UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

HUGO COSTA PEREIRA E SOUZA

GEOMETRIA DESCRITIVA, UMA ABORDAGEM TÉORICA E COMPUTACIONAL

Vitória da Conquista - BA

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS – DCET

CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

HUGO COSTA PEREIRA E SOUZA

GEOMETRIA DESCRITIVA, UMA ABORDAGEM TÉORICA E COMPUTACIONAL

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva.

Vitória da Conquista - BA

2017

S715g

Souza, Hugo Costa Pereira.
Geometria descritiva, uma abordagem teórica e computacional. / Hugo Costa Pereira Souza, 2017.
74f. ; il. (algumas color.).
Orientador (a): Drª. Maria Deusa Ferreira da Silva.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Curso de Mestrado Profissional em Matemática - Vitória da Conquista, 2017.
Inclui referência F. 67 – 69.
1. Geometria descritiva. 2. Tecnologias digitais. 3. *Software* GeoGebra. I. Silva, Maria Deusa Ferreira da. II. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Curso de Mestrado Profissional em Matemática. T. III.

CDD: 515

Catalogação na fonte: ***Cristiane Cardoso Sousa – CRB 5/1843***

UESB – Campus Vitória da Conquista – BA

HUGO COSTA PEREIRA E SOUZA

GEOMETRIA DESCRITIVA, UMA ABORDAGEM TÉORICA E COMPUTACIONAL

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT, oferecido pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva.

BANCA EXAMINADORA

Maria Deusa F da Silva

Profa. Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva (Orientadora)

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Prof. Dr. André Nagamine

Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB

Profa. Dra. Selma Rozane Vieira

Instituto Federal da Bahia – IFBA

Vitória da Conquista - BA

2017

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

(Albert Einstein)

Dedico este trabalho a minha esposa, Maria Thereza, por seu apoio, na forma de incentivo, compreensão e tantas outras formas, tornou minha jornada muita mais tranquila e até mesmo prazerosa. Tenho uma mulher muito especial ao meu lado, e serei eternamente grato a ela!

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, professora Dra. Maria Deusa Ferreira da Silva, pela paciência e ensinamentos, principalmente pela sua atenção em orientar-me neste trabalho.

Aos demais professores do mestrado, em especial André Nagamine e Márcio Bortoloti, pelos compartilhamentos de sabedoria.

Aos meus familiares e amigos, pelo incentivo e apoio ao longo da minha trajetória.

Aos amigos do mestrado, em especial Daniel e Ednardo, que sempre estiveram presentes nessa etapa, no frio de 7ºC das longas esperas na rodoviária de Conquista, nas valiosas discussões, que foram muito enriquecedoras, nos rodízios de Sushi, e claro, na finalização deste mestrado. Aprendi muito com vocês. E também ao meu amigo Guilhermino, uma pessoa memorável. Ao longo desses dois anos não adquiri somente conhecimentos, mas também importantes amigos.

A todos que, de alguma maneira, contribuíram na minha jornada e me ajudaram a chegar onde estou.

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo a otimização do software GeoGebra visando melhorar significamente o ensino-aprendizagem da disciplina Geometria Descritiva – GD. A escolha por esse programa justificou-se, primordialmente, pelo fato de ser um instrumento com características didáticas, incluindo janelas de visualizações 2D – JV2D e 3D – JV3D e possibilidades de otimização. Inicialmente foram criados a épura na JV2D e o Plano de Projeção Mongeana na JV3D, de forma que se obtenha simultaneamente a épura correspondente das projeções e rebatimentos dos objetos criados no Plano de Projeção Mongeana, posteriormente foram construídas ferramentas específicas, através das quais se pode obter as projeções e rebatimentos de pontos, projeções, rebatimentos e traços de retas, de retas. Após as devidas projeções e rebatimentos utilizando as ferramentas criadas, obtém-se, de forma imediata, a épura correspondente na JV2D. Assim o acadêmico tem a oportunidade de visualizar o que está ocorrendo no Plano de Projeção Mongeana e na janela ao lado, a solução em épura. Após a criação das ferramentas, estas foram testadas a partir da resolução de exercícios relacionados ao conteúdo da GD. Ao resolver as atividades, notou-se claramente que o tempo despendido para resolver problemas com a versão otimizada do GeoGebra foi muito inferior ao requerido por outros instrumentos/metodologias anteriormente utilizadas. Tendo ainda o benefício de se obter, simultaneamente, a vista no Plano de Projeção Mongeana e em épura. A partir dos resultados, salienta-se a relevância do uso das ferramentas criadas no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem da disciplina em questão.

Palavras-chave: Geometria Descritiva, Épura, Plano de Projeção Mongeano, Tecnologias Digitais, *Software* GeoGebra

ABSTRACT

This work had as objective the optimization of GeoGebra software aiming to significantly improve the teaching-learning of the discipline Descriptive Geometry – DG. The choice for this program justified, primarily, by the fact that it was an instrument with didactic features, including visualization windows 2D - VW2D and 3D - VW3D and optimization possibilities. Initially were created the épura in the VW2D and the Mongeana Projection Plan in the VW3D, in order to obtain simultaneously the épura corresponding of projections and rebatiment of the objects created in the Mongeana Projection Plan, later specific tools were built, through which one can obtain the projections and rebatiment of points, projections, rebatiment and traces of straight lines. After the due projections and rebatiments using the created tools, it is obtained, immediately, the corresponding épura in the VW2D. So the academic has the opportunity to visualize what is taking place in the Mongeana Projection Plan and in the next window, the solution in épura. After the creation of the tools, these were tested from the resolution of exercises related to the content of the DG. In resolving the activities, it was clearly noticed that the time taken to solve problems with the optimized version of GeoGebra was much lower than that required by other instruments/methodologies previously used. Still having the benefit of obtaining, simultaneously, the view in the Mongeana Projection Plan and in épura. From the results, stands out the relevance of the use of the tools created with regard to the teaching-learning process of the discipline in question.

