UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

PAULO ESTÉFANO ARAÚJO DA SILVA

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO

MOSSORÓ/RN
2017

PAULO ESTÉFANO ARAÚJO DA SILVA

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido, campus Mossoró/RN para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profº. Dr. Odacir Almeida Neves

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei n° 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei n° 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

S586s SILVA, PAULO ESTEFANO ARAUJO DA.
A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO / PAULO ESTEFANO ARAUJO DA SILVA. - 2017.
56 f. : il.

Orientador: ODACIR ALMEIDA NEVES.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em Matemática, 2017.

1. Sequência de Fibonacci. 2. Ensino Médio. 3. Cotidiano. 4. Propriedades. 5. Questões de provas anteriores. I. NEVES, ODACIR ALMEIDA, orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC´s) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

PAULO ESTÉFANO ARAUJO DA SILVA

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E O ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFERSA, Campus Mossoró para obtenção do título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 21/08/2017

BANCA EXAMINADORA

Dr. Odacir Almeida Neves - UFERSA
Presidente

Dr. Antonio Ronaldo Gomes Garcia - UFERSA
Membro interno

Aleksandre Saraiva Dantas

Dr. Aleksandre Saraiva Dantas - IFRN
Membro externo

MOSSORÓ/RN, 2017.

DEDICATÓRIA

Dedico aos meus ex-professores do colegial: Alisson, Bergson, Railson, Rodrigo, Elieser, e aos demais que me falham na memória. Em geral a todos que puderam me ensinar do fundamental ao médio.

Dedico aos meus professores de licenciatura, principalmente: Francisco Derilson (pelo incentivo e confiança em me candidatar ao mestrado PROFMAT), Enio Virgílio, Ana Shirley, Josildo Barbosa, Geovanizélio, Assis, Francisca Valéria, Rafael, Socorro Aragão e Elias Das Neves; mas também aos demais professores do departamento: Hélio, Graciana, Kleber Soares, Ronaldo Garcia, Braz, Odaívo, Carlão, Fátima, Rivaldo e Laudelino; dentre outros que também contribuíram para meu aprendizado a nível superior.

Dedico a Deus, pois faço tudo pensando nele e com a ajuda do divino Espírito Santo.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa, Anelândia Maria Da Conceição Silva, por estar sempre me incentivando a fazer esta dissertação. Diante da necessidade financeira e pelo gosto da profissão tive que assumir dois empregos de docência justos no momento de escrita do trabalho de conclusão do curso (TCC), onde ela ficava sempre no meu pé, seja mandando ou me lembrando deste compromisso.

Agradeço ao meu orientador, Odacir Almeida Neves, por me aceitar como orientando. Diante da pouca disponibilidade de tempo, agradeço a ele pela paciência comigo. Pela contribuição como orientador na dissertação e como professor da disciplina de recursos computacionais no ensino de matemática. E também, devido trabalhar como docente do centro de ciências exatas e naturais (DCEN) da UFERSA agradeço pela ajuda e companheirismo profissional.

Agradeço a minha mãe, Maria De Fátima Araújo Da Silva, e minhas tias, Lucinês e Aparecida, por, dentre os familiares, serem as que mais me apoiam profissionalmente, seja perguntando como está o andamento, ou incentivando de que este é realmente o caminho certo, devido eu estar buscando o trabalho em que realmente gosto.

Agradeço a Antonio Ronaldo Gomes Garcia, pela ajuda no meu crescimento profissional, seja no incentivo de estudos enquanto mestrando ou em me fazer enxergar a minha própria capacidade de conhecimento.

E também a todos os outros professores de mestrado, Walter Martins Rodrigues, Kleber Soares Camara, Valdenize Lopes Do Nascimento, Mauricio Zuluaga Martinez e Elmer Rolando Llanos Villarreal.

A professora Andrea Maria Ferreira Moura. Ela na função de vice-chefe do DCEN, me acolheu, como professor da UFERSA, maravilhosamente, dando conselhos de como atuar profissionalmente. E também, pela paciência devida eu ter passado por problemas de saúde.

Por fim, e em primeiro lugar, agradeço a DEUS por tudo. Por me dar de tudo o que preciso para viver bem, mesmo que eu não mereça. Por me ajudar em diversos problemas de saúde em que venho passando. Por me ajudar nas diversas aprovações em que tive profissionalmente: seleções para licenciatura e para mestrado, vários concursos para professores, qualificação do mestrado, etc. Por o senhor estar comigo seja onde eu for. Portanto, por me amar.

“Todas as verdades são fáceis de perceber depois de terem sido descobertas, o problema é descobri-las.”

(Galileu Galilei)

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SIGLAS

ESAF – Escola de Administração Fazendária

FDC – Fundação Dom Cintra

IME – Instituto Militar de Engenharia

ITA – Instituto Tecnológico de Aeronáutica

OBM – Olimpíada Brasileira de Matemática

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas

RESUMO

A presente pesquisa tem como objeto de estudo a Sequência de Fibonacci, entretanto, orientando nosso olhar a sua ligação com conteúdos matemáticos referentes ao Ensino Médio, haja vista a pouca abordagem desse tema em livros didáticos para este ensino. Para esta investigação foi traçado como objetivo geral, estimular ainda mais o estudo da sequência de Fibonacci, principalmente, quanto ao seu envolvimento ao conteúdo de sequências visto no 1º ano do ensino médio, ligeiramente perseguido dos seguintes objetivos específicos: apresentar a sequência de Fibonacci juntamente com a biografia do seu criador; identificar as relações da sequência de Fibonacci com os fenômenos da natureza; identificar e demonstrar algumas propriedades matemáticas envolvidas na sequência de Fibonacci; e identificar os conteúdos de matemática do ensino médio em que o estudo da sequência de Fibonacci pode ser utilizado. Nossa inquirição é de caráter exclusivamente bibliográfico, onde para sua realização, destacamos a busca de auxílio em leituras de autores como BEZ (1997) e PAIVA (2013). As leituras nos conduziram há ressaltar um pouco sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci, o qual, por meio de um problema deixado em um de seus livros, foi quem deu início a descoberta da sequência de Fibonacci. Em seguida, é apresentado o envolvimento da sequência de Fibonacci com o cotidiano dos alunos, principalmente, quanto à ligação com a natureza. Também são apresentadas algumas propriedades inerentes à sequência, verificando quais conteúdos matemáticos estão envolvidos no seu estudo. Por fim, em tentativa de comprovar a relevância de repassar o conteúdo sobre a sequência de Fibonacci, são expostas algumas questões de provas anteriores referentes à OBM, OBMEP, concursos e seleções de vestibulares.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; Ensino Médio; Leonardo Fibonacci; Cotidiano; Propriedades; Questões de provas anteriores.

ABSTRACT

The present search has as goal of study Fibonacci Sequence, however orienting our look at its connection with mathematical contents referring to the high school, due to the little approach of this theme in textbooks. For this research it was settled as a general goal to further stimulate the study of the Fibonacci sequence, mainly regarding its involvement with the sequence content studied in the first year of high school, followed by these specific goals: to present the Fibonacci sequence beside the biography of its creator; to identify the relations of the Fibonacci sequence with the phenomena of nature; identify and proof some mathematical properties involved in Fibonacci sequence; and identify the high school mathematic contents in which the study of the Fibonacci sequence can be used. Our inquiry is exclusively bibliographical and, for its accomplishment, we seek help mainly in readings by authors like BEZ (1997) e PAIVA (2013). The readings led us to emphasize a little about the history of the mathematician Leonardo Fibonacci, who, through a problem left in one of his books, began the discovery of Fibonacci sequence. Then, the involvement of Fibonacci sequence with the daily life of the students is presented, especially regarding the connection with nature. Some properties inherent to the sequence are also presented, verifying which mathematical contents are involved in their study. Finally, in an attempt to prove the importance of passing the content on Fibonacci sequence, some questions of previous tests regarding to OBM, OBMEP, competitions and entrance exam selections are exposed.

Keywords: Fibonacci sequence; High school; Leonardo Fibonacci; Daily life; Properties; Questions of previous tests.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao estudarmos sobre sequências, nos deparamos com um dos conteúdos matemáticos mais amplos de conhecimento, pois contém vários casos a serem analisados, devido aos diversos tipos de sequências que podem existir.

De acordo com o Dicionário de português on-line *Michaelis* (2009, *on-line*[1]), define-se sequência como um "Número de coisas ou eventos que se seguem um após outro; série, sucessão, ordem". Assim, podem-se haver vários tipos de sequência, como: sequência alfabética de uma lista de autores, sequência musical, etc.

No estudo da Matemática temos uma parte que fala de sequências, as sequências numéricas, onde, recai nos livros do 1º ano do Ensino Médio. Sequência numérica é uma parte da matemática que dispõe os números numa determinada ordem preestabelecida.

Alguns exemplos de sequências são: sequência dos cinco primeiros números naturais (1, 2, 3, 4, 5); sequência dos números ímpares (..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...); ou, até mesmo, uma sequência aleatória (2, 3, 5, 8, 13, 21).

Quando nos retratamos de sequência, logo nos vem à mente uma progressão, aritmética (P.A.) ou geométrica (P.G.). Isto pode se dar ao fato que a maioria dos livros de matemática do Ensino Médio ao apresentar o conteúdo de sequências, primeiramente apresenta as sequências numéricas de um modo geral, logo em seguida especifica, de forma detalhada, as progressões aritméticas e geométricas.

Segundo Paiva (2013, p.258), progressão aritmética "é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo precedente (anterior) com uma constante r. O número r é chamado a razão da progressão aritmética", e progressão geométrica "é toda sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de razão da progressão geométrica" (PAIVA, 2013, p.269).

Assim, (1, 3, 5, 7, 9, ...) e (1, 2, 4, 8, 16, ...), são exemplos de P.A. e P.G., respectivamente, ambas de razão $r = 2 = q$.

Uma sequência importante e que não é apresentada de maneira adequada no ensino médio é a de Fibonacci, daí, fica instigante o questionamento "por que não,

[1] Disponível em: < http://michaelis.uol.com.br/ >. Acesso em: 03/07/2017.

apresentar a sequência de Fibonacci no conteúdo de sequências do ensino médio?", ou ainda, devido às propriedades matemáticas inerentes a esta sequência, "em que conteúdos matemáticos do Ensino Médio podem ser introduzidos o estudo da sequência de Fibonacci?".

Alguns estudos indicam que a sequência de Fibonacci vem sendo estudada desde o século XIX, tanto quanto às propriedades matemáticas inerentes a ela, mas também sobre o seu envolvimento com a natureza. De acordo com essas propriedades, iremos verificar se a sequência de Fibonacci possui uma relação com demais conteúdos matemáticos, tais como: máximo divisor comum (MDC), divisibilidade, números primos, entre outros.

