UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Bruno Chioderoli Gregio

Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ

Ilha Solteira
2017

Bruno Chioderoli Gregio

Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de São José do Rio Preto, Polo de Ilha Solteira.

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin
Orientador

Ilha Solteira

2017

Gregio, Bruno Chioderoli.
Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas e, π e φ / Bruno Chioderoli Gregio. -- São José do Rio Preto, 2017
48 f. : il., tabs.

Orientador: Pedro Toniol Cardin
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Números reais. 3. Sequência (Matemática). 4. Cauchy, Problemas de. 5. Limite I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 517.52

Bruno Chioderoli Gregio

Sequências de números reais e as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de São José do Rio Preto, Polo de Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin
UNESP – Ilha Solteira
Orientador

Prof. Dr. Luis Antonio Fernandes de Oliveira
UNESP – Ilha Solteira

Prof. Dr. Régis Leandro Braguim Stábile
IFSP – Birigui

Ilha Solteira
28 de abril de 2017

Agradecimentos

A Deus que me presenteia com mais esta conquista em minha vida e durante esses dois anos me guiou em segurança em todas as viagens até a UNESP Ilha Solteira.

Aos meus pais, Donizeti e Luzia, pelo apoio incondicional e participação efetiva, sempre colaborando com os meus estudos.

À minha irmã, Beatriz, pelo amor fraterno e orações.

À minha namorada, Daiane, fundamental pelo amor, companhia e paciência em determinados momentos do curso. Sempre compreensível e companheira, principalmente nesta fase final do curso onde compartilhamos vários objetivos e lutamos juntos, com afinco, para alcança-los.

Aos meus tios e primos da família Garcia, os quais têm grande colaboração nesta conquista, sobretudo abrindo as portas de casa para me acolher durante o curso de verão em janeiro de 2016.

Aos demais familiares e amigos que, direta ou indiretamente também contribuíram para o meu crescimento.

Ao meu orientador, Profº Dr. Pedro, que com muita competência, profissionalismo e amizade soube me orientar muito bem durante este trabalho, além das excelentes aulas ministradas na disciplina "Números e Funções Reais."

A todos os professores, e agora amigos, com os quais tive a oportunidade de trocar conhecimentos durante as disciplinas do programa. Expresso aqui a minha gratidão e a certeza de que levarei sempre comigo a boa lembrança de nossas aulas e conversas.

Aos amigos da turma, os quais tive o prazer de conhecer e que também são peças essenciais para que eu pudesse chegar até aqui.

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta para o estudo de sequências de números reais, sobretudo no ensino médio. A partir da definição de uma sequência, estudamos os casos particulares das progressões aritméticas e geométricas. Como sabemos, é praxe os livros didáticos encerrarem o assunto sobre sequências por aqui, porém neste trabalho avançamos os estudos apresentando a noção de limite de uma sequência e os principais resultados sobre sequências convergentes. Tendo compreendido que cada número real pode ser obtido como o limite de uma sequência de Cauchy de números racionais, apresentamos as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ, além dos números da forma $\sqrt{a}$, como o limite de certas sequências de Cauchy de números racionais.

Palavras chave: Sequências de números reais. Limite. Sequências de Cauchy.

Abstract

This work presents a proposal for the study on sequences of real numbers, especially in high school. From the definition of a sequence, we study the particular cases of arithmetic and geometric progressions. As we know, it is usual for textbooks to terminate the subject of sequences here, but in this work we have advanced the studies presenting the notion of limit of a sequence and the main results on convergent sequences. Having understood that each real number can be obtained as the limit of a Cauchy sequence of rational numbers, we introduce the famous mathematical constants e, π and ϕ, beyond the numbers of the form $\sqrt{a}$, as the limit of certain Cauchy sequences of rational numbers.

Keywords: Sequence of real numbers. Limit. Cauchy sequences.

Sumário

Introdução

É comum, nas aulas de Matemática, ouvir dos alunos que esta é a disciplina mais chata, que não serve para nada e que nunca mais vão usar aquele monte de fórmulas pelo resto da vida. Que engano! Mas talvez essa aversão se dê justamente pelo modo como a mesma é ensinada e, sobretudo porque não compreendem que a Matemática não é apenas manipulação de símbolos de acordo com regras antigas, mas sim a compreensão de padrões — padrões da natureza, padrões da vida, padrões da beleza (veja [4]). Estabelecer e, principalmente, compreender os padrões, já permitiram grandes conquistas à humanidade em todas as áreas do conhecimento, sendo que as mais importantes estão ligadas à Matemática que, não à toa, é chamada "Ciência dos padrões" (veja [16]).

Um dos assuntos matemáticos em que a essência é a busca por padrões é o estudo de sequências, e vale ressaltar aqui, que a própria semântica da palavra já dá a ideia do que vem a ser uma sequência.

Neste trabalho, abordaremos o conceito de sequências de números reais. Mais especificamente, após introduzir esse conceito e explorar os principais resultados envolvendo a noção de limite de uma sequência e de sequências convergentes, nosso principal objetivo é estudar as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ, além dos números da forma $\sqrt{a}$, usando sequências. Apresentamos esses números como sendo o limite de certas sequências de Cauchy de números racionais.

Assim como veremos no Capítulo 1, uma sequência de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais e o contra-domínio é o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. A partir desta definição constatamos que as progressões aritméticas e geométricas são casos particulares de sequências de números reais. No estudo das progressões fica claro que algumas sequências de números reais obedecem a certos padrões que, neste caso, são estabelecidos pela razão da progressão. Ainda sobre as progressões, veremos resultados a respeito do seu termo geral e ainda sobre a soma dos seus primeiros termos.

O conceito de limite é o mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral, pois é nele que se baseiam na Matemática atual as definições de convergência, divergência, continuidade, derivada e integral (veja [13]). O Capítulo 2 desta dissertação trata da noção de limite em sua versão mais elementar, que é o limite de sequências de números reais. Veremos diversos resultados que nos permitirão determinar quando uma dada sequência converge ou não. Ainda neste capítulo apresentamos a definição de uma sequência de Cauchy de números reais, a qual possui a propriedade de ser convergente. Este capítulo serve de base para o assunto estudado no terceiro capítulo.

O Capítulo 3 inicia-se com uma breve discussão sobre a noção de comensurabilidade, a insuficiência dos números racionais e a ideia para a construção algébrica do conjunto dos números reais através de sequências de Cauchy de números racionais. Certos do fato de que todo número real pode ser obtido como o limite de uma sequência de Cauchy de números racionais, apresentamos as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ, além dos números da forma $\sqrt{a}$, onde a é um número real positivo, como o limite de certas sequências de Cauchy de números racionais. Essa abordagem nos permite obter aproximações racionais para esses importantes números. Durante este capítulo apresentamos também breves explicações históricas acerca da origem das constantes e, π e ϕ.

A percepção que temos é que durante os estudos no ensino médio, pelo menos na maioria das vezes, essas importantes constantes matemáticas são apresentadas, dentro de algum conteúdo específico, como meros símbolos necessários para determinados cálculos, porém sem qualquer introdução histórica. Este fato, que também acontece em outros assuntos, seja talvez um dos motivos geradores da antipatia de uma parte (ou até da maioria) dos alunos pela Matemática.

O Capítulo 4 vem justamente falar sobre isso, deixando uma proposta didática para o ensino desses conteúdos no ensino médio. O objetivo é propor um estudo efetivo desses conceitos, não se limitando apenas às progressões aritméticas e geométricas, assim como é feito atualmente. Enfatizamos que o estudo sobre sequências, a noção de limite de uma sequência e os principais resultados sobre sequências convergentes, podem ser feitos, em um primeiro momento, de uma maneira bastante intuitiva, sem a necessidade de explorar os aspectos formais da teoria. Esta última parte viria em um segundo momento, por exemplo, em um curso de graduação em Matemática.

Esperamos que este trabalho colabore com a melhoria do ensino de Matemática, em particular, o ensino sobre sequências e sobre as importantes constantes matemáticas e, π e ϕ. E que sirva de incentivo ao estudo da Matemática tanto a alunos quanto a professores dos mais diferentes níveis.

Capítulo 1

Sequências

Neste capítulo inicial apresentamos o conceito de uma sequência de números reais e exploramos os casos particulares das progressões aritméticas e geométricas.

1.1 Ideia intuitiva e definição de uma sequência

Podemos dizer que, de um modo geral, o conceito de sequência é algo um tanto intuitivo, e que procede de maneira quase natural logo quando o aluno inicia o processo de contagem. Certamente uma criança que já tenha aprendido a contar, se a ela for pedido para colocar em sequência os números de 1 a 10 teremos como resposta, nessa ordem, o conjunto

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

mesmo sem qualquer explicação prévia sobre o que é sequência. Isso acontece porque a palavra sequência remete a algo que tenha uma ordem, um padrão, ou um método. Segundo o dicionário, sequência significa seguimento, continuação, e matematicamente, é exatamente a isso que nos referimos, um seguimento, uma continuação de números que se dá por meio de uma regra.

Para se ter uma ideia de quão antiga é a noção de sequência, vamos mencionar um dos mais antigos documentos de história matemática, datado de aproximadamente 1650 a.C, o papiro Rhind, no qual o problema 79 fora decifrado pelo historiador Moritz Cantor em 1907 da seguinte forma: Em uma estrada para Roma há sete mulheres idosas, cada mulher tem sete mulas, cada mula carrega sete sacos, cada saco contém sete pães, com cada pão há sete facas e para cada faca há sete bainhas (veja [5]). O problema, neste caso, era descobrir quantos elementos estavam indo para Roma. Claramente, o exemplo ilustra a sequência das potências de 7, pois haviam 7 mulheres, 49 mulas, 343 sacos, 2401 pães, 16807 facas e 117649 bainhas, e para resolver o problema basta somar esses números, cujo resultado é 137256. Mais adiante, na Seção 1.3, veremos uma maneira mais fácil para efetuar tal cálculo.

Com base em tudo o que foi dito até aqui, prosseguimos com a seguinte definição.

Definição 1.1. *Uma* ***sequência de números reais*** *é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, *cujo domínio é o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais e o contra-domínio é o conjunto* $\mathbb{R}$ *dos números reais. A cada número natural* n *é associado um número real* $x_n = x(n)$, *chamado de* n*-ésimo termo da sequência.*

Algumas notações usadas para representar sequências são: $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (x_n). Por simplicidade, neste trabalho adotaremos principalmente esta última notação. Atente-se que (x_n) representa toda a sequência, enquanto x_n é apenas um termo da sequência, no caso, o n-*ésimo* termo.

