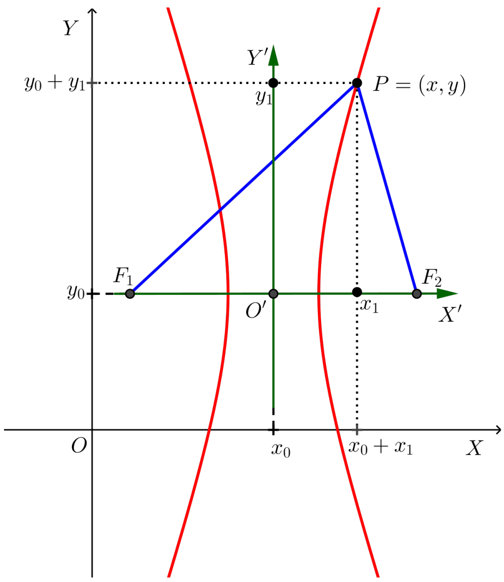


Figura 3.29: Hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX- Fonte: o autor.

Temos que $P(x, y)$ pode ser escrito do seguinte modo,

$$P(x, y) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1).$$

Temos que a equação da hipérbole no sistema de coordenadas $O'X'Y'$ é

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Como, $x_1 = x - x_0$ e $y_1 = y - y_0$, a última equação acima pode ser reescrita como segue

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

que é a *Equação da Hipérbole de centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo focal paralelo à OX no sistema XOY*. Caso o centro continuasse sendo no ponto $O' = (x_0, y_0)$, mas o eixo focal fosse paralelo ao eixo OY, a equação correspondente poderia ser obtida pelo mesmo processo acima, veja Figura (3.30).

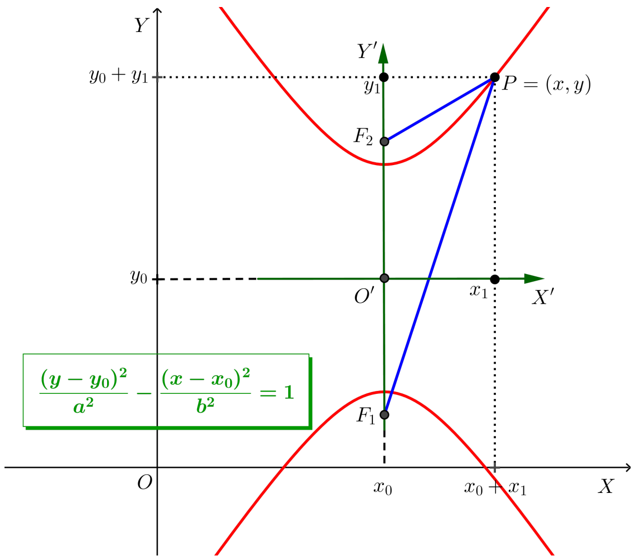


Figura 3.30: Hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OY- Fonte: o autor.

3.2.8 Reconciliação integrativa

Nesta seção, propomos algumas questões contextualizadas e dissertativas sobre Cônicas.

Objetivos: Explorar, através das questões, relações entre ideias, apontar similaridades e diferenças importantes, reconciliar discrepâncias reais ou aparentes.

Material didático: Lista de exercícios.

Duração: 02 aulas de 45 minutos.

1. O teto de um corredor de 20 metros de largura tem a forma de uma semielipse, tem altura máxima, em relação ao solo, igual a 18 metros e as paredes laterais que suportam este teto têm alturas de 12 metros. Calcule a distância do teto ao solo, em relação a um ponto distante 4 metros de qualquer uma das paredes.

2. O arco de um túnel é uma semielipse. Se a largura do túnel é 100 metros e a sua altura máxima é 40 metros, determine a altura do túnel a 30 metros do centro.

3. As duas torres de uma ponte distam uma da outra 124 metros e se elevam 30 metros sobre o piso da ponte. Um cabo suspenso entre as duas extremidades superiores das torres formam uma parábola e seu ponto médio se encontra a uma altura de 4 metros do piso da ponte (Figura 3.31). Escolhendo um sistema de coordenadas cartesianas a seu critério, determine a equação que descreve a forma do cabo suspenso.

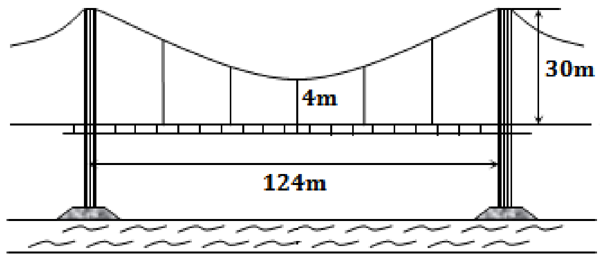


Figura 3.31: Ponte Suspensa - Fonte: o autor.

4. Deseja-se construir um canal, cuja secção transversal deve ser semielíptica, com uma largura na parte superior de 12 metros e profundidade máxima de 4 metros.

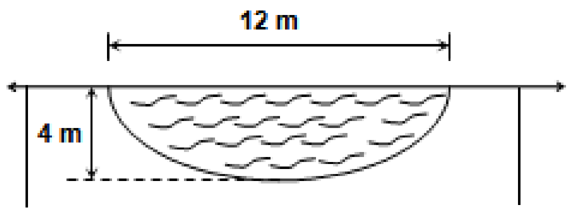


Figura 3.32: Canal - Fonte: o autor.

De acordo com estas informações:

a) Qual é a equação que descreve a secção do canal?

b) Qual a profundidade do arco nos pontos localizados a $2m$ do centro?

5. O prato de uma antena parabólica funciona captando os sinais que emanam do satélite e desviando-os para receptor, que está localizado no foco da parábola. O prato de determinada antena parabólica tem 360 cm de diâmetro e sua profundidade é 60 cm. Com esta informação.

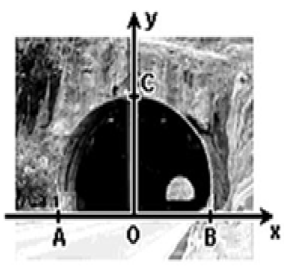
Figura 3.33: Antena Parabólica - Fonte: o autor.

a) Faça um esboço gráfico colocando o vértice do perfil parabólico na origem e o eixo focal sobre o eixo OX;

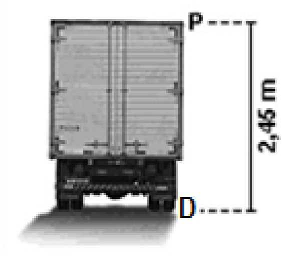
b) A que distância do fundo do prato parabólico está localizado o receptor de sinais da antena?

c) Escreva a equação do perfil parabólico de acordo com o esboço feito.

6. (UERJ-2007) A Figura 3.34(a) mostra um túnel cuja entrada forma um arco parabólico com base $AB = 8m$ e altura central $OC = 5,6m$. Observe, na foto, um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, cujo eixo horizontal OX é tangente ao solo e o vertical OY representa o eixo de simetria da parábola. Ao entrar no túnel, um caminhão com altura DP igual a $2,45m$, como ilustrado na Figura 3.34(b), toca sua extremidade P em um determinado ponto do arco parabólico. Calcule a distância do ponto P ao eixo vertical OY.



(a) Túnel.



(b) Carro.