Pesquisas mostram que autores como Bez[2] e Paiva[3], surgiram como suporte para serem utilizados para justificar nossa opção.

Com este trabalho tem-se a pretensão de estimular ainda mais o conhecimento sobre a sequência de Fibonacci, principalmente, quanto ao seu envolvimento no conteúdo de sequências, visto no 1º ano do Ensino Médio.

Assim, com base nas referências estudadas, esse trabalho foi desenvolvido com objetivos de apresentar a sequência de Fibonacci juntamente com a biografia do seu criador, identificar as relações da sequência de Fibonacci com os fenômenos da natureza, identificar e demonstrar algumas propriedades matemática envolvidas na sequência de Fibonacci, e ainda, de identificar os conteúdos de matemática do Ensino Médio que o estudo da sequência de Fibonacci pode ser utilizado.

A partir daí, esta pesquisa foi desenvolvida em 5 capítulos, sendo este o primeiro, que introduz o conteúdo de sequências dos livros do 1º ano do Ensino Médio.

No segundo capítulo, é feito um recorte histórico da biografia de Leonardo Fibonacci que foi quem deu origem a descoberta da sequência de Fibonacci, em seguida

---

[2] **Edson Tadeu Bez**: Possui graduação em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (1997), mestrado em Engenharia de Produção pela (2000) e doutorado em Engenharia de Produção pela (2005), com doutorado-sanduiche no Institut National des Sciences Appliquées de Rouen (2003). É professor titular da Universidade do Vale do Itajaí (UNIVALI) desde 2001 e Servidor Público Estadual na Assembleia Legislativa do Estado de Santa Catarina, desde 1982. É membro pesquisador do grupo de Inteligência Aplicada da UNIVALI e membro pesquisador do grupo de logística humanitária: Análise e otimização de sistemas logísticos e de transporte para resposta a situações emergenciais.

[3] **Manoel Paiva**: Possui graduação em Licenciatura Em Matemática pela Faculdade de Filosofia de Ciências e Letras de Santo André (1973), especialização em Topologia Geral: Álgebra Linear pela Universidade de São Paulo (1980), mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Atua como professor em escolas particulares há 29 anos. É autor de livros didáticos de matemática, como Matemática Paiva (2013).

é apresentada a sequência de Fibonacci por meio do “problema dos coelhos”, onde pode ser vista em um de seus principais livros o “Liber Abaci”.

Na terceira parte deste trabalho é apresentada uma diversidade de exemplos que podem gerar a sequência de Fibonacci, onde se pode ver que muitos deles são ligados a fenômenos da natureza.

No quarto capítulo são apresentadas algumas propriedades matemáticas referentes à sequência de Fibonacci, onde, diante destas propriedades é feita uma análise de quais conteúdos matemáticos pode ser inserida a sequência de Fibonacci. Ainda neste capítulo é feito um recorte de questões do Ensino Médio referentes à sequência de Fibonacci.

Na quinta e última seção são feitas considerações finais sobre o trabalho, a sua aplicabilidade e as expectativas com relação à contribuição que o trabalho pode trazer para ajudar os docentes no ensino da matemática.

2 BIOGRAFIA DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Esta seção está dividida em duas partes. A primeira descreve a biografia de Fibonacci, enfocando sua contribuição com a matemática e ressaltando suas obras. A segunda, os primeiros indícios da Sequência de Fibonacci que se deu ao que hoje é chamado de "problema dos coelhos" tirado do livro de Leonardo Fibonacci.

2.1 BIOGRAFIA DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci, mais conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Pisano, devido ter nascido na cidade de Pisa na Toscana da Itália, foi um italiano que nasceu por volta de 1170 e morreu em 1250 com 80 anos.

Figura 01: Leonardo Fibonacci

Fonte: Disponível em: <http://www.mathstimes.com/just-for-fun-in-fibonacci-sequence/leonardo-fibonacci-granger/>. Acesso em: 23/07/2017.

Hoje ele é considerado não apenas como um matemático, mas para alguns, como o maior matemático medieval, devidos aos seus estudos e contribuições com a matemática. Segundo Frazão (2017, *on-line*[4]), "Leonardo Fibonacci [...] foi um

[4] Disponível em: < https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/ >. Acesso em: 23/08/2016.

matemático italiano, de grande influência na idade média. Muitos consideram Fibonacci como o maior matemático da idade média".

Leonardo (que chamaremos apenas por Fibonacci) teve como pais Alessandra Bonnacci e Guiliermo Bonnacci.

Bez (1997 p.10), ao se retratar do pai de Fibonacci fala o seguinte:

> Seu pai foi importante funcionário de Pisa e representou, durante algum tempo, os interesses comerciais de sua cidade em Bugia, na atual Argélia, norte da África. Devido às viagens do pai, Leonardo percorreu todo o Mediterrâneo, visitando a Espanha muçulmana, a Sicília, o Levante, conhecendo nestes lugares diversas culturas, familiarizando-se com a Matemática árabe, que era então mais desenvolvida do que a Matemática da Europa Ocidental.

Assim, foi ajudando no trabalho de seu pai que Fibonacci teve os primeiros contatos com a matemática tanto Hindu quanto Árabe.

Durante as relações comerciais do trabalho, Fibonacci percebia as dificuldades para registrar os estoques e preços com numerais Romanos. De acordo com Souza (2013 p.27), "Ele dizia que qualquer número poderia ser escrito com os nove algarismos (9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2,1) mais o signo 0".

Assim, ele participou da evolução da matemática na Europa resolvendo problemas matemáticos, onde mostrou a eficiência dos cálculos aritméticos usando os algarismos arábicos.

> Sob a proteção do imperador Frederico II, e por ter resolvido problemas matemáticos da corte, Fibonacci aprofundou seus estudos sobre matemática, avaliando que os algarismos arábicos seriam mais eficientes que os números romanos para cálculos aritméticos (FRAZÃO, 2017, *on-line*).[5]

Ao longo da sua contribuição com a matemática, Fibonacci escreveu quatro livros, a saber: Líber Abacci (1202), Practica Geometriae (1220), Liber Quadratorum (1225) e Flos (1225).

[5] Disponível em: < https://www.ebiografia.com/leonardo_fibonacci/ >. Acesso em: 23/08/2016.

Na obra **Practica Geometriae** que quer dizer geometria prática, Fibonacci fez estudos relacionando a geometria com a trigonometria. Santos (2009, p.88), ao se retratar sobre esta, fala que:

> *Practica geometriae*, uma coleção de material sobre geometria e trigonometria, numa abordagem hábil feita com rigor euclidiano, contendo entre outras coisas, uma prova de que as medianas de um triângulo se dividem na razão de dois para um e um análogo tridimensional do Teorema de Pitágoras.[6]

Já na obra **Liber Quadratorum**, cujo significado é quadrados livres, é considerada por muitos o seu maior legado, onde há vários estudos, um deles, sobre problemas de aritmética, faz aproximações de raízes cúbicas.

Segundo Ferreira (2007, p.4), "É o maior livro que Fibonacci escreveu, no qual aproxima raízes cúbicas, obtendo uma aproximação correta até a nona casa decimal"; já Carlos Fernandes (2011, *on-line*[7]) fala que "considerada sua obra prima e consistindo de um brilhante estudo sobre análise indeterminada, uma série de teoremas e a resolução de problemas aritméticos de grande relevância para estudos matemáticos posteriores".

No livro **Flos** de significado flor, Ferreira (2007, p.4), cita "Neste Manuscrito Fibonacci apresenta as soluções de três problemas que lhe tinha sido colocado por João de Palermo, um membro da corte do Imperador Frederico II".

Apesar do livro **Líber Abacci**, cujo significado é livro do ábaco, ter sido o primeiro a ser escrito por Fibonacci, é o mais conhecido até então, pois foi nele que se ressaltou pela primeira vez o problema dos coelhos que deu origem a sequência de Fibonacci.

2.2 PRIMEIROS INDÍCIOS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

O livro Liber Abacci é baseado em estudos de aritmética onde nele é introduzido os números indo-arábicos. Ele é dividido em 15 capítulos, mas é no 12º capítulo que fez com que Fibonacci ficasse bastante conhecido, devido ter feito a resolução de um problema que hoje é chamado de problema da reprodução dos coelhos.

---

[6] Disponível em: < http://www.matematica.br/historia/fibonacci.html >. Acesso em: 23/07/2017.
[7] Disponível em: < http://www.dec.ufcg.edu.br/biografias/LnardPis.html >. Acesso em: 23/07/2017.

> No entanto, Fibonacci ficou conhecido não exatamente pelos seus livros, mas pelo fato de Edouard Lucas, na sua Coleção Récréations mathématiques, ter dado o nome Fibonacci a uma sequência que aparece como solução de um problema do Liber Abacci. (RAMOS, 2013, p. 5)

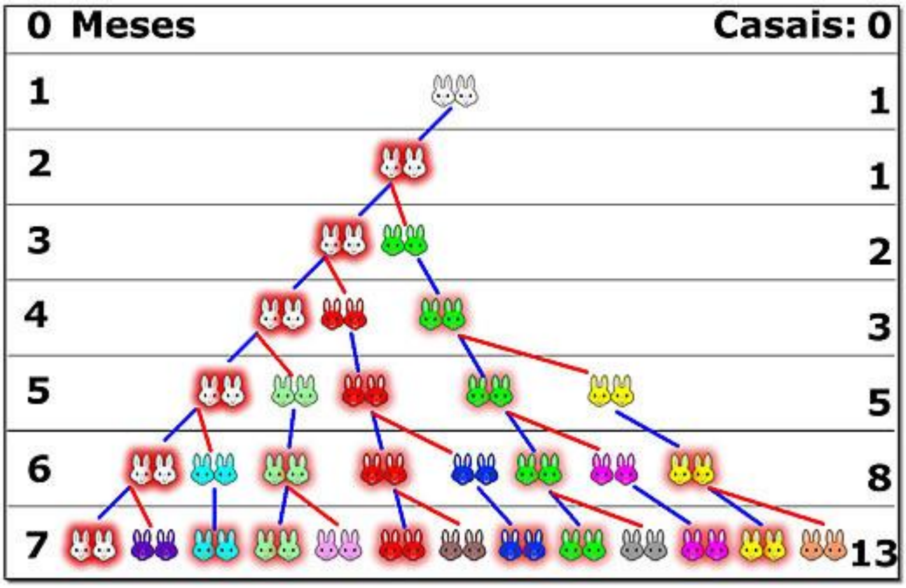
Portanto, o problema em questão é considerado o mais famoso, entre todos os tratados por Fibonacci e foi retratado, em seu livro, da seguinte forma:

> Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todos os meses cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês? (PINHO, 2013, *on-line*)[8]

Considerando que um par de coelhos fértil dá a luz a um novo par de coelhos após o segundo mês de vida, que todos os coelhos estejam vivos ao final dos doze meses, e ainda, que não haja problemas genéticos ou impossibilidades de fertilização de cada casal tem-se o seguinte:

A resolução desse problema é de fácil esquematização para os primeiros meses como é exposto na **FIGURA 02**.