Observação 1.1. *Utilizaremos também a palavra sequência para nos referirmos a funções* $x' : A \to \mathbb{R}$ *cujo domínio é o subconjunto finito* $A = \{1, 2, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$. *Neste caso, dizemos que tais sequências são* ***finitas***, *pois possuem um número finito de termos* x_1, $x_2, \ldots, x_n$.

Existem basicamente três maneiras de se definir uma sequência: por fórmula de recorrência, expressando cada termo em função de sua posição ou por propriedade dos termos. Vejamos a seguir alguns exemplos.

Exemplo 1.1 (fórmula de recorrência). *Seja a sequência* (x_n) *tal que* $x_1 = 3$ *e* $x_{n+1} = 4x_n + 2$, $n \geq 1$. *É fácil ver que* $(x_n) = (3, 14, 58, 234, \ldots)$.

Exemplo 1.2 (expressando um termo em função de sua posição). *Seja a sequência* (x_n) *tal que* $x_n = 2^{n-1}$. *Então,* $(x_n) = (1, 2, 4, 8, \ldots)$.

Exemplo 1.3 (propriedade dos termos). *Seja a sequência* (x_n) *tal que* $x_n = n$, *se* n *é primo e* $x_n = 1$, *se* n *não é primo. Logo,* $(x_n) = (1, 2, 3, 1, 5, 1, 7, 1, 1, \ldots)$.

Casos particulares de sequências, e objeto de estudo no currículo do ciclo fundamental de ensino, são as progressões aritméticas e geométricas. A seguir, enunciaremos e demonstraremos as principais propriedades e características de cada um desses conceitos.

1.2 Progressões aritméticas

Começamos essa seção com um exemplo ilustrando a ideia de uma progressão aritmética.

Exemplo 1.4. *Vamos imaginar a seguinte situação: Uma pessoa resolve guardar dinheiro em um cofrinho, e decide ainda que vai de início colocar no cofre R\$ 100,00, e a partir do próximo mês vai guardar mensalmente R\$ 50,00 durante 1 ano. Podemos perceber que no início o seu cofrinho terá os R\$ 100,00 depositados inicialmente, e a partir de então os valores passarão a ser R\$ 150,00, R\$ 200,00, R\$ 250,00, etc, conforme os meses passam, e ao final de 12 meses a pessoa terá no cofre R\$ 700,00.*

Este exemplo pode ser visto como uma sequência finita, de modo que

$$\begin{aligned}
x_1 &= 100\\
x_2 &= 150 = 100 + 1 \cdot 50 = x_1 + 1 \cdot 50\\
x_3 &= 200 = 100 + 2 \cdot 50 = x_1 + 2 \cdot 50\\
&\ \vdots\\
x_n &= x_1 + (n-1)\,50, \quad n = 4, \ldots, 13,
\end{aligned}$$

e assim $(x_n) = (100, 150, 200, 250, \ldots, 700)$. Observe que a variação do valor contido no cofre em relação ao tempo é constante, ou seja, grandezas distintas sofrem variações iguais em intervalos iguais (veja [11]), e a isso chamamos de Progressão Aritmética.

Definição 1.2. ***Progressão Aritmética*** *(PA) é toda sequência, finita ou infinita, em que a diferença entre cada termo e o termo anterior (a partir do segundo) é constante. Essa diferença constante é chamada* ***razão*** *da PA, e é denotada pela letra r.*

Analisemos o Exemplo 1.4. É possível que alguém pergunte: Que quantia terá no cofre no sétimo mês? Note que a pessoa está querendo determinar x_8. Neste exemplo, basta observar que a sequência é $x_1 = 100$, $x_2 = 150$, $x_3 = 200$, $x_4 = 250$, e assim sucessivamente até concluir que $x_8 = 450$. No entanto, essa tarefa foi fácil porque esta sequência é finita, e possui poucos termos. Imagine uma sequência infinita e temos a tarefa de determinar o termo de ordem 123456789; o que fazer? Neste caso, calcular o termo $x_{123456789}$ um por um levaria muito tempo, logo seria imprescindível existir uma fórmula (em função de n) para facilitar o nosso trabalho. Esta fórmula é conhecida como termo geral da PA.

O próximo resultado mostra que o *termo geral* de uma PA qualquer pode ser obtido a partir da razão r e o primeiro termo da PA.

Teorema 1.1. *Dada uma PA com primeiro termo x_1 e razão r, o termo geral, ou n-ésimo termo é dado pela expressão*

$$x_n = x_1 + (n-1)r, \ \textit{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Faremos a demonstração aplicando o Princípio de Indução Finita. Se $n = 1$ temos que

$$x_1 = x_1 + (1 - 1)r = x_1,$$

que é correto. Agora, vamos admitir, por hipótese de indução que, para algum $n \in \mathbb{N}$ seja válido que

$$x_n = x_1 + (n - 1)r. \tag{1.1}$$

Resta mostrar que o próximo termo x_{n+1} é dado por $x_{n+1} = x_1 + nr$. Com efeito, pela Definição 1.2 temos que $x_{n+1} = x_n + r$, assim, usando (1.1) (hipótese de indução) segue que

$$x_{n+1} = x_n + r = x_1 + (n - 1)r + r = x_1 + nr.$$

Logo, concluímos que $x_n = x_1 + (n - 1)r$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. □

Voltando ao Exemplo 1.4, pela Definição 1.2, a diferença entre cada termo e o termo anterior é a razão da PA, logo $r = 150 - 100 = 50$, o primeiro termo da sequência, o termo x_1 é 100, que é a quantia depositada inicialmente, portanto, cada termo da PA é dado pela expressão $x_n = 100 + (n - 1)50$.

Acerca da razão r de uma PA qualquer podemos verificar que:

- se $r = 0$, então a PA é constante,
- se $r \neq 0$, então a PA é crescente se $r > 0$ ou decrescente se $r < 0$. Isso significa que se $r > 0$ então $x_n < x_{n+1}$ para todo n, e se $r < 0$ então $x_{n+1} < x_n$ para todo n.

Além disso, afirmamos que toda PA é uma função afim, que associa cada número natural n ao valor x_n da PA, e o seu gráfico é dado por uma sequência de pontos colineares, como ilustra a Figura 1.1.

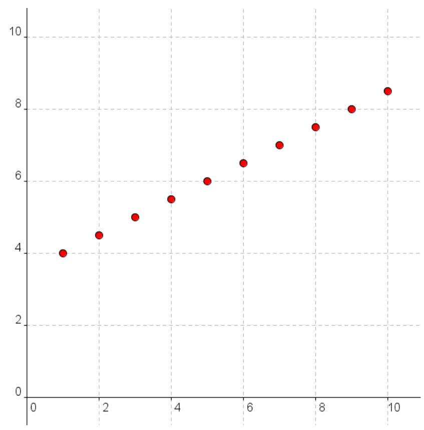

Figura 1.1: Gráfico de uma progressão aritmética crescente (Fonte: elaborado pelo autor).

Baseando-se na fórmula do *termo geral* temos o seguinte resultado que fornece a soma parcial dos n primeiros termos de uma PA.

Teorema 1.2. *Dada a PA tal que $x_n = x_1 + (n-1)r$, a soma dos seus n primeiros termos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

é dada por

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2}.$$

Demonstração. Queremos mostrar que $S_n = \frac{(x_1+x_n)n}{2}$, e o faremos usando o Princípio da Indução Finita. Note que, se $n = 1$ então $S_1 = \frac{(x_1+x_1)1}{2} = x_1$, o que é correto. Suponhamos, por hipótese de indução, que para algum $n \in \mathbb{N}$ a soma dos n primeiros termos seja dada por

$$S_n = \frac{(x_1 + x_n)n}{2}. \tag{1.2}$$

Queremos mostrar que a soma dos $n+1$ primeiros termos é

$$S_{n+1} = \frac{(x_1 + x_{n+1})(n+1)}{2}.$$

Observe que

$$S_{n+1} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}) = S_n + x_{n+1}.$$

Sabendo que $x_{n+1} = x_1 + nr$ e usando (1.2) obtemos que

$$S_{n+1} = \frac{(x_1 + x_n)n}{2} + x_1 + nr = \frac{x_1 n + x_n n + 2x_1 + 2nr}{2}.$$

Como $x_n = x_1 + (n-1)r$, segue que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{x_1 n + (x_1 + (n-1)r)n + 2x_1 + 2nr}{2} = \frac{2x_1 n + n^2 r + nr + 2x_1}{2} = \\ &= \frac{(2x_1 + nr)(n+1)}{2} = \frac{(x_1 + (x_1 + nr))(n+1)}{2} = \frac{(x_1 + x_{n+1})(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

1.3 Progressões geométricas

Como dito anteriormente, além das Progressões Aritméticas estudaremos também as Progressões Geométricas. O exemplo a seguir ilustra uma progressão geométrica.

Exemplo 1.5. *Vamor reformular o Exemplo 1.4 da seguinte maneira: Em vez de guardar dinheiro em um cofre, a pessoa decidiu abrir uma conta poupança, pois desta forma seu capital estaria vinculado à uma taxa de valorização de 1 por cento ao mês. Neste caso, em vez de guardar R\$ 50,00 por mês, resolveu fazer um depósito inicial de R\$ 600,00 e só voltar depois de 1 ano para sacar o capital investido acrescido dos juros. Essa pessoa observava no extrato de sua conta que seu dinheiro valorizava da seguinte maneira: R\$ 600,00 ao efetuar o depósito na abertura da conta, R\$ 606,00 após 1 mês, R\$ 612,06 após 2 meses, R\$ 618,18 após 3 meses, e passados 12 meses, ela voltou ao banco e sacou R\$ 676,09.*

Podemos descrever essa situação do Exemplo 1.5 como uma sequência finita, onde

$$\begin{array}{lllllll} x_1 & = & 600 & & & & \\ x_2 & = & 606 & = & 600\,(1,01)^1 & = & x_1\,(1,01)^1 \\ x_3 & = & 612,06 & = & 600\,(1,01)^2 & = & x_1\,(1,01)^2 \\ x_4 & = & 618,1806 & = & 600\,(1,01)^3 & = & x_1\,(1,01)^3 \\ \vdots & & \vdots & & & & \\ x_n & = & x_1(1,01)^{n-1}, & & n=5,\ldots,13, & & \end{array}$$

e portanto $(x_n) = (600; 606; 612,06; \ldots; 676,09)$. Note que a taxa de juros aplicada pelo banco era constante e igual 1 por cento ao mês. Daí surge o $1,01$ da expressão dessa sequência, pois $1,01 = 1+0,01$, ou seja, se uma grandeza tem taxa de variação constante igual a i, então cada parcela da sequência vale $(1+i)$ vezes o valor da parcela anterior. Esse exemplo ilustra o que chamamos de progressão geométrica.

