Universidade Federal de Viçosa

Dissertação de Mestrado

Paulo Cesar Costa

A Construção dos Números Reais e Aplicações no Ensino Médio

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Paulo Cesar Costa

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Florestal
Minas Gerais – Brasil
2017

Ficha catalográfica preparada pela Biblioteca da Universidade Federal de Viçosa - Câmpus Florestal

T

C837c
2017

Costa, Paulo Cesar, 1972-
A construção dos números reais e aplicações no ensino médio / Paulo Cesar Costa. – Florestal, MG, 2017.
vi, 77f. : il. ; 29 cm.

Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa.
Referências bibliográficas: f.77.

1. Números reais. 2. Classes de equivalência (Teoria dos conjuntos). I. Universidade Federal de Viçosa. Departamento de Matematica. Programa de Pós-graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. II. Título.

CDD 22 ed. 512.786

Paulo Cesar Costa

A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS REAIS E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada à Universidade Federal de Viçosa, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, para obter o título *Magister Scientiae*.

Aprovada: 23 de fevereiro de 2017.

Mehran Sabeti

Edney Augusto Jesus de Oliveira

Luís Felipe Gonçalves Fonseca
(Coorientador)

Alexandre Alvarenga Rocha
(Orientador)

Dedicatória

Dedico esse trabalho ao meu pai Lourival José da Costa *in memoriam.*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus pelo dom da vida e por me dar forças para realizar este trabalho

Agradeço a minha mãe Helena de Nardi Costa por estar sempre presente em suas orações.

Agradeço a minha amada esposa Élica Torezani Costa e a meus amados filhos Guilherme e Antônia pela paciência e incentivo durante esses anos de mestrado.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre Alvarenga Rocha pelas valiosas orientações.

Resumo

COSTA, Paulo Cesar, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, fevereiro de 2017. **A Construção dos Números Reais e Aplicações no Ensino Médio**. Orientador: Alexandre Alvarenga Rocha. Coorientador: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

Neste trabalho estudamos duas construções do sistema dos números reais: a construção dos números reais como classe de equivalência de sequências de números racionais, desenvolvida por Cantor, que faremos todos os detalhes de sua construção, e por seções ou cortes no conjunto dos números racionais, conhecida como cortes de Dedekind, que faremos de forma mais sintetizada. Antes porém, começamos fazendo, de forma rigorosa, a construção dos números racionais. Além da parte formal, buscamos apresentar um método para o ensino de números reais no Ensino Médio. Para isso elaboramos e aplicamos um estudo dirigido à um grupo de alunos do Colégio Militar de Belo Horizonte. Terminamos este trabalho fazendo um análise dos resultados obtidos na aplicação deste estudo dirigido.

Abstract

COSTA, Paulo Cesar, M.Sc., Universidade Federal de Viçosa, February, 2017. **The Construction of Real Numbers and Applications in High School**. Adviser: Alexandre Alvarenga Rocha. Co-adviser: Luís Felipe Gonçalves Fonseca.

In this work we study two constructions of the real numbers system: the construction of real numbers as a sequence equivalence class of rational numbers, developed by Cantor, that we will make all the details of its construction, and by sections or cuts in the set of rational numbers, known as cuts of Dedekind, which we will do in a more synthesized way. Before, however, we begin by rigorously doing the construction of rational numbers. Besides the formal part, we seek to present a method for teaching real numbers in High School. For this, we elaborated and applied a study directed to a group of students of the Military College of Belo Horizonte. We finished this work by analyzing the results obtained in the application of this directed study.

Sumário

1 Introdução

O conceito de número que conhecemos hoje foi construído numa longa história e esteve intimamente ligado a relação entre o descontínuo da aritmética e o contínuo geométrico.

No tempo de Pitágoras (cerca de 580 - 500 a.C.) o sistema numérico tinha se desenvolvido até aquilo que chamamos hoje de conjunto dos números racionais, quando foi feita uma descoberta espantosa: investigando o suporte lógico da geometria conhecida, descobriu-se a existência de segmentos cuja medida não é um número racional.

Os pitagóricos, discípulos de Pitágoras, conseguiram provar que certos segmentos, obtidos através de construções simples, têm comprimentos cuja medida não é um número racional, sendo que o mais famoso deles é a diagonal do quadrado cujo lado mede 1. Foi provado que a diagonal e o lado do quadrado são segmentos incomensuráveis, isto é, não existe uma unidade de medida que caiba um número inteiro de vezes na diagonal e no lado do quadrado, simultaneamente. Outro exemplo de segmento cuja medida não é um número racional é aquele que representa o comprimento de um círculo de diâmetro unitário, porém a identificação deste número como irracional não estava ao alcance dos conhecimentos matemáticos da época. Hoje este número é conhecido como π.

Até o século XVIII não houve grandes avanços na matemática no sentido de uma formalização dos números reais, porém com o surgimento do análise, ramo da matemática que lida com os conceitos introduzidos pelo cálculo diferencial e integral, esse cenário mudou. Ergue-se um movimento chamado aritmetização da análise, um programa que visava abolir toda intuição geométrica das demonstrações em análise e prover formulações rigorosas às idéias intuitivas do cálculo.

O que uma derivada realmente é? Resposta: um limite. – O que uma integral realmente é? Resposta: um limite. – O que uma série infinita realmente é? Resposta: um limite. Isso nos leva a: – O que é um limite? Resposta: um número. E, finalmente, a última questão: – O que é um número?

A necessidade de uma definição formal de número real levou vários matemáticos a publicarem as suas teorias quase simultaneamente, embora elaboradas em épocas diferentes e tendo sido igualmente diferentes as razões que os moveram a empreender semelhante tarefa. Durante a segunda metade do século XIX um crescente número de artigos e livros foram publicados, dedicados a um único assunto: a definição precisa de número real e a investigação de funções reais baseada nessa definição.

Julius Wihelm Richard Dedekind (1831 - 1916), nasceu em Braunschweing, Alemanha. Sua atenção se voltara para o problema de números irracionais desde 1858, quando dava aulas de cálculo. Para ele, o conceito de limite deveria ser desenvolvido através da aritmética apenas, sem usar a geometria como guia. Ele se perguntou o que há na grandeza geométrica contínua que a distingue dos números racionais.

Dedekind viu que o conjunto dos números racionais poderia ser estendido de modo a formar um continuum de números reais. Para isso ele supôs que os pontos sobre a reta poderiam ser postos em correspondência biunívoca com os números reais. Ele observou que os teoremas fundamentais sobre limites poderiam ser provados rigorosamente sem apelo à geometria. Foi a geometria que iniciou o caminho para uma definição conveniente de continuidade, mas no fim foi excluída da definição aritmética formal do conceito. A noção de corte de Dedekind, no sistema de números racionais, ou uma construção equivalente dos números reais, tinha agora substituído a grandeza geométrica como espinha dorsal da análise.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 3 de março de 1845 e faleceu em Halle, Alemanha, em 6 de janeiro de 1918. Para a formalização rigorosa de número real Cantor partiu de sequências de números racionais que satisfaziam o que hoje chamamos de critério de convergência de Cauchy, e os números reais foram introduzidos, então, como símbolos associados a classes de equivalência de tais sequências. Ele sustentou que a cada sequência de Cauchy de números racionais correspondia um número real.

A construção dos números reais feita por Cantor tem por objetivo imediato garantir a convergência de sequências numéricas. Isto é, parte-se de sequências de números racionais que satisfaçam a condição de Cauchy, consideram-se equivalentes aquelas que por diferença de termos da mesma ordem conduzem a uma sucessão de limite zero, e um número real será então qualquer classe de sucessões equivalentes.

Se considerarmos o limite como sendo a noção de base da Análise, compreendemos que se faz necessário definir corretamente os números irracionais, pois os teoremas sobre limites de sequências deixavam de ter sentido quando estas não tendessem para números racionais.

2

A contrução dos números racionais

Os números inteiros não são suficientes para resolver todas as questões do dia a dia. Por exemplo, se uma mãe deseja distribuir 10 reais entre seus 3 filhos de modo que cada um receba a mesma quantidade, então ela deverá achar um número x tal que $3x = 10$. Vemos que não existe um número inteiro x que satisfaz a equação, ou seja, existem equações do tipo $mx = n$, com m e n inteiros que não possui solução. Neste capítulo vamos construir o conjunto dos números racionais no qual, para $m \neq 0$, a equação acima possui solução. Isso será feito utilizando a noção de relação de equivalência. Também usaremos os números inteiros e suas propriedades que aceitaremos como conhecidas

2.1 Conceitos iniciais.

Definição 2.1: Um **corpo** F é um conjunto de elementos x,y,z,..., onde se acham definidas as operações de adição (isto é, a cada para de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por $x + y$) e multiplicação (isto é, a cada para de elementos x e y em F corresponde um elemento de F que se designa por xy) satisfazendo as seguintes propriedades:

A1. comutativa: $x + y = y + x$;
A2. associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
A3. elemento neutro: existe um $0 \in F$ tal que $x + 0 = x$;
A4. simétrico: existe $(-x) \in F$ tal que $x + (-x) = 0$;
M1. comutativa: $x.y = y.x$;
M2. associativa: $(x.y).z = x.(y.z)$;
M3. elemento neutro: existe um $1 \in F$ tal que $x.1 = x$;
M4. inverso: se $x \neq 0$, existe $x^{-1} \in F$ tal que $x.x^{-1} = 1$;
M5 distributiva: $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Exemplo 2.1.1: O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros munido das operações usuais não é um corpo, pois não satisfaz a propriedade **M4**. De fato, se $x = 2$ por exemplo, não existe um elemento $x^{-1} \in \mathbb{Z}$ tal que $x.x^{-1} = 1$. Na verdade os únicos elementos de $\mathbb{Z}$ que possuem inverso são 1 e -1.

Exemplo 2.1.2: O conjunto de todas as matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com a,b,c e d inteiros, munido das operações usuais não é um corpo, pois não satisfaz, por exemplo **M1**. De fato, se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, então

$$A.B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2.1.3: O elemento neutro da multiplicação de um corpo F é único. De fato, suponha que existam dois elementos neutros 1 e 1^*. Assim, para todo $x \in F$, $x \neq 0$ tem-se $x.1 = x$ e $x.1^* = x$ e podemos escrever,

$$\begin{aligned} x.1 &= x.1^* \quad (\textit{multiplicando pelo inverso}) \\ x^{-1}.(x.1) &= x^{-1}.(x.1^*) \quad (\textit{associatividade}) \\ (x^{-1}.x).1 &= (x^{-1}.x).1^* \quad (\textit{inverso}) \\ 1.1 &= 1^*.1^* \quad (\textit{elemento neutro}) \\ 1 &= 1^* \end{aligned}$$

Isso mostra que o elemento neutro da multiplicação é único.

Exemplo 2.1.4: O conjunto $I_2 = \{0,1\}$ munido das operações de adição e multiplicação dadas pelas tabelas abaixo é um corpo.

+	0	1
0	0	1
1	0	1

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Já o conjunto $I_4 = \{0,1,2,3\}$ munido das operações de adição e multiplicação dadas pelas tabelas abaixo não é um corpo.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

De fato, pois pelo exemplo 2.1.3, o elemento neutro da multiplicação é único, mas isso não acontece em I_4. Para $x = 2 \in I_4$ por exemplo, temos $2.1 = 2$ e $2.3 = 2$. Além disso, $x = 2$ não possui inverso, ou seja, não existe $y \in I_4$ tal que $x.y = 1$, como se vê na tabela de multiplicação.

Exemplo 2.1.5: Seja F um corpo. Dado $x \in F$, seu simétrico $-x$ é único. De fato, suponha que existam dois simétricos $-x$ e $-x^{'}$. Dessa forma $x + (-x) = 0$ e $x + (-x^{'}) = 0$ e podemos escrever,

$$\begin{aligned}
x + (-x) &= x + (-x^{'}) (\textit{somando o inverso}) \\
(-x) + (x + (-x)) &= (-x) + (x + (-x^{'})) \;\; (\textit{associatividade}) \\
((-x) + x) + (-x) &= ((-x) + x) + (-x^{'}) \;\; (\textit{comutatividade}) \\
(x + (-x)) + (-x) &= (x + (-x)) + (-x^{'}) \;\; (\text{simétrico}) \\
0 + (-x) &= 0 + (-x^{'}) \;\; (\textit{comutatividade}) \\
(-x) + 0 &= (-x^{'}) + 0 \;\; (\textit{elemento neutro}) \\
-x &= -x^{'}
\end{aligned}$$

Isso mostra que dado $x \in F$ seu simétrico é único.

Exemplo 2.1.6: Seja F um corpo. Dado $x \in F$, $x \neq 0$, seu inverso x^{-1} é único. De fato, suponha que existam dois inversos x^{-1} e y^{-1}. Dessa forma $x.x^{-1} = 1$ e $x.y^{-1} = 1$ e podemos escrever,

$$\begin{aligned}
x.x^{-1} &= x.y^{-1} \;\; (\textit{multiplicando pelo inverso}) \\
x^{-1}(x.x^{-1}) &= x^{-1}.(x.y^{-1}) \;\; (\textit{associatividade}) \\
(x^{-1}.x).x^{-1} &= (x^{-1}.x).y^{-1} \;\; (\textit{comutatividade}) \\
(x.x^{-1}).x^{-1} &= (x.x^{-1}).y^{-1} \;\; (\textit{inverso}) \\
1.x^{-1} &= 1.y^{-1} \;\; (\textit{comutatividade}) \\
x^{-1}.1 &= y^{-1}.1 \;\; (\textit{elemento neutro}) \\
x^{-1} &= y^{-1}
\end{aligned}$$

Isso mostra que dado $x \in F$, F um corpo, seu inverso x^{-1} é único.

Definição 2.2: Sejam A e B dois conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. Chamamos **par ordenado ab**, e indicamos $(a\,,b)$, o conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$. Se $a \in A$ e $a \in B$, então $(a, a) = \{\{a\}\}$.

Teorema 2.1: Sejam A e B dois conjuntos tais que $a,c \in A$ e $b,d \in B$. Temos $(a,b) = (c,d)$ se, e somente se $a = c$ e $b = d$.

Demonstração. De fato, se $a = c$ e $b = d$ então $\{a\} = \{c\}$ e $\{a,b\} = \{c,d\}$, o que implica em $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$, ou seja, $(a,b) = (c,d)$. Suponhamos agora que $(a,b) = (c,d)$. Se $a = b$ então $(a,b) = (c,d)$ nos dá $\{\{a\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$, donde vem $a = c = d$ e portanto $a = b = c = d$. Se $a \neq b$ então $\{c\} \neq \{a,b\}$. Daí e da hipótese $\{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$ temos $\{a\} = \{c\}$ e $\{a,b\} = \{c,d\}$, o que acarreta em $a = c$ e, como $a \neq b$, $b = d$. ■

Este teorema justifica a denominação *par ordenado* além de permitir a distinção dos elementos que compõe o par (a,b): a é a primeira componente e b é a segunda componente.

Definição 2.3: Considere dois conjuntos não vazios A e B. Chamamos **A cartesiano B**, e indicamos $A \times B$, o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) tais que $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \ e \ y \in B\}$$

Exemplo 2.1.7: Se $A = \{1,2\}$ e $B = \{a,b,c\}$ então $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$, $B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$, $A^2 = A \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ e $B^2 = B \times B = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,b)(c,c)\}$.

Definição 2.4: Dados dois conjunto não vazios A e B, uma **relação binária** ou apenas **relação**, é qualquer subconjunto de $A \times B$.

Exemplo 2.1.8: Se $A = \{0,1,2,3\}$ e B é o conjunto das vogais, então $R_1 = \{(0,a), (1,c), (3,d)\}$, $R_2 = \{(3,c)\}$ e $R_3 = \{(0,e), (3,a), (3,b), (3,c)\}$ são relações de A em B.

Normalmente, há interesse apenas em relações binárias em que as componentes dos pares guardem entre si alguma relação, no sentido usual do termo. Em outros palavras, estamos interessados em relações em que haja uma regra para obtenção dos pares da relação, regra esta que permita que se defina se um dado par está ou não na relação. Neste sentido, uma relação R de A em B pode ser caracterizada por uma sentença aberta xRy, com $x \in A$ e $y \in B$ que indicará a regra que estabelecerá a relação R. Neste caso escrevemos

$$R = \{(x,y) \in A \times B;\ xRy\}$$

.

Exemplo 2.1.9: Se $A = \{0,1\}$ e $B = \{1,2,3\}$ então,
$R_1 = \{(x,y) \in A \times B;\ x < y\} = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,2),(1,3)\}$
$R_2 = \{(x,y) \in A \times B;\ x = y\} = \{(1,1)\}$

Definição 2.5: Seja $A \neq \emptyset$ e R uma relação sobre A (relação de A em A), definida pela sentença aberta $xRy, \forall x,y \in A$. Dizemos que a relação R é:

- reflexiva se xRx qualquer que seja $x \in A$;
- simétrica se xRy implicar yRx quaisquer que sejam $x,y \in A$;
- antissimétrica se xRy e yRx implicar em $x = y$ quaisquer que sejam $x,y \in A$;
- transitiva se xRy e yRz implicar em xRz quaisquer que sejam $x,y,z \in A$;
- total se quaisquer que sejam $x,y \in A$, xRy ou yRx.

Exemplo 2.1.10: Seja $A = \{a,b,c,d,e\}$. A relação

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(e,e),(a,b),(b,a),(a,e),(e,b)\}$$

é reflexiva pois $(x,x) \in \mathbb{R}, \forall x \in A$, não é simétrica pois $(a,e) \in R$ mas $(e,a) \notin R$, não é antissimétrica pois $(a,b) \in \mathbb{R}$ e $(b,a) \in \mathbb{R}$ mas $a \neq b$, não é transitiva pois $(e,b) \in R, (b,a) \in R$ mas $(e,a) \notin R$ e não é total pois $(a,c) \notin R$ e $(c,a) \notin R$.

Definição 2.6: Uma relação R sobre um conjunto $A \neq \emptyset$ é chamada de **relação de equivalência**, se possuir as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva

Exemplo 2.1.11: Seja $A = \{a,b,c\}$. A relação $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a)\}$ é de equivalência pois é reflexiva (pois para todo $x \in A$ tem-se xRx), simétrica (pois para todo $x,y \in A$ tem-se xRy e yRx) e transitiva (pois aRb, bRa e aRa).

Exemplo 2.1.12: Seja m um inteiro diferente de zero. A relação $\equiv$ sobre $\mathbb{Z}$ definida por $x \equiv y \bmod$ m se, e somente se $m|(x-y)$, que deve ser lida como: m divide $x - y$ é uma relação de equivalência. De fato, para todo $x \in \mathbb{Z}$ temos $x \equiv x$, pois $m|(x-x)$. Isso mostra que $\equiv$ é reflexiva. Além disso, se $x \equiv y$ então $m|(x-y)$, donde vem que $m|(y-x)$ e $y \equiv x$, o que mostra que $\equiv$ é simétrica. Por fim, se $x \equiv y$ e $y \equiv z$ então $m|(x-y)$ e $m|(y-z)$, donde vem que $m|(x-y+y-z)$, ou seja $m|(x-z)$ e $x \equiv z$. Isso mostra que $\equiv$ é transitiva e portanto de equivalência.

Exemplo 2.1.13: A relação R sobre $\mathbb{Z}$ definida por xRy se, e somente se $|x| = |y|$ é de equivalência. De fato, Para todo inteiro x temos xRx, pois $|x| = |x|$, o que garante que R é reflexiva. Além disso, se xRy então $|x| = |y|$ e daí $|y| = |x|$ e yRx, mostrando que R é simétrica. Por fim, se xRy e yRz então $|x| = |y|$ e $|y| = |z|$, donde vem que $|x| = |z|$ mostrando que R é transitiva e portanto de equivalência.

Exemplo 2.1.14: A relação $R = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ xy \geq 0\}$ não é de equivalência, pois não satisfaz a propriedade transitiva. De fato, se $x = 1, y = 0\ e\ z = -1$ temos $xy = 0$, $y.z = 0$ mas $xz = -1 < 0$.

Neste trabalho convencionaremos que se R é uma relação sobre um conjunto A então $(a,b) \in R \Leftrightarrow a \approx b$.

Definição 2.7: Dada uma relação de equivalência R sobre um conjunto A, definimos a **classe de equivalência** de um elemento $a \in A$ como sendo o conjunto

$$[\,a\,] = \{x \in A; x \approx a\},$$

e o elemento a será chamado de representante da classe $[a]$.

Exemplo 2.1.15: Se a relação R é a de paralelismo entre retas do plano, então R é de equivalência e a classe de equivalência $[r]$ é formada por todas as retas do plano paralelas a r.

No exemplo 2.1.11 temos que $[a] = \{a,b\}$, $[b] = \{b\}$ e $[c] = \{c\}$. Já no exemplo 2.1.12 temos, por exemplo, que $[1] = \{x \in \mathbb{Z}; x = 1 + 5t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ e $[-3] = \{x \in \mathbb{Z}; x = -3 + 5t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ e no exemplo 2.1.13 temos que $[t] = \{-t,t\}$ se $t \neq 0$ e $[0] = \{0\}$.

Teorema 2.2: Dado um conjunto não vazio X e uma relação de equivalência R então
(i) $[\,a\,] = [\,b\,]$ se, e somente se, $a \approx b$.
(ii) Se $[\,a\,] \cap [\,b\,] \neq \emptyset$, então $[\,a\,] = [\,b\,]$.
(iii) A união dos conjuntos $[\,a\,]$, para a variando em X, é o próprio X.

