UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

FRANCISCO ROMEL GOMES BEZERRA

SOBRE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

JUAZEIRO DO NORTE
2017

FRANCISCO ROMEL GOMES BEZERRA

SOBRE PROGRESSÕES ARITMÉTICAS E GEOMÉTRICAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Flávio França Cruz.

JUAZEIRO DO NORTE
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Cariri
Sistema de Bibliotecas

B574s Bezerra, Francisco Romel Gomes.
Sobre Progressões Aritméticas e Geométricas/ Francisco Romel Gomes Bezerra. – 2017.
44 f.: il.; color.; enc. ; 30 cm.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Cariri, Centro de Ciências e Tecnologia – Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2017.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientação: Prof. Dr. Flávio França Cruz.

1. Progressão Aritmética. 2. Progressão Geométrica. 3. Progressão Aritmética de ordem superior. I. Cruz, Flávio França. II. Título.

CDD 510.7

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO CARIRI
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Sobre Progressões Aritméticas e Geométricas

Francisco Romel Gomes Bezerra

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Federal do Cariri, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em 15 de julho de 2017.

Banca Examinadora

Flávio França Cruz

Prof. Dr. Flávio França Cruz - URCA

Orientador

Maria Silvana A. Cost

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
UFCA

Prof. Dr. Juscelino Pereira Silva
UFCA

Dedico esta dissertação às duas grandes mulheres da minha vida : minha mãe Maria Angélica e minha namorada e futura esposa Alana Kelly.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço ao meu Deus, também conhecido como O SENHOR DOS EXÉRCITOS, por me conceder alegria, sabedoria, saúde e esperança para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.

À minha mãe por ter cuidado de mim, sendo pai e mãe incansavelmente, negando-se a si mesma a fim de ver a minha ascenção como um homem próspero e feliz.

À minha namorada por ser uma mulher compreensiva, amiga e incentivadora deste trabalho durante todos esses meses.

Ao meu orientador Flávio França Cruz pelas orientações, correções e sugestões apresentadas para o aperfeiçoamento e concretização desta presente obra.

Ao grupo de professores da instituição UFCA que lecionaram no curso do programa de pós-graduação PROFMAT pela dedicação e compromisso no ensino.

Aos meus colegas de mestrado pelo companheirismo e pelas discussões acaloradas pertinentes em sala de aula que nos fizeram amadurecer um pouco mais como profissionais da área.

Finalmente, à CAPES pelo suporte financeiro e ao programa PROFMAT.

“Eu sou o Senhor, o teu Deus, que te ensina o que é útil, e te guia pelo caminho que deves andar”

Isaías 48:17

RESUMO

Neste trabalho faremos um breve estudo em um nível intermediário sobre a teoria das progressões aritméticas e geométricas, procurando distingui-las e entender suas particularidades de uma forma sucinta. Um estudo sobre progressões aritméticas de ordem superior será feito devido à sua conexão com a teoria de polinômios. Apresentaremos também duas expressões alternativas para o cálculo do produto dos primeiros termos de uma progressão aritmética, onde uma delas utiliza os números de Stirling de primeira espécie, cujo estudo permeia os conhecimentos da análise combinatória.

Palavras-chave: Progressão Aritmética. Progressão Geométrica. Progressão Aritmética de Ordem Superior.

ABSTRACT

In this work we will do a brief study at an intermediate level on the theory of arithmetic and geometric progressions, trying to distinguish them and to understand their particularities in a succinct way. A study of higher order arithmetic progressions will be made because of its connection to the theory of polynomials. We will also present two alternative expressions for the calculation of the product of the first terms of an arithmetic progression, where one uses the first species Stirling numbers, whose study permeates the knowledge of combinatorial analysis.

Keywords: Arithmetic Progression. Geometric Progression. Arithmetic Progression of Higher Order.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O atual trabalho cobre um estudo introdutório sobre a teoria das progressões aritméticas e geométricas. Nele contém todo o aparato necessário para o desenvolvimento e compreensão da teoria de uma maneira prática e simples, onde vários resultados foram demonstrados ou mencionados e exemplos discutidos para que o leitor possa ter uma boa noção destes temas.

No capítulo 2, introduziremos as notações que serão utilizadas no decorrer dos próximos capítulos, além de apresentar alguns teoremas que serão de grande importância para a demonstração de vários resultados propostos durante toda a leitura deste trabalho.

No capítulo 3, faremos um estudo sobre progressões aritméticas. Neste capítulo iremos abordar as principais características desta sequência no que diz respeito a definições, posicionamento de termos e operações tais como soma e produto de termos. Mais adiante, faremos uma breve exposição sobre as progressões aritméticas de ordem superior destacando suas relações com as progressões aritméticas e polinômios.

No capítulo 4, estudaremos as progressões geométricas, cujo texto foi elaborado de maneira semelhante ao capítulo anterior na perspectiva dos tópicos, embora hajam diferenças significativas. Estas sequências são caracterizadas pelo fato de que a taxa de crescimento de cada termo para o próximo é sempre constante e este fato sugere um incentivo a mais para conhecermos melhor as mesmas.

2 PRELIMINARES

O presente capítulo terá como finalidade a familiarização com as notações que serão utilizadas nos capítulos posteriores e a apresentação do método de indução. Mencionaremos o conceito de limite de uma sequência real e algumas de suas propriedades. Inicialmente, lembremos que uma sequência real ou sequência de números reais é uma função definida no conjunto dos números inteiros positivos $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ onde é de praxe representar a imagem de n pela função por a_n, o qual é chamado de termo de ordem n ou n-ésimo termo da sequência. No que segue, as funções do tipo $f : \{1, 2, 3, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ serão consideradas, para efeito da teoria das progressões aqui abordadas, como sequências de números reais.

2.1 Somatório

Seja (a_n) uma sequência real dada. A partir dela, vamos utilizar a letra maiúscula $\sum$ (sigma) do alfabeto grego para formar a seguinte notação

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

onde i é chamado índice do somatório e os números 1 e n são, respectivamente, o índice inicial (ou limite inferior) e índice final (ou limite superior). Esta notação é chamada de notação somatório a qual representa, abreviadamente, a soma dos n termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Observe que podemos definir esta notação pela seguinte recorrência:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$;
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1}$, para todo inteiro positivo n.

Segundo esta notação, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} a_i &= a_1 + a_2; \\
\sum_{i=1}^{3} a_i &= a_1 + a_2 + a_3; \\
\sum_{i=1}^{4} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4; \\
&\vdots \\
\sum_{i=1}^{n} a_i &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1. Calculemos o valor de $\displaystyle\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i(i+1)}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{100} \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99\cdot 100} + \frac{1}{100\cdot 101} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{101} \\
&= \frac{100}{101}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.2. Determinemos o valor de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$.

Inicialmente vejamos que

$$\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = (-1)^{n+1} = \begin{cases} -1, & \text{se } n \text{ é par} \\ 1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Se n é um número par, então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = -1$. Como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \in \{0, -1\}$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \in \{0, -1\}$ segue que necessariamente devemos ter $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i = -1$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = 0$, ou seja, sendo n um número par o valor do somatório $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$ vale 0. Agora se n é um número ímpar então $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i = 1$. Como $n+1$ é par então pelo que acabamos de ver acima temos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i = 0$ e assim o valor do somatório $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$ vale -1. Portanto

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ -1, & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Exemplo 2.3. Mostremos que se (a_n) e (b_n) são sequências de números reais e α é um número real qualquer então valem as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha = \alpha n$;

2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha a_i) = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i$;

3. $\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Para mostrar a propriedade 1), tomemos a sequência (t_n) tal que $t_n = \alpha$ para todo inteiro positivo n. Então

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha = \sum_{i=1}^{n} t_i = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha = \alpha n.$$

Já a propriedade 2) se faz utilizando a propriedade distributiva do produto em relação à soma de números reais

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i) &= \alpha a_1 + \alpha a_2 + \cdots + \alpha a_n \\
&= \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\
&= \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i.
\end{aligned}$$

Finalmente, utilizando a comutatividade e a associatividade da soma de números reais podemos mostrar que a propriedade 3) se verifica

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i) &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\
&= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.
\end{aligned}$$

2.2 Produtório

Seja (a_n) uma sequência real. À esta sequência, iremos vincular a letra maiúscula $\prod$ (pi) do alfabeto grego, para estabelecer a notação abaixo

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \ ,$$

onde i é chamado índice do produtório e os números 1 e n são, respectivamente, o índice inicial (ou limite inferior) e índice final (ou limite superior). Esta notação é chamada notação produtório a qual representa, de uma maneira simples, o produto dos n termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Utilizando recorrência, podemos definir a notação acima da seguinte forma:

1. $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$;

2. $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}$, para todo inteiro positivo n.