Definição 1.3. ***Progressão Geométrica*** *(PG) é toda sequência, finita ou infinita, em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q, chamada* ***razão*** *da PG.*

Voltemos ao Exemplo 1.5. Da Definição 1.3, cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior pela razão da PG, assim $q = 606 \div 600 = 1,01$. O termo x_1 é 600 e cada termo da PG pode ser obtido pela expressão $x_n = 600(1,01)^{n-1}$.

De um modo geral, em uma PG qualquer, quando sua razão é q, e o primeiro termo é x_1, temos o seguinte resultado que afirma que o seu *termo geral* será dado por $x_n = x_1 q^{n-1}$.

Teorema 1.3. *Dada uma PG com primeiro termo x_1 e razão q, o seu termo geral, ou n-ésimo termo, é dado pela expressão*

$$x_n = x_1 q^{n-1}.$$

Demonstração. Novamente demonstramos esse teorema usando o Princípio da Indução Finita. Note que se $n = 1$ então $x_1 = x_1 q^{1-1} = x_1$, o que é correto. Suponhamos que para algum $n \in \mathbb{N}$ seja verdadeira a expressão

$$x_n = x_1 q^{n-1}. \tag{1.3}$$

Devemos mostrar que o próximo termo x_{n+1} é dado por $x_{n+1} = x_1 q^n$. Com efeito, pela Definição 1.3 temos que $x_{n+1} = x_n q$. Sendo assim, usando (1.3) (hipótese de indução) segue que

$$x_{n+1} = x_n q = x_1 q^{n-1} q = x_1 q^{n-1+1} = x_1 q^n,$$

como queríamos demonstrar. □

As progressões geométricas podem ser classificadas de cinco maneiras, conforme os valores de seu primeiro termo e razão. São elas:

- se $x_1 > 0$ e $q > 1$ ou $x_1 < 0$ e $0 < q < 1$, então a PG é crescente.
- se $x_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $x_1 < 0$ e $q > 1$, então a PG é decrescente.
- se $x_1 = 0$ ou $q = 1$, então a PG é constante.
- se $x_1 \neq 0$ e $q < 0$, então a PG é alternante.
- se $x_1 \neq 0$ e $q = 0$, então a PG é singular.

Note que uma progressão geométrica crescente ou decrescente pode ser representada graficamente pelos pontos do gráfico de uma função exponencial com domínio restrito ao conjunto dos números naturais, como ilustra a Figura 1.2.

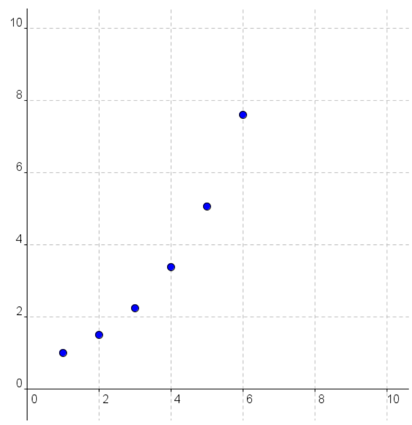

Figura 1.2: Gráfico de uma progressão geométrica crescente (Fonte: elaborado pelo autor).

Assim como demonstramos uma fórmula para calcular a soma dos primeiros termos de uma PA, deduziremos agora uma fórmula para calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG.

Teorema 1.4. *Dada uma PG tal que $x_n = x_1 q^{n-1}$, se $q \neq 1$, então a soma parcial de seus n primeiros termos*

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

é dada por

$$S_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Demonstração. Para demonstrar esse teorema usaremos também o Princípio da Indução Finita. Inicialmente vamos verificar a validade da expressão tomando $n = 1$. Observe que

$$S_1 = x_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1} = x_1 \frac{q - 1}{q - 1} = x_1.$$

Portanto, neste caso, a fórmula é válida. Admitimos agora, como hipótese de indução, que para algum $n \in \mathbb{N}$ tenhamos

$$S_n = x_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.4}$$

Queremos mostrar a validade da fórmula para a soma S_{n+1}, ou seja, queremos mostrar que

$$S_{n+1} = x_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Observe que

$$S_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + x_{n+1}, \tag{1.5}$$

porém, note que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = S_n \tag{1.6}$$

e

$$x_{n+1} = x_1 q^n, \tag{1.7}$$

assim, substituindo (1.6) e (1.7) em (1.5) concluímos que

$$S_{n+1} = S_n + x_1 q^n.$$

Usando (1.4) (hipótese de indução) segue que

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} = x_1\frac{q^n-1}{q-1} + x_1q^n &= \frac{-x_1 + x_1q^n + (q-1)x_1q^n}{q-1} = \\
&= \frac{x_1q^n(1+q-1)-x_1}{q-1} = x_1\frac{q^{n+1}-1}{q-1},
\end{aligned}
$$

conforme queríamos demonstrar. □

Diante deste teorema, fica mais fácil resolvermos o problema 79 do papiro Rhind. Primeiramente recordemos que o problema consiste em calcular quantos elementos distintos chegarão em Roma sendo que percorrem o caminho sete mulheres idosas, onde cada mulher tem sete mulas, cada mula carrega sete sacos, cada saco contém sete pães, com cada pão há sete facas e cada faca está em sete bainhas. Observemos que o problema 79 pode ser representado pela sequência $(x_n) = (7^n)$, logo é uma PG de primeiro termo $x_1 = 7$ e razão $q = 7$, sendo assim, como a tarefa é calcular a soma da quantidade de mulheres idosas, mulas, sacos, pães, facas e bainhas, ou seja, dos seis primeiros termos dessa PG, basta aplicar o Teorema 1.4, donde obtemos que a soma desejada é dada por

$$S_n = x_1\frac{q^n-1}{q-1} \Rightarrow S_6 = 7\frac{7^6-1}{7-1} = 7\frac{117648}{6} = 137256.$$

Capítulo 2

Limites de sequências

"Todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita quer indiretamente, a limites. Daí o papel central que esta noção desempenha" (veja [6]).

Neste capítulo, estudaremos a ideia de limites, bem como sua definição formal, além dos principais resultados envolvendo a ideia de sequências convergentes, ou seja, sequências que possuem limite. Os teoremas deste capítulo serão utilizados na demonstração dos principais resultados do Capítulo 3.

Cabe aqui lembrar que, a noção de limite poderia e deveria ser ensinada no ensino básico, sobretudo via estudo de sequências de números reais, o que ajudaria em muito no aprendizado dos estudantes que seguem para a área das ciências exatas.

2.1 Ideia intuitiva sobre limites

Para compreender melhor a ideia intuitiva sobre o conceito de limite de uma sequência, vejamos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.1. *(Milagre da multiplicação dos pães) Uma pessoa decide comer um pão inteiro sozinha, porém quando vai dar a primeira mordida observa outra pessoa, de aparência pobre e faminta, e resolve, por caridade, dar metade à esta pessoa. Feito isto, resta-lhe meio pão, e novamente quando se prepara para comer avista outra pessoa, nas mesmas condições, e decide dar metade do que tem, ficando com apenas* $\frac{1}{4}$ *do que tinha inicialmente. Pela terceira vez, ao tentar comer se depara com a mesma situação, e é claro que ele dá metade do seu pedaço de pão outra vez e fica com* $\frac{1}{8}$ *do pão. E assim, ao perceberem o que ocorria, uma infinidade de pessoas formaram uma fila em sua frente, e cada uma ganhava metade do pedaço que lhe sobrava, e no fim, infinitas pessoas comeram, e ainda sobrou um pedaço, que certamente ainda poderia ser dividido para mais gente.*

Este exemplo é o famoso *Paradoxo de Zenão*, e a princípio, parece até contundente pelo fato de que o pão seria dividido infinitas vezes, e com certeza deveria sobrar um pedaço, caso contrário, se após infinitas divisões o pão acabasse, então o infinito seria finito, o que é contraditório.

Analisemos este exemplo como a sequência numérica dada por

$$(x_n) = \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right),$$

onde n representa o número de pessoas e x_n a parte do pão em função do tamanho inicial que sobra após a divisão. Observe que (x_n) ilustra exatamente isso. Antes de dividir o pão, ele seria comido por uma única pessoa, logo havia $x_1 = 1$ pão inteiro. Chegando mais uma pessoa para dividir, tínhamos 2 pessoas, portanto $x_2 = \frac{1}{2}$ pão, e assim por diante. Note que

$$(x_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right),$$

assim, conforme o número de pessoas aumenta o pedaço de pão diminui, aproximando-se de 0 tanto quanto se queira, bastando tomar n suficientemente grande. Em outras palavras, dizemos que se $n \to \infty$ então $x_n \to 0$. Essa intuição, de se aproximar tanto quanto se queira, é o fundamento do conceito de limite, que será formalmente definido na Seção 2.2.

Finalizamos esta seção apresentando as definições de sequência limitada, monótona e subsequências.

Definição 2.1. *Dada uma sequência (x_n), se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é* ***limitada superiormente****. Analogamente, se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é* ***limitada inferiormente****. Quando a sequência for limitada superior e inferiormente, então simplesmente dizemos que ela é* ***limitada****.*

Observação 2.1. *Se uma sequência (x_n) é limitada, pela Definição 2.1 existem $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $c = \max\{|a|, |b|\}$, claramente $c > 0$, e concluímos que (x_n) é limitada se $|x_n| \leq c$.*

Definição 2.2. *Dizemos que uma sequência é* ***crescente*** *quando para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $x_n < x_{n+1}$. Se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que a sequência é* ***não-decrescente****. Analogamente, uma sequência é* ***decrescente*** *quando $x_n > x_{n+1}$ e* ***não-crescente*** *se $x_n \geq x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Chamam-se* ***monótonas*** *as sequências crescentes, não-decrescentes, decrescentes e não-crescentes.*

Definição 2.3. *Dada uma sequência $x = (x_n)$, chama-se **subsequência** de (x_n) a restrição da função x a um subconjunto infinito e ordenado $\{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$ de $\mathbb{N}$, com $n_i < n_{i+1}$, e escreveremos $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Note que, se a sequência x for limitada, todas as suas subsequências também serão.*

2.2 Limites

Como vimos na seção anterior, a ideia intuitiva do limite de uma sequência (x_n) é poder aproximar os termos da sequência o tanto quanto se queira de um número real a, bastando para isso tomar n suficientemente grande. No caso do Exemplo 2.1, conforme n aumentava, a sequência se aproximava cada vez mais de 0. Suponhamos uma sequência qualquer cujo limite é a, isto siginifica que para n suficientemente grande, a diferença entre a e x_n é pequena, e ficará cada vez menor à medida em que n se torna cada vez maior.