Keywords: Descriptive Geometry, Épura, Plane of Mongeana Projection, Digital Technologies, Geogebra Software.

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GD – Geometria Descritiva

LT – Linha de Terra

PPP – Projeto Político Pedagógico

JV2D – Janela de visualização 2D

JV3D – Janela de visualização 3D

TD – Tecnologia digitais

Unimontes – Universidade Estadual de Montes Claros

VG – Verdadeira Grandeza

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Apresentamos, neste capítulo, breve relato acerca dos fatores motivacionais deste trabalho emergidos no decorrer da experiência docente no ensino da disciplina de Geometria Descritiva, em cursos de graduação. Retratamos ainda alguns percursos experenciados, usos de *software*s, a fim de solucionar a problemática, descrita posteriormente e por fim demonstramos o porquê da escolha do nosso objeto de estudo, o *software* GeoGebra, bem como os objetivos desta pesquisa.

1.1. Motivação e experiências

No ano de 2001, ingressei-me no curso de graduação "Licenciatura plena em matemática" na Universidade Estadual de Montes Claros - Unimontes e em 2005 tive meu primeiro contato com a disciplina Geometria Descritiva – GD. Nessa época, os únicos recursos didáticos utilizados pelos docentes, no ensino de GD, eram: folha A4, esquadros, transferidor, compasso, lápis e borracha.

Em 2007, retorno à universidade, agora no papel de docente. No ano posterior, ministrei, pela primeira vez, a disciplina GD, cuja carga horária, no Projeto Político Pedagógico do curso de Matemática - PPP - do referido ano, era de 80h/a e a ementa abrangendo tópicos de dois livros (volume I e II) do Príncipe Junior (1982). Como toda construção (épuras e plano de projeção) era manual, nessa época já havia uma certa dificuldade em cumprir a ementa, devido a sua extensão, dentro das 80h/a elencadas. No novo PPP, 2010, reduziu-se a carga horária da disciplina para 36h/a, contudo mantendo-se a ementa.

A partir dessa mudança, houve a necessidade de se pensar em outras metodologias de ensino da GD. A primeira reflexão, a qual me ative, foi analisar/identificar algum *software* de geometria, entre os recursos digitais disponíveis, que possibilitasse agilidade e eficiência na demonstração dos conteúdos de GD. Atrelado a isso, tem-se também o contexto do cenário da sociedade atual, no qual o uso das tecnologias digitais (TD) está cada vez mais intenso nas diversas atividades humanas, o que torna imprescindível a busca por tais instrumentos também no âmbito educacional. Além de que tais recursos possibilitam muito mais interação e eficiência no processo de ensino-aprendizagem.

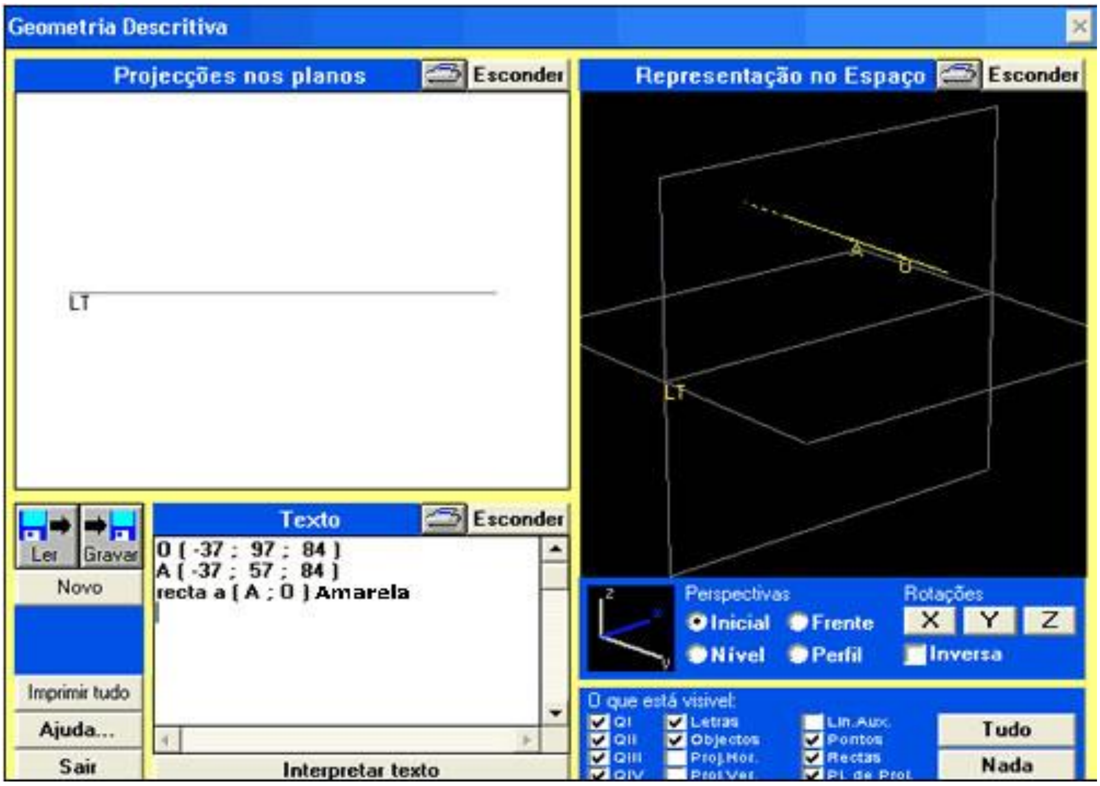
Sobre essa interatividade; uso educacional e multifunções dessas ferramentas, Lévy (1997) traz que:

