UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

CONCEITOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA NA RETA PARA BEM COMPREENDER OS NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO

Mireli Morais de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho

Campina Grande - PB
Agosto/2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

O48c Oliveira, Mireli Morais de.

Conceitos de análise matemática na reta para bem compreender os números reais no ensino médio / Mireli Morais de Oliveira. – Campina Grande, 2017.

90 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho".

Referências.

1. Números Reais. 2. Análise Real. 3. Livros Didáticos. I. Morais Filho, Daniel Cordeiro de. II. Título.

CDU 517:373.3(043)

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG

CONCEITOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA NA RETA PARA BEM COMPREENDER OS NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO

por

Mireli Morais de Oliveira †

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

†Bolsista CAPES

CONCEITOS DE ANÁLISE MATEMÁTICA NA RETA PARA BEM COMPREENDER OS NÚMEROS REAIS NO ENSINO MÉDIO

por

Mireli Morais de Oliveira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Prof. Dr.Tomás Edson Barros - UFSCar

Claudianor Oliveira Alves

Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG

Rodrigo Cohen Mota Nemer

Prof. Dr. Rodrigo Cohen Mota Nemer - UFCG

Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho - UFCG
Orientador

Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2017

Dedicatória

Aos meus pais, meus maiores educadores.

Agradecimentos

A Deus, por me abençoar a cada instante de minha vida, por me guiar a cada passo dado, por me dar disposição de levantar para percorrer cada viagem durante o curso e me proteger em cada uma delas. Agradeço-o por ser essencial em mim, como autor e fonte de sabedoria em minha vida.

Aos meus pais, por todo amor dedicado a mim, por todos os valores ensinados e por sempre me apoiarem a buscar meus sonhos. Obrigada por serem minha principal fonte de energia.

Aos meus irmãos, Romualdo Filho, Ronicleide e Ranielly, por todo carinho, compreensão, apoio e estimulo durante toda a minha caminhada.

A minha sobrinha Larissa, por me fazer querer ser cada dia um ser humano melhor.

Aos meus avós e demais familiares por todas as orações.

Ao professor e orientador Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho, por ter acreditado em mim, pela paciência e dedicação ao meu trabalho. Obrigada pela clara e produtiva orientação para que tudo saísse proveitoso e espetacular.

Agradeço aos meus amigos de perto, por sempre me ajudarem a desopilar quando eu precisava, por todo apoio e por entender os meus “nãos”.

Aos amigos de longe, por sempre torcerem por mim e transmitirem palavras de otimismo e saudade.

Aos amigos e colegas que o PROFMAT me proporcionou, aos do meu polo, por todos os momentos de aprendizado, inquietações e emoções compartilhados. E aos de outros polos, por todo apoio, disponibilidade e incentivo.

Aos meus colegas das escolas Batista Leite, Celso Mariz e Dr. José Gadelha, pelo apoio que nunca me negaram sempre que precisei. Em especial, agradeço aos professores Cristiano e Nilson, pelo cuidado em ler e sugerir melhorias ao meu trabalho.

Aos professores do PROFMAT, por todos os ensinamentos, em especial ao professor Bráulio Maia Júnior (In memoriam) por me mostrar que eu estava no caminho certo.

A banca examinadora, pela aceitação e disponibilidade em contribuir e participar na avaliação desse trabalho.

Agradeço à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Enfim, a todos que contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui, a minha gratidão!

Resumo

Percebemos que alguns conceitos relacionados aos números reais estudados pelos professores de matemática, enquanto discentes na universidade na disciplina de Análise Matemática, acabam se distanciando dos conceitos trazidos nos livros didáticos de ensino médio. Assim, o presente trabalho pretende estabelecer uma conexão entre as abordagens do estudo dos números reais na educação básica e na licenciatura em matemática. Nosso foco é o olhar do professor acerca desse assunto, como ajudá-los a ver que os números reais podem ser melhor entendidos utilizando conceitos da disciplina de Análise Matemática e que estes conceitos podem ajudá-lo a abordar o assunto em suas aulas. Para isso, analisaremos e descreveremos de que forma os números reais são tratados no ensino médio e na licenciatura. Em seguida discutiremos quais números reais podem ser marcados na reta real e desmistificaremos a impressão que os livros didáticos passam de que é possível marcar todos os números. Apresentaremos também uma definição de completude dos números reais que poderia ser dada em disciplinas de Análise Matemática nos cursos de Licenciatura, usando o Teorema dos Intervalos Encaixantes, tornando-a mais inteligível e próxima a conceitos usados no Ensino Médio. Esperamos, por meio desse trabalho, contribuir para que haja uma aproximação dos conteúdos estudados na disciplina de Análise com os conteúdos abordados nos livros de ensino médio, de modo a contribuir com a prática docente e tornar clara a importância de disciplinas como Análise Matemática para a formação de professores.
Palavras Chaves: Números Reais. Análise Real. Livros didáticos.

Abstract

We have realized that some concepts related to the real numbers studied by math teachers, when they were students at the university in the Mathematical Analysis discipline, end up distancing themselves from the concepts brought in high school textbooks. Thus, the present work intends to establish a connection between the real numbers study approaches in basic education and in mathematics degree course. Our focus is on teachers' look to this subject, how to help them see that real numbers can be better understood using concepts from the Mathematical Analysis discipline and that these concepts could help them to approach this subject in their classrooms. To do it, we will analyze and describe how real numbers are treated in high school and college. Next, we will discuss what real numbers can be marked on the real line so we can demystify the impression expressed by textbooks that it is possible to mark all of the numbers. We will also present a definition of completeness of real numbers that could be taught in Mathematical Analysis disciplines in mathematics degree courses, using the Nested Intervals Theorem, making it more intelligible and close to concepts used in High School. Through this work, We hope to contribute to the approximation of the contents studied in the discipline of Analysis with the contents addressed in high school textbooks, in order to contribute to the teaching practice and to make clear the importance of disciplines such as Mathematical Analysis for teachers training.
Keywords: Real numbers. Real Analysis. Didatic books.

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Relacionar conhecimentos matemáticos aprendidos nas universidades com os que serão ensinados na educação básica é uma tentativa de responder às inquietações que surgem relacionadas à necessidade de estudar certas disciplinas na licenciatura em matemática. É uma maneira de aproximar conceitos que tratam um mesmo objeto matemático, mas que são abordados no ensino superior e no ensino básico de modo, às vezes, totalmente distintos.

Sentimos que, de maneira geral, os licenciandos, ao se deparar com a disciplina de Análise Matemática, não conseguem perceber uma relação entre a disciplina estudada e sua preparação para atuar como professor na educação básica, e chegam a achar a disciplina desnecessária na sua formação, como confirmam Bolognezi (2006) e Gomes (2013) em suas pesquisas.

Bolognezi, em [7], investiga a contribuição da disciplina de Análise Matemática na formação de professores que atuarão na educação básica, mediante o estudo de uma proposta curricular de um curso de Matemática (licenciatura ou bacharelado) de uma universidade pública do Paraná. Por meio de questionários com alunos e professores desse curso e com professores da rede básica de ensino, a autora conclui que a disciplina de Análise Matemática, pouco ou nada tem contribuído para o aluno da licenciatura em matemática no desempenho da sua futura docência. E, ressalta ainda, que essa disciplina favorece mais a formação do bacharel do que a formação do licenciado em Matemática.

Nessa mesma linha, Gomes, em [17], investiga como licenciandos e professores de matemática da educação básica veem a disciplina de Análise Matemática. O autor chega a conclusões que percorrem dois caminhos que seguem paralelos: a disciplina de Análise Matemática não é significativa para o professor de matemática, mas, ao mesmo tempo, proporciona ao licenciando/licenciado uma visão profunda e indispensável do que é abordado na educação básica. Uma das discentes entrevistada na pesquisa feita em [17], afirma que existe algo na disciplina que é útil para o professor da educação básica, mas aponta que não percebeu de modo enfático, em seu curso de licenciatura, quais as relações que se estabelecem entre a disciplina de Análise e a educação básica, o que fez com que essas relações ficassem obscuras, ocultas nas entrelinhas da disciplina.

Em contrapartida, no trabalho de Martines, em [26], foi realizada uma pesquisa por meio de entrevistas que analisa o discurso de professores de Análise Matemática e de Coordenadores de cursos em matemática, acerca do papel desta disciplina na formação do professor. A pesquisa resultou na formalização de três categorias: na primeira, evidencia-se que a disciplina de Análise Matemática não é de aplicação direta na prática docente, o objetivo dessa disciplina é, portanto, fundamentar o conhecimento matemático e, embora, o futuro professor não veja relação entre a disciplina e a prática, ela existe, cabendo a ele transformar os conhecimentos formais e rigorosos em um conhecimento que seja útil aos alunos; para segunda categoria, o papel da disciplina é fazer uma espécie de ligação entre outras disciplinas e o conteúdo do curso, sendo que a disciplina de Análise Matemática seria responsável por consolidar e formalizar uma série de conceitos ensinados ao longo do processo de formação; na terceira categoria, destaca-se que o papel da disciplina é fundamentar o conhecimento do futuro professor sobre os números reais e, para que se cumpra esse papel, é necessário que a abordagem do tema vá além da clássica abordagem axiomática de ver o conjunto dos números reais como corpo ordenado completo.

Corroborando com [26], Reis, em [34], aborda questões acerca do papel e importância da disciplina de Análise Matemática para licenciados. Essa investigação se dá mediante o estudo de manuais didáticos e de entrevistas com quatro professores-pesquisadores que se destacam na área de Análise Matemática. Nesse estudo, todos concordaram que a disciplina de Análise Matemática é fundamental na formação do professor de matemática, embora não haja concordância quanto à forma como a disciplina deve ser ensinada de modo que possa contribuir para a formação do professor.

Diante do exposto, podemos perceber as divergências envolvendo o papel da disciplina de Análise Matemática, em que os pesquisadores trazem resultados diferentes sobre sua relevância. Enquanto em [26] e [34] os depoentes apontam a importância da disciplina de Análise Matemática para a licenciatura, vemos em [7] e [17] uma conclusão diferente - os entrevistados não identificam o papel e a importância da disciplina para os cursos de licenciatura em matemática, nem tampouco conseguem estabelecer uma relação entre os conteúdos tratados na disciplina de Análise e a prática docente.

Diante disso, surgem as seguintes indagações: por que é importante estudar a disciplina de Análise Matemática na licenciatura? Em que momento um professor de ensino médio precisará ter estudado Análise Matemática para explicar algum conceito a seus alunos?

Esses questionamentos nos levam a pensar que não é porque a disciplina de Análise Matemática trabalha o conjunto dos números reais, mesmo assunto que é abordado no ensino médio, que se pode dizer que a disciplina é razão suficiente para constar na formação dos professores para capacitá-los a trabalhar os conceitos de números reais em sala de aula. Em verdade, no estudo dos números reais empreendido na disciplina de Análise Matemática, na maioria das vezes, um estudante de Licenciatura em Matemática aprende, por meio de axiomas, que o conjunto dos números reais é um corpo arquimediano, ordenado e completo.

Por outro lado, a ideia de completude dos números reais trazida nos livros de ensino médio, como veremos adiante, é a de convencer os leitores que nem todo ponto da reta representa um número racional e, depois, associar biunivocamente o conjunto dos números reais aos pontos de uma reta e afirmar que essa reta numérica "não tem buracos", ou seja, é "completa"- essa reta torna-se, finalmente, "completa" juntando-se os números irracionais ao conjunto dos números racionais, formando o conjunto dos números reais.

O que essas duas abordagens sobre a completude dos números reais tem a ver uma com a outra?

Aparentemente, as duas ideias representam conceitos totalmente distintos e, assim, certos conceitos ensinados na disciplinas de Análise Matemática parecem um mundo totalmente diferente daquele dos livros didáticos e da prática dos professores em salas de aula. Esse trabalho versa justamente de estabelecer uma conexão entre essas duas visões: a aprendida pelo aluno de licenciatura em uma disciplina de Análise Matemática e a usada pelo professor de Matemática do Ensino Médio em sala de aula.

Além de discutir ideias como essas e de estabelecer elos entre as duas, queremos que, ao fim do nosso trabalho, um aluno de Licenciatura em Matemática ou um professor de ensino médio seja capaz de refletir sobre a questão da importância da disciplina Análise Matemática em sua prática didática e como ela é importante para compreender os assuntos que ensina.

1.1 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo geral, estabelecer conexões entre conceitos aprendidos pelo aluno de licenciatura na disciplina de Análise Matemática na reta e os conceitos usados pelo professor de Matemática do Ensino Médio em sala de aula.

Como objetivos específicos, temos:

- Analisar como os autores dos livros didáticos abordam os números reais;
- Discutir a ideia de marcar números na reta, se realmente é possível marcar esses números como nos convencem os livros didáticos;
- Apresentar as ideias de completude que aparecem veladas nos livros didáticos de ensino médio;
- Expor o conceito de completude apresentado nos livros de Análise Real;
- Apresentar exemplos da utilização do Teorema dos Intervalos Encaixantes(TIE);
- Mostrar que o Axioma de Dedekind e o TIE são equivalentes;

- Sugerir uma nova definição de completude dos números reais que possa ser ensinada a licenciandos em Matemática diferente da que é geralmente apresentada nas disciplinas de Análise Real.

1.2 Organização

Este trabalho, está organizado da seguinte forma, além deste capítulo, temos os seguintes:

No Capítulo 2, apresentamos como o conjunto dos números reais é abordado em livros didáticos do ensino médio.

No Capítulo 3, partindo das construções geométricas, procuramos discutir a impressão que os livros didáticos passam, de que podemos marcar exatamente qualquer número na reta real.

No Capítulo 4, abordamos as ideias veladas de completude ensinadas nos livros didáticos de matemática do ensino médio. Trazemos, ainda, uma ideia de como a completude é trabalhada em livros de Análise Real usados nos cursos de licenciatura e a relação entre essas duas abordagens.

No Capítulo 5, discutimos os intervalos encaixantes em livros de ensino médio, apresentamos o Teorema dos Intervalos Encaixantes e algumas aplicações do mesmo.

No Capítulo 6, sugerimos uma definição de completude que um aluno de licenciatura poderia receber e, dessa forma estabelecer um elo entre as ideias de completude que usam o Axioma de Dedekind e o Teorema dos Intervalos Encaixantes.

No Capítulo 7, apresentamos as considerações finais do trabalho.

E, por fim, após o Capítulo 7, seguem as Referências Bibliográficas.

Capítulo 2

Apresentação dos Números Reais em livros de Ensino Médio

"A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos."

(Aristóteles)

O livro didático é um instrumento de vinculação do ensino e aprendizagem no meio escolar. Os conteúdos nele abordados geralmente são delineados em documentos oficiais - como os Parâmetros Curriculares Nacionais - que buscam elencar, de maneira organizada, os conhecimentos que devem ser aprendidos pelos alunos em cada fase do ensino básico.

Assim, conhecer o material que será trabalhado em sala de aula é papel fundamental do educador, que muitas vezes tem no livro didático a principal e única fonte de saber, ou seja, o livro é, nesse caso, o instrumento pedagógico que orienta a sua prática docente.

"A análise de documentos, como o livro didático de ensino básico, permite uma valiosa abordagem de dados num viés qualitativo, revelando aspectos de um tema. Os autores ponderam serem os documentos uma fonte natural estável para retirar evidências, confirmar hipóteses de pesquisas, além de fornecer indícios de situações que poderiam ser exploradas por outras perspectivas."(LÜDKE & ANDRÉ, 1986 apud [33])

A proposta desse capítulo é descrever e analisar como alguns livros didáticos do primeiro ano do Ensino Médio abordam o conjunto dos números reais. Esses livros pertencem às coleções que chamaremos de Coleção A, Coleção B, Coleção C e Coleção D, e serão analisados na Seção 2.2. Para tanto, antes de investigarmos o conjunto dos números reais, é necessário olharmos para o conjunto dos números racionais e dos irracionais, uma vez que estes dois conjuntos são considerados como partes componentes do primeiro.

As coleções que analisaremos são quatro obras entre as seis que foram aprovadas pelo ministério da educação no âmbito do PNLD, Programa Nacional do Livro Didático de 2015. Essa aprovação se dá por meio de uma avaliação que reúne docentes de diversas instituições do país, especialistas em ensino e aprendizagem da matemática. Ao final, esses profissionais elaboram resenhas que descrevem e avaliam as obras, com o objetivo de subsidiar os professores do ensino médio na escolha dos livros que irão adotar nas escolas públicas onde ensinam. Todas as resenhas são reunidas em um livro chamado Guia de livros didáticos. É a quarta vez que o ministério da educação realiza essa avaliação de livros de matemática voltados para o ensino médio.

2.1 Descrição e análise dos números reais no guia do PNLD

2.1.1 Coleção A no guia do PNLD

A primeira obra que trataremos é intitulada *Conexões com a Matemática* [23], essa é uma obra coletiva, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna, cujo editor responsável é Fábio Martins de Leonardo.

No que se refere ao conjunto dos números reais, o Guia de livros didáticos [4] afirma:

"As explanações sobre os números racionais e irracionais, em particular no que diz respeito a suas representações decimais, são conduzidas sem o devido rigor, o que pode dificultar a compreensão desses conceitos. Apesar disso, faz-se uma demonstração adequada da irracionalidade de $\sqrt{2}$."

2.1.2 Coleção B no guia do PNLD

A segunda obra escolhida foi *Matemática - Paiva* [31], do autor Manoel Rodrigues Paiva.

Sobre esse livro, em [4] afirma:

"Os conjuntos numéricos são apresentados e justificados como modelos eficientes para resolver problemas, tanto do cotidiano quanto da própria Matemática. A necessidade dos irracionais é referida, como é usual, ao problema da medida da diagonal de um quadrado, tomando-se o comprimento do lado para unidade. Mas não se explicita que tal problema só surge no âmbito abstrato da Matemática e não na medição empírica de objetos do mundo físico."

2.1.3 Coleção C no guia do PNLD

A terceira obra, intitulada *Matemática: contexto & aplicações* [13], do autor Luiz Roberto Dante.

Sobre essa obra, [4] traz que:

" (...) os conteúdos relativos aos conjuntos numéricos são, no geral, bem sistematizados e encontram-se distribuídos ao longo dos três volumes. As diferentes maneiras de representar elementos de um conjunto são bem exploradas e as representações dos conjuntos numéricos por meio de diagramas são bem feitas."

2.1.4 Coleção D no guia do PNLD

A última obra que analisaremos tem como título *Novo Olhar Matemática* [39], do autor Joamir Souza.

Em relação a essa obra, vimos em [4] que:

"O campo de números inicia-se pela definição de vários tipos de conjuntos e de algumas de suas propriedades, com excesso de simbologia(...) A abordagem dos conjuntos numéricos é sucinta, mas adequada. As situações voltadas ao desenvolvimento de cálculos por estimativas e aproximações estão presentes, porém em número limitado."

2.2 A apresentação do conjunto dos números reais nos livros didáticos analisados

2.2.1 Apresentação dos números racionais nos livros didáticos analisados

Diante da análise realizada nas coleções, percebemos que, de maneira geral, antes de apresentarem $\mathbb{R}$, todas as coleções começam conceituando os números racionais do seguinte modo:

O conjunto dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma da razão $\frac{a}{b}$, *com* $a \in \mathbb{Z}$ *e* $b \in \mathbb{Z}^*$.

E simbolicamente indicam esse conjunto da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \{x | x = \frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*.\}$$

Vejamos a seguir como cada coleção apresenta as outras maneiras de caracterizar os números racionais:

Análise da apresentação dos números racionais pela Coleção A

Após a definição apresentada no início dessa seção, a coleção trata a representação fracionária dos números racionais, exemplificando como escrevê-la, seja o número inteiro, decimal exato ou decimal periódico. No entanto, a coleção não deixa claro a relação existente entre um número ser racional e possuir uma representação decimal exata ou periódica. O que nos leva a concordar com a análise do Guia de livros didáticos - PNLD [4], na Subseção 2.1.1, sobre a falta de rigor nesse ponto.

Essa coleção, embora tenha uma seção intitulada "Representação dos números racionais na reta", apenas afirma que todos os números racionais podem ser representados na reta ordenada, mas não explica como localizá-los. Observe a Figura 2.1:

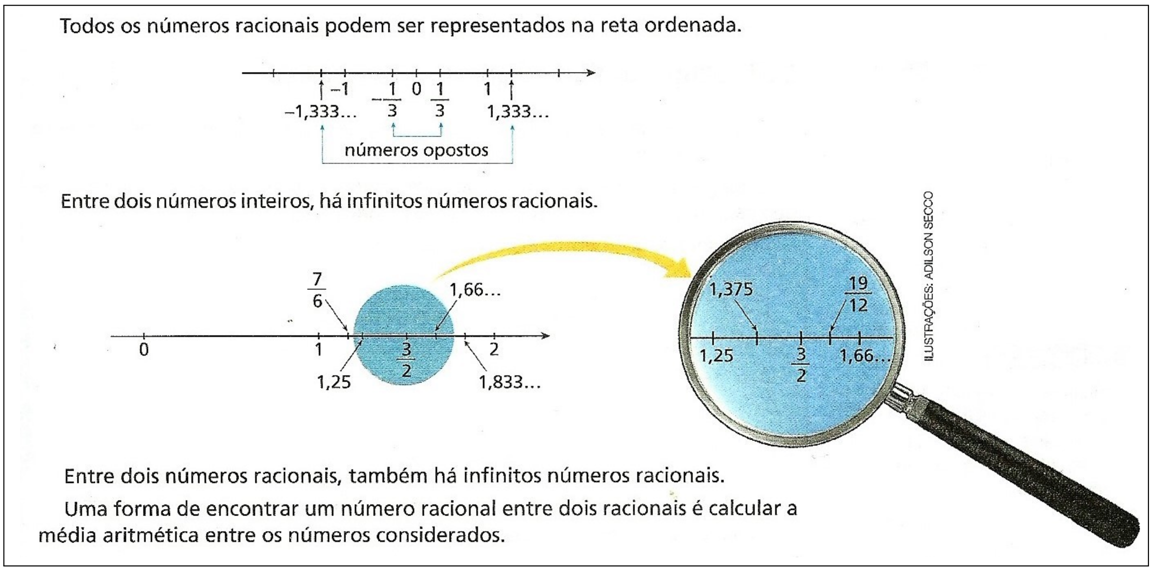


Figura 2.1: Representação dos números racionais na Coleção A

Como visto na Figura 2.1, o livro traz alguns números racionais marcados na reta e afirma que todos os números desse conjunto podem ser representados na reta ordenada. Mas qual procedimento utilizado para marcar o número $\frac{1}{3}$, por exemplo? Seria simples explicar que para essa atividade basta dividir o espaço entre os números 0 e 1 em 3 partes iguais e tomar o primeiro ponto de divisão. Nesse ponto estaria a localização do número $\frac{1}{3}$, e assim por diante. No Exemplo 3.3, mostraremos com detalhes a marcação do número $\frac{18}{7}$ na reta.

Ainda sobre a discussão de como representar os números racionais na reta, trazidos na Coleção A, cabe comentar sobre um dos exercícios propostos nessa coleção, em que o aluno deve representar alguns números racionais na reta, como pode ser visto na Figura 2.2.

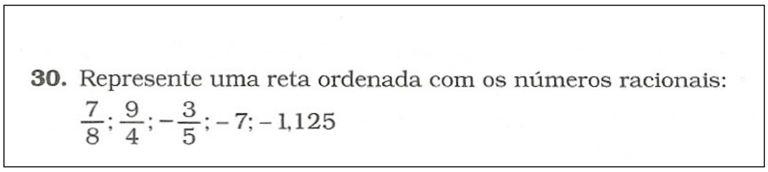

30. Represente uma reta ordenada com os números racionais:
$\frac{7}{8}; \frac{9}{4}; -\frac{3}{5}; -7; -1{,}125$

Figura 2.2: Exercício proposto na Coleção A

Mas, na apresentação dos racionais na reta, como vimos, o autor não mostra como marcar número algum. Portanto, nos exercícios propostos há uma cobrança sobre algo que não foi detalhadamente ensinado.

Análise da apresentação dos números racionais pela Coleção B

Seguindo nossa análise, observamos na Coleção B que, além da definição usual de número racional, como a razão entre dois números inteiros e o denominador não nulo, apresentada no início dessa seção, a coleção discute de forma clara e objetiva a representação decimal finita e a representação decimal infinita. Nessa última, aborda as dízimas periódicas e as dízimas não periódicas explicando com detalhes os exemplos apresentados, e encerra afirmando que os números racionais são todos os números com representação decimal finita e todas as dízimas periódicas. O autor também tem o cuidado de relacionar as dízimas não periódicas aos números que não são racionais.

Nos exercícios resolvidos, o livro traz um "passo a passo" de como obter a fração geratriz de uma dízima periódica e justifica a seguinte afirmação: a divisão de dois números inteiros, sendo o segundo não nulo, é igual a um número decimal cuja representação é finita ou periódica. Dessa forma, o livro contribui para que o aluno tenha uma melhor compreensão dos números racionais.

Análise da apresentação dos números racionais pela Coleção C

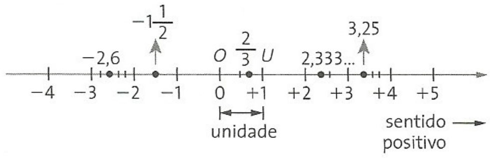
A Coleção C inicia o assunto sobre o conjunto dos números racionais explicando que ao acrescentar as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto dos números inteiros, obtêm-se o conjunto dos números racionais. Com isso, o livro procura mostrar de maneira bem educativa que todo número inteiro pode ser escrito como uma fração, sugerindo uma ideia de ampliação, podendo levar o aluno a perceber que o conjunto dos números inteiros está contido no conjunto dos números racionais. Em seguida, o livro descreve o conjunto dos números racionais da maneira que mencionamos no início dessa seção, que o conjunto $\mathbb{Q}$ é formado por todos os números da forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$.

Em sequência, o livro aborda de forma clara e objetiva a representação decimal dos números racionais, entretanto, a parte como escrever uma fração geratriz é tratado sem muitos detalhes. O conjunto dos números racionais é também apresentado como medida de segmentos e, de maneira consistente e satisfatória, expõe quando segmentos de reta são comensuráveis.

Podemos dizer que nessa Coleção C, os números racionais são interpretados de três formas: fracionária, decimal e como medida de segmentos comensuráveis. Consideramos como um ponto positivo, por facilitar a construção do conceito de números racionais por parte dos alunos.

Ainda na seção destinada aos números racionais, na Figura 2.3 mostra como o livro instrui o leitor a localizar qualquer número racional.

Imaginemos uma reta na qual foram fixados um ponto O, chamado de origem, e um ponto U, diferente de O. Tomamos o segmento $\overline{OU}$ como unidade de comprimento (de medida 1). Escolhemos também um sentido para ser o positivo. Agora, podemos localizar na reta numerada qualquer número racional.



Por exemplo, veja a localização dos números racionais $\frac{2}{3}$; $-1\frac{1}{2}$; $-2,6$; $3,25$ e $2,333...$, além dos inteiros $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ e 5.

- $\frac{2}{3}$ fica entre 0 e 1: dividimos o intervalo em 3 partes iguais e tomamos duas no sentido de 0 para 1.
- $-1\frac{1}{2}$ fica entre -2 e -1, no ponto médio do intervalo.
- $3,25 = 3\frac{25}{100} = 3\frac{1}{4}$ fica entre 3 e 4: dividimos o intervalo em 4 partes iguais e tomamos uma no sentido de 3 para 4.
- $2,333... = 2\frac{3}{9} = 2\frac{1}{3}$ fica entre 2 e 3: dividimos o intervalo em 3 partes iguais e tomamos uma no sentido de 2 para 3.

Para refletir
- Entre dois números inteiros, sempre há um outro número inteiro?
- Entre dois números racionais sempre há um outro número racional?