Definição 2.4. *Dado $a \in \mathbb{R}$, chama-se ε-**vizinhança** de a qualquer intervalo aberto da forma $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$.*

Observação 2.2. *Lembramos que dizer que $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ou seja, que x pertence à ε-vizinhança de a, é equivalente a dizer que $|x - a| < \varepsilon$, ou $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$, ou ainda $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.*

Veremos agora a definição de limite de uma sequência.

Definição 2.5. *Diz-se que o número real a é o **limite** da sequência (x_n) de números reais, e escreve-se $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, ou simplesmente $a = \lim x_n$, se para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, x_n pertence à ε-vizinhança de a, isto é, $|x - a| < \varepsilon$.*

Intuitivamente, o significado da Definição 2.5 é o seguinte: dizer que o número real a é o limite da sequência (x_n) significa que, para valores suficientemente grandes de n, os termos x_n da sequência tornam-se e se mantêm cada vez mais próximos do valor a, ou seja, podemos tornar a distância entre x_n e a (isto é, $|x_n - a|$) tão pequena quanto desejarmos, bastando para isso tomar n suficientemente grande. Em outras palavras, podemos tornar $|x_n - a|$ menor do que qualquer número real positivo ε, bastando para isso tomar n suficientemente grande, ou seja, n maior que um certo n_0 onde este n_0 é obtido a partir do valor de ε dado inicialmente (isto é, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ depende de ε). Note que, na Definição 2.5, ε representa qualquer número real positivo suficientemente pequeno.

São ditas **convergente**s as sequências que possuem limite e **divergentes** as que não possuem.

Teorema 2.1. *O limite de uma sequência, quando existe, é único, isto é, se* $\lim x_n = a$ *e* $\lim x_n = b$ *então* $a = b$.

Demonstração. Queremos mostrar que $a = b$, para isso vamos supor que $a \neq b$ e concluir que essa suposição é absurda. Pois bem, se $a \neq b$, sem perda de generalidade, suponhamos $a < b$, assim, tomemos $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. É fácil ver que os intervalos $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ são disjuntos, pois $a + \varepsilon = b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$. Sendo assim, como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $|x_n - a| < \varepsilon$, ou seja,

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon = b - \varepsilon. \tag{2.1}$$

Do mesmo modo, se $\lim x_n = b$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_1$, $| x_n - b |< \varepsilon$, ou seja

$$b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Tome $n^* = \max\{n_0, n_1\}$. Então, de (2.1) temos que $x_n < b - \varepsilon$ para $n > n^*$ e de (2.2) temos que $b - \varepsilon < x_n$ para $n > n^*$, o que é absurdo. Portanto, concluímos que se $\lim x_n = a$ e $\lim x_n = b$ então $a = b$, isto é, o limite é único. □

Teorema 2.2. *Se* $\lim x_n = a$ *então toda subsequência de* (x_n) *converge para* a.

Demonstração. Seja $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de (x_n). Como $\lim x_n = a$, sabemos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $|x_n - a| < \varepsilon$. É fácil ver que, como os n_i formam um subconjunto infinito, existe algum $n_{i_0} > n_0$, logo, para todos os $n_i > n_{i_0}$ teremos que $n_i > n_0$, e assim, $|x_{n_i} - a| < \varepsilon$, logo $\lim x_{n_i} = a$. □

O próximo teorema será usado para demonstrar a Proposição 3.2 da Subseção 3.2.3 do Capítulo 3.

Teorema 2.3. *Seja* (x_n) *uma sequência tal que as subsequências* (x_{2n}) *e* (x_{2n-1}) *satisfaçam que* $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = a$. *Então* $\lim x_n = a$.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim x_{2n} = \lim x_{2n-1} = a$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$n > n_1 \text{ e } n \text{ par} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon,$$
$$n > n_2 \text{ e } n \text{ ímpar} \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon.$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos que $n > n_0 \Rightarrow n > n_1$ e $n > n_2$. Assim, quer n seja par quer seja ímpar, segue que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$. Portanto, concluímos que $\lim x_n = a$. □

Pelo teorema anterior, para mostrar que uma dada sequência (x_n) converge, basta mostrar que as subsequências dos termos pares e dos termos ímpares, (x_{2n}) e (x_{2n-1}), convergem.

Teorema 2.4. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\lim x_n = a$. Sendo assim, tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $|x - a| < 1$, ou seja, $a-1 < x_n < a+1$. Considere o conjunto finito $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}, a-1, a+1\}$. É fácil ver que se c e d são, respectivamente, o menor e o maior elemento de A, então para qualquer n teremos $c \leq x_n \leq d$, logo (x_n) é limitada. □

No próximo teorema usaremos as noções de ínfimo e supremo de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que X é *limitado superiormente* se existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, o número b é uma *cota superior* de X. Analogamente, se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$, dizemos que o subconjunto X é *limitado inferiormente* e, neste caso, o número a é uma *cota inferior* de X.

Definição 2.6. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente. Diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é o* ***supremo*** *de X e escreve-se $b = \sup X$ quando b é a menor das cotas superiores de X, isto é, se $x \leq b$ para todo $x \in X$ e, se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$. Analogamente, dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é o* ***ínfimo*** *de X e escrevemos $a = \inf X$ quando a é a maior das cotas inferiores de X, isto é, $a \leq x$ para todo $x \in X$ e, se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $c \leq x$ para todo $x \in X$, então $c \leq a$.*

Observação 2.3. *Segue da definição anterior que se $b = \sup X$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $b - \varepsilon < x$. Analogamente, se $a = \inf X$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x < a + \varepsilon$.*

Teorema 2.5. *Toda sequência monótona limitada converge.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência monótona limitada, e sem perda de generalidade, suponhamos que seja crescente, assim $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como (x_n) é limitada, em particular é limitada superiormente, consideremos então $b = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Assim, $x_n \leq b$ para qualquer n, e dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b - \varepsilon < x_{n_0}$. Observemos que como $x_n < x_{n+1}$, então para todo $n > n_0$ temos que $x_{n_0} < x_n$, logo

$$b - \varepsilon < x_{n_0} < x_n,$$

e como $x_n \leq b$, segue que

$$b - \varepsilon < x_{n_0} < x_n \leq b < b + \varepsilon \Rightarrow b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon,$$

e assim $|x_n - b| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$, portanto (x_n) converge. A demonstração para os casos de sequências não-decrescentes segue o mesmo raciocínio. No caso de sequências não-crescentes e decrescentes, a única diferença é que devemos considerar $a = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e prosseguir de modo análogo. $\square$

Teorema 2.6 (Bolzano-Weierstrass). *Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência limitada e P o conjunto $P = \{p \in \mathbb{N} : x_p > x_n, \text{ para todo } n > p\}$. Acerca de P, temos duas possibilidades: P é finito ou infinito. Se P é finito, então existe $p_1 \in \mathbb{N}\backslash P$ que é cota superior de P. Observemos que, como $p_1 \notin P$, deve existir $p_2 > p_1$ tal que $x_{p_1} \leq x_{p_2}$. Novamente, como $p_2 \notin P$, deve existir $p_3 > p_2$ tal que $x_{p_2} \leq x_{p_3}$. Prosseguindo, obtemos uma subsequência não-decrescente de (x_n). Se P é infinito, então $P = \{p_1 < p_2 < p_3 < \cdots\}$, logo $x_{p_1} > x_{p_2} > x_{p_3} > \cdots$, portanto (x_{p_i}), onde $i \in \mathbb{N}$, é uma subsequência decrescente de (x_n). Assim, em ambos os casos, obtemos uma subsequência monótona de (x_n), a qual é limitada pois (x_n) é limitada. Portanto segue do Teorema 2.5 que a subsequência converge, concluindo a demonstração. $\square$

2.3 Sequências de Cauchy

Definição 2.7. *(Sequências de Cauchy) Uma sequência (x_n) é dita de* ***Cauchy*** *se, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica que $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Uma sequência (x_n) é de Cauchy se seus termos se aproximam arbitrariamente uns dos outros à medida que o índice n cresce.

Teorema 2.7. *Uma sequência de números reais é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que, dada uma sequência (x_n) convergente, ela é de Cauchy. Com efeito, se (x_n) converge, consideremos $\lim x_n = a$, então, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Note que,

$$|x_n - x_m| = |x_n - x_m + a - a| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m|,$$

assim, para $n, m > n_0$, temos que

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| = |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

logo, pela Definição 2.7, concluimos que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

Agora, mostraremos que toda sequência de Cauchy converge. Para isso, primeiramente iremos mostrar que (x_n) é limitada. Sendo (x_n) uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $n, m \geq n_0$, tem-se que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Em particular, tomando $\varepsilon = 1$, para $n \geq n_0$, temos $|x_n - x_{n_0}| < 1$, logo $x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$ para todo $n \geq n_0$. Tomando $c = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$ e $d = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0} - 1, x_{n_0} + 1\}$, claramente $c \leq x_n \leq d$ para todo $n \in \mathbb{N}$, portanto (x_n) é limitada. Segue pelo Teorema 2.6 que (x_n) possui uma subsequência $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ convergente. Seja $\lim x_{n_i} = a$. Concluímos a demonstração mostrando que $\lim x_n = a$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como (x_n) é de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para quaisquer $n, m \geq n_0$, tem-se $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $\lim x_{n_i} = a$, existe um índice $n_1 > n_0$ tal que$|x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Observemos que

$$|x_n - a| = |x_n - a + x_{n_1} - x_{n_1}| = |(x_n - x_{n_1}) + (x_{n_1} - a)| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a|.$$

Assim, para todo $n \geq n_0$, temos que

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_1}| + |x_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ou seja, $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, logo (x_n) converge para a, concluindo a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Os números reais como limites de sequências

Nos dois capítulos anteriores, estudamos o conceito de sequências de números reais, em particular, as progressões aritméticas e geométricas, e o conceito de limite de uma sequência. Neste capítulo, recordamos o fato de que todo número real pode ser obtido como limite de uma sequência de Cauchy de números racionais e apresentamos as famosas constantes matemáticas e, π e ϕ como limite de certas sequências de Cauchy de racionais. Apresentamos também os números da forma $\sqrt{a}$, com a um número real positivo, como limite de certas sequências de racionais.

3.1 A insuficiência de $\mathbb{Q}$: segmentos comensuráveis e incomensuráveis

Durante muito tempo, diversos matemáticos em suas respectivas épocas acreditavam na existência apenas dos números inteiros e suas razões, ou seja, os números racionais. Pensava-se que quaisquer dois segmentos eram sempre comensuráveis, isto é, para quaisquer duas medidas não nulas a e b, existiria uma terceira medida c, menor que ambas, e dois números inteiros m e n de modo que poderíamos expressar a e b como múltiplos inteiros de c, ou seja, $a = mc$ e $b = nc$. Como a e b não são nulos, podemos estabelecer a razão de a por b, e assim teremos que

$$\frac{a}{b} = \frac{mc}{nc} = \frac{m}{n}.$$

Podemos assumir que a razão $\frac{m}{n}$ é, sem perda de generalidade, irredutível, isto é, m e n são primos entre si.