Demonstração.
(i) Suponhamos que $[\,a\,] = [\,b\,]$. Como $a \in [\,a\,] = [\,b\,]$, segue que $a \approx b$. Reciprocamente, se $x \in [\,a\,]$ então $x \approx a$. Mas por hipótese $a \approx b$, segue da propriedade transitiva que $x \approx b$, donde vem que $x \in [\,b\,]$ e $[\,a\,] \subset [\,b\,]$. Se porém $x \in [\,b\,]$ então $x \approx b$. Mas por hipótese $a \approx b$ e pela propriedade simétrica $b \approx a$. Daí, pela propriedade transitiva $x \approx a$, donde vem que $x \in [\,a\,]$ e $[\,b\,] \subset [\,a\,]$. Portanto $[\,a\,] = [\,b\,]$.
(ii) Suponha que $[\,a\,] \cap [\,b\,] \neq \emptyset$. Então existe $c \in X$ tal que $c \in [\,a\,]$ e $c \in [\,b\,]$. Logo, $c \approx a$ e $c \approx b$ e daí, pela propriedade simétrica $a \approx c$ e $c \approx b$. Agora pela propriedade transitiva segue que $a \approx b$ e portanto, pelo item (i), $[\,a\,] = [\,b\,]$.
(iii) Seja Y a união de todos os conjunto $[\,a\,]$, $a \in X$. Obviamente temos $Y \subset X$. Por outro lado, dado $a \in X$, pela propriedade reflexiva temos $a \approx a$ e dai $a \in [\,a\,] \subset Y$, mostrando que $X \subset Y$ e, portanto, $Y = X$. ■

Definição 2.8: Seja $A \neq \emptyset$. Uma relação R de A em A é chamada de **relação de ordem** se possuir as propriedades reflexiva, antissimétrica, transitiva e total.

Exemplo 2.1.16: Seja $A = \{a,b,c\}$. A relação

$$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,c),(a,c)\}$$

é de ordem. De fato, para todo $x \in A$ tem-se $(x,x) \in R$ (reflexividade). Além disso, todo par da forma $(x,y) \in R, x \neq y$ é tal que $(y,x) \notin R$ e se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ temos $x = y$ (antissimetria). Também temos (a,a) e $(a,b) \Rightarrow (a,a)$; (b,b) e $(b,c) \Rightarrow (b,c)$; (a,a) e $(a,c) \Rightarrow (a,c)$ e (a,b) e $(b,c) \Rightarrow (b,c)$ (tansitividade). Além disso, (a,b), (a,c) e (b,c) pertencem a R. Isso mostra que qualquer que sejam $x,y \in A$ temos $x \approx y$ ou $y \approx x$ (total).

Exemplo 2.1.17: A relação D sobre $\mathbb{Z}$ definida por xDy se, e somente se $x|y$ não é de ordem, pois não satisfaz a propriedade antissimétrica. De fato, $2|-2$ e $-2|2$ mas não temos $2 = -2$. Além disso a relação D não é total, pois, por exemplo, 2 não divide 3 nem 3 divide 2.

Exemplo 2.1.18: Seja $A = \{a,b,c\}$ e $P(A)$ o conjunto das partes de A. A relação $R = \{(X,Y) \in P(A) \times P(A);\ XRY \iff X \subset Y\}$ não é de ordem, pois apesar de R ser reflexiva, antissimétrica e transitiva, ela não é total. De fato, $\{a,b\}$ e $\{b,c\}$ são elementos de $P(A)$ mas $\{a,b\}$ não está contido em $\{b,c\}$ nem o contrário.

Definição 2.9: Seja F um corpo munido de uma relação de ordem $\leq$. Dizemos que F é um **corpo ordenado** se as seguintes propriedades forem satisfeitas:
(i) $x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$, $\forall x,y,z \in F$;
(ii) $x \leq y \Longrightarrow x.z \leq y.z$, $\forall x,y,z \in F$, $z > 0$.

Exemplo 2.1.19: Num corpo ordenado, se $a \neq 0$ então $a^2 > 0$. De fato, sendo $a \neq 0$, ou $a > 0$ ou $-a > 0$. No primeiro caso, pela propriedade (ii) da definição acima temos

$$0 < a \Longrightarrow 0.a < a.a \Longrightarrow 0 < a^2$$

No segundo caso, novamente pela propriedade (ii) da definição acima temos

$$0 < -a \Longrightarrow 0.(-a) < (-a).(-a) \Longrightarrow 0 < a^2$$

Em qualquer caso temos $a^2 > 0$. Em particular, num corpo ordenado $1 > 0$, pois $1 = 1.1 = 1^2 > 0$.

Exemplo 2.1.20: Num corpo ordenado a soma de dois elementos positivos é positivo. De fato, pela propriedade (i) da definição acima, se $a > 0$ e $b > 0$ então $a+b > 0$. Assim, o corpo $I_2 = \{0,1\}$ definido no exemplo 2.1.4 não pode ser ordenado pois nele $1 + 1 = 0$ enquanto que num corpo ordenado $1 > 0$ e a soma 1+1, de dois elementos positivos deveria ainda ser positiva.

2.2 Definindo o conjunto dos números racionais

Definição 2.10: Seja $\mathbb{Z}^* = \{m \in \mathbb{Z};\, m \neq 0\}$. Definimos a relação S sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ como

$$S = \{((m,n),(p,q)) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)^2 \,;\, (m,n) \approx (p,q) \text{ se e só se } mq = np\}$$

Assim vemos que os elementos da relação S são pares ordenados, cujos elementos também são pares ordenados de números inteiros.

Exemplo 2.2.1: O par ordenado $((1,2),(2,4)) \in S$ pois $1.4 = 2.2$, mas o par ordenado $((2,3),(4,1)) \notin S$ pois $2.1 \neq 3.4$. Além disso vemos que a relação S não satisfaz a propriedade antissimétrica pois $(3,4) \approx (6,8)$ pois $3.8 = 4.6$ e $(6,8) \approx (3,4)$ pois $6.4 = 8.3$ mas não temos $(3,4) = (6,8)$.

Teorema 2.3: A relação S definida acima é de equivalência.

Demonstração. Para todo $m,p,r \in \mathbb{Z}$ e $n,q,s \in \mathbb{Z}^*$ temos:
(i) $m.n = m.n$ e daí $(m,n) \approx (m,n)$. Isso mostra que a relação S é reflexiva.
(ii) Se $(m,n) \approx (p,q)$ então $m.q = n.p$, donde vem que $q.m = p.n$, ou seja, $p.n = q.m$ e $(p,q) \approx (m,n)$. Isso mostra que a relação S é simétrica.
(iii) Se $(m,n) \approx (p,q)$ e $(p,q) \approx (r,s)$ então $m.q = n.p$ e $p.s = q.r$ donde vem

$m.q.s = n.p.s$ e $n.p.s = n.q.r$ e portanto $m.q.s = n.q.r$. Assim, usando as propriedades dos números inteiros e o fato de que $q \neq 0$ podemos escrever,

$$\begin{aligned} m.q.s = n.q.r &\implies m.q.s - n.q.r = 0 \\ &\implies q.(m.s - n.r) = 0 \\ &\implies m.s - n.r = 0 \\ &\implies m.s = n.r \\ &\implies (m,n) \approx (r,s) \end{aligned}$$

donde vem que S é transitiva e portanto uma relação de equivalência. ■

Definição 2.11: Considere o elemento $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Definimos a classe de equivalência de (a,b), que denotaremos por $\dfrac{a}{b}$, como o conjunto

$$\frac{a}{b} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ (x,y) \approx (a,b)\}$$

Exemplo 2.2.2: Conforme definição temos:

- $\dfrac{1}{3} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 3x = y\} = \{(1,3),(2,6),(-3,-9),...\}$
- $\dfrac{-2}{5} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*;\ 5x = -2y\} = \{(-2,5),(4,-10),(-6,15),...\}$

No ensino fundamental, quando vamos realizar com os alunos a soma $\dfrac{3}{-5} + \dfrac{2}{7}$ não raro escrevemos $\dfrac{3}{-5} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{-3}{5} + \dfrac{2}{7}$. Essa escrita, $\dfrac{3}{-5} = \dfrac{-3}{5}$, causa um certo desconforto aos alunos. O teorema seguinte mostra como isso se justifica através da teoria que estamos desenvolvendo.

Teorema 2.4: As classes de equivalência $\dfrac{-a}{b}$ e $\dfrac{a}{-b}$ são iguais.

Demonstração. De fato, seja $(m,n) \in \dfrac{-a}{b}$. Assim,

$$\begin{aligned} (m,n) \in \frac{-a}{b} &\iff (m,n) \approx (-a,b) \\ &\iff m.b = -n.a \\ &\iff m.(-b) = n.a \\ &\iff (m,n) \approx (a,-b) \\ &\iff (m,n) \in \frac{a}{-b} \end{aligned}$$

Isso mostra que $\dfrac{-a}{b} \subset \dfrac{a}{-b}$ e $\dfrac{a}{-b} \subset \dfrac{-a}{b}$ e portanto $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$. ■

Mais geralmente o item (i) do teorema 2.2 nos dá $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ se e somente se $(a,b) \approx (c,d)$.

Sendo S uma relação de equivalência, o teorema 2.2 garante que ela divide o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ em classes de equivalência duas a duas disjuntas tais que a união de todas elas nos dá o próprio $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Ou seja, todo elemento de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ pertence a uma e somente uma classe de equivalência $\dfrac{a}{b}$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 2.12: O conjunto formado por todas as classes de equivalência $\dfrac{a}{b}$ é denotado por $\mathbb{Q}$ e chamado conjunto dos números racionais, isto é

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b};\ (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\}$$

No entanto, esse $\mathbb{Q}$ é só um conjunto de classes de equivalências. Precisamos muní-lo de duas operações, estabelecer uma ordem entre seus elementos e mostrar que ele é um corpo ordenado.

2.3 O conjunto $\mathbb{Q}$ como corpo

Nesta seção definiremos as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Q}$, mostraremos que elas estão bem definidas e satisfazem as propriedades da adição e multiplicação de um corpo.

2.3.1 Adição em $\mathbb{Q}$

Definição 2.13: Sejam, $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$ dois elementos do conjunto $\mathbb{Q}$. Definimos a soma de x com y, e indicamos $x + y$, como,

$$x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

Exemplo 2.3.1: Se $x = \dfrac{2}{3}$ e $y = \dfrac{4}{5}$ então $x + y = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{2.5 + 3.4}{3.5} = \dfrac{10 + 12}{15} = \dfrac{22}{15}$.

Antes de mais nada é preciso verificar se esta operação está bem definida. Para isso é necessário mostrarmos que a soma, além de pertencer a $\mathbb{Q}$, independem dos particulares elementos utilizados para representar as classes de equivalência. Isso podemos ver no teorema seguinte.

Teorema 2.5: Sejam $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$ dois elementos de $\mathbb{Q}$. A soma $x + y \in \mathbb{Q}$ e independe do representante da classe.

Demonstração. Como a,b,c e d são inteiros, segue que $a.d + b.c$ é inteiro e bd, além de ser inteiro, é diferente de zero pois $b \neq 0$. e $d \neq 0$. Isso mostra que $(ad + bc,bd) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e portanto define a classe de equivalência $\dfrac{ad + bc}{bd}$, ou seja, $\dfrac{ad + bc}{bd} \in \mathbb{Q}$. Para o que falta, considere (m,n) e (p,q) outros representantes das classes $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$, respectivamente. Assim devemos mostrar que as classes

$\dfrac{ad+bc}{bd}$ e $\dfrac{mq+np}{pq}$ são iguais. De fato, neste caso temos

$$(a,b) \approx (m,n) \Longrightarrow an = bm$$

$$(c,d) \approx (p,q) \Longrightarrow cq = dp$$

Usando estas duas igualdades podemos escrever

$$\begin{aligned} adnq + bcnq - bdmq - bdnp &= adnq - bdmq + bcnq - bdnp \\ &= bmdq - bmdq + bndp - bndp \\ &= 0 \end{aligned}$$

ou seja,

$$adnq + bcnq = bdmq + bdnp$$

e daí,

$$(ad+bc)nq = bd(mq+np)$$

o que mostra que $(ad+bc,bd) \approx (mq+nq,nq)$. Segue então do teorema **??** que as classes $\dfrac{ad+bc}{bd}$ e $\dfrac{mq+np}{nq}$ são iguais. ■

O teorema seguinte mostra que essa operação satisfaz as propriedades da adição de um corpo.

Teorema 2.6: Sejam $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$ e $z = \dfrac{m}{n}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Q}$. Valem as seguintes propriedades:

A1. comutativa: $x + y = y + x$;

A2. associativa: $x + (y + z) = (x + y) + z$;

A3. elemento neutro: existe $0 \in \mathbb{Q}$ tal que $x + 0 = x$;

A4. simétrico: existe $(-x) \in \mathbb{Q}$ tal que $x + (-x) = 0$.

Demonstração. De fato, usando as propriedades dos inteiros podemos escrever,

A1. $x + y = \dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd} = \dfrac{cb+da}{db} = \dfrac{c}{d} + \dfrac{a}{b} = y + x.$

A2.

$$\begin{aligned}
x+(y+z) &= \frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{m}{n}\right)\\
&= \frac{a}{b}+\frac{cn+dm}{dn}\\
&= \frac{a(dn)+b(cn+dm)}{b(dn)}\\
&= \frac{a(dn)+b(cn)+b(dm)}{b(dn)}\\
&= \frac{(ad)n+(bc)n+(bd)m}{(bd)n}\\
&= \frac{(ad+bc)n+(bd)m}{(bd)n}\\
&= \frac{ad+bc}{bd}+\frac{m}{n}\\
&= \left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{m}{n}\\
&= (x+y)+z
\end{aligned}$$

A3. Considere a classe $\dfrac{0}{1}$ e observe que,

$$x+\frac{0}{1}=\frac{a}{b}+\frac{0}{1}=\frac{a.1+b.0}{b.1}=\frac{a+0}{b}=\frac{a}{b}=x$$

Isso mostra que a classe de equivalência $\dfrac{0}{1}$ é o elemento neutro da adição, ou seja, $0=\dfrac{0}{1}$.

A4. Considere a classe de equivalência $\dfrac{-a}{b}$ e observe que,

$$x+\frac{-a}{b}=\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{ab+b(-a)}{b.b}=\frac{ab-ab}{bb}=\frac{0}{b^2}=0$$

Isso mostra que a classe de equivalência $\dfrac{-a}{b}$ é o simétrico da classe de equivalência $x=\dfrac{a}{b}$, ou seja, $(-x)=\dfrac{-a}{b}$. ■

2.3.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Definição 2.14: Sejam $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$ dois elementos do conjunto $\mathbb{Q}$. Definimos a multiplicação de x por y, e indicamos $x.y$, como,

$$x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Exemplo 2.3.2: Se $x = \dfrac{2}{5}$ e $y = \dfrac{3}{7}$ então $x.y = \dfrac{2}{5}.\dfrac{3}{7} = \dfrac{2.3}{5.7} = \dfrac{6}{35}$.

Novamente é preciso verificar se esta lei, efetivamente, define uma operação. Para isto é necessário mostrarmos que o produto $x.y$, além de pertencer a $\mathbb{Q}$, independem dos particulares elementos utilizados para representar as classes de equivalência. Isso poderemos ver no teorema seguinte.

Teorema 2.7: Sejam $x = \dfrac{a}{b}$ e $y = \dfrac{c}{d}$ dois elementos de $\mathbb{Q}$. O produto $x.y \in \mathbb{Q}$ e independe dos representantes da classes.

Demonstração. Como a,b,c e d são inteiros, segue que ac e bd são inteiros e além disso $bd \neq 0$, pois $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Isso mostra que $(ac,bd) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ e portanto define a classe de equivalência $\dfrac{ac}{bd}$, ou seja, $x.y = \dfrac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$. Para o que falta, considere (m,n) e (p,q) outros representantes das classes $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{c}{d}$, respectivamente. Assim, devemos mostrar que as classes $\dfrac{ac}{bd}$ e $\dfrac{mp}{nq}$ são iguais. De fato, neste caso temos

$$\begin{aligned} (a,b) \approx (m,n) &\implies an = bm \\ (c,d) \approx (p,q) &\implies cq = dp \end{aligned}$$

Multiplicando membro a membro estas duas igualdades obtemos

$$ancq = bmdp$$

donde vem que $(ac)(nq) = (bd)(mp)$, o que mostra que $(ac,bd) \approx (mp,nq)$. Segue do teorema **??** que as classes $\dfrac{ac}{bd}$ e $\dfrac{mp}{nq}$ são iguais. ■

O teorema seguinte mostra que essa operação satisfaz as propriedades da multiplicação de um corpo.

Teorema 2.8: Sejam $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$ e $z = \dfrac{m}{n}$ elementos do conjunto $\mathbb{Q}$. Valem as seguintes propriedades:

M1. comutativa: $x.y = y.x$;

M2. associativa: $x.(y.z) = (x.y).z$;

M3. elemento neutro: existe $1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x.1 = x$;

M4. inverso: para todo $x \neq 0$, existe x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$;

M5. distributiva: $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Demonstração. De fato, usando as propriedades dos inteiros podemos escrever,

M1. $x.y = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d}.\frac{a}{b} = y.x.$

M2. $x.(y.z) = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d}.\frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b}.\frac{cm}{dn} = \frac{a(cm)}{b(dn)} = \frac{(ac)m}{(bd)n} = \frac{ac}{bd}.\frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b}.\frac{c}{d}\right).\frac{m}{n} =$ $(x.y).z.$

M3. Considere a classe de equivalência $\frac{1}{1}$ e observe que,

$$x.\frac{1}{1} = \frac{a}{b}.\frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b} = x$$

Isso mostra que a classe de equivalência $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro da multiplicação, ou seja $1 = \frac{1}{1}$.

M4. Dado $x = \frac{a}{b}$ temos,por definição, que $b \neq 0$. Assim, se $x \neq 0$ então $a \neq 0$ e $\frac{b}{a}$ é uma classe de equivalência, ou seja, $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$. Agora observe que,

$$x.\frac{b}{a} = \frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{ab}{ab}.$$

Além disso, como $(ab,ab) \approx (1,1)$ o teorema **??** garante que $\frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$ e podemos escrever

$$x.\frac{b}{a} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1} = 1$$

Isso mostra que a classe de equivalência $\frac{b}{a}$ é o inverso da classe de equivalência $x = \frac{a}{b}$, ou seja, $x^{-1} = \frac{b}{a}$.

M5. Observe que

$x.(y + z) = \frac{a}{b}.\left(\frac{c}{d} + \frac{m}{n}\right) = \frac{a}{b}.\frac{cn + dm}{dn} = \frac{a(cn + dm)}{b(dn)} = \frac{acn + adm}{bdn}.$

e

$x.y + x.z = \frac{a}{b}.\frac{c}{d} + \frac{a}{b}.\frac{m}{n} = \frac{ac}{bd} + \frac{am}{bn} = \frac{acbn + abdm}{b^2dn} = \frac{b(acn + adm)}{b.bdn} =$
$\frac{b}{b}.\frac{acn + adm}{bdm} =$
$\frac{1}{1}\frac{acn + adm}{bdm} = \frac{acn + adm}{bdm}.$

Isso mostra que $x.(y + z) = x.y + x.z$ ∎

Concluímos então que o conjunto $\mathbb{Q}$ munidos das operações de adição e multiplicação definidas acima é um corpo e, a partir dele podemos criar outros corpos como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.3: O conjunto $\mathbb{Q}^2 = \mathbb{Q}\,X\,\mathbb{Q}$ dos pares de racionais (x,y) munido das operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2) &= (x_1+x_2,\ y_1+y_2)\\ (x_1,y_1).(x_2,y_2) &= (x_1.x_2-y_1.y_2,\ x_1.y_2+y_1.x_2)\end{aligned}$$

é um corpo. De fato, as propriedades **A1**, **A2**, **M1**, **M2** e **M5** seguem imediatamente do fato de que o conjunto $\mathbb{Q}$ é um corpo. O elemento zero é $0=(0{,}0)$, pois para todo $x=(x_1,y_1)\in\mathbb{Q}^2$, temos

$$x+0=(x_1,y_1)+(0{,}0)=(x_1+0,y_1+0)=(x_1,y_1)=x.$$

O simétrico de $x=(x_1,y_1)$ é $(-x)=(-x_1,-y_1)$, pois

$$x+(-x)=(x_1,y_1)+(-x_1,-y_1)=(x_1-x_1,y_1-y_1)=(0{,}0)=0.$$

A unidade da multiplicação é $1=(1{,}0)$, pois para todo $x=(x_1,y_1)\in\mathbb{Q}^2$,

$$x.1=(x_1,y_1).(1{,}0)=(x_1.1-y_1.0,x_1.0+y_1.1)=(x_1,y_1)=x.$$

Por fim, o inverso de $x=(x_1,y_1)$, $x\neq 0$ é $x^{-1}=\left(\dfrac{x_1}{x_1^2+y_1^2},-\dfrac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)$, pois

$$x.x^{-1}=(x_1,y_1).\left(\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2},-\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)=\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{x_1^2+y_1^2},\frac{x_1.y_1-x_1.y_1}{x_1^2+y_1^2}\right)=(1{,}0)=1.$$

Vamos agora definir mais duas operações em $\mathbb{Q}$.

Definição 2.15: Sejam $x=\dfrac{a}{b}$ e $y=\dfrac{c}{d}$ dois elementos do conjunto $\mathbb{Q}$. Definimos a diferença entre x e y, e indicamos $x-y$, como

$$x-y=x+(-y)=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d}=\frac{ad+b(-c)}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

O exemplo 2.1.5 garante que dado $x\in\mathbb{Q}$ seu simétrico $-x$ é único, garantindo assim que a diferença está bem definida.

Exemplo 2.3.4: Se $x=\dfrac{1}{5}$ e $y=\dfrac{2}{3}$ então

$$x-y=x+(-y)=\frac{1}{5}+\frac{-2}{3}=\frac{1.3+5.(-2)}{5.3}=\frac{3-10}{15}=\frac{-7}{15}$$

Definição 2.16: Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d} \neq 0$ dois elementos do conjunto $\mathbb{Q}$. Definimos a divisão de x por y, e indicamos $\frac{x}{y}$, como

$$\frac{x}{y} = x.y^{-1} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

O exemplo 2.1.6 garante que dado $x \in \mathbb{Q}$ seu inverso x^{-1} é único, garantindo assim que a divisão está bem definida.

Exemplo 2.3.5: Se $x = \frac{2}{5}$ e $y = \frac{3}{7}$ então

$$\frac{x}{y} = x.y^{-1} = \frac{2}{5}.\frac{3}{7} = \frac{2.3}{5.7} = \frac{6}{35}$$

2.4 O conjunto $\mathbb{Q}$ como corpo ordenado

O objetivo desta seção é mostrar que o corpo dos racionais é ordenado. Para isso vamos definir uma relação de ordem $\leq$ compatível com a adição e multiplicação. Por fim vamos mostrar que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ é arquimediano.