Converse com um colega sobre isso.

Veja as respostas no Manual do Professor.

Figura 2.3: Localização de alguns números racionais na Coleção C

Como observamos na Figura 2.3, embora os instrumentos utilizados para essa marcação não sejam descritos, podemos subtender que há a utilização de régua e compasso.

O livro conclui a explanação do conjunto dos números racionais com a seguinte afirmação:

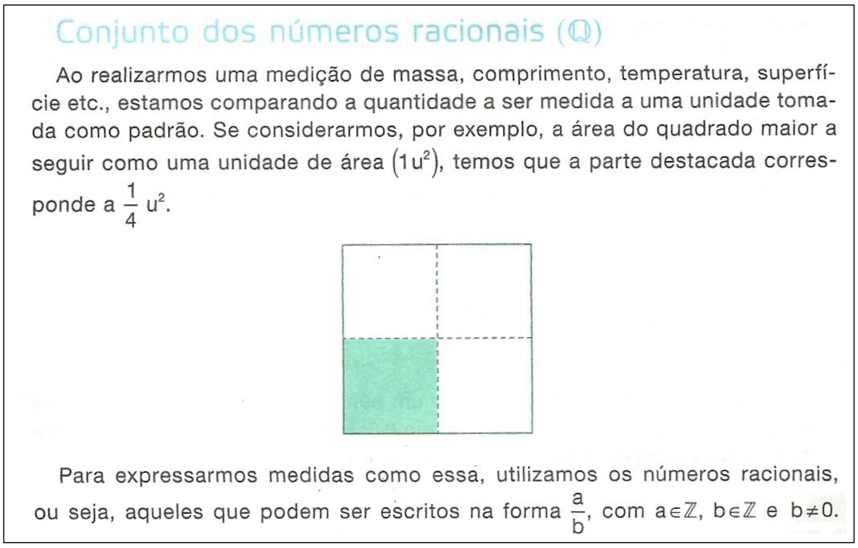
Todo número racional tem um ponto correspondente na reta numerada. Mas nem todo ponto da reta numerada corresponde a um número racional. Assim, o conjunto $\mathbb{Q}$ não "preenche" toda a reta numerada, é como se existissem "buracos" a serem completados com um outro tipo de número: os **números irracionais**.

Figura 2.4: Afirmação sobre a passagem dos números racionais aos irracionais na Coleção C

Essa afirmação da Figura 2.4 remete a insuficiência geométrica do conjunto dos números racionais em preencher todos os pontos da reta e a necessidade de ampliar o conceito de número, introduzindo um conjunto que, unido a $\mathbb{Q}$, esgote todos os pontos da reta: o conjunto dos números irracionais. Essa ideia que aparece na passagem dos números racionais aos números irracionais é vista apenas na Coleção C. Percebe-se nesse fato o aparecimento de conceitos e ideias básicas que inspiram o estudo do nosso trabalho.

Análise da apresentação dos números racionais pela Coleção D

Na quarta e última coleção analisada, Coleção D, o livro inicia a abordagem dos números racionais a partir de um exemplo da medição da área de um quadrado (veja a Figura 2.5): ele compara a área a ser medida com a área que foi tomada como unidade de medida, tendo uma fração como resultado da medição. Essa articulação com problemas práticos é uma boa maneira de apresentar os números racionais. Ao fazer isso, o livro tem como objetivo conectar o conceito de fração com o conceito de número racional, o que facilita a compreensão deste novo conceito de número, pois o conceito de fração já é de conhecimento dos alunos desde as séries iniciais. Em seguida traz a definição usual, a que já foi mencionada no início dessa seção.



Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Ao realizarmos uma medição de massa, comprimento, temperatura, superfície etc., estamos comparando a quantidade a ser medida a uma unidade tomada como padrão. Se considerarmos, por exemplo, a área do quadrado maior a seguir como uma unidade de área $(1u^2)$, temos que a parte destacada corresponde a $\frac{1}{4}u^2$.

Para expressarmos medidas como essa, utilizamos os números racionais, ou seja, aqueles que podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.

Figura 2.5: O conjunto dos números racionais na Coleção D

Assim como na Coleção A, esta coleção não estabelece a relação entre a forma fracionária e a representação decimal de um número racional. O livro afirma: “ Para expressar uma fração por meio de um número decimal, podemos dividir o numerador da fração pelo denominador. O número decimal obtido pode ser classificado em decimal exato ou dízima periódica”. Porém falta uma justificativa que validem essa representação decimal - uma alternativa seria explicar que da divisão continuada do numerador a pelo denominador b, existem apenas b restos diferentes, e que daí vem a periodicidade, mas, a afirmação nem sequer deixa claro em qual campo numérico está o numerador e o denominador, o que causa inconsistências.

Um descuido observado foi o fato de o livro trazer a representação de alguns números racionais na reta numérica, mas não ensinar como localizá-los, como podemos ver na Figura 2.6, pois, segundo [5], seria pertinente exemplificar o procedimento de marcação de alguns desses números na reta numérica.

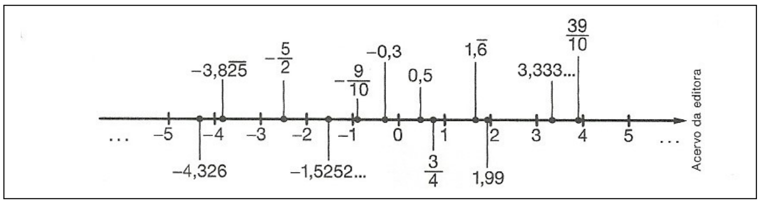


Figura 2.6: Representação de alguns números racionais na Coleção D

Conclusão das análises do conjunto dos números racionais nos livros didáticos

Ao analisar os números racionais nessas coleções, pode-se perceber que aparecem três maneiras de caracterizá-los, sendo elas: na forma fracionária, na forma decimal e como a medida de segmentos comensuráveis. Um dos pontos que algumas coleções devem ser mais atenciosas é em apresentar de maneira clara a relação existente entre essas caracterizações, pois poderia ajudar ao discente a identificar e compreender melhor os números racionais. Outro ponto que os autores devem ser cuidadosos é na questão da localização dos números racionais na reta numérica, pois, como visto na análise da Coleção A, dessa seção, a coleção propõe em um dos exercícios que localize alguns números racionais, sendo que em momento algum mostrou como fazer isso. Das obras analisadas, apenas a Coleção C trouxe como marcar alguns números racionais na reta numérica.

O último ponto que convém destacar é a ideia de completude presente na passagem dos números racionais aos irracionais. A maioria das coleções analisadas não trazem essa ideia nessa passagem, das quatro, apenas a Coleção C aborda este tema.

2.2.2 Apresentação dos números irracionais nos livros didáticos analisados

Observemos, agora, como as quatros coleções escolhidas apresentam os números irracionais. Como motivação para introduzir os números irracionais, todos os livros analisados iniciam com o problema da diagonal do quadrado (Figura 2.7).

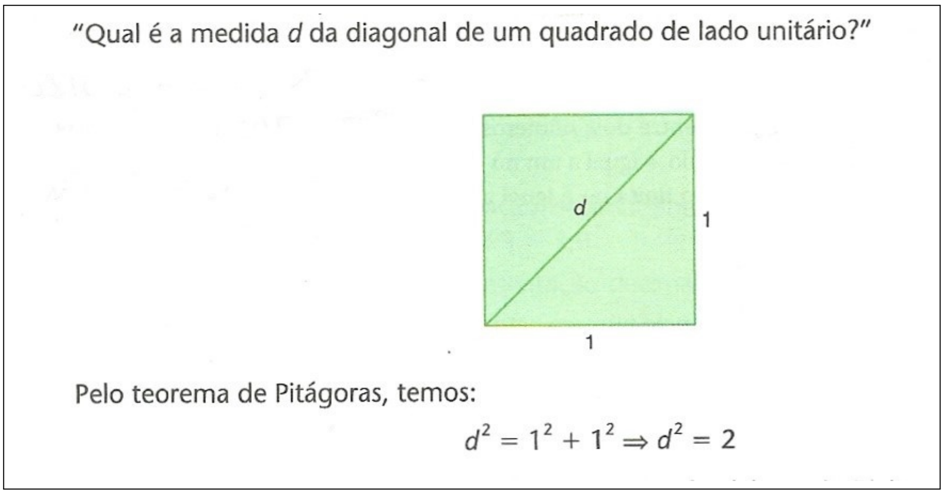


Figura 2.7: Problema da diagonal do quadrado apresentado na Coleção B

Esse problema consiste em encontrar a medida d da diagonal de um quadrado de lado unitário, o que está de acordo com [5], que afirma:

> Os números irracionais devem ser entendidos como uma necessidade matemática que resolve a relação de medidas entre dois segmentos incomensuráveis, sendo apropriado tomar o caso dos segmentos lado e diagonal de um quadrado como ponto de partida.

Ao nosso ver, consideramos adequado introduzir os números irracionais a partir do problema da diagonal do quadrado. O que vamos discutir nas subseções seguintes é o tratamento dado a esse número d, diagonal do quadrado.

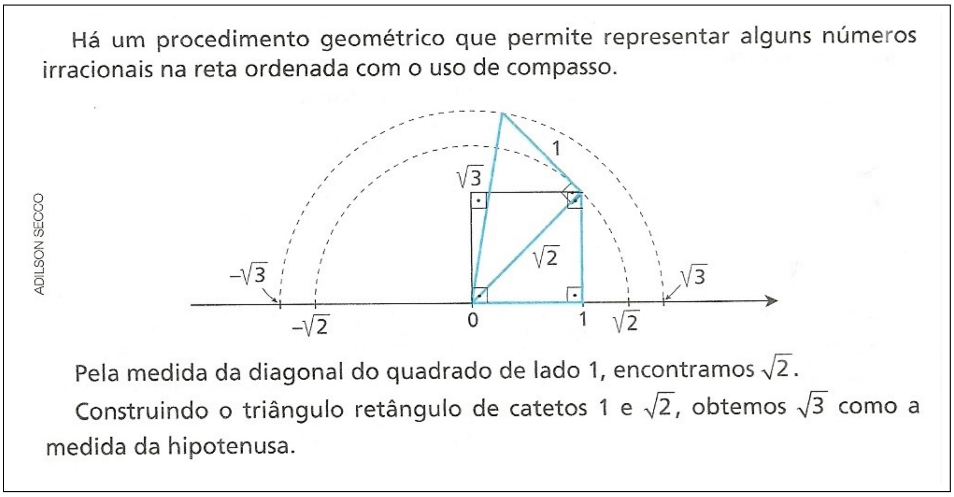
Análise da apresentação dos números irracionais pela Coleção A

Na Coleção A, o conjunto dos números irracionais é introduzido de maneira adequada a partir da noção de segmentos incomensuráveis. O autor diz que dois segmentos são comensuráveis quando existir uma unidade que caiba um número inteiro de vezes em ambos e traz ainda um exemplo de segmentos comensuráveis. Em seguida diz que há situações em que os racionais são insuficientes para determinar a razão entre as medidas de dois segmentos - nessas situações os dois segmentos são incomensuráveis e a razão entre suas medidas é dada por um número que não é racional, mas, um número irracional.

Apenas na seção destinada aos números irracionais, é que o autor associa os números racionais a segmentos comensuráveis, mas não deixa claro a relação entre eles.

Ao apresentar o exemplo da medida da diagonal do quadrado de lado 1, o livro traz apenas que $\sqrt{2} = 1,4142135613...$ é um número cuja representação decimal tem infinitas casas não periódicas e que jamais encontraremos um número inteiro que represente quantas vezes uma unidade de medida cabe em $\sqrt{2}$. Neste instante, surgem as seguintes perguntas: como se chegou a essa conclusão? O que garante que não haja um período com uma quantidade maior de dígitos? Já que conhecer algumas casas decimais não é o suficiente para chegar a essa conclusão. No entanto, o autor finaliza de maneira acertada com a demonstração de que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Ainda sobre os números irracionais, o livro traz uma subseção intitulada "Representação dos números irracionais na reta", que apresenta de maneira adequada um procedimento geométrico de como representar alguns números irracionais na reta ordenada usando compasso, como podemos ver a seguir na Figura 2.8.


Há um procedimento geométrico que permite representar alguns números irracionais na reta ordenada com o uso de compasso.

Pela medida da diagonal do quadrado de lado 1, encontramos $\sqrt{2}$.

Construindo o triângulo retângulo de catetos 1 e $\sqrt{2}$, obtemos $\sqrt{3}$ como a medida da hipotenusa.

Figura 2.8: Localização de alguns números irracionais na reta na Coleção A

Por último, é pertinente notar que o autor traz apenas dois exemplos de números irracionais, o π e $\sqrt{2}$, o que pode levar o aluno a concluir que os números irracionais existem em pouca quantidade ou até mesmo que são raros. Ao nosso ver, poderiam ser abordados mais exemplos que levassem os discentes a perceberem que os números irracionais são infinitos. Os números apresentados a seguir são exemplos de como gerar uma infinidade de números irracionais.

- Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,..., $\sqrt{p}$, com p um número primo.
- Os números $\sqrt{q_1}$, $\sqrt{q_2}$, $\sqrt{q_3}$,...,$\sqrt{q_n}$, ..., em que todos os q_i, $i \geq 1$ não são quadrados perfeitos.
- O número $\sqrt[n]{m}$, n, m $\in \mathbb{N}$, em que $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$.

Com argumentos semelhantes ao da Proposição 4.2 podemos estabelecer a irracionalidade dos números acima.

Análise da apresentação dos números irracionais pela Coleção B

Na Coleção B, notamos que a necessidade dos irracionais é referida ao problema da medida da diagonal do quadrado. Para encontrar o número d tal que $d^2 = 2$, o autor vai fazendo aproximações sucessivas, restringindo cada vez mais o intervalo ao qual pertence d, como exibido na Figura 2.9.

Queremos um número d tal que $d^2 = 2$. Inicialmente, sabemos que $1{,}4 < d < 1{,}5$, pois $(1{,}4)^2 = 1{,}96$ e $(1{,}5)^2 = 2{,}25$.

Tomando um número qualquer entre 1,4 e 1,5 — por exemplo, a média aritmética entre 1,4 e 1,5, que é 1,45 —, podemos estreitar o intervalo ao qual pertence o número d, observando que:

$$\begin{cases}(1{,}45)^2 = 2{,}1025 \\ 1{,}4 < d < 1{,}5\end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}45$$

Analogamente, restringimos mais ainda o intervalo ao qual pertence o número d:

$$\begin{cases}(1{,}425)^2 = 2{,}030625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}45\end{cases} \Rightarrow 1{,}4 < d < 1{,}425$$

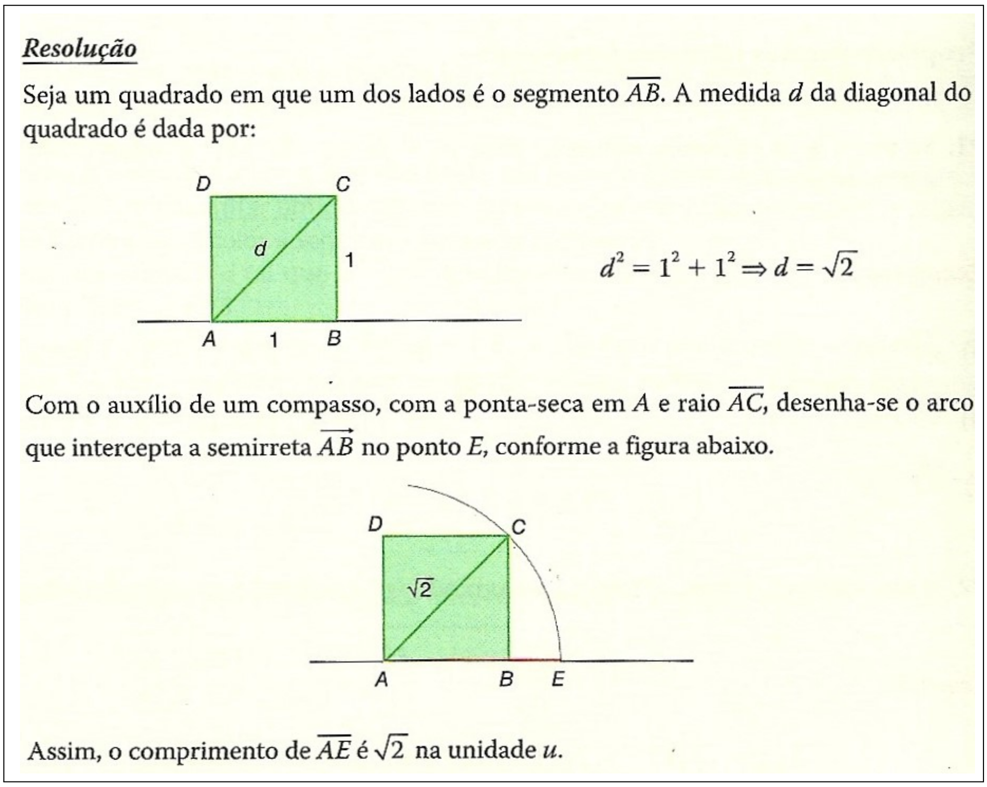
$$\begin{cases}(1{,}4125)^2 = 1{,}99515625 \\ 1{,}4 < d < 1{,}425\end{cases} \Rightarrow 1{,}4125 < d < 1{,}425$$

Figura 2.9: Aproximação decimal do número d na Coleção B

Por fim, o autor diz que continuando esse processo infinitamente não chegará a um número com representação decimal finita ou infinita periódica, surgindo, assim, a necessidade de considerar outros tipos de números, que não podem ser representados como a razão entre dois números inteiros. A esses novos números dá-se o nome de irracionais. Mas que fique claro: usar esse procedimento apresentado na Figura 2.9 não garante que o número d é irracional, ele apenas auxilia a encontrar uma aproximação para a representação decimal do numero d. A garantia de que o número d não é racional exige uma demostração matemática (ver Seção 4.4, Proposição 4.2).

Recordemos que na Seção 2.1, quando abordamos os números racionais dessa coleção, o autor falou com mais detalhes sobre um número ser representado por uma dízima periódica. Aqui, ele define número irracional como sendo todo número que em sua forma decimal é uma dízima não periódica. Dessa forma, pressupõe o conhecimento da existência de outros números além dos racionais.

Observamos nessa coleção, que acertadamente nos exercícios resolvidos é apresentado um procedimento geométrico de como obter a medida de um segmento de comprimento $\sqrt{2}$, que seque na Figura 2.10.



Resolução

Seja um quadrado em que um dos lados é o segmento $\overline{AB}$. A medida d da diagonal do quadrado é dada por:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Com o auxílio de um compasso, com a ponta-seca em A e raio $\overline{AC}$, desenha-se o arco que intercepta a semirreta $\overrightarrow{AB}$ no ponto E, conforme a figura abaixo.

Assim, o comprimento de $\overline{AE}$ é $\sqrt{2}$ na unidade u.

Figura 2.10: Localização do número $\sqrt{2}$, da Coleção B

Análise da apresentação dos números irracionais pela Coleção C

Na Coleção C, os números irracionais são abordados inicialmente sob o aspecto referente à medição de segmentos incomensuráveis, conceituando-os mais tarde como números que não admitem uma representação decimal exata nem uma representação na forma de dízima periódica.

Um ponto relevante na obra é o cálculo do número $\sqrt{2}$ por meio de aproximações sucessivas, na qual o autor utiliza a calculadora e exibe diversos intervalos que se encaixam, como se observa na Figura 2.11. Posteriormente, no Capítulo 4, daremos uma ênfase maior a esses intervalos, que na literatura matemática são chamados de intervalos encaixantes - veremos que utilizando conceitos de Análise Matemática podemos compreender melhor o porquê de existir o número $\sqrt{2}$.

A pergunta é: que número, elevado ao quadrado, resulta em 2? Com o uso de uma calculadora, podemos obter parte da representação decimal do número fazendo **aproximações sucessivas**.

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} 1^2 = 1 \text{ (menor do que 2)} \\ 2^2 = 4 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1 e 2}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1{,}4)^2 = 1{,}96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}5)^2 = 2{,}25 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,4 e 1,5}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1{,}41)^2 = 1{,}9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,41 e 1,42}$$

$$\sqrt{2} = ? \left\langle \begin{array}{l} (1{,}414)^2 = 1{,}999396 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}415)^2 = 2{,}002225 \text{ (maior do que 2)} \end{array} \right\rangle \sqrt{2} \text{ está entre 1,414 e 1,415}$$

Figura 2.11: Aproximação decimal do número $\sqrt{2}$ na Coleção C

A partir da construção dos intervalos apresentados na Figura 2.11, o autor afirma que se continuar o processo não se chega nem a uma representação decimal exata, nem a uma dízima periódica, e conclui que $\sqrt{2}$ não é um número racional.

Os intervalos encaixantes ainda são usados com outro propósito: na Figura 2.11, são usados para obter a representação decimal de um número irracional; já na Figura 2.12, são usados apenas para obter aproximações para o número π.

π (Pi) é irracional

O número π é obtido dividindo-se a medida do comprimento de qualquer circunferência pela medida de seu diâmetro ($\pi = 3{,}1415926535...$). Veja algumas aproximações para π:

$3 < \pi < 4$

$3{,}1 < \pi < 3{,}2$

$3{,}14 < \pi < 3{,}15$,

etc.

Figura 2.12: Aproximação decimal do número π na Coleção C

Em seguida, a obra traz vários exemplos de números irracionais e, acertadamente, apresenta a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$. Como sabemos, apenas dessa forma pode-se concluir que um número é irracional.

Análise da apresentação dos números irracionais pela Coleção D

A Coleção D inicia a seção sobre números irracionais buscando um contexto histórico, conforme recorte a seguir (veja Imagem 2.13). Consideramos positivo apresentar um contexto que leva a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos. No entanto, o autor deixa passar a oportunidade de tratar segmentos incomensuráveis, que é como os números irracionais devem ser tratados, como sugere [5] no início dessa seção.

> **Conjunto dos números irracionais (I)**
>
> Como estudamos anteriormente, os números racionais estão diretamente relacionados à necessidade humana de realizar medições. É verdade que até certo momento da história acreditava-se que esses números eram suficientes para expressar qualquer medida. Contudo, os pitagóricos mostraram em seus estudos que nem toda medida pode ser expressa por um número na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Em particular, esses estudiosos provaram que a medida da diagonal de um quadrado cujo lado mede uma unidade não corresponde a um número racional.

Figura 2.13: O conjunto dos números irracionais na Coleção D

Em seguida a coleção apresenta o problema da diagonal do quadrado, onde chega que $d = \sqrt{2}$ e o tratamento dado a esse número deixa a desejar, pois o livro traz que a representação decimal do número $d = \sqrt{2}$ possui infinitas casas decimais e não é periódica, e que números com essas características formam o conjunto dos números irracionais. Ainda sugere que se procurássemos na calculadora ou no computador o resultado para $\sqrt{2}$, obteríamos o seguinte valor:

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880168872420...$$

Com isso, o livro certamente tem a intenção de que o aluno perceba que a representação decimal de $\sqrt{2}$ é realmente infinita e não periódica. O uso do computador ou calculadora não garante que mais adiante não encontraremos periodicidade na representação decimal, mesmo que examinemos trilhões de casas decimais. Portanto, isso pode causar confusões na construção do conceito por parte dos alunos. Se sugerisse que o aluno classificasse o número 0,441860465116279..., qual seria a resposta da aluno? Esse número parece não apresentar período e ser infinito, mas ele não é um número irracional: ele é a representação decimal de $\frac{19}{43}$.

Após apresentar alguns exemplos de números irracionais, o autor traz a representação de alguns desses números na reta numérica (Figura 2.14). No entanto, não mostra como localizá-los. Como marcaria, por exemplo, o número $\sqrt[3]{11}$?

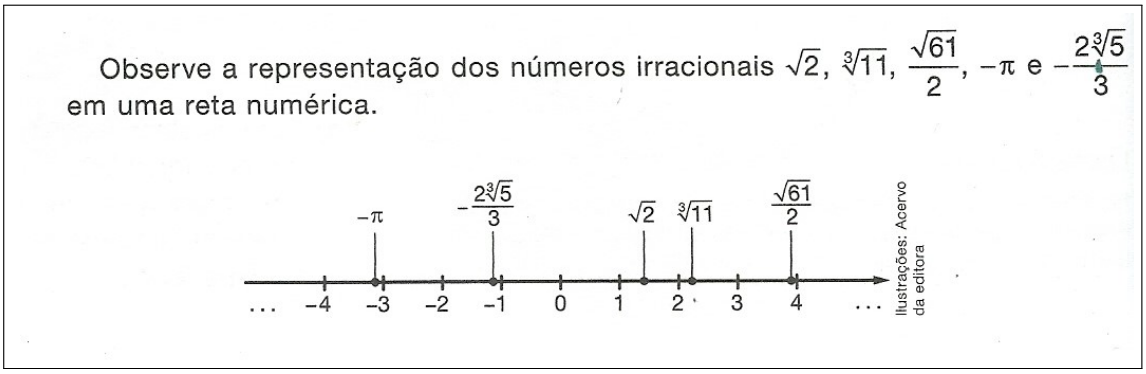


Figura 2.14: Representação de alguns números irracionais na reta pela Coleção D

Já nas atividades, temos um ponto positivo: o livro mostra como obter geometricamente um segmento de medida $\sqrt{2}$, e pede que, de maneira semelhante, o aluno encontre a medida de $\sqrt{5}$. Ainda nas atividades, outro ponto positivo é a determinação do valor aproximado de $\sqrt{10}$ via intervalos encaixantes, como podemos ver na Figura 2.15.

53. Dizemos que *n* é raiz quadrada de *p* se $n^2=p$ e $n \geq 0$. Veja como podemos determinar um valor aproximado para $\sqrt{10}$ com uma casa decimal.
Inicialmente, verificamos entre quais números naturais encontra-se $\sqrt{10}$.

$$1^2=1;\ 2^2=4;\ 3^2=9;\ 4^2=16;\ 5^2=25;\ \ldots$$

Como $3^2<10<4^2$, temos que $3<\sqrt{10}<4$.
Em seguida, verificamos qual número com uma casa decimal, entre 3 e 4, é mais próximo de $\sqrt{10}$.

$$3{,}1^2=9{,}61;\ 3{,}2^2=10{,}24;\ 3{,}3^2=10{,}89;\ 3{,}4^2=11{,}56;\ \ldots$$

Como $9{,}61<10<10{,}24$, temos que $3{,}1^2<n^2<3{,}2^2$.
Note que $3{,}2^2=10{,}24$ é o valor mais próximo de 10, ou seja, $\sqrt{10} \simeq 3{,}2$.
Sem utilizar a calculadora, determine o valor aproximado de:
a) $\sqrt{20}$ com uma casa decimal **b)** $\sqrt{88}$ com duas casas decimais **c)** $\sqrt{134}$ com três casas decimais

Figura 2.15: Atividade proposta na Coleção D

As outras coleções usaram intervalos encaixantes para concluir que o número $\sqrt{2}$ tinha representação decimal infinita e não periódica, já a Coleção D usa os intervalos encaixantes para encontrar um valor aproximado para raízes quadradas.

Conclusão das análises do conjunto dos números irracionais nos livros didáticos

Nos livros analisados, os números irracionais são geralmente tratados como números que não são racionais, pressupondo dessa forma a existência de outros números além dos números racionais. Nenhum dos livro analisados realmente define o que é um número irracional, mas os caracterizam de três maneiras distintas: como medida de segmentos incomensuráveis (Coleções A e C), como números que não podem ser escrito na forma de fração (Coleções A, B e C) e como números cuja representação decimal é infinita e não periódica (todas as coleções analisadas).

Apresentar os números irracionais de maneiras distintas é uma ótima estratégia, pois, ao proporcionar diversos significados, favorece ao aluno uma melhor compreensão do conceito de número irracional.