Os próprios pitagóricos[1] defendiam que dois segmentos quaisquer eram sempre comensuráveis. A ideia da comensurabilidade durou até que um dos discípulos de Pitágoras notou que o lado e a diagonal de um quadrado não eram comensuráveis. Analisemos a seguinte situação: considere um quadrado cujo lado mede 1. Então, pelo Teorema de Pitágoras, a diagonal d do quadrado satisfaz a relação $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, e admitindo que dois segmentos são sempre comensuráveis, então, em particular, a diagonal e o lado do quadrado também são, logo, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\frac{d}{1} = \frac{m}{n}.$$

Elevando os termos ao quadrado obtemos

$$d^2 = \frac{m^2}{n^2}.$$

Como $d^2 = 2$, segue que $2 = \frac{m^2}{n^2}$, implicando que $m^2 = 2n^2$, e portanto m^2 é par, e como consequência m também é. Ora, se m é par, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $m = 2k$, e assim $(2k)^2 = 2n^2$, portanto $4k^2 = 2n^2$ donde $2k = n^2$, logo n^2 é par, e assim n também é, o que é um absurdo, pois m e n são coprimos. Tal absurdo indica que d e 1 são incomensuráveis, portanto $d = \sqrt{2}$ não é racional. Com isso, constatou-se que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais não é completo, pois existem números como o $\sqrt{2}$ que não pertencem a esse conjunto. Para compreender melhor essa ideia da incompletude do conjunto dos números racionais, perceba que não é possível estabelecer uma relação biunívoca entre os elementos do conjunto e a reta numérica, isto é, ao dispôr todos os números racionais sobre a reta numérica ainda sobram infinitos espaços a serem preenchidos, neste caso, ficou clara a necessidade de se estender o conceito de número para além dos já conhecidos números racionais. Isso deu origem a criação de um novo conjunto, maior do que $\mathbb{Q}$, e que de fato continha todos os números necessários para preencher a reta. Tal conjunto é o que conhecemos hoje pelo conjunto $\mathbb{R}$ dos Números Reais.

Dentre algumas maneiras mais modernas de se construir algebricamente o conjunto dos números reais, está a construção através das sequências de Cauchy, que iremos abordar agora muito brevemente.

Antes de começar, porém, é preciso atentar-se que, como o objetivo era fornecer um modo algébrico formal de se construir o conjunto dos números reais, devemos ressignificar o que é uma sequência. Neste caso, diremos que uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, em que a cada número natural n é associado um *número racional* $a_n = a(n)$, é dita uma *sequência de*

[1] Pitágoras fundou a chamada Escola Pitagórica, onde seus integrantes formavam uma sociedade secreta com vastos conhecimentos científicos, filosóficos, políticos e morais.

números racionais.

Cauchy acreditava que todo número real poderia ser obtido como o limite de uma sequência convergente de números racionais, ou seja, como o limite de uma sequência (a_n) satisfazendo a propriedade de que para qualquer $\varepsilon > 0$, por menor que seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m \geq n_0$, tem-se que $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Cantor por sua vez, era mais cauteloso, pois admitir isso era pressupor a existência desse número real (veja [8]). Com o desenvolvimento dos seus estudos, Cantor percebeu que ocorria de sequências diferentes convergirem para o mesmo número real, foi então que ele decidiu estabelecer uma relação de equivalência entre tais sequências, isto é, se uma sequência (a_n) converge para d, e uma outra sequência (b_n) também converge para d, então $(a_n) \sim (b_n)$, ou seja, são equivalentes. A partir daí, Cantor demonstrou que o conjunto dessas classes de equivalência de sequências de Cauchy possuía estrutura algébrica de corpo ordenado, e além disso, todo subconjunto não-vazio e limitado possuia supremo e ínfimo, constituindo um corpo ordenado completo. Cantor ainda observou que tal conjunto e uma reta se correspondem biunivocamente. A construção algébrica, bem como suas demonstrações, não será feita neste trabalho, mas pode ser encontrada em [1], [10] seção 5.2.4 e [8] seção 3.2.

Fizemos esta breve introdução para reforçar o fato de que todo número real pode ser obtido como o limite de uma sequência de Cauchy de números racionais.

Como sabemos, os números que completam o conjunto dos reais a partir dos racionais são ditos *irracionais,* e dentre eles alguns se destacam pela sua importância, aplicações e certas peculiaridades. A partir de agora, estudaremos alguns desses números famosos e veremos como eles podem ser obtidos como o limite de certas sequências de Cauchy de racionais.

3.2 Os números e, π e ϕ como limites de sequências

3.2.1 O número e

O número e, ou número de Euler, ou ainda número neperiano, é um dos irracionais mais importantes da Matemática. Sua origem é incerta, embora acredita-se que ele já era conhecido até meio século antes do surgimento do Cálculo Infinitesimal (veja [9]). Um trabalho de John Napier, publicado em 1618, já trazia o e no estudo de logaritmos. Não por acaso, a base dos logaritmos naturais é o próprio e. A principal teoria acerca dessa constante é que ela tenha surgido como resposta a um problema de juros, que discutiremos no seguinte exemplo.

Exemplo 3.1. *Uma pessoa, com certo capital parado, decide cobrar juros de 100 por cento ao ano para emprestar seu dinheiro e obter um altíssimo e invejável rendimento. Embora não tenha sido fácil encontrar quem se sujeitasse a pagar juros tão abusivos, ela conseguiu emprestar R$ 1000,00. Decorrido exatamente um ano, o contratante veio a devolver R$ 2000,00, isto é, os R$ 1000,00 que tomou emprestado acrescido de R$ 1000,00 de juros. Contudo, não foi possível quitar a dívida, pois a pessoa recusou-se a receber os R$ 2000,00 alegando que a dívida era R$ 2718,28. Após muita discussão, o contratante foi convencido e pagou R$ 2718,28, quitando o empréstimo.*

Por um instante poderíamos pensar que isso é loucura, aliás, como um juros de 100 por cento ao ano sobre um capital de R$ 1000,00 poderia resultar em R$ 2718,28? O argumento utilizado pelo credor para convencer o contratante é de que foram cobrados juros com capitalizações instantâneas, de acordo com a fórmula:

$$D = C\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

onde D é a dívida, C é o capital inicial, isto é, R$ 1000,00 e n o número de capitalizações.

Para ficar mais claro, observemos o seguinte. Suponha que haviam passados três meses do empréstimo, isto indica que, como os juros simples de 100 por cento sobre R$ 1000,00 durante um ano totaliza R$ 1000,00, então o proporcional a três meses seria R$ 250,00, entretanto, a dívida não foi paga com três meses, logo o contratante ficaria também com essa quantia por nove meses ainda, portanto era justo cobrar juros proporcionais também sobre esses R$ 250,00 durante os nove meses restantes.

Note que, neste caso, quando fizemos um proporcional a três meses, dividimos um ano em quatro partes iguais. E se dividíssemos em 365 dias, ou seja, 365 partes iguais? Ou até mesmo 8760 horas? Quiçá em 525600 minutos? Ou ainda, em 31536000 segundos? Afinal, a cada segundo o dinheiro estará rendendo progressivamente. A Tabela 3.1 ilustra o que acontece com a dívida ao final de um ano, com juros cobrados instantaneamente.

Número de capitalizações	Valor da dívida
4	R$ 2441,40
365	R$ 2714,56
8760	R$ 2718,12
525600	R$ 2718,27
31536000	R$ 2718,28

Tabela 3.1: Relação entre o valor da dívida conforme o número de capitalizações.

Podemos verificar que, caso façamos a capitalização com um número maior do que 31536000 o resultado será R\$ 2718,28, pois aparentemente a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ parece estar convergindo aproximadamente para 2,71828 quando n tende ao infinito. De fato, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge para o número e cujo um valor aproximado com cinco casas decimais é 2,71828. Essa é a maneira usual de se apresentar o número e, ou seja, costuma-se apresentar esse número como sendo o número real cujos valores aproximados são os números racionais da forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Contudo, antes de demonstrar este resultado, recordemos do Binômio de Newton o qual afirma que se a e b são números reais e n é um número natural, então

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k a^{n-k} = \\ &= \binom{n}{0} b^0 a^n + \binom{n}{1} b^1 a^{n-1} + \binom{n}{2} b^2 a^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} b^n a^0\end{aligned}$$

onde $\binom{n}{k}$ é a combinação linear de n e k dada por

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

A demonstração da fórmula do Binômio de Newton pode ser encontrada em [12].

Proposição 3.1. *A sequência (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge.*

Demonstração. Pelo Binômio de Newton segue que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k},$$

ou seja,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Desenvolvendo o binômio obtemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{n!}\frac{1}{n^n},$$

que pode ser reescrito como

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{2!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)}{4!}+\cdots+$$
$$+\cdots+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)}{n!}.$$

Pela igualdade anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$, a expressão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é uma soma de parcelas positivas. Além disso, o número de parcelas cresce com n. Portanto, a sequência (x_n) é crescente. Observe ainda que as expressões $\left(1-\frac{1}{n}\right), \left(1-\frac{2}{n}\right), \left(1-\frac{3}{n}\right), \ldots, \left(1-\frac{n-1}{n}\right)$ são estritamente menores do que 1, para todo $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, temos que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!} = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

Por sua vez, usando o Princípio da Indução Finita, não é difícil mostrar que $2^{n-1} \leq n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, implicando $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, e daí, segue que

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}. \tag{3.1}$$

Note que a soma $S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$ representa a soma dos $n-1$ primeiros termos da progressão geométrica $\left(\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right)$. Pelo Teorema 1.4, temos que

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^{n-1}}-1}{\frac{1}{2}-1}.$$

Agora, observe que

$$S_n = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2^{n-1}}-1}{\frac{1}{2}-1} = 1-\frac{1}{2^{n-1}} < 1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, a partir da relação (3.1), obtemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 2+1 = 3.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como a sequência (x_n) é crescente, ela é limitada inferiormente pelo seu primeiro termo, ou seja, por $x_1 = 2$. Assim,

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 3,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluímos então que (x_n) é limitada. Logo, como (x_n) é monótona e limitada, segue pelo Teorema 2.5 que (x_n) converge, concluindo a demonstração. $\square$

Como vimos na proposição anterior, a sequência (x_n) converge. Seja então $l = \lim x_n$. Usando a função exponencial natural $\exp(x)$ e a sua inversa, a função logarítmica natural $\ln(x)$, podemos mostrar que $l = e$. Observe que

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

onde $x \in \mathbb{R}$. Mas,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x\to\infty}\exp\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]\\ &= \exp\left[\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right].\end{aligned}$$

Assim, chamando $y = \frac{1}{x}$, obtemos que

$$l = \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\right]. \tag{3.2}$$

Denotando por $g(x) = \ln x$, temos que $g(1) = 0$ e $g'(x) = \frac{1}{x}$, logo $g'(1) = 1$. Assim,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{g(1+y)-0}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{g(1+y)-g(1)}{y} = g'(1) = 1,$$

e por (3.2) segue que

$$l = \exp\left[\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\right] = \exp 1 = e.$$

Definição 3.1. *Seja (x_n) a sequência de números reais cujo termo geral é dado por $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$e = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Pode-se mostrar que $e = 2,7182818284\ldots$

3.2.2 O número π

O número π, ou constante circular, assim como o e, é irracional e de suma importância às ciências, em geral. Sabe-se que cerca de 2000 a.C, o número π já era conhecido, porém, com uma aproximação bem grosseira. A teoria mais aceita é que tal número tenha surgido da percepção da existência de proporções, sobretudo acerca da roda, ou círculo, onde constataram que tanto em rodas grandes como em pequenas, a razão do comprimento pelo diâmetro se mantinha constante (veja [3]).