Figura 02: Diagrama do problema da reprodução dos coelhos



Fonte: Disponível em: < http://www.estudofacil.com.br/sequencia-de-fibonacci/>. Acesso em: 03/07/2017.

[8] Disponível em: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>. Acesso em: 30/ 10/ 2015.

Ao final do primeiro e segundo mês haverá apenas o casal de coelhos inicial. Já, como após o segundo mês ele geraria outro par de coelhos, no final do terceiro mês teremos 2 pares de coelhos, sendo o par inicial e o outro já com um mês de vida.

Devido o par de coelhos inicial já ter mais de dois meses de vida todos os meses ele gerará um novo par, como proposto no problema. Assim, no final do quarto mês, haverá 3 pares de coelhos. O par inicial, o que foi gerado no mês anterior (este, inclusive já com dois meses de vida, tornando-se fértil, onde gerará um outro casal de coelhos todos os meses) e o que foi gerado no início deste mês, tendo assim, um mês de vida.

O número de par de coelhos no final do quinto mês pode ser entendido da seguinte forma: como no terceiro mês havia dois pares de coelhos, ambos com mais de um mês de vida, dois meses depois, ou seja, ao fim do quinto mês, esses dois pares se duplicarão, pois cada um dará a luz a um novo par e como no mês anterior havia três pares, tem-se um total de 5 pares de coelhos. Dois do mês anterior que se duplicaram mais o que não é fértil ainda.

Assim, o número de pares de coelhos cresce rapidamente a cada mês. Logo, para um melhor entendimento e minimização dos cálculos, definimos a sequência (a_n) como o número de pares de coelhos ao final do n-ésimo mês. Tal maneira seria mais adequada aos alunos do 1º ano do Ensino Médio devido estarem cientes do conteúdo de sequências.

Daí, o número de coelhos ao final de um determinado mês "a_n" será o dobro ao de dois meses anteriores "$2(a_{n-2})$", pois já teriam mais de dois meses de vida, logo procriariam, mais os que ainda não deram a luz a um novo par, o que no caso é igual a subtração do número de pares dos meses anteriores "$(a_{n-1} - a_{n-2})$".

Portanto, para determinar o número de pares de coelhos de um mês qualquer, pode ser dado da seguinte forma:

$$a_n = 2.a_{n-2} + a_{n-1} - a_{n-2}$$
$$a_n = a_{n-1} + 2.a_{n-2} - a_{n-2}$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Em outras palavras o número de pares de coelhos ao final de um mês é igual à soma do número de pares dos dois meses anteriores.

Vale salientar que essa fórmula só existirá a partir do terceiro mês. Isto ocorre, pois no caso de n = 2 o termo a_{n-2} representará o número de coelhos ao final do mês zero, ou seja, o problema ainda não estaria em questão.

Na **Tabela 01**, verifica-se o resultante de pares de coelhos ao final de cada mês, calculado pelo termo geral da sequência (a_n). Onde, de acordo com ela, percebe-se o número de pares de coelhos que podem ser gerados a partir do par inicial, pois basta subtrair o total de pares ao final do décimo segundo mês pelo par inicial, ou seja:

$$144 - 1 = 143$$

TABELA 01: Resolução do problema de reprodução dos coelhos

MESES	$\boldsymbol{a_n = a_{n-1} + a_{n-2}}$; **n > 2**
1º mês	1
2º mês	1
3º mês	a_3 = 1 + 1 = 2
4º mês	a_4 = 2 + 1 = 3
5º mês	a_5 = 3 + 2 = 5
6º mês	a_6 = 5 + 3 = 8
7º mês	a_7 = 8 + 5 = 13
8º mês	a_8 = 13 + 8 = 21
9º mês	a_9 = 21 + 13 = 34
10º mês	a_{10} = 34 + 21 = 55
11º mês	a_{11} = 55 + 34 = 89
12º mês	a_{12} = 89 + 55 = 144

Fonte: o autor

É interessante ressaltar que o total de pares de coelhos resultou na seguinte sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144. Sequência ao qual, como descrito anteriormente, hoje é chamada de sequência de Fibonacci.

> A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,..., na qual cada termo (começando do terceiro) é igual à soma dos dois termos anteriores, foi apropriadamente chamada de sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Edouard Lucas[9] (1842-1891). (LÍVIO, 2006, p.117).

Portanto, de acordo com Edouard Lucas a sequência de Fibonacci teve seus primeiros indícios em 1202 no livro Líber Abacci, escrito pelo próprio Fibonacci ao introduzir, indiscretamente, um problema relacionado à reprodução dos coelhos.

[9] **Edouard Lucas**: nasceu em 04 de abril de 1842 em Amiens, França, e morreu em 03 de outubro de 1891. Lucas é conhecido pelos seus estudos na famosa fórmula matemática de Fibonacci, conhecida como Seqüência de Fibonacci. Seus estudos nesta área são conhecidos como Seqüência de Lucas. Foi ele quem elaborou a fórmula para encontrar o termo n elevado a th da Seqüência de Fibonacci. Lucas foi também um dos maiores estudiosos dos números primos. Foi o matemático que, manualmente, encontrou o maior número primo conhecido. Dentre seus estudos, inventou vários briquendos. Os mais populares foram o Quebra-cabeças de Baguenaudier, mais conhecido como Anéis Chineses, elaborado a partir de uma solução binária para o problema de mesmo nome, e a Torre de Hanói, que ele comercializou largamente na Europa.

3 DIVERSIDADE DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

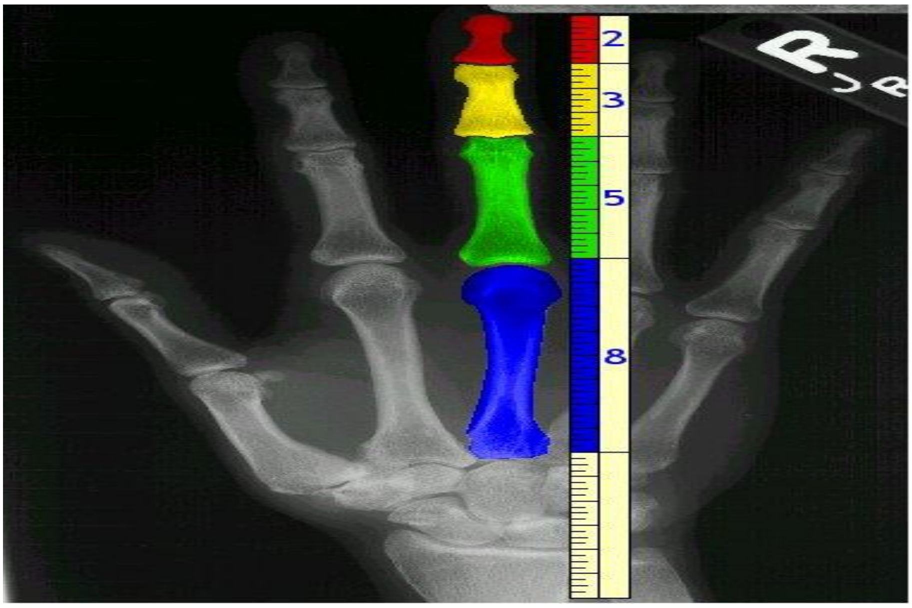
Com o passar dos anos, desde a descoberta da sequência de Fibonacci, percebe-se que ela esta ligada a várias situações, por exemplo, na reprodução das abelhas, nas notas musicais, na quantidade de pétalas de algumas rosas, entre outros. Onde este envolvimento despertou o interesse de vários pesquisadores a se maravilharem com tal sequência.

Diante destas situações, apresentaremos também, algumas que contém ligação com conteúdos do Ensino Médio, quais sejam, o seu envolvimento no triângulo de Pascal, um problema de física, assim como a sua ligação com o cotidiano.

3.1 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO CORPO HUMANO

Estudos mostram que os ossos das mãos têm comprimentos aproximados aos números de Fibonacci. A **Figura 03** mostra os ossos de uma mão de uma pessoa, na qual, observando o dedo médio de cima para baixo tem medidas 2, 3, 5 e 8 em centímetros.

Figura 03: Medição dos ossos do dedo médio de uma pessoa



Fonte: Disponível em: <http://unialmisal.blogspot.com.br/2012/02/incrivel-sequencia-de-fibonacci.html>. Acesso em: 03/07/2017.

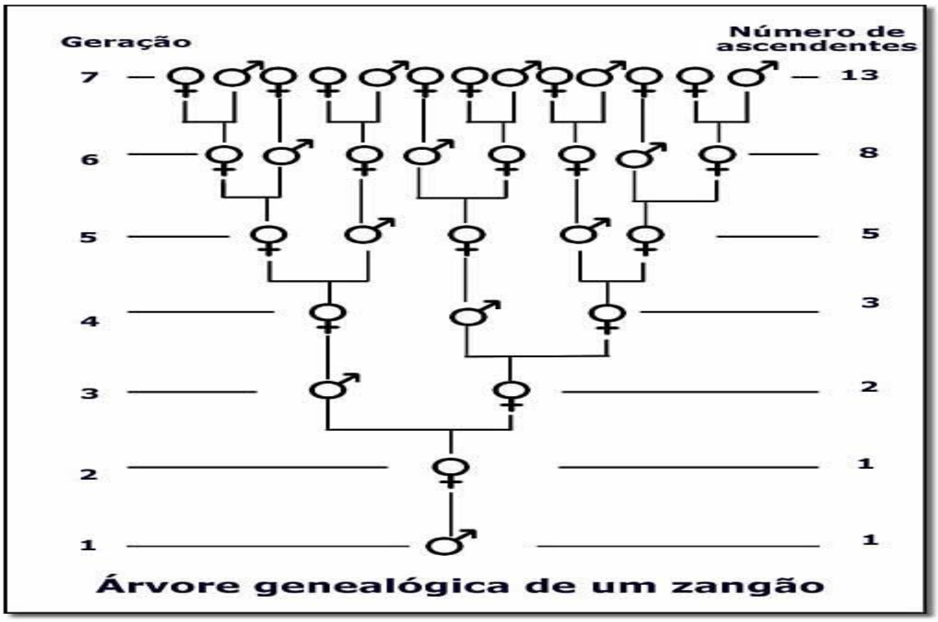
3.2 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E AS ABELHAS

Ao analisar a reprodução das abelhas observa-se o surgimento da sequência de Fibonacci no número de antecedentes de um zangão[10]. Os ovos que são fertilizados geram abelhas comuns e os ovos não fertilizados geram zangões. Assim, as abelhas comuns tem pai e mãe, já os zangões possuem apenas pai.