Vimos que as classes $\frac{-a}{b}$ e $\frac{a}{-b}$ são iguais. Dessa forma todo elemento $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ possui um representante com denominador positivo. Isso motiva as seguintes definições:

Definição 2.17: Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ números racionais com $b,d > 0$.

(i) Dizemos que x é igual a y, e escrevemos $x = y$, quando as classes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ se relacionam, ou seja, quando $ad = bc$.

(ii) Dizemos que x é menor do que y, e escrevemos $x < y$, quando $ad < bc$. Analogamente dizemos que x é maior do que y, e escrevemos $x > y$, quando $y < x$.

(iii) Dizemos que x é menor do que ou igual a y, e escrevemos $x \leqslant y$, quando $ad \leqslant bc$. Analogamente dizemos que x é maior do que ou igual a y, e escrevemos $x \geqslant y$, quando $y \leqslant x$.

Exemplo 2.4.1: Sejam $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{5}$ e $z = \frac{4}{6}$. Temos $x = z$, pois $2.6 = 3.4$ e $y \leqslant z$, pois $2.6 \leqslant 5.4$.

A fim de definir uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$ precisamos mostrar que a definição $\leqslant$ independe dos representantes das classes. Isso é o conteúdo do

Teorema 2.9: Considere as classes $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $b,d > 0$. Se $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$, $(m,n) \in \frac{a}{b}$ e $(p,q) \in \frac{c}{d}$, com $n,q > 0$, então $\frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}$.

Demonstração. Como $(m,n) \in \dfrac{a}{b}$ e $(p,q) \in \dfrac{c}{d}$, temos que $mb = na$ e $pd = qc$. Assim podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} &\Longrightarrow ad \leqslant bc \\
&\Longrightarrow adnq \leqslant bcnq \\
&\Longrightarrow (an)dq \leqslant (qc)bn \\
&\Longrightarrow mbdq \leqslant pdbn \\
&\Longrightarrow bd(mq - pn) \leqslant 0 \\
&\Longrightarrow mq - pn \leqslant 0 \quad (pois\ b,d > 0) \\
&\Longrightarrow mq \leqslant np \\
&\Longrightarrow \frac{m}{n} \leqslant \frac{p}{q}
\end{aligned}$$

■

Vamos agora definir uma relação sobre $\mathbb{Q}$, mostrar que ela é de ordem e é compatível com a adição e com a multiplicação de números racionais

Definição 2.18: Definimos a relação R sobre $\mathbb{Q}$ como

$$R = \left\{ \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \right) \in \mathbb{Q}^2;\ \frac{a}{c} \leqslant \frac{c}{d} \right\}$$

Exemplo 2.4.2: O par ordenado $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{7} \right) \in R$, pois $1.7 \leqslant 3.3$. Já o par $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{4} \right) \notin R$, pois $2.4 > 5.1$.

Teorema 2.10: A relação R definida acima é reflexiva, antissimétrica, transitiva, total e valem as propriedades:
(i) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$, $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$;
(ii) $x \leqslant y \Longrightarrow x.z \leqslant y.z$, $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$, $z > 0$.

Demonstração. Sejam $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$ e $z = \dfrac{m}{n}$ números racionais com $b,d,n > 0$.

(i) Como $ab = ab$ segue que $x \leqslant x$ e R é reflexiva.

(ii) Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ então $\dfrac{a}{b} \leqslant \dfrac{c}{d}$ e $\dfrac{c}{d} \leqslant \dfrac{a}{b}$ e daí $ad \leqslant bc$ e $bc \leqslant ad$, donde vem que $ad = bc$, ou seja, $x = y$ e R é antissimétrica.

(iii) Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ então $ad \leqslant bc$ e $cn \leqslant dm$. Multiplicando ambos os membros da desigualdade $ad \leqslant bc$ por $n > 0$ e da desigualdade $cn \leqslant dm$ por $b > 0$ obtemos

$$adn \leqslant bcn \quad e \quad bcn \leqslant bdm$$

Assim podemos escrever,

$$\begin{aligned} adn \leqslant bdm &\Longrightarrow adn - bdm \leqslant 0 \\ &\Longrightarrow d(an - bm) \leqslant 0 \\ &\Longrightarrow an - bm \leqslant 0 \quad (pois\ d > 0) \\ &\Longrightarrow an \leqslant bm \\ &\Longrightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{m}{n} \\ &\Longrightarrow x \leqslant y \end{aligned}$$

donde vem que R é transitiva.

(iv) Como ad e bc são inteiros, então $ad \leqslant bc$ ou $bc \leqslant ad$ e daí $\frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d}$ ou $\frac{c}{d} \leqslant \frac{a}{b}$ donde vem que $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ e a relação R é total. Concluímos então que R é uma relação de ordem.

(v) Observe que

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Longrightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \\ &\Longrightarrow ad \leqslant bc \\ &\Longrightarrow adnn \leqslant bcnn \\ &\Longrightarrow adnn + bdmn \leqslant bcnn + bdmn \\ &\Longrightarrow dn(an + bm) \leqslant bn(cn + dm) \\ &\Longrightarrow \frac{an + bm}{bn} \leqslant \frac{cn + dm}{dn} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{m}{n} \leqslant \frac{c}{d} + \frac{m}{n} \\ &\Longrightarrow x + z \leqslant y + z \end{aligned}$$

o que mostra que R é compatível com a adição.

(vi) Se $z = \dfrac{m}{n} \geqslant 0$ então $m \geqslant 0$, pois $n > 0$. Daí podemos escrever,

$$\begin{aligned} x \leqslant y &\Longrightarrow \frac{a}{b} \leqslant \frac{c}{d} \\ &\Longrightarrow ad \leqslant bc \\ &\Longrightarrow adn \leqslant bcn \ \ (pois\ n > 0) \\ &\Longrightarrow adnm \leqslant bcnm \ \ (pois\ m \geqslant 0) \\ &\Longrightarrow (am)(dn) \leqslant (bn)(cm) \\ &\Longrightarrow \frac{am}{bn} \leqslant \frac{cm}{dn} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{b}.\frac{m}{n} \leqslant \frac{c}{d}.\frac{m}{n} \\ &\Longrightarrow x.z \leqslant y.z \end{aligned}$$

o que mostra que R é compatível com a multiplicação. ■

Com este teorema concluímos que o conjunto $\mathbb{Q}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas acima e a relação de ordem R, é um corpo ordenado.

Observamos que o conjunto $\mathbb{Q}$ assim definido contém uma cópia do conjunto $\mathbb{Z}$. De fato, se x é um inteiro, então x é identificado com a classe de equivalência $\dfrac{x}{1}$.

Vamos agora mostrar que o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ é arquimediano.

Definição 2.19: Seja F um corpo ordenado. Dizemos que F é arquimediano quando $\forall a,b \in F$, $0 < a < b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Teorema 2.11: O corpo ordenado $\mathbb{Q}$ é arquimediano.

Demonstração. Sejam $a = \dfrac{m}{p}$ e $b = \dfrac{r}{s}$, dois números racionais positivos. Como $a,b > 0$ podemos supor $m,p,r,s \geqslant 1$. Logo $ms \geqslant 1$ donde vem que $2ms \geqslant 2 > 1$. Multiplicando esta última desigualdade por pr temos

$$2ms(pr) > pr$$

e daí,

$$\begin{aligned} (2prm)s &> pr \\ \frac{2prm}{p} &> \frac{r}{s} \\ \frac{2pr.m}{1.p} &> \frac{r}{s} \\ \frac{2pr}{1}.\frac{m}{p} &> \frac{r}{s} \end{aligned}$$

Como $n = \dfrac{2pr}{1}$ é natural segue que $n.\dfrac{m}{p} > \dfrac{r}{s}$, ou seja, $na > b$. ■

Na introdução deste capítulo vimos que a equação $3x = 10$ não possui solução em $\mathbb{Z}$. Mostraremos agora que ela possui solução em $\mathbb{Q}$. De fato, nesta equação o 3 é a classe de equivalência $\dfrac{3}{1}$ e o 10 é a classe de equivalência $\dfrac{10}{1}$. Tomando x como a classe de equivalência $\dfrac{10}{3}$, obtemos

$$3x = \frac{3}{1}.\frac{10}{3} = \frac{3.10}{1.3} = \frac{3}{3}.\frac{10}{1} = 1.\frac{10}{1} = 10$$

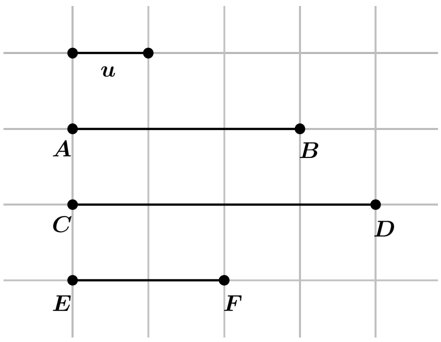
Isso mostra que a classe de equivalênica $\dfrac{10}{3}$, que é um número racional, é solução da equação $3x = 10$.

2.5 A insuficiencia dos números racionais

O objetivo desta seção é mostrar que existem situações da vida diária que quando equacionadas não possuem não possuem solução em $\mathbb{Q}$.

Definição 2.20: Considere um segmento unitário u como unidade padrão de medida. A medida do segmento AB, representado por $\overline{AB}$ é o número que exprime quantas vezes o segmento AB contém o segmento u.

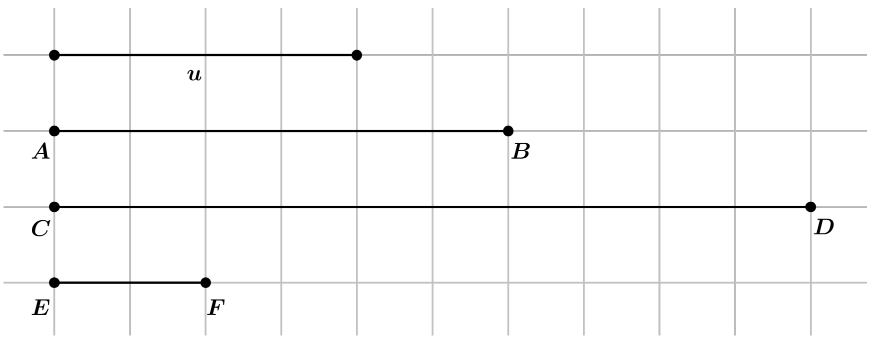
Exemplo 2.5.1: Considere a figura abaixo.



Se o segmento u é a unidade padrão de medida então $\overline{AB} = 3, \overline{CD} = 4$ e $\overline{EF} = 2$

Em algumas situações o segmento AB não contém o segmento u (unidade padrão de medida) um número inteiro de vezes. Neste caso buscamos um segmento w menor que a unidade u que caiba um número inteiro de vezes tanto em u com em AB.

Exemplo 2.5.2: Considere a figura abaixo.



Se o segmento u é a unidade padrão de medida então o segmento AB, por exemplo, não contém o segmento u um número inteiro de vezes. Tomando $w = \frac{1}{4}u$, observamos que o segmento AB contém o segmento w um número inteiro de vezes e

$$\overline{AB} = 6\overline{w} = 6\frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

De modo análogo vemos que $\overline{CD} = \dfrac{10}{4}$ e $\overline{EF} = \dfrac{2}{4}$.

De um modo geral o exemplo acima nos diz que se w é um segmento que está contido n vezes na unidade u e m vezes em segmento AB, com $m,n \in \mathbb{N}^*$, então temos que $\overline{AB} = m.\overline{w}$ *e* $\overline{u} = n.\overline{w}$, e daí

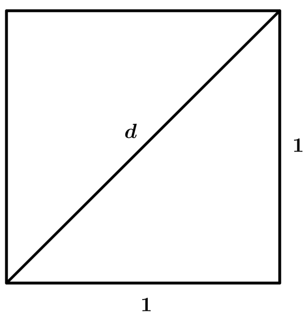
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{u}} = \frac{m.\overline{w}}{n.\overline{w}} \implies \frac{\overline{AB}}{1} \implies \overline{AB} = \frac{m}{n}$$

Neste caso dizemos que AB é *comensurável* em relação a unidade padrão de medida u. Ou seja, o segmento AB é dito *comensurável* com a unidade padrão de medida u quando existir uma subunidade de medida w que cabe um número inteiro de vezes em u e em AB. Ou ainda, AB é comensurável se sua medida é um número racional.

Os matemáticos gregos da antiguidade acreditavam que todos segmentos de reta eram comensuráveis coma a unidade. Mas, por volta de 450a.C. eles descobriram que existiam segmentos não comensuráveis.

Os exemplos seguintes mostram que existem seguimentos incomensuráveis.

Exemplo 2.5.3: Considere u a unidade padrão de medida e o quadrado de lado unitário da figura abaixo.



A diagonal e o lado deste quadrado são segmentos incomensuráveis. De fato, Suponhamos que a diagonal d seja comensurável com a unidade u. Neste caso a medida da diagonal d é um número racional, ou seja, existem $m,n \in \mathbb{Z}_+^*$ tais $d = \dfrac{m}{n}$, com $mdc(m,n) = 1$. Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \implies \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1 + 1 \implies \frac{m^2}{n^2} = 2 \implies m^2 = 2n^2$$

Dai concluímos que m^2 é par, donde vem que m é par. Assim podemos escrever

$m = 2k$ e obter

$$m^2 = 2n^2 \implies (2k)^2 = 2n^2 \implies 4k^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2k^2$$

Isso mostra que n^2 é par donde vem que n é par, ou seja, $n = 2r$. Neste caso,

$$mdc(m,n) = mdc(2k,2r) \neq 1.$$

Uma contradição pois supomos $mdc(m,n) = 1$. Concluímos então que a diagonal do quadrado de lado unitário é incomensurável com a unidade.

No próximo exemplo vamos mostrar que o número $\pi = \dfrac{\text{circunferência}}{\text{diâmetro}}$ não é racional

Lema 01. Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}.$$

$D^k f(0)$ é um número inteiro para qualquer $k \in \{0,1,2,3,...\}$, onde $D^k f$ é a k-ésima derivada de f se $k \geq 1$, e $D^0 f = f$.

Demonstração. A fórmula de Leibnitz para derivada de ordem k de um produto de duas funções g e h é:

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g.\, D^{k-j} h$$

fazendo $g = x^n$ e $h = \dfrac{(1-x)^n}{n!}$ obtemos

$$D^k f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j x^n.\, D^{k-j}(1-x)^n$$

Observe que $g(x) = x^n \implies D^j g(0) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j < n \\ n!, & \text{se} \quad j = n \\ 0, & \text{se} \quad j > n \end{cases}.$

Assim, de

$$D^k f(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j x^n.\, D^{k-j}(1-x)^n$$

Obtemos

$$D^k f(0) = \binom{k}{n}.\, D^{k-n}(1-x)^n$$

Como $\binom{k}{n}$ e $D^{k-n}(1-x)^n$ são inteiros, segue que $D^k f(0)$ é um número inteiro.

Lema 02. $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer $k \in \{0,1,2,3,...\}$.

Demonstração. Observe inicialmente que

$$f(1-x) = \frac{(1-x)^n[1-(1-x)]^n}{n!} = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = f(x)$$

Assim, usando a regra da cadeia podemos escrever

$$D^k f(x) = \begin{cases} D^k f(1-x), & se \quad k \text{ é } par \\ -D^k f(1-x), & se \quad k \text{ é } ímpar \end{cases}$$

E daí

$$D^k f(1) = \begin{cases} D^k f(0), & se \quad k \text{ é } par \\ -D^k f(0), & se \quad k \text{ é } ímpar \end{cases}$$

Logo, pelo **Lema 01**, $D^k f(1)$ é inteiro.

Exemplo 2.5.4: Considere uma circunferência de diâmetro unitário. O comprimento e o diâmetro desta circunferência são segmentos incomensuráveis, ou seja, π é irracional. De fato, Suponha que

$$\pi^2 = \frac{p}{q}, \text{ com } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^* \ e\ mdc(p,q) = 1$$

e considere a função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = q^n \left\{\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + ... - \pi^2 D^{2n-2} f(x) + D^{2n} f(x)\right\}.$$

Segue daí e dos lemas 01 e 02 que $F(0)$ e $F(1)$ são inteiros. Observe agora que

$$\begin{aligned} (F'(x)\, sen\, \pi x \, - \, \pi F(x)\, cos\, \pi x)' &= F''(x)\, sen \pi x \, + \pi\, F'(x) cos\, \pi x \\ &\quad -\pi F'(x)\, cos\, \pi x + \pi^2\, F(x)\, sen\, \pi\, x \\ &= F''(x)\, sen\, \pi x + \pi^2\, F(x)\, sen\, \pi\, x \end{aligned}$$

Além disso,

$$F(x) = q^n \left\{\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + ... - \pi^2 D^{2n-2} f(x) + D^{2n} f(x)\right\}.$$

nos dá

$$F''(x) = q^n \left\{\pi^{2n} D^2 f(x) - \pi^{2n-2} D^4 f(x) + ... - \pi^2 D^{2n} f(x)\right\}$$

pois $D^{2n+2} f(x) = 0$. E daí,

$$\begin{aligned} F''(x)\, sen\, \pi x &= q^n sen\, \pi x \{\pi^{2n} D^2 f(x) - \pi^{2n-2} D^4 f(x) + ... \\ ... & \quad + \pi^4 D^{2n-2} f(x) - \pi^2 D^{2n} f(x)\} \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\pi^2 F(x)\, sen\, \pi x &= q^n sen\, \pi x\{\pi^{2n+2} f(x) - \pi^{2n} D^2 f(x) + \ldots \\ \ldots &\quad -\pi^4 D^{2n-2} f(x) + \pi^2 D^{2n} f(x)\}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}F^{''}(x)\, sen\, \pi x + \pi^2 F(x)\, sen\, \pi x &= q^n \pi^{2n+2} f(x) sen\, \pi x \\ &= p^n\, \pi^2\, f(x)\, sen\, \pi x\end{aligned}$$

Assim,

$$(F^{'}(x)\, sen\, \pi x \;-\; \pi F(x)\, cos\, \pi x)^{'} = p^n\, \pi^2\, f(x)\, sen\, \pi x$$

e

$$\pi p^n \int_0^1 f(x)\, sen\, \pi\, x\, dx = F(1) + F(0).$$

Como $0 < x < 1 \implies 0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$, temos

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x)\, sen\, \pi\, x\, dx < \pi \frac{p^n}{n!} \int_0^1 sen\, \pi\, x\; dx = \frac{2p^n}{n!}$$

Então temos,

$$0 < \pi\, p^n \int_0^1 f(x)\, sen\, \pi\, x\, dx < \frac{2p^n}{n!}$$

Como $lim\, \dfrac{p^n}{n!} = 0$, existe n tal que $\dfrac{2p^n}{n!} < 1$, donde vem

$$0 < \pi\, p^n \int_0^1 f(x)\, sen\, \pi\, x\, dx < 1$$

Um absurdo, pois

$$\pi\, p^n \int_0^1 f(x)\, sen\, \pi\, x\, dx = F(1) + F(0)$$

é um número inteiro. Logo, π^2 é irracional, donde vem que π é irracional.

Os exemplo 2.5.3 mostra que se faz necessário construir um novo conjunto tal que a equação $x^2 = 2$ possui solução. O próximo capítulo é dedicado a isto.

3

A construção dos números reais por sequências de Cauchy

Em um primeiro curso de Análise Real define-se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais como sendo um corpo ordenado, onde vale o Axioma da Completude (todo subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$ e limitado superiormente possui supremo). Cabe agora a seguinte pergunta: existe um conjunto com essas característica? A resposta é sim. Neste capítulo mostraremos a construção dos números reais através das sequências de Cauchy de números racionais. Para isso consideraremos o conjunto C de todas as sequências de Cauchy de números racionais e a partir dele definiremos o conjunto $\mathbb{R}$ cujos elementos são conjuntos de sequências de Cauchy de números racionais com uma certa propriedade. Neste conjunto $\mathbb{R}$ definiremos as operações de *adição* e *multiplicação* e demostraremos que $\mathbb{R}$ munido dessas operações é um corpo. Definiremos também a ordem em $\mathbb{R}$ e provaremos que com ela $\mathbb{R}$ é ordenado e finalmente, demostraremos que $\mathbb{R}$ satisfaz o Axioma da Completude. Esse corpo $\mathbb{R}$ será o conjunto do números reais.

3.1 Conceitos iniciais

Nesta seção faremos a definição formal dos números reais como classes de equivalências.

Definição 3.1: Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais e $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ uma função. Dizemos que s é uma sequência de números racionais.

Assim, sendo $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ uma sequência de números racionais, o elemento x_n é um certo número racional e é chamado o n-ésimo termo da sequência s. Neste trabalho indicaremos a sequência $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ por (x_n) e o conjunto formado por seus elementos por $\{x_n\}$.

Exemplo 3.1.1: A sequência (x_n) tal que para todo número natural n, $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

é uma sequência de números racionais com $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{2}$, etc.

Definição 3.2: Uma sequência $(x_n), \{x_n\} \subset \mathbb{Q}$, é dita convergente em $\mathbb{Q}$ se existe $a \in \mathbb{Q}$ de modo que, para todo $\epsilon > 0$ racional, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, tem-se $|x_n - a| < \epsilon$. Este elemento a é chamado *limite da sequência* e escrevemos $lim\, x_n = a$.

Exemplo 3.1.2: A sequência $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge para zero. De fato, pelo binômio de Newton podemos escrever,

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ ... \ + \binom{n}{n} > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + n$$

Assim, dado $\epsilon > 0$ racional tomamos $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon} - 1$. Então, para todo $n > n_0$, teremos

$$n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \ \Rightarrow \ 1 + n > \frac{1}{\epsilon} \ \Rightarrow \ 2^n > 1 + n > \frac{1}{\epsilon} \ \Rightarrow \ 2^n > \frac{1}{\epsilon}$$

e daí, $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$ *e* $\left|\dfrac{1}{2^n} - 0\right| < \epsilon$, o que mostra que $lim\, x_n = 0$.