> o hipertexto ou a multimídia interativa adequam-se particularmente aos usos educativos, quanto mais atividade uma pessoa realizar para a aquisição de um conhecimento, mais ela irá integrar e reter aquilo que aprender. Ora, a multimídia interativa, graças à sua dimensão reticular ou não linear, favorece uma atitude exploratória, ou mesmo lúdica, face ao material a ser assimilado. É, portanto um instrumento bem adaptado a uma pedagogia ativa. (LÉVY, 1997, p.40).

Consoante nos traz D'Ambrósio (2001, p. 15), sobre o ensino da matemática, seja em qualquer uma de suas áreas, é papel do docente "tornar a matemática interessante, isto é, atrativa; relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje".

Diante disso, o primeiro *software* analisado e utilizado, por mim, foi o Geometria Descritiva - GD, produzido por V. Teodoro e F. Clérigo, da Universidade Nova Lisboa (Imagem que se segue).

Figura 1- Imagem da interface do *software* GD



Fonte: <http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/softwares/interfaces/geometria_descritiva.jpg>

Em uma breve explanação acerca desse programa, é perceptível sua qualidade interativa, possibilitando, ainda, o trabalho simultâneo com épura, planos de projeções mongeanas e coordenadas, havendo possibilidade de se "esconder" uma ou mais telas.

A partir da análise e uso desse instrumento, notou-se, em princípio, que é bastante útil para a introdução da disciplina. Todavia, há algumas restrições, a saber: as coordenadas da abscissa, cota e afastamento são limitadas a um intervalo fixo [-100;100] o que impede a resolução de certos problemas. Não sendo possível, também, maximizar a janela e com isso, quando se começa a trabalhar com retas, intersecções, a visualização, tanto nos planos de projeções como em épura, fica incompreensível em função da quantidade de informações em uma pequena área. Assim, tais restrições tornam o *software* pouco atrativo.

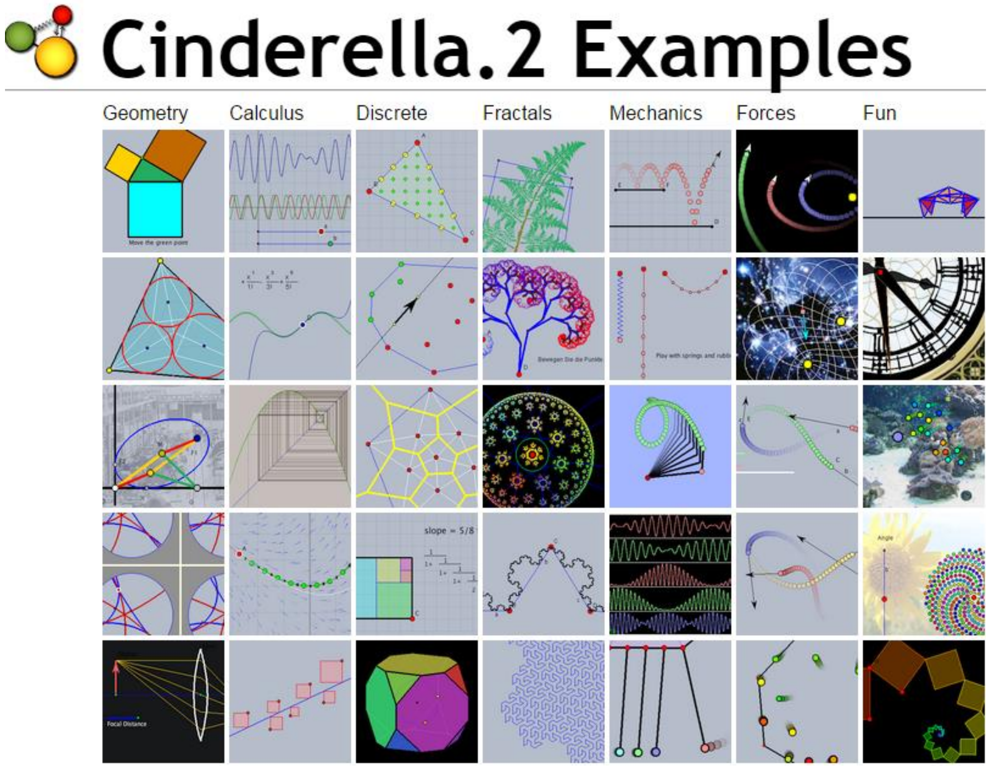
Considerando que há vários estudos acerca do uso desse programa, trazemos aqui a opinião relevante de Alves (2012), a qual corrobora a análise já apresentada:

> Este programa pode ser uma mais valia para o ensino da GD no secundário, no entanto, apresenta algumas limitações. Primeiramente, o ambiente de trabalho é muito reduzido, não podendo ser aumentado. Apresenta alguma complexidade no diz respeito à colocação de coordenadas de pontos, formação de retas e planos (exige formalidades para inserir esses elementos), tornando a sua aplicação lenta e complexa. Por último, este programa não é de todo apelativo graficamente, não criando qualquer empatia visual com o aluno. (ALVES, 2012, p. 23).

Enfim, o GD permite, basicamente, o trabalho satisfatório com a parte de pontos e a parte introdutória de retas. Outro ponto "desanimador" é a quantidade de bugs e a incompatibilidade com plataformas de 64bits, até mesmo com alguns sistemas operacionais mais recentes. Diante de todos esses inconvenientes, tornou-se necessária uma nova busca por outros instrumentos mais satisfatórios.

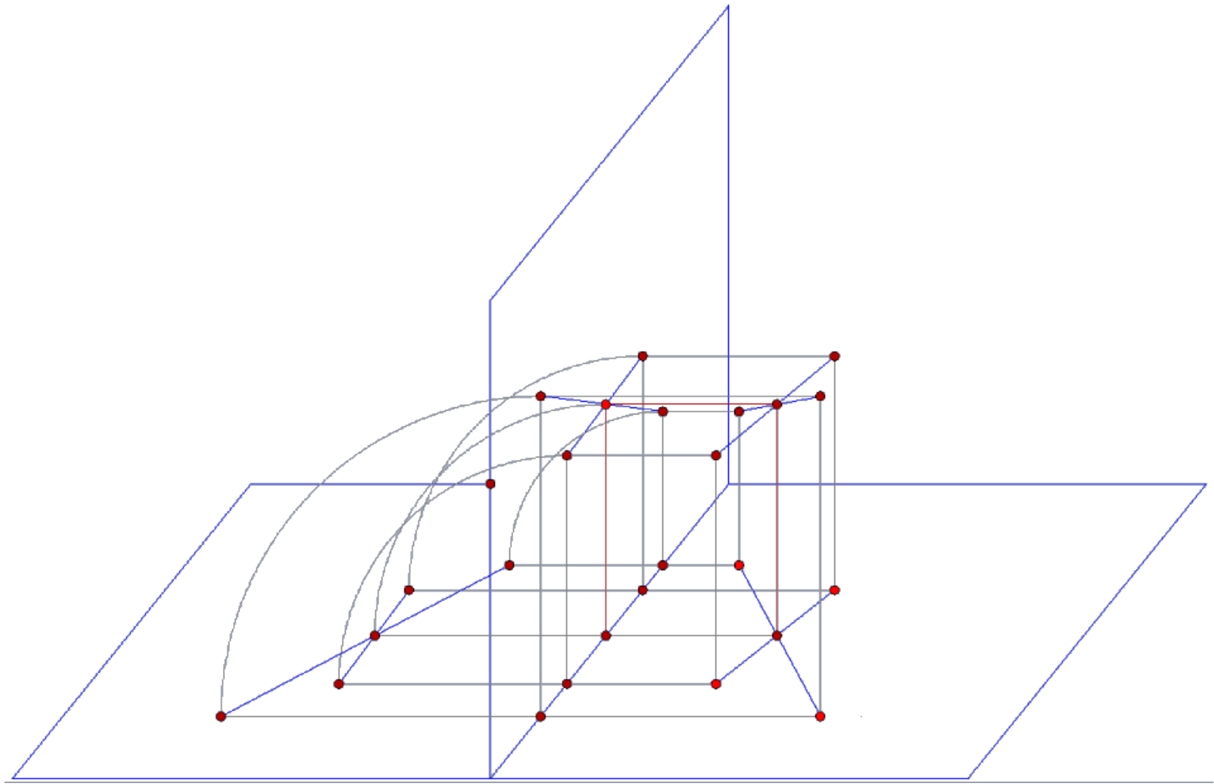
O próximo programa inserido na metodologia foi o Cinderella 2, um instrumento que, mesmo com ressalvas (explanadas a seguir), fascina até hoje. Apesar de ser em 2D, é possível criar, com um certo trabalho, algumas representações no plano de projeção mongeana.