Considerando na primeira geração ter nascido um zangão α, na segunda geração ele só tem 1 antecedente que é sua mãe. Como sua mãe teve pai e mãe, na terceira geração, o zangão α, teve 2 antecedentes que são seus avós. O avô do zangão α teve um pai, já a avó teve um pai e uma mãe, resultando em 3 antecedentes na quarta geração.

Assim, como é visto na **Figura 04** que retrata da árvore genealógica de um zangão, o número de antecedentes de um zangão qualquer de geração em geração é igual a, respectivamente, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, etc.

Figura 04: Árvore genealógica de um zangão



Fonte: Disponível em: <http://www.bpiropo.com.br/graficos/FPC20070319a.jpg>. Acesso em: 03/07/2017.

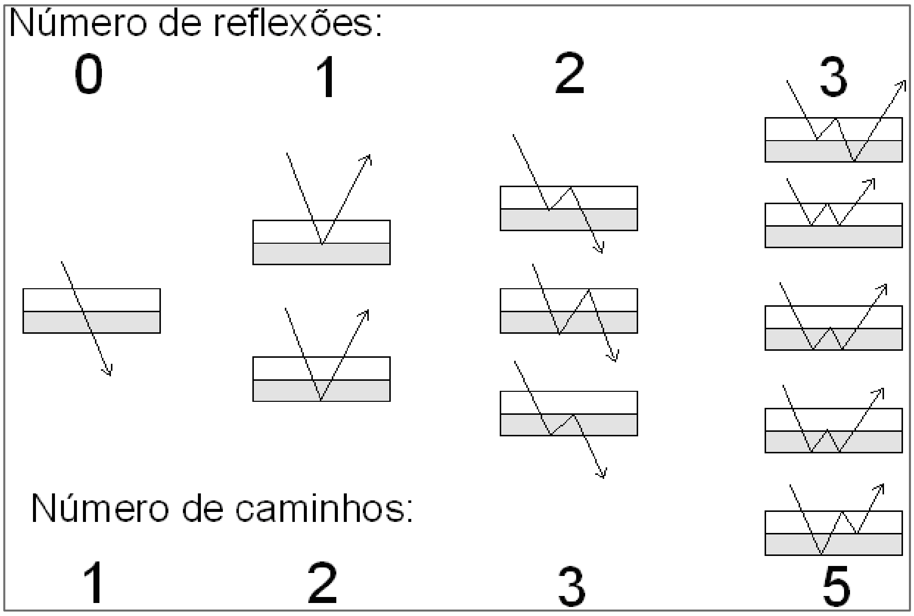
[10] **Zangão**: é o macho das diversas espécies de abelhas sociais, especialmente de abelha europeia. O seu papel principal na colmeia é de reprodutor.

3.3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA FÍSICA

Existe um estudo de uma aplicação na física cujo resultado decorre na sequência dos números de Fibonacci. Ferreira (2007, p.35) cita tal problema da seguinte forma: “Tomemos duas placas de vidro, com índices de refração diferentes, justapostas uma sobre a outra. Um raio de luz que incida sobre esse conjunto pode sofrer reflexões e desvios.”.

Nota-se na **Figura 05** que ao aumentar o número de reflexões em uma unidade, o número de possibilidades será, respectivamente, igual a 1, 2, 3, 5, 8, etc. Tais possibilidades estão na ordem dos termos da sequência de Fibonacci.

Figura 05: possibilidades de refração do raio de luz por duas placas de vidro

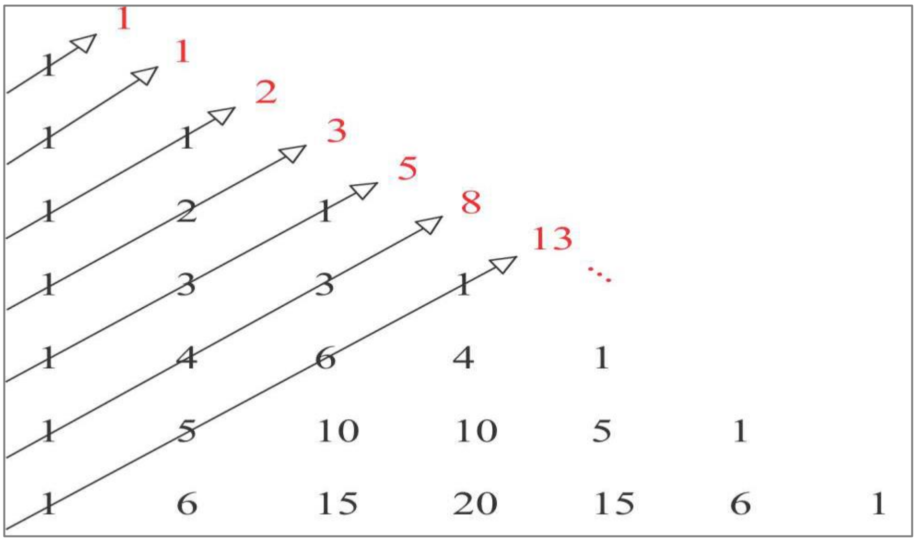


Fonte: Disponível em: <http://www.seara.ufc.br/donafifi/fibonacci/reflexoes.gif>. Acesso em: 03/07/2017.

3.4 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO TRIÂNGULO DE PASCAL

A sequência de Fibonacci também pode ser determinada no Triângulo de Pascal, pois como mostra a **Figura 06**, ao somarmos os elementos de sua diagonal inversa, observa-se que os somatórios resultantes são, respectivamente, igual 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, etc.

Figura 06: Somas dos elementos da diagonal inversa do triângulo de Pascal



Fonte: Diogo Dalyson

Na página 38, é apresentada tal propriedade, onde afirma que a soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci f_n.

3.5 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NA MÚSICA

Segundo Lanhelas (2011, *on-line*[11]): "Em música os números de Fibonacci são utilizados para a afinação, tal como nas artes visuais, determinar proporções entre elementos formais". Assim, a sequência de Fibonacci está presente em várias situações na música.

Já, conforme Monteiro (2014, *p.13*),

> Na música, essa sequência está presente nos intervalos musicais, ou seja, na relação entre duas notas, formando as escalas que são a base para as melodias e para os acordes (harmonia). Esses intervalos procedem em graus a partir da primeira nota, ou tônica. Por exemplo, a escala básica e simples é formada por intervalos de terça (3º grau), quinta (5º grau) e oitava (8º grau) a partir da tônica (1º grau), ou seja, a sequência Fibonacci: 3, 5, 8. Essa sequência na escala natural, de tonalidade dó maior (ou C, em notação cifrada), apresentará, então, as notas mi (3º grau), sol (5º grau) e dó (8º grau) a partir da tônica dó (1º grau) – em cifras, E, G e C, respectivamente.

[11] Disponível em: < http://fontesdeluz.blogspot.com.br/2011/05/sequencia-fibonacci.html >. Acesso em: 03/07/2017.

Portanto, um interessante envolvimento da sequência de Fibonacci e a música são apresentados nas tonalidades do dó maior. A **Figura 7** mostra esse nível de tonalidade em graus, a partir da tônica inicial, que são iguais a 1, 3, 5 e 8, respectivamente.

Figura 07: Tonalidades do dó maior

Fonte: Disponível em: <http://whiplash.net/materias/biografias/203304.html> Acesso em: 03/07/2017.

3.6 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A NATUREZA

Figura 08: Erva da fortuna roxa

Fonte: Disponível em: <http://3.bp.blogspot.com/-KTJRHKQ7_K8/UIULhWKGNzI/AAAAAAAACTw/BvvhR-N3VIc/s1600/DSCF9989.JPG>. Acesso em: 03/07/2017.

Uma das partes mais interessantes e instigantes da sequência de Fibonacci é sua ligação com a natureza. Por exemplo, o número de pétalas de algumas flores. Na **Figura 08** é exposta a flor Erva da fortuna roxa, com 3 pétalas, assim, como os trevos normais (**Figura 09**) que contém 3 folhas cada.

Figura 09: Trevos normais

Fonte: Disponível em: <https://saltoaltofutebolclube.files.wordpress.com/2012/04/trevo-da-sorte-13e14.jpg>. Acesso em: 03/07/2017.

Nas **Figuras 10** e **11** são apresentadas as flores Ameixoeira dos Jardins e Coreópsis (a coreópsis é mais conhecida como margarida amarela), respectivamente, com 5 e 8 pétalas cada.

Figura 10: Ameixoeira dos jardins

Fonte: Disponível em: < https://www.kuleuven-kulak.be/kulakbiocampus/bomen-heesters/Rosa%20canina%20-%20Hondsroos/06-hondsroos1-H2.jpg >. Acesso em: 03/07/2017.

Figura 11: Flor coreópsis

Fonte: Disponível em: <https://loghouseplants.com/plants/wp-content/uploads/2012/02/Coreopsis_ZagrebZ.jpg>. Acesso em: 03/07/2017.

Os números de pétalas das margaridas são ainda mais interligados aos números de Fibonacci[12]. Nas **figuras 12**, **13** e **14** são apresentadas margaridas com 8, 13 e 21 pétalas, respectivamente. Existem margaridas com 34 pétalas, mas devido à dificuldade em contar suas pétalas, omitiu-se a imagem.

Figura 12: Margarida de 8 pétalas

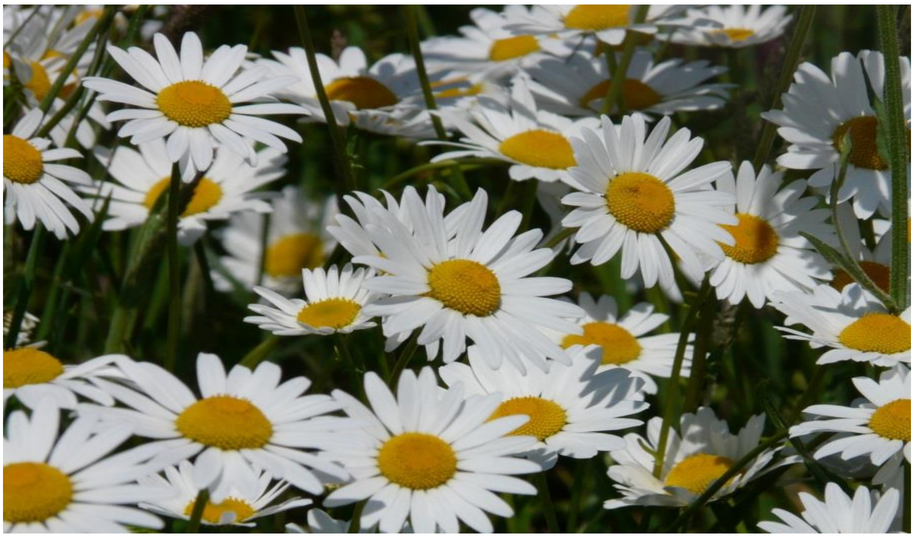
Fonte: Disponível em: <http://www.anawalls.com/images/flowers/daisy-flower-petals-background.jpg>. Acesso em: 03/07/2017.