Definição 3.3: Uma sequência $(x_n), \{x_n\} \subset \mathbb{Q}$, é dita sequência de Cauchy de números racionais quando para qualquer racional $\epsilon > 0$, existir um natural n_0 tal que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ com $m, n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$.

Exemplo 3.1.3: A sequência $x_n = c$, $c \in \mathbb{Q}$ constante é de Cauchy de números racionais. De fato, dado $\epsilon > 0$ racional tome, por exemplo, $n_0 = 1$. Assim, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 1$ tem-se $|x_m - x_n| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$.

Exemplo 3.1.4: A sequência $x_n = \frac{1}{n}$ é de Cauchy de números racionais. De fato, dado $\epsilon > 0$ racional tome n_0 tal que $\dfrac{1}{n_0} < \epsilon$. Assim, sem perda de generalidade, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n > n_0$ podemos escrever

$$0 < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$$

e dai, subtraindo $\dfrac{1}{m}$ em todos os membros dessa desigualdade obtemos

$$-\frac{1}{m} < 0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} - \frac{1}{m}.$$

Finalmente, como $m \geq n_0$, temos

$$-\frac{1}{n_0} \leq -\frac{1}{m} < 0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0}.$$

Portanto, para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n > n_0$ temos

$$-\frac{1}{n_0} < \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n_0} \Longrightarrow \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n_0} \Longrightarrow |x_m - x_n| < \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Exemplo 3.1.5: A sequência $x_n = (-1)^n$, não é de Cauchy de números racionais. De fato, considere $\epsilon = 1$. Para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ temos que n_0+1 é par e n_0+2 é ímpar, ou o contrário. De qualquer forma $|a_{n_0+2} - a_{n_0+1}| = |(-1)^{n_0+2} - (-1)^{n_0+1}| = 2 > 1 = \epsilon$, e portanto (x_n) não é de Cauchy de números racionais.

Intuitivamente, se uma sequência é de Cauchy de números racionais os seus termos vão ficando cada vez mais próximo uns dos outros, à medida que cresce o índice n. Em particular, se os termos de uma sequência de números racionais vão se aproximando de um número racional fixado, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros. Este é o conteúdo do

Teorema 3.1: Toda sequência (x_n) de números racionais convergente em $\mathbb{Q}$ é de Cauchy de números racionais.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de números racionais convergindo para o racional a. Assim, dado $\epsilon > 0$ racional, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $m,m > n_0$ tem-se

$$|x_m - a| < \frac{\epsilon}{2} \;\; e \;\; |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí vem que

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_m - a + a - x_n| \\ &\leq |x_m - a| + |a - x_n| \\ &= |x_m - a| + |x_n - a| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $m,m > n_0$. Isso mostra que (x_n) é de Cauchy de números racionais. ■

Exemplo 3.1.6: Seja $a > 1$ um racional. A sequência $x_n = \dfrac{1}{a^n}$ é de Cauchy de números racionais. De fato, como $a > 1$ podemos escrever $a = 1 + x$, com $x > 0$. Dai, pela desigualdade de Bernoulli vem que $a^n = (1+x)^n \geq 1 + nx > 0$, donde vem que $\dfrac{1}{a^n} \leq \dfrac{1}{1+nx}$. Agora, dado ϵ racional tal que $0 < \epsilon < 1$ (isso é aceitável pois estamos interessados em valores pequenos para ϵ), tome $n_0 > \dfrac{1-\epsilon}{x\epsilon}$. Assim,

$$\begin{aligned} n > n_0 &\Longrightarrow n > \frac{1-\epsilon}{x\epsilon} \Longrightarrow nx > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \Longrightarrow nx > \frac{1}{\epsilon} - 1 \\ &\Longrightarrow 1 + nx > \frac{1}{\epsilon} \Longrightarrow \frac{1}{1+nx} < \epsilon \Longrightarrow \frac{1}{a^n} \leq \frac{1}{1+nx} < \epsilon \\ &\Longrightarrow \frac{1}{a^n} < \epsilon \Longrightarrow \left|\frac{1}{a^n} - 0\right| < \epsilon \Longrightarrow |x_n - 0| < \epsilon. \end{aligned}$$

Isso mostra que a sequência (x_n) converge para $0 \in \mathbb{Q}$ e portanto, pelo teorema 3.1, (x_n) é de Cauchy de números racionais.

Exemplo 3.1.7: A sequência

$$x_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)}$$

é de Cauchy de números racionais. De fato, dado ϵ racional tal que $0 < \epsilon < 1$ tome $n_0 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. Assim, para todo $n > n_0$ podemos escrever:

$$\begin{aligned}
n > n_0 \quad &\Longrightarrow \quad n > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} \\
&\Longrightarrow \quad n > \frac{1}{\epsilon} - 1 \\
&\Longrightarrow \quad n + 1 > \frac{1}{\epsilon} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \left| -\frac{1}{n+1} \right| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \left| 1 - \frac{1}{n+1} - 1 \right| \\
&\Longrightarrow \quad \left| \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + ... + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - 1 \right| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad \left| \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} - 1 \right| < \epsilon \\
&\Longrightarrow \quad |x_n - 1| < \epsilon.
\end{aligned}$$

Isso mostra que a sequência (x_n) converge para $1 \in \mathbb{Q}$ e portanto, pelo teorema 3.1, (x_n) é de Cauchy de números racionais.

O teorema 3.1 nos diz que toda sequência de racionais convergente em $\mathbb{Q}$ é de Cauchy de números racionais, entretanto a recíproca não é verdadeira como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 3.1.8: A sequência (x_n) definida por $x_1 = 0$ e $x_{n+1} = \frac{1}{2 + x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é de Cauchy de números racionais, mas não é convergente em $\mathbb{Q}$. De fato, observe inicialmente que $x_n \geq 0$ para todo natural n. Assim, $2 + x_n \geq 2$ e $2 + x_{n-1} \geq 2$, donde vem que

$$(2 + x_n).(2 + x_{n-1}) \geq 4 \quad e \quad \frac{1}{(2 + x_n).(2 + x_{n-1})} \leq \frac{1}{4}$$

Logo podemos escrever,

$$\begin{aligned}
|x_{n+1} - x_n| &= \left| \frac{1}{2+x_n} - \frac{1}{2+x_{n-1}} \right| \\
&= \left| \frac{(2+x_{n-1}) - (2+a_n)}{(2+x_n).(2+x_{n-1})} \right| \\
&= \left| \frac{x_{n-1} - x_n}{(2+x_n).(2+x_{n-1})} \right| \\
&= \frac{|x_{n-1} - x_n|}{(2+x_n).(2+x_{n-1})} \\
&\leq \frac{1}{4} |x_n - x_{n-1}|
\end{aligned}$$

e dai,

$$\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &\leq \frac{1}{4} |x_2 - x_1| \\
|x_4 - x_3| &\leq \frac{1}{4} |x_3 - x_2| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 |x_2 - x_1| \\
|x_5 - x_4| &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 |x_2 - x_1| \\
&\ldots \\
|x_{n+1} - x_n| &\leq \frac{1}{4} |x_4 - x_3| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} |x_2 - x_1| .
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $m,n \in \mathbb{N}$, com $m \geq n$ temos

$$\begin{aligned}
|x_m - x_n| &= |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + ... + (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n)| \\
&\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + ... + |x_{n+2} - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + ... + \left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right] |x_2 - x_1| \\
&= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} . \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{\frac{1}{4} - 1} |x_2 - x_1| \\
&= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}}{\frac{3}{4}} |x_2 - x_1| \\
&= \left[\frac{16}{3}.\frac{1}{4^n} - \frac{16}{3}.\frac{1}{4^m}\right] |x_2 - x_1| \\
&< \frac{16}{3}.\frac{1}{4^n} |x_2 - x_1| \\
&= \frac{16}{3}. |x_2 - x_1| . \frac{1}{4^n}
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo exemplo 3.1.6 a sequência $\left(\frac{1}{4^n}\right)$ converge para zero. Assim, dado $\epsilon > 0$ racional, existe n_0 natural tal que

$$n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Longrightarrow \frac{1}{4^n} < \frac{3\epsilon}{16\,|x_2 - x_1|}.$$

Concluímos então, que para todo $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0$ podemos escrever

$$|x_m - x_n| < \frac{16}{3}. |x_2 - x_1| . \frac{1}{4^n} < \epsilon.$$

Isso mostra que a sequência (x_n) é de Cauchy. Para o que falta, suponhamos que $lim\, x_n = a$, a racional. Dai

$$a = lim\, x_{n+1} = lim\, x_n = lim \frac{1}{2 + x_n} = \frac{1}{2 + lim\, x_n} = \frac{1}{2 + a}.$$

Então, $a = \dfrac{1}{2 + a}$ o que implica $(a + 1)^2 = 2$. Porém, como $a \in \mathbb{Q}$, $a + 1 \in \mathbb{Q}$ e é tal que seu quadrado é 2. Mas isso é uma contradição pois sabendo que isso não é possível em $\mathbb{Q}$. Dessa forma, a sequência (x_n) é de Cauchy de números racionais mas não é convergente em $\mathbb{Q}$.

Este exemplo mostra que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é incompleto no sentido de que ele não possui números que sejam limites de algumas sequências Cauchy.

3.2 Definindo o conjunto dos números reais.

Definição 3.4: Seja C o conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais. Definiremos a relação R de Cem C como,

$$R = \{(x_n, y_n) \in C \times C;\ (x_n) \approx (y_n)\ se,\ e\ somente\ se,\ lim(x_n - y_n) = 0\}\,.$$

Exemplo 3.2.1: Se $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ e $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ para todo natural n, então $(x_n, y_n) \in R$ pois

$$lim\,(x_n - y_n) = lim\left(1 + \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{n}\right) = lim\,\frac{2}{n} = 0.$$

Por outro lado, se $z_n = \dfrac{2n+1}{n}$ e $w_n = \dfrac{1}{2^n}$ para todo natural n, então $(z_n,w_n) \notin R$ pois

$$lim\,(z_n - w_n) = lim\left(\frac{2n+1}{n} + \frac{1}{2^n}\right) = lim\,2 + lim\,\frac{1}{n} + lim\,\frac{1}{2^n} = 2 + 0 + 0 = 2 \neq 0$$

A relação R definida acima é uma relação de equivalência, como mostra o teorema seguinte.

Teorema 3.2: A relação R é de equivalência, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(x_n) \approx (x_n)$ (reflexiva)
(ii) $(x_n) \approx (y_n) \Leftrightarrow (y_n) \approx (x_n)$ (simétrica)
(iii) $(x_n) \approx (y_n)\ e\ (y_n) \approx (z_n) \Rightarrow (x_n) \approx (z_n)$ (transitiva)

Demonstração. Sejam $(x_n), (y_n)$ e (z_n) sequências de Cauchy de números racionais.
(i) $lim\,(x_n - x_n) = lim\,0 = 0$. Isso mostra que $(x_n) \approx (x_n)$.
(ii) Se $(x_n) \approx (y_n)$, então $lim\,(x_n - y_n) = 0$ e podemos escrever $lim\,(y_n - x_n) = lim\,(-1)(x_n - y_n) = lim\,(-1).lim\,(x_n - y_n) = (-1.)0 = 0$. Isso mostra que $(y_n) \approx (x_n)$.
(iii)Se $(x_n) \approx (y_n)\ e\ (y_n) \approx (z_n)$, então $lim\,(x_n - y_n) = 0$ e $lim\,(y_n - z_n) = 0$ e podemos escrever, $lim\,(x_n - z_n) = lim\,((x_n - y_n) + (y_n - z_n)) = lim\,(x_n - y_n) + lim\,(y_n - z_n) = 0 + 0 = 0$. Isso mostra que $(x_n) \approx (z_n)$.
Isso mostra que a relação R é de equivalência. ■

Definição 3.5: Considere a sequência $(x_n) \in C$, definiremos a classe de equivalência de (x_n), que denotaremos por $[x_n]$, como o conjunto

$$[x_n] = \{(y_n) \in C; (x_n) \approx (y_n)\}$$

Exemplo 3.2.2: Se $x_n = \dfrac{1}{n}$ então $\left[\dfrac{1}{n}\right] = \left\{\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \dfrac{3}{n}, ...\right\}$. Se porém $x_n = 1$, então a sequência (y_n) definida por $y_n = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + ... + \dfrac{9}{10^n}$ é tal que $(y_n) \in [\,1\,]$.

Sendo R uma relação de equivalência, o teorema 2.2 garante que ela divide o conjunto $C \times C$ em classes de equivalência duas a duas disjuntas tais que a união de todas elas nos dá o próprio C. Ou seja, todo elemento de C pertence a uma e somente uma classe de equivalência $[x_n]$. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 3.6: Definimos o conjunto dos números reais, que denotaremos por $\mathbb{R}$, como

$$\mathbb{R} = \{[\,x_n\,]; (x_n) \in C\}$$

Assim, vemos que os elementos do conjunto $\mathbb{R}$, chamados números reais, são classes de equivalência, cujos elementos são sequências de Cauchy de números racionais que se relacionam através da relação $\approx$. Além disso, os teoremas 2.2 e 3.2 garantem que o conjunto $\mathbb{R}$ está bem definido, pois não existe uma sequência de Cauchy de números racionais que pertence simultaneamente a duas classes de equivalência.

Observe que o conjunto $\mathbb{R}$ assim definido contém uma cópia do conjunto $\mathbb{Q}$. De fato, se r é um racional, então r é identificado com a classe de equivalência $[r_n = r] = \{(y_n) \in C; (y_n) \approx (r)\}$. Por exemplo $[0]$ é o número real que corresponde ao conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais que convergem para o racional 0, pois $lim\,(y_n - r) = 0$ implica $lim\,(y_n) = r$. Analogamente, $[\,1\,]$ é o número real que corresponde ao conjunto de todas as sequências de números racionais que convergem para o número racional 1, pois $lim\,(y_n - 1) = 0$ implica $lim\, y_n = 1$.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto de classes de equivalências. Precisamos mostrar que ele é um corpo ordenado onde se verifica o axioma da completude. Para isso, precisamos definir no conjunto $\mathbb{R}$ as operações de adição e multiplicação e a ordem.

3.3 O conjunto $\mathbb{R}$ como corpo.

Nesta seção definiremos as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$ e mostraremos que ele satisfaz as propriedade de um corpo.

3.3.1 Adição em $\mathbb{R}$.

Caminharemos agora no sentido de definir a operação de adição em $\mathbb{R}$. Inicialmente, a fim de bem definir a adição de dois números reais, precisamos provar os teoremas seguintes.

Teorema 3.3: Se (x_n) e (y_n) são duas sequências de Cauchy de números reacionais, então a sequência $(x_n + y_n)$ também é de Cauchy de números racionais.

Demonstração. Como (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy de números racionais, para todo n natural temos que $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ e dai, $(x_n + y_n) \in \mathbb{Q}$. Além disso, dado $\epsilon > 0$ racional, existem $n_0^{'}$ e $n_0^{''}$ tais que,

(i) $m^{'},n^{'} \in \mathbb{N}$, $m^{'},n^{'} > n_0^{'} \Rightarrow |x_{m'} - x_{n'}| < \dfrac{\epsilon}{2}$

(ii) $m^{''},n^{''} \in \mathbb{N}$, $m^{''},n^{''} > n_0^{''} \Rightarrow |y_{m''} - y_{n''}| < \dfrac{\epsilon}{2}$

Tomando agora $n_0 = \text{máx}\{n_0^{'},n_0^{''}\}$, para todo $m,n > n_0$ podemos escrever

$$|(x_m+y_m)-(x_n+y_n)| = |(x_m-x_n)+(y_m-y_n)| = |(x_m-x_n)|+|(y_m-y_n)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso mostra que a sequência $(x_n + y_n)$ é de Cauchy de números racionais. ■

Teorema 3.4: Sejam $(x_n), (y_n), (z_n)$ *e* (w_n) sequências de Cauchy de números racionais. Se $(x_n) \approx (y_n)$ e $(z_n) \approx (w_n)$ então $(x_n + z_n) \approx (y_n + w_n)$.

Demonstração. De fato, como $(x_n) \approx (y_n)$ e $(z_n) \approx (w_n)$ temos, por definição, que $lim\,(x_n - y_n) = lim\,(z_n - w_n) = 0$. Assim podemos escrever,

$$\begin{aligned} lim\,[(x_n + z_n) - (y_n - w_n)] &= lim\,[(x_n - y_n) + (z_n - w_n)] \\ &= lim\,[(x_n - y_n)] + lim\,[(z_n - w_n)] \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $lim\,[(x_n+z_n)-(y_n-w_n)] = 0$ e portanto $(x_n+z_n) \approx (y_n+w_n)$. ■

Definição 3.7: Considere dois números reais $[\,x_n\,]$ e $[\,y_n\,]$. Definimos a soma de $[\,x_n\,]$ com $[\,y_n\,]$, e indicamos $[\,x_n\,] + [\,y_n\,]$, como

$$[\,x_n\,] + [\,y_n\,] = [\,x_n + y_n\,]$$

.

Em vista dos teoremas 3.3 e 3.4 a soma de dois números reais está bem definida, pois o primeiro garante que $(x_n + y_n)$ é uma sequência de Cauchy de números racionais, donde vem que $[x_n + y_n]$ é uma classe de equivalência e portanto é um número real. O segundo nos dá que a operação soma independe do representante da classe, ou seja, se $a,b \in [\,x_n\,]$ e $c,d \in [\,y_n\,]$, então

$$[\,x_n\,] + [\,y_n\,] = [\,a\,] + [\,c\,] = [\,a\,] + [\,d\,] = [\,b\,] + [\,c\,] = [\,b\,] + [\,d\,] = [\,x_n + y_n\,].$$

Mostraremos agora que a operação soma satisfaz as propriedades da adição de um corpo.

Teorema 3.5: Considere $x = [\,x_n\,]$, $y = [\,y_n\,]$ e $z = [\,z_n\,]$ números reais. Valem as seguintes propriedades.

(A1) comutativa: $x + y = y + x$;
(A2) associativa: $(x + y) + z = x + (y + z)$;
(A3) elemento neutro: existe um 0 (zero) tal que $x + 0 = x$;
(A4) simétrico: existe $(-x)$ tal que $x + (-x) = 0$.

Demonstração.
(A1) De fato, uma vez que em $\mathbb{Q}$ vale a propriedade comutativa da adição e, além disso, para todo natural n, x_n,$y_n \in \mathbb{Q}$ podemos escrever,

$$x + y = [\,x_n\,] + [\,y_n\,] = [\,x_n + y_n\,] = [\,y_n + x_n\,] = [\,y_n\,] + [\,x_n\,] = y + x$$

(A2) Novamente, uma vez que em $\mathbb{Q}$ vale a propriedade associativa da adição e, além disso, para todo natural n, x_n,$y_n \in \mathbb{Q}$ podemos escrever,

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= ([\,x_n\,] + [\,y_n\,]) + [\,z_n\,] \\ &= [\,x_n + y_n\,] + [\,z_n\,] \\ &= [(\,x_n + y_n) + z_n\,] \\ &= [\,x_n + (y_n + z_n)\,] \\ &= [\,x_n] + [y_n + z_n\,] \\ &= [\,x_n] + ([y_n] + [z_n\,]) \\ &= x + (y + z) \end{aligned}$$

(A3) Considere a classe de equivalência $[\,0\,]$. Tomando como representante desta classe a sequência constante cujos termos são todos iguais a zero, temos

$$x + [\,0\,] = [\,x_n\,] + [\,0\,] = [\,x_n + 0\,] = [\,x_n\,] = x.$$

Isso mostra que a classe de equivalência $[\,0\,]$ é o elemento neutro da adição, ou seja, $0 = [\,0\,]$.

(A4) Observe inicialmente que dado $x = [\,x_n\,] \in \mathbb{R}$ temos que $(-x) = [\,-x_n\,] \in \mathbb{R}$. De fato, como para todo natural n, $x_n \in \mathbb{Q}$, segue que $-x_n \in \mathbb{Q}$. Além disso, como (x_n) é de Cauchy de números racionais, dado $\epsilon > 0$ racional, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0 \Rightarrow |x_m - x_n| < \epsilon$. Dai, para todos $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0$ podemos escrever

$$|-x_m - (-x_n)| = |-x_m + x_n| = |x_m - x_n| < \epsilon.$$

Isso mostra que $(-x_n)$ é de Cauchy de números racionais e portanto $[\,-x_n\,] \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$x + [\,-x_n\,] = [\,x_n\,] + [\,-x_n\,] = [\,x_n + (-x_n)\,] = [\,x_n - x_n\,] = [\,0\,] = 0.$$

Isso mostra que $(-x) = [\,-x_n\,]$ é o simétrico de $x = [\,x_n\,]$. ■

3.3.2 Multiplicação em $\mathbb{R}$

Vamos agora tratar da operação de multiplicação em $\mathbb{R}$. Para bem definí-la e demonstrarmos suas propriedades, precisamos das definições e teoremas seguintes.

Definição 3.8: Sejam $[\,x_n\,], [\,y_n\,] \in \mathbb{R}$. Dizemos que $[\,x_n\,]$ é igual a $[\,y_n\,]$, e escrevemos $[\,x_n\,] = [\,y_n\,]$, quando $(x_n) \approx (y_n)$.

Definição 3.9: Sejam $[\,x_n\,], [\,y_n\,] \in \mathbb{R}$. Dizemos que $[\,x_n\,]$ é menor do que $[\,y_n\,]$, e escrevemos $[\,x_n] < [\,y_n\,]$, se existirem $d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n > n_0 \Longrightarrow x_n - y_n < -d.$$

Isto significa que todos os termos da sequência $(x_n - y_n)$, a partir do índice n_0, são menores do que $-d < 0$. Quando $[\,y_n\,] = [\,0\,]$ diremos que $[\,x_n\,]$ é negativo.

Definição 3.10: Sejam $[\,x_n\,], [\,y_n\,] \in \mathbb{R}$. Dizemos que $[\,x_n\,]$ é maior do que $[\,y_n\,]$, e escrevemos $[\,x_n\,] > [\,y_n\,]$, quando $[\,y_n] < [\,x_n\,]$.

Isto significa que todos os termos da sequência $(y_n - x_n)$, a partir do índice n_0, são menores do que $-d < 0$. Quando $[\,y_n\,] = [\,0\,]$ diremos que $[\,x_n\,]$ é positivo.