Figura 2 - Exemplos de construções no Cinderella 2



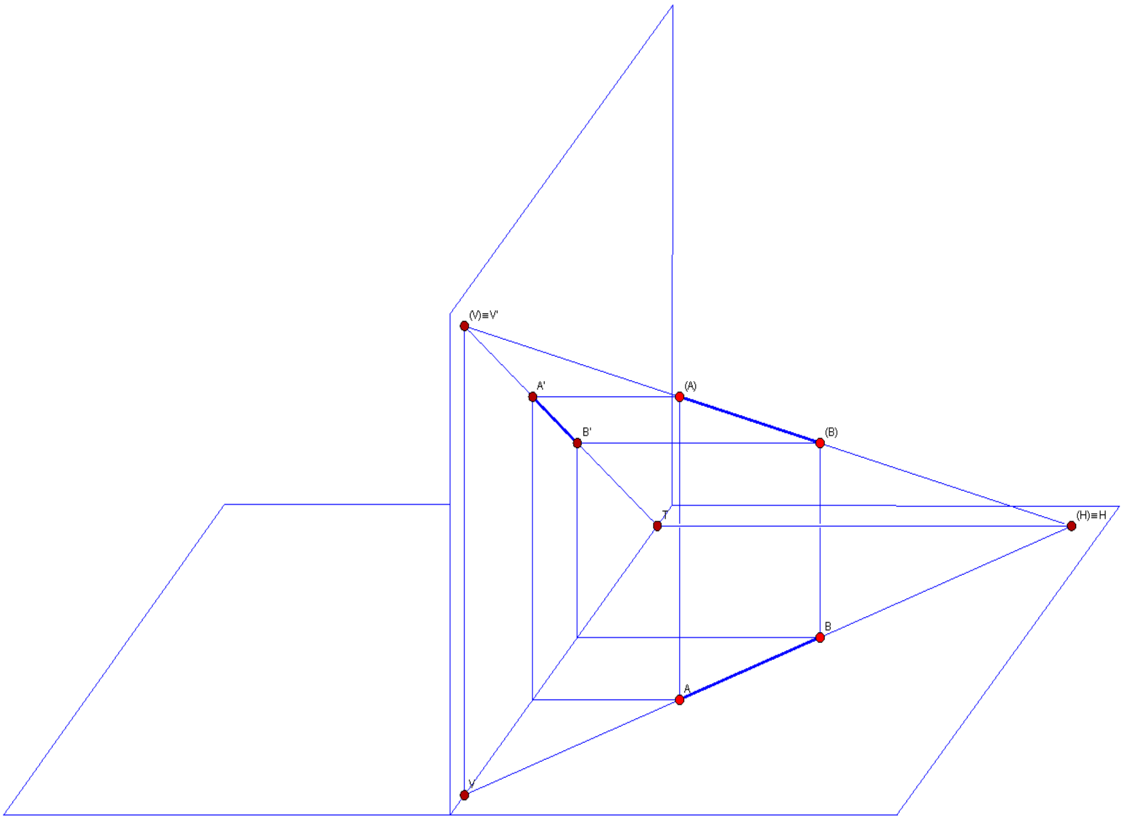
Fonte: http://www.cinderella.de/files/HTMLDemos/

Figura 3 - Representação de duas retas concorrentes no Cinderella 2



Fonte: Arquivo do autor

Figura 3 - Representação das projeções da reta (A)(B) e seus devidos traços de retas no Cinderella 2.



Fonte: Arquivo do autor

Durante o uso do Cinderella 2, houve melhora significativa no direcionamento/ensino da GD, tornando-a mais atrativa.

Sobre as qualidades desse recurso, Silva (2002, p.41) pontua que o "Cinderella constitui um utensílio para investigar construções geométricas de grande qualidade. O utilizador só tem de manejar o rato para interagir com o programa(...)." Ressalta também aspectos como:

> No Editor de Aspecto (no menu Propriedades) encontra-se a possibilidade de escolher as cores dos elementos (pontos, rectas, fundo da construção, etc), bem como os respectivos tamanhos, entre outras opções. A interacção com uma construção torna-se muito agradável. [*sic*] (SILVA, 2002, p. 41).

O uso desse *software* perpetuou-se por alguns anos, contudo o problema relativo à pequena carga horária - destinada ao estudo da disciplina - não pode ser resolvido, pois mesmo tendo apenas 36h/a, tornava-se necessário utilizar uma boa parte dessas horas para orientações sobre a utilização do programa, uma vez que não sendo um *software* “popular”, mesmo sendo muito eficiente, o primeiro contato do aluno com o programa se efetivava somente nas aulas de GD.

Após novos estudos, considerando vários aspectos, o Cinderella foi substituído pelo GeoGebra, conforme considerações introdutórias no subtópico seguinte.

1.2. A escolha pelo GeoGebra

No final do ano de 2014, foi lançada a versão beta 3D do *software* GeoGebra e sua disponibilização para plataformas como *android* foi um atrativo a parte. Somando-se a isso, o fato de que a maioria dos acadêmicos tem contato com esse *software* em disciplinas anteriores à GD, que ocorre no 6º período, fomentou a busca por maior conhecimento sobre tal recurso e o seu uso como ferramenta de ensino do conteúdo da disciplina em questão.

Em estudo específico sobre esse programa, Nascimento (2012) afirma que:

> O GeoGebra está rapidamente ganhando popularidade no ensino e aprendizagem da matemática em todo o mundo. Atualmente, o GeoGebra é traduzido para 58 idiomas, utilizado em 190 países e baixado por aproximadamente 300.000 usuários em cada mês. Esta utilização crescente obrigou o estabelecimento do Internacional GeoGebra Institute (GII), que serve como uma organização virtual para apoiar o uso do GeoGebra em iniciativas locais e criação de outros institutos. (NASCIMENTO, 2012, p. 128)

Outra questão satisfatória apresentada por Nascimento (2012) é que o programa reúne "recursos de geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente" e possui ainda característica didática, pois pode "apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si."