Figura 3.34

7. (ENADE 2011 - Adaptada) A construção da Catedral, projeto do arquiteto Oscar Niemeyer, teve início em 12 de agosto de 1958, em plena construção da nova capital. Em 1959, mesmo antes da inauguração de Brasília (1960), a sua forma estrutural (pilares de concreto armado, na forma de um hiperbolóide de revolução) já estava pronta. O

fechamento lateral entre os pilares só ocorreu em 1967, pouco antes de sua consagração, em 12 de outubro do mesmo ano, ocasião em que recebeu a imagem de Nossa Senhora Aparecida. De 1969 a 1970, o complexo foi concluído com o espelho d'água ao redor da Catedral, o batistério e o campanário, ver Figura (3.35).

Figura 3.35: Catedral Metropolitana de Brasília.

Nesse contexto, considere na Figura (3.36) os elementos principais da hipérbole associada aos arcos hiperbólicos da Catedral Metropolitana de Brasília.

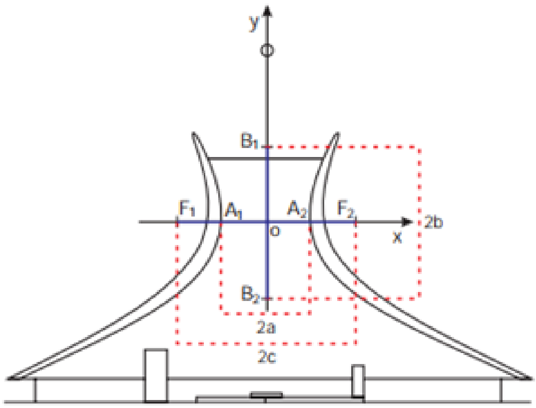


Figura 3.36: Corte esquemático da Catedral, representando os arcos hiperbólicos.

Supondo que o eixo real (ou eixo transverso) da hipérbole na Figura (3.36) mede $30m$ e que a distância focal mede $50m$, qual a equação reduzida da hipérbole? Supondo que o eixo real (ou eixo transverso) da hipérbole na Figura (3.36) mede $30m$ e que a distância focal mede $50m$, qual a equação reduzida da hipérbole?

8. As pontes suspensas surgiram da necessidade de transpor rios e vales largos e altos, sem pilares de sustentação - para permitir a passagem de navios sob elas. No início do século XIX, foi desenvolvida a primeira ponte suspensa, na Pensilvânia. A ponte Golden Gate, em São Francisco, EUA, é um ícone para este tipo de ponte. Esta ponte é sustentada por tirantes de suspensão ou cabos. Os cabos principais partem de uma torre

a outra formando uma parábola. Dos cabos principais partem os cabos de sustentação da plataforma, que são verticais e espaçados igualmente.

As duas torres da ponte Golden Gate tem altura de 227 metros e estão distantes 1280 metros entre si. O ponto médio do cabo principal que liga estas duas torres tangencia o piso da ponte. Determine a altura de um cabo de sustentação situado a 500 metros do centro da ponte, ver Figura (3.37).

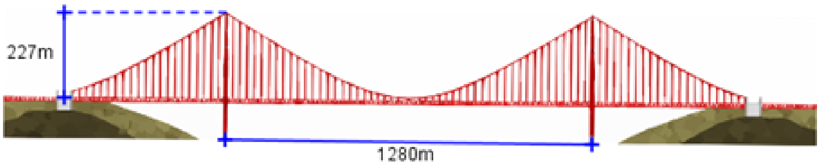


Figura 3.37: Ilustração das medidas da ponte Golden Gate - Fonte: o autor.

3.3 Avaliação

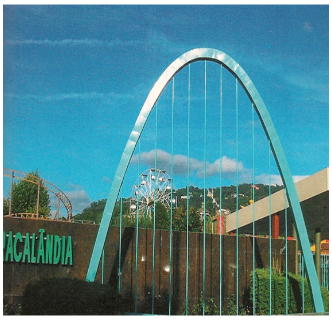
Nesta seção, sugerimos algumas questões que o professor pode utilizar em sua avaliação, visando identificar a relação entre os subsunçores ou conceitos prévios com as novas informações apresentadas na sequência didática. A proposta leva em conta a identificação, a nomeação e a relação entre as propriedades geométricas e algébricas das Cônicas, bem como a relação das transformações sofridas pelo gráfico das Cônicas com a variação do valor dos parâmetros das expressões algébricas.

Objetivos: Verificar através das questões propostas a compreensão do conteúdo de Cônicas e identificar a aquisição de significados deste conteúdo.

Material didático: Prova escrita.

Duração: 02 aulas de 45 minutos.

1. Observe as figuras:



(a) Bracalândia: Parque de diversões em Penafiel, Portugal

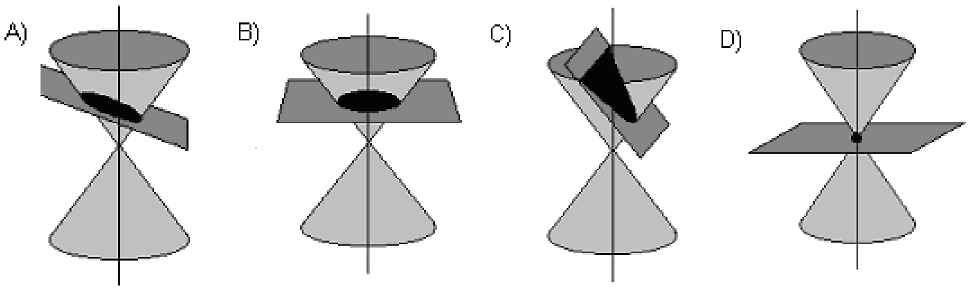
(b) Reservatório na Dinamarca.

(c) Estádio Beira Rio no Rio Grande do Sul.

Com base na sua forma, como você classificaria cada superfície? Ela é limitada? Aberta ou fechada? É plana?

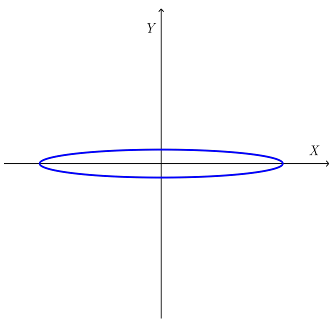
Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno seja capaz de associar as Cônicas a objetos do mundo real, nomear corretamente cada cônica e dissertar sobre suas propriedades geométricas.

2. Considerando a maneira como as seções Cônicas são obtidas pela interseção de um plano e uma superfície de um cone circular duplo, qual das seguintes figuras representa a obtenção de uma elipse.

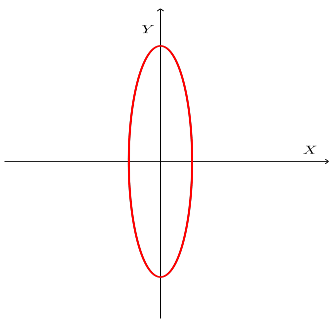


Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno associe a maneira que um plano corta um cone circular duplo, com a seção cônica obtida.

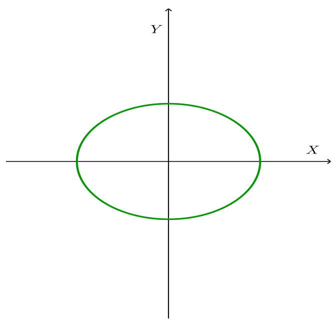
3. Observe os esboços das elipses. Mesmo sem as medidas, é possível associá-las a uma equação. Analise a forma e a posição de cada elipse e associe a uma equação.