Exemplo 3.3.1: Se $x_n = \dfrac{3n+1}{n^2}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$ então $[x_n] = [y_n]$ pois,

$$lim\,(x_n - y_n) = lim\,\left(\frac{3n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) = lim\,\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) = lim\,\frac{2}{n} - lim\,\frac{1}{n^2} = 0 - 0 = 0$$

Por outro lado, se $x_n = -\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2}$ e $y_n = \dfrac{1}{n}$, então $[x_n] < [y_n]$ pois para todo natural n temos

$$x_n - y_n = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = -\frac{2}{n} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$$

O teorema seguinte mostra que 3.9 está bem definida, pois independe das sequências representativas das classes $[\,x_n\,], [\,y_n\,]$.

Teorema 3.6: Sejam (x_n),(y_n),(z_n) e (w_n) sequências de Cauchy de números racionais tais que $(x_n) \approx (z_n)$ e $(y_n) \approx (w_n)$. Se $[\,x_n\,] < [\,y_n\,]$ então $[\,z_n\,] < [\,w_n\,]$.

Demonstração. Como $[\,x_n\,] < [\,y_n\,]$ existe $d \in \mathbb{Q}, d > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1$ tem-se $x_n - y_n < -d$, ou seja, $y_n - x_n > d$. Por outro lado, como

$(x_n) \approx (z_n)$ e $(y_n) \approx (w_n)$, $lim\,(x_n - z_n) = lim\,(y_n - w_n) = 0$. Assim, existem $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ tais que

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_2 \Rightarrow |x_n - z_n| < \dfrac{d}{4} \Rightarrow -\dfrac{d}{4} < x_n - z_n < \dfrac{d}{4} \Rightarrow -\dfrac{d}{4} < z_n - x_n < \dfrac{d}{4}$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_3 \Rightarrow |y_n - w_n| < \dfrac{d}{4} \Rightarrow -\dfrac{d}{4} < y_n - w_n < \dfrac{d}{4}$

Tomando agora $n_0 = \text{máx}\,\{n_1,n_2,n_3\}$, para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ podemos escrever

$$-\frac{d}{4} - \frac{d}{4} < z_n - x_n + y_n - w_n < \frac{d}{4} + \frac{d}{4} \implies -\frac{d}{2} < (y_n - x_n) + (z_n - w_n) < \frac{d}{2}$$
$$\implies (y_n - x_n) < \frac{d}{2} + (w_n - z_n)$$

e portanto, como $y_n - x_n > d$,

$$d < y_n - x_n < \frac{d}{2} + (w_n - z_n) \implies d < \frac{d}{2} + (w_n - z_n)$$
$$\implies w_n - z_n > \frac{d}{2}$$

ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ tem-se que $z_n - w_n < -\dfrac{d}{2}$, $d \in \mathbb{Q}, d > 0$. Isso mostra que $[\,z_n\,] < [\,w_n\,]$. ■

Teorema 3.7: Se (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais que não converge para zero, então $[\,x_n\,] > 0$ ou $[\,x_n\,] < 0$.

Demonstração. De fato, como (x_n) não converge para zero, existe $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$ tal que para todo $n_0^{'}$, existe $m_0 > n_0^{'}$ tal que $|x_{m_0}| > \epsilon$. Por outro lado, como (x_n) é de Cauchy de números racionais, para esse mesmo ϵ racional, existe $n_0^{''}$ tal que $\forall m,n \in \mathbb{N}$, $m,n > n_0^{''}$ temos $|x_m - x_n| < \epsilon$. Fazendo agora $n_0^{'} = n_0^{''}$, $\forall n,m_0 \in \mathbb{N}$, $n > m_0 > n_0^{'} = n_0^{''}$ tem-se $|x_n - x_{m_0}| < \epsilon$ e dai,

$$x_{m_0} - \epsilon < x_n < x_{m_0} + \epsilon$$

Assim, se $x_{m_0} > 0$ então $|x_{m_0}| = x_{m_0} > \epsilon$, donde vem que

$$x_n > x_{m_0} - \epsilon > 0,\ \forall n > n_0^{'}$$

o que mostra que $[\,x_n\,] > 0$. Se porém, $x_{m_0} < 0$ então $|x_{m_0}| = -x_{m_0} > \epsilon$ donde vem que

$$x_n < x_{m_0} + \epsilon < 0,\ \forall n > n_0^{'}$$

e daí $[\,x_n\,] < 0$. ■

O teorema a seguir é conhecido como Lei da Tricotomia.

Teorema 3.8: Dados $[\,x_n\,], [\,y_n\,] \in \mathbb{R}$, exatamente uma das três possibilidades seguintes ocorre:
(i) $[\,x_n\,] = [\,y_n\,]$
(ii) $[\,x_n\,] > [\,y_n\,]$
(iii) $[\,x_n\,] < [\,y_n\,]$

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que pelo menos uma das três opções ocorre. De fato, dado $[\,x_n\,]$,$[\,y_n\,] \in \mathbb{R}$ ou $[\,x_n\,] = [\,y_n\,]$ ou $[\,x_n\,] \neq [\,y_n\,]$. Caso ocorra a igualdade, vale o item (i). Caso contrário, ou seja, $[\,x_n\,] \neq [\,y_n\,]$, as sequências (x_n) e (y_n) são tais que $lim\,(x_n - y_n) \neq 0$. Neste caso, o teorema 3.7 garante que $[\,x_n\,] > [\,y_n\,]$ ou $[\,x_n\,] < [\,y_n\,]$. Assim $[\,x_n\,] \neq 0$ nos dá (ii) ou (iii). Provaremos agora que (i),(ii) e (iii) não podem ocorrer simultaneamente. Suponhamos que (i) seja válida. Suponhamos também que (ii) ocorra simultaneamente com (i). De (ii) temos que existe $d > 0$ e um natural n_1 tal que para todo natural $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_1$ tem-se $x_n - y_n > d$. Por outro lado, de (i) temos que $\lim\,(x_n - y_n) = 0$. Assim existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$ temos

$$|x_n - y_n| < d \Leftrightarrow -d < x_n - y_n < d$$

Tomando agora $n_0 =$ máx$\{n_1,n_2\}$ para todo natural $n > n_0$ podemos escrever

$$x_n - y_n > d \ \ e \ \ x_n - y_n < d$$

Um absurdo. Suponhamos agora que (i) e (iii) sejam válidas. Assim, de (iii) existe um racional d_1 e $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ com $n > n_3$ temos

$$x_n - y_n < -d_1$$

Mas também temos que (i) ocorre, ou seja, existe $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_4$ temos

$$|x_n - y_n| < d_1 \Leftrightarrow |y_n - x_n| < d_1 \Leftrightarrow -d_1 < y_n - x_n < d_1$$

Tomando $n_0^{'} =$ máx $\{n_3,n_4\}$ para todo $n > n_0^{'}$ podemos escrever

$$y_n - x_n > d_1 \ \ e \ \ y_n - x_n < d_1$$

Um absurdo. Suponhamos agora que (ii) e (iii) sejam válidas. Assim, existem $d_1 \in \mathbb{Q}$, $d_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ tem-se

$$x_n - y_n < -d_1 \Leftrightarrow y_n - x_n > d_1$$

Também existem $d_2 \in \mathbb{Q}$, $d_2 > 0$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_2$ tem-se

$$x_n - y_n > d_2$$

Tomando $n_0 = \text{máx } \{n_1, n_2\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ podemos escrever

$$(y_n - x_n) + (x_n - y_n) > d_1 + d_2 \Rightarrow 0 > d_1 + d_2$$

Isso é uma contradição, já que d_1 e d_2 são números racionais tais que $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$. Concluímos então que uma e somente uma das três possibilidades pode ocorrer. ■

Teorema 3.9: Se (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais que não converge para zero, tal que $x_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então a sequência $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ também é de Cauchy de números racionais.

Demonstração. Como (x_n) não converge para zero, temos que $[x_n] \neq 0$. Assim, pelo teorema 3.8, $[x_n] > 0$ ou $[x_n] < 0$. Suponha $[x_n] > 0$ (o outro caso é anlálogo). Neste caso, existe $d \in \mathbb{Q}, d > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1$ tem-se

$$x_n > d \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \frac{1}{d}.$$

Por outro lado, sendo (x_n) de Cauchy de números racionais, dado $\epsilon \in \mathbb{Q}$, $\epsilon > 0$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m,n \in \mathbb{Q}, m,n > n_2$ tem-se

$$|x_m - x_n| < d^2\,\epsilon.$$

Tomando agora $n_0 = \text{máx } \{n_1, n_2\}$, para todo $n \in \mathbb{N}, n > n_0$ podemos escrever

$$\left|\frac{1}{x_m} - \frac{1}{x_n}\right| = \frac{|x_n - x_m|}{|x_m . x_n|} = \frac{|x_m - x_n|}{x_m . x_n} < \frac{1}{d} . \frac{1}{d} . d^2\,\epsilon = \epsilon.$$

Isso mostra que a sequência $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ também é de Cauchy de números racionais. ■

Teorema 3.10: Seja $[\,x_n\,] \in \mathbb{R}$. Se $[\,x_n\,] \neq 0$ então existe uma sequência (y_n) de Cauchy de números racionais, de termos todos diferentes de zero tais que $(x_n) \approx (y_n)$.

Demonstração. Como $[\,x_n\,] \neq 0$ então, pelo teorema 3.8, $[\,x_n\,] > 0$ ou $[\,x_n\,] < 0$. Suponha $[\,x_n\,] > 0$ (o outro caso é análogo). Neste caso, existem $d_1 \in \mathbb{Q}, d_1 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que $\forall n \in \mathbb{N}, n > n_1$ tem-se

$$x_n > d_1$$

Considere agora a sequência (y_n) definida por

$$y_n = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 1 \leq n \leq n_1 \\ x_n, & \text{se} \quad n > n_1 \end{cases}$$

Assim, $y_n > 0$ para todo natural n. Além disso, dado $\epsilon \in \mathbb{Q}, \epsilon > 0$, tomando

$n_0 = n_1$, para todo natural $n > n_0 = n_1$ temos

$$|(x_n - y_n) - 0| = |0 - 0| = 0 < \epsilon.$$

Isso mostra que $lim\,(x_n - y_n) = 0$ e portanto $(x_n) \approx (y_n)$. ■

Teorema 3.11: Toda sequência de Cauchy de números racionais é limitada.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números racionais. Então tomando $\epsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m,n \in \mathbb{N}$, $m,n \geq n_0$ tem-se $|x_m - x_n| < 1$. Em particular, $|x_n - x_{n_0}| < 1$. para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$. Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ temos

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| = |(x_n - x_{n_0}) + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < 1 + |x_{n_0}|$$

Tomando $k = \text{máx}\{|x_1|,|x_2|, \ldots ,|x_{n_0}|,1 + |x_{x_0}|\}$ temos $|x_n| \leq k$ para todo natural n, ou seja (x_n) é limitada. ■

Teorema 3.12: Se (x_n) e (y_n) sequências de Cauchy de números racionais tais que $lim\, y_n = 0$, então $lim\,(x_n.y_n) = 0$.

Demonstração. Como (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais, o teorema 3.11 garante que existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_n| \leq k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. além disso, como (y_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais que converge para zero, dado $\epsilon > 0$ racional, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ tem-se $|y_n| < \dfrac{\epsilon}{k}$. Logo, para todo natural n, $n > n_0$ podemos escrever

$$|x_n.y_n - 0| = |x_n.y_n| = |x_n|.|y_n| < k.\frac{\epsilon}{k} = \epsilon.$$

Isso mostra que $lim\,(x_n.y_n) = 0$. ■

Teorema 3.13: Se (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy de números racionais, o mesmo ocorre com a sequência $(x_n.y_n)$.

Demonstração. Como (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy de números racionais, o teorema 3.11 garante que existe $k \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_n| \leq k$ e $|y_n| \leq k$. Também, como $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$ temos que $(x_n.y_n) \in \mathbb{Q}$. Além disso, dado $\epsilon > 0$ racional existem $n_0^{'}$ e $n_0^{''}$ tais que

(i) $m^{'}, n^{'} > n_0^{'} \Rightarrow |x_{m^{'}} - x_{n^{'}}| < \dfrac{\epsilon}{2k}$

(i) $m^{''}, n^{''} > n_0^{''} \Rightarrow |y_{m^{'}} - y_{n^{'}}| < \dfrac{\epsilon}{2k}$

Tomando agora $n_0 = \text{máx}\{n_0^{'}, n_0^{''}\}$, para todo $m,n > n_0$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
|x_m.y_m - x_n.y_n| &= |x_m.y_m - x_m.y_n + x_m.y_n - x_n.y_n| \\
&= |x_m(y_m - y_n) + y_n(x_m - x_n)| \\
&\leq |x_m(y_m - y_n)| + |y_n(x_m - x_n)| \\
&< k.\frac{\epsilon}{2k} + k.\frac{\epsilon}{2k} \\
&= \frac{\epsilon}{k} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

e portanto a sequência $(x_n.y_n)$ é de Cauchy de números racionais. ■

Teorema 3.14: Se (x_n),(y_n),(z_n) *e* (w_n) são sequência de Cauchy de números racionais tais que $(x_n) \approx (y_n)$ e $(z_n) \approx (w_n)$ então $(x_n.z_n) \approx (y_n.w_n)$.

Demonstração. De fato, como $(x_n) \approx (y_n)$ e $(z_n) \approx (w_n)$ temos, por definição , que $lim\,(x_n - y_n) = lim\,(z_n - w_n) = 0$. Isso, juntamente com o teorema 3.12 nos dão que $lim\,[x_n(z_n - w_n)] = lim\,[w_n(x_n - y_n)] = 0$. Assim podemos escrever

$$\begin{aligned}
lim\,(x_n.z_n - y_n.w_n) &= lim\,(x_n.z_n - x_n.w_n + x_n.w_n - y_n.w_n) \\
&= lim\,[x_n(z_n - w_n) + w_n(x_n - y_n)] \\
&= lim\,[x_n(z_n - w_n)] + lim\,[w_n(x_n - y_n)] \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

Isso mostra que $(x_n.z_n) \approx (y_n.w_n)$. ■

Agora, de posse dessas desses conceitos e teoremas, podemos definir a operação de multiplicação em $\mathbb{R}$ bem como demonstrar suas propriedades.

Definição 3.11: Considere dois números reais $[\,x_n\,]$ e $[\,y_n\,]$. Definimos o produto de $[\,x_n\,]$ por $[\,y_n\,]$, e indicamos $[\,x_n\,].[\,y_n\,]$, como

$$[\,x_n\,].[\,y_n\,] = [\,x_n.y_n\,]$$

.

Em vista dos teoremas 3.13 e 3.14 o produto de dois números reais está bem definido, pois o primeiro garante que $(x_n.y_n)$ é uma sequência de Cauchy de números racionais, donde vem que $[x_n.y_n]$ é uma classe de equivalência e portanto é um número real. O segundo nos da que a operação multiplicação independe do representante da classe, ou seja, se $a,b \in [\,x_n\,]$ e $c,d \in [\,y_n\,]$, então

$$[\,x_n\,].[\,y_n\,] = [\,a\,].[\,c\,] = [\,a\,].[\,d\,] = [\,b\,].[\,c\,] = [\,b\,].[\,d\,] = [\,x_n.y_n\,].$$

Passaremos agora a demonstrar as propriedades da multiplicação de um corpo.

Teorema 3.15: Considere $x = [\,x_n\,]$, $y = [\,y_n\,]$ e $z = [\,z_n\,]$ números reais. Valem as seguintes propriedades.
(M1) comutativa: $x.y = y.x$;
(M2) associativa: $(x.y).z = x.(y.z)$;
(M3) elemento neutro: existe um 1 (um) tal que $x.1 = x$;
(M4) inverso: se $x \neq 0$, existe x^{-1} tal que $x.x^{-1} = 1$;
(M5) distributiva: $x.(y + z) = x.y + x.z$.

Demonstração.
(M1) Uma vez que em $\mathbb{Q}$ vale a propriedade comutativa da multiplicação e, além disso, para todo natural n, x_n,$y_n \in \mathbb{Q}$ podemos escrever,

$$x.y = [\,x_n\,].[\,y_n\,] = [\,x_n.y_n\,] = [\,y_n.x_n\,] = [\,y_n\,].[\,x_n\,] = y.x$$

(M2) De fato, uma vez que em $\mathbb{Q}$ vale a propriedade associativa da multiplicação e, além disso, para todo natural n, x_n,$y_n \in \mathbb{Q}$ podemos escrever,

$$\begin{array}{rclcl} (x.y).z & = & ([\,x_n\,].[\,y_n\,])\,.[\,z_n\,] & = & [\,x_n.y_n\,].[\,z_n\,] \\ & = & [(\,x_n.y_n).z_n\,] & = & [\,x_n.(y_n.z_n)\,] \\ & = & [\,x_n].[y_n.z_n\,] & = & [\,x_n].([y_n].[z_n\,]) \\ & = & x.(y.z) & & \end{array}$$

(M3) Considere a classe de equivalência $[\,1\,]$. Tomando como representante desta classe a sequência cujos termos são todos iguais a um, temos

$$x.[\,1\,] = [\,x_n\,].[\,1\,] = [\,x_n.1\,] = [\,x_n\,] = x.$$

Isso mostra que a classe de equivalência $[\,1\,]$ é o elemento neutro da multiplicação, ou seja, $1 = [\,1\,]$.

(M4) Como $x = [\,x_n\,] \neq 0$, o teorema 3.10 garante que existe uma sequência de Cauchy de números racionais (w_n) de termos todos diferentes de zero tais que $(x_n) \approx (w_n)$. Assim podemos considerar $x = [\,w_n\,]$. Pelo teorema 3.9, $\left(\dfrac{1}{w_n}\right)$ é de Cauchy de números racionais, portanto $\left[\frac{1}{w_n}\right] \in \mathbb{R}$ e podemos escrever

$$x.\left[\frac{1}{w_n}\right] = [\,w_n\,].\left[\frac{1}{w_n}\right] = \left[w_n.\frac{1}{w_n}\right] = [\,1\,] = 1$$

Isso mostra que $x^{-1} = \left[\frac{1}{w_n}\right]$.

(M5) De fato, o conjunto dos números racionais possui a propriedade distributiva, dai, como $[\,x_n\,], [\,y_n\,]$ e $[\,z_n\,]$ são sequências de números racionais, podemos escrever

$$\begin{aligned} x(y+z) &= [\,x_n\,][\,y_n+z_n] \\ &= [\,x_n(\,y_n+z_n\,)] \\ &= [\,x_n.y_n+x_n.z_n\,] \\ &= [\,x_n.y_n]+[x_n.z_n\,] = \\ &= [\,x_n\,].[\,y_n\,]+[\,x_n\,][\,w_n\,] \\ &= xy+xz \end{aligned}$$

■

Concluímos então que o conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas, respectivamente, em 3.7 e 3.11 constitui um corpo.

3.4 O conjunto $\mathbb{R}$ como corpo ordenado.

O objetivo desta seção é mostrar que o corpo dos reais é ordenado. Para isso vamos definir uma relação, mostrar que ele é de ordem e é compatível com a adição e multiplicação de números reais.

Definição 3.12: Sejam $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$. Dizemos que x é menor do que ou igual a y, e escrevemos $x \leqslant y$, quando $x < y$ ou $x = y$. Analogamente dizemos que x é maior do que ou igual a y, e escrevemos $x \geqslant y$, quando $y \leqslant x$.

Exemplo 3.4.1: Se $x_n = 1 + \dfrac{2}{n}$ e $y_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ então $(x_n) \approx (y_n)$ e daí os números reais $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$ são iguais, donde vem que $x \leqslant y$. Por outro lado, se $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ e $y_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, então para todo natural n temos

$$x_n - y_n = -1 < -\frac{1}{2}$$

Isso mostra que os números reais $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$ são tais que $x < y$ e portanto $x \leqslant y$.

Vamos agora definir uma relação sobre $\mathbb{R}$, mostrar que ela é de ordem e é compatível com a adição e com a multiplicação de números reais.

Definição 3.13: Definimos a relação S sobre $\mathbb{R}$ como

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leqslant y\}$$

Exemplo 3.4.2: Considere as sequências de Cauchy de números racionais $x_n = 2 + \dfrac{3}{n^2}$, $y_n = 2 + \dfrac{5}{n^2}$ e $z_n = 3 + \dfrac{3}{n^2}$. Os números reais $x = [x_n], y = [y_n]$ e $z = [z_n]$ são tais que $(x,y) \in S$, pois $x = y$ e $(x,z) \in S$, pois $x < z$.

Teorema 3.16: A relação S definida acima é satisfaz as propriedades
(i) reflexiva
(ii) antissimétrica
(iii) transitiva
(iv)total
(v) $x \leqslant y \Longrightarrow x + z \leqslant y + z$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$
(vi) $x \leqslant y \Longrightarrow x.z \leqslant y.z$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $z > 0$.