Com esta notação, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2} a_i &= a_1a_2;\\
\prod_{i=1}^{3} a_i &= a_1a_2a_3;\\
\prod_{i=1}^{4} a_i &= a_1a_2a_3a_4;\\
&\vdots\\
\prod_{i=1}^{n} a_i &= a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.4. Determinemos o valor da expressão $\displaystyle\prod_{i=1}^{2017}\left(1+\frac{1}{i}\right)$.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{2017}\left(1+\frac{1}{i}\right) &= 2\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2016}\right)\left(1+\frac{1}{2017}\right)\\
&= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2017}{2016}\cdot\frac{2018}{2017}\\
&= 2018.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.5. Calculemos o valor da expressão $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 2^{2i+1}$.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} 2^{2i+1} &= 2^3\cdot 2^5\cdot 2^7\cdots 2^{2n-1}\cdot 2^{2n+1}\\
&= 2^{3+5+7+\cdots+2n-1+2n+1}\\
&= 2^{S_n}.
\end{aligned}$$

Podemos calcular S_n utilizando o seguinte artifícil algébrico

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} 2i+1\\
&= \sum_{i=1}^{n}[(i+1)^2-i^2]\\
&= 2^2-1^2+3^2-2^2+\cdots+n^2-(n-1)^2+(n+1)^2-n^2\\
&= (n+1)^2-1^2.
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$\prod_{i=1}^{n} 2^{2i+1} = 2^{s_n} = 2^{(n+1)^2-1^2} = 2^{n^2+2n}.$$

Exemplo 2.6. Mostremos que se (a_n) e (b_n) são sequências de números reais e α é um número real qualquer, então valem as seguintes propriedades:

1. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \alpha = \alpha^n$;

2. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (\alpha a_i) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} a_i$;

3. $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i$.

Para mostrar que a propriedade 1) é verdadeira, tomemos a sequência (r_n) tal que $r_n = \alpha$ para todo inteiro positivo n. Então temos que

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha = \prod_{i=1}^{n} r_i = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n = \alpha \cdot \alpha \cdots \alpha = \alpha^n.$$

A fim de mostrar as propriedades 2) e 3) iremos utilizar as propriedades comutativa e associativa do produto de números reais:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} (\alpha a_i) &= (\alpha a_1)(\alpha a_2) \cdots (\alpha a_n) \\ &= (\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha)(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n) \\ &= \alpha^n \prod_{i=1}^{n} a_i \ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{n} (a_i b_i) &= (a_1 b_1)(a_2 b_2) \cdots (a_n b_n) \\ &= (a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)(b_1 \cdot b_2 \cdots b_n) \\ &= \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i. \end{aligned}$$

2.3 Método da indução

Nos próximos capítulos faremos uso de vários resultados que serão provados através do processo de indução. Destacaremos a seguir o Princípio de Indução Finita e o Princípio de Indução Completa, cujas demonstrações podem ser encontradas em [2].

Princípio de Indução Finita. Seja a um inteiro dado. Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de forma que:

1. $A(a)$ é verdadeira ;

2. Se para um inteiro $n \geq a$, $A(n)$ é verdadeira, então $A(n+1)$ é verdadeira.

Então a afirmação $A(k)$ é verdadeira para todo inteiro $k \geq a$.

Exemplo 2.7. Demonstremos que para todo inteiro positivo n vale:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Para demonstrar a afirmação acima, iremos usar indução finita sobre o inteiro n. Comecemos verificando se a afirmação é verdadeira para $n = 1$:

$$\frac{3}{4} - \frac{2 \cdot 1 + 3}{4 \cdot 3^1} = \frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$

O cálculo acima nos diz que a nossa afirmação é verdadeira para $n = 1$. Suponhamos, por hipótese de indução, que a afirmação acima seja verdadeira para $n \geq 1$. Para concluir a demonstração devemos mostrar que a afirmação também é verdadeira para $n + 1$. Esta tarefa não requer bastante esforço, pois basta observar que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} \\
= \frac{3}{4} - \frac{6n+9}{4 \cdot 3^{n+1}} + \frac{4n+4}{4 \cdot 3^{n+1}} &= \frac{3}{4} + \frac{4n+4-6n-9}{4 \cdot 3^{n+1}} \\
= \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n+1}} &= \frac{3}{4} - \frac{2(n+1)+3}{4 \cdot 3^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Então podemos concluir através do princípio de indução finita que a afirmação é verdadeira para todo inteiro positivo n.

Princípio de Indução Completa. Suponhamos que para cada inteiro $n \geq a$ está dada uma afirmação $A(n)$ de forma que:

1. $A(a)$ é verdadeira ;
2. Se $A(k)$ é verdadeira para todo inteiro k tal que $a \leq k \leq n$, então $A(n+1)$ é verdadeira.

Então a afirmação $A(k)$ é verdadeira para todo inteiro $k \geq a$.

Exemplo 2.8. Consideremos a sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ se $n \geq 3$. Demonstre que para todo inteiro positivo n vale a desigualdade:

$$a_n < \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Para demonstrar a desigualdade acima iremos usar o princípio de indução completa sobre o número n. É fácil ver que a desigualdade é verdadeira para os inteiros $k = 1$ e $k = 2$, como se pode verificar sem maiores dificuldades:

$$\begin{aligned}
a_1 = 1 &< \frac{5}{3}; \\
a_2 = 2 &< \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^2.
\end{aligned}$$

Suponhamos agora, por hipótese de indução, que a desigualdade seja verdadeira para todo inteiro k que cumpra a condição $2 \leq k \leq n$. Precisamos mostrar que a desigualdade também é verdadeira para $n+1$. Como, em particular, a desigualdade é verdadeira para $k = n-1$ e $k = n$ temos

$$a_{n-1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \quad \text{e} \quad a_n < \left(\frac{5}{3}\right)^{n}.$$

Utilizando estas desigualdades como suporte, podemos chegar ao nosso objetivo da seguinte forma

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n} + \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{8}{3} < \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{25}{9} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{5}{3}\right)^{2} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}.$$

Isso mostra que a desigualdade também é verdadeira para $n+1$ e portanto a mesma é válida para todo inteiro positivo n.

2.4 Limite de uma sequência

Apresentaremos agora o importante conceito de limite para sequências de números reais.

Definição 2.1. Diz-se que uma sequência real (a_n) tem limite L, ou converge para o número L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é sempre possível encontrar um número N tal que

$$n > N \Longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$

Escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L, \ \ \lim a_n = L \ \text{ ou } \ a_n \longrightarrow L\,.$$

Uma sequência que não converge é dita divergente.

Exemplo 2.9. Mostremos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

Para mostrar que o limite acima vale 1, devemos mostrar que para qualquer escolha de um número $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um número N de modo que

$$n > N \Longrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Primeiramente, observe que

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Então basta tomar um número N tal que $N \geq \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ que teremos

$$n > N \Longrightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

e portanto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$ como queríamos mostrar.

Antes de encerrar o capítulo, deixaremos abaixo um teorema sobre operações com limites. A demonstração deste teorema será omitida. Para maiores detalhes veja [4].

Teorema 2.1. Sejam (a_n) e (b_n) duas sequências de números reais convergentes, com limites a e b respectivamente. Então, $(a_n + b_n)$, $(a_n b_n)$ e (ka_n), onde k é uma constante real qualquer, são sequências convergentes, além do que:

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$;
2. $\lim(ka_n) = k(\lim a_n) = ka$;
3. $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n) = ab$;
4. se além das hipóteses acima, $b \neq 0$, então $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Exemplo 2.10. Calculemos o valor do limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+3n}{9n^2-5n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{9n^2-5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+\dfrac{3}{n}}{9-\dfrac{5}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(9-\dfrac{5}{n}\right)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 9 - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5}{n}} = \frac{2}{9}.$$

3 PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Definição 3.1. Uma progressão aritmética é uma sequência de números reais na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa diferença constante é chamada de razão da progressão.

Exemplo 3.1. As sequências $(3, 7, 11, 15, \dots)$ e $(9, 6, 3, 0, \dots)$ são progressões aritméticas de razões 4 e -3 respectivamente.

Exemplo 3.2. Consideremos uma progressão aritmética (a_n) onde o oitavo termo vale 30 e o primeiro termo vale 2. Podemos encontrar facilmente sua razão r. Basta observar que $a_2 - a_1 = r$, $a_3 - a_2 = r$, $a_4 - a_3 = r$, $\dots$, $a_7 - a_6 = r$, $a_8 - a_7 = r$ e somar membro a membro essas equações para concluir que $a_8 - a_1 = 7r$ e portanto $r = 4$.