Ao considerar o objetivo deste trabalho, por meio de estudos, desenvolveu-se, dentro do GeoGebra, ferramentas específicas, que possibilitam uma construção mais rápida e precisa (no caso 3D), e ainda a possibilidade de, a medida que se desenvolve a construção na janela 3D, obtermos imediatamente a épura correspondente - semelhante ao recurso do *software* GD - mencionado no início do texto, porém com a imensurável diferença: o GeoGebra não possui nenhuma daquelas limitações expostas anteriormente sobre o *software* GD.

Vale salientar que apesar dos benefícios desse instrumento, dois problemas foram detectados. Primeiramente, não foi possível, nas ferramentas criadas, nomear, conforme as definições da geometria descritiva, os pontos, retas etc., sendo necessário que isso seja feito manualmente. Segundo, em relação às coordenadas do ponto, que na geometria descritiva, possui todas as coordenadas positivas no primeiro diedro, em particular, o afastamento, todavia no plano de projeção desenvolvido no GeoGebra, a coordenada "afastamento", representada pelo eixo "y", possui sinal oposto, assim, dado um ponto $A = (x, y, z)$, ele deverá ser representado no GeoGebra nas coordenadas $A = (x, -y, z)$. Contudo, é importante frisar que tais problemas tornam-se insignificantes diante das demais potencialidades desse recurso.

A partir do percurso exposto, seguem pontuados os objetivos norteadores deste estudo.

1.3. Objetivos

Geral: Otimizar o *software* GeoGebra a partir da criação de ferramentas específicas da Geometria Descritiva, bem como obter, simultaneamente, a visão do Plano de Projeção Mongeana e a visualização da sua respectiva épura.

1.3.1. Específicos

- Construir o plano de projeção mongeana no plano de visualização 3D do GeoGebra de forma que se obtenha no plano de visualização 2D a respectiva épura.
- Otimizar o *software* GeoGebra com ferramentas para projeções e rebatimento de pontos.
- Otimizar o *software* GeoGebra com ferramentas para projeções e rebatimento de retas.
- Otimizar o *software* GeoGebra com ferramentas para definir os traços de reta em épura.
- Contribuir, de forma específica (acréscimo de ferramentas), com o processo de ensino-aprendizagem da disciplina Geometria Descritiva.
- Apresentar, para a comunidade acadêmica, um produto útil ao estudo dos conteúdos de GD.

1.4. Organização do Trabalho

Diante da contextualização, exposta anteriormente, que possibilitou uma visão panorâmica acerca dos fatores motivacionais; do percurso investigativo da busca por um instrumento satisfatório e da exposição dos objetivos deste trabalho, passamos à apresentação da organização sequencial, a qual englobam cinco capítulos, sendo a introdução o primeiro.

No segundo capítulo, abordamos, de uma forma geral, sobre as TD no contexto da sociedade atual, a consequente inserção e benefícios desses instrumentos no âmbito educacional. Ressaltamos a importância de se buscar recursos tecnológicos que propiciem maior flexibilização no processo de ensino-aprendizagem, principalmente quando se trata de conteúdos que necessitam de uma visualização da visão espacial, como é o caso dos relacionados à disciplina GD e ainda a importância do uso adequado desses recursos e a necessidade de uma contínua capacitação do docente. Discutimos, também, acerca de questões basilares sobre as especificidades do ensino da matemática e em específico da GD.

No capítulo seguinte, tratamos dos aspectos metodológicos deste trabalho. A partir da experiência docente, foi adotado o livro de Príncipe Junior (1982) para subsidiar a teoria e a notação matemática utilizada. A escolha desse autor justifica-se, principalmente, por ser referenciado na bibliografia básica da ementa da disciplina. Ainda, no capítulo 3, apresentamos os passos dados para a realização desta dissertação, descrevendo alguns estudos realizados no sentido de construir o material aqui proposto. Esses estudos, anteriores ao processo criativo, propriamente feito, referem-se a estudos bibliográficos, organização do material analisado e criação das ferramentas no GeoGebra.

No capítulo 4, trazemos, a princípio, uma breve introdução sobre o estudo do ponto, projeções, rebatimentos e nomenclaturas. A seguir apresentamos, de forma detalhada, a construção no GeoGebra, do plano de projeção mongeana, na janela de visualização 3D e sua respectiva épura na janela de visualização 2D.

Após isso, discutimos a demonstração prática do trabalho, ou seja, a construção das ferramentas, projeção horizontal do ponto, projeção vertical do ponto, projeções de um ponto, rebatimento de uma projeção vertical, projeções e rebatimentos de um ponto.

Na sequência, são demonstradas algumas resoluções de problemas utilizando as ferramentas criadas. Dando continuidade ao conteúdo, tem-se um estudo sobre retas, suas projeções, rebatimentos, posições relativas de duas retas, pertinência de ponto e reta, e, paralelamente, são construídas as ferramentas, projeção horizontal de uma reta, projeção vertical de uma reta, projeção e rebatimento de uma reta, traços de reta. Ao finalizar as construções das ferramentas, estas são aplicadas na resolução de alguns problemas propostos no capítulo.