[12] **Números de Fibonacci**: são os números que representam os termos da sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...).

Figura 13: Margaridas de 13 pétalas

Fonte: Disponível em: < http://flores.culturamix.com/blog/wp-content/gallery/curiosidades-sobre-a-margarida-4/Curiosidades-Sobre-a-Margarida-11.jpg.>. Acesso em: 03/07/2017.

Figura 14: Margaridas com 21 pétalas



Fonte: Disponível em: <http://blog.giulianaflores.com.br/wp-content/uploads/2013/11/cultivar-margaridas.jpg.>. Acesso em: 03/07/2017.

Outro caso a se analisar é quanto ao caule de algumas árvores. Sena (2013, p.43), diz que “Em muitas árvores a quantidade de galhos que aparecem nas ramificações são elementos da sequência de Fibonacci”.

A planta Achillea ptarmica tem a característica de nascer um broto de um galho a cada mês, onde cada broto leva dois meses para produzir um novo broto. Assim, como mostra a **Figura 15**, o número de galhos visto de baixo para cima numa linha horizontal é igual a 1, 2, 3, 5, 8, e assim sucessivamente.

Figura 15: Achillea ptarmica

Fonte: Disponível em: <http://leventtourne.free.fr/livreouvert/NombreOr/IMAGES/achille.jpg>. Acesso em: 07/2017.

Segundo Azambuja (2013, p.20):

> A gente tem que trazer na vivência do dia a dia do aluno, aquilo que esta próximo dele, relacionar os conteúdos com a vida para que se torne mais fácil à aprendizagem e eles entendam, tenha uma melhor compreensão desses conteúdos.

Assim, torna-se mais relevante a apresentação da sequência de Fibonacci no Ensino Médio devido a sua ligação com os diversos casos apresentados anteriormente.

4 A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI NO ENSINO MÉDIO

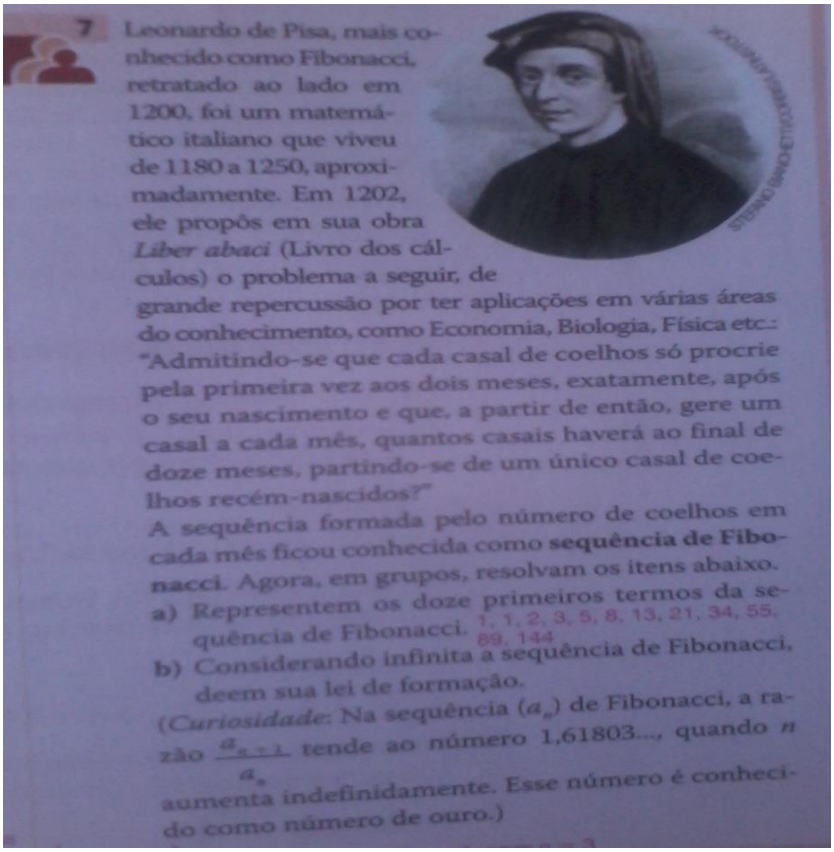
A abordagem desse tema em livros didáticos do Ensino Médio pode ser considerada pouca, devido à relevância do assunto.

No livro “Conexões com a Matemática”, Barroso (2010, p.255), ressalta que:

> Por apresentar propriedades instigantes e significativas, que se aproximam de fenômenos da natureza, a sequência de Fibonacci tornou-se uma das mais importantes da História da Matemática. O número de pequenas flores que formam o miolo do girassol e o número de escamas de certos peixes, por exemplo, podem ser associados á sequência de Fibonacci.

Apesar de apresentar a sequência de Fibonacci como a mais importante da história da Matemática, esta é a única parte em que é retratado tal assunto.

Figura 16: A sequência de Fibonacci no livro Matemática Paiva



7 Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, retratado ao lado em 1200, foi um matemático italiano que viveu de 1180 a 1250, aproximadamente. Em 1202, ele propôs em sua obra *Liber abaci* (Livro dos cálculos) o problema a seguir, de grande repercussão por ter aplicações em várias áreas do conhecimento, como Economia, Biologia, Física etc.:

"Admitindo-se que cada casal de coelhos só procrie pela primeira vez aos dois meses, exatamente, após o seu nascimento e que, a partir de então, gere um casal a cada mês, quantos casais haverá ao final de doze meses, partindo-se de um único casal de coelhos recém-nascidos?"

A sequência formada pelo número de coelhos em cada mês ficou conhecida como **sequência de Fibonacci**. Agora, em grupos, resolvam os itens abaixo.

a) Representem os doze primeiros termos da sequência de Fibonacci. 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

b) Considerando infinita a sequência de Fibonacci, deem sua lei de formação.

(*Curiosidade*: Na sequência (a_n) de Fibonacci, a razão $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ tende ao número 1,61803..., quando n aumenta indefinidamente. Esse número é conhecido como número de ouro.)

Fonte: o autor

Na **Figura 16** é apresentada uma questão sobre a sequência de Fibonacci retirada do livro “Matemática Paiva” de Paiva (2013, p.257), onde este é o único momento em que se é abordado este tema.

Já no livro “Matemática: contexto e aplicações” de Dante (2013), apesar de abordar tal assunto apenas como um momento de Leitura é um dos que mais retrata a sequência de Fibonacci. Ele inicia falando de Leonardo de Pisa, ressaltando que:

> O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250), mais conhecido como Fibonacci, contribuiu com diversas pesquisas para o desenvolvimento da Matemática. Em 1202, em seu livro intitulado *Líber Abaci*, apresentou o problema que o consagrou. Acompanhe: (DANTE, 2013, p.210).

Logo após, apresenta o problema dos coelhos seguido de sua resolução e finaliza informando “Você sabia? A sequência de Fibonacci também é usada na Bolsa de Valores para tentar prever os preços futuros. Essa mesma sequência aparece em uma parte do filme *O código da Vinci*, baseado no livro de Dan Brown” (DANTE, 2013, p.211).

Diante destes livros didáticos, percebe-se a pouca abordagem sobre a sequência de Fibonacci. Assim, nesta seção é feita uma análise de quais conteúdos matemáticos estão inseridos no estudo da sequência de Fibonacci.

Primeiramente são apresentadas algumas das propriedades matemáticas da sequência, juntamente com as demonstrações e exemplificações. E em seguida são apresentadas algumas questões sobre a sequência de Fibonacci retiradas de provas anteriores, como: seleções de vestibulares, ENEM, concursos, OBMEP, etc.

4.1 ALGUMAS PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Ao aprofundar o estudo sobre a sequência de Fibonacci, pode-se perceber que há várias propriedades matemáticas referentes a ela, onde algumas destas propriedades contêm uma contextualização adequada para o primeiro ano do Ensino Médio.

No estudo de Progressões Aritméticas e Progressões Geométricas é retratado o conteúdo da soma dos n termos de uma sequência dada. Tais fórmulas são, respectivamente, representadas por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ e } S_n = \frac{a_1.(q^n - 1)}{q - 1}, \; q \neq 1$$

A propriedade 1 pode ser assemelhada a estes conteúdos de PA e PG. Além disso, as propriedades 2 e 3, estendem este estudo, uma vez que, podem determinar a soma dos números de ordem ímpar, assim como a soma dos números de ordem par da Sequência de Fibonacci.

Propriedade 1: A soma S_n, $n > 1$, dos n primeiros números da Sequência de Fibonacci é dada por $\boldsymbol{S_n = F_{n+2} - 1}$.

Antes de apresentar a demonstração desta propriedade é importante ressaltar que devido os termos da sequência de Fibonacci serem determinados pela soma de seus dois antecessores imediatos a ele, onde os dois primeiros termos são iguais a 1, podemos definir a sequência recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} F_1 = 1 \\ F_2 = 2 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2};\ \mathrm{n} > 2 \end{cases}$$

onde F_n representa o n-ésimo número na sequência de Fibonacci.

Demonstração: Pela definição recursiva da sequência de Fibonacci, tem-se:

$$F_3 = F_2 + F_1 \Longrightarrow F_1 = F_3 - F_2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 \Longrightarrow F_2 = F_4 - F_3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 \Longrightarrow F_3 = F_5 - F_4$$
$$\vdots$$
$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Longrightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$$
$$F_{n+2} = F_{n+1} - F_n \Longrightarrow F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$$

Assim a soma S_n pode ser escrita da seguinte forma:

$$S_n = F_1 + F_2 + F_3 + \ldots + F_{n-1} + F_n$$
$$S_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + (F_5 - F_4) + \cdots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1})$$
$$S_n = F_{n+2} - F_2$$

E como $F_2 = 1$, tem-se:

$$S_n = F_{n+2} - 1$$

□

Essa propriedade nos esclarece que para sabermos a soma dos n primeiros termos da sequência basta saber o valor do termo a_{n+2}. Ou seja, se quiser saber a soma dos 3 primeiros termos da sequência basta conhecer a_5, dos 4 primeiros termos basta conhecer a_6, e assim, sucessivamente.