Segundo [6], os números irracionais devem receber o seguinte tratamento:

O importante é que o aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas decimais não-periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso.

Pela análise feita, apenas a Coleção C não apresenta um procedimento geométrico para localizar alguns números irracionais na reta.

2.2.3 Apresentação dos números Reais nos livros didáticos analisados

Nas coleções analisadas, percebemos que ao iniciar a abordagem sobre os números reais, todas as obras estudadas definem o conjunto dos números reais como sendo a reunião dos números racionais com os números irracionais. Iremos nos referir a essa definição como a usual.

Ao definir os números reais dessa forma, conforme [25] comenta, é cometida uma impropriedade. Lembre-se que os números irracionais foram apresentados como números que não são racionais e, ao afirmar que os números reais resultam da união dos números racionais e irracionais, é como se os irracionais preexistissem aos reais, quando, na verdade, não se sabe o que é um irracional antes de definir real.

Análise da apresentação dos números reais pela Coleção A

A Coleção A inicia o estudo do conjunto $\mathbb{R}$ com a definição usual, vista no início dessa seção. Em seguida, traz a seguinte afirmação:

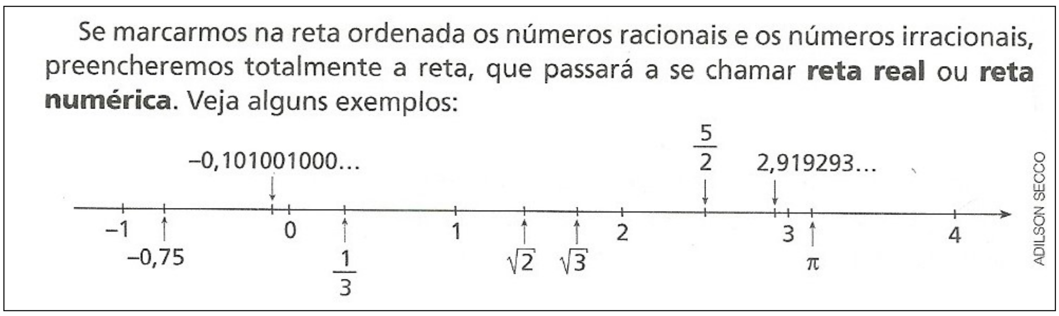

Se marcarmos na reta ordenada os números racionais e os números irracionais, preencheremos totalmente a reta, que passará a se chamar **reta real** ou **reta numérica**. Veja alguns exemplos:

Figura 2.16: A reta real na Coleção A

Com essa afirmação, fica claro apenas que podemos associar os números reais a cada ponto da reta, porém não ensina como fazer a correspondência entre os números reais e os pontos de uma reta. Para fazer a correspondência, é necessário escolher na reta uma origem, um sentido de percurso e uma unidade de comprimento, coisa que o livro não faz.

Ainda na Figura 2.16, o livro apresenta alguns números localizados na reta que chamou de reta real ou numérica. Recordemos que na Subseção 2.2.2, essa coleção apresenta apenas como marcar os números da forma $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$. Dessa maneira, como representar na reta os números irracionais -0,10100100... ou 2,919293...?

Análise da apresentação dos números reais pela Coleção B

Na Coleção B, além da definição usual do conjunto dos números reais, mencionada no inicio dessa seção, ela caracteriza-os pela via decimal, afirmando que "número real é todo aquele que pode ser representado na forma decimal, com número finito ou infinito de casas decimais". Dito dessa maneira, deixa de agregar significado ao conceito dado, deveria acrescentar que quando a forma decimal é finita ou infinita periódica tem-se um número racional, do contrário, tem-se um número irracional. Após trazer algumas propriedades dos números reais, apresenta de modo adequado, na seção intitulada "O eixo real", como fazer a correspondência dos pontos da reta com os números reais (Figura 2.17).

A cada ponto de uma reta r pode-se associar um único número real, e a cada número real pode-se associar um único ponto dessa reta. Para isso, adotamos os seguintes procedimentos:

- Associamos o número 0 (zero) a um ponto O qualquer de r.
- A cada ponto A de uma das semirretas determinadas por O em r, com A **distinto de** O, associamos um número positivo x, que indica a distância de A até O, em certa unidade u.
- A cada ponto A', simétrico de A em relação a O, associamos o oposto de x.

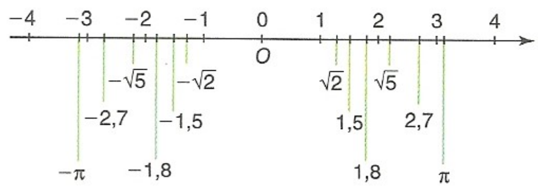


Figura 2.17: O eixo real na Coleção B

Ao afirmar que a cada ponto de uma reta r pode-se associar um único número real e a cada número real pode-se associar um único ponto dessa reta, o autor deixa claro a relação biunívoca existente entre os números reais e os pontos da reta, aparecendo, mesmo que de maneira velada, a ideia de completude, que será abordada na Seção 4.1.

Análise da apresentação dos números reais pela Coleção C

Após a definição usual de números reais, o tratamento dado a esses números é conduzido satisfatoriamente na Coleção C, falando da insuficiência dos números racionais em preencher todos os pontos da reta numerada. A ideia de correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta é abordada de forma explícita, como podemos ver na Figura 2.18:

Como constatamos, os números racionais não são suficientes para preencher todos os pontos da reta numerada. O conjunto $\mathbb{R}$ pode ser visto como modelo aritmético de uma reta, enquanto esta, por sua vez, é o modelo geométrico de $\mathbb{R}$. Por exemplo, os pontos da reta correspondentes aos números $-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, etc. não são alcançados com os números racionais. Já os números reais esgotam todos os pontos da reta, ou seja, a cada ponto da reta corresponde um único número real e, reciprocamente, a cada número real corresponde um único ponto da reta.

Por isso, dizemos que existe uma **correspondência biunívoca** entre os números reais e os pontos da reta. Temos assim a **reta real**, que é construída desta forma: numa reta, escolhemos uma origem (e associamos a ela zero), um sentido de percurso e uma unidade de comprimento, por exemplo:

0 1 (unidade de comprimento)

Figura 2.18: A ideia de correspondência biunívoca na Coleção C

Observamos ainda que, embora o livro não defina a reta real, diz acertadamente como construí-la da seguinte forma: “numa reta, escolhemos uma origem (e associamos a ela zero), um sentido de percurso e uma unidade de comprimento”. Em seguida, apresenta alguns números reais colocados na reta , como segue na Figura 2.19. Dos números representados na reta, o livro mostrou apenas como marcar os números racionais. Para não apresentar incoerência, poderia ter apresentado como marcar $\sqrt{2}$, visto que é procedimento geométrico bastante simples (a Coleção A apresenta na figura 2.8).

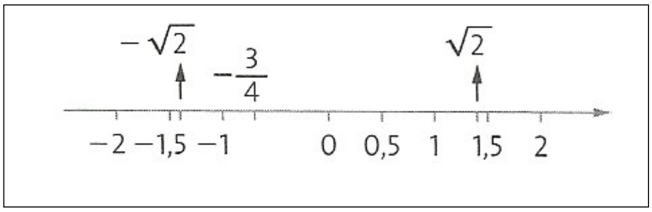


Figura 2.19: Os números reais na reta pela Coleção C

Análise da apresentação dos números reais pela Coleção D

A Coleção D faz de maneira bastante resumida a apresentação dos números reais: traz a definição usual e, em seguida, afirma que é possível associar a cada número real um ponto da reta numérica e a cada ponto da reta numérica um número real, deixando a desejar por não explicar como fazer essa associação. E define a reta real como “a reta numérica que representa os números reais é denominada reta real”, mas essa não é um maneira muito boa de defini-la, pois, com o devido rigor, é necessário fixar uma origem, tomar um segmento unitário e um sentido.

Por último alguns números reais são indicados, como na Figura 2.20.

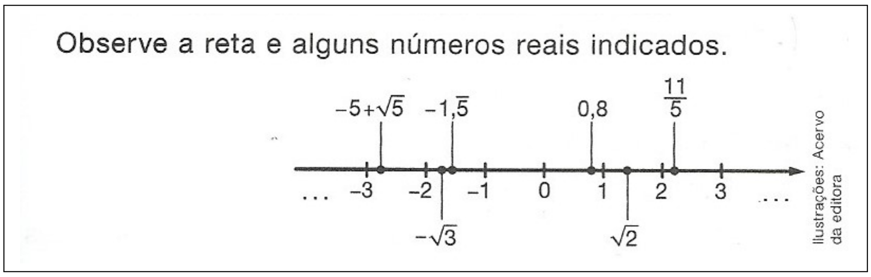


Figura 2.20: Os números reais na reta pela Coleção D

Conclusão das análises do conjunto dos números reais nos livros didáticos

No geral, a respeito dos números reais nas coleções analisadas nessa subseção , todas as coleções abordam a ideia de correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta, mesmo que de maneira implícita em algumas. Na seção 4.1, retomaremos essa discussão, falando na ideia de completude que aparece velada nos livros de ensino médio.

Outro ponto observado ao analisar os números reais ao longo dessa seção, foi que todas as obras passam a impressão que podemos facilmente representar todos os números reais na reta real, pois todas as coleções trazem a representação de alguns números reais na reta (revejam figuras 2.16, 2.17, 2.19 e 2.20), mas não mostram como localizar todos os números que aí estão representados.

Vejamos os números que cada coleção mostra como marcar: as Coleções A e B apresentam um procedimento geométrico de como representar os irracionais na reta ordenada usando compasso, como pode ser vista nas Figuras 2.8 e 2.10; já a Coleção C (Figura 2.3), apenas descreve como localizar qualquer número racional e embora não afirme os instrumentos utilizados para essa marcação, podemos subtender que utiliza régua e compasso; a Coleção D, após apresentar cada conjunto numérico, traz a representação dos números de cada conjunto e, nas atividades, mostra como encontrar um segmento de medida $\sqrt{2}$.

Dessa forma, embora as coleções analisadas apresentem vários exemplos de números representados na reta real, trazem apenas como marcar alguns números. Diante disso, fica o questionamento: quais números reais podemos realmente marcar na reta real? Todos os números que aparecem representados na reta nessa Seção 2.2 podem ser construídos?

Para ajudar o professor a entender melhor esses questionamentos e encontrar as respostas, explicaremos com detalhes na Seção 3.2 do capítulo seguinte, que nem sempre se pode marcar qualquer número real na reta.

Capítulo 3

É mesmo possível marcar todos os números na reta real?

> "*Somos todos capazes de crescer e desenvolver nossa habilidade de pensar e raciocinar em contextos geométricos.*"
>
> (John A. Van de Walle)

Neste capítulo, já nos deparamos com um questionamento no título: " É mesmo possível marcar todos os números na reta real?" Esse questionamento está relacionado à nossa inquietação apresentada na conclusão das análises do conjunto dos números reais na Subseção 2.2.4, quando mencionamos que os livros de ensino médio nos passam a impressão de que marcar pontos na reta numérica é um processo simples e que é possível marcar exatamente todos os números. Geralmente, após descrever cada conjunto numérico, os livros trazem a representação dos números desses conjuntos na reta, mas poucos mostram como marcá-los. Das obras analisadas, apenas a Coleção C trouxe como marcar alguns números racionais, e as Coleções A e B trouxeram como marcar apenas os números irracionais da forma $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

No processo trazido na Coleção C apresentado na Figura 2.3, não é ensinado como dividir um intervalo em 3 partes iguais, nem mencionados os instrumentos que podem ser utilizados para isso, mas supomos que seja utilizando régua e compasso. Já as Coleções A e B que trazem o procedimento para marcar os números da forma $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, deixam claro a utilização do compasso e subentendem o uso da régua não graduada.

Nas seções desse capítulo, buscaremos descobrir quais os números reais que podem ser marcados na reta com exatidão, ou seja, os números que são construtíveis.

Esclarecemos que construir um número é obter um segmento de reta cujo comprimento é este número, e marcar um número é estabelecer onde esse número está localizado na reta real. Porém, para marcar um número, também faz-se necessário obter um segmento de reta cuja medida é aquele número. Assim, a partir de agora, indistintamente, quando usarmos os termos construir ou marcar, entende-se o mesmo procedimento geométrico que será definido na Seção 3.2.

3.1 Alguns instrumentos e elementos matemáticos

Vale salientar que usaremos dois instrumentos físicos para marcar pontos que representam números reais na reta: uma régua sem escalas e um compasso. Esses instrumentos são chamados **instrumentos clássicos gregos**, pois quando os gregos começaram os trabalhos voltados às construções geométricas, por volta de 500 AC, escolheram esses instrumentos como ideais.

Segundo [16], Euclides (325 a.C. - 270 a.C.), autor do livro *Elementos*, adepto a esse costume tradicional dos gregos, também permitia em seu livro apenas a utilização de régua sem marcação e compasso e, por isso, estes dois instrumentos passaram a serem conhecidos como **instrumentos euclidianos.**

As construções geométricas estimularam o crescimento de toda a matemática. De acordo com [11], foram três problemas de Geometria estudados pelos matemáticos gregos que desempenharam um papel importante nesse crescimento e desenvolvimento da Matemática. Estes problemas de construção resistiram a todas as tentativas dos gregos para resolvê-los utilizando somente a régua sem graduação e o compasso. Os três problemas, que ficaram conhecidos como os três problemas clássicos, são: a duplicação do cubo, a trissecção de um ângulo e a quadratura do círculo.

É importante dizer que construções com os instrumentos euclidianos aparecem ainda hoje, e essas construções podem ser observadas tanto nos livros de ensino fundamental como nos livros de ensino médio, o que justifica nossa escolha em utilizar esses instrumentos. Que fique claro, que nesse texto adotaremos somente soluções euclidianas, portanto, os problemas geométricos serão considerados resolvidos, quando solucionados através de construções usando régua sem escalas e compasso.

Nesse trabalho, a régua sem escalas será usada para traçar retas passando por dois pontos distintos dados. O compasso será utilizado para traçar as circunferências conhecendo o seu centro e o seu raio.

Além dos instrumentos físicos escolhidos no processo de marcar pontos, adotaremos um objeto matemático, uma reta r, na qual fixaremos um ponto O, chamado de origem, e um ponto A, diferente de O, e tomaremos o segmento OA como unidade de medida, ou seja, OA representa o segmento de medida unitária. À direita do ponto O, estarão os pontos associados aos números positivos e à esquerda, aos números negativos. A reta r será usada para construirmos a chamada **reta real**. Desse modo, teremos na reta r cada ponto determinando um único número real e, reciprocamente, cada número real determinando um único ponto. Portanto, cada $x \in \mathbb{R}$ é um ponto da reta real e cada ponto de r representa um único número real.

Definição 3.1 *Chamamos um número $x \in \mathbb{R}$ de coordenada de P se um ponto P da reta real r corresponde a esse número x.*

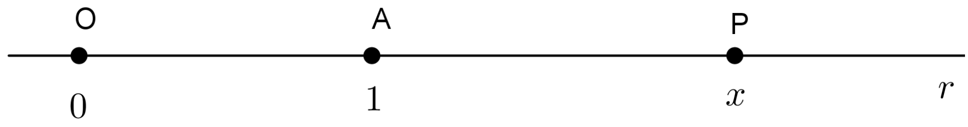


Figura 3.1: Representação do segmento unitário OA e do número x

Observe que se considerarmos os pontos C e D na reta real r, de coordenadas c e d, respectivamente, teremos um segmento CD com comprimento definido por $CD = |d - c|$. Particularmente, $OD = |d|$. Nesse trabalho, indistintamente, usaremos CD tanto pra indicar o segmento, como para indicar a medida do segmento.

Vejamos um exemplo simples de construção geométrica usando régua e compasso.

3.1.1 Construção da mediatriz e ponto médio de um segmento

Definição 3.2 *Chamamos de* ***ponto médio*** *do segmento AB a um ponto M deste segmento tal que $AM = MB$.*

Definição 3.3 *A* ***mediatriz*** *de um segmento AB é a reta perpendicular*[1] *a AB que contém o seu ponto médio.*

Exemplo 3.1 *Dado um segmento AB qualquer, traçar a sua mediatriz e seu ponto médio.*

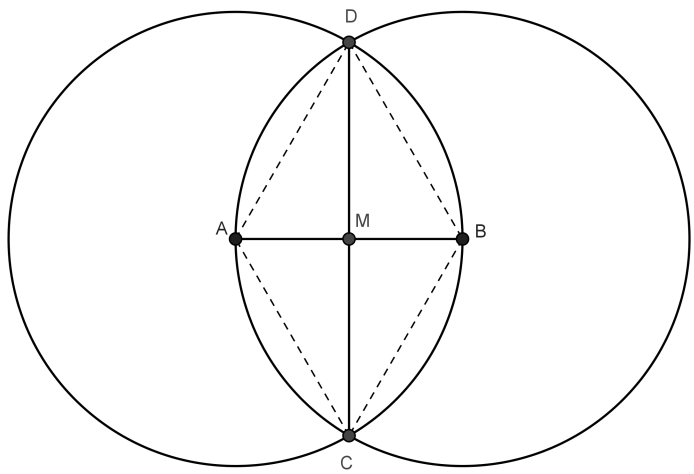


Figura 3.2: Mediatriz e ponto médio do segmento AB

[1]Dizemos que duas retas são perpendiculares se elas se intersectam formando um ângulo de 90°.

Com a ponta seca do compasso em A e B, traçamos duas circunferências de raio AB. Chamaremos de C e D os pontos de interseção das duas circunferências traçadas, cujas distancias a A e B são iguais a AB. Com a régua não graduada, traçamos o segmento de reta CD, mediatriz do segmento AB. A interseção do segmento CD com AB é o ponto médio.

Justificativa: Observe que os triângulos ACD e BCD são congruentes pelo caso LLL. Em particular, $A\hat{C}D = B\hat{C}D$. Dessa forma DC é a bissetriz do ângulo $A\hat{D}B$. Como ADB é um triângulo isósceles, segue que DC é perpendicular a AB.

3.2 Os números Construtíveis

Aos números que podemos marcar na reta real, chamaremos de números contrutíveis, como definimos a seguir:

Definição 3.4 *Um número real positivo x diz-se* ***número construtível*** *se pode ser construído a partir de um segmento de medida unitária na reta r por um processo finito de passos, utilizando apenas uma régua sem escalas e um compasso.*

Um número real negativo x diz-se construtível se $-x$ é um número construtível. Os número 0 e 1, por definição são construtíveis.

Assim, marcar um número $x \in \mathbb{R}$, significa encontrar um ponto P, tal que o comprimento do segmento OP seja x.

Vale ressaltar que marcaremos apenas os números positivos, pois, usando um processo semelhante, podemos marcar também os números negativos.

Exemplo 3.2 *A partir do segmento unitário podemos obter os números inteiros. Portanto, os números inteiros são construtíveis.*

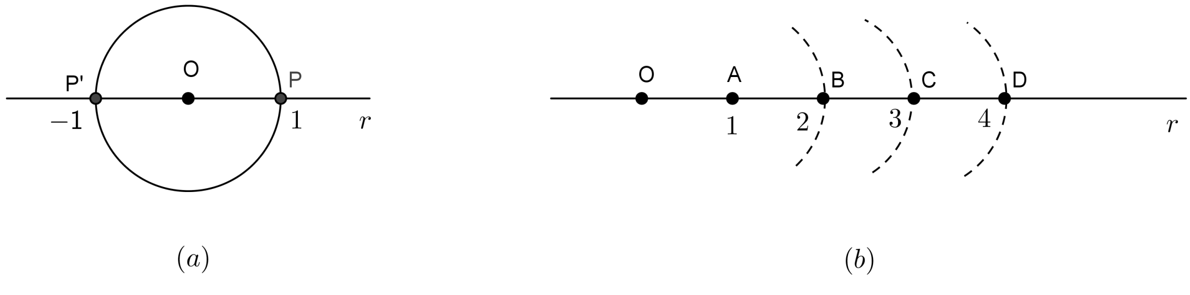


Figura 3.3: Representação dos números inteiros

Na Figura 3.3(a), com a ponta seca do compasso em O, abertura OP, tracemos uma circunferência obtendo o ponto P', simétrico do ponto de coordenada x em relação à origem O. Na Figura 3.3(b), com a ponta seca do compasso no ponto A, abertura OA, obtemos o ponto B. Novamente, com a ponta seca do compasso no ponto B, abertura OA, marcamos

C. Com a ponta seca do compasso no ponto C, raio OA, marcamos D. Podemos prosseguir e encontrar todos os inteiros positivos. E, visto na imagem à esquerda como marcar pontos simétricos, podemos obter os números inteiros positivos e negativos.

A seguir, mostraremos que os números obtidos a partir de um segmento unitário por meio da extração de raízes quadradas e das quatros operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão, em um processo finito de passos, são todos números construtíveis. Os livros de ensino médio geralmente não fazem isso: ensinam apenas como marcar alguns números, mas não ensinam como marcar os números que são resultados da soma, subtração, produto, divisão ou extração de raízes.

Teorema 3.1 *Se x e y são números reais positivos construtíveis na reta real r, então $x+y$, $y-x$, $x.y$, $\frac{x}{y}$ e $\sqrt{x}$ também são construtíveis.*

Demonstração.

i. Soma e subtração

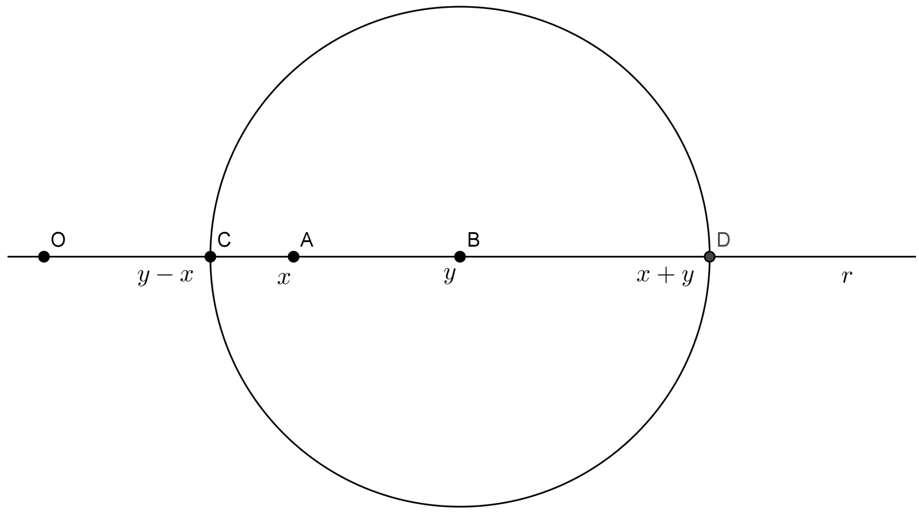


Figura 3.4: Marcando $x+y$ e $y-x$

Sejam x e y números reais construtíveis. Considere em r, os pontos A e B, tais que os segmentos OA e OB tenham comprimentos dados respectivamente pelos números x e y. Consideremos $x<y$ (o caso $y<x$ é feito trocando-se os papéis de y e x e marcando o ponto à esquerdada origem). Com o auxílio de um compasso, com abertura medindo $OA=x$, fixe a ponta seca do compasso no ponto B e construa uma circunferência intersectando r em dois pontos: C à esquerda de B e D à direita de B. Assim, $OD=x+y$ e $OC=y-x$. O que mostra que os números reais $x+y$ e $y-x$ são números reais construtíveis.

ii. Produto

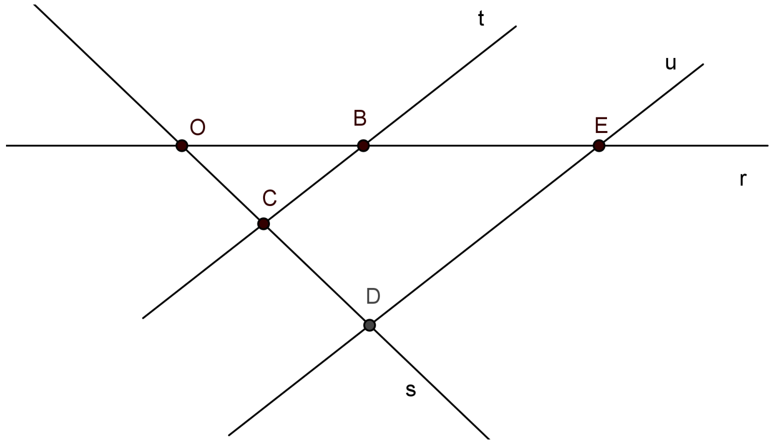


Figura 3.5: Marcando $x.y$

Considere sobre a reta r, os pontos O e B, tais que o comprimento de OB seja dado pelo número real construtível x, isto é, $OB = x$. Por O, trace uma reta s, concorrente à reta r e marque sobre s um ponto C, tal que OC seja um segmento de comprimento unitário, $OC = 1$. Em seguida, ainda sobre a reta s marque o ponto D, tal que o comprimento de OD seja o número construtível y. Trace a reta t, passando pelos pontos B e C, trace também uma reta paralela a reta t passando por D, intersectando r num ponto E.

Utilizando a semelhança entre os triângulos OCB e ODE, temos:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OE}{OB},$$

isto é,

$$\frac{y}{1} = \frac{OE}{x}.$$

Portanto $x.y = OE$, o que mostra que $x.y$ é um número construtível.

iii. Divisão

De maneira semelhante ao caso anterior, considere sobre a reta r os pontos O e B, tal que o comprimento de OB seja dada pelo número real construtível x, $OB = x$. Por O, trace uma reta s, concorrente com a reta r e marque sobre s os pontos C e D, tais que OC seja um segmento de comprimento unitário e o comprimento de OD seja o número real construtível y.

Trace a reta t, passando pelos pontos B e D, trace também uma reta paralela a reta t passando pelo ponto C, intersectando r num ponto E.

Usando a semelhança entre os triângulos ODB e OCE, temos:

$$\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OE},$$

isto é,

$$\frac{y}{1} = \frac{x}{OE}.$$

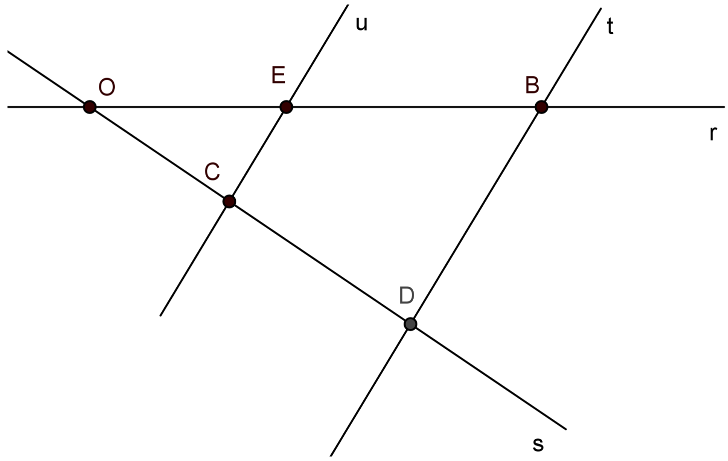


Figura 3.6: Marcando $\dfrac{x}{y}$

Portanto $OE = \dfrac{x}{y}$, o que mostra que $\dfrac{x}{y}$ é um número construtível.