A busca pelo valor exato de π foi objeto de trabalho de vários matemáticos durante séculos, de modo que hoje existem diversas possibilidades para tal cálculo.

Nesta seção apresentaremos o número π como o limite de duas sequências, uma de números racionais e uma outra de números reais. Esta última é motivada pela ideia de aproximar a área de um círculo de raio 1 por áreas de polígonos regulares com um número cada vez maior de lados inscritos neste círculo.

Primeiramente, a fim de obter uma sequência de números racionais que converge para π, consideraremos a expansão em série de Maclaurin da função arco tangente:

$$\text{arctg } x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{3.3}$$

Veja por exemplo o Capítulo X de [6]. A igualdade (3.3) vale para todo $x \in [-1, 1]$. Em particular, tomando $x = 1$ em (3.3), obtemos a seguinte igualdade conhecida como *fórmula de Leibniz*

$$\frac{\pi}{4} = \text{arctg } 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1},$$

ou, equivalentemente,

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{2k+1}. \tag{3.4}$$

Da teoria sobre séries de números reais, a igualdade (3.4) siginifica que a sequência (S_n) das somas parciais da série em (3.4), ou seja, a sequência (S_n) cujo termo geral é dado por

$$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

tem limite igual a π. Portanto, obtemos a seguinte sequência

$$(S_n) = \left(4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)\right) = \left(4, \frac{8}{3}, \frac{52}{15}, \frac{304}{105}, \ldots\right)$$

de números racionais convergindo para π.

Veremos agora que π é o limite da sequência (x_n) cujo termo geral é dado por

$$x_n = \frac{n}{2} \text{ sen}\left(\frac{360^{\text{o}}}{n}\right).$$

A ideia geométrica da afirmação anterior é relativamente simples, e consiste no fato de que a área de um círculo unitário (ou seja, π) é aproximadamente igual a área de um polígono regular de n lados inscrito nesse círculo (a qual vale $\frac{n}{2}$ sen $\left(\frac{360^o}{n}\right)$). Quanto maior for o valor de n, melhor será a aproximação. Veja a Figura 3.1.

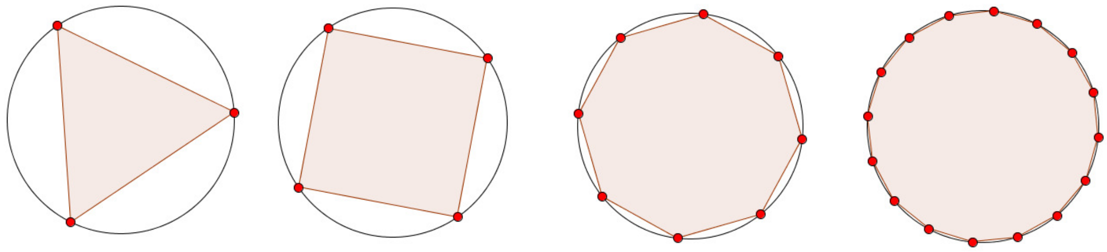

Figura 3.1: Polígonos regulares de três, quatro, oito e dezesseis lados inscritos em um círculo de raio um. (Fonte: elaborada pelo autor)

Veremos agora o porquê a área de um polígono regular de n lados é $x_n = \frac{n}{2}$ sen $\left(\frac{360^o}{n}\right)$. Vamos analisar, por exemplo, o que acontece com a área de um hexágono regular inscrito em um círculo de raio 1. Observe na Figura 3.2 que o hexágono inscrito no círculo pode ser dividido em 6 triângulos isósceles, todos congruentes, formados pelo centro do círculo e dois vértices consecutivos do hexágono. O triângulo AOB é um desses triângulos.

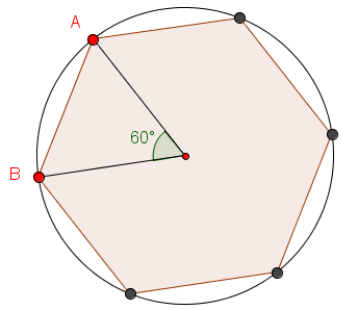

Figura 3.2: Hexágono regular inscrito em um círculo e um triângulo isósceles AOB. (Fonte: elaborada pelo autor)

É conhecido que se um triângulo tem dois lados de medidas a e b e o ângulo compreendido entre eles mede θ, a área desse triângulo é dada por

$$A_{\triangle} = \frac{a\ b \text{ sen } \theta}{2}.$$

Veja por exemplo o Corolário 6.28 da página 272 de [14]. Sendo assim, facilmente conseguimos calcular a área do triângulo AOB. Note que conhecemos as medidas de dois lados do triângulo, $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$, pois são exatamente o raio do círculo, e o ângulo $A\hat{O}B$

mede 60º graus. Para ver isto, basta dividir 360º (ângulo central) por 6 (número de lados do polígono). Portanto, a área do triângulo AOB é

$$A_{\triangle_{AOB}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \operatorname{sen}(60^o)}{2} = \frac{\operatorname{sen}(60^o)}{2}.$$

Note que, como dito anteriormente, o hexágono foi dividido em 6 triângulos congruentes, logo para se calcular sua área basta multiplicar a área do triângulo AOB encontrada acima por 6. Assim, representando a área do hexágono inscrito no círculo unitário por x_6, temos que

$$x_6 = 6A_{\triangle_{AOB}} = \frac{6}{2}\operatorname{sen}(60^o) = \frac{6}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{6}\right).$$

Analogamente, caso o polígono inscrito fosse um octógono regular, a área x_8 do octógono seria encontrada resolvendo

$$x_8 = \frac{8}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{8}\right),$$

onde $\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{8}\right)}{2}$ é a área de cada triângulo isósceles formado pelo centro do círculo e dois vértices consecutivos do octógono, e como agora são 8 triângulos congruentes, multiplicamos por 8 a área encontrada. Do mesmo modo, a área de um icoságono (polígono regular de 20 lados) inscrito nessa circunferência de raio 1, é dada por

$$x_{20} = \frac{20}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{20}\right).$$

Provavelmente, a área do icoságono já deverá se aproximar bastante da área do círculo, porém, para melhor aproximação, devemos tomar polígonos regulares com um número cada vez maior de lados, e seguindo o mesmo raciocício para calcular x_6, x_8 e x_{20}, podemos deduzir que, a área de um polígono regular de n lados inscrito nesse círculo, é dada por

$$x_n = \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{n}\right),$$

onde n indica o número de lados do polígono, e consequentemente, o número de triângulos isósceles obtidos pelo centro do círculo e dois vértices consecutivos do polígono. Então temos que a sequência (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, representa o valor da área de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo unitário. A Tabela 3.2 fornece valores aproximados das áreas de polígonos regulares de n lados à medida que n cresce.

Número de lados	Área do polígono
3	1,299038106
10	2,938926261
100	3,139525976
1000	3,141571983
10000	3,141592447
100000	3,141592652
1000000	3,141592654

Tabela 3.2: Relação entre a área do polígono regular inscrito no círculo unitário conforme o número de lados.

Portanto, concluímos que a sequência (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{n}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, é tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{360^o}{n}\right) = \pi$$

e $\pi = 3,141592654\ldots$

Observação 3.1. *De maneira análoga, é possível deduzir também uma fórmula para o perímetro de um polígono regular de n lados inscrito em círculo de raio 1, a qual é dada por*

$$p_n = 2n\operatorname{sen}\left(\frac{180^o}{n}\right).$$

Esse valor p_n fornece um valor aproximado do perímetro do círculo de raio 1 (ou seja, 2π). Claramente, quanto maior for o número de lados do polígono, ou seja, quanto maior for o valor de n, melhor será a aproximação. Veja novamente a Figura 3.1. Portanto, obtemos uma outra sequência (y_n) de números reais cujo termo geral é dado por $y_n = n\operatorname{sen}\left(\frac{180^o}{n}\right)$, para $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 3$, satisfazendo que

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} n\operatorname{sen}\left(\frac{180^o}{n}\right) = \pi.$$

3.2.3 O número ϕ de ouro

O número de ouro, ou número divino, é outro irracional importante e objeto de estudo durante vários séculos. A sua nomenclatura "divina" não foi em vão, pois o que regia os padrões de beleza da época era o número de ouro, ou proporção áurea. Dizia-se que algo era agradável de se ver quando estava em proporção áurea.

Diversos elementos presentes na natureza, arquitetura, música, entre outros, estão em proporção divina. Podemos citar caracóis, folhas de plantas, instrumentos musicais como o violino, o Partenon, as pirâmides do Egito, partes do corpo humano e, mais recentemente, até a criação do logotipo da Apple, como mostra a Figura 3.3.

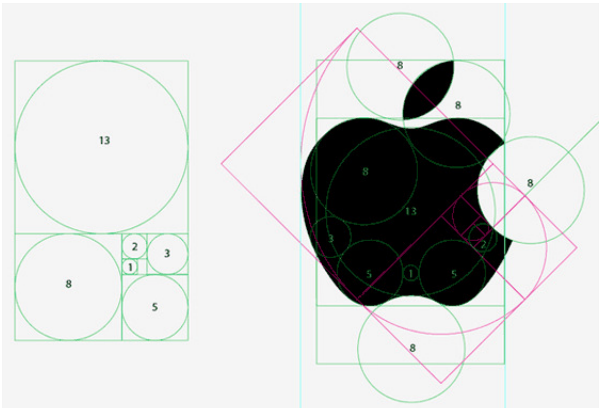

Figura 3.3: Aplicação da razão áurea no logotipo da Apple (Fonte: http://sereisumasocarne.blogspot.com.br/2012/04/razao-aurea-x-funcao-de-queda.html)

Mais sobre a razão áurea e suas aplicações podem ser encontradas em [18, 7, 15].