Para finalizar, trazemos, no quinto capítulo, as considerações finais sobre a eficácia das ferramentas e sua possibilidade de uso por professores e alunos que vão, em algum momento, ensinar e/ou aprender os conteúdos da Geometria Descritiva.

CAPÍTULO II – GEOMETRIA DESCRITIVA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS

As inovações tecnológicas, surgidas com a globalização, são inseridas, cotidianamente, nas mais diversas áreas e em quase totalidade propiciando benefícios inquestionáveis. Consoante Moran (2007, p.10) "As mudanças que estão acontecendo na sociedade, mediadas pelas tecnologias em rede, são de tal magnitude que implicam em reinventar a educação como um todo, em todos os níveis e de todas as formas." Lévy corrobora a visão de Moran, pontuando que:

> Deparamo-nos com o uso cada vez mais assíduo do computador nas esferas trabalhista, escolar, empresarial e doméstica. Os avanços tecnológicos e científicos verdadeiramente provocaram mudanças na sociedade. A grande velocidade e o impressionante volume de informações que são produzidas, além da facilidade de acesso a elas, estão tornando os paradigmas educacionais conservadores e obsoletos (Lévy, 2007, p. 121).

É inegável a constante transformação que vem ocorrendo no mundo em decorrência dessas inovações. Surge uma nova sociedade, necessidades, novos tipos de relações interpessoais. Acesso e compartilhamento de conhecimentos, informações ocorrem em tempo real. É possível, simultaneamente, participar de conferências em outros países, sem estar presente fisicamente, tudo mediatizado pela internet. Nesse contexto, torna-se imprescindível uma visão diferenciada, por parte de profissionais da Educação, para a relação entre tecnologia e ensino e o novo papel do docente, mediador do conhecimento.

A princípio, a criação das TD não está direcionada, especificamente, para a prática pedagógica, contudo não há como separá-las. Moran (2004, p. 46) afirma que “[...] são múltiplas as possibilidades de utilizar as novas tecnologias a favor da educação”. O espaço da sala de aula é reconfigurado, assim também o papel do professor e o perfil do aluno.

Penteado e Borba (2001) afirmam que a construção de conceitos, no contexto escolar, deve ser fomentada não só pelo simples uso da tecnologia informática, mas sim através da associação desta com outras tecnologias. Conforme Tardif (2002) no decorrer da prática docente, na constante interação entre alunos e outros profissionais, novos saberes são construídos, a partir de vivências, e, estes, mesmos, saberes são utilizados no espaço escolar. A autora diz ainda que:

> um professor de profissão não é somente alguém que aplica conhecimentos produzidos por alunos, não é somente um agente determinado por mecanismos sociais: é um ator, no sentido forte do termo, isto é, um sujeito que assume sua prática

> a partir dos significados que ele mesmo lhe dá, um sujeito que possui conhecimentos e um saber fazer provenientes de sua própria atividade e a partir dos quais ele a estrutura e orienta. (TARDIF, 2002, p. 230)

Diferentemente dos tempos anteriores em que o acesso ao conhecimento era restrito às salas de aulas, limitadas fisicamente, e aos mestres, detentores "únicos" do saber, atualmente esse acesso pode ser feito de variadas formas, em espaços externos à sala de aula, sem anuência do professor. Há a disposição dos usuários, em específico da internet, uma vasta bibliografia, acessada por meio de diversos recursos.

Sobre isso, Moran (2009) ressalta que é necessário redefinir o ambiente da sala de aula tradicional, desmistificar a ideia de que ensinar é ir regularmente a este espaço, acrescenta que aos poucos ele se tornará um "local de começo e de finalização de atividades de ensino-aprendizagem, intercalado com outros tempos em que os alunos participam de atividades externas – pesquisa, projetos – muitas no ambiente digital". Frisando tais ideias reflete que:

> Muitas formas de ensinar hoje não se justificam mais. Perdemos tempo demais, aprendemos muito pouco, nos desmotivamos continuamente. Tanto professores como alunos temos a clara sensação de que muitas aulas convencionais estão ultrapassadas. Mas, para onde mudar? Como ensinar e aprender em uma sociedade mais interconectada? (MORAN, 1999, p.01)

Torna-se preciso que o docente esteja preparado para que suas aulas ofereçam a esses novos estudantes algo diferenciado, atrativo e que o conhecimento não seja imposto como produto final, mas algo em constante construção. As aulas precisam ir além do que já é comum na rotina digital desses aprendizes.

É fundamental que o professor se capacite e que em meio a tantos recursos tecnológicos disponíveis, atenha-se àqueles que melhor se aplicam a sua área de ensino. É preciso dominar tais ferramentas, conhecer sua funcionalidade. Para Moran (2004):

> Educar hoje é mais complexo porque a sociedade também é mais complexa e também o são as competências necessárias. As tecnologias começam a estar um pouco mais ao alcance do estudante e do professor. Precisamos repensar todo o processo, reaprender a ensinar, a estar com os alunos, a orientar atividades, a definir o que vale a pena fazer para aprender, juntos ou separados (MORAN, 2004, p. 3.).