Utilizando o mesmo processo usado nessa demonstração obtemos o inverso de um número, bastando para isso, tomar $x = 1$.

iv. Raiz quadrada

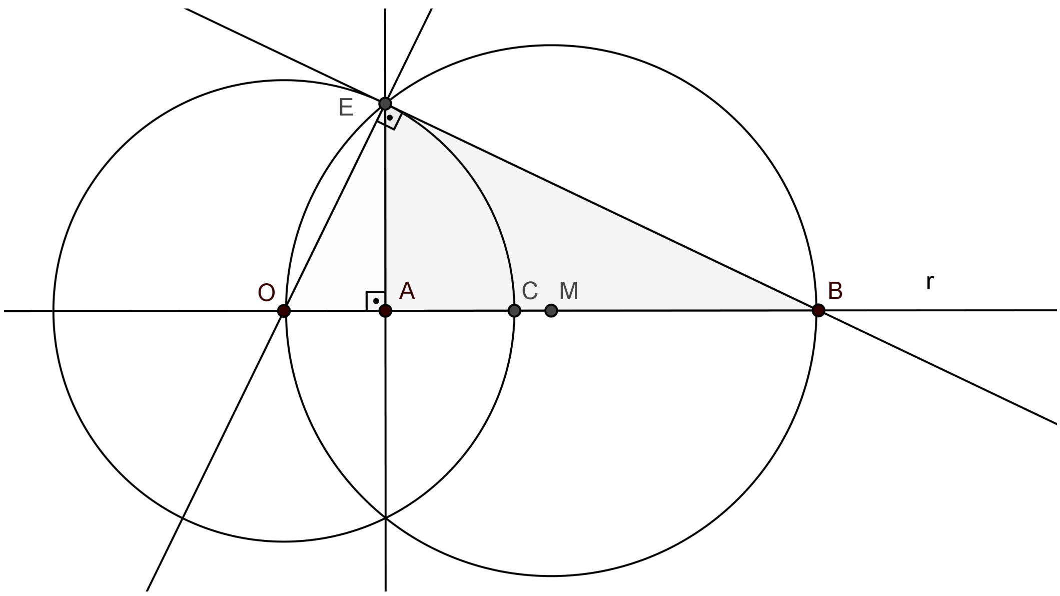


Figura 3.7: Marcando $\sqrt{x}$

Considere sobre r os pontos A, B e O, tais que, OA seja o segmento de comprimento unitário e o comprimento de OB seja o número construtível x. Ainda sobre r, marque o ponto M, ponto médio do segmento OB. Com o auxílio de um compasso, com abertura medindo OM fixe a ponta seca do compasso no ponto M e construa uma circunferência intersectando r nos pontos O e B. Seja E o ponto de encontro da circunferência construída anteriormente com a reta perpendicular à reta r que passa por A, situado no semiplano superior gerado por r.

Da semelhança dos triângulos OEA e OBE (são semelhantes pelo caso ângulo ângulo, $E\hat{O}B$ é um ângulo comum aos dois triângulos, e os ângulos $O\hat{A}E$ e $O\hat{E}B$ são ambos retos, o primeiro por construção e o segundo por ser igual à metade do ângulo central $A\hat{M}B$ correspondente, que mede 180°), temos:

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OE}{OA},$$

isto é,

$$\frac{x}{OE} = \frac{OE}{1}.$$

Portanto $OE = \sqrt{x}$. Para localizá-lo na reta real r, trace a circunferência de centro em O e raio OE, intersectando r no ponto C (como na Figura 3.7), já que $OC = OE$ a coordenada do ponto C é o número construtível $\sqrt{x}$. $\square$

As quatro primeiras operações $x+y$, $y-x$, $x.y$, $\frac{x}{y}$, nos garante que podemos marcar exatamente todos os números racionais, ou seja, os números racionais são construtíveis. Isso justifica a afirmação que aparece nos livros de ensino médio, quando afirma que:

Representação dos números racionais na reta

Todos os números racionais podem ser representados na reta ordenada.

Figura 3.8: Afirmação sobre os números racionais na coleção A

Exemplo 3.3 *Construa sobre a reta r o número* $\frac{18}{7}$.

Podemos construir esse número usando o procedimento adotado no item (*iii.*) do Teorema 3.1, ou podemos iniciar a construção utilizando o que traz um dos livros do ensino médio analisados no segundo capítulo desse trabalho, que diz como fazer, apenas não traz o procedimento de como construir geometricamente.

O que fazer, segundo os livros de ensino médio: O número $\frac{18}{7} = \frac{7.2+4}{7} = 2\frac{4}{7}$, fica entre 2 e 3, dividimos o intervalo em 7 partes iguais e tomamos a quarta marcação.

Vejamos agora como construir geometricamente. Dada a reta r, em que os números 2 e 3 já estão localizados nos pontos B_0 e C respectivamente, trace, pelo ponto B_0, uma reta arbitrária s, distinta de r. Marque sobre s os pontos B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 e B_7 tais que, para $0 \leq i \leq 7$, os comprimentos B_iB_{i+1} tenham mesma medida.

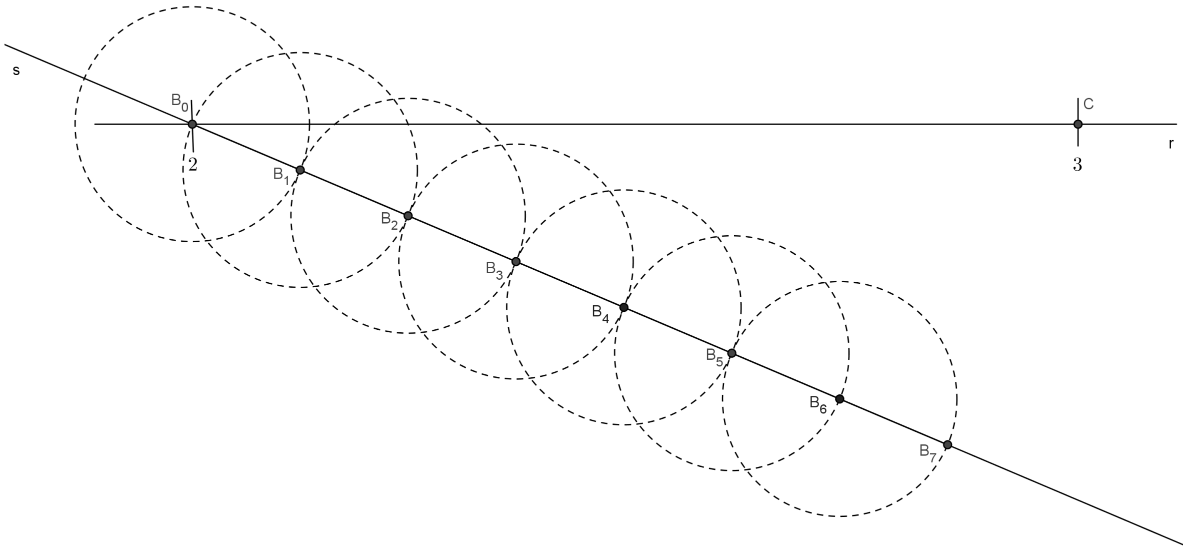


Figura 3.9: Divisão do segmento BD em 7 segmentos congruentes

Trace a reta B_7C e em seguida trace a paralela à reta B_7C passando por B_i. Se D_i é a intersecção de tal paralela com o segmento B_0C, então pelo teorema de Thales [2] os pontos $D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6$e D_7 dividem B_0C em sete partes iguais. E na quarta marcação, ponto D_4, está localizado o número $\frac{18}{7}$.

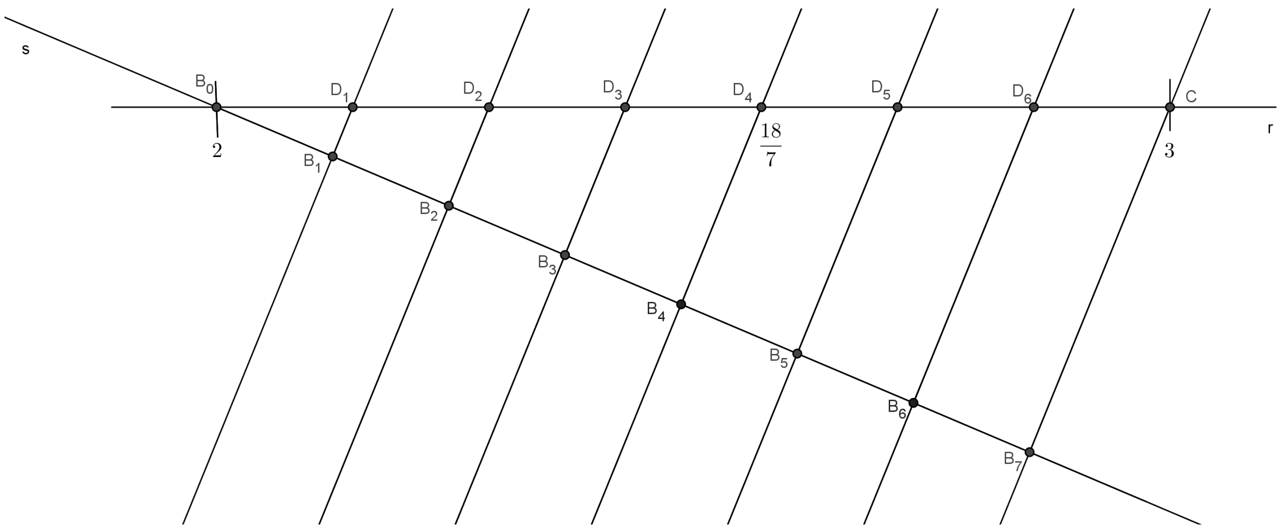


Figura 3.10: Marcação do número $\frac{18}{7}$ na reta r

Além disso, não apenas os números racionais são construtíveis, pois vimos que se x é um número construtível, $\sqrt{x}$ também será construtível, podendo $\sqrt{x}$ ser um número

[2]"Suponha que três retas paralelas, a, b, e c, cortam as retas m e n nos pontos A, B e C e nos pontos A', B' e C', respectivamente. Se o ponto B encontra-se entre A e C, então o ponto B' também encontra-se entre A' e C'. Se $AB = BC$, então também tem-se $A'B' = B'C'$. " [2]

irracional. Portanto, todos os números que são resultados de somas, subtrações, produtos, divisões e extração de raízes quadradas são números construtíveis.

Assim, são construtíveis os seguintes números:

a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

b) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{102}$

c) $\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

d) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}}$

Exemplo 3.4 *Mostremos como construir o número* $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}}$.

i. Dados os números 2 e 3, podemos construir os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, pois como já demonstramos no Teorema 3.1, dado um número real x construtível, sua raiz quadrada também é construtível. Na Figura 3.11, esses números foram construídos conforme procedimento visto no item *(iv)* do Teorema 3.1.

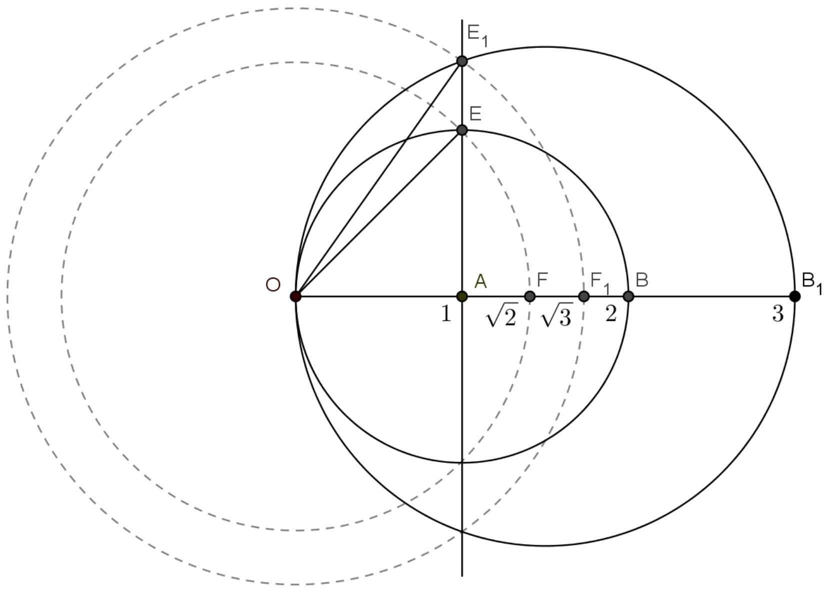


Figura 3.11: Marcação do número $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$

ii. Dados os números construtíveis $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ obtidos no passo *(i)*, conforme Teorema 3.1, podemos construir a soma desses dois números. Veja na figura a seguir:

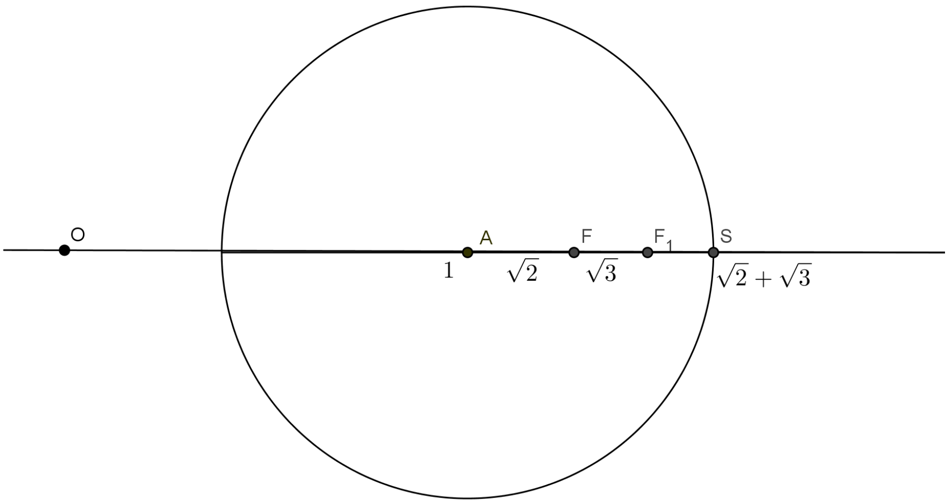


Figura 3.12: Marcação da soma $\sqrt{2}+\sqrt{3}$

iii. O próximo passo é construir o número $\sqrt{5}$ e, em seguida, a soma $\sqrt{5}+1$, que, como sabemos, também são construtíveis, visto que a raiz quadrada de um número construtível é construtível, bem como sua soma. Resolvemos ocultar a imagem por ser semelhante aos passos anteriores.

iv. Agora, façamos a construção $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$, que, pelo Teorema 3.1, é construtível, por se tratar da divisão de números construtíveis.

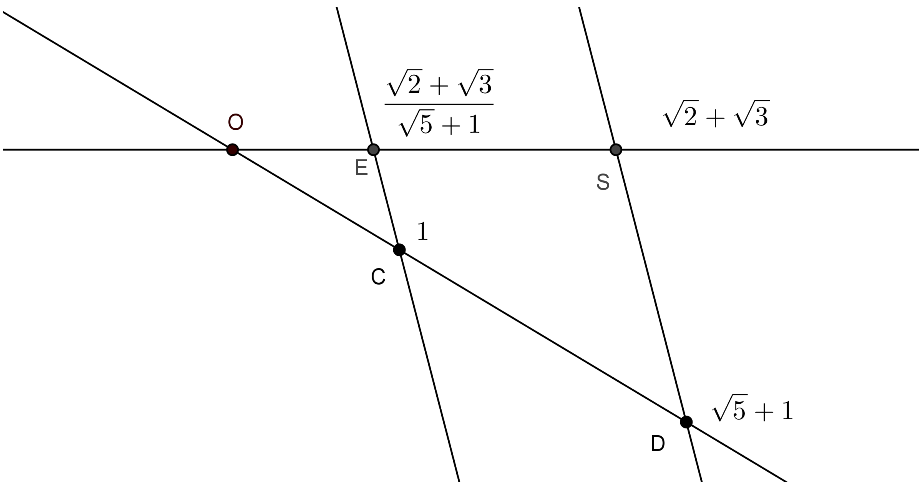


Figura 3.13: Construção do número $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$

v. Por último, façamos a construção do número $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}}$ que é construtível, pois como vimos no passo *(iv)*, o número $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}$ é construtível e a raiz quadrada de um número construtível é construtível.

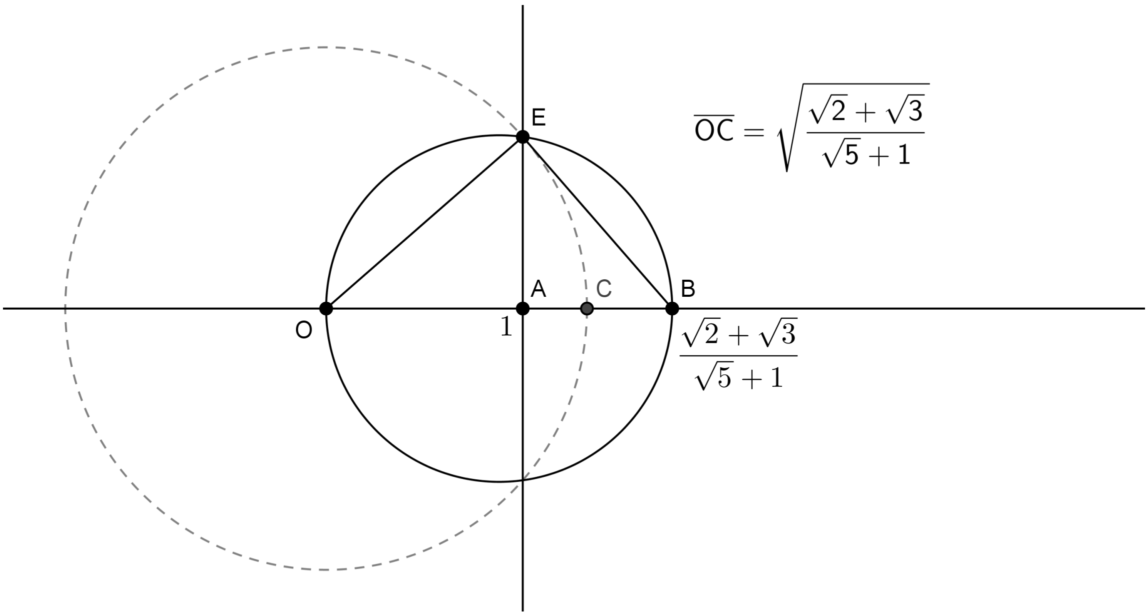


Figura 3.14: Marcação do número $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+1}}$

Após vermos, que além de todos os números racionais serem construtíveis, também temos números irracionais que são construtíveis, é natural surgir a seguinte pergunta: todos os números reais são construtíveis?

A fim de responder essa pergunta, a partir de agora, passaremos a tratar o problema de construir números algebricamente.

3.2.1 Buscando uma resposta para pergunta: todos os números reais são construtíveis?

Descartes inaugurou uma nova fase na Matemática ao interpretar os problemas geométricos por meio de uma linguagem algébrica. Dessa forma, os problemas passaram a ser tratados analiticamente. Em [36],

> O objetivo de Descartes era utilizar na geometria, para resolver problemas de construção, uma espécie de aritmética, em que regras simples de composição levassem de objetos simples a outros mais complexos. O método começa por exibir objetos mais simples de todos, as retas, e as relações simples que os relacionam, as operações aritméticas .

Assim, estenderemos a noção de números construtíveis para o sistema de coordenadas cartesianas.

Definição 3.5 *Diz-se que um ponto $P(x,y)$ do plano é construtível, se os números x e y coordenadas do ponto P, forem números construtíveis.*

Definição 3.6 *Diz-se que uma reta é construtível se pelo menos dois de seus pontos são construtíveis.*

Definição 3.7 *Diz-se que uma circunferência é construtível se tem centro e raio construtíveis.*

Nas construções geométricas, sabemos que a régua e o compasso nos permitem construir dois elementos:

- Uma reta passando por dois pontos;
- Uma circunferência conhecendo o seu centro e o seu raio.

Analiticamente, uma reta que passa por dois pontos construtíveis $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ tem o coeficiente angular dado por

$$m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}.$$

Substituindo na equação fundamental, temos

$$\begin{aligned}
y - y_a &= m(x - x_a) \\
y - y_a &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a) \\
(x_b - x_a)(y - y_a) &= (y_b - y_a)(x - x_a) \\
(y_b - y_a)x + (x_b - x_b)y + (x_a y_b - y_a x_b) &= 0.
\end{aligned}$$

Tomando $a = y_b - y_a$, $b = (x_a - x_b)$ e $c = (x_a y_b - y_a x_b)$, obtemos

$$ax + by + c = 0,$$

onde a, b e c são construtíveis por serem resultados das operações de soma, subtração e multiplicação dos números construtíveis x_a, x_b, y_a e y_b,

Uma circunferência de centro $O = (x_o, y_o)$ e passando por $A = (x_a, y_a)$, ambos de coordenadas construtíveis, tem equação

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 = r^2,$$

onde $r = OA = \sqrt{(x_a - x_o)^2 + (y_a - y_o)^2}$.

Assim,
$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=(x_a-x_o)^2+(y_a-y_o)^2$$

$$x^2-2xx_o+x_o^2+y^2-2yy_o+y_o^2=x_a^2-2x_ax_o+x_o^2+y_a^2-2y_ay_o+y_o^2$$

$$x^2+y^2-2xx_o-2yy_o+2x_ax_o+2y_ay_o+x_a^2+y_a^2=0.$$

Tomando $a=-2x_o$, $b=-2y_o$ e $c=2x_ax_o+2y_ay_o+x_a^2+y_a^2$, obtemos

$$x^2+y^2+ax+by+c=0,$$

onde os coeficientes a, b e c são números construtíveis.

Dessa forma, podemos construir números que são resultados de um dos seguintes procedimentos:

- Uma reta intersectando uma reta;
- Uma reta intersectando uma circunferência;
- Uma circunferência intersectando uma circunferência.

Vejamos a seguir os pontos construtíveis do plano que são intersecções entre retas e circunferências construtíveis.

a) Uma reta intersectando uma reta

O ponto de interseção de duas retas é dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

onde a,b,c,a',b', e c' são construtíveis.
Se existir uma solução, será

$$x=-\left(\frac{c'b-cb'}{ab'-a'b}\right) \text{ e } y=-\left(\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}\right).$$

Como a,b,c,a',b',c' são números construtíveis, o ponto $\left(-\frac{c'b-cb'}{ab'-a'b},-\frac{ac'-a'c}{a'b-ab'}\right)$ também é construtível, pois foi obtido através de operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números construtíveis.

b) Uma reta intersectando uma circunferência

O ponto de interseção entre uma reta e uma circunferência é dada pela solução do sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

onde a,b,c,a',b', e c' são números construtíveis.

Se existir solução, ela poderá ser um ponto, se a reta for tangente à circunferência, ou dois pontos, se a reta for secante à circunferência. Para resolver tal sistema, isole y na segunda equação, obtendo

$$y=-\frac{a'}{b'}x-\frac{c'}{b'}.$$

Substituindo o valor de y na primeira equação, encontramos uma equação do 2° grau com incógnita x:

$$(a'^2+b'^2)x^2+(2a'c'+ab'^2-bb'a')x+c'^2-bb'c'+c=0.$$

Fazendo $A=a'^2+b'^2$, $B=2a'c'+ab'^2-bb'a'$ e $C=c'^2-bb'c'+c$, temos

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

cuja solução é

$$x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}.$$

De forma análoga, podemos encontrar a coordenada y, que terá uma fórmula semelhante à de coordenada x. Assim, as coordenadas do ponto de interseção entre uma reta e uma circunferência foram obtidas apenas por meio de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes quadradas dos números construtíveis em que o formato algébrico é $r+s\sqrt{k}$, onde r, s e k são construtíveis, $k\geq 0$.

c) Uma circunferência intersectando uma circunferência.

O ponto de interseção entre duas circunferências é dado pela solução do sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

onde a,b,c,a',b', e c' são números construtíveis.

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2+ax+by+c=0 \\ (a'-a)x+(b'-b)y+c'-c=0 \end{cases}$$

Note que a solução desse novo sistema recai na mesma solução do caso (b). Portanto, a interseção entre as duas circunferências corresponde a um ou dois pontos de coordenadas na forma $r+s\sqrt{k}$, onde r, s e k são construtíveis, $k \geq 0$.

3.2.2 O corpo dos números Construtíveis

Apresentaremos algumas definições a fim de que possamos embasar os resultados que estamos buscando para responder se todos os números reais são construtíveis.

Definição 3.8 *Um **corpo** é um conjunto K munido de duas operações, adição e multiplicação, satisfazendo certas propriedades fundamentais chamadas de axiomas de corpo.*

Para cada par de elementos $x, y \in K$, associamos um elemento $x+y$, chamado soma de x com y. A operação que faz corresponder a cada par de elementos x, y, o número $x+y$, chama-se adição e satisfaz aos seguintes axiomas:

A1. Associatividade: quaisquer que sejam $x, y, z \in K$, tem-se $(x+y)+z = x+(y+z)$.

A2. Comutatividade: quaisquer que sejam $x, y \in K$, tem-se $x+y = y+x$.

A3. Elemento Neutro: Existe $0 \in K$ tal que $x+0 = x$, seja qual for $x \in K$. O elemento 0 chama-se zero.

A4. Simétrico: todo elemento $x \in K$ possui um simétrico $-x \in K$ tal que $x+(-x) = 0$.

Além disso, para cada par de elementos $x, y \in K$, associamos um elemento $x.y$, chamado produto de x por y. A operação que faz corresponder a cada par de elementos x, y, o número $x.y$, chama-se multiplicação e satisfaz aos seguintes axiomas:

M1. Associatividade: dados quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

M2. Comutatividade: seja quais forem $x, y \in K$, vale $x \cdot y = y \cdot x$.

M3. Elemento Neutro: existe $1 \in K$ tal que $1 \neq 0$ e $x \cdot 1 = x$, qualquer que seja $x \in K$.

M4. Inverso multiplicativo: todo $x \neq 0$ em K possui um inverso x^{-1}, tal que $x.x^{-1} = 1$.

Por último, um axioma que relaciona as operações de adição e multiplicação e que completa a definição de corpo.

D1. Axioma da distributividade. Dados quaisquer $x, y, z \in K$, tem-se $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Exemplo 3.5 *O conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo.*

Definição 3.9 *Seja P um subconjunto de um corpo K, diz-se que P é **subcorpo** de K se ainda é um corpo munido das operações de K.*

Uma maneira de verificar que um subconjunto é um subcorpo é por meio do seguinte teorema, que enunciaremos sem demonstrar.

Teorema 3.2 *Um subconjunto P de um corpo K é um subcorpo de K se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

i. $0,\ 1 \in P$

ii. $x - y \in P$ *para quaisquer* $x, y \in P$

iii. $xy^{-1} \in P$ *para quaisquer* $x \in P$, $y \in P \backslash \{0\}$

Exemplo 3.6 *O conjunto dos números construtíveis é um subcorpo de* $\mathbb{R}$*, pois as condições (ii) e (iii) do teorema acima são verificadas pelo Teorema 3.1 e os números 0 e 1 são trivialmente construtíveis.*

Exemplo 3.7 *Fixando um* $k \in \mathbb{Q}^*$ *e considerando o conjunto* $A = \{a + b\sqrt{k}; a, b \in \mathbb{Q}\}$*, é fácil ver que A é um subcorpo de* $\mathbb{R}$*. De fato, sejam* $\alpha = a + b\sqrt{k}$, $\beta = c + d\sqrt{k}$, a, b, c, $d \in \mathbb{Q}$*, elementos de A. Assim:*

i. Obviamente 0 e 1 $\in A$.

ii. $\alpha - \beta = (a + b\sqrt{k}) - (c + d\sqrt{k}) = (a - c) + (b - d)\sqrt{k}$.

Tomando $r_1 = a - c$ *e* $s_1 = b - d$*, temos:*

$\alpha - \beta = r_1 + s_1\sqrt{k} \in A$.

iii. $\alpha\beta^{-1} = \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a + b\sqrt{k}}{c + d\sqrt{k}} = \dfrac{(a + b\sqrt{k})}{(c + d\sqrt{k})} . \dfrac{(c - d\sqrt{k})}{(c - d\sqrt{k})} = \dfrac{ac - kbd}{c^2 - kd^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 - kd^2}\sqrt{k}$,

com $c^2 - kd^2 \neq 0$

Tomando $r_2 = \dfrac{ac - kbd}{c^2 - kd^2}$ *e* $s_2 = \dfrac{bc - ad}{c^2 - kd^2}$*, temos:*

$\dfrac{\alpha}{\beta} = r_4 + s_4\sqrt{k} \in A$.