Demonstração. Sejam $x = [x_n]$, $y = [y_n]$ e $z = [z_n]$ números reais.
(i) $lim\,(x_n - x_n) = lim\,0 = 0$. Isso mostra que $(x_n) \approx (x_n)$, donde vem que $x = x$ e daí $x \leqslant x$. Isso mostra que S é reflexiva;
(ii) Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ então $(x < y\ ou\ x = y)$ e $(y < x\ ou\ y = x)$. O teorema 3.8 garante que as possibilidades $(x < y\ e\ y < x)$, $(x < y\ e\ y = x)$ e $(x = y\ e\ y < x)$ não podem ocorrer. Logo deve ocorrer $(x = y\ e\ y = x)$, ou seja, vale a igualdade. Isso mostra que S é antissimétrica.
(iii) Se $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ então $(x < y\ ou\ x = y)$ e $(y < z\ ou\ y = z)$. Se $x < y\ e\ y < z$ então existem $n_1,n_2 \in \mathbb{N}$ e $d_1,d_2 \in \mathbb{Q}$, $d_1,d_2 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} x_n - y_n &< -d_1, \ \forall n > n_1 \\ y_n - z_n &< -d_2, \ \forall n > n_2 \end{aligned}$$

Tomando $n_0 = \text{máx}\{n_1,n_2\}$ temos

$$x_n - z_n = (x_n - y_n) + (y_n - z_n) < -d_1 - d_2 = -(d_1 + d_2)$$

Isso mostra que $x < z$, donde vem que $x \leqslant z$. Se $x < y$ e $y = z$ ou $x = y$ e $y < z$ então $x < z$. Por fim se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$ donde vem $x \leqslant z$. Em qualquer caso $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implica em $x \leqslant z$. Isso mostra que S é transitiva.
(iv) Pela teorema 3.8 apenas uma das possibilidades ocorre: ou $x < y$ ou $x = y$ ou $x > y$. Se $x < y$ ou $x = y$ então $x \leqslant y$. Se $x > y$ então $y < x$ e daí $y \leqslant x$. Em qualquer caso temos $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Isso mostra que S é total. Concluímos então que S é uma relação de ordem.
(v) Se $x \leqslant y$ então $x < y$ ou $x = y$. No primeiro caso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ e $d \in \mathbb{Q}$, $d > 0$ tal que

$$x_n - y_n < -d \Longleftrightarrow (x_n + z_n) - (y_n + z_n) < -d, \ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0$$

Isso mostra que $x+z < y+z$ e daí $x+z \leqslant y+z$. No segundo caso, $lim\,(x_n - y_n) = 0$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ temos,

$$\begin{aligned}
|x_n - y_n| < \epsilon &\implies -\epsilon < x_n - y_n < \epsilon \\
&\implies -\epsilon < (x_n + z_n) - (y_n + z_n) < \epsilon \\
&\implies |(x_n + z_n) - (y_n + z_n)| < \epsilon \\
&\implies lim\,[(x_n + z_n) - (y_n + z_n)] = 0 \\
&\implies (x_n + z_n) \approx (y_n + z_n) \\
&\implies x + z = y + z
\end{aligned}$$

e daí $x + z \leqslant y + z$. Em qualquer caso, $x \leqslant y$ implica $x + z \leqslant y + z$.
(vi) Se $x < y$ e $z > 0$ então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ e $d_1, d_2 \in \mathbb{Q}$ tais que

$$x_n - y_n < -d_1, \ \ \forall n > n_1$$

$$z_n > d_2 > 0, \ \ \forall n > n_2$$

Tomando $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, como a ordem dos racionais é compatível com a multiplicação, podemos escrever

$$x_n - y_n < -d_1 \Longrightarrow -x_n + y_n > d_1 \Longrightarrow -x_n.z_n + y_n.z_n > d_1.z_n$$

e

$$z_n > d_2 \Longrightarrow d_1.z_n > d_1.d_2$$

daí vem que

$$-x_n.z_n + y_n.z_n > d_1.d_2$$

ou seja,

$$x_n.z_n - y_n.z_n < -d_1.d_2$$

Isso mostra que $xz < yz$ donde $xz \leqslant yz$. Considere agora o caso $x = y$ e $z > 0$. Neste Caso, $(x_n) \approx (y_n)$. Além disso, $(z_n) \approx (z_n)$ e daí $(x_n.z_n) \approx (y_n.z_n)$ donde vem $xz = yz$ e $xz \leqslant yz$. ■

Com este teorema concluímos que o conjunto $\mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação definidas neste capítulo e a relação de ordem S, é um copro ordenado.

3.5 O conjunto $\mathbb{R}$ como corpo ordenado completo.

Nas seções anteriores mostramos que o conjunto $\mathbb{R}$ munido das as operações de adição e multiplicação juntamente com a relação T constitui um corpo ordenado. Nesta seção mostraremos que $\mathbb{R}$ satisfaz o axioma da completude.

Teorema 3.17: Qualquer que seja o número real x, existe um número natural n tal que $n > x$.

Demonstração. Considere o número real $x = [x_m]$. Assim (x_m) é uma sequência de Cauchy de números racionais e portanto, pelo teorema 3.11, (x_m) é limitada, ou seja, existe um racional $K > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ tem-se

$$|x_m| \leq K \;\Leftrightarrow\; -K \leq x_m \leq K.$$

Por outro lado, sendo K racional, existem $p,q \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_m \leq K = \frac{p}{q} \leq p < p+1,\ \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Considere agora a sequência (y_m) de termos todos iguais a $p+1$ um representante do número real $n = [\,p+1\,]$. Observe que n é natural e além disso, $x_m < y_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Assim, $[\,x_m\,] < [\,y_m\,]$, ou seja, $n > x$. ■

Teorema 3.18: Dados dois números reais a e b, com $0 < a < b$, existe um número natural n tal que $na > b$, ou seja, o corpo dos reais é arquimediano.

Demonstração. Suponha, por absurdo, que para todo natural n tenhamos $na \leq b$. Assim, como $a > 0$ podemos escrever

$$na \leq b \;\Leftrightarrow\; naa^{-1} \leq ba^{-1} \;\Leftrightarrow\; n \leq ba^{-1},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, o teorema 3.17 garante que existe um natural m tal que $m > ba^{-1}$. Assim teremos $m \leq ba^{-1}$ e $m > ba^{-1}$. Uma contradição. Logo existe um natural n tal que $na > b$. Isso mostra que $\mathbb{R}$ é arquimediano. ■

Teorema 3.19: Uma sequência de Cauchy de números racionais que possui uma subsequência convergente (em $\mathbb{Q}$) é convergente e tem o mesmo limite que a subsequência.

Demonstração. De fato, seja (x_{n_k}) uma subsequência da sequência (x_n) tal que $lim\, x_{n_k} = c,\ c \in \mathbb{Q}$. Assim, dado um racional $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_{n_k} - c| < \frac{\epsilon}{2},\quad \forall n_k > n_1.$$

Além disso, sendo (x_n) de Cauchy de números racionais, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{2},\quad \forall m,n > n_2.$$

Considerando agora $n_0 = \text{máx}\{n_1,n_2\}$ e tomando um $n_k > n_0$ (isso é possível pois n_k cresce infinitamente), para todo $n > n_0$ podemos escrever

$$|x_n - c| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - c| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - c| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isso mostra que $lim\, x_n = c$ e o teorema fica demonstrado. ■

O Teorema a seguir mostra a densidade de Q em R.

Teorema 3.20: Se x e y são números reais tais que $x < y$, então existe um número racional r tal que $x < r < y$.

Demonstração. Inicialmente considere o caso em que $0 \leq x < y$. Assim, se $x = [\,x_n\,]$ e $y = [\,y_n]$ então a sequência $z_n = \dfrac{y_n - x_n}{2}$ não converge para zero, pois caso contrário teríamos

$$0 = lim\, z_n = lim\, \frac{y_n - x_n}{2} = \frac{1}{2} lim\ (y_n - x_n) = \frac{1}{2}(y - x)$$

que nos daria $x = y$, o que é um absurdo já que $x < y$. Afirmamos que existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e um racional $h > 0$ tal que

$$\frac{y_n - x_n}{2} > h, \quad \forall\, n > n_0$$

De fato, suponha que para todo racional h, exista um termo z_n tal que $0 < z_n < h$. Tomando $h = 1$, por exemplo, existe z_{n_1} tal que

$$0 < z_{n_1} < 1$$

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n_1} < z_{n_1} < 1$$

Tomando agora $h = \dfrac{1}{n_1}$, existe z_{n_2} tal que

$$0 < z_{n_2} < \frac{1}{n_1} < z_{n_1} < 1$$

Novamente, como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n_2} < z_{n_2} < \frac{1}{n_1} < z_{n_1} < 1$$

Continuando esse processo indefinidamente, obtemos uma sequência (z_{n_k}) que converge para zero. Logo, sendo (z_n) de Cauchy de números racionais, o teorema 3.19 garante que $lim\, z_n = 0$. Assim, por um lado temos que z_n não converge para zero e por outro z_n converge para zero. Uma contradição. Logo existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e um racional $h > 0$ tal que

$$\frac{y_n - x_n}{2} > h, \quad \forall\, n > n_0$$

e portanto

$$\frac{y - x}{2} \geq h$$

Daí,

$$y - x \geq 2h \;\Rightarrow\; y - x \geq h \;\Rightarrow\; y > y - x \geq h \;\Rightarrow y > h.$$

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $y < th$. E como $x < y$, segue que $x < th$. Considere agora a sequência (r_n) definida por $r_n = nh$. Como $x < th$ para certo $t \in \mathbb{N}$, existem termos da sequência (r_n) que são maiores que x. Seja $A = \{k \in \mathbb{N}; x < kh\}$. A é não vazio pois $1 \in A$. Logo possui elemento mínimo. Seja p esse mínimo e $r = ph$. Assim, $x < r$ e de $\dfrac{y-x}{2} \geq h$ podemos escrever

$$x < r = (p-1)h + h \leq x + \frac{y-x}{2} < x + (y-x) = y$$

donde vem que $x < r < y$. Para o que falta, observe que se $x < 0 < y$ então pelo que foi mostrado, existe uma racional r tal que $0 < r < y$ e portanto, $x < r < y$. Por fim, se $x < y < 0$ então $0 < -y < -x$, donde vem que existe um racional s tal que $-y < s < -x$, o que nos dá $x < -s < y$, ou seja, o racional $-s$ está entre x e y e o teorema fica demonstrado. ■

Definição 3.14: Sejam $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais, $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que s é uma sequência de números reais denotada por (x_n). Assim, cada $n \in \mathbb{N}$ corresponde a um real $s(n) = x_n$, chamado enésimo termo da sequência.

Definição 3.15: Uma sequência (x_n) de números reais é chamada *sequência de Cauchy de números reais* quando para todo real $\epsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall m,\, n \in \mathbb{N},\, m, n, \geq n_0 \Longrightarrow |x_m - x_n| < \epsilon.$$

Definição 3.16: Uma sequência (x_n) de números reais converge para um real a, e indicamos $x_n \longrightarrow a$ ou $lim\, x_n = a$, quando para qualquer real $\epsilon > 0$ dado, existir um número natural n_0 (que pode depender de ϵ) tal que para todo $n > n_0$ têm-se,

$$|x_n - a| < \epsilon.$$

Teorema 3.21: Uma sequência de Cauchy de números racionais (x_n) converge para $a \in \mathbb{Q}$, se e somente se, (x_n) converge para a em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha inicialmente que (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais que converge para $a \in \mathbb{Q}$ e seja $\epsilon > 0$ um real dado. O teorema 3.20 garante que existe um racional r com $0 < r < \epsilon$. Assim, como (x_n) converge para $a \in \mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$ temos $|x_n - a| < r$ e portanto $|x_n - a| < \epsilon$. Isso mostra que (x_n) converge para a em $\mathbb{R}$. Reciprocamente, se (x_n) converge para $a \in \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, então dado $\epsilon > 0$ racional, e portanto real, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo natural $n > n_0$ temos $|x_n - a| < \epsilon$. Isso mostra que (x_n) converge para $a \in \mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$. ■

Teorema 3.22: Uma sequência de números racionais (x_n) é de Cauchy em $\mathbb{Q}$ se, e somente se, (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Suponha inicialmente que (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais em $\mathbb{Q}$ e seja $\epsilon > 0$ um real. O teorema 3.20 garante que existe um racional r com $0 < r < \epsilon$. Assim, como (x_n) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{Q}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$ temos, $|x_m - x_n| < r$ e portanto $|x_m - x_n| < \epsilon$. Isso mostra que (x_n) é uma sequência de cauchy em $\mathbb{R}R$. Reciprocamente, se (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais em $\mathbb{R}$, então dado $\epsilon > 0$ racional, e portanto real, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > n_0$ temos, $|x_m - x_n| < \epsilon$. Isso mostra que (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais em $\mathbb{Q}$. ■

Teorema 3.23: Toda sequência de Cauchy de números racionais (x_n) converge em $\mathbb{R}$ para o número real que define.

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de números racionais, x o número real definido pela classe $[\,x_n\,]$ e $\epsilon > 0$ um número real dado. Pelo teorema 3.20 existe um racional r com $0 < r < \epsilon$. Assim, como (x_n) é uma sequência de Cauchy de números racionais, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \in \mathbb{N}$, $m{,}n > n_0$, tem-se

$$|x_n - x_m| < r \;\Leftrightarrow -r < x_n - x_m < r \;\Leftrightarrow\; -r + x_m < x_n < r + x_m$$

Assim, para todo $m{,}n \in \mathbb{N}$ com $m{,}n > n_0$ temos

$$[-r + x_m] < x_n < [r + x_m]$$

e daí,

$$[-r] + [x_m] < x_n < [r] + [x_m].$$

Por outro lado, como $r = [r]$ e $x = [x_m]$, podemos escrever

$$-r + x < x_n < r + x \Rightarrow |x_n - x| < r \Rightarrow |x_n - x| < \epsilon,$$

já que $r < \epsilon$. Isso mostra que a sequência (x_n) converge em $\mathbb{R}$ para o número real que define. ■

O Teorema abaixo mostra que $\mathbb{R}$ é um corpo completo.

Teorema 3.24: Toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real.

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy de números reais. Como todos os termos da sequência (x_n) são números reais, existem sequências de Cauchy de números racionais $(x_{nk})_{k\in\mathbb{N}}, n = 1{,}2{,}3{,}...$ tais que (x_n) representa a classe $[x_{nk}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Assim, o teorema 3.23 nos dá

$$lim\, x_{nk} = x_n, \, \forall n \in \mathbb{N}$$

Agora observe que:
(i) Sendo $lim\, x_{1k} = x_1$, existe x_{1k_1} tal que

$$|x_{1k_1} - x_1| < 1$$

(ii) Analogamente, como $lim\, x_{2k} = x_2$, existe x_{2k_2} tal que

$$|x_{2k_2} - x_2| < \frac{1}{2}$$

De modo geral podemos escolher um termo x_{nk_n} da sequência x_{nk} tal que

$$|x_{nk_n} - x_n| < \frac{1}{n}$$

Dessa forma, a sequência assim construída

$$\{x_{1k_1} - x_1,\, x_{2k_2} - x_2,\, x_{3k_3} - x_3, ...\}$$

converge para zero. Logo, dado o real $\epsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, r,s \in \mathbb{N}$, com $r,s > n_1$ tem-se

$$|x_{rk_r} - x_r| < \frac{\epsilon}{3} \quad e \quad |x_{sk_s} - x_s| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Como por hipótese (x_n) é uma sequência de Cauchy de números reais, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$, com $i,j > n_2$ tem-se

$$|x_i - x_j| < \frac{\epsilon}{3}$$

Tomando $n_0 = \text{máx}\{n_1,n_2\}$, para todo $m,n \in \mathbb{N}$, com $m,n > n_0$ podemos escrever

$$\begin{array}{rcl} |x_{nk_n} - x_{mk_m}| & = & |x_{nk_n} - x_n + x_n - x_m + x_m - x_{mk_m} \\ & \leq & |x_{nk_n} - x_n| + |x_{mk_m} - x_m| + |x_n - x_m| \\ & < & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ & = & \epsilon \end{array}$$

o que mostra que a sequência $x_{1k_1}, x_{2k_2}, x_{3k_3}, ...$ é uma sequência de Cauchy de números racionais e portanto, pelo teorema 3.23 ela converge para o número real que ela define. Considerando $x \in \mathbb{R}$ tal número temos

$$\lim x_n k_n = x$$

Por outro lado, como $\{x_{1k_1} - x_1,\, x_{2k_2} - x_2,\, x_{3k_3} - x_3, ...\}$ converge para zero e $\{x_{1k_1},\, x_{2k_2},\, x_{3k_3}, ...\}$ converge para x, existem n_3 e $n_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in \mathbb{N},\, n > n_3 \quad \Rightarrow \quad |x_{nk_n} - x_n| < \frac{\epsilon}{2}$$

e

$$n \in \mathbb{N},\, n > n_4 \ \Rightarrow \ |x_{nk_n} - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

Tomando agora $n_5 = \text{máx}\{n_3{,}n_4\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_5$ podemos escrever

$$\begin{aligned} |x_n - x| &= |x_n - x_{nk_n} + x_{nk_n} - x| \\ &\leq |x_n - x_{nk_n}| + |x_{nk_n} - x| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Logo a sequência (x_n) converge para x donde vem que toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real. ■

Caminharemos agora no sentido de mostrar que todo conjunto não vazio de $\mathbb{R}$ e limitado superiormente possui supremo em $\mathbb{R}$.

Definição 3.17: Uma sequência (x_n) de números reais é crescente quando

$$x_{n+1} > x_n,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

e decrescente quando

$$x_{n+1} < x_n,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

Definição 3.18: Uma sequência (x_n) de números reais é não-decrescente quando

$$x_{n+1} \geq x_n,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

e não-crescente quando

$$x_{n+1} \leq x_n,\, \forall n \in \mathbb{N}$$

Em qualquer caso dizemos que a sequência de números reais (x_n) é monótona.

Definição 3.19: Uma sequência (x_n) de números reais é limitada quando existir $M \in \mathbb{R}, M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.25: Se (x_n) é uma sequência monótona de números reais e limitada, então (x_n) é de Cauchy.

Demonstração. Suponhamos que (x_n) seja não-decrescente (os outros casos são análogos). Como (x_n) é limitada existe $M \in \mathbb{R}, M > 0$ tal que

$$|x_n| \leq M \ \Leftrightarrow \ -M \leq x_n \leq M,\, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, sendo (x_n) não decrescente, segue que

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ ... \ \leq x_n \leq \ ... \ \leq M.$$

Agora, suponhamos por absurdo que (x_n) não seja de Cauchy de números reais. Assim existe um real $\epsilon > 0$ tal que, qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{N}$, existem índices naturais r e s, que podemos supor $s > r > n_0$ tais que

$$|x_s - x_r| \geq \epsilon$$

e dai

$$x_s - x_r \geq \epsilon \ \Leftrightarrow \ x_s \geq x_r + \epsilon$$

já que $s > r$ e (x_n) é não-decrescente. Dai vem que:
para $n_0 = 1$ existem $s_0 > r_0 > 1$ tal que

$$x_{s_0} \geq x_{r_0} + \epsilon$$

para $n_0 = s_0$ existem $s_1 > r_1 > s_0$ tal que

$$x_{s_1} \geq x_{r_1} + \epsilon \geq x_{s_0} + \epsilon \geq x_{r_0} + \epsilon + \epsilon = x_{r_0} + 2\epsilon$$

para $n_0 = s_1$ existem $s_2 > r_2 > s_1$ tal que

$$x_{s_2} \geq x_{r_2} + \epsilon \geq x_{s_1} + \epsilon \geq x_{r_0} + 2\epsilon + \epsilon = x_{r_0} + 3\epsilon$$

e assim sucessivamente obtemos

$$x_{s_k} \geq x_{r_0} + (k+1)\epsilon.$$

Por outro lado, como o conjunto $\mathbb{R}$ possui a propriedade arquimediana, podemos tomar k de modo que

$$(k+1)\epsilon > M - x_{r_0} > 0$$

então

$$x_{s_k} \geq x_{r_0} + (k+1)\epsilon > x_{r_0} + M - x_{r_0} = M$$

ou seja $x_{s_k} \geq M$. Um absurdo pois sendo x_{s_k} é um termo da sequência (x_n) devemos ter $x_{s_k} \geq M$, uma vez que (x_n) é limitada. Portanto a sequência (x_n) é de Cauchy de números reais. ∎

Teorema 3.26: Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências de números reais tais que:

(i) (x_n) é monótono não-decrescente;

(ii) (y_n) é monótona não-crescente;

(iii) $x_i < y_j$ para todo $i,j \in \mathbb{N}$;

(iv) Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tem-se $y_n - x_n < \epsilon$.

Então existe um único número real que pertence a todos os intervalos $[x_i, y_j]$ com $i,j \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Como a sequência (x_n) é monótona não decrescente, fazendo

$j = 1$ em *(iii)* temos

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq ... \leq x_n \leq ... < y_1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Isso mostra que (x_n) é limitada. Analogamente, como a sequência (y_n) é monótona não crescente, fazendo $i = 1$ em *(iii)* temos

$$y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq ... \geq y_n \geq ...x_1, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

o que nos mostra que (y_n) é limitada. Portanto, pelo teorema 3.25, (x_n) e (y_n) são sequências de Cauchy de números reais. Assim o teorema 3.24 garante que (x_n) e (y_n) convergem para um número real. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tal que

$$lim\, x_n = x \quad \text{e} \quad lim\, y_n = y$$

Novamente pelo item *(iii)* do enunciado temos que

$$x_n < y_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

donde vem

$$lim\, x_n \leq lim\, y_n$$

e daí

$$x \leq y.$$

Observe que $x < y$ não pode ocorrer, pois tomando $\epsilon = y - x > 0$, o item *(iv)* garante que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ podemos escrever

$$y_n - x_n < \epsilon = y - x.$$

Por outro lado, $x_n \leq x$ e $y \leq y_n$, pois (x_n) é monótona não decrescente e (y_n) é monótona não crescente. Logo

$$x_n + y \leq y_n + x \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

e daí,

$$y_n - x_n \geq y - x = \epsilon$$

um absurdo pois $y_n - x_n < \epsilon$. Logo $x = y$. Assim $x = y$ é o único número real pertencente a todos os intervalos $[x_i, y_j]$ com $i, j \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.27: Se X é um conjunto não vazio de números reais limitado superiormente então X possui supremo.