(d) Elipse 1



(e) Elipse 2.



(f) Elipse 3.

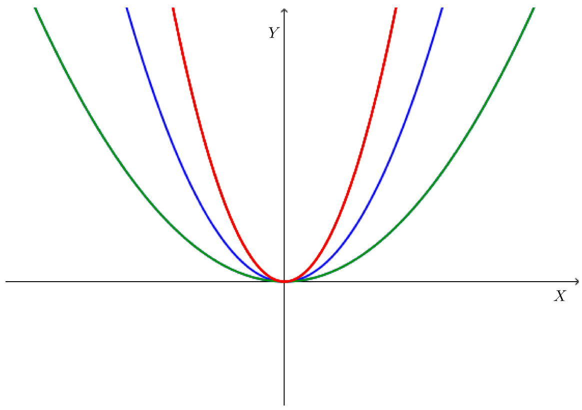
I - $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{100} = 1$

II - $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{9} = 1$

III - $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno estabeleça a relação das transformações sofridas pelo gráfico da Elipse (distância entre os focos) com a variação do valor dos parâmetros das expressões algébricas.

4. Considere as parábolas de equações do tipo $x^2 = 4cy$, com $c > 0$.



a) Como a constante c determina a abertura da parábola?

b) Variando c, o que acontece com o parâmetro p da parábola?

Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno relacione as transformações sofridas pelo gráfico da parábola (abertura da parábola) com modificações no parâmetro de sua expressão algébrica.

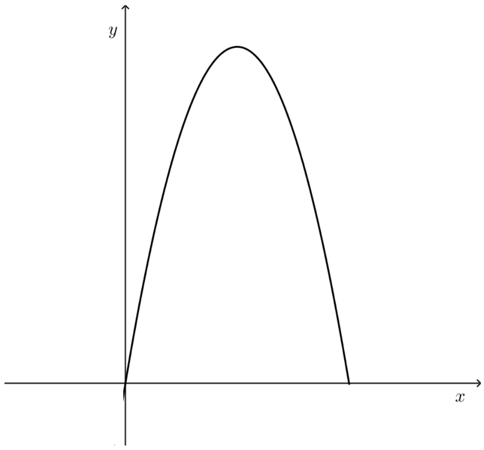
5. Relacione, colocando a letra que considera correta nos parênteses:

(A) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$.
(B) $(x-3)^2 = -16(y+1)$.
(C) $\frac{(x+2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.
(D) $(y-3)^2 = 16(x+1)$.

( ) Parábola com eixo focal paralelo ao eixo OX.
( ) Parábola com vértice (-1,3).
( ) Elipse com eixo focal paralelo ao eixo OX.
( ) Parábola com foco (3,-5).
( ) Elipse com eixo focal paralelo ao eixo OY.
( ) Elipse com centro (2,3).

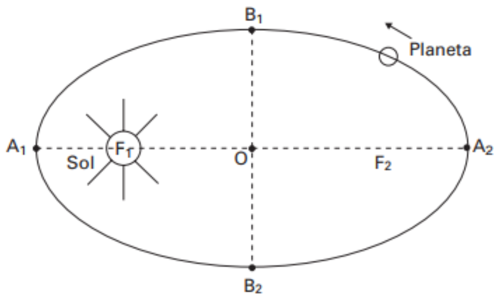
Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno seja capaz de identificar elementos notáveis das Cônicas a partir das suas equações.

6. Uma empresa de armamentos bélicos realizará testes sobre um novo tipo de míssil que está sendo fabricado. A empresa pretende determinar a altura máxima que o míssil atinge após o lançamento e qual seu alcance máximo. Sabe-se que a trajetória descrita pelo míssil é uma parábola representada pela função $y = -x^2 + 6x$, onde y é a altura atingida pelo míssil (em quilômetros) e x é o alcance (também em quilômetros). Quais serão os valores encontrados pela empresa?



Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno seja capaz de utilizar seus conhecimentos sobre parábola - a ideia de altura máxima e alcance máximo no lançamento de projéteis - para lidar com uma situação problema nova.

7. (UFMT) A 1ª lei de Kepler estabelece que qualquer planeta gira em torno do Sol, descrevendo uma órbita elíptica, da qual o Sol ocupa um dos focos.



Admitindo que O se encontra na origem do plano cartesiano e que o eixo focal está sobre o eixo x, julgue os itens.

( ) A soma da distância do centro do planeta ao centro do Sol com a distância do centro do planeta a F_2 é igual à distância de A_1 e A_2;

( ) A distância de A_1 a O é igual à distância do centro do Sol a B_1;

( ) Sendo a e b os semi-eixos maior e menor da elipse, respectivamente, sua equação é dada por $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno associe a elipse ao movimento planetário e utilize sua compreensão de definição, gráfico e equação da elipse para resolver o problema.

8. Em cada ítem a seguir faça um esboço da cônica indicada.

(a) Parábola de foco $F = (3,7)$ e diretriz $d = 1$;

(b) Elipse de centro $C = (4,6)$, eixo menor paralelo ao eixo OY, medindo 8 unidades, e foco $F_1 = (1,6)$;

(c) Hipérbole de focos $F_1 = (3,-4)$ e $F_2 = (3,4)$ e cujo eixo real mede 6 unidades.

Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno seja capaz de esboçar no plano cartesiano as Cônicas indicadas.

9. Indique qual das seguintes opções, nos diz como obter a parábola apartir da intersecção de um plano com uma superfície de um cone duplo.

   a) É obtida quando o plano corta a superfície cônica em um dos cones e este corte é perpendicular ao seu eixo;

   b) É obtida quando o plano corta a superfície cônica em um dos cones e este corte é oblíquo a geratriz e ao eixo deste cone;

   c) É obtida quando o plano corta a superfície cônica em um dos cones e este corte é paralelo a sua geratriz;

   d) É obtida quando o plano corta a superfície cônica na altura do vértice dos dois cones e este corte é perpendicular ao eixo dos cones.

   Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno determine a maneira que um plano corta um cone circular duplo para se obter uma parábola.

10. Se as coordenadas dos pontos notáveis de uma elipse são: centro $C = (2,3)$, foco $F = (2,6)$ e vértice $V = (2,8)$, então o comprimento do eixo menor mede:

    a) $10u$

    b) $4u$

    c) $5u$

    d) $8u$

    Observação: Nessa questão, espera-se que apartir de alguns pontos notáveis da elipse, o aluno consiga calcular o comprimento do seu eixo menor.

11. É o lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância a uma dada reta é igual à distância a um ponto fixo:

    a) Elipse

    b) Hipérbole

    c) Parábola

    d) Cirfunferência

    Observação: Nessa questão, espera-se que o aluno reconheça a definição de parábola.

Capítulo 4

Resultados

4.1 Análise do Livro Didático

O livro didático é um importante material de auxílio ao professor e objeto de estudo para o estudante. Em muitos casos, esse instrumento é deixado de lado por diversos motivos, tais como: poucos exercícios, conteúdo pouco explorado e exercícios sem aplicação prática. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, [5]) recomendam que o professor utilize, além do livro didático, materiais diversificados (jornais, revistas, computadores, filmes, etc), como fonte de informação, de forma a ampliar o tratamento dado aos conteúdos e fazer com que o aluno sinta-se inserido no mundo à sua volta.