Definição 3.10 *Dados um corpo L e um subcorpo* $K \subset L$*, diremos que L é uma extensão de K e denotaremos este fato por* $L : K$.

Exemplo 3.8 *O conjunto* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ *é uma extensão de* $\mathbb{Q}$*. Ou seja,* $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}$.

Agora que o leitor já conhece o conceito de corpo, vejamos alguns resultados sobre o corpo dos números construtíveis.

A partir da unidade podemos construir o conjunto dos números racionais. Chamemos o corpo $\mathbb{Q}$ de P_0.

Com a construção de raízes quadradas, podemos sair de P_0 e chegar a um outro conjunto de números construtíveis, pois se k for um número construtível , pelo Teorema 3.1, pode-se construir $\sqrt{k}$, que pode ser um número irracional e, nesse caso, $\sqrt{k} \notin P_0$. Além disso, pode-se construir todos os números da forma $a+b\sqrt{k}$, em que a e b pertencem a P_0 e $\sqrt{k} \notin P_0$. Chamemos esse novo conjunto de P_1, que é um corpo (vide Exemplo 3.7).

Note que $P_0 \subset P_1$. Basta considerar $b=0$, pois para todo $a \in P_0$ podemos escrever $a = a+0\sqrt{k} \in P_1$. Podemos afirmar que P_0 é um subcorpo de P_1. Além disso, se $\sqrt{k} \notin P_0$, todos os números escritos da forma $a+b\sqrt{k}$ formam uma extensão do corpo dos racionais, que denotamos por $P_1 = P_0(\sqrt{k})$.

Continuando, seja k_1 um elemento de P_1. Pelo Teorema 3.1, podemos marcar $\sqrt{k_1}$. No caso em que $\sqrt{k_1} \notin P_1$, obtemos um novo corpo P_2 do tipo $a_1+b_1\sqrt{k_1}$, com $a_1, b_1 \in P_1$. Obviamente, P_0 e P_1 estão contidos em P_2. Assim, os números do tipo $a_1+b_1\sqrt{k_1}$ formam uma extensão de P_1, denotada $P_2 = P_1(\sqrt{k_1})$. Prosseguindo esse processo indefinidamente, vamos encontrar uma cadeia de corpos

$$\mathbb{Q} = P_0 \subset P_1 \subset P_2 ... \subset P_{n-1} \subset P_n \subset ....$$

Dessa forma, todos os números de P_0, P_1, P_2, ... P_n, são construtíveis por régua e compasso, pois foram obtidos a partir da unidade em um processo finito de soma, subtração, produto, divisão e extração de raízes quadradas de números construtíveis.

Vejamos que todo número construtível pertence a um dos corpos P_0, P_1, P_2,... P_n....

Na Subseção 3.2.1, do caso (a) em que temos a intersecção de duas retas, se os coeficientes a,b,c,a',b', e c' de equações do primeiro grau estão em um corpo P_i, então a solução do sistema ainda estará no corpo P_i. Dos casos (b) e (c) , se os números a,b,c,a',b', e c' estão em um corpo P_i dos números construtíveis as soluções dos sistemas são números que pertencem a uma extensão $P_{i+1} = P_i(\sqrt{k_i})$, onde $k_i \in P_i$.

Assim, todo número construtível pertence a um dos corpos da cadeia abaixo:

$$\mathbb{Q} = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset .... \subset P_n \subset ...$$

onde $P_n = P_{n-1}(\sqrt{k_{n-1}})$, com $k_{n-1} \in P_{n-1}$ e $\sqrt{k_{n-1}} \notin P_{n-1}$.

O que fizemos até agora, nos permite concluir o seguinte teorema:

Teorema 3.3 *Um número é construtível se, e somente se, pertencer a um dos corpos de uma cadeia*

$$\mathbb{Q} = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset .... \subset P_n \subset ...$$

onde $P_n = P_{n-1}(\sqrt{k_{n-1}})$, *com* $k_{n-1} \in P_{n-1}$ *e* $\sqrt{k_{n-1}} \notin P_{n-1}$.

Esse teorema é uma das ferramentas que nos auxilia a concluir que todo número construtível é algébrico (ver Definição 3.13), ou seja, é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes racionais. Para maiores detalhes, consulte [18].

Na seção seguinte, detalharemos mais sobre polinômios e números algébricos.

3.2.3 Polinômios e Números algébricos

Definição 3.11 *Seja K um corpo qualquer, a expressão na variável x*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0,$$

onde os coeficientes $a_0,\ a_1,\ ...a_n \in K$, *é chamada de* ***polinômio*** *sobre K. Se* $a_n \neq 0$, *dizemos que o polinômio tem grau n.*

Exemplo 3.9 *O polinômio* $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$ *tem grau 3 e os coeficientes são* $a_3 = 3,\ a_2 = 2, a_1 = -3$ *e* $a_0 = -2$.

Notação: $K[x]$ representa o conjunto de todos os polinômios sobre K em uma variável x.

Definição 3.12 *Seja* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0$, *não nulo em* $K[x]$ *e um número* $\alpha \in K$. *Se* $p(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_0 = 0$, *então dizemos que* α *é* ***raiz*** *do polinômio* $p(x)$ *em K.*

Exemplo 3.10 *O número* $-\dfrac{2}{3}$ *é raiz de* $p(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$. *De fato,*

$$p(-\frac{2}{3}) = 3(-\frac{2}{3})^3 + 2(-\frac{2}{3})^2 - 3(-\frac{2}{3}) - 2 = 0.$$

Definição 3.13 *Diz-se que um polinômio sobre um corpo K é* ***redutível*** *sempre que for possível escrevê-lo como um produto de dois outros polinômios de graus menores sobre o corpo K (nenhum constante). Do contrário, diz-se que o polinômio é* ***irredutível*** *sobre K.*

Exemplo 3.11 *O polinômio* $p(x) = x^3 - 5x$ *é redutível em* $\mathbb{Q}$, *pois se fatora em* $x(x^2 - 5)$. *Já o polinômio* $p(x) = x^4 - 2$ *é irredutível em* $\mathbb{Q}$, *pois não se pode escrevê-lo como um produto de dois outros polinômios de graus menores.*

Uma maneira de descobrir se um polinômio é redutível em $K[x]$ é verificar se ele tem ou não raízes em K. No caso em que $K = \mathbb{Q}$, o Teorema 3.4 nos garante que, se um polinômio tem raiz racional, então ele é redutível em $\mathbb{Q}$. E a Proposição 3.5, nos fornece um critério bastante útil sobre irredutibilidade de polinômios em $\mathbb{Q}$.

Teorema 3.4 *Seja $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros primos entre si. Se $\frac{a}{b}$ é raiz do polinômio $p(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_0$, então a é divisor de c_0 e b é divisor de c_n.*

Demonstração.

Seja $\frac{a}{b}$ uma raiz de $p(x)$. Ou seja, substituindo $\frac{a}{b}$ por x, teremos:

$$c_n(\frac{a}{b})^n + c_{n-1}(\frac{a}{b})^{n-1} + c_{n-2}(\frac{a}{b})^{n-2} + ... + c_0 = 0. \tag{3.1}$$

Multiplicando ambos os membros do polinômio acima por b^n, obtemos:

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + ... + c_2 a^2 b^{n-2} + c_1 a^1 b^{n-1} + c_0 b^n = 0. \tag{3.2}$$

Logo:

$$c_n a^n = -c_{n-1}a^{n-1}b - ... - c_2 a^2 b^{n-2} - c_1 a^1 b^{n-1} - c_0 b^n. \tag{3.3}$$

Colocando b em evidência:

$$c_n a^n = b(-c_{n-1}a^{n-1} - ... - c_2 a^2 b^{n-3} - c_1 a^1 b^{n-2} - c_0 b^{n-1}) \tag{3.4}$$

Concluímos que b é divisor de $c_n a^n$ e como b e a^n não possuem fatores primos comuns, então b é um divisor de c_n.

Agora, reescrevendo (3.2) como

$$c_0 b^n = -c_n a^n - c_{n-1}a^{n-1}b - ... - c_2 a^2 b^{n-2} - c_1 a^1 b^{n-1},$$

e colocando a em evidência

$$c_0 b^n = a(-c_n a^{n-1} - c_{n-1}a^{n-2}b - ... - c_2 a b^{n-2} - c_1 b^{n-1})$$

concluímos que a é divisor de $c_0 b^n$ e como a e b^n não possuem fatores primos comuns, então a é um divisor de c_0. Portanto, a é divisor de c_0 e b é divisor de c_n. $\square$

No Ensino Médio, esse teorema é útil para determinar se a raiz de um polinômio em $\mathbb{Q}$ é um número racional ou irracional. Portanto, usando polinômios, os alunos da educação básica podem provar a irracionalidade de um número.

Exemplo 3.12 *Demonstre que o número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é irracional.*

Solução.
Escrevendo $\sqrt{1+\sqrt{2}} = x^2$ e elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos:

$$1+\sqrt{2} = x^2.$$

Reorganizando os termos, segue

$$\sqrt{2} = x^2 - 1.$$

Elevando novamente a equação ao quadrado, temos:

$$2 = x^4 - 2x^2 + 1,$$

ou

$$x^4 - 2x^2 - 1 = 0.$$

O Teorema 3.4 nos diz que se a equação tiver uma raiz racional $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$, então $a | -1$ e $b|1$, ou seja, as possíveis raízes racionais seriam 1 ou -1. Se verificarmos esses números, perceberemos que nenhum dos dois é raiz de $p(x) = x^4 - 2x^2 - 1$. Portanto, o número $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ é irracional.

Enunciaremos sem demonstrar o seguinte critério de irredutibilidade em $\mathbb{Q}$. A quem interessar, veja demonstração em [2].

Proposição 3.5 (Critério de Eisenstein) *Seja $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx_n$ um polinômio cujos coeficientes são números inteiros. Se existir um primo p tal que*

i $p \nmid a_n$;

ii $p \mid a_0,\ a_1, ...a_{n-1}$;

iii $p^2 \nmid a_0$.

Então $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$.

Definição 3.14 *Seja $F \subset K$ uma extensão de corpos. Um número $\alpha \in K$ é chamado de algébrico sobre F se existir um polinômio não nulo $p(x) \in F[x]$ tal que α é raiz de $p(x)$. Um número que não é algébrico é chamado de transcendente.*

Exemplo 3.13 *Os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ são algébricos sobre $\mathbb{Q}$, pois são raízes, respectivamente, dos polinômios $p(x) = x^2 - 2$, $p(x) = x^3 - 5$ e $p(x) = x^4 - 2x^2 - 1$. Já os números e e π são transcendentes, como demonstraram Charles Hermite(1822-1905) e Ferdinand Lindemann(1852-1939), respectivamente. Aos interessados, ver demonstrações em [21] .*

Na Subseção 3.2.2 em que buscamos caminhos, para responder a pergunta: todos os números reais são construtíveis? Afirmamos apenas que todo número construtível é algébrico.

Agora, surge outra pergunta: será que todos os números algébricos são construtíveis? A resposta é não. Para confirmar nossa resposta, enunciaremos o seguinte teorema, que é consequência do Teorema 3.3, pois todo número construtível está na cadeia de corpos que aparece naquele teorema e todo número daquela cadeia é algébrico. Mas uma demonstração completa pode ser encontrada em em [18].

Teorema 3.6 *Se um número real α é construtível, então α é algébrico e o grau do polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ que tem α como raiz é uma potência de* 2

De posse desse teorema, podemos, finalmente, analisar quais números são construtíveis na reta real. E a resposta para pergunta: todos os números reais são construtíveis? É não.

Analisando o Exemplo 3.13, em que os números algébricos $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$ e $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ são raízes, respectivamente, dos polinômios, $p(x) = x^2 - 2$, $p(x) = x^3 - 5$ e $p(x) = x^4 - 2x^2 - 1$. Pelo teorema 3.6, podemos afirmar que $\sqrt{2}$, e $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ são construtíveis, pois são algébricos e o graus dos polinômios irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$ são potências de 2. Já o $\sqrt[3]{5}$ não é construtível, pois o grau do polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ que tem esse número como raiz é 3.

Esse teorema também possibilitou resolver os Três Problemas Clássicos da Geometria Grega apresentados em [30], os quais resumimos da seguinte forma:

- Duplicação do cubo, que é o problema de construir a aresta de um cubo cujo volume é o dobro do cubo inicial;

- Trissecção do ângulo, que é o problema de dividir um ângulo arbitrário em três partes iguais;

- Quadratura do círculo, o problema de construir um quadrado cuja área é igual a de um determinado círculo.

A duplicação do cubo consiste em construir geometricamente um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$. Construir tal segmento é o mesmo que resolver o problema de duplicar o cubo, ou seja, dado um determinado cubo construir outro com o dobro do volume. Tomando um cubo de aresta unitária, o segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$ seria a medida da aresta de um cubo cujo volume é o dobro do volume do cubo inicial.

Assim, resolver o problema da duplicação do cubo é equivalente a estudar as raízes do polinômio $f(x) = x^3 - 2$. Observe que o número $\sqrt[3]{2}$ é uma das raízes e $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, bastando considerar $p = 2$ no Critério de Eisenstein. Logo, o número $\sqrt[3]{2}$ não é construtível, já que o grau de $f(x)$ é 3, ou seja, $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído com régua e compasso.

Para maiores detalhes sobre os problemas da trissecção do ângulo e da quadratura do circulo, veja [14].

3.2.4 A questão de construtibilidade nos livros do ensino médio

Os livros do ensino médio nos levam a ter certeza que podemos construir exatamente todos os números. Vejamos na Figura 3.15 que a maneira como os livros escrevem deixam a sensação de que podemos marcar todos esses números que estão representados na reta numérica.

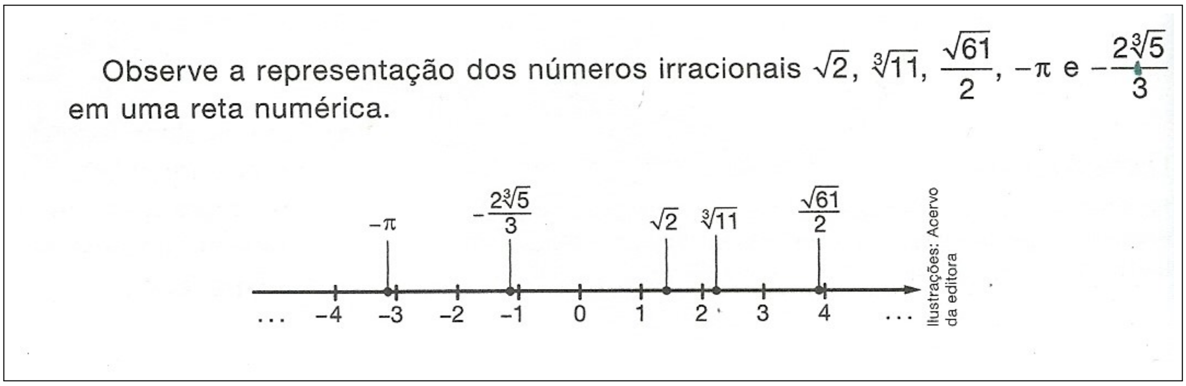


Figura 3.15: Representação de números irracionais em uma reta na Coleção D

A respeito dos números que aparecem representados na Figura 3.15, podemos marcar exatamente os números inteiros e os números $\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{61}}{2}$. E os números $\sqrt[3]{11}$, $-\frac{2\sqrt[3]{5}}{3}$ e π? Eles são construtíveis? Ou seja, podemos obter por meio de um processo finito, usando apenas régua e compasso, um segmento que tenha como comprimento esses números?

Ao tratar esse problema de construir números algebricamente, já chegamos a um resultado importante capaz de responder essas indagações, o Teorema 3.6.

Exemplo 3.14 *Os números* $\sqrt[3]{11}$ $-\frac{2\sqrt[3]{5}}{3}$ *e* $-\pi$ *não são construtíveis.*

Solução:

i. O número $\sqrt[3]{11}$ é uma raiz de $f(x) = x^3 - 11$, esse número é algébrico e $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, basta considerar $p = 11$ no critério de Eisenstein. Logo $\sqrt[3]{11}$ não é número construtível, pois o grau do polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 3.

ii. O número $-2\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$ é raiz de $p(x) = 27x^3 + 40 = 0$. Esse número é algébrico e $f(x)$ é irredutível sobre $\mathbb{Q}$, basta considerar $p = 5$ no critério de Eisenstein. Logo $-2\frac{\sqrt[3]{5}}{3}$ não é número construtível, pois o grau do polinômio irredutível sobre $\mathbb{Q}$ é uma potência de 3.

iii. O número π é transcendente como já mencionamos no exemplo 3.13, assim $-\pi$ também é um transcendente e portanto não é um número construtível, pois pelo teorema 3.6 um número para ser construtível precisa ser algébrico.

Portanto, os números $\sqrt[3]{11}$ $-\dfrac{2\sqrt[3]{5}}{3}$ e π, que aparecem representados na reta real no livro de ensino médio, não são construtíveis. Ou seja, não podemos marcá-lo na reta real usando régua e compasso.

Dessa forma, a impressão que os livros do ensino médio nos passam, de que todos os números podem ser marcados na reta real, é falsa. Dos números que estão representados na figura 3.15, sabemos que são construtíveis apenas os números inteiros e os números $\sqrt{2}$ e $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$.

O número $\sqrt{2}$ é construtível, pois existe um segmento de comprimento $\sqrt{2}$, ou seja, existe um ponto na reta que é $\sqrt{2}$, esse número é raiz da equação polinomial $x^2 - 2 = 0$. E podemos construí-lo pelo processo proposto no teorema 3.1, ou pelo procedimento que aparece nos livros de ensino médio, em que, dado um quadrado de lado 1, usando o teorema de Pitágoras, chegamos que a diagonal desse quadrado é igual a $\sqrt{2}$. Para marcá-lo basta desenhar a circunferência de raio $\sqrt{2}$, como visto nas imagens nas 2.8 e 2.10.

Do mesmo modo, existe um ponto na reta que é $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$, esse número é raiz da equação polinomial $4x^2 - 61 = 0$ e pelo teorema 3.1 podemos construí-lo.

Os números $\sqrt[3]{11}$ e $-\frac{2\sqrt[3]{5}}{3}$ são raízes das equações polinomiais $x^3 - 11 = 0$ e $27x^3 + 40 = 0$, respectivamente. Podemos marcá-los na reta real, assim como marcamos $\sqrt{2}$? Não. Embora sejam números algébricos, seus graus não são potências de 2. Como foi visto no exemplo 3.14, esses números não são construtíveis, ou seja, não é possível usando régua e compasso encontrar um segmento de reta com essas medidas.

3.2.5 Uma pergunta interessante que foi feita

Diante disso, ainda fica a pergunta: Como marcar na reta real os números que não são resultados de equações polinomiais cujo grau são potências de 2?

Em uma pesquisa rápida na internet, nos deparamos com a seguinte pergunta no site [41]:

"Does $\sqrt[3]{2}$ really exist on the real number line or does it exist only in our minds?"

Traduzindo essa pergunta: "O número $\sqrt[3]{2}$ existe na reta real ou existe apenas em nossas mentes?"

Essa pergunta faz sentido, pois é tão estranho que o número $\sqrt[3]{2}$ não seja construtível que alguém chega até questionar sua existência.

Ora, os próprios livros de ensino médio, ao tratar os números reais, tenta convencer os leitores que a reta é "completa" e que existe uma correspondência biunívoca, na qual podemos associar cada número real a um ponto da reta e cada ponto da reta pode ser associado a um número real. Então, esse número deve existir além das nossas mentes, ele deve existir na reta real, pois trata-se de um número real.

A questão é, esse número existe, mas como vimos na seção anterior, não podemos construí-lo, ou seja, não sabemos como encontrar o ponto na reta que corresponde exatamente ao número $\sqrt[3]{2}$.

Assim, precisamos de resultados que levem as pessoas a afirmarem que esse número existe, com a mesma facilidade que responderia se existe um número inteiro entre 10 e 12, ou se existe um número inteiro entre 10 e 11.

Capítulo 4

Completude dos Números Reais

> "*O belo é o equilibrado, o harmônico, aquilo que está completo, sem que lhe falte nada, e cujas partes estão ordenadas no conjunto.*"
>
> (Ricardo Yepes Stork)

Um dos desafios que os livros didáticos de ensino médio enfrentam é apresentar de modo satisfatório o conjunto dos números irracionais para alunos do primeiro ano. Este conjunto geralmente é apresentado após o conjunto dos racionais e, em seguida, o conjunto dos números reais. De acordo com FISHBEIR et al. *apud* MOREIRA [29]:

> Como seria possível passar dos racionais aos reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os irracionais são parte do sistema numérico e sem eles o conceito de número real é incompleto. Basta descuidar-se dos irracionais e todo o sistema desmorona.

Nos livros didáticos de ensino médio, a passagem da apresentação dos números racionais para os irracionais passa por um conceito importante e não muito simples de ser ensinado aos alunos: o conceito de completude dos números reais. Basicamente, todo livro didático toca nesse assunto de forma mais ou menos velada (vide Subseção 2.2.3). Já nos cursos de Análise Real, geralmente o conjunto dos números reais é apresentado pela via axiomática, em que $\mathbb{R}$ é um corpo arquimediano, ordenado e completo, como veremos na Subseção 4.2.3.

Nesse capítulo, abordaremos algumas ideias de completude nos livros didáticos de Matemática e em livros de Análise Real.

4.1 A ideia velada de completude apresentada nos livros de ensino médio

Um conceito importante presente na passagem do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais é o conceito de completude. Esse conceito aparece de maneira velada nos livros de ensino médio. A ideia usada pela maioria dos livros objetiva convencer os leitores que nem todo ponto da reta representa um número racional. Nesse momento surge a necessidade de ampliar o conjunto dos números racionais e adotar um novo conjunto numérico, que seja capaz de preencher os "buracos" deixados pelos racionais, como visto na análise dos números racionais pela Coleção C, Figura 2.4, Subseção 2.2.1.

Em seguida, a ideia trazida pelos livros é de associar biunivocamente o conjunto dos números reais aos pontos de uma reta e afirmar que os números reais esgotam todos os pontos da reta numérica, ou seja, "não tem buracos", está "completa". Essa reta tornou-se completa juntando-se os números irracionais ao conjunto dos números racionais, formando, assim, o conjunto dos números reais.

Na Subseção 2.2.3, alguns livros analisados abordam de maneira clara a ideia de correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais, como pode ser visto na análise dos números reais pelas Coleções B e C. Na Coleção C, Figura 2.18, ao estabelecer uma correspondência biunívoca entre a reta orientada e o conjunto $\mathbb{R}$, o livro faz uma inter-relação entre geometria e aritmética, levando-nos a concluir que com os números reais a reta deixa de ter "buracos". Já as Coleções A e D, não abordam de maneira explícita a questão da correspondência biunívoca, mas a Coleção A, deixa claro que com os números reais a reta está completa, visto que na Figura 2.16 a palavra que o autor usa é "preencher", e o significado dessa palavra, segundo o dicionário Houaiss [19], é: *"acrescentar a (algo) o que lhe falta pra torná-lo completo; completar."*

Com o procedimento adotado na maioria dos livros didáticos de ensino médio, de fazer corresponder cada ponto da reta a um único número real, geometriza-se, de certa forma, o conceito de completude, usando-se uma ideia figurativa, visual, bem mais simples de ser assimilada pelos alunos, que é a da reta numérica. E em nossa opinião, o uso da palavra " preencher" no sentido de completar, satisfaz o requisitado para o conhecimento esperado que um aluno do Ensino Médio deva ter da ideia de completude. Mas um professor de matemática precisa entender o que realmente a palavra "completa", ou melhor, "completude", significa. Diante disso, passaremos a descrever como os livros da disciplina de Análise Matemática tratam a ideia da completude de $\mathbb{R}$.

4.2 A ideia de completude apresentada em alguns livros de Análise Real

Na Análise Matemática, os números reais desempenham um papel central, por ser o alicerce da disciplina. É a partir da construção dos números reais que toda a teoria posterior é desenvolvida. Essa teoria foi construída com a contribuição de muitos estudiosos.

> A partir da metade do século XIX, muitos matemáticos começaram a publicar trabalhos que abordavam o conceito de número real. Com abordagens bastante distintas, tratavam tanto da definição dos números reais, como também do conceito de função real.[3]

Seguindo [3], vejamos algumas das pessoas que contribuíram na formalização do conceito de completude e suas abordagens acerca da construção dos números reais.

Nascido em Braunschweig, Alemanha, sendo um dos quatro filhos de uma família luterana, Richard Dedekind (1831-1916), inspirado na teoria das proporções de Eudoxo, construiu os números reais através de divisões ou cortes no conjunto dos números racionais.

Georg Cantor(1845-1918), russo, nascido St.Petesburg, construiu os números reais a partir dos números racionais. Ele obteve um corpo ordenado completo que é resultado do conjunto de classes de equivalências das sequências de Cauchy.

Na construção dos números reais, David Hilbert(1862-1943) leva em consideração quatro grupos de axiomas. O último a ser acrescentado: axioma da completude, que nos livros de Análise Real aparece em novas versões como Postulado de Dedekind ou Axioma fundamental da Análise.

A ideia de completude dos números reais nos livros de Análise Matemática geralmente é associado à ideia de ínfimo e supremo, como veremos adiante. Mas, antes, para efeito de tornar um texto satisfatório, trataremos a abordagem axiomática, a fim de compreendermos o que é um corpo ordenado. E, também, definiremos o que é supremo e o que é ínfimo.

4.2.1 Corpo Ordenado

Definição 4.1 *Um* ***corpo ordenado*** *é um corpo K, no qual se destacou um subconjunto $P \subset K$, chamado o conjunto dos elementos positivos de K, tais que satisfaz as seguintes condições:*

P1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$ e $x.y \in P$.

P2. Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.

Se indicarmos por $-P$ o conjunto dos elementos $-x$ com $x \in P$, a condição (P2.) diz que $K = P \cup (-P) \cup \{0\}$ e os conjuntos $P, (-P)$ e $\{0\}$ são dois a dois disjuntos. Os elementos de $-P$ chamam-se negativos.

Sejam x e y elementos de P. Escreveremos $x < y$, e diremos que x é menor que y quando $y - x \in P$. Isto equivale dizer que existe um z positivo, tal que $y = x + z$. Diante disso, escreve-se também $y > x$ e diz-se que y é maior do que x.

Em particular, $x > 0$ significa que $x \in P$, ou seja, x é positivo, enquanto $x < 0$ significa que é negativo, isto é $x \in -P$.

Na relação de ordem $x < y$ em um corpo ordenado K, valem as seguintes propriedades:

O1. Transitividade: se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$.

O2. Tricotomia: dados $x, y \in K$, ocorre exatamente uma das alternativas $x = y, x < y$ ou $y < x$.

O3. Monotonicidade da adição: se $x < y$ então, para todo $z \in K$ tem-se $x + z < y + z$.

O4. Monotonicidade da multiplicação: se $x < y$ então, para todo $z > 0$ tem-se $xz < yz$. Se, porém, $z < 0$ então $x < y$ implica $yz < xz$.

4.2.2 Ínfimo e Supremo

Para a compreensão do significado de ínfimo e supremo precisamos conhecer os conceitos de cota superior e cota inferior, que seguem.