Demonstração. Considere X um conjunto limitado e seja $x_0 \in \mathbb{R}$ uma cota superior para X. Considere também o real y_0 que não é cota superior para X. Além disso, designemos por

x_1 o menor dos números $\dfrac{x_0 + y_0}{2}$ e x_0, que seja cota superior para X

y_1 o maior dos números $\dfrac{x_0+y_0}{2}$ e y_0, que não seja cota superior para X

Observe agora que se $x_1 = \dfrac{x_0+y_0}{2}$ então $y_1 = y_0$ e se $x_1 = x_0$ então $y_1 = \dfrac{x_0+y_0}{2}$. Em ambos os casos

$$x_1 - y_1 = \frac{x_0 - y_0}{2}$$

Considere agora

x_2 o menor dos números $\dfrac{x_1+y_1}{2}$ e x_1, que seja cota superior para X

y_2 o maior dos números $\dfrac{x_1+y_1}{2}$ e y_1, que não seja cota superior para X

Analogamente, se $x_2 = \dfrac{x_1+y_1}{2}$ então $y_2 = y_1$ e se $x_2 = x_1$ então $y_2 = \dfrac{x_1+y_1}{2}$. Em ambos os casos

$$x_2 - y_2 = \frac{x_1 - y_1}{2} = \frac{1}{2}\frac{x_0 - y_0}{2} = \frac{x_0 - y_0}{2^2}$$

De modo geral, considerando

C o menor dos números $\dfrac{x_n+y_n}{2}$ e x_n, que seja cota superior para X

y_{n+1} o maior dos números $\dfrac{x_n+y_n}{2}$ e y_n, que não seja cota superior para X

observamos que se $x_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2}$ então $y_{n+1} = y_n$ e se $x_{n+1} = x_n$ então $y_{n+1} = \dfrac{x_n+y_n}{2}$. Em ambos os casos

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} = \frac{x_{n-1} - y_{n-1}}{2^2} = ... = \frac{x_0 - y_0}{2^{n+1}}$$

a sequência (x_n) como foi construída é monótona não crescente, e a sequência (y_n) monótona não decrescente. Além disso

(i) $x_i < y_j$ para todo $i,j \in \mathbb{N}$

(ii) Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{x_0 - y_0}{2^{n_0+1}} < \epsilon$ tem-se, para todo $n > n_0$ que

$$x_n - y_n = \frac{x_0 + y_0}{2^n} < \frac{x_0 + y_0}{2^{n_0 - 1}} < \epsilon$$

Assim, pelo teorema 3.26, existe um número real k que pertence a todos os intervalos $[x_i,y_j]$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$. Afirmamos que o número k é o supremo do conjunto X. De fato, qualquer que seja $x \in X$, tem-se $x \leq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então

$$x \leq lim\, x_n = k$$

Suponhamos que exista $s \in \mathbb{R}$, $s < k$ que seja cota superior para X. Assim,

$k - s > 0$ e daí, como $lim\, y_n = k$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ tem-se

$$|y_n - k| < k - s \ \Rightarrow\ s - k < y_n - k < k - s \ \Rightarrow\ s < y_n < 2k - s$$

Logo para todo $n > n_0$, $s < y_n$. Mas por construção nenhum termo y_n é cota superior para (x_n), então s também não o é. Desse modo temos uma contradição pois supomos que s é cota superior para X. Portanto $k \in \mathbb{R}$ e k é o supremo de X. ■

No capítulo anterior vimos que a diagonal e o lado de um quadrado de lado unitário são incomensuráveis. Isso quer dizer que a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$. Mostraremos agora que ela possui solução em $\mathbb{R}$. Para isso considere o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R};\, x > 0 \ e\ x^2 < 2\}$$

A é não vazio, pois $1^2 < 2$ donde $1 \in A$. Além disso, 2 é uma cota superior para A, pois

$$\alpha > 2 \Longrightarrow \alpha^2 > 4 > 2 \Longrightarrow \alpha \notin A.$$

Logo A possui supremo. Seja $b = sup\, A$. Observe que $b^2 < 2$ não pode ocorrer, pois

$$\left(b + \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 + \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} < 2, \ para\ n > \frac{2b+1}{2-b^2}$$

o que é um absurdo, pois neste caso $\left(b + \dfrac{1}{n}\right)$ é um elemento de A maior que o supremo. Analogamente $b^2 > 2$ não pode ocorrer, pois

$$\left(b - \frac{1}{n}\right)^2 = b^2 - \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} > 2, \ para\ n > \frac{2b}{b^2-2}$$

o que também é um absurdo, pois neste caso $\left(b - \dfrac{1}{n}\right)$ é uma cota superior para o conjunto A menor que $b = sup\, A$. Logo, pelo teorema 3.8, $b^2 = 2$, ou seja, o número real b é a solução da equação $x^2 = 2$.

4

A construção dos números reais por cortes de Dedekind

Neste capítulo mostraremos, sem maiores detalhes, como é feita a construção dos números reais usando a noção de cortes de Dedekind. Para maiores informações veja [3].

4.1 Cortes de Dedekind

Definição 4.1: Um subconjunto $A \subset \mathbb{Q}$ é um corte de Dedekind, ou simplesmente um corte, se satisfaz as seguintes propriedades.

(i) $A \neq \varnothing$;

(ii) $\mathbb{Q} \backslash A \neq \varnothing$, ou seja $A \neq \mathbb{Q}$;

(iii) Se $p \in A$ e q é um número racional tal que $q < p$, então $q \in A$;

(iv) A não possui elemento máximo, ou seja, se $p \in A$ então existe $q \in A$ com $q > p$.

Exemplo 4.1.1: Seja r um número inteiro. O conjunto $A = \{p \in \mathbb{Z};\, p < r\}$ não é um corte de Dedekind. De fato, $r - 1 \in A$ e $r - \dfrac{3}{2}$ é um racional menor do que r que não pertence ao conjunto A. Isso contradiz o item (iii) da definição acima. Também esse conjunto não satisfaz (iv) pois $r - 1$ é o elemento máximo de A.

Exemplo 4.1.2: Seja $r \in \mathbb{Q}$. O conjunto $A = \{p \in \mathbb{Q};\, p < r\}$ é um corte de Dedekind e além disso possui supremo em $\mathbb{Q}$. De fato,

(i) $A \neq \varnothing$, pois tomando $p = r - 1$ temos que $p \in \mathbb{Q}$ e $p < r$, donde vem que $p \in A$.

(ii) $A \neq \mathbb{Q}$ pois $r + 1 \in \mathbb{Q}$ e $r + 1 \notin A$.

(iii) Sejam $p,q \in \mathbb{Q}$ tal que $p \in A$ e $q < p$. Assim, $p < r$ e $q < p$ implicam em $q < r$ e dai $q \in A$.

(iv) Seja $p \in A$ e $q = p + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ com $n > \dfrac{1}{r-p}$. Temos $q \in \mathbb{Q}$, $q > p$ e

$$n > \frac{1}{r-p} \;\Rightarrow\; \frac{1}{n} < r - p \;\Rightarrow\; p + \frac{1}{n} < r \;\Rightarrow\; q < r.$$

Isso mostra que dado $p \in A$ sempre existe um racional $q > p$, tal que $q \in A$, ou seja, A não possui elemento máximo. Portanto A é um corte de Dedekind. Para o falta observe que $x < r$ para todo $x \in A$ e além disso, se existe $z \in \mathbb{Q}$ tal que $x < z$ para todo $x \in A$ devemos ter $r \leq z$. De fato, se $r > z$ então

$$r > z \Rightarrow 2r > z + r \text{ e } z + r > 2z \Rightarrow 2r > z + r > 2z \Rightarrow r > \frac{z+r}{2} > z$$

Isso mostra que $\dfrac{z+r}{2}$ é um elemento de A maior do que z, uma contradição, pois $x < z$, $\forall x \in A$. Logo $r \leq z$ e $r = \sup A$.

Seja A um corte de Dedekind tal que existe $m \in \mathbb{Q}$ com $m = \sup A$. Dizemos que m é o elemento separador entre os conjuntos A e $\mathbb{Q} \backslash A$. Nem todo corte de Dedekind possui supremo em $\mathbb{Q}$, como mostra o exemplo seguinte.

Exemplo 4.1.3: O conjunto $A = \{x \in \mathbb{Q};\ x \leq 0 \text{ ou } x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ é um corte de Dedekind mas não possui supremo em $\mathbb{Q}$. De fato,

(i) $A \neq \varnothing$ pois $1 > 0$ e $1^2 < 2$ e daí $1 \in A$;

(ii) $A \neq \mathbb{Q}$ pois $2 \in \mathbb{Q}$ mas $2 \notin A$, uma vez que $2^2 > 2$;

(iii) Sejam x,$y \in \mathbb{Q}$ tal que $x \in A$ e $y < x$. Se $y \leq 0$ então $y \in A$. Se $y > 0$ e então $0 < y < x$ nos dá $0 < y^2 < x^2 < 2$ e daí $y^2 < 2$, ou seja, $y \in A$. Em qualquer caso tem-se $y \in A$.

(iv) Se $x \in A$ é um número menor ou igual a zero então $1 > x$. Isso mostra que 1 é um elemento de A maior do que x. Por fim, se $x \in A$ é um número positivo então $2 - x^2 > 0$. Assim, tomando $n > \dfrac{2x+1}{2-x^2}$ obtemos,

$$\begin{aligned} n > \frac{2x+1}{2-x^2} &\implies n(2-x^2) > 2x+1 \\ &\implies 2n - nx^2 > 2x+1 \\ &\implies nx^2 + 2x + 1 < 2n \\ &\implies x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} < 2 \\ &\implies \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2 \end{aligned}$$

Sendo x um racional, segue que $x + \dfrac{1}{n}$ é racional maior do que x tal que seu quadrado é menor do que 2. Isso mostra que $\left(x + \dfrac{1}{n}\right) \in A$, ou seja, A não possui elemento máximo. Portanto A é um corte de Dedekind. Para o que falta considere o conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q};\ x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$. Vamos mostrar que B não possui elemento mínimo. De fato, se $x \in B$ então $x^2 - 2 > 0$. Assim, tomando $n > \dfrac{2x}{x^2-2}$ obtemos,

$$\begin{aligned} n > \frac{2x}{x^2-2} &\implies nx^2 - 2n > 2x \\ &\implies nx^2 - 2x > 2n \\ &\implies x^2 - \frac{2x}{n} > 2 \\ &\implies x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > 2 \\ &\implies \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 > 2 \end{aligned}$$

Sendo x um racional, segue que $x - \dfrac{1}{n}$ é racional menor do que x tal que seu quadrado é maior do que 2. Isso mostra que $\left(x - \dfrac{1}{n}\right) \in B$, ou seja, B não possui elemento mínimo. Vamos mostrar agora que A não possui supremos em $\mathbb{Q}$. De fato, suponha que exista um racional m tal que $m = \sup A$. O caso $m^2 = 2$ não pode ocorrer pois sabemos que não existe um racional cujo quadrado é 2. O caso $m^2 < 2$ também não pode ocorrer pois isso implicaria em $m \in A$ e daí, como A não possui elemento máximo, existiria $x \in A$, $x > m$. Isso contradiz o fato de m ser o supremo do conjunto A. Por fim, $m^2 > 2$ também não pode ocorrer pois neste caso teríamos $m \in B$ e daí, como B não possui elemento mínimo, existiria $r \in B$, $r < m$ tal que $r \geq x \; \forall x \in A$, o que contradiz o fato de m ser o $\sup A$. Conncluímos então que o conjunto A não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

No conjunto do números racionais o corte do exemplo anterior não possui elemento de separação. Assim, para Dedekind, deveria ser criado um número, no caso $\sqrt{2}$, como elemento de separação entre os conjuntos A e $\mathbb{Q} \setminus A$.

Assim podemos visualizar que o conjunto dos números racionais possui certas lacunas que caracteriza sua descontinuidade. Essas lacuna serão preenchidas pelos números irracionais.

Definição 4.2: Definimos o conjunto dos números reais, que denotaremos por $\mathbb{R}$, como

$$\mathbb{R} = \{A;\ \text{A é um corte de Dedekind}\}$$

Assim vemos que os elementos do conjunto $\mathbb{R}$, chamados números reais, são subconjuntos de racionais que satisfazem certas propriedades.

Observamos que o conjunto $\mathbb{R}$ assim definido contém uma do conjunto $\mathbb{Q}$. De fato, se r é um número racional, então r é identificado com o corte de Dedekind tal que r é o supremos deste corte.

No entanto, esse $\mathbb{R}$ é só um conjunto cujos elementos são conjuntos. Precisamos muní-lo de duas operações, estabelecer uma ordem entre seus elementos e mostrar que ele é um corpo ordenado onde se verifica o axioma da completude.

5

Estudo Dirigido

Neste capítulo apresentaremos o estudo dirigido proposto à alguns alunos do 9º Ano do colégio Militar de Belo Horizonte bem como uma análise dos resultados obtidos.

5.1 O estudo dirigido

Nesta seção apresentaremos o estudo dirigido proposto.

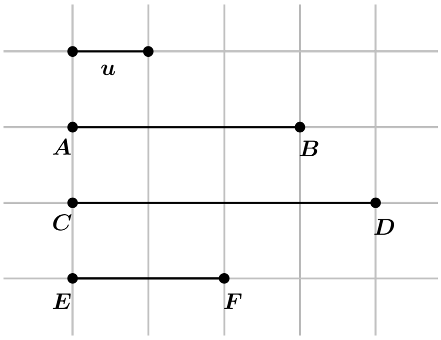
Estudo Dirigido

No século V.I. a.C. viveu Pitágoras de Samos, um importante matemático e filósofo grego. Ele e seus discípulos defendiam que a essência de tudo, seja na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, podia ser explicada através dos números inteiros e suas razões (números racionais). Os números inteiros surgem do processo de contar coleções de objetos, mas as necessidades da vida diária requerem, além da contagem de objetos, a medição de várias quantidades, como por exemplo, o comprimento. Medir é comparar com uma unidade padrão de medida pré-estabelecida. Para satisfazer essas necessidades básicas referentes a medições foram criadas as frações, pois raramente acontece de um comprimento conter um número exato de vezes uma unidade de medida padrão, como veremos a seguir.

Medida de um segmento:

Considere um segmento unitário u como unidade padrão de medida. A medida do segmento AB, representado por $\overline{AB}$ é o número que exprime quantas vezes o segmento AB contém o segmento u.

Questão 01: Observe os segmentos abaixo.



Considerando o segmento u como unidade de medida padrão determine:

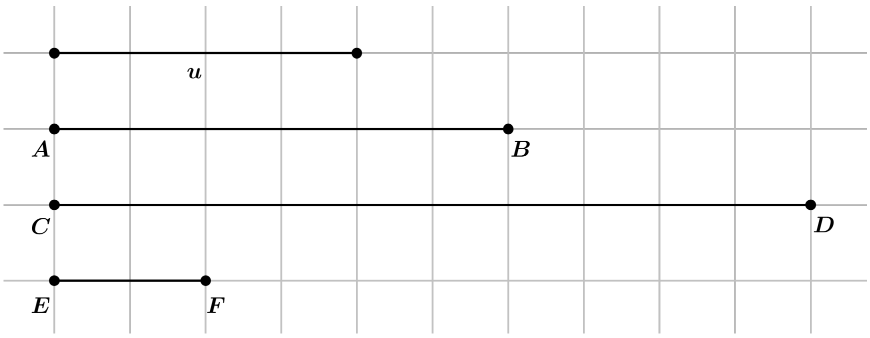
a) $\overline{AB}$

b) $\overline{CD}$

c) $\overline{EF}$

Em algumas situações o segmento AB não contém o segmento u (unidade padrão de medida) um número inteiro de vezes. Neste caso buscamos um segmento w menor que a unidade u que caiba um número inteiro de vezes tanto em u com em AB.

Questão 02: Observe os segmentos abaixo.



Considerando o segmento u como unidade padrão de medida vemos que o segmento AB, por exemplo, não contém o segmento u um número inteiro de vezes. Tomando $w = \dfrac{1}{4}u$, observamos que o segmento AB contém o segmento w um número inteiro de vezes e

$$\overline{AB} = 6\overline{w} = 6\frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

a) Determine $\overline{CD}$

b) Determine $\overline{EF}$

c) Quais seriam as medidas dos segmentos AB, CD e EF se tomássemos $w = \dfrac{1}{2}u$?

d) Tomando qualquer segmento w que caiba um número inteiro de vezes tanto em u quanto em AB, qual seria a medida do segmento AB? Justifique sua resposta.

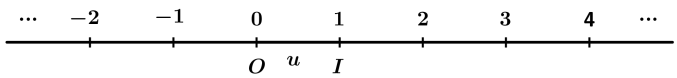
De um modo geral a questão 02 nos diz que se w é um segmento que esteja contido n vezes na unidade u e m vezes em AB, com $m,n \in \mathbb{N}^*$, então temos que

$\overline{AB} = m.\overline{w}$ *e* $\overline{u} = n.\overline{w}$, e daí

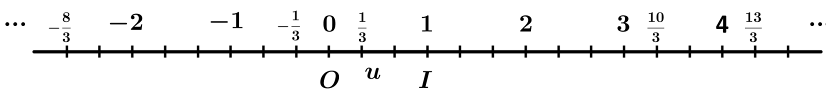
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{u}} = \frac{m.\overline{w}}{n.\overline{w}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{1} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{m}{n}$$

Neste caso dizemos que AB é *comensurável* em relação a unidade padrão de medida u. Ou seja, o segmento AB é dito *comensurável* com a unidade padrão de medida u quando existir uma subunidade de medida w que cabe um número inteiro de vezes em u e em AB. Ou ainda, AB é comensurável se sua medida é um número racional.

Os números racionais comportam uma interpretação geométrica simples. Marque dois pontos distintos O e I numa reta horizontal (I a direita de O) e tome o segmento $u = OI$ como unidade padrão de comprimento. Admitindo-se que os pontos O e I representam os números 0 e 1, respectivamente, então os inteiros positivos e negativos podem ser representados por um conjunto de pontos da reta convenientemente espaçados a intervalos unitários, os positivos à direita de O e os negativos à esquerda de O.

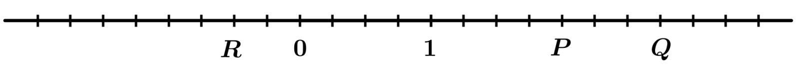


As frações de denominador $q \neq 0$ podem ser representadas pelos pontos que dividem cada um dos intervalos unitários em q partes iguais.



Então, para cada número racional há um ponto da reta. Para os primeiros matemáticos parecia evidente que todos os pontos da reta seriam usados dessa maneira.

Questão 03: Considere a representação abaixo.



a) Que número racional representa o ponto P?

b) Que número racional representa o ponto Q?

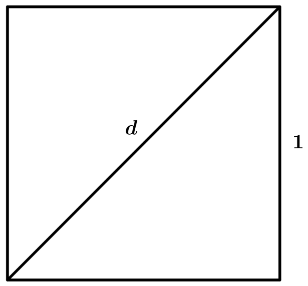
c) Que número racional representa o ponto R?

Os matemáticos gregos da antiguidade acreditavam que todos segmentos de reta eram comensuráveis coma a unidade. Mas, por volta de 450a.C. eles descobriram que existiam segmentos não comensuráveis.

A descoberta dos segmentos *incomensuráveis* com o segmento unitário causou uma enorme crise na matemática do mundo antigo. Geometricamente falando, era espantoso pois quem poderia duvidar que, dados dois segmentos de reta sempre seria possível encontrar um terceiro segmento de reta, talvez muito, muito pequeno, que coubesse exatamente um número inteiro de vezes em cada um dos segmentos dados?

A questão seguinte mostra a existência de um destes segmentos.

Questão 04: Seja u uma unidade padrão de medida. Considerando o quadrado abaixo com lado unitário, complete os espaços em branco.



Suponha que a diagonal d seja comensurável com a unidade u. Assim, como vimos anteriormente, a medida da diagonal d é um número racional, ou seja, existem $m,n \in \mathbb{Z}_+^*$ tais $d = \dfrac{m}{n}$, com $mdc(m,n) = 1$. Aplicando o teorema de Pitágoras obtemos,

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \;\Rightarrow\; \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 1 + 1 \;\Rightarrow\; \frac{m^2}{n^2} = 2 \;\Rightarrow\; m^2 = 2n^2$$

Dai concluímos que m^2 é ____________ (par/ímpar), donde vem que m é ____________ (par/ímpar). Assim podemos escrever $m = 2k$ e obter

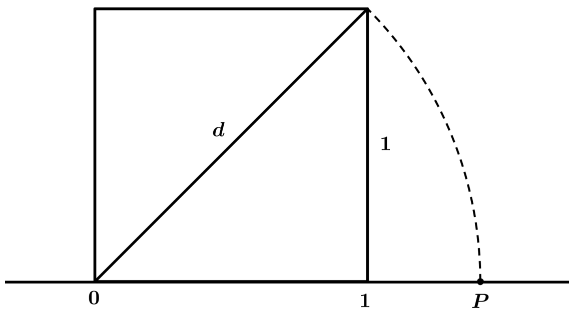
$$m^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; (2k)^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; 4k^2 = 2n^2 \;\Rightarrow\; n^2 = 2k^2$$

Isso mostra que n^2 é ____________ (par/ímpar) donde vem que n é ____________ (par/ímpar), ou seja, $n = 2r$. Neste caso,

$$mdc(m,n) = mdc(2k,2r) \neq 1.$$

Uma contradição pois supomos $mdc(m,n) = 1$. Concluímos então que a diagonal do quadrado de lado unitário é ________________________ (comensurável/incomensurável) com a unidade.

A questão 03 nos mostra que se colocarmos a partir da origem de uma reta orientada um segmento do tamanho da diagonal de um quadrado de lado unitário obtemos como extremo um ponto P que não representa um número racional.



Algebricamente falando, ela nos diz que a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$. Novos números tiveram que ser inventados para serem associados a esses pontos bem como para serem soluções da equação acima.

Questão 05: Sejam a e b inteiros positivos tais que $mdc(a,b) = 1$.

a) Usando raciocínio análogo ao anterior, mostre que $\frac{a}{b}\sqrt{2}$ não é racional.

b) Existem "mais"números racionais ou irracionais? Justifique sua resposta.

O conjunto $\mathbb{R}$, cujos elementos são os números racionais e os números irracionais chama-se *conjunto dos números reais.* Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta OI e os números reais. Esta inter-relação entre Geometria e Aritmética, entre pontos e números, é responsável por grandes progressos da Matemática e das ciências de um modo geral. Entretanto, principalmente após o descobrimento do Cálculo no século XVIII, por mais importante que tenha sido esta visão geométrica dos reais, viu-se que ela precisava ser completada por uma descrição algébrica de $\mathbb{R}$, ou seja, é preciso construir (exibir) um conjunto, muni-lo de duas operações chamadas adição e multiplicação onde são válidas as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro, simétrico, inverso e distributiva. Além disso, estabelecer sobre este conjunto uma relação de ordem $\leqslant$ e por fim mostrar que ele é completo, ou seja, todo ponto da reta corresponde a um elemento desse conjunto. É essa propriedade que garante a existência de números irracionais.