No entanto, a realidade da maioria das escolas, principalmente as públicas, mostra que o livro didático tem sido praticamente o único instrumento de apoio ao professor e que se constitui numa importante fonte de estudo e pesquisa para os estudantes. Desta forma, o professor deve ter uma atenção especial quanto a sua escolha e utilização em sala de aula.

Em sua dissertação de mestrado Oliveira ([28]), com o objetivo de melhor entender os livros didáticos e verificar o tratamento dado ao estudo das Cônicas, analisou cinco livros do 3° ano do Ensino Médio. A análise foi baseada nos seguintes questionamentos:

- Q1 O autor, ao iniciar o conteúdo, relata algum fato histórico com alguma atividade que venha a despertar no estudante um interesse sobre o tema?
- Q2 Há uma preocupação em aplicar essa introdução no decorrer do conteúdo?
- Q3 O tratamento dado à identificação de uma cônica é só algébrico?
- Q4 O autor propõe atividades explorando a forma geométrica de uma cônica?
- Q5 São apresentadas situações reais e cotidianas para o estudo de uma cônica?
- Q6 Figuras são exploradas para a identificação de uma cônica?
- Q7 São feitas revisões de conteúdos necessários ao estudo de uma cônica?

Q8 No estudo das Cônicas, o autor faz alguma conexão com outros tópicos de Matemática já estudados?

Q9 Nos exercícios, são apresentadas situações contextualizadas com o cotidiano?

Q10 O autor propõe atividades que exploram geometricamente o reconhecimento de uma cônica?

Q11 O autor propõe a utilização de recurso tecnológico como instrumento de aprendizagem para o estudante?

Tomando como base esses questionamentos foi feita a análise do Livro Didático da turma objeto de nossa pesquisa: Novo olhar matemática, volume 3 / Joamir Roberto de Souza - 2. ed. - São Paulo FTD, 2013. Para estes questionamentos, nota-se as seguintes respostas.

Questões	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
Respostas	SIM	SIM	NÃO	NÃO	SIM	NÃO	NÃO	SIM	SIM	NÃO	NÃO

Tabela 4.1: Respostas das questões.

Na Tabela 4.1, as respostas “sim” foram dadas quando verificamos que o autor atende às questões levantadas em todo conteúdo sobre Cônicas.

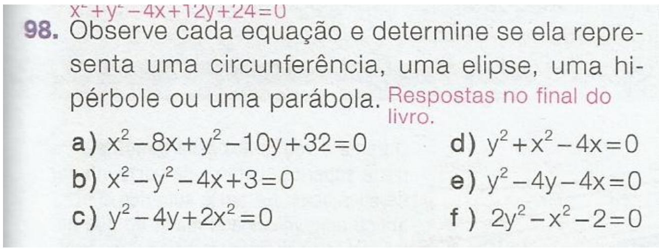
No início do capítulo, o autor menciona fatos históricos citando a importante contribuição de Apolônio quanto ao que “em sua obra mais famosa, Seções Cônicas, estuda detalhadamente essas curvas, superando os tratados escritos anteriormente relacionados a esse assunto” p. 203. Na mesma página, o autor fala sobre as órbitas dos planetas que Kepler deduziu sobre suas formas elípticas, **Q1**.

O autor, no estudo específico de cada cônica, retoma a contribuição de Apolônio, especificando a posição do plano para obter determinada seção cônica, e passa a explorar a construção das Cônicas, com o objetivo de especificar seus elementos e a definição da curva como um lugar geométrico, **Q2** e **Q3**. As construções propostas são com objetos concretos, por exemplo, “para construir uma elipse, marcamos dois pontos sobre uma folha de papel (F1 e F2) e fixamos nesses pontos as extremidades de um barbante. Com um lápis na posição indicada, traçamos a curva contínua, de maneira que o barbante permaneça constantemente esticado” p. 203. Entretanto, essas construções não são exploradas nas atividades propostas pelo autor, **Q4**.

Não são feitas revisões de conteúdos já estudados, **Q7**.

Nas atividades, o autor apresenta exercícios com aplicação direta do conteúdo estudado com poucos problemas contextualizados com situações reais e cotidianas, **Q5** e **Q9**. No estudo da elipse, encontramos uma atividade sobre a órbita do cometa Halley, p. 209; no estudo da hipérbole, o autor propõe uma atividade sobre o sistema LORAN de navegação hiperbólica, p. 217; e no estudo da parábola, é proposto um problema sobre o lançamento de uma bola de golfe, p. 223.

No texto, não há a exploração de figuras para a identificação de uma cônica e não são propostas atividades que exploram geometricamente o reconhecimento de uma cônica, as figuras apresentadas pelo autor são utilizadas apenas como ilustração, **Q6** e **Q10**. Algumas questões propostas exploram algebricamente o reconhecimento de uma cônica, dando ênfase à análise da equação do segundo grau em x e y, por exemplo, o exercício 98 da página 227, Figura 4.1.



98. Observe cada equação e determine se ela representa uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Respostas no final do livro.

a) $x^2-8x+y^2-10y+32=0$

b) $x^2-y^2-4x+3=0$

c) $y^2-4y+2x^2=0$

d) $y^2+x^2-4x=0$

e) $y^2-4y-4x=0$

f) $2y^2-x^2-2=0$

Figura 4.1: Questão 98 - Fonte: Souza, [34], p. 227.

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNEM.

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o estudante poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução de problemas. (BRASIL, [7], p. 123).

No final do livro, nas "Orientações Didáticas para o Professor", o autor destaca a importância da utilização de recurso tecnológico como instrumento de aprendizagem para o estudante.

> "Pelo seu caráter lógico-matemático, o computador se torna um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos. [...] O uso de programas de computador específicos pode proporcionar uma análise diferente do que seria observado em uma folha de papel, contribuindo assim para a formação de conceitos. Eles podem ser utilizados, por exemplo, no ensino de geometria, na construção de tabelas dinâmicas em planilhas eletrônicas, no estudo de funções, entre outros". p. 29.

Contudo, no conteúdo de Cônicas, não é proposta nenhuma atividade com a utilização de recurso tecnológico como instrumento de aprendizagem para o estudante, **Q11**.

Nesta análise, foi possível perceber que de modo geral o enfoque sobre o estudo das Cônicas, dado pelo autor, é algébrico, com uma forte tendência às equações das curvas. Apesar de ser trabalhada a construção das Cônicas, a visualização, o reconhecimento geométrico das mesmas e a exploração de propriedades geométricas, como a simetria, por exemplo, têm pouco destaque na abordagem do conteúdo.

Quanto às atividades, como o conteúdo de Cônicas, têm aplicação em diversas áreas do conhecimento. O autor poderia lançar mão de exercícios e problemas que envolvam contextualização, interdisciplinaridade e integração entre os temas matemáticos. Também, poderia propor algumas atividades usando algum software de geometria dinâmica, pois quando se faz uma contínua referência ao gráfico juntamente com a equação, no estudo da variação de parâmetros da equação, por exemplo, isso traz um melhor entendimento das figuras e suas equações, ou seja, o aluno perceberá melhor a interação da Álgebra com a Geometria.

4.2 Aplicação da Sequência Didática

Nossa pesquisa foi desenvolvida com uma turma de 3° ano do Ensino Médio da Escola Estadual Médio Professor Antônio Pedro de Aguiar, Município de Orobó - Pernambuco, no período matutino, de Maio a Julho de 2017. O objetivo principal da proposta foi implementar uma sequência de atividades que favorecessem o ensino e a aprendizagem significativa das Cônicas.