Definição 4.2 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. O número $b \in \mathbb{R}$ é uma* ***cota superior*** *de X se $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que X é limitado superiormente.*

Exemplo 4.1 *Dado o subconjunto $A = \{0, -2, -4, -6, ...\}$ do corpo ordenado $\mathbb{R}$, os elementos 0, 1, 2,... são cotas superiores de A. Note que 0 é a menor das cotas superiores. Assim, podemos dizer que o subconjunto A é limitado superiormente.*

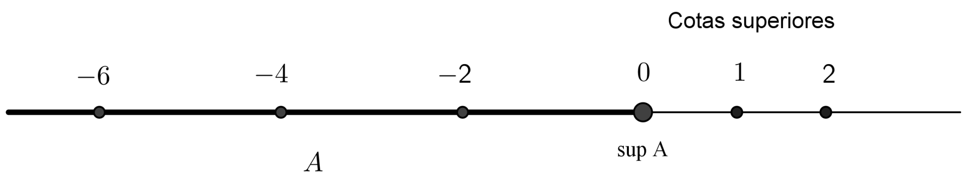


Figura 4.1: Conjunto A

Exemplo 4.2 *Seja $B = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 1\}$. Perceba que B não possui cota superior e, portanto, B não é limitado superiormente.*

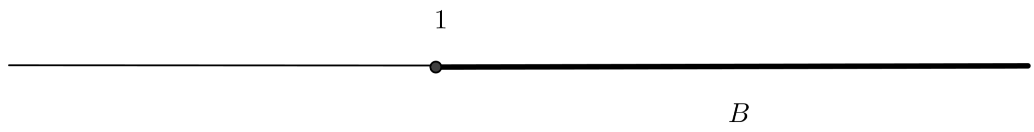


Figura 4.2: Conjunto B

Definição 4.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$. O número $a \in \mathbb{R}$ é uma* ***cota inferior*** *de X se $a \leq x$, para todo $a \in X$. Neste caso, diz-se que X é limitado inferiormente.*

Exemplo 4.3 *Seja $C = \{1,3,5,7,9\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$. Os números -1, 0 e 1 são cotas inferiores de C e 1 é a maior das cotas inferiores. Dessa forma, C é dito limitado inferiormente.*

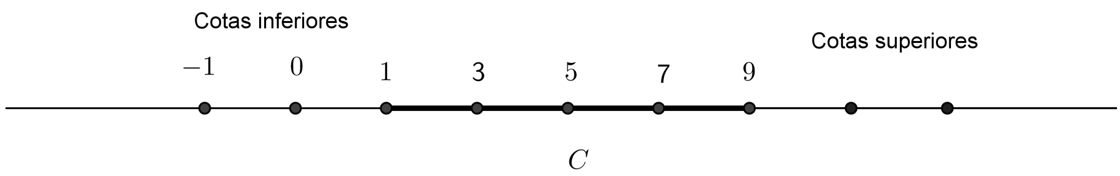


Figura 4.3: Conjunto C

Exemplo 4.4 *O subconjunto $D = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ não possui cotas inferiores. Assim, não é limitado inferiormente.*

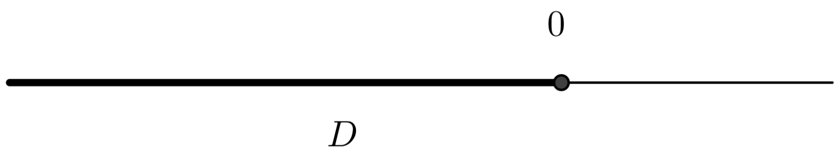


Figura 4.4: Conjunto D

Se X é limitado superiormente e limitado inferiormente, diz-se que X é um conjunto **limitado**. Isto significa que X está contido em algum intervalo $[a,b]$, ou equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $x \in X \Rightarrow |x| \leq k$.

Dos conjuntos vistos anteriormente, apenas o conjunto $C = \{1,3,5,7,9\}$ é limitado, pois apresenta cotas inferior e superior.

Definição 4.4 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ é dito* ***supremo*** *do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X. Podemos dizer que b é o supremo de X quando cumpre as seguintes condições:*

S1. Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$.

S2. Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$.

Denotamos $b = sup\ X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X. A condição (S2) pode ser reformulada como

S2'. Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.

Praticamente, (S2') quer dizer que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X, o que pode ser expresso da seguinte forma: para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $b - \varepsilon < x_\varepsilon$.

Geometricamente,

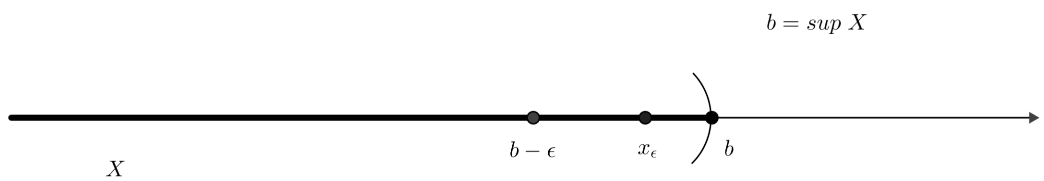


Figura 4.5: Ideia geométrica de supremo

Vejamos alguns exemplos de como encontrar o supremo de um conjunto.

Exemplo 4.5 *Considere $E = \{x \in \mathbb{R};\ x \leq 2\}$. Encontre $sup\ E$.*

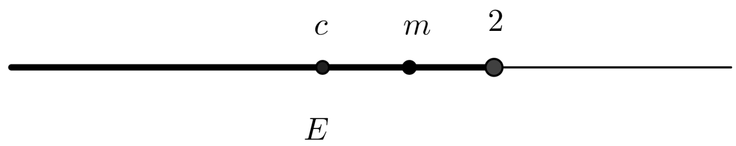


Figura 4.6: Conjunto E

Observe que $E \neq \varnothing$ e E é limitado superiormente. Por exemplo, $5 \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq 5$, $\forall x \in E$. Mostremos que o número real 2, satisfaz as condições (S1) e (S2').

Para todo $x \in E$, temos $x \leq 2$. Assim, 2 é cota superior do conjunto E, satisfazendo (S1).

Seja $c \in \mathbb{R}$ arbitrário, tal que $c < 2$. Considere m a média aritmética entre c e 2, isto é, $m = \dfrac{c+2}{2}$. Assim, $c < m < 2$ e $m \in E$. Como $c < 2$ foi qualquer, concluímos que para todo $c < 2$, existe $m \in E$ tal que $m > c$.

Logo, c não é cota superior do conjunto E, e 2 é a menor das cotas superiores, já que satisfaz (S2'). Portanto, $2 = sup\, E$.

Exemplo 4.6 *Considere o conjunto* $F = \{\dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ *em* $\mathbb{R}$. *Encontre* $sup\, F$.

Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $n < n+1$, donde $\dfrac{n}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Assim, $x \leq 1$, para todo $x \in X$ e, portanto, 1 é cota superior de F.

Para provar que 1 é o supremo de F, vamos mostrar que dado qualquer número $\varepsilon > 0$ existe um $n_\varepsilon \in F$, tal que $1 - \varepsilon < \dfrac{n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1}$.

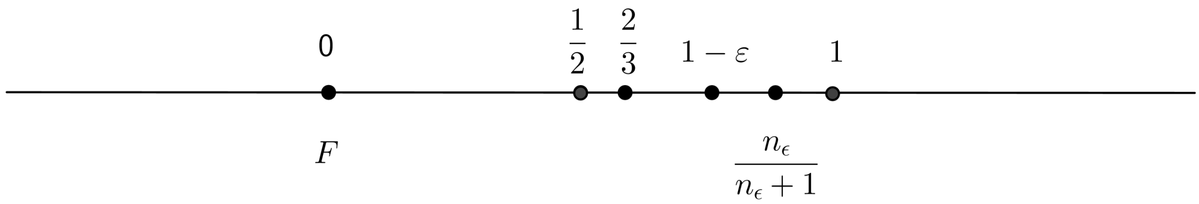


Figura 4.7: Conjunto F

Seja $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais (veja teorema 4.1), existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que,

$$n_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Note que:

$$n_\varepsilon > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \Rightarrow n_\varepsilon \varepsilon > 1 - \varepsilon \Rightarrow n_\varepsilon \varepsilon + \varepsilon > 1 \Rightarrow \varepsilon(n_\varepsilon + 1) > 1 \Rightarrow \varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon + 1} \Rightarrow$$

$$-1 + \varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon + 1} - 1 \Rightarrow -1 + \varepsilon > \frac{-n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1} \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1}.$$

Como $\dfrac{n_\varepsilon}{n_\varepsilon + 1} \in F$, $1 - \varepsilon$ não é cota superior do conjunto F. Portanto, $sup\, F = 1$.

Definição 4.5 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado inferiormente e não-vazio. Um número $a \in \mathbb{R}$ é dito* ***ínfimo*** *do conjunto X quando é a maior das cotas inferiores de X. Mais explicitamente, a é o ínfimo do conjunto X quando cumpre as seguintes condições:*

I1. Para todo $x \in X$, tem-se $a \leq x$.

I2. Se $c \leq x$, para todo $x \in X$, então $c \leq a$.

Denotamos $a = inf\ X$ para indicar que a é o ínfimo do conjunto X.

A condição (I2) pode ser também reformulada como

I2'. Se $a < c$, então existe $x \in X$ tal que $x < c$.

O que de fato (I2') quer dizer é que nenhum número maior do que a é cota inferior de X, o que pode ser expresso da seguinte forma: para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $x_\varepsilon < a + \varepsilon$.

Geometricamente,

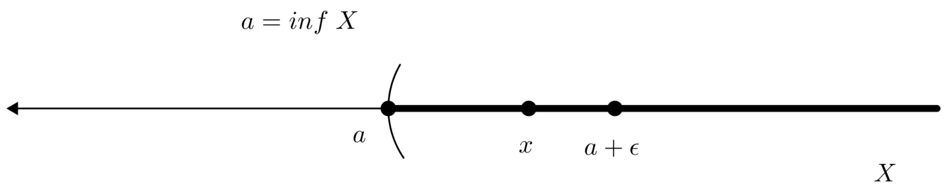


Figura 4.8: Ideia geométrica de ínfimo

Vejamos alguns exemplos de como encontrar o ínfimo de um conjunto.

Exemplo 4.7 *Considere o conjunto* $G = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ *em* $\mathbb{R}$. *Encontre* $inf\ G$.

Sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} \geq 0$. Logo 0 é cota inferior de G.

Para provar que 0 é o ínfimo, precisamos mostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$.

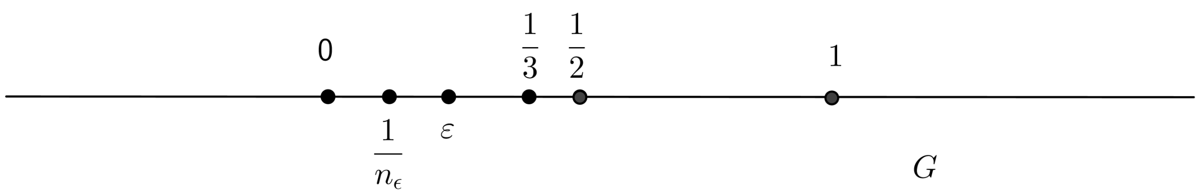


Figura 4.9: Conjunto G

Seja $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana dos Números Reais, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n_\varepsilon \varepsilon > 1$.

Note que:

$$n_{\varepsilon}\varepsilon > 1 \Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n_{\varepsilon}} < \varepsilon.$$

Como $\frac{1}{n_{\varepsilon}} \in G$, ε não é uma cota inferior de G. Logo, 0 é a maior das cotas inferiores de G, isto é, $0 = inf\ G$.

Exemplo 4.8 *Considere o conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3\}$. Encontre $inf\ H$.*

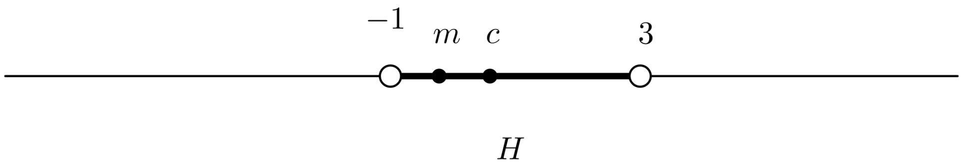


Figura 4.10: Conjunto H

Note que -1 é cota inferior de H, pois para todo $x \in H$, tem-se que $x \geq -1$, satisfazendo a condição (I1). Por outro lado, nenhum $c > -1$ pode ser cota inferior de H, pois dado $3 > c > -1$, tomando o ponto médio $m = \frac{c+(-1)}{2}$ teríamos, $m \in H$ e $m < c$. Provando que c não é cota inferior para F. Logo, -1 satisfaz a condição (I2'), e portanto -1 é a menor das cotas inferiores. Logo, $-1 = inf\ H$.

Um número $b \in X$ é o **elemento máximo** do conjunto X quando $b \geq x$ para todo $x \in X$. No conjunto $E = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 2\}$, por exemplo, mostramos que $2 = sup\ E$. Neste caso dizemos que o 2 é o elemento máximo de E. Se um conjunto possuir um elemento máximo, este será o seu supremo; analogamente, se um conjunto possuir um **elemento mínimo**, este será o seu ínfimo. Mas o supremo e o ínfimo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ nem sempre são elementos de X. No conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 3\}$, mostramos que $-1 = inf\ H$. Observem que neste caso $inf\ H \notin H$.

Nesse momento cabe fazer a seguinte afirmação: "A noção de supremo serve precisamente para substituir a ideia de maior elemento de um conjunto quando esse maior elemento não existe, o mesmo é válido para o ínfimo. O supremo do conjunto $[a,b)$ é b. Considerações inteiramente análogas podem ser feitas em relação ao ínfimo" [24]

4.2.3 Corpo Ordenado Completo

Definição 4.6 *Um corpo ordenado K chama-se **completo** quando todo subconjunto não-vazio limitado superiormente possui supremo em K.*

O corpo ordenado $\mathbb{R}$ é completo. Afirmar isso significa que em $\mathbb{R}$ vale a seguinte propriedade, conhecida como Axioma de Dedekind:

Axioma 4.1 (Axioma de Dedekind) *Todo subconjunto de números reais não-vazio limitado superiormente, possui um supremo.*

Uma consequência da completude de $\mathbb{R}$ é o Teorema dos Intervalos Encaixantes, que será apresentado e demonstrado na Seção 5.1.

O Axioma de Dedekind também pode ser usado para demostrar a propriedade a seguir, que já usamos anteriormente. Sua demonstração pode ser encontrada em [15] ou em [24].

Teorema 4.1 (Propriedade Arquimediana dos números reais) *Dados números reais $0 < a < b$, existe um número natural n tal que $b < na$.*

Agora que sabemos o significado de corpo ordenado completo, fica a pergunta: o conjunto $\mathbb{Q}$ é ou não completo?

Vejamos nas seções seguintes como alguns livros de Análise Real abordam essa ideia de completude.

4.3 Os livros de Análise Real e a ideia de completude

No livro *Análise Real* [24], referência bibliográfica bastante frequente na disciplina de Análise Matemática dos cursos de licenciatura em matemática, aparece inicialmente a descrição de $\mathbb{R}$ como um corpo, em que o autor apresenta os axiomas e consequências. Em seguida, trata $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado, demonstrando algumas propriedades da relação de ordem e, por fim, apresenta $\mathbb{R}$ como um corpo ordenado completo, trazendo as definições de supremo e ínfimo. A ideia de completude é apresentada na seguinte afirmação:

> A afirmação de que o corpo ordenado $\mathbb{R}$ é *completo* significa que todo conjunto não-vazio, limitado superiormente, $X \subset \mathbb{R}$ possui supremo $b = \sup X \in \mathbb{R}$.

Figura 4.11: A ideia de completude apresentada em [24]

O livro *Análise I* [20], que também costuma ser adotado na disciplina de Análise Matemática, aborda inicialmente o conjunto dos números racionais. Após definir e apresentar as propriedades que caracterizam um corpo, o autor trata o conjunto $\mathbb{Q}$ como um corpo.

Os números irracionais são introduzidos a partir da demonstração de que $\sqrt{2}$, medida da hipotenusa de um triangulo retângulo isósceles de catetos cujos comprimentos medem 1, não é um número racional. Segundo [20], a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ indica a "deficiência" de $\mathbb{Q}$, ou seja, que na reta numérica existem pontos que não correspondem a elementos de $\mathbb{Q}$, surgindo a necessidade de um conjunto mais amplo, tais que seus elementos estejam em correspondência biunívoca com os pontos da reta.

O autor prossegue com o estudo da estrutura de corpo ordenado, e novamente afirma que propriedade de corpo ordenado é válida para $\mathbb{Q}$, incluindo as propriedades da relação de ordem em tal estrutura. Traz, ainda, as noções de ínfimo e de supremo em um corpo ordenado e aborda um exemplo de um subconjunto que não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$. Por fim, define os números reais:

Agora definimos o conjunto $\mathbb{R}$ dos *números reais*, como sendo um corpo ordenado onde se verifica a propriedade a seguir.

Postulado de Dedekind. Todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$, constituído de elementos positivos, tem um ínfimo.

Figura 4.12: A ideia de completude apresentada em [20]

No livro *Análise Matemática para licenciatura* [1], em que os números reais são tratados como cortes de Dedekind, a ideia de completude aparece da seguinte forma:

Dizemos, pois, que o conjunto dos números reais é um corpo *completo*, justamente porque agora vale o teorema demonstrado pelo próprio Dedekind e que aqui nos limitamos apenas em enunciar.

3.4. Teorema (de Dedekind). *Todo corte de números reais possui um número real como elemento separador.*

Figura 4.13: A ideia de completude apresentada em em [1]

O autor segue falando da unicidade do corpo dos números reais, a menos de isomorfismos entre corpos ordenados, e menciona que a construção dos números reais a partir dos racionais, como faz Dedekind, é útil apenas pra provar que, de fato, existe um corpo ordenado completo, não importando se um número real é visto como um corte ou o supremo de um conjunto, mas que seja elemento de um conjunto que se comporte como um corpo ordenado completo. Em seguida, define supremo e ínfimo, concluindo a ideia de completude dos números reais.

Em um dos exercícios o autor sugere o seguinte:

Vimos que a propriedade do supremo tem como conseqüência a propriedade dos intervalos encaixados. Prove que esta última propriedade implica a propriedade do supremo, ficando assim provado que a propriedade do supremo equivale à propriedade dos intervalos encaixados.

Figura 4.14: Exercício proposto em [1]

Na Seção 4.5 de [1], o autor fala que além das construções dos reais usando o método de Dedekind, pode-se chegar aos números reais postulando a propriedade dos intervalos encaixantes. Mas, ao final, chega à seguinte conclusão: " Mas isso redundaria numa construção dos números reais praticamente idêntica à de Dedekind."[1]. Vale salientar que dos livros que apresentamos nessa Seção 4.3, apenas esse último atenta para a ideia de que a propriedade do supremo é equivalente à propriedade dos intervalos encaixantes, mas com essa conclusão, apresentada dessa forma, o aluno da licenciatura pode perder o interesse na construção dos números reais usando o Teorema dos Intervalos Encaixantes. Não é porque essa construção é idêntica à de Dedekind que ela não possa contribuir de forma mais eficaz para a compreensão da ideia de completude do reais, pois, como veremos no Capítulo 6, o Teorema dos Intervalos Encaixantes é bem mais manipulável que o Axioma de Dedekind.

4.4 $\mathbb{Q}$ x $\mathbb{R}$ nos livros de Análise Real

De tudo o que foi apresentado até o momento, o que nos permite distinguir $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$? Quais as propriedades vistas que também são válidas para $\mathbb{Q}$?

Nessa seção, além de respondermos as indagações acima, responderemos a pergunta que ficou no final da Seção 4.2: o conjunto $\mathbb{Q}$ é completo?

Veremos um resultado que mostra uma deficiência dos números racionais, que é a inexistência de raízes quadradas racionais de alguns números inteiros. Esse resultado, além de ser apresentado nos livros de Análise, também é trazido em alguns livros do Ensino Médio. Apenas apresentando essa demonstração podemos garantir a irracionalidade do número d discutido na Subseção 2.2.2.

Proposição 4.2 *Não existe um número racional cujo quadrado seja igual a 2.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista $(\frac{p}{q})^2 = 2$, com $p,q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$ e $(p,q) = 1$.

Assim, da igualdade $p^2 = 2q^2$, concluímos que p^2 é par e, consequentemente, p é par. Assim, podemos escrever $p = 2k$, onde k é um número inteiro.

Elevando $p = 2k$ ao quadrado, temos

$$p^2 = 4k^2,$$

assim, $2q^2 = 4k^2$ pois $p^2 = 2q^2$.

Daí, temos $q^2 = 2k^2$, donde concluímos que q^2 é par e, por conseguinte, q é par, chegando a uma contradição, pois consideramos que p e q não são ambos pares. . $\square$

A seguir, pensando no licenciando e futuro professor de Matemática, para que ele possa compreender as diferenças entre os conjuntos dos números racionais e dos números reais, apresentamos um exemplo em que um subconjunto de $\mathbb{Q}$ é limitado superiormente e não possui supremo, mostrando, assim, mais uma deficiência dos números racionais.

Proposição 4.3 *Considere o subconjunto* $X = \{x \in \mathbb{Q}; x \geq 0$ *e* $x^2 < 2\}$ *e* $Y = \{y \in \mathbb{Q}; y > 0$ *e* $y^2 > 2\}$. *Não existe* $\sup X$ *em* $\mathbb{Q}$ *e não existe* $\inf Y$ *em* $\mathbb{Q}$.

Demonstração.

Faremos esta demonstração em etapas:

A) Na primeira etapa, mostraremos que o conjunto X não possui elemento máximo.

Seja $x \in X$ qualquer. Então $x \geq 0$ e $x^2 < 2$. Vamos mostrar que existe em X um outro elemento maior que x. Mais especificamente, mostraremos que existe $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x + r \in X$. Consideremos o número $r \in \mathbb{Q}$ tal que $r < 1$ e $0 < r < \dfrac{2 - x^2}{2x + 1}$.

De $r < 1$, temos:

$$r < 1 \Rightarrow r^2 < r, \tag{4.1}$$

e, da segunda igualdade,

$$0 < r < \frac{2 - x^2}{2x + 1} \Rightarrow r(2x + 1) < 2 - x^2. \tag{4.2}$$

Usando (4.1) e (4.2), temos

$$\begin{aligned} (x + r)^2 &= x^2 + 2rx + r^2 < x^2 + 2rx + r \\ &= x^2 + r(2x + 1) < x^2 + 2 - x^2 = 2. \end{aligned}$$

Portanto, $(x + r)^2 < 2$ e, dessa forma, dado qualquer $x \in X$ existe $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, tal que $x + r \in X$. Claramente, $x < x + r$.

B) Na segunda etapa, mostraremos que o conjunto conjunto Y não possui elemento mínimo.

Seja $y \in Y$ qualquer . Então $y^2 > 2$ e $y > 0$, Vamos mostrar que existe em Y outro elemento menor que y, um $y - r \in Y$.

Mais especificamente, mostraremos que existe $r > 0$, $r \in \mathbb{Q}$, tal que $y + r \in Y$. consideremos o número racional

$$\frac{y^2 - 2}{2y}.$$

Como $y \in Y$, $y^2 > 2$ e $y > 0$,. Temos, $y^2 - 2 > 0$ e $2y > 0$. Daí,

$$\frac{y^2 - 2}{2y} > 0.$$

Tomamos um número $r \in \mathbb{Q}$ tal que

$$0 < r < \frac{y^2 - 2}{2y}.$$

Note que $2ry < y^2 - 2$, isto é, $-2ry > 2 - y^2$. Usando esse resultado, obtemos

$$\begin{aligned} (x-r)^2 &= y^2 - 2ry + r^2 \\ &> y^2 - 2ry \\ &> y^2 + 2 - y^2 = 2 \end{aligned}$$

Logo, $(y-r)^2 > 2$.

Note ainda que de $0 < r < \dfrac{y^2 - 2}{2y}$, segue

$$r < \frac{y}{2} - \frac{1}{y}.$$

Como $y > 0$, temos $r < \dfrac{y}{2} < y$ e, portanto, $(y - r) > 0$.

Concluímos que dado um $y \in Y$ arbitrário, podemos obter $(y-r) \in Y$ e, dessa forma, Y não possui elemento mínimo.

C) Se $x \in X$ e $y \in Y$, então $x < y$.

Com efeito, tem-se $x^2 < y^2$ e, portanto, $x < y$.

Note que,

$$x^2 < y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 > 0 \Rightarrow (y-x)(y+x) > 0 \Rightarrow y - x > 0.$$

Como $x > 0$ e $y > 0$, segue que $x < y$ pois $y + x > 0$.

D) Mostraremos que, no conjunto dos números racionais, não existem $sup\, X$ nem $inf\, Y$.

Vamos usar os resultados obtidos nas etapas (A), (B) e (C) anteriores. Suponhamos por contradição, que exista $a \in \mathbb{Q}$, tal que $a = sup\, X$. Então $a > 0$ e $a^2 \geqslant 2$, pois se $a^2 < 2$, teríamos $a \in X$ e a seria o elemento máximo de X, que por (A) não existe. Por outro lado, se $a^2 > 2$, então $a \in Y$e a seria elemento mínimo de Y. Como pelo item (B) o conjunto Y não possui elemento mínimo, existiria $b \in Y$ com $b < a$. Por (C), $x < b < a$ para todo $x \in X$, o que contradiz ser $a = sup\, X$. Dessa forma, se existir $a = sup\, X$, então $a^2 = 2$.

Mas já vimos pela Proposição 4.2 que a igualdade $a^2 = 2$ não pode ocorrer em $\mathbb{Q}$. Concluímos, então, que em $\mathbb{Q}$, o conjunto X não possui supremo.

Um raciocínio análogo, baseado em (A) e (B) e (C), mostraria que o número $b = inf\, Y$, se existir, deve satisfazer $b^2 = 2$, e, portanto, Y não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

$\square$

A demonstração do teorema acima foi baseada na demonstração encontrada em [24].

Respondendo as indagações feitas no início desta seção 4.4

Através da Proposição 4.3, podemos comprovar que em $\mathbb{Q}$ existem subconjuntos que não possuem supremo em $\mathbb{Q}$. Portanto, podemos responder as indagações do início dessa seção: o que difere $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$ é a propriedade de completude; $\mathbb{Q}$ é apenas um corpo ordenado, mas $\mathbb{Q}$ não é completo, ou seja, em $\mathbb{Q}$, o Axioma de Dedekind não é válido.

4.5 $\mathbb{Q}$ x $\mathbb{R}$ nos livros do Ensino Médio Análise Real

Na passagem dos números racionais para os reais, que pode ser considerada uma das coisas mais delicadas conceitualmente, é necessário tratar os números irracionais. É nessa passagem que, de maneira velada, aparece o conceito de completude.

Em [5], encontramos uma possível explicação, quando afirma: "a crise dos irracionais no desenvolvimento da ciência grega, que tem conexão com obstáculos até hoje presentes na aprendizagem desse conceito." Dessa forma, podemos perceber que uma das explicação do por que é delicado essa passagem dos números racionais aos números reais, reside em razões históricas.

Acreditou-se por muito tempo que entre os racionais e a reta, existia uma correspondência biunívoca- os números racionais pareciam completar a reta. De acordo com [16],

> As frações de denominador q podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes. Então, para cada número racional, há um ponto da reta. Para os primeiros matemáticos, parecia evidente que todos os pontos da reta seriam usados dessa maneira. Deve ter sido um choque descobrir que há pontos na reta que não correspondem a nenhum número racional.

Segundo [36], por volta do século XIX vários problemas matemáticos levavam a questionamentos sobre como os números racionais e irracionais se distribuem na reta. Richard Dedekind, ao comparar os números racionais aos pontos da reta, observou que existem mais pontos na reta do que podem ser representados por números racionais. Dedekind recorria aos gregos para dizer que eles sabiam da existência de grandezas incomensuráveis. Na sua obra *Stetigkeit and irrationale Zahlen* (ou "A Continuidade e os Números Irracionais"), afirma que "o domínio descontínuo dos números racionais possa ser tornado completo para formar um domínio contínuo", como é o caso da linha reta. A palavra usada para designar a propriedade da reta que distingue os reais dos racionais é "continuidade", que seria equivalente ao que chamamos de "completude".