3.1 Classificação das progressões aritméticas

Podemos classificar as progressões aritméticas em crescente, decrescente ou constante.

Crescente Uma progressão aritmética é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente.

Decrescente Uma progressão aritmética é decrescente quando cada termo, a partir do segundo , é menor que o termo precedente.

Constante Uma progressão aritmética é constante quando todos os seus termos são iguais. Esta progressão também é chamada de progressão aritmética estacionária.

Definição 3.2. Uma progressão aritmética é chamada de progressão aritmética de primeira ordem ou progressão aritmética não-estacionária se ela for crescente ou decrescente.

Exemplo 3.3. As progressões aritméticas $(1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}, 1 + 2\sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2}, \dots)$, $(-2, -5, -8, -11, -14)$ e $(\pi, \pi, \pi, \pi, \dots)$ são crescente, decrescente e costante respectivamente. Das três sequências, apenas as duas primeiras são de primeira ordem e a última é estacionária.

3.2 Termo geral de uma progressão aritmética

O termo geral de uma progressão aritmética é uma expressão matemática que permite calcular a posição de qualquer termo da sequência. Essa expressão é bastante útil para solucionar diversos problemas. Vejamos como encontrar essa expressão. Sejam (a_n) uma progressão aritmética e r a sua razão. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= r \\ a_3 - a_2 &= r \\ a_4 - a_3 &= r \\ &\vdots \\ a_{n-2} - a_{n-3} &= r \\ a_{n-1} - a_{n-2} &= r \\ a_n - a_{n-1} &= r. \end{aligned}$$

Somando membro a membro essas $n - 1$ igualdades segue que

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Essa última expressão é chamada de termo geral da progressão aritmética (a_n) de razão r. Observe que essa expressão nos diz que para encontrar o $n-$ésimo termo de uma progressão aritmética podemos localizar seu primeiro termo e, a partir dele, percorrermos a sequência $n - 1$ posições.

Exemplo 3.4. Em uma progressão aritmética, o quinto termo vale 20 e o vigésimo termo vale 50. Quanto vale o sexto termo dessa progressão?

Sabemos que $a_5 = a_1 + 4r$ e $a_{20} = a_1 + 19r$. Destas duas expressões resulta que $a_{20} - a_5 = 15r$ e como o quinto termo vale 20 e o vigésimo termo vale 50 segue que $r = 2$. Logo $a_6 = a_5 + r = 22$.

Exemplo 3.5. Quantos números inteiros existem, de 1000 a 10000, não divisíveis nem por 5 e nem por 7?

Para calcular esta quantidade de números, vamos inicialmente calcular quantos números da lista $1000, 1001, \ldots, 9999, 10000$ são múltiplos de 5 ou 7. Para calcular a quantidade de múltiplos de 7 vamos utilizar a fórmula do termo geral para uma progressão aritmética de primeiro termo 1001 e n-ésimo termo 9996. O que queremos aqui é encontrar o número n. Temos que $9996 = 1001 + (n-1)7$ e assim $n = 1286$. De modo análogo, mostra-se que a quantidade de múltiplos de 5 é

$$\frac{10000 - 1000}{5} + 1 = 1801$$

e a quantidade de múltiplos de 35 é

$$\frac{9975 - 1015}{35} + 1 = 257.$$

Então a quantidade de múltiplos de 5 ou 7 vale $1286 + 1801 - 257 = 2830$. Para obter a quantidade de números pedido basta retirar do total de números $10000-1000+1 = 9001$ a quantidade 2830. Portanto temos 6171 números.

Exemplo 3.6. Existem infinitos números primos na sequência $(5, 11, 17, 23, \dots)$.

Primeiramente observemos que tal sequência é uma progressão aritmética pois a diferença entre cada termo e o termo anterior vale 6. Como o termo de ordem n desta sequência é $6n - 1$ então se mostrarmos que existem infinitos primos da forma $6n - 1$ consequentemente estaremos mostrando a existência de infinitos números primos na sequência dada. Suponhamos por absurdo que a quantidade de números primos da forma $6n - 1$ seja finita e sejam $5 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ estes primos. Se considerarmos o número

$$b = 6p_1p_2\cdots p_k + 5$$

vemos que nenhum dos primos da forma $6n - 1$ é um fator de b e que 3 também não é um fator de b. Observe também que b é um inteiro ímpar e que um primo ímpar ou é 3 ou ele é da forma $6n - 1$ ou é da forma $6n + 1$. Então podemos concluir que todos os fatores primos de b que aparecem na sua decomposição são primos da forma $6n + 1$ e assim b seria um número da forma $6n + 1$ pois o produto de números da forma $6n + 1$ é ainda um número da forma $6n + 1$. Mas isto é uma contradição pois o número b é da forma $6n + 5$.

De modo geral, se tivéssemos escolhido uma outra progressão aritmética de números naturais onde o primeiro termo e a razão fossem primos entre si, então a quantidade de números primos na sequência dada também seria infinita. O exemplo acima é apenas um caso particular de um famoso teorema devido ao matemático alemão Johann P. G. Lejeune Dirichlet, o qual enunciaremos a seguir sem demonstração:

Teorema 3.1. Em uma progressão aritmética de números naturais, com primeiro termo e razão primos entre si, existem infinitos números primos.

3.3 Produto dos termos de uma progressão aritmética

É de conhecimento da comunidade matemática que se (a_n) é uma progressão aritmética de razão r onde $a_1 r > 0$ então o cálculo do produto dos n termos desta sequência é expresso pela seguinte fórmula:

$$P_n = r^n \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{r} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{r}\right)}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} \Gamma: & (0, +\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \alpha & \longmapsto & \Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \end{array}$$

é a função gama de Euler. Assim, se considerarmos a progressão aritmética $(5, 9, 13, \dots)$, teremos a seguinte igualdade

$$5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots (4n+1) = 4^n \frac{\Gamma\left(\frac{4n+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

para todo inteiro positivo n. Um fato interessante sobre esta função é que a mesma possibilita a extensão do cálculo de números fatoriais para todos os valores reais maiores que -1:

$$\alpha! = \Gamma(\alpha + 1)$$

onde $\alpha > -1$ é um número real qualquer. A título de exemplo, seguem dois resultados curiosos:

$$0! = 1 \quad \text{e} \quad (-0,5)! = \sqrt{\pi}.$$

Apresentaremos a seguir dois resultados, cuja contribuição é da competência do autor deste trabalho, que respondem na direção do problema do cálculo do produto dos n termos de uma progressão aritmética sem utilizar conhecimentos do Cálculo avançado.

Teorema 3.2. O produto dos $(n \geq 3)$ primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) é

$$P_n = \frac{a_1 a_n}{(n-1)^{n-2}} \prod_{i+j=n-1} (a_1 i + a_n j)$$

onde i e j são inteiros positivos.

Demonstração. Seja r a razão da progressão aritmética (a_n). Temos que

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n = a_1 a_n a_2 a_3 \cdots a_{n-1} = a_1 a_n \prod_{k=1}^{n-2} a_{k+1} = a_1 a_n \prod_{k=1}^{n-2} \left[\frac{1}{n-1}(n-1) a_{k+1}\right] \\ &= a_1 a_n \left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n-1}\right) \prod_{k=1}^{n-2} [(n-1) a_{k+1}] = \frac{a_1 a_n}{(n-1)^{n-2}} \prod_{k=1}^{n-2} [(n-1) a_{k+1}]. \end{aligned}$$

Para concluir a demonstração resta mostrar que

$$\prod_{k=1}^{n-2} [(n-1) a_{k+1}] = \prod_{i+j=n-1} (a_1 i + a_n j)$$

onde i e j são inteiros positivos. Veja que

$$\prod_{k=1}^{n-2} [(n-1) a_{k+1}] = \prod_{k=1}^{n-2} [(n-1)(a_1 + kr)] = \prod_{j=1}^{n-2} (n a_1 + n j r - a_1 - j r) =$$

$$\prod_{j=1}^{n-2} [(n-1-j) a_1 + (a_1 + (n-1) r) j] = \prod_{i+j=n-1} (a_1 i + a_n j).$$

□

Exemplo 3.7. Calculemos o produto dos seis primeiros termos da progressão aritmética $(1, 4, 7, \ldots)$.