Este conjunto será o conjunto dos números reais e todos os fatos sobre números reais que conhecemos podem ser demonstrados.

Caminharemos agora no sentido de construir (exibir) esse conjunto. Esta construção terá por base o conjunto do números racionais. Admitiremos também que $\mathbb{N} = \{1,2,3,4,...\}$

Sequência de números racionais:

Uma sequência de números racionais é uma função $s : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ tal que cada número natural n corresponde a um racional x_n que é chamado de n-ésimo termo da sequência. Por exemplo, os quatro primeiros termos da sequência $x_n = n^2 + 1$ são: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 10$ e $x_4 = 17$.

Questão 06: Escreva os quatro primeiros termos da sequências abaixo.

a) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$

b) $x_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$

c) $x_n = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad n = 1 \\ \dfrac{1}{2 + x_n}, & \text{se} \quad n > 1 \end{cases}$

Uma sequência de números racionais (x_n) tem limite $a \in \mathbb{Q}$ se a diferença $|x_n - a|$ torna-se menor do que qualquer quantidade positiva, para todo n a partir de um n_0. Neste caso escrevemos $lim\, x_n = a$. Por exemplo, $lim\, \dfrac{1}{n} = 0$ pois a diferença

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

torna-se menor que qualquer quantidade racional positiva dada, para todo n maior que um certo n_0 (que depende da quantidade positiva dada).

Questão 07: Calcule $lim\, \dfrac{2n+1}{n}$ justificando sua resposta.

$\left(dica: \dfrac{2n+1}{n} = 2 + \dfrac{1}{n}\right)$

Questão 08: Explique, usando a definição de limite dada, que a sequência $x_n = 2n + 3$ não possui limite.

Questão 09: Considere a sequência $x_n = 3 + \dfrac{1}{n^2}$. Quando n cresce infinitamente, x_n se aproxima de dois, no entanto $lim\, x_n \neq 2$. Explique esse fato.

Questão 10: Considere a sequência $x_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$, com q racional, $q \in (-1, 1)$ e $q \neq 0$. Assim, $lim\, q^n = 0$. Use esse fato para provar que $lim\, x_n = \dfrac{1}{1-q}$.

(dica: analise a diferença $x_n - qx_n$)

Uma sequência (x_n) de números racionais é dita *sequência de Cauchy de números racionais* quando a diferença $|x_m - x_n|$ torna-se menor que qualquer quantidade positiva racional dada, para todo n maior que um certo n_0 (que depende da quantidade positiva dada). Por exemplo, a sequência $x_n = c$, c constante racional, é de Cauchy de números racionais, pois para todos $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$|x_m - x_n| = |c - c| = |0| = 0$$

que é menor que qualquer quantidade racional positiva dada.

Um resultado importante é que toda sequência (x_n) de números racionais que converge para algum $a \in \mathbb{Q}$ é de Cauchy de números racionais.

Questão 11: Diga se cada sequência abaixo é ou não de Cauchy de números racionais.

a) $x_n = \dfrac{4+n}{n}$

b) $x_n = n^2 + 1$

c) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Dados dois conjuntos não vazios A e B, definimos $A\,X\,B$ (lê-se: A cartesiano B) como o conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) com $x \in A$ e $y \in B$, ou seja,

$$A\,X\,B = \{(x, y); x \in A \ e \ y \in B\}$$

Questão 12: Dados $A = \{1{,}2\}$ e $B = \{3{,}4{,}5\}$, determine:

a) $A\,X\,B$

b) $B\,X\,A$

c) $A^2 = A\,X\,A$

d) $B^2 = B\,X\,B$

Questão 13: Escreve 4 elementos do conjunto $\mathbb{N}\,X\,\mathbb{Z}$.

Uma relação binária de A em B é qualquer subconjunto de $A\,X\,B$. Por exemplo, se $A = \{a,b\}$ e $B = \{c,d,e\}$ então $R_1 = \{(a, c), (a, d)\}$ e $R_2 = \{(a, e), (b, c), (b, e)\}$ são relações de A em B.

Algumas relações são definidas por uma sentença aberta. Por exemplo, se $A = \{1{,}2{,}3\}$ e $B = \{2{,}3{,}4\}$ então $R = \{(x,y) \in A\,X\,B; x < y\}$ definida pela sentença aberta $x < y$ é $\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$.

Questão 14: Dado $A = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ determine as relações abaixo:

a) $R_1 = \{(x,y) \in A^2; x = y\}$

b) $R_2 = \{(x,y) \in A^2; x^2 = y\}$

c) $R_3 = \{(x,y) \in A^2; x + y = 7\}$

Considere agora o conjunto C de todas as sequências de Cauchy de números racionais, ou seja, se (x_n) é de Cauchy de números racionais, então $(x_n) \in C$. Definiremos a relação binária R de C em C como

$$R = \{(x_n{,}y_n) \in C\,X\,C;\, lim(x_n - y_n) = 0\}$$

Questão 15: Em cada caso diga se o par ordenado $(x_n{,}y_n)$ pertence ou não pertence a relação R definida acima.

a) $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ e $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

b) $x_n = 1 + \dfrac{2}{n}$ e $y_n = \dfrac{2}{n}$

c) $x_n = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e $y_n = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Dizemos também que se $(x_n{,}y_n) \in R$, então $(x_n) \approx (y_n)$ (lê-se: x_n se relaciona com y_n).

Não é difícil provar que a relação R é uma relação de equivalência, ou seja, satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $(x_n) \approx (x_n)$ (reflexiva)
(ii) $(x_n) \approx (y_n) \Leftrightarrow (y_n) \approx (x_n)$ (simétrica)
(iii) $(x_n) \approx (y_n)$ *e* $(y_n) \approx (z_n) \Rightarrow (x_n) \approx (z_n)$ (transitiva)

Considere agora uma sequência $(x_n) \in C$, definiremos a *classe de equivalência* de (x_n), que denotaremos por $[x_n]$, como o conjunto de todas as sequências $(y_n) \in C$ tais que $(x_n) \approx (y_n)$, ou seja,

$$[x_n] = \{(y_n) \in C; (x_n) \approx (y_n)\,\}$$

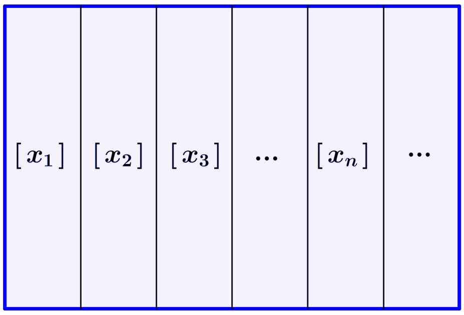
Por exemplo, se $x_n = \dfrac{1}{n}$ então

$$\left[\frac{1}{n}\right] = \left\{0{,}\frac{1}{n}{,}\frac{2}{n}{,}\frac{3}{n}{,}...\right\}$$

Questão 16: Escreva 2 elementos pertencentes a classe [5].

Usando o fato de que R é uma relação de equivalência, mostra-se que o conjunto C de todas as sequências de Cauchy de números racionais é dividido em classes de equivalências duas a duas disjuntas.

Conjunto C



Definimos o conjunto dos números reais, que denotaremos por $\mathbb{R}$, como o conjunto de todas as classes de equivalência $[x_n]$ tal que $(x_n) \in C$, ou seja,

$$\mathbb{R} = \{[x_n];\ (x_n) \in C\}$$

Assim, vemos que os elementos do conjunto $\mathbb{R}$, chamados *números reais*, são classes de equivalência, ou seja, um número real é um conjunto cujos elementos são sequências de Cauchy de números racionais que se relacionam através da relação $\approx$. Por exemplo, a classe de equivalência [2] consiste de todas as sequências (y_n) de Cauchy de números racionais tais que $lim\,(x_n - y_n) = 0$, com $x_n = 2$ para todo natural n, ou ainda, [2] é o conjunto formado por todas as sequências de Cauchy de números racionais que convergem para 2. A escrita $x = [\,x_n\,]$ quer dizer que x é um número real fixo e x_n é **uma** sequência de Cauchy de números racionais que converge para x.

Questão 17: Descreva os elementos das classes abaixo:

a) [3]

b) $[\pi]$

c) $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

Questão 18: Em cada caso obtenha uma sequência x_n.

a) $5 = [x_n]$

b) $7 = [x_n]$

Definiremos agora a igualdade de dois números reais. Sejam $x = [\,x_n\,]$ e $y = [\,y_n\,]$ dois números reais. Dizemos que x é igual a y, e indicamos por $x = y$, quando $(x_n) \approx (y_n)$, ou seja, quando $lim\,(x_n - y_n) = 0$. Por exemplo, considere $x_n = 1 + \dfrac{1}{n}$ e $y_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. Dados os números reais $x = [\,x_n\,]$ e $y = [\,y_n\,]$, temos que $x = y$, pois

$$lim\,(x_n - y_n) = lim\left[1 + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = lim\,\frac{2}{n} = 0$$

Questão 19: Classifique em Verdadeiro ou falso, justificando sua resposta.

a) Considere as sequências $x_n = \dfrac{2}{n^2}$ e $y_n = \dfrac{1}{n^2}$. Se $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$ então $x = y$.

b) Considere as sequências $x_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ e $y_n = \dfrac{n+1}{n}$. Se $x = [x_n]$ e $y = [y_n]$ então $x = y$.

Uma *expressão decimal* é um símbolo da forma

$$x = m{,}a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$$

onde x é um número inteiro e, para todo $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in \{0{,}1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6{,}7{,}8{,}9\}$. O número m é chamado *parte inteira* e $a_1a_2a_3 \dots a_n \dots$ é a *parte fracionária*. Por exemplo, $\alpha = 2{,}43000...$, $\beta = 32{,}131313...$ e $\pi = 3.1415926...$ são expressões decimais.

Cada expressão decimal representa um número real da seguinte forma:

$$x = m{,}a_1a_2a_3 \dots a_n \dots = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots \frac{a_n}{10^n} \dots .$$

É importante entender o significado das reticências no final da igualdade. Elas representam uma soma de infinitas parcelas. Assim,

$$x_n = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots \frac{a_n}{10^n}$$

é o valor aproximado do número real x. De modo geral, quanto maior o valor de n mais x_n se aproxima do número real x. Isso que dizer que a sequência (x_n) assim formada converge para o número real x, ou seja, $(x_n) \in [\,x\,]$.

Vamos agora analisar alguns casos particulares. Quando todos os a_i^s são nulos então

$$x = m{,}000...$$

Neste caso a expressão decimal representa um número inteiro. Quando, a partir de um certo ponto, todos os a_i^s são iguais a zero então

$$x = m{,}a_1a_2...a_n000...$$

Neste caso x representa o número racional

$$x_n = m + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots \frac{a_n}{10^n}$$

chamado *decimal exato*. Por exemplo

$$1{,}25000... = 1{,}25 = 1 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{5}{4}$$

Questão 20: Escreva os números abaixo na forma $\frac{a}{b}$, com $a,b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$.
a) 2,35
b) 4,12
c) 0,75

Mesmo que não termine em zeros a expressão decimal

$$x = m{,}a_1a_2a_3...a_n...$$

pode representar um número racional, como veremos a seguir.

Uma expressão decimal $x = 0{,}a_1a_2a_3...$ chama-se *dízima periódica simples* quando os primeiros p dígitos após a vírgula se repetem indefinidamente e na mesma ordem. Assim, 0,444... e 0,123123123... são dízimas periódicas simples, com período 4 e 123 respectivamente.

Questão 21: O objetivo desta questão é mostrar que 0,999... = 1. Para isso, considere os números reais $0{,}999... = [x_n]$ e $1 = [y_n]$.

a) Tome a sequência $x_n = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10n}$ e mostre que $x_n = 1 - \frac{1}{10^n}$.

(dica: analise a diferença $x_n - \frac{1}{10}x_n$)

b) Obtenha uma sequência (y_n), ou seja, uma sequência que converge para 1.

c) Mostre que $lim\,(x_n - y_n) = 0$.

d) Conclua, usando a definição de igualdade entre números reais, que 0,999... = 1.

Questão 22: Faça o que se pede:
a) Use o exercício anterior para mostrar que $0{,}111... = \frac{1}{9}$.
b) Conclua dai que $0{,}aaa... = \frac{a}{9}$, $0 \leq a \leq 9$.

Questão 23: Escreva a fração geratriz das dízimas periódicas abaixo.
a) 0,444...
b) 2,555...

Questão 24: Observe que

$$
\begin{aligned}
1 &= 0{,}999999...\\
&= \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6} + ...\\
&= \left(\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2}\right) + \left(\frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4}\right) + \left(\frac{9}{10^5} + \frac{9}{10^6}\right) + ...\\
&= \frac{99}{100} + \frac{99}{100^2} + \frac{99}{100^3} + ...\\
&= 99\left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + ...\right)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + ... = \frac{1}{99}$$

Use esse resultado e obtenha a fração geratriz dos números abaixo:

a) 0,232323...

b) 0,171717...

c) 1,151515...

d) 2,141414...

Questão 25: Faça o que se pede:
a) Use um raciocínio análogo ao desenvolvido na questão anterior para mostrar que

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \frac{1}{1000^3} + ... = \frac{1}{999}$$

b) Use o resultado do item a) e obtenha a fração geratriz dos números 0,223223223... e 1,301301301...

Questão 26: Estabeleça uma regra para obter a fração geratriz de uma dízima periódica simples.

Uma expressão decimal $x = a_1a_2a_3...$ chama-se *dízima periódica composta* quando depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica. Por exemplo, 0,21343434... e 0,12457457457... são dízimas periódicas compostas.

Questão 27: Obtenha a fração geratriz de cada dízima periódica composta abaixo:

a) 0,2555...

b) 0,1232323...

c) 1,4777...

d) 1,21353535...

Em suma, expressões decimais finitas ou expressões decimais periódicas representam números racionais.

Para fazer o contrário, ou seja, obter a expressão decimal que representa o racional $\frac{a}{b}$, basta dividir o numerador pelo denominador. Além disso, se a fração $\frac{a}{b}$ está na forma irredutível, ou seja, $mdc(a,b) = 1$ e a fatoração do denominador b possui apenas os fatores 2 e/ou 5 então $\frac{a}{b}$ é representado por uma expressão decimal finita, caso contrário por uma expressão decimal periódica.

Questão 28: Em cada caso, sem realizar a divisão, diga se as frações abaixo são representadas por expressões decimais finitas ou periódicas.

a) $\frac{27}{40}$

b) $\frac{17}{60}$

c) $\frac{2}{35}$

d) $\frac{13}{250}$

e) $\frac{3}{25}$

f) $\frac{5}{32}$

Questão 29: Em cada caso obtenha a expressão decimal que representa as frações abaixo.

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{7}$

c) $\frac{5}{6}$

Questão 30: vimos que se $\frac{a}{b}$ está na forma irredutível e se a fatoração do número b possui um fator diferente de 2 e 5 então $\frac{a}{b}$ é representado por uma expressão decimal periódica. Por que isso acontece?

Na **questão 24** mostramos que 0,999... = 1. Diante disso podemos concluir que dado um número inteiro, existem duas expressões decimais que o representam, o mesmo ocorrendo para um decimal exato. Por exemplo, o número 8 pode ser representado pelas expressões decimais 8,000... ou 7,999... , pois $8 = 7 + 1 = 7 + 0{,}999... = 7{,}999...$. De fato isso deve ocorrer pois a sequência (x_n) definida por $x_n = 8$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e a sequência (y_n) definida por $y_n = 7 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + ... + \frac{9}{10^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ são tais que $lim\,(x_n - y_n) = 0$ e portanto ambas pertencem a classe de equivalência $[\,8\,]$.

As expressões decimais que não são finitas nem periódicas representam os números irracionais.

Conforme foi visto, $\sqrt{2}$ é um número irracional. Quando escrevemos $\sqrt{2} \cong 1{,}414$ queremos dizer que existe uma sequência $(x_n) \in [\sqrt{2}]$ tal que seus 3 primeiros termos são: $x_1 = 1 + \frac{4}{10}$, $x_2 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2}$ e $x_3 = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{4}{10^3}$.

Quanto ao número *pi* (que representa a medida da circunferência quando se toma o diâmetro como unidade) já se conhecem os primeiros 56 bilhões de dígitos. Ou seja, existe uma sequência $(x_n) \in [\pi]$ que são conhecidos os primeiros 56 bilhões termos.

É fácil produzir números irracionais, basta inventar uma regra de formação que não permite aparecer período. Por exemplo, utilizando os algarismos zero e 5 podemos obter um número da seguinte forma: coloca-se o algarismo zero seguido da vírgula, depois o 5 seguido de um zero, depois o 5 seguido de dois zeros, depois novamente o 5 seguido de três zeros, etc. obtendo o número irracional

$$0{,}505005000...$$

Questão 31: Escreva 3 números irracionais.

Questão 32: Escreva um número irracional entre 2,5 e 2,6..

Por fim, vimos que a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$, ou seja, não existe um número racional cujo quadrado é 2. É possível mostrar que no conjunto dos números reais existe um número que satisfaz essa equação. Hoje esse número é chamado $\sqrt{2}$

5.2 Analisando os resultados

O estudo dirigido foi aplicado a cerca de dez alunos da fase final do Ensino Fundamental do Colégio Militar de Belo Horizonte. Foi convidado a participar da atividade alunos que se mostraram curiosos nos assuntos de Matemática. Foram feitos dois encontros. No primeiro fizemos a apresentação da atividade juntamente com uma pequena exposição sobre o assunto a fim de levantarmos alguns questionamentos, como por exemplo, $\sqrt{2}$ é racional? Por que vale a igualdade 0,999... = 1?

Após resolverem a atividade em casa, fizemos novo encontro a fim de esclarecer as dúvidas. A tabela abaixo mostra o percentual de acertos de cada questão.

Questão	%	**Questão**	%	**Questão**	%
01	100	**12**	100	**23**	100
02	100	**13**	100	**24**	100
03	100	**14**	100	**25**	50
04	100	**15**	100	**26**	50
05	50	**16**	100	**27**	100
06	100	**17**	80	**28**	100
07	100	**18**	70	**29**	100
08	100	**19**	100	**30**	10
09	70	**20**	100	**31**	100
10	90	**21**	80	**32**	100
11	100	**22**	80		

Vamos agora fazer alguns comentários sobre o resultado do estudo dirigido.

Os alunos tiveram dificuldades para resolver a questão de número 05. A resolução da letra a não é totalmente igual à prova de que $\sqrt{2}$ é irracional. Só foi possível sua compreensão após lembrarmos do teorema fundamental da aritmética. Quanto ao item b, de certa forma eles entenderam que existem "mais" irracionais do que racionais, apesar de serem infinitos, como mostra a resposta de um dos alunos: *"existem infinitos números racionais e irracionais, porém existem mais irracionais, pois para cada racional existem derivados e variados irracionais, como em* $\frac{a}{b}\sqrt{2}$, $\frac{a}{b}\sqrt{3}$, $\frac{a}{b}\sqrt{5}$*."*

Conforme mostra a tabela todos os alunos acertaram a questão de número 04, entretanto nenhum deles observou que na letra b a sequência poderia ser escrita como $x_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, o que tornaria mais fácil a resolução do item.

As questões de número 07 e 08 envolvem a definição de limite que foi dada sem δ *e* ϵ. Verificou-se aqui um certo desconforto por parte deles, foi preciso uma intervenção para resolverem a questão, o que é totalmente aceitavel por se tratar de um assunto novo para eles, porém viu-se que eles entenderam a definição. Na questão número 08 um aluno escreveu: *"Tal sequência não tem limite porque qualquer quantidade positiva que for tomada, obteremos um termo da sequência maior do que ela."*

A questão de número 11 envolve a definição de sequência de Cauchy de números racionais. Apesar de todos os alunos terem acertado esta questão, viu-se que a definição de sequência de Cauchy não ficou bem clara pois a sequência $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ não é de números racionais.

Na questão de número 15 novamente temos a definição de sequência de Cauchy de números racionais e mais uma vez viu-se que não ficou bem entendida pois o par ordenado formado pelas sequências do item c não pertence a relação R, pois seus termos não são todos racionais. Todos responderam que pertence.

Os alunos não conseguiram mostrar o que foi pedido na questão 25 letra a mas acertaram sem maiores problemas a letra b.

Na questão de número 30 os alunos não conseguiram dar uma resposta satisfatória que seria: ”Porque é possível multiplicar tanto o numerador quanto o denominador da fração $\frac{a}{b}$ por um número da forma $2^x.5^y$, $x,y \in \mathbb{N}$ de modo que o novo denominador seja uma potência de 10.

6

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi apresentar a construção do conjunto dos números reais via sequências de Cauchy, de modo a proporcionar um entendimento mais amplo e significativo deste conjunto. Além disso, elaborar e aplicar um estudo dirigido sobre o tema.

Procuramos desenvolver a teoria de forma rigorosa usando conceitos e propriedades da Álgebra Abstrata e dá Análise. Porém no estudo dirigido não nos aprofundamos nestas propriedades.

Acreditamos que este trabalho possa servir de motivação para professores e alunos que buscam um melhor entendimento dos números reais.

Referências Bibliográficas

[1] EVARISTO, J. PERDIGÃO, E. Introdução à álgebra abstrata. EDUFAL, Maceió: 2002.

[2] HEFEZ, Abramo. Curso de álgebra, volume 1, 4 ed. IMPA, rio de Janeiro: 2010.

[3] LOPES, P. Construção dos números reais. 2006. 163f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Departamento de Matemática e Engenharias, Universidade da Madeira, Portugal. 2006.

[4] QUEIROZ, F. Um estudo sobre construções dos números reais. 2015. 114f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiás. 2015.

[5] ÁVILA, G. Análise Matemática para Licenciatura. Editora Edigard Blucher LTDA, São Paulo, 2001.

[6] BOYER, C. B. História da Matemática. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 1974.

[7] DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. Álgebra Moderna. Atual Editora LTDA, São Paulo, 1982.

[8] LIMA, E. L. Curso de Análise, volume 1, 11a edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2006.

[9] EVES, H. Introdução à história da matemática: tradução de Hygino H. Domingues. Editora da UNICAMP, 3a edição, Campinas, SP, 2004.

[10] MONTEIRO, L. J. Elementos de álgebra. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2a edition, 1978.