Os livros didáticos, como visto na Subseção 2.2.3, geralmente apresentam a passagem dos números racionais aos números reais da seguinte forma: ao associar os números racionais a pontos de uma reta levam os alunos a perceberem que nem todo ponto da reta corresponde a um número racional. Fazem isso construindo um quadrado que tenha o comprimento do lado medindo 1, e usando o teorema de Pitágoras concluem que a diagonal do quadrado mede $\sqrt{2}$.

Alguns livros, como os das Coleções B e C, apresentados na Subseção 2.2.2, usam intervalos encaixantes e concluem que o número $\sqrt{2}$ tem representação decimal infinita e não periódica e, portanto, não é um número racional. Com essa conclusão, mostram que o conjunto $\mathbb{Q}$ possui buracos que serão preenchidos pelos números irracionais. Juntando-se os números irracionais ao conjunto dos números racionais, forma-se, assim, o conjunto dos números reais, e podemos afirmar que a reta real está completa. Dessa forma, a ideia de completude nos livros de ensino médio, intuitivamente, diz que o conjunto dos números reais não tem buracos.

Retomemos a ideia de completude dos reais que os alunos da licenciatura em matemática aprendem como definição, que o conjunto dos números reais é completo por satisfazer o Axioma de Dedekind. Já nos livros didáticos, os reais é um conjunto completo pois a reta é completa, sem buracos e todo ponto da reta numérica representa um número real e vice-versa.

Admitindo as ideias de completude acima, ficam as perguntas para um aluno de licenciatura e futuro professor de matemática: o que o Axioma de Dedekind tem a ver com a reta não ter buracos? O que este axioma tem a ver com o que apresentam os livros didáticos? Aparentemente, como vimos, os dois conceitos parecem totalmente distintos, mas não é esse o caso, conversemos sobre isto nos capítulos seguintes.

Capítulo 5

Os Intervalos Encaixantes

"Se as portas da percepção estivessem limpas,
tudo apareceria para o homem tal como é: infinito."
(William Blake)

No capítulo anterior, vimos que a ideia de "conjunto completo" trazida nos livros de Análise Real e nos livros de ensino médio, apresentam um certo distanciamento. Neste capítulo, trataremos de um conceito que aparece tanto nos livros de Análise Real quanto nos de ensino médio, que é a ideia de intervalos encaixantes; nos de Análise Real é apresentado o Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE) como uma consequência do Axioma de Dedekind e nos livros de ensino médio, usam-se intervalos encaixantes com a finalidade de encontrar um número que expresse a diagonal de um quadrado de lado unitário, como vimos na Subseção 2.2.2, ou ainda para encontrar aproximações para algumas raízes quadradas.

5.1 O Teorema dos Intervalos Encaixantes

Nos livros didáticos analisados no Capítulo 2, vimos que na apresentação dos números irracionais, é unânime as coleções se referirem ao problema da diagonal do quadrado de lado unitário para introduzirem os números irracionais. Esse problema tenta traduzir a insuficiência do conjunto dos números racionais de encontrar um número que elevado ao quadrado resultasse em 2.

Como vimos na Subseção 2.2.2, tanto na análise da apresentação dos números irracionais da Coleção B como da Coleção C, os autores utilizam intervalos encaixantes para encontrar a representação decimal do número $\sqrt{2}$. Como mostrado nas Imagens 2.9 e 2.11, o número $\sqrt{2}$ vai sendo cercado por intervalos que se encaixam e os autores concluem que não chegarão a um número com representação decimal finita ou infinita periódica.

Esse procedimento pode continuar sendo executando a ponto de nem conseguirmos mais a olho nu enxergarmos os próximos intervalos, muito menos desenhar um intervalo de comprimento tão pequeno.

Mas o que garante que o processo utilizado pelos autores de livros didáticos chegará a algum número? Na matemática, especificamente na disciplina de Análise Matemática, há um resultado conhecido como *Teorema dos Intervalos Encaixantes*, consequência do Axioma de Dedekind, que garante que ao utilizarmos esse processo chegaremos a um número real.

Teorema 5.1 ***Teorema dos Intervalos Encaixantes (TIE):*** *Dada uma sequência*

$$[a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset ... \supset [a_n,b_n] \supset ...$$

de intervalos fechados encaixantes cujos comprimentos tendem para zero, temos

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n] = \{c\}, c \in \mathbb{R}.$$

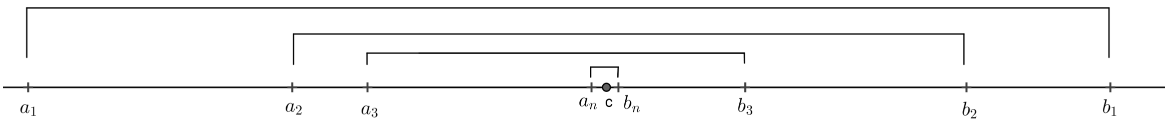


Figura 5.1: Sequência de intervalos encaixantes

Demonstração.

Para $n \in \mathbb{N}$, temos $I_{n+1} \subset I_n$, o que significa $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Podemos então escrever:

$$a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1.$$

Considere $A = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. O conjunto A é não-vazio e limitado superiormente, pois b_1 é uma cota superior de A, e mais, cada b_n é uma cota superior de A. Pelo Axioma de Dedekind (Axioma 4.1), existe $c = supA$.

Evidentemente, $a_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, já que c é uma cota superior de A. Por outro lado, como cada b_n é uma cota superior de A e c é menor das cotas, então $c \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq c \leq b_n$, ou seja, $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n,b_n]$.

Além disso, no caso que os comprimentos dos intervalos tendem a zero, queremos mostrar que o ponto c é único.

Sejam $c,d \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ com $c \neq d$. Podemos supor sem perda de generalidade $c < d$. Daí $a_n \leq c < d \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. O que implica,

$$b_n - a_n \geq d - c > 0.$$

Fazendo n crescer infinitamente, chegamos a uma contradição, pois quando n cresce infinitamente, o comprimento $b_n - a_n$ tende a zero. Portanto $c = d$. $\square$

Vejamos a seguir a necessidade dos intervalos serem fechados e limitados.

- Se considerarmos uma sequência de intervalos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset ... I_n \supset ...$, tais que $I_n = (0\ , \frac{1}{n}]$, ilustrados na imagem que segue, iremos perceber que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$, não satisfazendo o Teorema 5.1.

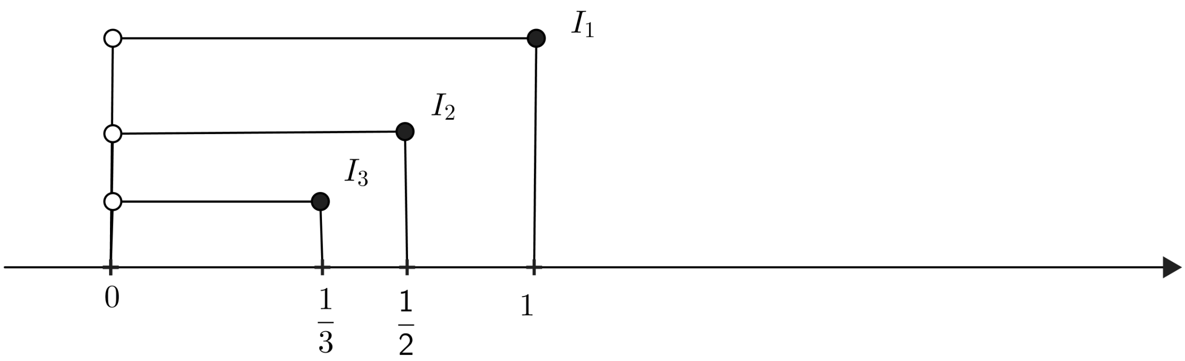


Figura 5.2: Intervalos encaixantes

Basta supor que exista um $x \in \mathbb{R}$, tal que, $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ Logo, $x \in I_n,\ n \in \mathbb{N}$. Donde segue, que $x \in (0\ , \frac{1}{n}],\ n \in \mathbb{N}$. Pela Propriedade Arquimediana dos números reais, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $n_0 > \dfrac{1}{x} \Rightarrow x > \dfrac{1}{n_0}$. O que é uma contradição, portanto, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$.

- Se considerarmos $I_n = [n\ , +\infty)$, representados na imagem abaixo, perceba que embora $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$, teremos $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \varnothing$.

Suponha que exista um $k \in \mathbb{R}$, tal que, $k \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Logo, $k \in I_n$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $k \in [n\ , +\infty)$, com $n \in \mathbb{N}$. Pela Propriedade Arquimediana dos números reais, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $k < n_0$, portanto, $k \notin I_{n_0} \Rightarrow k \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. O que é uma contradição. Portanto, sendo os intervalos ilimitados, também não satisfaz o Teorema dos Intervalos Encaixantes.

5.1.1 Onde o TIE aparece nos livros do ensino médio

Utilizando o TIE, observe que os intervalos encaixantes formados pelo processo de aproximações sucessivas vistos na Figura 2.11, Subseção 2.2.2, são:

$$[1;2] \supset [1,4;1,5] \supset [1,41;1,42] \supset [1,414;1,415] \supset ...$$

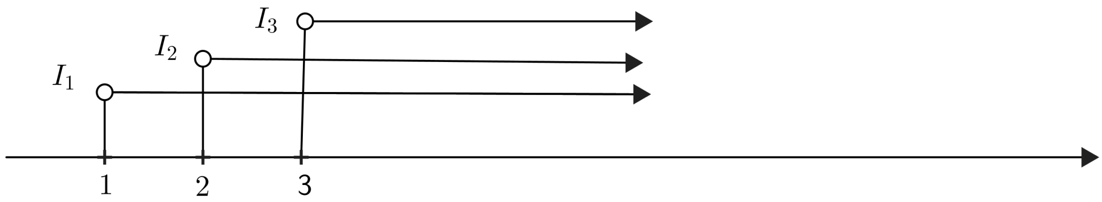


Figura 5.3: Intervalos encaixantes

Cada intervalo está contido no anterior de tal maneira que os comprimentos desses intervalos se aproximam cada vez mais de zero. Chamando cada intervalo acima de I_1, I_2, I_3, I_4,... tem-se, pelo TIE

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}, c \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o TIE realmente nos garante que o processo usado pelos autores nos livros de ensino médio chegará a algum número.

Ainda nos livros didáticos, vimos que os intervalos encaixantes, além de serem usados para encontrar a representação decimal de um número, são também usados para encontrar resultados aproximados de algumas raízes.

Não obstante ao apresentado nos livros didáticos de ensino médio, os intervalos encaixantes também poderiam ser usados para uma localização aproximada de números cuja representação decimal é infinita e não periódica, já que nenhum método de aproximação é ensinado no Ensino Médio, como é descrito por JUNIOR em [22]:

> Primeiro porque não consta no programa tradicional do ensino médio; segundo, porque acredita-se que os melhores métodos de aproximação se utilizam de ferramentas do cálculo que também não está neste programa; e terceiro, porque no contexto do ensino básico, muitos professores desconhecem métodos simples de aproximação que poderiam ser apresentados aos alunos usando apenas uma calculadora de bolso, ou por "princípios" da sua formação, são contra o uso de recursos eletrônicos em sala de aula.

Assim, mais uma vez, os intervalos encaixantes poderiam ser utilizados para localizar esses pontos na reta, cabendo ao aluno estabelecer a aproximação decimal que julgar necessária para cada situação. Lembrando que com os intervalos encaixantes, a cada passo dado, estaríamos mais próximos do número que desejamos marcar e, por mais que no mundo físico não sejamos capazes de marcá-lo exatamente, podemos encontrar uma aproximação tão boa quanto desejamos.

5.2 Algumas aplicações do TIE para o Ensino Médio

Iniciamos nossa discussão acerca da utilização do TIE, com a indagação: existe algum número que elevado ao quadrado resulte em 2? A resposta para essa indagação é sim, pois com a utilização do Teorema dos Intervalos Encaixantes, encontramos sua representação decimal e garantimos a sua existência.

Dado um triângulo retângulo isósceles, de catetos medindo 1, usando o teorema de Pitágoras, chegaremos a medida da hipotenusa desse triângulo que é igual a $\sqrt{2}$. A Figura 5.4 mostra uma maneira bastante simples de construir $\sqrt{2}$ e também sugere a construção de $\sqrt{3}$; em verdade, este processo nos permite encontrar qualquer número da forma $\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$.

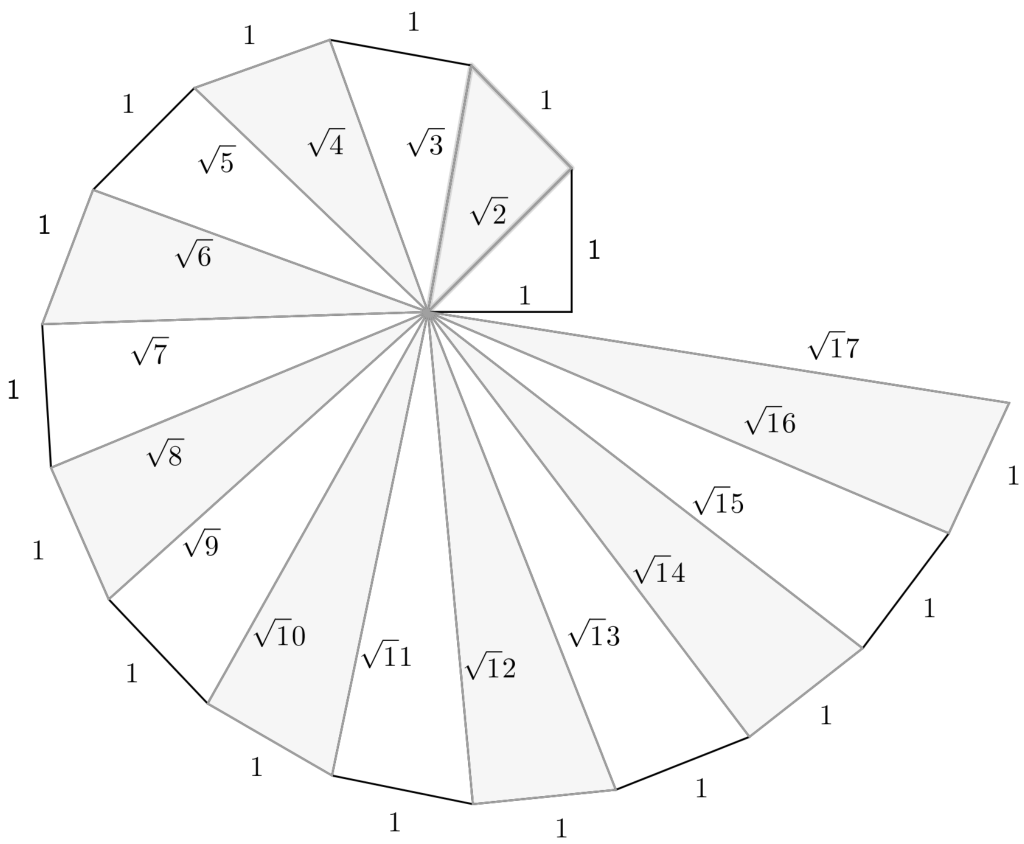


Figura 5.4: Construção dos números na forma $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$

Percebemos que é possível construir $\sqrt{2}$, mas, é possível construir geometricamente um segmento de comprimento $\sqrt[3]{2}$? A reposta é não! Vimos no final da Subseção 3.2.3 que o número $\sqrt[3]{2}$ não pode ser construído usando régua não graduada e compasso. Assim, se não podemos construir o número $\sqrt[3]{2}$, o que me garante que esse número existe? A resposta é o TIE.

5.2.1 Usando o TIE para localizar números racionais na reta real

Sabemos que todos os números racionais podem ser construídos sobre a reta: no Exemplo 3.3, construímos o número $\frac{18}{7}$. Naquele caso, foi necessário dividirmos um intervalo em sete partes iguais. O procedimento adotado, embora útil e válido para qualquer $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}^*$, pode se tornar muito trabalhoso, pois se n for grande, teremos que dividir o intervalo em uma grande quantidade de subintervalos.

Dessa forma, buscando uma padronização, iremos fazer subdivisões por 10, permitindo uma interação com a representação decimal.

Observe o exemplo a seguir, de marcar o número $\frac{41}{87}$, com $0 < \frac{41}{87} < 1$. Dividimos o intervalo $[0,1]$ em dez partes iguais.

Note que:

- $\frac{4}{10} < \frac{41}{87}$, pois 4x87= $348 < 410 = 41$x10.
- $\frac{41}{87} < \frac{5}{10}$, pois 10x41= $410 < 435 = 5$x87.

Assim, podemos perceber que $\frac{41}{87}$ está localizado no intervalo $\left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right]$.

A seguir, subdividiremos $\left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right]$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{4}{10}, \frac{4}{10} + \frac{1}{100}, \frac{4}{10} + \frac{2}{100}, \ldots, \frac{4}{10} + \frac{9}{100}, \frac{5}{10}$.

Por tentativas, analisando os valores dessas frações decimais, concluímos que:

- $\frac{4}{10} + \frac{7}{100} = \frac{47}{100} < \frac{41}{87}$, pois 47x87= $3489 < 4100$ =41x100.
- $\frac{41}{87} < \frac{48}{100} = \frac{4}{10} + \frac{8}{100}$, pois 100x41= $4100 < 4176$ =48x87.

Dessa forma, o número $\frac{41}{87}$ está localizado no intervalo $\left[\frac{47}{100}, \frac{48}{100}\right]$.

A figura 5.5 ilustra os subintervalos em que localizamos o número $\frac{41}{87}$ até esse momento.

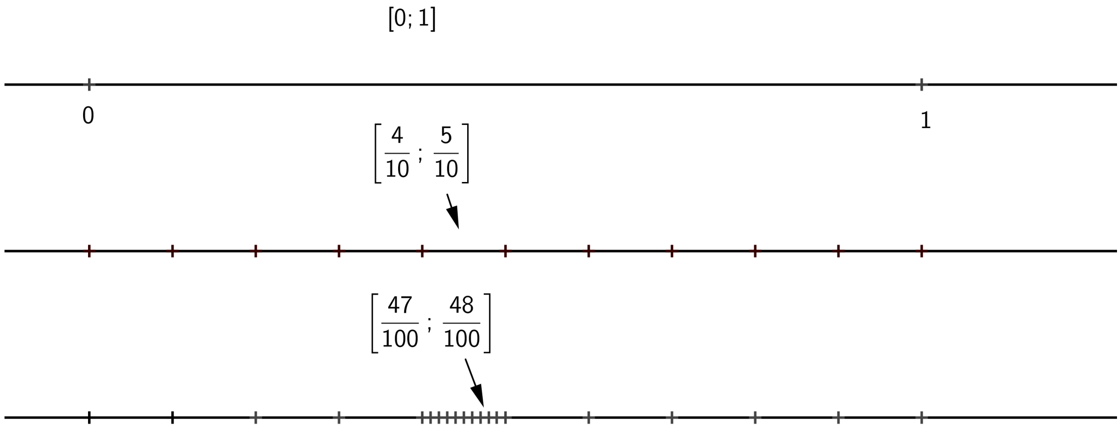


Figura 5.5: A localização do número $\frac{41}{87}$ usando o intervalos encaixantes

Prosseguindo a subdivisão do intervalo $\left[\frac{4}{10}+\frac{7}{100}, \frac{4}{10}+\frac{8}{100}\right]$ em dez subintervalos iguais, agora de comprimento $\frac{1}{1000}$, podemos encontrar em qual deles está localizado o número $\frac{41}{87}$ e, continuando esse processo indefinidamente, podemos chegar na representação decimal do número $\frac{41}{87}$.

Esse procedimento será aplicado para todo número racional $b \in [0,1]$, tal que b não corresponda a uma fração decimal. Ao dividir o intervalo $[0,1]$ em dez partes iguais, as coordenadas dos extremos desses intervalos são $0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, ..., \frac{10}{10} = 1$. Seja a_1 o inteiro $0 \leq a_1 \leq 9$ tal que $\frac{a_1}{10} \leq b \leq \frac{a_1+1}{10}$. Em seguida dividiremos o intervalo $\left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right]$ em dez subintervalos iguais, cada um de comprimento $\frac{1}{100}$. Os extremos desses subintervalos são os pontos de coordenadas $\frac{a_1}{10}, \frac{a_1}{10}+\frac{1}{100}, \frac{a_1}{10}+\frac{2}{100}, ..., \frac{a_1}{10}+\frac{10}{100} = \frac{a_1+1}{10}$.

Localizamos b em um desses subintervalos, e encontramos a_2 tal que $0 \leq a_2 \leq 9$ e

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{100} \leq b < \frac{a_1}{10}+\frac{a_2+1}{100}$$

Dando continuidade, esse processo pode levar a uma sequência infinita, em que o número b está no intervalo I_n, cujo o extremo à direita é

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+...+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n}{10^n},$$

e o extremo à esquerda é

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\frac{a_3}{10^3}+...+\frac{a_{n-1}}{10^{n-1}}+\frac{a_n+1}{10^n}.$$

Chamando cada intervalo obtido de $I_1, I_2, I_3, ...$ veremos que cada intervalo I_n está contido no I_{n-1}, ou seja uma sequência de intervalos encaixantes, e seus comprimentos, que medem $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3} .... \frac{1}{10^n}$ respectivamente, tendem a zero. Portanto, o TIE garante que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{b\}, b \in \mathbb{R}.$$

A representação decimal de b é

$$b = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10_2} + \frac{a_3}{10_3} + ... = 0, a_1 a_2 a_3 ...$$

5.2.2 Aproximações do valor numérico $\sqrt[3]{2}$ usando o TIE

Vamos encontrar aproximações decimais do número $\sqrt[3]{2}$ usando o TIE. Inicialmente, note que $1^3 = 1 < 2$ e $2^3 = 8 > 2$, portanto $1^3 < 2 < 2^3$, assim extraindo a raiz cúbica, temos

$$1 < \sqrt[3]{2} < 2.$$

Calculando $1,1^3 = 1,331$, $1,2^3 = 1,728$ e $1,3^3 = 2,197$, percebemos que $1,2^3 < 2 < 1,3^3$. Daí,

$$1,2 < \sqrt[3]{2} < 1,3.$$

Calculando: $1,21^3$, $1,22^3$, $1,23^3, ...1,29^3$, podemos verificar que $1,25^3 < 2 < 1,26^3$ e obtemos

$$1,25 < \sqrt[3]{2} < 1,26.$$

Continuando o mesmo procedimento, a partir de $1,259^3 < 2 < 1,260^3$ obtemos

$$1,259 < \sqrt[3]{2} < 1,260.$$

De $1,2599^3 < 2 < 1,2600^3$,

$$1,2599 < \sqrt[3]{2} < 1,2600.$$

Continuando esse processo sucessivamente, obtemos quantas casas decimais quisermos. Esse processo nunca para, pois $\sqrt[3]{2}$ é um número irracional e a cada etapa nos aproximamos cada vez mais deste número.

Dessa forma, também podemos localizar $\sqrt[3]{2}$ na reta real, pois esses intervalos vão cercando o $\sqrt[3]{2}$ por aproximações cada vez melhores. A cada passo dado, o comprimento do intervalo fica dez vezes menor que o intervalo anterior. Observe:

$\sqrt[3]{2} \in [1;2]$, pois $1^3 < 2 < 2^3$;

$\sqrt[3]{2} \in [1,2:1,3]$, pois $1,2^3 < 2 < 1,3^3$;

$\sqrt[3]{2} \in [1,25;1,26]$, pois $1,25^3 < 2 < 1,26^3$;

$\sqrt[3]{2} \in [1,259;1,260]$, pois $1,259^3 < 2 < 1,260^3$;

$\sqrt[3]{2} \in [1,2599;1,2600]$, pois $1,2599^3 < 2 < 1,2600^3$...

Assim, estamos construindo uma sequência de intervalos encaixantes

$$[1;2] \supset [1,2;1,3] \supset [1,25;1,26] \supset [1,259;1,260] \supset [1,2599;1,2600] \supset ...$$

que podem ser representados geometricamente como

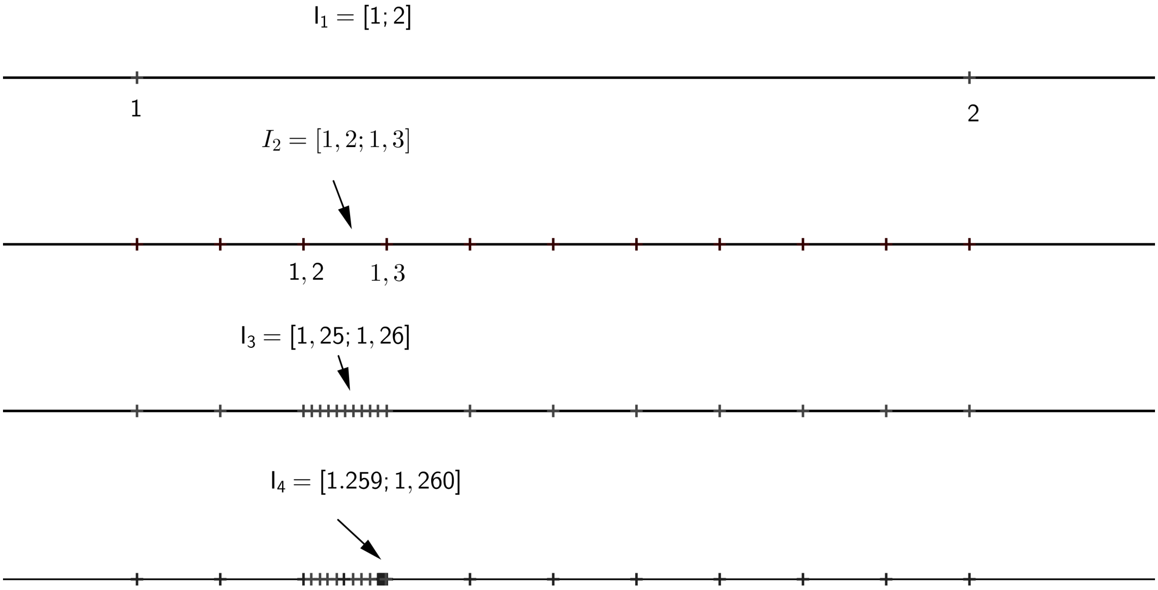


Figura 5.6: Aproximação do número $\sqrt[3]{2}$

Prosseguindo indefinidamente, e tomando intervalos de comprimento cada vez menor, a interseção desses intervalos resultará em um único número, como garante o TIE, (Teorema 5.1).

Perceba que dada qualquer sequência de intervalos sobre a reta em que suas extremidades são números racionais, e que cada intervalo está contido no anterior, de tal maneira que os comprimentos dos intervalos tendem a zero, de acordo com o TIE, existe um número comum a todos esses intervalos, neste caso $\sqrt[3]{2}$ é esse número.

5.2.3 A irracionalidade de *e* usando o TIE

Considere:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{5.1}$$

A demonstração dessa igualdade pode ser encontrada em [32].

Aqui, nossa intenção é provar que a irracionalidade do número e pode ser conseguida como uma consequência da construção geométrica de uma sequência de intervalos encaixantes.

Consideremos $I_n = [a_n, b_n]$, onde $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{A_n}{n!}$, com $A_n \in \mathbb{Z}^*$ e cada $b_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} + \frac{1}{n!} = \frac{A_n + 1}{n!}$, com $A_n \in \mathbb{Z}^*$.