1º. Momento: Avaliação dos Conhecimentos Prévios e apresentação do tema.

Inicialmente, a fim de obter as informações sobre os conhecimentos prévios dos alunos, foram entregues alguns objetos concretos, tais como, recipientes de perfume de bases Cônicas, além da apresentação em slides de imagens do cotidiano em que as Cônicas aparecem. Após a manipulação dos objetos concretos e a visualização das imagens, através de questões qualitativas, os alunos foram instigados a classificarem as Cônicas com base na sua representação geométrica, usando linguagem própria. Ainda foram questionados quanto às propriedades específicas de cada cônica, se é limitada, se determinada cônica é "aberta" ou "fechada", se é simétrica, se é plana e onde a encontramos em nossa sociedade, em que áreas do conhecimento elas costumam aparecer. Alguns nomes usados para classificar as Cônicas foram: "oval", "ovo", "óculos" e "maçaneta" para elipse; "arco-íris", "quebra-molas" e "montanha" para parábola; "tronco de árvore" para hipérbole (Ver Figura 4.2), mostrando como os alunos relacionam o tema ao que eles já conhecem e propiciando ao professor a certeza de que os pressupostos para o ensino das Cônicas estavam assegurados.

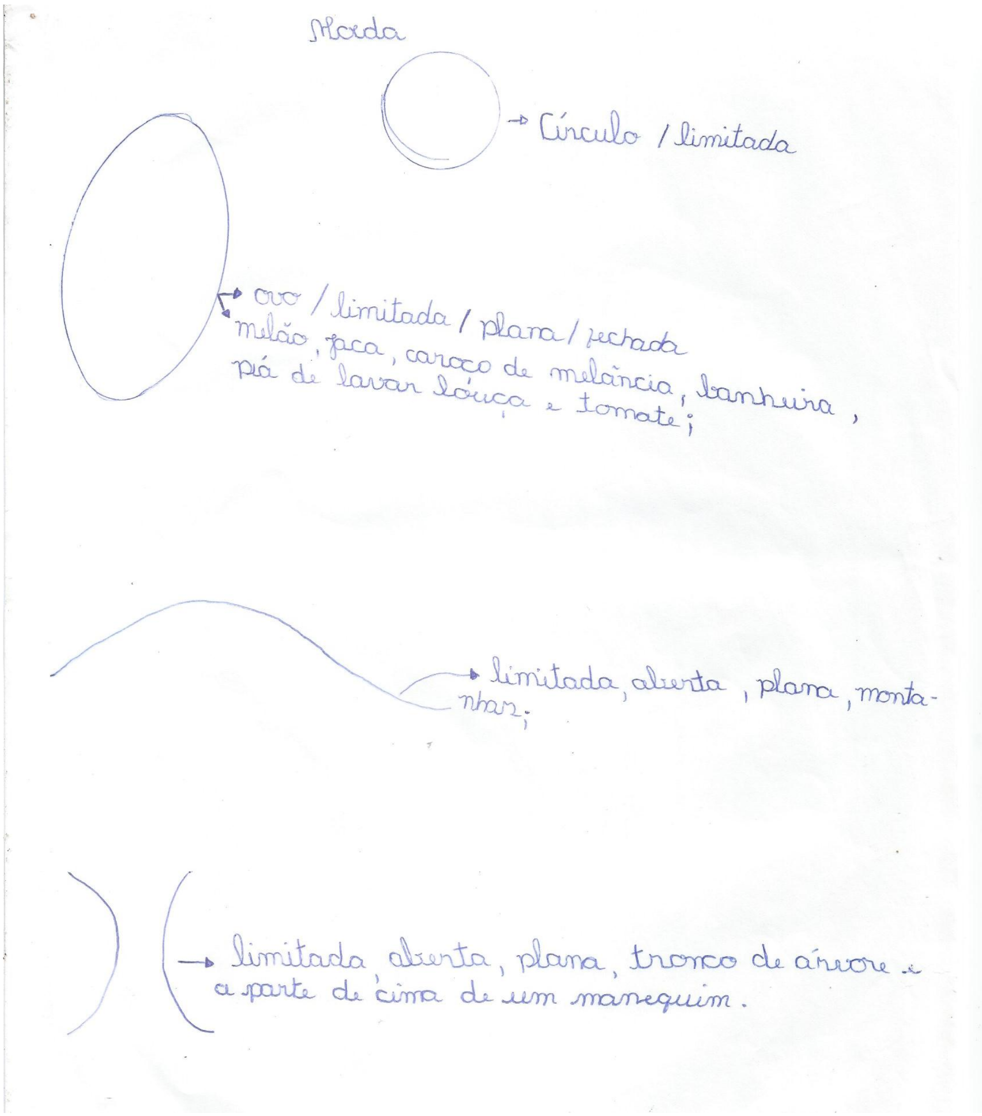
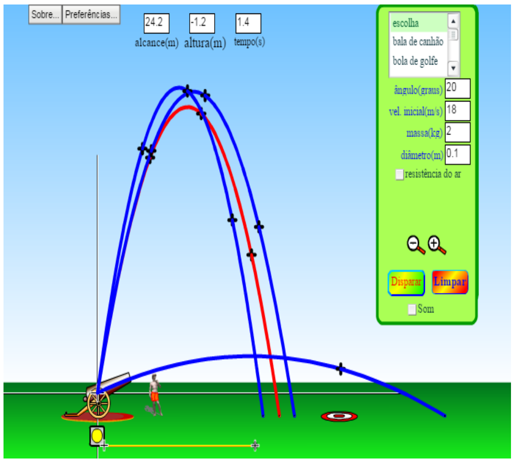


Figura 4.2: Registro do aluno A.

Em seguida, com o auxílio do software GeoGebra 3D, mostramos dinamicamente o movimento de um plano seccionando a superfície de um cone duplo circular, obtendo elipses, parábolas e hipérboles como seções, enfatizando a posição do plano de corte para obter cada cônica. A fim de conquistar a atenção e o empenho dos alunos para estudar o conteúdo de Cônicas, foram apresentadas algumas aplicações das Cônicas na arquitetura, medicina, engenharia, etc. Ainda foi apresentado um vídeo de uma sinuca de bilhar no formato de elipse para ilustrar a propriedade de reflexão da elipse (Figura 4.3(a)) e foi explorado o joguinho lançamento de projéteis (Figura 4.3(b)) que simulava o lançamento de objetos como bala de canhão e bola de golfe dados velocidade e ângulo de lançamento. A trajetória dos objetos lançados é parabólica quando desprezamos a resistência do ar. Com este joguinho, uma das coisas que exploramos foi a discussão sobre qual o ângulo de lançamento para obter o alcance máximo, considerando que o canhão lançava os objetos sempre com mesma velocidade. Os alunos perceberam a importância do conteúdo e ficaram empolgados para a sequência das atividades.

(a) Sinuca de bilhar elíptica - Fonte: Print Screen de [40].



(b) Joguinho lançamento de projéteis - Fonte: [39].

Figura 4.3: Algumas atividades do 1º. Momento.

2º. Momento: Investigação Geométrica das Cônicas.

As atividades desta etapa foram elaboradas com a intenção de provocar uma diferenciação progressiva no cognitivo dos alunos, sendo este um dos aspectos fundamentais da aprendizagem significativa de Ausubel, que como vimos, tem como ideia principal focar os conceitos, as proposições mais gerais e inclusivas dos conteúdos apresentados no início do ensino. No nosso caso, usando o GeoGebra como organizador prévio, foi feita uma apresentação geral das Cônicas, procurando progressivamente, diferenciar, ao longo do processo, em termos de detalhes e especificidades, ou seja, detalhando propriedades geométricas, definição e os elementos de cada cônica.