Observe que a sequência acima possui primeiro termo igual a 1 e razão igual a 3. Com estes dados, a expressão do termo geral de uma progressão aritmética nos fornece o sexto termo

$$a_6 = a_1 + 5r = 16.$$

Pelo Teorema 3.2 temos

$$\begin{aligned} P_6 &= \frac{a_1 a_6}{5^4} \prod_{i+j=5} (a_1 i + a_6 j) = \frac{a_1 a_6}{625}(a_1 + 4a_6)(2a_1 + 3a_6)(3a_1 + 2a_6)(4a_1 + a_6) \\ &= \frac{16}{625}(1 + 4 \cdot 16)(2 \cdot 1 + 3 \cdot 16)(3 \cdot 1 + 2 \cdot 16)(4 \cdot 1 + 16) = 58240. \end{aligned}$$

Exemplo 3.8. Calculemos o valor da expressão $\displaystyle\prod_{i+j=n-1} (i + nj)$ onde i, j e n são inteiros positivos com $n \geq 3$.

Para calcular essa expressão basta aplicar o Teorema 3.2 para a sequência cujo termo de posição n seja $a_n = n$

$$\prod_{i+j=n-1} (i + nj) = \frac{n!(n-1)^{n-2}}{n} = \frac{n(n-2)!(n-1)(n-1)^{n-2}}{n} = (n-2)!(n-1)^{n-1}.$$

Exemplo 3.9. Calculemos o valor da expressão $\displaystyle\prod_{i+j=14} (7i + 9j)$ onde i e j são inteiros positivos.

Vamos modificar um pouco a nossa expressão

$$\prod_{i+j=14} (7i + 9j) = \frac{1}{7^{13}} \left(7^{13} \prod_{i+j=14} (7i + 9j) \right) = \frac{1}{7^{13}} \prod_{i+j=14} (49i + 63j).$$

Observe que a sequência $(a_n) = (49, 50, 51, ..., 63)$ é uma progressão aritmética com 15 termos. Pelo Teorema 3.2 temos

$$\prod_{i+j=14} (49i + 63j) = \frac{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdots 63 \cdot 14^{13}}{49 \cdot 63} = 50 \cdot 51 \cdots 62 \cdot 14^{13} = \frac{62! 14^{13}}{49!}.$$

Portanto

$$\prod_{i+j=14} (7i + 9j) = \frac{1}{7^{13}} \prod_{i+j=14} (49i + 63j) = \frac{1}{7^{13}} \frac{62! 14^{13}}{49!} = \frac{62! 2^{13}}{49!}.$$

Uma outra maneira de calcular o produto dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é através dos números de Stirling de primeira espécie. Os números de Stirling de primeira espécie são os inteiros $S(n, k)$, com n e k inteiros não negativos, gerados pela seguinte definição recursiva:

1. $S(n,0) = 0$, se $n \geq 1$
2. $S(n,n) = 1$, se $n \geq 0$
3. $S(n,k) = 0$, se $k > n$
4. $S(n+1,k) = S(n,k-1) - nS(n,k)$, se $1 \leq k \leq n$

Vejamos como tais números nos revelam uma maneira alternativa para o cálculo deste produto através da seguinte proposição:

Proposição 3.1. O produto dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) de razão r é

$$P_n = a_1^n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} S(n,k) a_1^k r^{n-k}$$

onde $S(n,k)$ é um número de Stirling de primeira espécie.

Demonstração. É fácil ver que a afirmação é verdadeira para $n = 1$. Como $S(n,0) = 0$ para $n \geq 1$ então é suficiente mostrar que a afirmação $P_n = a_1^n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} S(n,k) a_1^k r^{n-k}$ é verdadeira para $n \geq 2$. Iremos proceder por indução finita sobre o número n. Para $n = 2$ temos

$$a_1^2 + \sum_{k=1}^{1} (-1)^{2-k} S(2,k) a_1^k r^{2-k} = a_1^2 - S(2,1) a_1 r = a_1^2 - (-1) a_1 r = a_1(a_1 + r) = P_2.$$

Suponhamos agora que a nossa afirmação seja verdadeira para $n \geq 2$. Vamos mostrar que ela também é verdadeira para $n + 1$. Temos que

$$a_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} S(n+1,k) a_1^k r^{n+1-k} = a_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+1-k} [S(n,k-1) - nS(n,k)] a_1^k r^{n+1-k}$$
$$= a_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} [nS(n,k) - S(n,k-1)] a_1^k r^{n+1-k} = a_1^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} nS(n,k) a_1^k r^{n+1-k} -$$
$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} S(n,k-1) a_1^k r^{n+1-k} = a_1^{n+1} + nra_1^n + nr \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} S(n,k) a_1^k r^{n-k} +$$
$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^{n+1-k} S(n,k-1) a_1^k r^{n+1-k} = a_1^{n+1} + nra_1^n + nr(P_n - a_1^n) + a_1(P_n - a_1^n) = a_1^n(a_1 + nr) +$$
$$(P_n - a_1^n)(a_1 + nr) = (a_1^n + P_n - a_1^n)(a_1 + nr) = P_n a_{n+1} = P_{n+1}.$$

Isto completa a demonstração por indução finita e portanto a nossa afirmação é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$. □

3.4 Soma dos termos de uma progressão aritmética

Teorema 3.3. A soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (a_n) é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Demonstração. Sejam S_n o valor da soma $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e r a razão da progressão. Reescrevendo a soma na forma $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$ ou seja , de trás pra frente, teremos que

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Agora observe que cada expressão entre parênteses é da forma $a_i + a_j$ com $i + j = n + 1$ e que $a_i + a_j = a_1 + a_n$ pois

$$\begin{aligned}
a_i + a_j &= a_1 + (i-1)r + a_1 + (j-1)r \\
&= a_1 + ir - r + a_1 + jr - r \\
&= a_1 + a_1 + (i + j - 2)r \\
&= a_1 + a_1 + (n + 1 - 2)r \\
&= a_1 + a_1 + (n-1)r \\
&= a_1 + a_n.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\
&= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas iguais a } (a_1 + a_n)} \\
&= (a_1 + a_n)n.
\end{aligned}$$

Portanto

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

□

Exemplo 3.10. A soma dos cem primeiros números inteiros e positivos é

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5050.$$

Exemplo 3.11. Se a soma S_m dos m primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) for igual a soma dos n primeiros termos, com $m \neq n$, então

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} = -S_n.$$

Seja r a razão da progressão aritmética. Pelos dados do problema podemos ver que $a_1 + a_{m+n} = a_1 + a_1 + (m + n - 1)r = a_1 + (m-1)r + a_1 + nr = a_m + a_1 + nr =$

$\frac{2}{m} \cdot \frac{(a_1 + a_m)m}{2} + nr = \frac{2}{m} S_m + nr = \frac{2}{m} S_n + nr = \frac{2}{m} \cdot \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + nr = \frac{n}{m}(a_1 + a_n) + nr =$
$n\left(\frac{a_1 + a_n}{m} + r\right) = n\left(\frac{a_1 + a_n + mr}{m}\right) = \frac{n}{m}(a_1 + a_{m+n}).$

Esta igualdade mostra que o produto $(a_1 + a_{m+n})\left(1 - \frac{n}{m}\right)$ é igual a zero e como $m \neq n$ temos que $a_1 + a_{m+n} = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+n} &= S_{m+n} - S_m \\ &= \frac{(a_1 + a_{m+n})(m+n)}{2} - S_m \\ &= \frac{0 \cdot (m+n)}{2} - S_n \\ &= -S_n. \end{aligned}$$

Exemplo 3.12. Em uma progressão aritmética de 11 termos, a soma dos 5 primeiros termos é 50 e a soma dos 5 últimos termos é 140. Determine o último termo.

Pelo enunciado do problema podemos escrever que $(a_1 + a_5)5 = 100$ e

$$2(50 + a_6 + 140) = (a_1 + a_{11})11.$$

Como

$$a_1 + a_{11} = a_1 + a_1 + 10r = 2a_1 + 10r = 2(a_1 + 5r) = 2a_6$$

então segue daí e da última expressão que o sexto termo é 19. Por outro lado se $a_1 + a_5 = 20$ temos também que $2a_1 + 4r = 20$. Resolvendo o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + 5r = 19 \\ 2a_1 + 4r = 20 \end{cases}$$

encontraremos $r = 3$ e $a_1 = 4$. Logo $a_{11} = a_1 + 10r = 34$.

3.5 Progressões aritméticas de ordem superior

Estudaremos agora as progressões aritméticas de ordem superior. Nesta seção usaremos a notação Δa_n para representar a diferença $a_{n+1} - a_n$ de uma dada sequência (a_n) e para cada inteiro positivo v definiremos

$$\Delta^v a_n = \begin{cases} \Delta a_n, & \text{se} \quad v = 1 \\ \Delta^{v-1} \Delta a_n, & \text{se} \quad v \geq 2 \end{cases}.$$

Definição 3.3. Uma progressão aritmética de segunda ordem é uma sequência (a_n) na qual a sequência (Δa_n) forma uma progressão aritmética não-estacionária. Generalizando, uma progressão aritmética de ordem v ($v \geq 3$) é uma sequência na qual a sequência (Δa_n) forma uma progressão aritmética de ordem $v - 1$.