Propriedade 2: A soma dos números de ordem ímpar da Sequência de Fibonacci é igual a F_{2n}.

Demonstração: Seja S_{ni} a soma dos n primeiros termos ímpares da sequência de Fibonacci, logo:

$$S_{ni} = F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1};\ n \in N \text{ e } n > 0.$$

Como pela definição recursiva da sequência de Fibonacci, tem-se:

$$F_1 = F_2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 \Rightarrow F_3 = F_4 - F_2$$
$$F_6 = F_5 + F_4 \Rightarrow F_5 = F_6 - F_4$$
$$\vdots$$
$$F_{2n-2} = F_{2n-3} + F_{2n-4} \Rightarrow F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4}$$
$$F_{2n} = F_{2n-1} + F_{2n-2} \Rightarrow F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$$

Logo,

$$S_{ni} = F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-3} + F_{2n-1}$$
$$S_{ni} = F_2 + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + ... + (F_{2n-2} - F_{2n-4}) + (F_{2n} - F_{2n-2})$$
$$S_{ni} = F_{2n}$$

□

Assim, pode-se determinar a soma de quantos termos ímpares quiser da sequência de Fibonacci, basta conhecer o termo F_{2n}. Por exemplo, se quisermos determinar a soma dos quatro primeiros termos ímpares da sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), basta conhecer o oitavo termo, pois $F_{2n} = F_{2.4} = F_8 = 21$.

Propriedade 3: A soma dos números de ordem par da Sequência de Fibonacci é igual a $F_{2n+1} - 1$.

Demonstração: Seja S_{np} a soma dos n primeiros termos pares da sequência de Fibonacci, logo:

$$S_{np} = F_2 + F_4 + F_6 + ... + F_{2n}; \ n \in N \text{ e } n > 0.$$

De acordo com a propriedade 1, pode-se escrever a soma dos números de Fibonacci até a ordem "2n" da seguinte forma:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + ... + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 \qquad (*)$$

Já, com base na propriedade 2, pode-se escrever a soma dos números de ordem ímpar da sequência de Fibonacci até a ordem "2n – 1" da seguinte forma:

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} \qquad (**)$$

Subtraindo, membro a membro, a equação (*) da (**), tem-se:

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + ... + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1$$
$$S_{np} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1$$

Como, pela definição recursiva da sequência, tem-se:

$$F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n} \Rightarrow F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$$

Daí,

$$S_{np} = F_{2n+1} - 1$$

$\square$

Por exemplo, se quisermos saber a soma "$F_6 + F_8 + F_{10}$", basta subtrair a soma dos cinco primeiros termos pares da soma dos dois primeiros pares da sequência de Fibonacci. Logo:

$$F_6 + F_8 + F_{10} = S_{5p} - S_{2p}$$
$$F_6 + F_8 + F_{10} = (F_{2.5+1} - 1) - (F_{2.2+1} - 1)$$
$$F_6 + F_8 + F_{10} = F_{11} - F_5$$
$$F_6 + F_8 + F_{10} = 89 - 5 = 84$$

Propriedade 4: A Soma dos quadrados dos números da Sequência de Fibonacci é igual a $F_n.F_{n+1}$.

Demonstração: De fato, para todo n ∊ N, tem-se:

$$(F_n)^2 = F_n.F_n = F_n.(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n.F_{n+1} - F_n.F_{n-1}$$

Assim, podemos escrever o quadrado de cada termo da sequência de Fibonacci das seguintes formas:

$$(F_1)^2 = F_1.F_2$$
$$(F_2)^2 = F_2.F_3 - F_2.F_1$$
$$(F_3)^2 = F_3.F_4 - F_3.F_2$$
$$(F_4)^2 = F_4.F_5 - F_4.F_3$$
$$\vdots$$
$$(F_{n-1})^2 = F_{n-1}.F_n - F_{n-1}.F_{n-2}$$
$$(F_n)^2 = F_n.F_{n+1} - F_n.F_{n-1}$$

Daí,

$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 + ... + (F_n)^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = F_1.F_2 + (F_2.F_3 - F_2.F_1) + (F_3.F_4 - F_3.F_2) + (F_4.F_5 - F_4.F_3) + \ldots + (F_{n-1}.F_n - F_{n-1}.F_{n-2}) + (F_n.F_{n+1} - F_n.F_{n-1})$$
$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = F_n.F_{n+1}$$

□

As propriedades e demonstrações de 1 a 4 foram apresentadas com base em Jesus (2013) e, Pereira e Ferreira (2008).

Esta propriedade minimiza bastante os cálculos da soma dos quadrados dos números de Fibonacci. Por exemplo, para determinar a soma dos quadrados dos oito primeiros termos da sequência, teríamos:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = (F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 + (F_5)^2 + (F_6)^2 + (F_7)^2 + (F_8)^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = 1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 + 169 + 441$$
$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = 714$$

Logo, a medida que aumenta o valor de n, os cálculos ficarão cada vez mais extensos. Mas utilizando a propriedade 4, basta conhecer dois termos, no caso, F_8 e F_9 e efetuar a multiplicação. Assim:

$$\sum_{k=1}^{n}(F_k)^2 = F_8 \,.\, F_9 = 21 \,.\, 34 = 714$$

Ao utilizar as propriedades de 1 a 4, é necessário o conhecimento de pelo menos um termo da sequência de Fibonacci. Diante disso, apresentaremos a seguir a fórmula que determina um termo qualquer da sequência.

O que torna esse conhecimento ainda mais interessante é que no estudo de Progressões aritméticas e Progressões geométricas também é descrito o conteúdo que fornece o termo geral de uma sequência em questão.

Tal propriedade é conhecida como Fórmula de Binet[13].

Propriedade 5: O termo geral da sequência de Fibonacci é

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]; \forall\, n \geq 1.$$

Demonstração: Por indução matemática, tem-se:

(i) É válida para n = 1, pois teremos:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right]$$

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sqrt{5}$$

$$F_1 = 1$$

(ii) Suponhamos a propriedade ser válida para n $\in \{1, 2, 3, \dots, k-1, k\}$. Devemos mostrar que também é válida para n = k + 1.

Por hipótese, tem-se:

$$F_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]$$

[13] **Jacques Philippe Marie Binet**: Foi um matemático francês (1786-1856), onde uma das suas contribuições matemáticas foi á descoberta da fórmula de Binet, em 1843. Ele também fez contribuições no campo da física e da astronomia.

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right].$$

E como, pela definição recursiva da sequência de Fibonacci, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$, para todo $k \geq 2$. Logo,

$$F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] + \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1 + \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(1 + \frac{2}{1-\sqrt{5}}\right)$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}$$

$$F_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]$$

Portanto, a propriedade é válida para $n \geq 1$.

□

Achar um termo da sequência de Fibonacci pela fórmula de Binet para n igual a 1 ou a 2 é de simples resolução, mas a medida que aumenta o valor de n, o cálculo torna-se cada vez mais complexo. Para isso, precisa-se do artifício de uma calculadora.

Por exemplo, para achar F_8 e F_9, tem-se que resolver potências com expoentes 8 e 9, respectivamente.

$$F_8 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^8 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^8\right] \text{ e } F_9 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^9 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^9\right]$$

Manualmente, demoraria bastante para resolver, já com o uso de uma calculadora, em poucos segundos obtém-se $F_8 = 34$ e $F_9 = 55$.

Além das propriedades de 1 a 5, da sequência de Fibonacci, existem algumas um pouco mais complexas, além de, nas demonstrações, conterem partes de conhecimentos distintos para alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Algumas destas podem ser vistas nas propriedades 6, 7 e 8 aqui apresentadas. Apesar disto, suas demonstrações serão expostas, afim de um melhor entendimento de ambas e engrandecimento da pesquisa.

Propriedade 6: Dois números consecutivos na sequência de Fibonacci não têm quaisquer fatores comuns, o que significa dizer que eles são relativamente primos[14].

Demonstração: Por indução matemática, temos:

(i) F_1 e F_2 são primos entre si, pois,

$$F_1 = 1 \text{ e } F_2 = 1$$

Suponhamos que F_k e F_{k+1} sejam primos entre si, ou seja, tenham apenas o número 1 como fator comum nas suas decomposições em fatores primos. Precisamos verificar se F_{k+1} e F_{k+2} também são primos entre si.

Suponhamos, agora, que F_{k+1} e F_{k+2} não sejam primos entre si e que tenham, além do 1, outro fator em comum na sua decomposição em fatores primos. Seja p este número.

Como, pela definição recursiva da sequência de Fibonacci,

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \qquad \Rightarrow \qquad F_k = F_{k+2} - F_{k+1}$$

Logo F_k também seria múltiplo de p. Assim, F_k e F_{k+1} teria o p além do 1 como divisor comum, o que é um absurdo, haja vista, serem relativamente primos.

Daí, F_{k+1} e F_{k+2} são primos entre si.

□

Dessa forma se pegarmos dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, por exemplo, o oitavo e o nono, teremos:

$$F_8 = 21 \text{ tem como divisores } 1, 3, 7 \text{ e } 21.$$

[14] **Relativamente primos**: é um conjunto de dois ou mais números naturais cujo único divisor comum a todos eles seja o número 1. Também é chamado de coprimos ou primos entre si.

$F_9 = 34$ tem como divisores 1, 2, 17 e 34.

Como F_8 e F_9 tem apenas o 1 como divisor comum, logo eles são relativamente primos.

Propriedade 7: A soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal é o número de Fibonacci f_n. (ver afirmação na página 25).

Demonstração: Seja F_k a soma dos elementos da n-ésima "diagonal inversa" do Triângulo de Pascal. Devemos mostrar que, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n > 2$.

Tabela 2: Triângulo de Pascal na forma binária

$\binom{0}{0}$							
$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$						
$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$					
$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$				
$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$			
$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	
$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	...	$\binom{n}{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Fonte: o autor

Seja F_0 a primeira diagonal, logo, observando a **Tabela 2**, tem-se:

$$F_0 = \binom{0}{0}$$

$$F_1 = \binom{1}{0}$$

$$F_2 = \binom{2}{0} + \binom{1}{1}$$

$$F_3 = \binom{3}{0} + \binom{2}{1}$$

$$F_4 = \binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2}$$

$$\vdots$$

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots$$

$$F_{n+1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \ldots$$

$$F_{n+2} = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \ldots$$

Logo, adicionando F_{n+1} com F_n, teremos:

$$\left[\binom{n+1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots\right] + \left[\binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots\right]$$

ou ainda,

$$\binom{n+1}{0} + \left[\binom{n}{o} + \binom{n}{1}\right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2}\right] + \left[\binom{n-2}{2} + \binom{n-2}{3}\right] + \cdots$$

Fazendo, $\binom{n+1}{0} = 1 = \binom{n+2}{0}$ e utilizando a fórmula de Stifel para binômios de Newton "$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$", temos:

$$F_{n+1} + F_n = \binom{n+2}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n-1}{3} + \cdots = F_{n+2}.$$

□

A propriedade 7 pode ser entendida e exemplificada observando a **Figura 03**, na página 21, pois a soma das diagonais em questão resultam em 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc. Ou seja, são os números que representam a sequência de Fibonacci.