Nas Figuras 4.4, 4.5(b), e 4.6(b), apresentamos registros das respostas de alguns alunos, as propriedades observadas por eles e como eles definem cada cônica de acordo com a atividade trabalhada.

Questionamentos:

1. O que podemos afirmar sobre o triângulo APF?
isósceles
2. O que podemos afirmar sobre os lados AP e FP do triângulo APE?
2 lados iguais.
3. Mova o ponto A sobre a reta d e responda novamente as duas perguntas anteriores.
isósceles e continua com os 2 lados iguais
4. De acordo com as conclusões anteriores e observando na Janela de Álgebra os valores de d_1 e d_2 (comprimentos de AP e FP, respectivamente) o que podemos concluir sobre a distância do ponto P ao ponto A e ao ponto F?
É a mesma distância.
5. O que podemos dizer sobre as distâncias de P ao ponto F e à reta d?
É a mesma distância.
6. Habilite o rastro do ponto P e mova o ponto A sobre a reta d. Como você descreve a figura formada?
Montanha.
7. De acordo com as conclusões obtidas como poderíamos definir a figura formada? É um conjunto de pontos, e cada ponto é a mesma distância entre F e A/F e D.

Figura 4.4: Investigação geométrica da Parábola - Registro do aluno B.

1) O que podemos concluir sobre o ponto E, pertencente a mediatriz de PF_2, em relação aos pontos P e F_2?

2) No campo de entrada digite o comando $d = d_1 + d_2$. Na janela de Álgebra observe os valores de d_1, d_2(medida dos segmentos EF_1 e EF_2, respectivamente) e o valor de d (soma das medidas desses segmentos). Agora, Mova o ponto P sobre a circunferência e observe o que acontece com esses três valores. Que conclusãopodemos tirar?

3) Habilite o rastro do ponto E, e mova o ponto P, fazendo-o percorrer a circunferência. Como você descreve a figura formada?

4) O que acontece com a figura formada quando:
a) Aproximamos F_1 de F_2 (sem fazer concidirem) e fazemos o ponto P percorrera circunferêmcia;
b) Aproximamos F_1 de F_2, de modo que coincidam, e fazemos o ponto P percorrera circunferêmcia;
c) Afastamos F_2 de F_1, de modo que F_2 pertença a circunferência, e fazemos oponto P percorrer a circunferêmcia.

5) De acordo com as conclusões obtidas como poderíamos definir a figura formada?

(a) Questionamentos

01- O Ponto P e F_2 tem a mesmo distância

02- d_1 e d_2 mudam de valores mais sempre somando os dois vão dar o mesmo valor, que é o d.

03- uma figura oval

04- a) aumentou e formou um circulo

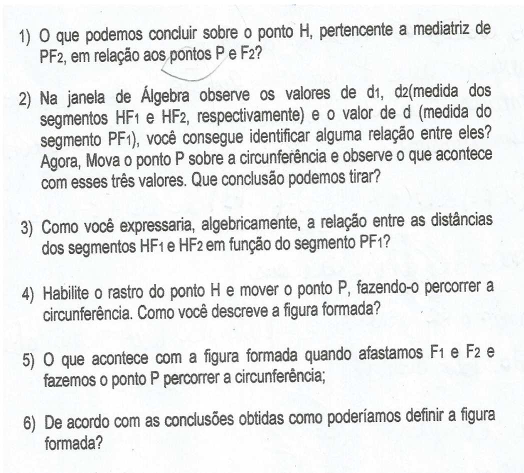
~~05~~ b) Formou um circulo

c) Ela vai diminuindo mais e ficou mais alertada

05- É o conjunto dos pontos que a soma das distâncias desse ponto a F_1 e F_2 é a mesma.

(b) Respostas

Figura 4.5: Investigação geométrica da Elipse - Registro do aluno C



1) O que podemos concluir sobre o ponto H, pertencente a mediatriz de PF_2, em relação aos pontos P e F_2?

2) Na janela de Álgebra observe os valores de d_1, d_2(medida dos segmentos HF_1 e HF_2, respectivamente) e o valor de d (medida do segmento PF_1), você consegue identificar alguma relação entre eles? Agora, Mova o ponto P sobre a circunferência e observe o que acontece com esses três valores. Que conclusão podemos tirar?

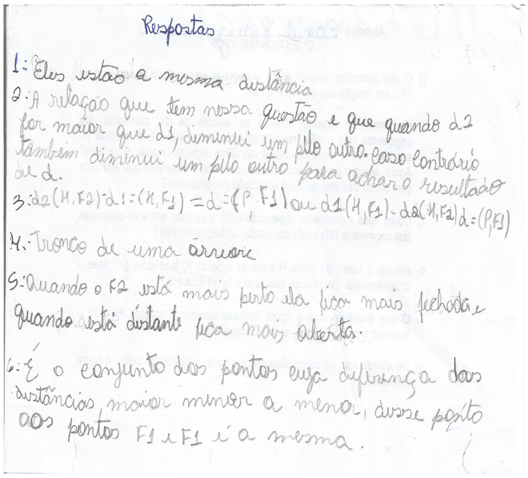
3) Como você expressaria, algebricamente, a relação entre as distâncias dos segmentos HF_1 e HF_2 em função do segmento PF_1?

4) Habilite o rastro do ponto H e mover o ponto P, fazendo-o percorrer a circunferência. Como você descreve a figura formada?

5) O que acontece com a figura formada quando afastamos F_1 e F_2 e fazemos o ponto P percorrer a circunferência;

6) De acordo com as conclusões obtidas como poderíamos definir a figura formada?

(a) Questionamentos



Respostas

1: Eles estão a mesma distância

2: A relação que tem nessa questão é que quando d2 for maior que d1, diminui um pelo outro. Caso contrário também diminui um pelo outro para achar o resultado de d.

3: d2(H,F2)-d1=(H,F1)=d=(P,F1) ou d1(H,F1)-d2(H,F2) d=(P,F1)

4: Tronco de uma árvore

5: Quando o F2 está mais perto ela fica mais fechada e quando está distante fica mais aberta.

6: É o conjunto dos pontos cuja diferença das distâncias maior menor a menor, desse ponto aos pontos F1 e F1 é a mesma.

(b) Respostas

Figura 4.6: Investigação geométrica da Hipérbole - Registro do aluno D

Após a exploração das construções das Cônicas no GeoGebra, passamos para a formalização do conteúdo, destacando a nomenclatura usual dada a cada Cônica (Parábola, Elipe e Hipérbole), a definição e os principais elementos de cada cônica.

3º. Momento: Investigação Algébrica das Cônicas.

Nesta etapa, continuamos diferenciando progressivamente o conteúdo, caracterizamos as Cônicas como lugar geométrico dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem determinadas propriedades e condições algébricas. Ou seja, buscamos articular o conhecimento entre a álgebra e a geometria.

Contudo, notou-se a necessidade de inicialmente fazermos uma revisão sobre distância entre dois pontos, plano cartesiano e translação no plano cartesiano, conceitos que serviriam de subsunçores para a sequência de atividades desta etapa.

Destacamos também, que na Teoria ausubeliana, uma aula de revisão pode ser vista como organizador prévio e sua aplicação depende essencialmente das etapas de avaliação observadas pelo professor.