Assim,

$$\begin{aligned}
I_1 &= [2,3], \text{ pois } a_1 = 1+1 = 2 \text{ e } b_1 = 2+1 = 3.\\
I_2 &= \left[\frac{5}{2!}, \frac{6}{2!}\right], \text{ pois } a_2 = 1+1+\frac{1}{2!} = \frac{5}{2!} \text{ e } b_2 = \frac{5+1}{2!} = \frac{6}{2!}.\\
I_3 &= \left[\frac{16}{3!}, \frac{17}{3!}\right], \text{ pois } a_3 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} = \frac{6+6+3+1}{3!} = \frac{16}{3!} \text{ e } b_3 = \frac{16+1}{3!} = \frac{17}{3!}\\
I_4 &= \left[\frac{65}{4!}, \frac{66}{4!}\right], \text{ pois } a_4 = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} = \frac{24+24+12+4+1}{4!} = \frac{65}{4!} \text{ e}\\
&\quad b_4 = \frac{65+1}{4!} = \frac{66}{4!}.
\end{aligned}$$

Geometricamente:

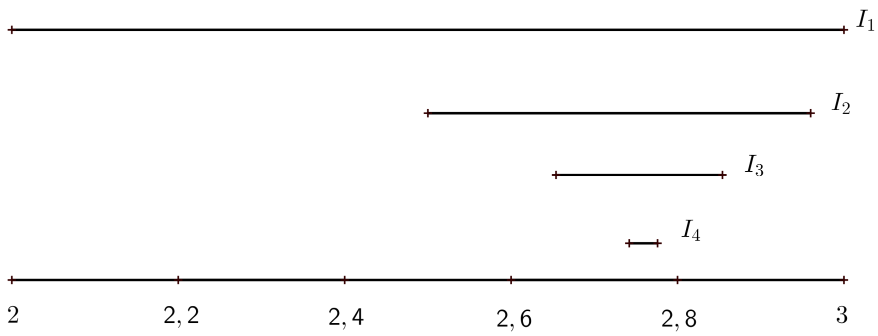


Figura 5.7: O número e, através de intervalos encaixantes I_1, I_2, I_3, I_4...

Dada a representação na Figura 5.7 de uma sequência de intervalos encaixantes, por (5.1) temos pelo TIE:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}.$$

Quando $n > 1$, o intervalo I_{n+1} está estritamente entre os pontos extremos do intervalo

$$I_n = \left[\frac{A_n}{n!}, \frac{A_n+1}{n!}\right], \; onde \; A_n \in \mathbb{Z}^*. \tag{5.2}$$

Afirmação: $e \notin \mathbb{Q}$.

$$e \in \mathbb{Q} \Rightarrow e = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*.$$

Ora, por construção

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{e\}.$$

e

$$e \in I_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

mais ainda,

$$e \in \left(\frac{a_n}{n!}, \frac{a_n+1}{n!}\right), \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo

$$\frac{A_n}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{A_n+1}{n!} \Rightarrow$$

$$A_n < \frac{p.n!}{q} < A_{n+1} \Rightarrow$$

$A_n < p.1.2.....(q-1).(q+1)...n < A_{n+1}$, absurdo, pois o inteiro $p.1.2.....(q-1).(q+1)...n$ está entre dois inteiros consecutivos A_n e A_{n+1}.

5.2.4 O número π e o TIE

A construção a seguir é baseada em [27].

O número π representa o valor da razão entre a circunferência de qualquer círculo e o seu diâmetro. Se r for o raio de uma circunferência de comprimento C, então π seria $\frac{C}{2r}$. A demonstração de que π não é um número racional pode ser encontrada em [21]. Um dos métodos que destaca-se por obter aproximações de π, é o método dos isoperímetros, ou de Schwab, idealizado em 1813. Nesse método, é fixado o perímetro dos polígonos e calcula-se os raios das circunferências inscritas e circunscritas. Começamos com um quadrado de perímetro igual a 2; mantendo o perímetro fixo e dobrando o número de lados do polígono sucessivamente, mostra-se que a sequência dos raios das circunferências inscritas e também circunscritas tendem a $\frac{1}{\pi}$, como faremos a seguir.

Considere um polígono regular P isoperimétrico a uma circunferência de raio $\frac{1}{\pi}$. Se r for o raio da circunferência circunscrita e a o apótema, que é o raio da circunferência inscrita ao polígono, tem-se a relação

$$2\pi r > 2\pi\frac{1}{\pi} > 2\pi a \ \ ou\ \ r > \frac{1}{\pi} > a.$$

Isto equivale a dizer que o apótema é uma aproximação de $\frac{1}{\pi}$ por falta e o raio da circunscrita, uma aproximação por excesso. Por meio do polígono regular P isoperimétrico à circunferência de raio $\frac{1}{\pi}$, constrói-se o polígono P_1 isoperimétrico a P, mas com o dobro de lados.

Faremos efetivamente a construção para obter aproximações racionais de $\frac{1}{\pi}$. Considere um quadrado de perímetro igual a 2 unidades e lado l_4. Seja r_1 o raio da circunferência no qual o quadrado está inscrito, isto é, a circunferência circunscrita ao quadrado. O raio da circunferência inscrita é o apótema a_1 do quadrado de perímetro 2.

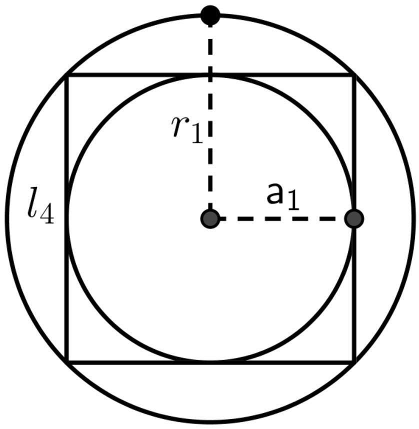


Figura 5.8: Circunferências inscrita e circunscrita ao quadrado de perímetro 2.

Como o perímetro do quadrado de lado l_4 é igual a 2, temos $l_4 = \frac{1}{2}$

Como o raio da circunferência inscrita é o apótema a_1 do quadrado, temos $a_1 = \frac{l_4}{2} = \frac{1}{4}$.

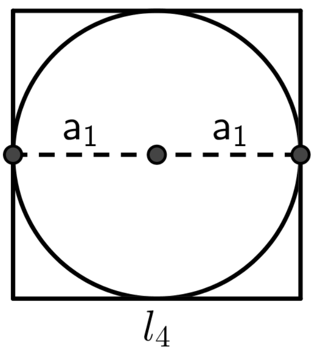


Figura 5.9: Circunferência inscrita ao quadrado de perímetro 2.

O raio r_1 da circunferência circunscrita ao quadrado, pode ser obtida usando o Teorema de Pitágoras. Assim,

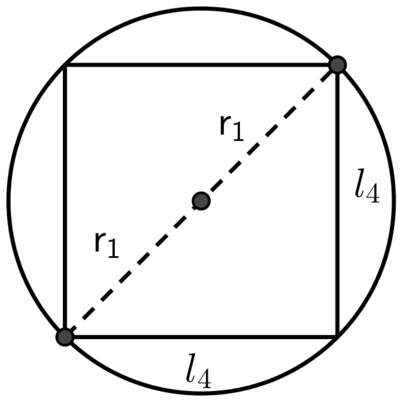


Figura 5.10: Circunferências circunscrita ao quadrado de perímetro 2.

$$
\begin{aligned}
(2r_1)^2 &= l_4^2 + l_4^2 \\
4r_1^2 &= 2l_4^2 \\
r_1 &= \frac{2l_4^2}{4} \\
r_1 &= \sqrt{\frac{2l_4^2}{4}} \\
r_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{2l_4^2}
\end{aligned}
$$

Como $l_4 = \frac{1}{2}$, segue que $r_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

A etapa seguinte consiste em considerar o polígono isoperimétrico ao quadrado de perímetro 2, mas com o dobro do número de lados, isto é, um octógono.

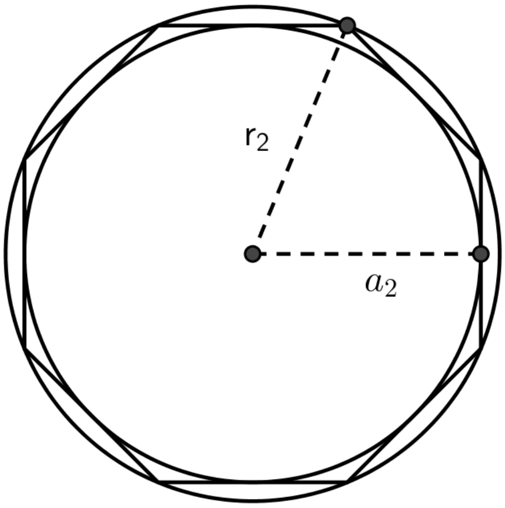


Figura 5.11: Circunferências circunscrita ao quadrado de perímetro 2.

Demonstra-se que o raio r_2 da circunferência inscrita e o apótema do novo polígono isoperimétrico são, respectivamente,

$$a_2 = \frac{a_1 + r_1}{2} \quad e \quad r_2 = \sqrt{r_1 a_2}.$$

Continuando o processo, encontra-se

$$a_3 = \frac{a_2 + r_2}{2} \quad e \quad r_3 = \sqrt{r_2 a_3}.$$

De modo geral,

$$a_k = \frac{a_{k-1} + r_{k-1}}{2} \quad e \quad r_k = \sqrt{r_{k-1} a_k}.$$

Queremos mostrar que os apótemas crescem e os raios decrescem. Sabemos que $r_1 > a_1$, já que a_1 é o raio da circunferência inscrita e r_1 é o raio da circunferência circunscrita ao quadrado de perímetro 2. Daí segue :

$$a_2 = \frac{a_1 + r_1}{2} > a_1,$$

$$a_2 = \frac{a_1 + r_1}{2} < r_1$$

e

$$r_2 = \sqrt{r_1 a_2} < r_1.$$

De modo geral, $a_n < a_{n-1}$ e $r_n > r_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim,

$$a_1 < a_2 < ... < a_k < ... < \frac{1}{\pi} < ... < r_k < r_{k-1} < ... < r_2 < r_1.$$

Portanto, fica bem definida uma sequência de intervalos limitados e fechado, dados por $I_k = [a_k, r_k]$, $k = 1, 2, ...$ sendo os apótemas (a_k) crescentes, os raios (r_k) decrescentes e $a_k < \frac{1}{\pi} < r_k$ para $k = 1, 2, ...$ Tem-se, também,

$$r_2 - a_2 = \sqrt{r_1 a_2} - \frac{a_1 + r_1}{2} < \frac{r_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 + r_1}{2} =$$

$$\frac{1}{2}(a_2 - a_1) = \frac{1}{2}\left[\frac{a_1 + r_1}{2} - a_1\right] = \frac{1}{2^2}(r_1 - a_1).$$

Daí, resulta $r_n - a_n < \dfrac{1}{2^n}(r_1 - a_1)$, donde, pelo TIE,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_k, r_k] = \frac{1}{\pi}.$$

Assim, $\dfrac{1}{\pi}$ é definido pelo TIE, e isto implica que também podemos obter o seu inverso π.

5.2.5 Sobre as aplicações do TIE

Nas seções anteriores deste capítulo, vimos que podemos utilizar os intervalos encaixantes em diversas situações, sejam elas para localizar números racionais ou irracionais na reta real ou para provar a irracionalidade de certos números.

Usando o TIE, vimos na Subseção 5.1.1 a explicação da validade de certos procedimentos que aparecem nos livros didáticos usando intervalos encaixantes.

Com as construções apresentadas nas Subseções 5.2.1 e 5.2.2, esperamos levar o leitor a perceber porque os intervalos encaixantes podem ser facilmente utilizados nas salas de aula de ensino médio como um método para encontrar uma localização aproximada de números reais, podendo encontrar uma aproximação tão boa quanto se queira.

As aplicações apresentadas nas Subseções 5.2.3 e 5.2.4 sobre irracionalidade, embora fuja um pouco do contexto das salas de aula do ensino médio, contribui para que o professor da educação básica possa perceber a importância do TIE, que muitas vezes não é tão explorado nos cursos de licenciatura, mas servem de sugestões para serem apresentadas nas disciplinas desses cursos.

Capítulo 6

O TIE e o Axioma de Dedekind são equivalentes

‘‘Pensamentos valem e vivem pela observação exata ou nova, pela reflexão aguda ou profunda; não menos querem a originalidade, a simplicidade e a graça do dizer.”
(Machado de Assis)

Vimos que nos livros de ensino médio é usado o teorema dos intervalos encaixantes, mesmo que de maneira implícita. Vimos também que uma das consequências do Axioma de Dedekind é o Teorema dos Intervalos Encaixantes; na verdade, o teorema não é apenas uma consequência, mas é equivalente ao Axioma de Dedekind, fato que provaremos neste capítulo.

O que pode ocorrer, é que em muitas vezes nos cursos de Análise Matemática os alunos não sejam alertados ou não lhes sejam dito que no conjunto dos números reais valer o Axioma de Dedekind é equivalente a valer o TIE. Em [1], há uma justificativa que diz que isso redundaria numa construção dos números reais praticamente idêntica à de Dedekind. E qual o problema disso? Ao nosso ver, nenhum.

Entendemos que o TIE pode ser bem melhor compreendido e é bem mais manipulável do que o Axioma de Dedekind, até mesmo porque o axioma requer o conceito de supremo, o que foge as expectativas de ser visto no Ensino Médio, aparentando uma distância enorme entre assuntos da Universidade e do Ensino Médio. Já a ideia de intervalos fechados encaixantes é bem mais natural de ser trabalhada no contexto do Ensino Médio, pois intervalos são objetos bem conhecidos, vimos que aparecem nos livros didáticos do Ensino Médio - de forma velada, sim, mas aparecem!

Assim, podemos dar uma nova definição de completude e definir que o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE. Dessa forma, a definição de completude que um aluno de licenciatura poderia receber é:

Definição 6.1 *O conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE.*

Outro fato que corrobora com essa definição de completude que defendemos ser usada é que, mesmo veladamente, livros do ensino médio usam o TIE. Basta observar os exemplos apresentados nas subseções 5.2.1 e 5.2.2 do capítulo anterior. O que prova que as sequências que estão sendo construídas naqueles exemplos converge? Resposta: O TIE.

6.1 A equivalência

Nessa seção iremos mostrar que o Axioma de Dedekind, apresentado Subseção 4.2.4, e o Teorema dos Intervalos Encaixantes, demonstrado na Seção 5.1, são equivalentes.

Teorema 6.1 *No conjunto dos números reais o Axioma de Dedekind é equivalente ao TIE.*

Demonstração.

Como já demonstramos que o TIE é uma consequência do Axioma de Dedekind, ao demonstrar o Teorema 5.1, basta provar a recíproca, que TIE implica no Axioma de Dedekind.

Seja $A \subset \mathbb{R}$, um conjunto não-vazio limitado superiormente. Seja $b_1 \in \mathbb{R}$, tal que $\forall x \in A$, $x < b_1$. Escolhemos qualquer $a_1 \in A$ e tomamos o intervalo $I_1 = [a_1, b_1]$. Em seguida dividimos o intervalo I_1 através do seu ponto médio, $m_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$. Se $[m_1, b_1] \cap A \neq \emptyset$, tomamos $I_2 = [m_1, b_1]$.

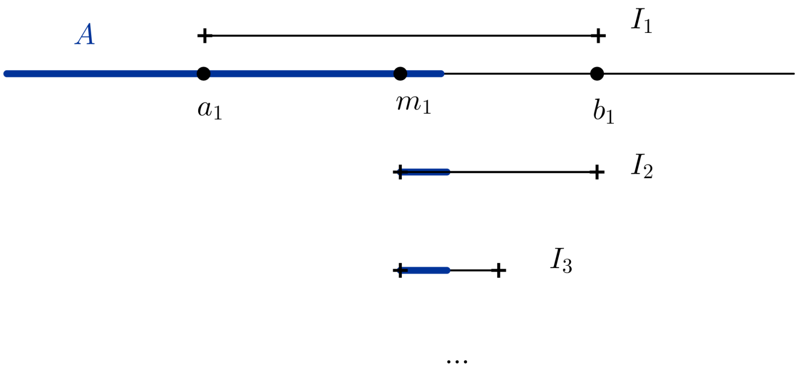


Figura 6.1: Sequência de intervalos encaixantes

Caso contrário, tomamos $I_2 = [a_1, m_1]$.

Representamos as situações geometricamente nas Figuras 6.1 e 6.2.

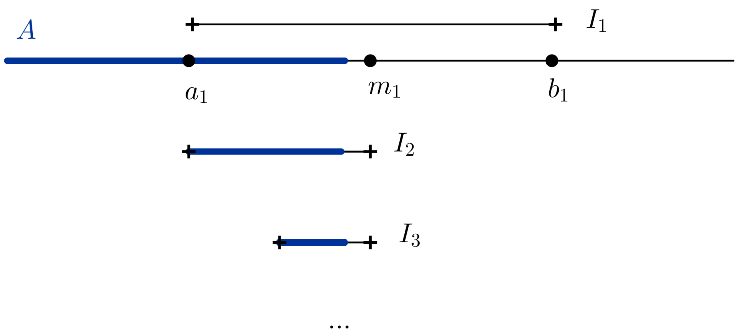


Figura 6.2: Sequência de intervalos encaixantes

Renomeamos o intervalo $I_2 = [a_2, b_2]$. Note que $|I_2| = b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.

A seguir, dividimos I_2 através do seu ponto médio e repetimos o mesmo processo para encontrarmos o intervalo I_3. Prosseguindo dessa forma, geramos uma sequência de intervalos fechados $I_n = [a_n, b_n]$ com as propriedades:

i. $|I_{n+1}| = \dfrac{1}{2}|I_n|$;

ii. $|I_n| = b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, logo $|I_n| \to 0$

iii. $I_n \cap A \neq \varnothing$;

iv. Cada b_n é uma cota superior para A.

Por (i) e (ii), os intervalos I_n são encaixantes, fechados e seu comprimento tende a zero, pelo TIE, Teorema 5.1, sabemos que existe um único número real k tal que

$$\{k\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]. \tag{6.1}$$

Para mostrar que $k = sup\,A$, iremos verificar duas condições dadas na Definição 4.4: a primeira é que k é cota superior de A e a segunda é que k é a menor cota superior de A.

a) Seja $x \in A$ um elemento qualquer de A. Por (iv), $x \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. E, por (ii),

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \Rightarrow b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}.$$

Logo,

$$x \leq b_n = a_n + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} \leq k + \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}},$$

pois, por (6.1), temos $a_n \leq k$.

Mas se $x \leq k + \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então, por (ii), $x \leq k$. Como x pode ser qualquer elemento de A, segue que k é uma cota superior para A.

b) Suponhamos que k não seja a menor das cotas superiores de A. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $k - \varepsilon$ é cota superior de A. Por (iii), $I_n \cap A \neq \emptyset$, ou seja, existe $x \in A$ tal que $x \in [a_n,\, b_n]$. Como $k - \varepsilon$ é cota superior, então $a_n \leq x \leq k - \varepsilon$. Mas $a_n \leq k \leq b_n$. Logo,

$$a_n \leq x \leq k - \varepsilon < k \leq b_n \Rightarrow [k - \varepsilon, k] \subset I_n,\ \forall n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{k\},$$

que é contradição. Logo, k é a menor cota superior de A. □

Parte da demostração foi baseada em [9].

Com o Teorema 6.1, mostramos que a definição de completude proposta no início desse capítulo pode ser utilizada nos cursos de licenciatura, e que o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE. Essa definição é bem mais inteligível e não usa nenhum conceito desconhecido do Ensino Médio.

Em nosso ponto de vista, usando o TIE, fica mais palpável admitir que todo ponto da reta está associado a um número real e também justificam-se certas passagens nos livros do ensino médio, como a apresentada na Seção 5.1, em que as obras utilizam intervalos encaixantes para encontrar a $\sqrt{2}$. Dessa forma, ao aproximar o conhecimento acadêmico do escolar, encontramos um sentido para que a disciplina seja estudada por alunos de licenciatura em Matemática.

Capítulo 7

Conclusões

> *‘‘O que você faz com amor e cuidado tem uma chance de fazer diferença, tanto para você como para a vida de outras pessoas.’’*
>
> (Wim Wenders)

Com a apresentação dos números reais nos livros didáticos de ensino médio, vimos que alguns conceitos e afirmações, por mais que fiquem velados para os alunos, por ainda não terem conhecimentos suficientes para entendê-los, podem ser trabalhados de melhor forma quando o professor compreende bem o que está nas entrelinhas e é capaz de transpor de maneira satisfatória os conhecimentos sobre os números reais, construídos ao longo da sua vida acadêmica, em particular na disciplina de Análise Matemática na reta.

Na licenciatura em Matemática, é a disciplina de Análise Matemática que aborda com profundidade os números reais. Ao longo desse trabalho, buscamos aproximar da matemática escolar conceitos vistos nessa disciplina, aliando-os a assuntos algébricos e geométricos.

Sobre a impressão de que os livros didáticos analisados repassam, de que todos os números podem ser marcados facilmente na reta real, podemos afirmar que é falsa: vimos que alguns números não podem ser construídos geometricamente e, para explicar isso, usamos conhecimentos algébricos.

Quanto ao estudo sobre a definição de completude dos números reais, chegamos à conclusão de que esse conceito poderia ser apresentado nos cursos de licenciatura em Matemática usando-se o TIE. Dessa forma, a definição torna-se bem mais inteligível e não foge a conceitos abordados no Ensino Médio:

Definição: o conjunto dos números reais é completo por nele valer o TIE.

Ao receber a definição de completude dessa forma, um aluno da licenciatura ficaria mais próximo do ambiente que encontrará mais tarde, que é a sala de aula e de seu material de trabalho, do qual faz parte o livro didático.

Há algumas controvérsias acerca do papel da disciplina Análise Matemática para licenciandos, se alunos da Licenciatura em Matemática deveriam ou não cursar essa disciplina, motivo suscitador de alguns trabalhos a esse respeito, como os vistos na nossa introdução. Não é nosso objetivo e nem nos propomos a discutir esse fato neste trabalho, mas acreditamos e advogamos que alguns conceitos de Análise Real são conhecimentos indispensáveis para os futuros professores de Matemática atuarem com sucesso em sua profissão, pois, dessa forma, podem entender com profundidade e conhecer a justificativa matemática de assuntos que ensinam e que são veladamente usados em livros didáticos.

Enfim, em nossa opinião, conceitos básicos de Análise Real são indispensáveis na formação de futuros professores de Matemática e fazem uma profunda diferença na sua atuação.

Em nosso entendimento, o fato a ser levado em consideração, é que a disciplina de Análise Matemática não pode ser ensinada para licenciandos desvinculadas da maneira como certos assuntos vistos nessa disciplina são tratados por livros didáticos do ensino médio. Tais conceitos só podem ser compreendidos com profundidade com o conhecimento adquirido na disciplina de Análise Matemática, por meio do estudo da Análise Real, e foi isso que exemplificamos nesse trabalho. Entre outros fatores, o que não pode faltar é justamente uma apresentação que ligue conceitos da Análise Real a assuntos abordados no Ensino Médio.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, G. S. S. *Análise Matemática para Licenciatura.* 3ª Edição revista e ampliada. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

[2] BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana.* 10ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] BARONI, R. L. S.; OTERO-GARCIA, S. C. *Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue.* Coleção PROPG Digital (UNESP), 2014.

[4] BRASIL. *Guia de livros didáticos, PNLD 2015: Matemática* / Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

[5] BRASIL. *Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias, volume 2.* Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica, 2006.

[6] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: matemática. Terceiro e quarto ciclo.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

[7] BOLOGNEZI, R. A. L. *A Disciplina de Análise Matemática na Formação de Professores de Matemática para o Ensino Médio*. 2006. 109 f. Dissertação (Mestrado) Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

[8] BOYER, C. B. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Bhücher, 1974.

[9] BRIETZKE, E.H.M. *Números Reais*. UFRGS. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~brietzke/extensao.html> Acesso em: 08 de janeiro de 2017.

[10] CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática.* 2ª edição. Lisboa: Gravida, 1998.

[11] CARVALHO, J. P. *"Os três problemas clássicos da Matemática Grega."*II BIENAL DA SBM (2004): 1-21.

[12] COSTA, V. C. *Números construtíveis.* Campina Grande. 2013. PROFMAT.

[13] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações.* vol. 1. São Paulo, Ática, 2013.

[14] DE MELO FILHO, R.; DE MORAIS FILHO, D. C. *Números Construtíveis, os Três Problemas Gregos Clássicos e o Fabuloso Teorema de Gauss Sobre Construtibilidade de Polígonos Regulares*. UFCG, 2016.

[15] DE ARAÚJO CORRÊA, F. J. S. *Introdução à Análise Real* .

[16] EVES, H. W. *Introdução à história da matemática.* Unicamp, 1995.

[17] GOMES, D. O. *A disciplina de análise segundo licenciados e professores de matemática da educação básica*. 2013. 266 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013

[18] GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. Projeto Euclides, Impa, Rio de Janeiro, 1999.

[19] HOUAISS, A. *Dicionário Houaiss Conciso da Língua Portuguesa*. São Paulo, Ed. Moderna, 2001.

[20] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I.* Coleção Elementos de Matemática. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, S. A., 1975.

[21] FIGUEIREDO, D. G. *Números irracionais e transcendentes.* Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1980. 104p.

[22] JUNIOR, O. S.. *Cálculo no Ensino Médio: Números Reais.* IMPA, 2014.

[23] LEONARDO, F. M. *Conexões com a matemática.* Vol. 1. São Paulo: Moderna, 2013.

[24] LIMA, E. L. *Análise Real, Volume 1.* Coleção Matemática Universitária, 10ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[25] LIMA, E. L. (et al). *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio.* Rio de Janeiro: SBM, 2001.

[26] MARTINES, P. T. *O papel da disciplina de análise segundo professores e coordenadores.* 2012. 118 f. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista. UNESP, Rio Claro, 2012.

[27] MEDEIROS, L. A. d. J. *Lições de análise matemática*. Luis Adauto Medeiros, Sandra Mara Malta, Juan Limaco, Haroldo Rodrigues Clark. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2005.

[28] MONTREZOR, C. L. *O corpo dos números reais é completo: Em que sentido.* Boletim de Iniciação Científica em Matemática-BICMat, v. 4, 2007.

[29] MOREIRA, P. C. *Formação matemática do professor: Licenciatura e prática docente escolar.* Plínio Cavalcanti Moreira. Maria Manuela MS. DAVID. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2010.

[30] NIVEN, I. M. *Números: racionais e irracionais.* Rio de Janeiro, RJ: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984. 216p.

[31] PAIVA, M. *Matemática: Paiva.* vol. 1. São Paulo, Moderna, 2013.

[32] PATERLINI, R. R. *Aritmética dos números reais*. 2012.

[33] POMMER, W. M., & Pommer, C. P. (2012). *A abordagem de alguns números irracionais notáveis nos livros didáticos do ensino fundamental e médio.* INTERFACES DA EDUCAÇÃO, 2(6), 5-22.

[34] REIS, F. S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos*. 2001. 302 f. Tese (Doutorado) - Unicamp, Campinas, 2001.

[35] RIPOLL, C.; RIPOLL, J. B.;SILVEIRA, J. F. P. *Números Racionais, Reais e Complexos.* Porto Alegre: Editora da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2006.

[36] ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

[37] SILVA JÚNIOR, L. P. *Construções geométricas por régua e compasso e números construtíveis.* Campina Grande. 2013. PROFMAT.

[38] SONDOW, J. *A Geometric Proof that e is Irrational and a Measure of its Irrationality.* Disponível em: <https://pdfs.semanticscholar.org/9a85/24f8922487fdde2f9e81ee909d789bd4624a.pdf> Acesso em: 08 de abril de 2017.

[39] SOUZA, Joamir. *Novo Olhar Matemática.* vol 3. São Paulo: FTD, 2013.

[40] WAGNER E. *Construções geométricas*. Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993. 110p.

[41] https://www.quora.com/Does-sqrt-3-2-really-exist-on-the-real-number-line-or-does-it-exist-only-in-our-minds

(Site consultado em 02 de Abril de 2017)