Propriedade 8: Sejam (u_n) e (v_n) duas sequências de Fibonacci e y um escalar real.

(i) Se $z_n = u_n + v_n$, então, para todo $n \geq 3$, tem-se: $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$.

(ii) A sequência $(y.v_n) = y.(v_n)$ satisfaz $y.v_n = y.v_{n-1} + y.v_{n-2}$.

Demonstração: Sejam (u_n) e (v_n) duas sequências, definidas recursivamente, como a sequência de Fibonacci. Ou seja,

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \text{ e } v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$$

(i) Seja (z_n) uma sequência da forma:

$$z_n = u_n + v_n$$

Logo,

$$z_n = (u_{n-1} + v_{n-1}) + (u_{n-2} + v_{n-2})$$
$$z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$$

(ii) Multiplicando ambos os membros da equação "$v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$", pelo escalar y, têm-se:

$$y.v_n = y.v_{n-1} + y.v_{n-2}$$

□

As propriedades 6, 7 e 8, assim como suas demonstrações estão apresentadas conforme Medeiros (2016).

A propriedade 8, ressalta que, a sequência resultante da soma de duas sequências de ordem n, retiradas da sequência de Fibonacci preserva a característica principal da sequência de Fibonacci, qual seja: cada termo, a partir do terceiro, é igual a soma dos dois anteriores, assim como, se multiplicarmos uma sequência de Fibonacci por um número real. Logo, pode-se dizer que também são uma sequência de Fibonacci.

Por exemplo, dadas às sequencias $(u_n) = (2, 3, 5, 8, 13)$ e $(v_n) = (5, 8, 13, 21, 34)$, e seja $z_n = u_n + v_n$, tem-se que:

$$(z_n) = (u_n) + (v_n)$$
$$(z_n) = (2, 3, 5, 8\ 13) + (5, 8, 13, 21, 34)$$
$$(z_n) = (7, 11, 18, 29, 47)$$

Como, 18 = 11 + 7, 29 = 18 + 11 e 47 = 29 + 18, pode-se perceber que a sequência (z_n) tem-se $z_n = z_{n-1} + z_{n-2}$, $\forall$ $n \geq 3$.

E se multiplicarmos (u_n) por 4, teremos:

$$4 . (u_n) = 4 . (2, 3, 5, 8, 13)$$
$$4 . (u_n) = (8, 12, 20, 32, 52)$$

Logo,

$$4.(u_n) = 4.(u_{n-1}) + 4.(u_{n-2}),\ \forall\ n \geq 3,$$

pois

$$20 = 12 + 8,\ 32 = 20 + 12 \text{ e } 52 = 32 + 20.$$

Portanto, com base nas propriedades analisadas acima, os alunos ao estudarem as propriedades inerentes à sequência de Fibonacci, além de aprenderem as propriedades, poderão relembrar e aprimorar seu conhecimento em alguns conteúdos à medida que resolva alguns exercícios.

Tais conteúdos são: **quadrados perfeitos** (nas questões referentes a propriedade 4); **números primos** e **primos entre si** (nas questões referentes a propriedade 5); **binômios de Newton** ou **combinação** (nas questões referentes a propriedade 6), donde este caberia para alunos do 2º ano do Ensino Médio após verem o conteúdo de "Binômio de Newton"; **recorrência** (na demonstração da propriedade 7); e **operações com potências** (na demonstração da fórmula de Binet).

4.2 QUESTÕES REFERENTES À SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Apesar de, na maioria dos livros não aprofundarem o conteúdo da sequência de Fibonacci, ou em alguns casos não sequer retratar sobre tal assunto, há uma quantidade significativa de questões referentes à sequência de Fibonacci em seleções de vestibulares, ENEM, concursos, OBM, etc. O que instiga a alguns, devido nunca ter visto tal assunto.

Algumas destas questões serão apresentadas seguir, onde no ANEXO A pode-se ver possíveis soluções delas.

1. **(FDC – 2015)** A sequência de números 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… é conhecida como sequência de Fibonacci. O 14º termo desta sequência é:

A) 233

B) 273

C) 327

D) 373

E) 377

Para resolver esta questão, basta perceber que os números estão na ordem dos números de Fibonacci, logo, quem já domina tal assunto, rapidamente usaria a definição de recorrência da sequência de Fibonacci para determinar os termos posteriores.

Já quem nunca viu tal assunto, primeiramente tentaria ver uma ligação entre os números (o que poderia levar muito tempo) para achar uma fórmula ou algo assim, para depois calcular termo a termo até o 14º.

O professor Paulo Henrique[15] (2015, *on-line*) ao se retratar sobre a **questão 1** acima diz, "Esta questão envolve a sequência de Fibonacci. Questões com esse raciocínio são tradicionais em prova. O examinador quer vencer o candidato pelo cansaço, mas é bem simples".

Assim, Paulo Henrique, nos induz que, apesar das questões que envolvem a sequência de Fibonacci, na maioria dos casos, poderem ser consideradas simples, um candidato pode demorar muito tentando resolver a questão se nunca tiver visto tal assunto, podendo assim, perder tempo de prova ou até mesmo a questão pelo cansaço.

2. (**OBM - 2003)** Na sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos anteriores. Quanto vale a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\frac{5}{32}+\frac{8}{64}+\frac{13}{128}+\frac{21}{256}+\frac{34}{512}+\frac{55}{1024}+\cdots,$$

onde o *n*-ésimo termo é o *n*-ésimo termo da sequência de Fibonacci dividido por 2^n?

A) 3/2

B) 2

C) 5/2

D) 3

E) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

3. **(ITA - 2015)** Seja (a_1, a_2, a_3, ...) a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p ,a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

[15] **Paulo Henrique**: Professor formado em economia, onde costumeiramente resolve questões comentadas de concursos e ENEM anteriores.

II. A_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s):

A) apenas II.

B) apenas I e II.

C) apenas I e III.

D) apenas II e III.

E) I, II e III.

4. **(IME - 2008)** Uma série de Fibonacci é uma sequência de valores definida da seguinte maneira:

- Os dois primeiros termos são iguais à unidade, ou seja, $\mathbf{T_1 = T_2 = 1}$.

- Cada termo, a partir do terceiro, é igual á soma dos dois termos anteriores, isto é: $\mathbf{T_n = T_{n-2} + T_{n-1}}$.

Se $\mathbf{T_{18} = 2584}$ e $\mathbf{T_{21} = 10946}$ então $\mathbf{T_{22}}$ é igual a:

A) 12225

B) 13530

C) 17711

D) 20412

E) 22121

5. **(ESAF – 2010)** A partir da lei de formação da sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,…, calcule o valor mais próximo do quociente entre o 11° e o 10° termo.

A) 1,732

B) 1,667

C) 1,618

D) 1,414

E) 1,5

6. **(UNICAMP - 2012)** O número áureo é uma constante real irracional, definida como a raiz positiva da equação quadrática obtida a partir de $\frac{x+1}{x} = x$.

a) Reescreva a equação acima como uma equação quadrática e determine o número áureo.

b) A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... é conhecida como sequência de Fibonacci, cujo n-ésimo termo é definido recursivamente pela fórmula:

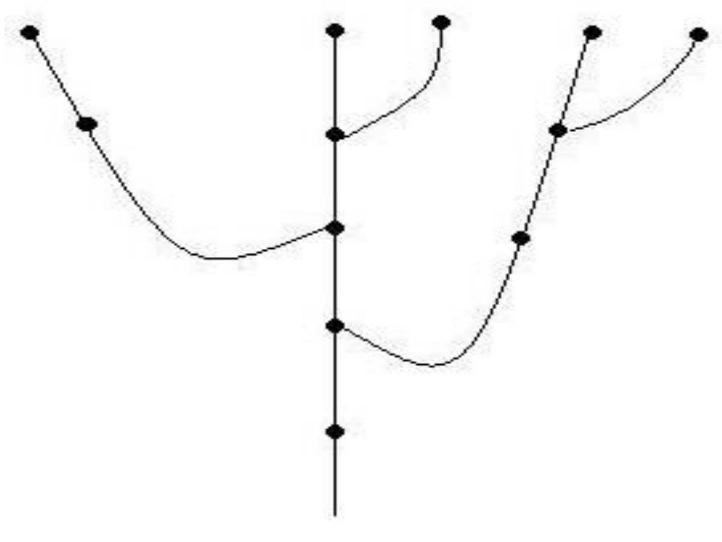
$$F(n) = \begin{cases} 1, & se\ n = 1\ ou\ 2 \\ F(n-1) + F(n-2), & se\ n > 2 \end{cases}$$

Podemos aproximar o número áureo, dividindo um termo da sequência de Fibonacci pelo termo anterior. Calcule o 10º e o 11º termos dessa sequência e use-os para obter uma aproximação com uma casa decimal para o número áureo.

7. **(Banco de questões - OBMEP 2010)** A árvore de Emília – A árvore de Emília cresce de acordo com a seguinte regra: após duas semanas do aparecimento de um galho, esse galho produz um novo galho a cada semana e o galho original continua crescendo. Depois de cinco semanas, a árvore tem cinco galhos, como mostra a figura. Quantos galhos, incluindo o galho principal, a árvore terá no final de oito semanas?

A questão 07 foi retirada do livro preparatório para a OBMEP 2010. Uma curiosidade nela é que se olhar para a figura desta questão (**Figura 16**), percebe-se que é congruente a **Figura 15** da Achillea ptarmica vista na página 30. Assim, desprezando-se a possibilidade dos galhos caírem, o número de galhos após cada semana são os números de Fibonacci, ou seja, respectivamente, teremos: “1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...”. Portanto, a resposta seria 21 galhos.