Exemplo 3.13. A sequência $(a_n) = (n^2) = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem pois a sequência $(\Delta a_n) = (2n + 1) = (3, 5, 7, 9, \ldots)$ é uma progressão aritmética não-estacionária.

Exemplo 3.14. Seja $(a_n) = (n^3 + 1) = (2, 9, 28, 65, \ldots)$. Vamos mostrar que esta sequência é uma progressão aritmética de ordem 3. A partir desta sequência vamos calcular Δa_n e $\Delta^2 a_n$:

$$\begin{aligned} \Delta a_n &= (n+1)^3 + 1 - (n^3 + 1) = 3n^2 + 3n + 1; \\ \Delta^2 a_n &= 3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 - 3n^2 - 3n - 1 = 6n + 6. \end{aligned}$$

Note que a sequência $(\Delta^2 a_n) = (12, 18, 24, \ldots)$ representa uma progressão aritmética não- estacionária e isso nos diz que (Δa_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem. Portanto se (Δa_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem então (a_n) é uma progressão aritmética de ordem 3.

Exemplo 3.15. Mostre que se (a_n) é uma progressão aritmética não-estacionária então dado um número s existe uma progressão aritmética (b_n) de ordem $v + 1$ tal que $b_1 = s$ e $\Delta^v b_n = a_n$.

Para mostrar a existência da sequência (b_n) iremos usar indução finita sobre o número v. Seja $v = 1$ e ponha

$$b_n = \begin{cases} s, & \text{se} \quad n = 1 \\ s + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k, & \text{se} \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

Então $\Delta b_1 = s + a_1 - s = a_1$ e

$$\Delta b_n = s + \sum_{k=1}^{n} a_k - s - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = s + a_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k - s - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n$$

para $n \geq 2$, ou seja, $\Delta b_n = a_n$ e isso também nos diz que (b_n) é uma progressão aritmética de ordem 2 pois (a_n) é uma progressão aritmética não-estacionária. Suponhamos, por hipótese de indução, que exista uma progressão aritmética (q_n) de ordem $v + 1$ tal que $q_1 = s$ e $\Delta^v q_n = a_n$. Mostraremos que existe uma progressão aritmética (b_n) de ordem $v + 2$ tal que $b_1 = s$ e $\Delta^{v+1} b_n = a_n$. Tome

$$b_n = \begin{cases} s, & \text{se} \quad n = 1 \\ s + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} q_k, & \text{se} \quad n \geq 2 \end{cases}.$$

De modo análogo ao que fizemos acima mostra-se que $\Delta b_n = q_n$ e como a sequência (q_n) é uma progressão aritmética de ordem $v + 1$ segue que (b_n) é uma progressão aritmética de ordem $v + 2$. Para finalizar basta observar que $\Delta^{v+1} b_n = \Delta^v \Delta b_n = \Delta^v q_n = a_n$.

Teorema 3.4. A expressão $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$ é um polinômio em n de grau $p+1$.

Demonstração. Para provar a validade deste teorema usaremos indução completa sobre o número p. É fácil ver que o teorema é válido para $p = 1$ pois $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ é um polinômio em n de grau 2. Suponhamos , por hipótese de indução, que o polinômio em n $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ tenha grau $p+1$ para $1 \leq p \leq v$. Mostraremos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{v+1}$ é um polinômio em n de grau $v+2$. Veja que

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{v+2} - 1 &= \sum_{k=1}^{n}(k+1)^{v+2} - \sum_{k=1}^{n} k^{v+2} \\
&= \sum_{k=1}^{n}[(k+1)^{v+2} - k^{v+2}] \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left[(v+2)k^{v+1} + \frac{(v+2)(v+1)}{2}k^{v} + \cdots + k + 1\right] \\
&= (v+2)\sum_{k=1}^{n} k^{v+1} + \frac{(v+2)(v+1)}{2}\sum_{k=1}^{n} k^{v} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= (v+2)\sum_{k=1}^{n} k^{v+1} + R(n).
\end{aligned}
$$

Como $(n+1)^{v+2} - 1$ é um polinômio em n de grau $v+2$ e $R(n)$ é um polinômio em n de grau $v+1$ segue que $(v+2)\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{v+1}$ é um polinômio em n de grau $v+2$ e portanto

$$\sum_{k=1}^{n} k^{v+1} = \frac{(n+1)^{v+2} - 1 - R(n)}{v+2}$$

é um polinômio em n de grau $v+2$. □

Corolário 3.1. Se P é um polinômio de grau p, então $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(k)$ é um polinômio em n de grau $p+1$.

Demonstração. Como P é um polinômio de grau p, então existem constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ e a_p com $a_p \neq 0$ tais que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} P(k) &= \sum_{k=1}^{n}[a_p k^p + a_{p-1}k^{p-1} + \cdots + a_1 k + a_0] \\
&= a_p\sum_{k=1}^{n} k^p + a_{p-1}\sum_{k=1}^{n} k^{p-1} + \cdots + a_1\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} a_0.
\end{aligned}
$$

Se olharmos esta última expressão da esquerda para a direita, o Teorema 2.2 nos garante que a primeira parcela da soma é um polinômio em n de grau $p+1$ e as demais parcelas, a menos de um polinômio identicamente nulo, são polinômios em n com grau no máximo igual a p. Portanto o polinômio em n $\sum_{k=1}^{n} P(k)$ possui grau $p+1$. □

Exemplo 3.16. Determinemos o valor da soma $\sum_{k=1}^{n} k^4$ em função do número n.

Pelo Teorema 2.2 tem-se que $F(n) = \sum_{k=1}^{n} k^4$ é um polinômio em n de grau 5 e então podemos escrever $F(n) = an^5 + bn^4 + cn^3 + dn^2 + en + f$. Para determinar os valores dos coeficientes do polinômio basta resolver o sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & + & e & + & f & = & 1 \\ 32a & + & 16b & + & 8c & + & 4d & + & 2e & + & f & = & 17 \\ 243a & + & 81b & + & 27c & + & 9d & + & 3e & + & f & = & 98 \\ 1024a & + & 256b & + & 64c & + & 16d & + & 4e & + & f & = & 354 \\ 3125a & + & 625b & + & 125c & + & 25d & + & 5e & + & f & = & 979 \\ 7776a & + & 1296b & + & 216c & + & 36d & + & 6e & + & f & = & 2275 \end{array}\right. .$$

Resolvendo o sistema linear acima encontraremos $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = f = 0$ e $e = -\frac{1}{30}$ e portanto

$$F(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Exemplo 3.17. Mostremos que

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \frac{4n^3}{3} + 2n^2 - \frac{n}{3}.$$

Como $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots+(2n-1)(2n+1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-1)$ e $P(k) = 4k^2-1$ é um polinômio de grau 2 então pelo Corolário 2.1 segue que $\sum_{k=1}^{n} P(k)$ é um polinômio em n de grau 3. Assim existem constantes a, b, c e d tais que $\sum_{k=1}^{n} P(k) = an^3 + bn^2 + cn + d$. Observando que

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} P(1) & = & 3 \\ P(1) & + & P(2) & = & 18 \\ P(1) & + & P(2) & + & P(3) & = & 53 \\ P(1) & + & P(2) & + & P(3) & + & P(4) & = & 116 \end{array}\right.$$

podemos construir o seguinte sistema linear

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a & + & b & + & c & + & d & = & 3 \\ 8a & + & 4b & + & 2c & + & d & = & 18 \\ 27a & + & 9b & + & 3c & + & d & = & 53 \\ 64a & + & 16b & + & 4c & + & d & = & 116 \end{array}\right. .$$

Resolvendo o sistema linear teremos que $a = \dfrac{4}{3}, b = 2, c = -\dfrac{1}{3}$ e $d = 0$. Portanto

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \cdots + (2n-1)(2n+1) = \sum_{k=1}^{n} P(k) = \frac{4n^3}{3} + 2n^2 - \frac{n}{3}.$$

Teorema 3.5. Uma sequência (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $(p \geq 1)$ se, e somente se, o termo geral da progressão aritmética (a_n) é um polinômio em n de grau p.