Existem várias maneiras de se obter o número de ouro. Nesta seção, o definiremos como sendo o limite de uma sequência de números racionais que apresentaremos a seguir. Antes, porém, será necessário conhecer a famosa sequência de Fibonacci.

Leonardo de Pisa, um matemático italiano, ficou conhecido como Fibonacci por ser o filho do Bonacio. Em 1202, Fibonacci escreveu um livro intitulado *"Liber Abaci"*, ou Livro do Ábaco, ou ainda Livro do Cálculo. Este livro, além de abranger praticamente todos os conhecimentos de Álgebra e Aritmética da época, é composto também por diversos problemas, sendo que um deles, o mais famoso e curioso, é o que aparece nas páginas 123 e 124 da edição de 1228, veja por exemplo [17].

O problema consiste em responder quantos casais de coelhos nascem durante um ano a partir de um casal de coelhos jovens. Além disso, é dito que um casal de coelhos sempre gera outro casal após um mês, e casais jovens começam a se reproduzir a partir do segundo mês. Vale ressaltar que neste problema eram supostas condições ideais, ou seja, nenhum casal de coelho morreria ou se reproduziria além da conta. Com estas informações, podemos fazer o seguinte raciocínio: no primeiro mês temos um casal de coelhos jovens; no segundo mês ainda temos apenas um casal, porém, agora adulto, e que passará a se reproduzir; no terceiro mês teremos dois casais, o inicial e um casal de coelhos jovens, nascidos do casal inicial; no quarto mês teremos três casais, o inicial, o nascido no terceiro mês (que agora se tornou adulto e passará a se reproduzir no próximo mês, e mais um que o casal inicial gerou neste mês; no quinto mês dois casais se reproduzirão e um casal jovem nascido no mês anterior ficará adulto, totalizando cinco casais; e assim vamos seguindo esse raciocínio até o décimo segundo mês, ou até o infinito, se quisermos. A Figura 3.4 ilustra esse crescimento.

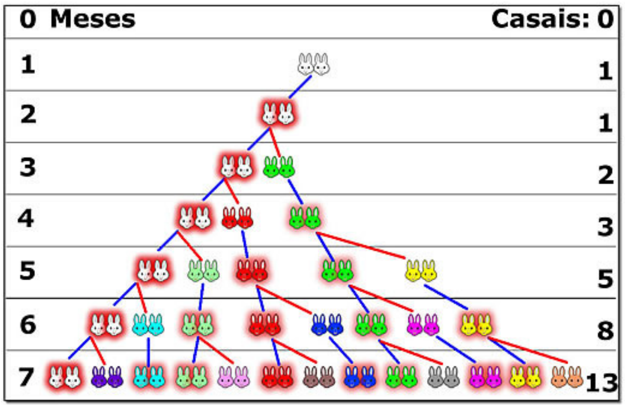

Figura 3.4: Reprodução de coelhos (Fonte: http://www.bpiropo.com.br/fpc20070108.htm)

Observe que o crescimento de casais de coelhos acontece segundo um sequência recorrente, onde à exceção dos dois primeiros meses, todos os outros podem ser obtidos somando a quantidade de coelhos dos dois meses anteriores. Assim, fixando o 1 nos dois primeiros meses, obtemos

$$\begin{array}{rc} & 1 \\ & 1 \\ 1+1 & 2 \\ 1+2 & 3 \\ 2+3 & 5 \\ 3+5 & 8 \\ 5+8 & 13 \\ 8+13 & 21 \end{array}$$

donde podemos deduzir a seguinte definição.

Definição 3.2. *Seja* (F_n) *a sequência de números inteiros definida recursivamente por* $F_1 = F_2 = 1$ *e*

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, \text{ para } n \geq 2.$$

Tal sequência é denominada ***sequência de Fibonacci****.*

A sequência de Fibonacci é repleta de propriedades algébricas interessantes (veja por exemplo [15, 17, 18]) as quais não serão abordadas neste trabalho, contudo prosseguimos com o nosso objetivo de determinar o número de ouro ϕ a partir da sequência (F_n).

É fácil ver que a sequência de Fibonacci é divergente, isto é, não se aproxima de nenhum valor real a medida que n cresce, ao contrário, os termos da sequência vão ficando cada vez maiores tendendo ao infinito. Contudo, sua beleza está no fato de estar em proporção áurea, isto é, a razão entre um termo da sequência e o seu termo anterior converge para o número de ouro. De posse desta informação, veremos agora que o número de ouro pode ser obtido como sendo o limite da sequência (x_n) tal que $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 3.2. *A sequência (x_n) cujo termo geral é dado por $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde F_{n+1} e F_n são dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, converge.*

Demonstração. Primeiramente observemos que

$$x_1 = \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} = 1,$$

e da Definição 3.2 temos que $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ para todo $n \geq 2$, logo

$$x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{F_{n-1} + F_n}{F_n} = \frac{F_n}{F_n} + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}.$$

Note ainda que $\frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}}$ e $\frac{F_n}{F_{n-1}} = x_{n-1}$, portanto

$$x_n = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{\frac{F_n}{F_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Vejamos que (x_n) é limitada. Todos os termos de (x_n) são positivos, logo $\frac{1}{x_{n-1}} > 0$, portanto segue que $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} > 1 + 0 = 1$ para todo $n \geq 2$. Como $x_1 = 1$ segue que $x_n \geq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para mostrar que (x_n) é limitada superiormente, notamos que a sequência de Fibonacci (F_n) é crescente a partir do seu segundo termo, ou seja, $F_{n-1} < F_n$ para todo $n \geq 3$, assim $\frac{F_{n-1}}{F_n} < 1$ para todo $n \geq 3$. Logo

$$x_n = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n} < 1 + 1 = 2, \text{ para todo } n \geq 3.$$

Como $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, temos que $1 \leq x_n \leq 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (x_n) é limitada.

Consideremos agora a subsequência (x_{2n}) dos termos pares de (x_n). Temos que

$$x_{2n} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} \text{ ou } x_{2n} = 1 + \frac{1}{x_{2n-1}} .$$

Claramente (x_{2n}) é limitada, pois (x_n) o é. Veremos agora que (x_{2n}) é decrescente, ou seja, $x_{2(n+1)} < x_{2n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Faremos essa demonstração usando o Princípio da

Indução Finita. Note que para $n = 1$ temos $x_{2(n+1)} = x_4 = \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} < 2 = \frac{2}{1} = \frac{F_3}{F_2} = x_{2n}$. Admitiremos agora, por hipótese de indução, que para algum $n \in \mathbb{N}$ seja válido que

$$x_{2(n+1)} < x_{2n}, \tag{3.5}$$

e mostraremos que $x_{2(n+2)} < x_{2(n+1)}$. Para verificar este resultado considere a função

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1},\ x \geq 0.$$

Temos que $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, para todo $x \geq 0$, portanto f é crescente, isto é, se $a < b$ então $f(a) < f(b)$. Sabendo disso e usando a hipótese de indução (3.5) obtemos

$$x_{2(n+1)} < x_{2n} \Rightarrow f\left(x_{2(n+1)}\right) < f(x_{2n}). \tag{3.6}$$

Agora observe que

$$\begin{aligned} f\left(x_{2(n+1)}\right) &= 2 - \frac{1}{x_{2(n+1)}+1} = \frac{2\left(x_{2(n+1)}+1\right)-1}{x_{2(n+1)}+1} = \frac{x_{2(n+1)}+1}{x_{2(n+1)}+1} + \frac{x_{2(n+1)}}{x_{2(n+1)}+1} = \\ &= 1 + \frac{x_{2(n+1)}}{x_{2(n+1)}+1} = 1 + \frac{1}{\frac{x_{2(n+1)}+1}{x_{2(n+1)}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2(n+1)}}}. \end{aligned}$$

Como $x_{2(n+1)} = 1 + \frac{1}{x_{2(n+1)-1}} = 1 + \frac{1}{x_{2n+1}}$ segue que

$$\begin{aligned} f\left(x_{2(n+1)}\right) &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2(n+1)}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n+1}}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n+2}}} = 1 + \frac{1}{x_{2n+3}} = x_{2n+4} = x_{2(n+2)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f(x_{2n}) &= 2 - \frac{1}{x_{2n}+1} = \frac{2(x_{2n}+1)-1}{x_{2n}+1} = \frac{x_{2n}+1}{x_{2n}+1} + \frac{x_{2n}}{x_{2n}+1} = \\ &= 1 + \frac{x_{2n}}{x_{2n}+1} = 1 + \frac{1}{\frac{x_{2n}+1}{x_{2n}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x_{2n}}} = \\ &= 1 + \frac{1}{x_{2n+1}} = x_{2n+2} = x_{2(n+1)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Assim, substituindo (3.7) e (3.8) em (3.6) obtemos

$$f\left(x_{2(n+1)}\right) < f(x_{2n}) \Rightarrow x_{2(n+2)} < x_{2(n+1)},$$

como queríamos demonstrar.