As aulas nesta etapa foram expositivas e dialogadas tomando os cuidados elencados por Kiefer e Pilatti

> "Em relação à aula expositiva, os cuidados a serem tomados devem ter como orientação a satisfação, por parte dos alunos, dos pré-requisitos necessários para a aprendizagem significativa do conteúdo; a preparação da preleção em consonância com os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa; o trabalho dos conteúdos, observando-se o que o aluno sabe e de que forma será significativo para ele (conteúdos vinculados à sua realidade); e o cuidado com fatores relativos à manutenção da atenção do aluno e à habilidade do professor em se comunicar adequadamente". (KIEFER & PILATTI, [14], p. 10)

A Figura 4.7 mostra os cálculos de um dos alunos para obter a equação canônica da Parábola com vértice na origem e foco sobre o eixo OX à esquerda da diretriz.

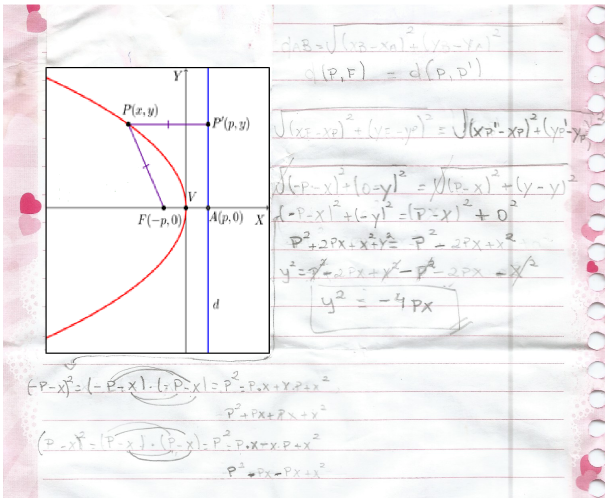


Figura 4.7: Investigação Algébrica da Parábola - Registro do aluno E.

4º. Momento: Reconciliação Integrativa.

Nesta etapa, trabalhamos a sequência de atividades a partir de problemas e atividades contextualizadas (ver Seção 3.2.8), retomando os conceitos já subsumidos, promovendo novos significados para os conteúdos e fazendo relações entre as ideias.

Como vimos na Seção 4.1, o livro didático adotado pela escola dispõe de poucos exercícios contextualizados e de aplicações sobre Cônicas. Desta forma, os problemas propostos neste momento constituíram-se como um bom suplemento ao livro didático para trabalhar o conteúdo de Cônicas.

Constatou-se, a partir da observação, que a contextualização do conteúdo relacionando com a realidade ou cotidiano dos alunos estimulou a participação ativa dos alunos, favorecendo a compreensão e consequentemente a aprendizagem significativa das Cônicas.

5º. Momento: Avaliação.

Este momento foi dedicado à aplicação de uma avaliação somativa (ver Seção 3.3), com predomínio de questões que exploram conceitos qualitativos das Cônicas. No dia da avaliação compareceram 20 alunos, o desempenho desses alunos pode ser acompanhado na Tabela 4.2.

Questão	Competência/Habilidade	Porcentagem
1	Associar as Cônicas a objetos do mundo real e dissertar sobre suas propriedades geométricas	85%
2	Dada a maneira que um plano corta um cone circular duplo (ilustração), determinar a cônica obtida	80%
3	Associar equações de elipses a seus gráficos	75%
4	Relacionar as transformações sofridas pelo gráfico da parábola com modificações no parâmetro de sua expressão algébrica	90%
5	Identificar elementos notáveis das Cônicas a partir das suas equações	85%
6	Utilizar a ideia de altura máxima e alcance máximo no lançamento de projéteis para resolver um problema	65%
7	Associar a elipse ao movimento planetário e resolver problema envolvendo definição, gráfico e equação da elipse	80%
8	Esboçar Cônicas no plano cartesino	70%
9	Determinar a maneira que um plano corta um cone circular duplo para se obter determinada cônica	75%
10	Conhecidos alguns pontos notáveis da elipse calcular o comprimento do eixo menor	70%
11	Reconhecer a definição de determinada cônica	100%

Tabela 4.2: Percentual de acerto em cada questão.

Após análise dos resultados, podemos concluir que os objetivos foram alcançados, pois os alunos são capazes de se posicionar sobre o conteúdo, relacionando, de acordo com os dados coletados, os conceitos e as propriedades gerais das Cônicas com seus atributos. Percebe-se, entretanto, que em questões que exigiam cálculos algébricos, como, na questão 10, cuja solução dependia da aplicação do Teorema de Pitágoras para obter o comprimento do eixo menor da elipse, e na questão 6, na qual o aluno poderia usar o método de completar quadrado para transformar a equação do 2º. grau dada na equação canônica da Parábola para solucionar o problema, os alunos tiveram menor rendimento, o que aponta à necessidade de uma melhora nesse sentido.

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho trata da construção de conceitos de Matemática, em particular sobre o ensino das Cônicas. A fundamentação teórica baseou-se na Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, cujos princípios apontam para a valorização dos conhecimentos prévios dos alunos para resultar em aprendizagem significativa.

A pesquisa sugere que a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel, Novak e Gowin potencializa o ensino por recepção. Logo, como no ensino de Matemática o material de aprendizagem é apresentado comumente de forma receptiva, a apreensão de conhecimentos matemáticos pode ser favorecida quando o professor pauta seu trabalho à luz da teoria ausubeliana.

A experiência vivenciada durante a realização da prática permitiu refletir sobre o significado e a importância do planejamento quanto aos recursos a serem utilizados, a forma que se vai ser exposto e trabalhado o conteúdo em sala de aula, pois o aluno precisa ter acesso aos conhecimentos compreendendo a sua essência, daí a necessidade de se buscar novas metodologias de ensino que proporcionem um aprendizado significativo.

Observou-se, através da prática, que essa metodologia favorece a concentração dos alunos, sua participação, seu envolvimento, sua criatividade; a possibilidade de argumentação, o levantamento de hipóteses, a reflexão, a oportunidade de estarem mais preparados para resolver os problemas do cotidiano.

A proposta elaborada neste projeto não é única e imutável, sendo apenas uma sugestão de atividades a serem desenvolvidas como forma de trabalhar com um método diferente durante as aulas de Matemática. Espera-se que esta proposta de sequência didática seja capaz de proporcionar melhorias significativas no processo de ensino-aprendizagem das Cônicas, dando condições ao estudante para participar na construção de seu próprio conhecimento, possibilitando-lhe uma melhor aquisição de conhecimentos, competências e habilidades sobre o conteúdo de Cônicas e o professor de tornar sua aula mais dinâmica e atraente.

Referências Bibliográficas

[1] ADHIKAI, K. *Ausubel's learning Theory: Implications on Mathematics Teaching*. Disponível em "http://www.academia.edu/4103526/". Acesso em 31 de maio de 2017.

[2] AUSUBEL, D. P. *Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva*. Trdução de Lígia Teopisto. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000.

[3] BALTAZAR, B. B. *Análise de erros comuns em álgebra*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2012.

[4] BOTAS, D.; MOREIRA, D. *A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática - Um estudo no 1º Ciclo*. Revista Portuguesa de Educação, 2013, 26(1), pp. 253-286. Disponível em "http://www.scielo.mec.pt/pdf/rpe/v26n1/v26n1a10.pdf". Acesso em 15 de abril de 2017.