Demonstração. Faremos a prova deste teorema utilizando indução sobre o número p. Inicialmente vamos mostrar que o resultado é válido para $p = 1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem então sua razão r é diferente de zero e assim o seu termo de ordem n é um polinômio em n de grau 1 pois $a_n = a_1 + (n-1)r = rn + (a_1 - r)$. Suponhamos agora que o termo de ordem n da sequência (a_n) seja um polinômio em n de grau 1. Desta forma existem constantes r e b com $r \neq 0$ tais que $a_n = rn + b$. Como

$$a_{n+1} - a_n = r(n+1) + b - (rn + b) = r$$

então (a_n) é uma progressão aritmética de primeira ordem. Suponhamos, por hipótese de indução, que o teorema seja válido para $p \geq 1$. Vamos mostrar que ele é válido para $p + 1$. Se (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $p + 1$ então (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem p e, pela hipótese de indução, Δa_n é um polinômio em n de grau p. Pelo Corolário 2.1 segue que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Delta a_k$ é um polinômio em n de grau $p + 1$. Mas

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{n} \Delta a_k$$

e assim a_{n+1} é um polinômio em n de grau $p + 1$ e portanto a_n também é um polinômio em n de grau $p + 1$. Reciprocamente, se a_n é um polinômio em n de grau $p + 1$ então é fácil ver que a_{n+1} também é um polinômio em n de grau $p + 1$ e Δa_n é um polinômio em n de grau p. Pela hipótese de indução, (Δa_n) é uma progressão aritmética de ordem p e portanto (a_n) é uma progressão aritmética de ordem $p + 1$. □

Exemplo 3.18. Seja (a_n) uma sequência tal que $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 1$, se $n \geq 1$. Determine a soma S_n dos n primeiros termos.

Veja que a expressão $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 1$ nos diz que

$$\Delta^2 a_n = \Delta\Delta a_n = \Delta(a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - a_{n+1} - (a_{n+1} - a_n) = a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 1.$$

Esta informação é bastante útil para a resolução do problema pois a partir dela podemos obter mais detalhes sobre a sequência (a_n). Dada a identidade $\Delta^2 a_n = 1$ teremos que

$$\Delta a_{n+1} = \Delta a_{n+1} - \Delta a_1 = \sum_{k=1}^{n} \Delta^2 a_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$

e assim (Δa_{n+1}) é uma progressão aritmética não - estacionária e isso mostra que (a_{n+1}) é uma progressão aritmética de ordem 2. Pelo Teorema 2.3 a_{n+1} é um polinômio em n de grau 2 e então existem constantes a, b e c tais que

$$a_n = an^2 + bn + c.$$

A nossa tarefa agora é encontrar tais constantes. Para isto basta resolver o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b + c = a_1 = 1 \\ 4a + 2b + c = a_2 = 1 \\ 9a + 3b + c = a_3 = 2 \end{cases}.$$

Tal sistema linear nos dá os valores $a = \dfrac{1}{2}$, $b = -\dfrac{3}{2}$ e $c = 2$ e assim $a_n = \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{3}{2}n + 2$. Como

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2}{2} - \frac{3}{2}k + 2\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 2,$$

então precisamos determinar o valor do somatório $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, pois como já sabemos,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ e } \sum_{k=1}^{n} 2 = 2n.$$

De modo análogo ao que fizemos no Exemplo 2.15 poderíamos avaliar o somatório $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, porém iremos apresentar o cálculo de uma maneira diferente. Observe que

$$\begin{aligned} \Delta\left(k \cdot \frac{k(k-1)}{2}\right) &= (k+1) \cdot \frac{k(k+1)}{2} - k \cdot \frac{k(k-1)}{2} \\ &= (k+1) \cdot \frac{k(k+1)}{2} - k \cdot \frac{k(k+1)}{2} + k \cdot \frac{k(k+1)}{2} - k \cdot \frac{k(k-1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + k \cdot \Delta\frac{k(k-1)}{2} \end{aligned}$$

ou seja,

$$k \cdot \Delta\frac{k(k-1)}{2} = \Delta\left(k \cdot \frac{k(k-1)}{2}\right) - \frac{k(k+1)}{2}.$$

Segue daí que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left[k \cdot \Delta \frac{k(k-1)}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left[\Delta\left(k \cdot \frac{k(k-1)}{2}\right) - \frac{k(k+1)}{2}\right] = \sum_{k=1}^{n} \Delta\left(k \cdot \frac{k(k-1)}{2}\right)$$
$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - 1 \cdot 0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

e assim

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Portanto

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{3}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + 2n = \frac{n^3 - 3n^2 + 8n}{6}.$$

4 PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Definição 4.1. Uma progressão geométrica é uma sequência de números reais (a_n) tal que a_1 é dado e, para todo inteiro positivo n, tem-se

$$a_{n+1} = a_n q$$

onde q é um número fixo, diferente de 0 e 1, chamado razão da progressão.

Exemplo 4.1. As sequências $(3, 6, 12, 24, ...)$ e $\left(5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, ...\right)$ são progressões geométricas cujas razões valem, respectivamente, 2 e $\frac{1}{5}$.

Exemplo 4.2. Em uma progressão geométrica, o sexto termo vale 224 e o terceiro termo vale 28. Quanto vale o segundo termo dessa progressão?

Pela definição acima teremos $224 = a_5 q$ e $a_4 = 28q$. A partir destas duas igualdades podemos encontrar a razão q da seguinte forma

$$224 = a_5 q = (a_4 q)q = a_4 q^2 = (28q)q^2 = 28q^3$$

e assim $q = \sqrt[3]{\frac{224}{28}} = 2$. Como queremos o segundo termo da progressão então basta dividir o valor do terceiro termo pela razão $q = 2$

$$a_2 = \frac{a_3}{q} = 14.$$

Exemplo 4.3. Sabendo que (a_n) é uma progressão aritmética de razão não nula, prove que (b_n) definida por $b_n = \pi^{a_n}$ é uma progressão geométrica.

Seja r a razão da progressão aritmética (a_n). Para cada inteiro positivo n observe que

$$b_{n+1} = \pi^{a_{n+1}} = \pi^{a_n + r} = \pi^{a_n} \cdot \pi^r = b_n \cdot \pi^r,$$

então segue daí que (b_n) é uma progressão geométrica. Note que $b_1 = \pi^{a_1}$ e $q = \pi^r$.

Uma motivação para o estudo deste tipo de sequência se dá pelo fato de que a taxa de crescimento de cada termo para o seguinte é sempre a mesma. Para entender melhor esta afirmação, basta notar que

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n q \\ &= a_n(q - 1 + 1) \\ &= a_n(q - 1) + a_n \\ &= a_n i + a_n, \end{aligned}$$

onde $i = q - 1$ é a taxa de crescimento.

Exemplo 4.4. As taxas de crescimento das progressões geométricas $(5, 10, 20, 40, \dots)$ e $\left(5, 1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \dots\right)$ são, respectivamente, $i_1 = 100\%$ e $i_2 = -80\%$.

4.1 Classificação das progressões geométricas

Podemos classificar as progressões geométricas em crescente, decrescente, constante ou alternante.

Crescente Uma progressão geométrica é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo precedente.

Decrescente Uma progressão geométrica é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo precedente.

Constante Uma progressão geométrica é constante quando todos os seus termos são iguais.

Alternante Uma progressão geométrica é alternante quando cada termo, a partir do segundo, tem sinal contrário ao do termo precedente.

Exemplo 4.5. As progressões geométricas

$$(1, 3, 9, 27, 81, \dots), \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right), (0, 0, 0, 0, \dots) \text{ e } (7, -7, 7, -7, 7, \dots)$$

são crescente, decrescente, costante e alternante respectivamente.

4.2 Termo geral de uma progressão geométrica

Ao estudar as progressões geométricas é comum nos depararmos com problemas que envolvem a posição de certos termos da sequência. É importante identificar uma expressão que permita saber a posição de qualquer termo arbitrário. Chamaremos de termo geral da progressão geométrica ao termo que ocupa a posição n na sequência. Vejamos como encontrar tal expressão. Consideremos uma progressão geométrica (a_n) de razão q. A partir desta sequência tomemos a sequência (t_n) tal que

$$t_n = a_1 q^n - a_n q$$

para todo inteiro positivo n. Como se pode notar temos que $t_1 = 0$ e mais

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= a_1 q^{n+1} - a_{n+1} q \\ &= a_1 q^{n+1} - (a_n q) q \\ &= q(a_1 q^n - a_n q) \\ &= q t_n. \end{aligned}$$

Isso mostra que cada termo da sequência (t_n), a partir do segundo, é obtido pelo produto do termo anterior pela razão q. Como já vimos, o primeiro termo desta nova sequência é zero, então podemos concluir que todos os termos da sequência (t_n) são nulos, ou seja, teremos $t_n = 0$ para todo inteiro positivo n. Então segue daí que

$$\begin{aligned} a_1q^n - a_nq &= 0 \\ a_nq &= a_1q^n \\ a_n &= a_1q^{n-1}, \end{aligned}$$

para todo inteiro positivo n. A última expressão

$$a_n = a_1q^{n-1}$$

é chamada de termo geral da progressão geométrica (a_n) de razão q.