Figura 17: A árvore de Emília



Fonte: Disponível em: < http://www.tutorbrasil.com.br/forum/viewtopic.php?t=1443.>. Acesso em: 05/07/2017

Portanto, ao analisar vários tipos de provas anteriores distintas, como seleções de vestibulares e OBM, percebe-se que na maioria delas uma das questões recai sobre o conteúdo da Sequência de Fibonacci, onde quem já tem uma base da sequência de Fibonacci e de sua definição recursiva leva vantagem quanto aos demais. Portanto, assim como PA e PG, é de grande relevância ver tal assunto no ensino médio.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer dos capítulos 2 e 3 foi verificada a ligação da sequência de Fibonacci com diversos casos ao cotidiano, como: a reprodução das abelhas, os ossos da mão humana, um envolvimento na música, o número de pétalas de algumas rosas e o crescimento de galhos de algumas árvores. Assim como, o "problema dos coelhos" o qual deu origem a descoberta da sequência de Fibonacci, dando assim, uma maior importância em abordar tal conteúdo no Ensino Médio.

Devido a pouca abordagem da sequência de Fibonacci em livros didáticos, foram analisadas algumas propriedades da sequência de Fibonacci, onde foram verificados vários conteúdos matemáticos envolvidos, de modo que, à medida que os alunos estudam tais propriedades, além de aprendê-las (principalmente, quanto a definição recursiva da sequência de Fibonacci,), poderão relembrar e aprimorar seu conhecimento em alguns conteúdos de anos anteriores, tais como: quadrados perfeitos, números primos e primos entre si, binômios de Newton ou combinação, recorrência e operações com potências.

Devido à existência de questões em OBM, OBMEP, concursos e seleções de vestibulares anteriores por todo o país, referentes à sequência de Fibonacci, pode-se perceber o seu envolvimento com os conteúdos do Ensino Médio, onde o envolvimento prévio de tal assunto facilitará a resolução de tais questões.

Portanto, diante das várias conclusões, fica evidente a importância de tal conteúdo aos alunos do Ensino Médio, ficando adequado se for apresentado após o conteúdo de sequências e antes de PA e PG.

Assim, a presente pesquisa foi de cunho relevante, pois além de deixar um possível Plano de Aula a ser repassados pelos docentes do 1º ano do Ensino Médio (APÊNDICE B), proporcionou um estudo mais aprofundado sobre a temática, acumulando bagagem para a vida acadêmica e profissional do pesquisador e do orientador.

Ademais, cumpre-nos a deixar esta pesquisa para possíveis aprofundamentos e desenvolvimento em trabalhos futuros, como por exemplo, a sua aplicação por um professor na sua prática didática e a análise de seus efeitos frente ao aprendizado de seus alunos.

REFERÊNCIAS

AZAMBUJA, Monique Teixeira de. **O Uso do Cotidiano Para o Ensino de Matemática em uma Escola de Caçapava do Sul**. Caçapava do Sul, 2013.

BARROSO, Juliane Matsubara. **Conexões com a Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Bez, Edson. **Relacionando Padrões entre a Sequência de Fibonacci, Seção Aurea e Ternos Pitagóricos**. Florianópolis, 1997.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: conexões & aplicações**. – 2. ed. – São Paulo: Ática, 2013.

FERREIRA, R. A. **Seqüência de Fibonacci**. Osasco, 2007.

JESUS, Márcio Santana dos Santos de. **Os Números de Fibonacci**. Campinas, 2013.

LÍVIO, Mário. **Razão áurea, a história de fi, um número surpreendente**. 2ª ed. Rio de Janeiro/SP. Record, 2007.

MEDEIROS, Diogo Dalyson Costa de. **Algumas Propriedades Matemáticas da Sequência de Fibonacci**. Mossoró - RN, 2016.

MONTEIRO, Adriano Camargo. **Música Fibonacci e o Diabo**. Revista Sitra Ahra, v. 1, p. 12-17, 2014.

PAIVA, Manoel. **Matemática: Paiva**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013.

PEREIRA, Lívia Da Cás. FERREIRA, Marcio Violante. **Sequência de Fibonacci:** História, Propriedades e Relações com a Razão Áurea. S. Maria, v. 9, n. 1, p. 67-81, 2008.

RAMOS, M. G. O. **A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro**. 93 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Ilhéus/BA, 2013.

SANTOS, A. T. A. **Das trevas a lúz de Fibonacci:** Uma visão histórica. 97 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.

SOUZA, A. R. **Razão áurea e aplicações:** contribuições para a aprendizagem de proporcionalidade de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. 147 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto, 2013.

APÊNDICE A - Possíveis soluções das questões 1 á 6

1) **Solução:**

Para resolver a sequência bastam somar os dois termos anteriores e o resultado será o termo seguinte, observe:

O 1º é 0

O 2º é 1

Então o 3º será 0 + 1 = 1

O 4º será 1 + 1 = 2

Sucessivamente, teremos: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144.

Como, 144 + 89 = 233, o 233 é o 14º termo.

Gabarito: A

2) **Solução:**

Temos,

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{5}{32} + \frac{8}{64} + \frac{13}{128} + ...,$$

$$\frac{1}{2}S = \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} + \frac{3}{32} + \frac{5}{64} + \frac{8}{128} + ...$$

$$\frac{1}{4}S = \qquad \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{2}{32} + \frac{3}{64} + \frac{5}{128} + ...$$

Logo,

$$S - \frac{1}{2}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Leftrightarrow S = 2$$

Gabarito: B

3) **Solução:**

I. Falsa.

Se (a_p, a_{p+1}, a_{p+2}) formam, nesta ordem uma PG, então:

$$(a_{p+1})^2 = (a_p).(a_{p+2}) \qquad \text{(I)}$$

Mas, como:

$$a_{p+1} = a_{p+2} - a_p \qquad \text{(II)}$$

Fazendo $(II)^2 = (I)$, tem-se:

$$(a_{p+2})^2 - 3.(a_{p+2}).(a_p) + (ap)2 = 0$$

Dividindo a equação acima por $(a_{p+2})^2$, resultará em:

$$1 - \frac{3.a_p}{a_{p+2}} + \frac{(a_p)^2}{(a_{p+2})^2} = 0$$

Seja $t = \frac{a_p}{a_{p+2}}$, temos:

$$t^2 - 3t + 1 = 0 \Longrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

O que é um absurdo, pois $t = \frac{a_p}{a_{p+2}}$ é um número racional.

II. Verdadeira.

A sequência apresentada é a de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...).

Logo, $a_7 = 13$ e 13 é um número primo.

III. Verdadeira.

É fácil ver que, ao aparecer uma sequência do tipo (ímpar, ímpar, par), esta irá se repetir, uma vez que os próximos termos seriam:

ímpar + par → ímpar
par + ímpar → ímpar
ímpar + ímpar → par

Como $a_1 = 1$ é ímpar, $a_2 = 1$ é ímpar e $a_3 = 2$ é par a sequência irá se repetir, logo, se n for múltiplo de 3, a_n será par.

Gabarito: D

4) **Solução:**

Como,

$$T_{22} = T_{21} + T_{20}$$

$$T_{20} = T_{19} + T_{18}$$

$$T_{21} = T_{19} + T_{20}$$

Logo,

$$T_{21} – T_{20} = T_{20} – T_{18}$$

$$T_{21} + T_{18} = 2.T_{20}$$

Portanto,

$$T_{22} = T_{21} + (T_{21} + T_{18})/2$$

$$T_{22} = 10946 + (10946 + 2584)/2$$

$$T_{22} = 17711$$

Gabarito: C

5) **Solução:**

Sua lei de formação é: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

Como a questão pede o quociente $\frac{a_{11}}{a_{10}}$, vamos calcular a_{11} e a_{10}.

$$a_9 = a_8 + a_7 = 21 + 13 = 34$$

$$a_{10} = a_9 + a_8 = 34 + 21 = 55$$

$$a_{11} = a_{10} + a_9 = 55 + 34 = 89$$

Logo, $\frac{a_{11}}{a_{10}} = \frac{89}{55} = 1{,}618$.

Gabarito: C

6) **Solução:**

a) Resolvendo a equação $\frac{x+1}{x} = x$, temos:

$$x^2 – x – 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2.1} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \; não \; convém \end{cases}$$

$$S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

b) Da sequência dada, segue:

$$F(7) = 13$$

F(8) = 21

F(9) = F(8) + F(7) = 21 + 13 = 34

F(10) = F(9) + F(8) = 34 + 21 = 55

F(11) = F(10) + F(9) = 55 + 34 = 89

Então, a aproximação pedida é dada por:

$$\frac{F(11)}{F(10)} = \frac{89}{55} = 1{,}6$$

APÊNDICE B - Plano de aula referente à sequência de Fibonacci

PLANO DE AULA	
ESCOLA: ____	
PROFESSOR (A): ____	
DISCIPLINA: Matemática	
DATA: 07/06/2017	CARGA HORÁRIA: 06 aulas de 50 minutos cada

TEMA CENTRAL: A sequência de Fibonacci

CONTEÚDOS
✓ A sequência de Fibonacci e seus primeiros indícios ✓ Diversidade da Sequência de Fibonacci ✓ Algumas propriedades inerentes a Sequência de Fibonacci

OBJETIVO GERAL
✓ Ter conhecimento da sequência de Fibonacci para poder resolver questões referentes a ela.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS
✓ Identificar uma sequência de Fibonacci. ✓ Identificar a sequência de Fibonacci nos diversos lugares que possam existir. ✓ Aprender as propriedades inerentes a Sequência de Fibonacci.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS
✓ Primeira Etapa – **Motivação** Após o conteúdo de Sequências o professor deve apresentar o problema dos coelhos e dá-se um tempo para os alunos tentarem resolverem. Em seguida, o professor resolve o problema dos coelhos mostrando que os números encontrados no desenvolver

da questão formam a conhecida sequência de Fibonacci. ✓ Segunda Etapa – **Orientação da Atividade** Primeiramente apresenta a diversidade da sequência de Fibonacci, mostrando que ela está ligada com o dia a dia dos alunos. Tal assunto pode-se ver nos seguintes tópicos: A Sequência de Fibonacci e as Abelhas; Sequência de Fibonacci no corpo humano; Sequência de Fibonacci na física; Sequência de Fibonacci no triângulo de Pascal; Sequência de Fibonacci na música; Sequência de Fibonacci e a natureza. Logo após, apresentam-se as propriedades inerentes a Sequência de Fibonacci, juntamente com suas demonstrações. ✓ Terceira Etapa – **Atividade** O professor resolve questões em sala de aula referentes à sequência de Fibonacci e suas propriedades para exemplificar melhor tais propriedades e dar um melhor entendimento do conteúdo. Por fim entrega uma atividade para os alunos com questões de seleções de vestibulares, concursos, OBMEP e OBM anteriores para os alunos resolverem extra sala de aula.

RECURSOS MATERIAIS
✓ Pincel, lápis, quadro, caderno do professor e do aluno.

AVALIAÇÃO
✓ Observar o envolvimento dos alunos quanto aos conteúdos abordados. ✓ Analisar a construção e o desenvolvimento das resoluções das questões passadas para os alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS
✓ *Esta pesquisa (após catalogação)*