[5] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental: Introdução*. Brasília: MEC, 1998.

[6] BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Médio*. Brasília: MEC, 2000.

[7] BRASIL. *Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEF, 2002.

[8] CASTOLDI, R.; POLINARSKI, C. A. *A Utilização de Recursos Didático-Pedagógicos na Motivação da Aprendizagem*. I Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2009.

[9] CORREIA, M. C. L. F. *Diferentes Abordagens ao Estudo das Cónicas*. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2013.

[10] D'AMBROSIO, B. S.; *Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande Desafio*. Pro-Posições, V.04, n.1(10), março 1993, pp. 35-41.

[11] GIRALDO, V.; CAETANO, P.; MATTOS, F. *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[12] GOUVÊA, E. P; ODAGIMA, A. M; SHITSUKA, D. M.; SHITSUKA, R *Metodologias Ativas: uma experiência com Mapas conceituais*. REGS. ISSN 2179-9636. Ano 6, n 21. 2016.

[13] JESUS, A. G; NUNES, C; FERREIRA, A. C. *A motivação do aluno para aprender Matemática no 9º ano do Ensino Fundamental e o potencial dos materiais manipulativos*. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM. Recife, 2011.

[14] KIEFER, N. I. S.; PILATTI, L. A. *Roteiro para a elaboração de uma aula significativa*. R. B. E. C. T., vol 7, núm. 1, jan-abr.2014. Disponível em "https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/download/1648/1219". Acesso em 13 de Junho de 2017.

[15] LEMOS, E. S. *Aprendizagem Significativa: Estruturas Facilitadoras e Avaliação*. Aprendizgem significativa em Revista, V1(1), pp.25-35, 2011.

[16] LEMOS, E. S. *A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua Relação com o Ensino e com a Pesquisa sobre o Ensino*. Meaningful learning Review, V1(3), pp.47-52, 2011.

[17] MAMEDE, S.; PENAFORTE, J. (orgs) et al. *Aprendizagem baseada em problemas - anatomia de uma nova abordagem educacional*. Fortaleza: Hucitec, 2001.

[18] MASINI, E. F. S, MOREIRA, M. A. *Aprendizagem Significativa: A teoria de David Ausubel*. São Paulo: Moraes, 1982.

[19] MOREIRA, M. *Aprendizagem Significativa: Um conceito Subjacente*. Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo. Burgos, España. pp. 19-44, 1997. Disponível em "https://www.if.ufrgs.br/ moreira/apsigsubport.pdf". Acesso em 15 de abril de 2017.

[20] MOREIRA, M. *Teorias de aprendizagem*. 1. ed. ampl. São Paulo: EPU, 1999.

[21] MOREIRA, M. A. *A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em sala de aula*. Brasília: EUB, 2006.

[22] MOREIRA, M.A. *Organizadores Prévios e Aprendizagem Significativa*. Revista Chilena de Educación Científica. Vol. 7, Nº2, 2008, pp.23-30. Rev. 2012.

[23] MOREIRA, M. A. *Mapas Conceituais e Aprendizagem Significativa*. Instituto de Física - UFRGS. Porto Alegre - RS. Disponível em "https://www.if.ufrgs.br/ moreira/mapasport.pdf". Acesso em 15 de abril de 2017.

[24] MOREIRA, M. A. *O Que é Afinal Aprendizagem Significativa?*. Qurriculum, La Laguna, Espanha, 2012. Disponível em “moreira.if.ufrgs.br/oqueeafinal.pdf”. Acesso em 20 de maio de 2017.

[25] MOREIRA, M. *Unidades de Ensino Potencialmente Significativos*. Disponível em “http://moreira.if.ufrgs.br”. Acesso em 31 de maio de 2017.

[26] NETO, J. A. S. P. *Teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel: perguntas e respostas*. Série-Estudos. Campo Grande-MS, n. 21, p.117-130, jan./jun. 2006. Disponível em “http://www.serie-estudos.ucdb.br/index.php/serie-estudos/article/view/296/149 ”. Acesso em 10 de abril de 2017.

[27] NOVAK, J.D. e GOWIN, D.B. (1984). *Aprender a aprender*. Lisboa, Plátano Edições Técnicas. Tradução para o português de Carla Valadares, do original Learning how to learn.

[28] OLIVEIRA, A.L. *Objeto de Aprendizagem para Desenvolvimento de Habilidades de Visualização e Representação de Secções Cônicas: atividades para o Ensino Médio*. Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática (dissertação) - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

[29] SANTOS, A. R. *Contruções Concretas e Geometria Dinâmica : Abordagens Interligadas para o Estudo de Cônicas*. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) - Recife, 2004. Disponível em “http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/06/MC34908293791.pdf”. Acesso em 16 de Julho de 2017.

[30] SANTOS, J. C. F. *O desafio de promover a aprendizagem significativa*. Disponível em “http://www.ebah.com.br/content/ABAAABr4kAA/desafio-promover-a-aprendizagem-significativa-julio-cesar-santos ”. Acesso em 10 de abril de 2017.

[31] SANTOS, O. O.; LIMA, M. G. S. *O Processo de Ensino-Aprendizagem da Disciplina Matemática: Possibilidades e Limitações no Contexto Escolar*. X Simpósio de Produção Científica e IX Seminário de Iniciação Científica. Universidade Federal do Piau, 2010. Disponível em “https://pt.scribd.com/document/108107797/”. Acesso em 10 de maio de 2017.

[32] SILVA, R. P.; SILVA, T. L. K.; TEIXEIRA, F. G.; BARCIA, R. M. *Aprendizagem Significativa: Uma metodologia de Ensino para a Geometria Descritiva*. COBENGE, 2004.

[33] SILVA, S. C. R.; SCHIRLO, A. C. ; *Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel: Reflexões para o Ensino de Física ante a nova realidade social*. Imagens da Educação, Vol 4, n. 1, pp. 36-42. 2014.

[34] SOUZA, J. R. *Novo olhar matemática*, volume 3 - 2. ed. - São Paulo FTD, 2013.

[35] RIPPLINGER, T.; BRANCHER, V. R. *A Aprendizagem Significativa e o Ensino da Matemática: Algumas Reflexões*. Disponível em "http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matematica/". Acesso em 31 de maio de 2017.

[36] https://www.geogebra.org/m/WjnqGtTw

[37] http://www.lanacion.com.py/2016/05/04/los-terricolas-podran-ver-mercurio-pasar-delante-del-sol/. Acesso em 20 de junho de 2017.

[38] http://www.moreirajr.com.br/revistas.asp?fase=r003&id_materia=4487. Acesso em 20 de Maio de 2017.

[39] https://phet.colorado.edu/sims/projectile-motion/projectile-motion_pt_BR.html. Acesso em 10 de Maio de 2017.

[40] https://www.youtube.com/watch?v=NGiMw4dI8fk. Acesso em 10 de Maio de 2017.

[41] http://www.eciencia.usp.br/arquivoEC/exp_antigas/icaos.html. Acesso em 08 de Maio de 2017.

[42] http://nossaherciliolluz.com.br/grandes-pontes-penseis-pelo-mundo. Acesso em 10 de Maio de 2017.

[43] http://www.netcategory.net/coliseu-porto.html. Acesso em 10 de Maio de 2017.

[44] https://casaeconstrucao.org/comercio/fachadas-de-igrejas/. Acesso em 10 de Maio de 2017.