Exemplo 4.6. Sabendo que $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ é uma progressão aritmética de razão $r \neq 0$ tal que as sequências (a_1, a_3, a_{13}) e (a_2, a_j, a_{14}) são progressões geométricas, determine o valor do índice j.

Se indicarmos por q a razão da progressão geométrica (a_1, a_3, a_{13}) teremos de imediato que $a_3 = a_1q$ e $a_{13} = a_3q$. Mais ainda, as duas equações nos mostram que

$$\begin{aligned} a_1 + 12r &= a_3q \\ a_1 + 12r &= (a_1 + 2r)q \\ a_1 + 12r &= a_3 + 2rq \\ a_1 + 12r &= a_1 + 2r + 2rq \\ 10r &= 2rq \\ q &= 5. \end{aligned}$$

Como sabemos o valor de q então podemos encontrar uma relação entre a razão da progressão aritmética (a_n) e o seu primeiro termo

$$\begin{aligned} a_3 &= 5a_1 \\ a_1 + 2r &= 5a_1 \\ 2r &= 4a_1 \\ r &= 2a_1. \end{aligned}$$

Por outro lado, se (a_2, a_j, a_{14}) representa uma progressão geométrica, então

$$a_j^2 = a_2a_{14} = 3a_127a_1 = 81a_1^2$$

de modo que $a_j = 9a_1$ ou $a_j = -9a_1$. É fácil ver que não pode ser $a_j = -9a_1$, pois se assim o fosse então teríamos o seguinte absurdo

$$\begin{aligned} a_j &= -9a_1 \\ a_1 + (j-1)r &= -9a_1 \\ 2(j-1)a_1 &= -10a_1 \\ j-1 &= -5, \end{aligned}$$

pois $j-1$ não é um inteiro negativo. Logo o correto é $a_j = 9a_1$ e assim podemos encontrar o índice j

$$\begin{aligned} a_j &= 9a_1 \\ a_1 + (j-1)r &= 9a_1 \\ 2(j-1)a_1 &= 8a_1 \\ j-1 &= 4 \\ j &= 5. \end{aligned}$$

Exemplo 4.7. Determinemos a progressão geométrica de seis termos cuja soma dos termos de ordem ímpar é 546 e a dos de ordem par é 2184.

Pelo enunciado do problema vemos que

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 &= 546 \\ a_2 + a_4 + a_6 &= 2184. \end{aligned}$$

Observe que se multiplicarmos o primeiro membro da primeira equação pela razão da progressão geométrica então teremos como resultado a soma dos termos de ordem par da progressão geométrica. Então fica fácil determinar a razão da progressão geométrica:

$$q = \frac{2184}{546} = 4.$$

Lembrando que $a_3 = a_1q^2$ e $a_5 = a_1q^4$ então se substituírmos esses valores na primeira equação iremos achar o primeiro termo da sequência

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 &= 546 \\ a_1 + a_1q^2 + a_1q^4 &= 546 \\ a_1(1 + q^2 + q^4) &= 546 \\ 273a_1 &= 546 \\ a_1 &= 2. \end{aligned}$$

Portanto a progressão geométrica é $(2, 8, 32, 128, 512, 2048)$.

Exemplo 4.8. A soma de três números que formam uma progressão aritmética crescente é 60. Determine esses números, sabendo que se somarmos 45 unidades ao último, eles passam a constituir uma progressão geométrica.

Sejam a, b e c os números procurados de modo que (a, b, c) seja uma progressão aritmética. Como a soma dos três números vale 60 então podemos escrever

$$3b = \frac{(a+c)3}{2} = 60$$

e assim $b = 20$. Ainda, pelo enunciado, sabemos também que $(a, 20, 45 + c)$ constitui uma progressão geométrica, de sorte que

$$\frac{20}{a} = \frac{45+c}{20}$$

ou seja, $a(45 + c) = 400$. Então, com estas informações, podemos encontrar os valores de a e c através do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + c & = & 40 \\ a(45+c) & = & 400 \end{cases}$$

cuja solução se dá quando $a = 5$ e $c = 35$ ou $a = 80$ e $c = -40$. Observe que como a progressão aritmética é crescente então devemos ter $a < c$ e assim os valores de a e c que servem para a solução do problema são 5 e 35, respectivamente. Portanto os números são $5, 20$ e 35.

4.3 Produto dos termos de uma progressão geométrica

Teorema 4.1. O produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão q, é

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Demonstração. Utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica de razão q temos

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \\ &= a_1 a_1 q a_1 q^2 \cdots a_1 q^{n-1} \\ &= a_1 a_1 a_1 \cdots a_1 q^{1+2+\cdots+n-1}. \end{aligned}$$

Após a última igualdade acima o primeiro termo consta n vezes no produto e o expoente da razão q representa a soma dos n primeiros inteiros não negativos cujo valor podemos calcular facilmente

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = \frac{(1 + n - 1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Portanto o produto dos n primeiros termos vale

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$\square$

Exemplo 4.9. Calculemos o produto dos doze primeiros termos da progressão geométrica $(-3, 6, -12, 24, ...)$.

Esta sequência possui razão -2 e primeiro termo -3. Para calcular o produto dos doze primeiros termos vamos utilizar a fórmula do produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. Como queremos o produto dos doze primeiros termos então para $n = 12$ temos

$$P_{12} = a_1^{12} q^{\frac{12(12-1)}{2}} = a_1^{12} q^{66} = (-3)^{12}(-2)^{66} = 3^{12}2^{66}.$$

Exemplo 4.10. Mostre que ao efetuarmos o produto de qualquer quantidade de primeiros termos da progressão geométrica $\left(3, \sqrt{3}, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots\right)$, o resultado nunca é maior ou igual a $3\sqrt[3]{9}$.

Para mostrar que o resultado é menor que $3\sqrt[3]{9}$ ao multiplicarmos qualquer quantidade de primeiros termos da progressão geométrica, devemos mostrar que $P_n < 3\sqrt[3]{9}$ qualquer que seja o inteiro positivo n. Observando que a sequência em questão possui razão $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ e primeiro termo 3 , tem-se

$$\begin{aligned} P_n = 3^n \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}} &= 3^n (3^{-\frac{1}{2}})^{\frac{n(n-1)}{2}} \\ &= 3^n 3^{\frac{n(1-n)}{4}} \\ &= 3^{\frac{5n-n^2}{4}}. \end{aligned}$$

Agora observe que

$$\frac{5n-n^2}{4} = \frac{\frac{25}{4} - \left(n - \frac{5}{2}\right)^2}{4} = \frac{25}{16} - \frac{\left(n - \frac{5}{2}\right)^2}{4} \leq \frac{25}{16} < \frac{5}{3}\,.$$

Então utilizando a desilgualdade acima teremos que $P_n = 3^{\frac{5n-n^2}{4}} < 3^{\frac{5}{3}} = 3\sqrt[3]{9}$, ou seja, o produto de qualquer quantidade de primeiros termos da progressão nunca é maior ou igual a $3\sqrt[3]{9}$, como queríamos mostrar.

4.4 Soma dos termos de uma progressão geométrica

Teorema 4.2. A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) de razão q, é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Demonstração. Para demonstrar a afirmação observe que se n é um inteiro positivo então

$$\begin{aligned} q^n - 1 &= q^n + (q^{n-1} - q^{n-1}) + (q^{n-2} - q^{n-2}) + \cdots + (q - q) - 1 \\ &= q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q - q^{n-1} - q^{n-2} - \cdots - q - 1 \\ &= q(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1) - (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\ &= (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1). \end{aligned}$$

Isso mostra que a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (q^{n-1}) é $\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$. Utilizando este caso particular e a fórmula do termo geral, podemos obter a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica (a_n)

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} \\ &= a_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \\ &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.11. Quantos termos iniciais da sequência $(a_n) = (1, 4, 16, 64, ...)$ devem ser somados para que a soma dê 87381?

Observando o padrão numérico da sequência podemos observar que se trata de uma progressão geométrica. Devemos encontrar um número n tal que a soma dos n primeiros termos seja 87381. Como a sequência tem primeiro termo igual a 1 e razão 4 segue que

$$87381 = S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{1(4^n - 1)}{4 - 1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

cuja igualdade é verdadeira para $n = 9$. Logo devemos somar os 9 primeiros termos.