Como a subsequência (x_{2n}) é monótona e limitada, segue pelo Teorema 2.5 que (x_{2n}) converge. De modo inteiramente análogo podemos mostrar que a subsequência (x_{2n-1}) dos termos ímpares de (x_n) é crescente, e portanto converge. Além disso, supondo que $x_{2n} \to l_1$ e $x_{2n-1} \to l_2$, como

$$x_{2n} = \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} = 1 + \frac{1}{x_{2n-1}} \quad \text{e} \quad x_{2n-1} = \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}} = 1 + \frac{1}{x_{2n-2}},$$

segue que

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_{2n-1}}\right) \Rightarrow l_1 = 1 + \frac{1}{l_2}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_{2n-2}}\right) \Rightarrow l_2 = 1 + \frac{1}{l_1}.$$

Substituindo $l_2 = 1 + \frac{1}{l_1}$ em $l_1 = 1 + \frac{1}{l_2}$ obtemos

$$l_1 = 1 + \frac{1}{l_2} \Rightarrow l_1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{l_1}} = 1 + \frac{1}{\frac{l_1+1}{l_1}} = 1 + \frac{l_1}{l_1+1} = \frac{2l_1+1}{l_1+1}$$

donde segue que

$$l_1^2 - l_1 - 1 = 0 \Rightarrow l_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Analogamente se verifica que

$$l_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Deste modo, como $l_1 = l_2$, o Teorema 2.3 nos garante que a sequência toda (x_n) converge para o mesmo limite, como queríamos demonstrar. $\square$

Definição 3.3. *Seja (x_n) a sequência de números racionais onde $x_1 = 1$ e $x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}$, para $n \geq 2$. Definimos o número ϕ de ouro por*

$$\phi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x_{n-1}}\right),$$

onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618033989\ldots$

Observação 3.2. *Vimos na Definição 3.2 que a sequência de Fibonacci é uma sequência dada recursivamente por $F_1 = F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, para $n \geq 2$. Note que esta última condição é o mesmo que escrever*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Porém, existe uma maneira de expressar o termo geral F_n *da sequência de Fibonacci em função de* n*, o qual é dado pela expressão*

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \tag{3.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Para justificar isso devemos mostrar que o termo* F_n *dado na igualdade* (3.10) *satisfaz a relação* (3.9). *Faremos esta demonstração usando o Princípio da Indução Finita. Primeiramente, substituindo* $n = 1$ *e* $n = 2$ *em* (3.10) *é fácil ver que* $F_1 = F_2 = 1$. *Suponhamos, como hipótese de indução, que para algum* $n \in \mathbb{N}$*, o termo* F_n *dado na igualdade* (3.10) *satisfaça que* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. *Devemos mostrar que a relação* (3.9) *vale para o sucessor de* n*, ou seja, devemos mostrar que* $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$. *Note que, pela hipótese de indução, temos que*

$$F_{n+2} + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n,$$

donde por (3.10) *segue que*

$$\begin{aligned}
F_{n+2} + F_{n+1} = 2F_{n+1} + F_n &= 2\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(2+\sqrt{5}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(2-\sqrt{5}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right] = \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}}{\sqrt{5}} = F_{n+3},
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração. Com isso, o termo geral da sequência (x_n) *dada por* $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$ *é*

$$x_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

3.3 Os números $\sqrt{a}$ como limites de sequências

Nesta seção, inicialmente deduziremos uma sequência de números racionais para encontrar aproximações para $\sqrt{2}$ que, como vimos na Seção 3.1, também é um número irracional.

A seguir, de modo análogo, encontraremos uma sequência que fornece aproximações racionais para a raiz quadrada $\sqrt{a}$ de qualquer número real positivo a.

Queremos encontrar aproximações racionais para $\sqrt{2}$. Chamando $x = \sqrt{2}$, pela definição da raiz quadrada de um número, sabemos que $x^2 = xx = 2$. Note que encontrar aproximações para o valor de x a partir da igualdade $x^2 = 2$ seria uma tarefa um tanto difícil e provavelmente ficaríamos supondo valores indefinidamente sem grandes sucessos, contudo, de maneira equivalente, podemos encontrar aproximações do valor de x tal que

$$x\frac{2}{x} = 2.$$

Como uma primeira aproximação racional para o valor de x escolhemos um número racional positivo x_1 qualquer. Observe que o valor de x está entre x_1 e $\frac{2}{x_1}$. Então, para uma melhor aproximação de x convém tomarmos a média aritmética entre ambos, isto é, uma melhor aproximação de x será

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right).$$

Seguindo a mesma ideia, uma nova e melhor aproximação de x será

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{2}{x_2}\right).$$

Prosseguindo da mesma forma obtemos, por recorrência, a sequência (x_n) de números racionais tal que $x_1 > 0$ é um número racional qualquer e

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

Proposição 3.3. *A sequência (x_n) onde $x_1 > 0$ é um número racional qualquer e $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, converge.*

Demonstração. Observe que, pela desigualdade das médias, temos que a média geométrica é sempre menor do que ou igual à média aritmética, logo para qualquer que seja o termo x_n da sequência temos que

$$\sqrt{x_n\frac{2}{x_n}} \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

ou seja, $\sqrt{2} \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, observe que

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) - \sqrt{2} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \sqrt{2} = \frac{x_n^2 + 2 - 2x_n\sqrt{2}}{2x_n} = \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2x_n}.$$

Note que

$$\frac{x_n - \sqrt{2}}{2x_n} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2x_n} < \frac{1}{2},$$

assim,

$$x_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)^2}{2x_n} = \frac{\left(x_n - \sqrt{2}\right)\left(x_n - \sqrt{2}\right)}{2x_n} < \frac{1}{2}\left(x_n - \sqrt{2}\right) < x_n - \sqrt{2},$$

segue daí que $x_{n+1} < x_n$ para $n = 2, 3, 4, \ldots$, ou seja, $\sqrt{2} \leq \cdots \leq x_{n+1} < x_n < \cdots < x_2$, logo (x_n) é uma sequência monótona decrescente a partir do seu segundo termo e limitada, portanto converge. □

Vimos na proposição anterior que a sequência (x_n) onde $x_1 > 0$ é um número racional qualquer dada recursivamente por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é uma sequência de números racionais convergente. Suponhamos que $x_n \to l$, assim quando $n \to \infty$ temos que

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{2}{l}\right) \Rightarrow 2l = l + \frac{2}{l} \Rightarrow l^2 = 2 \Rightarrow l = \sqrt{2}.$$

Definição 3.4. *Seja x_1 um número racional positivo qualquer e considere a sequência (x_n) de números racionais dada recursivamente por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos*

$$\sqrt{2} = \lim x_n = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right),$$

onde $\sqrt{2} = 1,414213562\ldots$

Este procedimento que usamos para obter aproximações racionais para $\sqrt{2}$ através dos termos da sequência (x_n) dada recursivamente por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$ já era conhecido pelos babilônios aproximadamente desde o século 17 a.C. Tal método não serve apenas para o cálculo de $\sqrt{2}$, mas pode ser generalizado para aproximar tanto quanto se queira a raiz quadrada de qualquer número real a positivo. Basta considerar $x\frac{a}{x} = a$ e prosseguir de modo análogo. Assim, partindo de um número racional positivo x_1, têm-se que a sequência (x_n) de números racionais dada recursivamente por $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, converge para $\sqrt{a}$, ou seja

$$\sqrt{a} = \lim x_n = \lim \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right).$$

Capítulo 4

Proposta didática para o ensino de sequências

Um dos objetivos deste trabalho é sinalizar para a necessidade de um estudo mais efetivo dos conceitos e propriedades matemáticas acerca de sequências de números reais.

Como podemos ver no Capítulo 2 de [2], grande parte dos livros didáticos restringem o assunto ao estudo de progressões aritméticas e geométricas. Quase sempre iniciam com algum exemplo prático, em seguida definem sequência como uma função e logo passam a se debruçar nas fórmulas dos termos gerais e somas de termos das progressões. Feito isto, gastam o tempo resolvendo problemas do tipo "encontre a razão" ou "ache o n-ésimo termo" ou ainda "qual a soma dos n primeiros termos". A partir daí, dá-se por encerrado o assunto e passa-se a outro tema. Como podemos ver, algo um tanto "pobre" dada a riqueza do assunto. A proposta deste trabalho seria expandir e avançar um pouco nos estudos, visto que os livros deixam a impressão de que sequências são única e exclusivamente progressões.

Observe que os livros didáticos, em sua maioria, se comparados a este trabalho, encerram o assunto ao final do nosso Capítulo 1. Pois bem, o nosso objetivo seria estender os estudos para os nossos Capítulos 2 e 3.

Após ter definido formalmente uma sequência de números reais e entender que progressões são casos particulares de sequências, poderíamos estudar e compreender a noção de limites através do estudo de sequências. O conceito de limite é intuitivo e pode ser facilmente desenvolvido e ensinado por meio das sequências. O problema de Zenão é um excelente exemplo para iniciar os estudos de limites. Problemas geométricos, principalmente ligados ao Método da Exaustão, de Arquimedes, semelhantes ao que usamos no Capítulo 3 para deduzir uma sequência que convergia para o número π, também são indicados para este início. Tendo compreendido o que vem a ser o limite de uma sequência, convém estudar brevemente os principais resultados que determinam se uma sequência possui limite ou não, ou seja, se converge ou diverge.

Uma grande dúvida que existe entre os alunos é sobre a origem dos números reais. Certamente, eles compreendendo as ideias intuitivas sobre limites de sequências, poderia ser explicado que todo número real pode ser obtido como sendo o limite de uma sequência de números racionais.

O Capítulo 3 serviria como resposta à outra dúvida constante dos alunos: a origem dos números e, π, ϕ e $\sqrt{a}$. Tais números quase sempre são apresentados dentro de algum contexto matemático como sendo um número irracional representado por aqueles símbolos e que servem para resolver determinados problemas, contudo, não há qualquer explicação sobre suas origens. A ideia, reforçando o que dissemos na Introdução por meio de [16], seria estabelecer os padrões, ou seja, mostrar que esses números não existem por acaso, mas decorrem de alguma observação peculiar de cada um, tal como o número e que está intimamente ligado a logaritmos, o π que está ligado ao círculo e o número ϕ relacionado à proporção áurea, e então apresentar esses números como limites de sequências, explicando os porques de cada uma.

Certamente um estudo mais avançado nesse assunto deixariam sanadas muitas das dúvidas que os alunos de Matemática do Ensino Médio possuem, além de torná-los mais preparados para a sequência dos estudos em nível superior, sobretudo para os que optarem por cursos da área das ciências exatas.

Referências Bibliográficas

[1] ALVARENGA, Célio W. Manzi. **Construção dos Números Reais**. Universidade de Brasília.

[2] ARAUJO, Kécia Silva. **Uma proposta de abordagem dos conteúdos de sequências e séries no Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UFPI, 2016.

[3] BECKMANN, Petr. **A History of π.** New York: St. Martin's Press, 1971.

[4] DEVLIN, Keith J. **Life By the Numbers**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, Inc. (US), 1998.

[5] EVES, Howard. **An Introduction to the History of Mathematics**. 3 ed. U.S.A: University of Maine, 1969.

[6] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. vol.1. 14 ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012.

[7] LIVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente.** 6 ed. Rio de Janeiro: Record, 2011.

[8] LOPES, Paula Cristina Reis. **Construções dos Números Reais**. Funchal: Universidade da Madeira, 2006.

[9] MAOR, Eli. e**: A História de um número**. 5 ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

[10] MOREIRA, Cassio Neri; CABRAL, Marco Aurélio Palumbo. **Curso de Análise Real**. 2 ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática UFRJ, 2011.

[11] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[12] MORGADO, Augusto César et. al. **Análise Combinatória e Probabilidade.** 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[13] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Fundamentos de Cálculo.** Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[14] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Geometria.** Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[15] QUEIROZ, Rosania Maria. **Razão Áurea.** Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2007.

[16] STEEN, L. A. **The Science of Patterns.** Science, 1988

[17] VOROBIOV, N. N. **Números de Fibonacci.** Moscú: Editorial MIR, 1974.

[18] ZAHN, Maurício. **Sequências de Fibonacci e o número de ouro.** Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2011.