Exemplo 4.12. Sabendo que S_n representa a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$, determine o menor valor de n para o qual $2 - S_n < 0,001$.

Como a progressão geométrica acima possui primeiro termo igual a 1 e razão $\dfrac{1}{2}$, então a soma dos n primeiros termos vale

$$S_n = \frac{1\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Procuremos agora o menor valor de n para o qual $2 - S_n < 0,001$. Por inspeção temos que

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2^8} &=& \dfrac{1}{256} &>& \dfrac{1}{1000} \\ \\ \dfrac{1}{2^9} &=& \dfrac{1}{512} &>& \dfrac{1}{1000} \\ \\ \dfrac{1}{2^{10}} &=& \dfrac{1}{1024} &<& \dfrac{1}{1000} \end{cases}.$$

Portanto o menor valor de n é 11.

Exemplo 4.13. Determinemos a soma dos n primeiros termos da sequência (a_n) onde a_1 é dado e $a_{n+1} = qa_n + r$ para todo inteiro positivo n com $q \neq 1$ e r constantes.

Examinemos alguns termos da sequência:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 q^0 + r\frac{q^0 - 1}{q - 1}; \\ a_2 &= qa_1 + r = qa_1 + r\frac{q - 1}{q - 1}; \\ a_3 &= qa_2 + r = q(qa_1 + r) + r = q^2 a_1 + qr + r = q^2 a_1 + r\frac{q^2 - 1}{q - 1}; \\ a_4 &= qa_3 + r = q(q^2 a_1 + qr + r) = q^3 a_1 + q^2 r + qr + r = q^3 a_1 + r\frac{q^3 - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Pelo que acabamos de observar é razoável esperar que o termo de posição n seja

$$a_n = q^{n-1} a_1 + r\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}$$

para todo inteiro positivo n. Na verdade a nossa observação é consistente e iremos provar isso usando indução finita. Para começar veja que para $n = 1$ a nossa afirmação é verdadeira, como já foi visto acima. Suponhamos por hipótese de indução, que o resultado seja verdadeiro para $n \geq 1$. Vamos mostrar que o resultado também é verdadeiro para $n + 1$. Como $a_{n+1} = qa_a + r$ para todo inteiro positivo n, temos

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= qa_n + r \\ &= q\left(q^{n-1} a_1 + r\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1}\right) + r \\ &= q^n a_1 + qr\frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} + r \\ &= q^n a_1 + \frac{qr(q^{n-1} - 1) + r(q - 1)}{q - 1} \\ &= q^n a_1 + r\frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Portanto a afirmação é verdadeira para todo inteiro positivo n. Vamos agora determinar a soma dos n primeiros termos da sequência

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\left(q^{k-1}a_1 + r\frac{q^{k-1}-1}{q-1}\right) \\ &= a_1\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + \frac{r}{q-1}\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{r}{q-1} \\ &= a_1\frac{q^n-1}{q-1} + r\frac{q^n-1}{(q-1)^2} - \frac{rn}{q-1}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.14. Determinemos o nonagésimo nono termo da sequência (a_n) tal que $a_1 = 5$ e $a_{n+1} = a_n + (n+1)5^{n+1}$ para $n \geq 1$.

Para calcular o nonagésimo nono termo da sequência devemos determinar o seu termo geral uma vez que utilizando de repetidas substituições é mais trabalhoso e demasiadamente cansativo partir do primeiro termo e chegar até o termo pedido. Vejamos como fazer isso. Observe que

$$\left\{\begin{aligned} \Delta a_j &= (j+1)5^{j+1} \\ \sum_{j=1}^{n-1}\Delta a_j &= \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)5^{j+1} \\ a_n - a_1 &= \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)5^{j+1} \\ a_n &= 5 + \sum_{j=1}^{n-1}(j+1)5^{j+1} \\ a_n &= \sum_{k=1}^{n} k5^k \end{aligned}\right. .$$

A nossa tarefa agora é calcular o somatório acima. Ao fazer isso estaremos em condições de determinar a posição de qualquer termo da sequência de forma explícita. Podemos proceder da seguinte forma

$$\sum_{k=1}^{n} k5^k = \sum_{k=1}^{n} k\Delta\frac{5^k}{4} = \frac{(n+1)5^{n+1}}{4} - \frac{5}{4} - \sum_{k=1}^{n}\frac{5^{k+1}}{4} = \frac{(n+1)5^{n+1}}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}5^{k+1}.$$

Agora, veja que $\sum_{k=1}^{n} 5^{k+1} = 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n+1}$ representa a soma dos n termos de uma progressão geométrica de razão 5 e primeiro termo 5^2 , então pela fórmula da soma dos n termos de uma progressão geométrica temos que $\sum_{k=1}^{n} 5^{k+1} = \frac{5^2(5^n-1)}{5-1} = \frac{25(5^n-1)}{4}$.

Segue daí que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k5^k &= \frac{(n+1)5^{n+1}}{4} - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\frac{(5^n-1)25}{4} \\ &= \frac{(n+1)5^{n+1}}{4} - \frac{5}{4} - \frac{25(5^n-1)}{16} \\ &= \frac{(4n-1)5^{n+1}}{16} + \frac{5}{16}.\end{aligned}$$

Fazendo $n = 99$ teremos que o nonagésimo nono termo da sequência vale

$$a_{99} = \frac{395 \cdot 5^{100}}{16} + \frac{5}{16}.$$

Quando estamos em contato com progressões geométricas cuja razão satisfaz a condição $|q| < 1$, temos que o limite da soma dos n primeiros termos tende a um número quando se faz $n \to \infty$. Vejamos agora como obter esse número. Primeiramente vamos calcular o valor do limite $\lim\limits_{n\to\infty} q^n$. Sejam $\varepsilon > 0$ um número real qualquer dado e $h > 0$ tal que $\dfrac{1}{|q|} = 1 + h$. Veja que para $N > \dfrac{1-\varepsilon}{h\varepsilon}$ temos

$$|q^n - 0| = \frac{1}{\dfrac{1}{|q|^n}} = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+hn} < \frac{1}{1+\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} = \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

sempre que escolhemos $n > N$. Isso mostra que $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Agora, com essa informação, podemos obter o limite da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica quando $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{a_1}{q-1}\lim_{n\to\infty} q^n + \lim_{n\to\infty}\frac{-a_1}{q-1} = \frac{a_1}{q-1}0 + \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Neste caso dizemos que

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Desta forma fica provado o seguinte.

Teorema 4.3. Se (a_n) é uma progressão geométrica de razão $|q| < 1$, então

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Exemplo 4.15. Calcule o valor da soma $\dfrac{2}{5} + \dfrac{6}{25} + \dfrac{18}{125} + \dfrac{54}{625} + \cdots$.

Ao observar a sequência $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{6}{25}, \dfrac{18}{125}, \dfrac{54}{625}, \dots\right)$ podemos perceber que a mesma é uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = \dfrac{2}{5}$ e razão $q = \dfrac{3}{5}$. Então pelo Teorema 3.3 a soma em questão vale

$$\frac{2}{5} + \frac{6}{25} + \frac{18}{125} + \frac{54}{625} + \cdots = \frac{\dfrac{2}{5}}{1-\dfrac{3}{5}} = 1.$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Praticamente ao se ter o primeiro contato com o estudo de sequências, é bem verdade que as progressões aritméticas e geométricas aparecem naturalmente no decorrer do processo e elas poderão ser usadas para compreender algumas situações do cotidiano ou até mesmo dentro da Matemática pura e áreas afins.

Devemos salientar que o presente texto foi escrito de forma teórica e concisa cuja relevância se deu apenas nas definições, propriedades e características matemáticas dos assuntos abordados, deixando-se de lado questões práticas ou aplicações.

Por fim, esperamos que a leitura deste trabalho possa contribuir significativamente para o leitor e que o mesmo possa ser útil para futuros estudos sequenciais ou leituras de aplicações pertinentes, se assim o desejar.

REFERÊNCIAS

[1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. vol. 2. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

[2] MILIES, César Polcino, COELHO, Sônia Pitta. *Números: Uma introdução à matemática*. 3. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

[3] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[4] ÁVILA, Geraldo. *Introdução à análise matemática*. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1999.

[5] MORGADO, Augusto César, CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[6] WIKIPEDIA. *Arithmetic progression*. Disponível em : < https: // en. wikipedia. org / wiki/ Arithmetic_progression >. Acesso em 18 junho 2017.

[7] WEISSTEIN, Eric W. *Stirling number of the first kind*. Disponível em: < http: // mathworld. wolfram. com / stirlingnumberofthefirstkind. html >. Acesso em 18 junho 2017.