Para Moran (2000), os ambientes educacionais tendem a ser mais participativos e a relação entre professor-aluno mais aberta, interativa. Ressalta ainda que:

> Haverá uma integração profunda entre a sociedade e a escola, entre a aprendizagem e a vida. A aula não é um espaço de inado; mas tempo e espaço contínuos de aprendizagem. Os cursos serão híbridos no estilo, presença, tecnologias, requisitos. Haverá muito mais flexibilidade em todos os sentidos. (MORAN, 2000, p. 137)

Lévy (2007) pontua que não se trata de inserir a tecnologia a qualquer custo no cotidiano da sala de aula e, sim, de acompanhar, de forma consciente, a mudança de civilização questionadora das formas institucionais, sistema tradicional de ensino e papel do professor e do aluno, ou seja, atentar-se a nova sociedade emergente.

O uso das TD permite que o processo de ensino-aprendizagem se concretize de forma eficaz. A justificativa base caracteriza-se nos seus variados formatos, multimídias; capazes de aglomerar, simultaneamente, combinações textuais; sons; imagens; vídeos etc, proporcionando maior visibilidade e aplicabilidade dos conhecimentos estudados, além de tornar o processo muito mais prazeroso.

Outro fator relevante, que também contribui para a construção ativa do conhecimento, é a possibilidade interativa de muitos desses instrumentos, o que torna o estudo do conteúdo muito mais empírico. É sabido que quanto maior a interação, melhores serão os resultados. Para Silva (2001):

> É preciso enfatizar que o essencial não é a tecnologia, mas um novo estilo de pedagogia sustentado por uma modalidade comunicacional que supõe interatividade, isto é, participação, cooperação, bidirecionalidade e multiplicidade de conexões entre informações e atores envolvidos. Mais do que nunca, o professor está desafiado a modificar sua comunicação em sala de aula e na educação. (SILVA, 2001, p. 9).

Sobre o ensino da ciência matemática, é preciso refletirmos a respeito de contrapontos entre um ensino tradicional, por vezes obsoleto, e uma metodologia significativa, a qual contribui para melhor compreensão, gosto por essa área das ciências exatas.

Como justificativa plausível da inserção do ensino da matemática na grade curricular de cursos de nível básico ou superior é que ela é extremamente necessária em atividades do dia a dia que envolvem aspectos quantitativos do mundo real, desenvolve o raciocínio lógico, a capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender o que imediatamente sensível, além de ter outra funcionalidade que é a instrumentalidade para as demais ciências. (SÃO PAULO, 1988).

Ao se falar em Ensino da Matemática deve se ter em destaque que o conhecimento matemático não se consolida como algo pronto, acabado, passível de memorização e aplicação. Estudar matemática é ir muito além disso, conforme nos traz Miguel(2011):

> um processo significativo de ensino de Matemática deve conduzir os alunos à exploração de uma grande variedade de idéias [*sic*]e de estabelecimento de relações entre fatos e conceitos de modo a incorporar os contextos do mundo real, as experiências e o modo natural de envolvimento para o desenvolvimento das noções matemáticas com vistas à aquisição de diferentes formas de percepção da realidade. (MIGUEL, 2011, p. 376-377)

Nota-se que, muitas vezes, os docentes não se atentam a essa contextualização do ensino da matemática e consequentemente consolidam aulas maçantes, nas quais se têm processos de memorização, por diversas maneiras, de fórmulas limitadas e aplicações restritas, sem entender o porquê de cada estudo. O entendimento dos conceitos, definições, aplicação no mundo real são desconsiderados, o aluno não é instigado a refletir, explorar as implicações dessa ciência em seu cotidiano. Diante disso, tem-se o desinteresse, aversão dos estudantes à matéria e a descrição da disciplina como algo ruim, difícil de se aprender e sem utilidade prática.

Consoante postula Becker (2004):

> o ensino de conteúdos, embora a relativa importância destes, não deve monopolizar o trabalho escolar; deve ser pensado como instância de construção de estruturas e não como finalidade em si mesma. Essa mudança significa que a escola deverá optar por pedagogias e didáticas ativas e não por metodologias de ensino assentadas na repetição - inevitável instância metodológica para assimilação de conteúdos que imobiliza o aluno relegando-o à passividade. (BECKER, 2004, p. 39)

Percebe-se que matemática e passividade não se correlacionam quando se trata do processo de ensino e aprendizagem. É nesse contexto, que podemos refletir sobre o importante papel das novas TD no estudo dessa matéria. O uso pedagógico, conforme já explicitado, dessas tecnologias tem sido muito significativo, tais instrumentos propiciam um processo de construção do conhecimento muito mais ativo, atrativo e interativo. Em relação a matemática, possibilitam, ainda, melhor visualização e assimilação do conteúdo, de acordo com Alencar (2012) apesar do caráter abstrato dessa ciência, seu conceitos podem ser evidenciados no mundo real e aplicações no cotidiano.

Há vários recursos disponíveis, aqueles já específicos para o ensino - como os chamados objetos de aprendizagem - disponibilizados gratuitamente em sites educacionais - e outros que com algumas adaptações podem exercer tais funções.

Koper (2003), apud Sabbatini (2012), conceitua um objeto de aprendizagem como “qualquer recurso digital, reprodutível e referenciável, utilizado em atividades que envolvam o processo de aprendizagem, disponível para uso de outras pessoas. Ainda sobre esses objetos, Balbino (2007) os define como:

> Objetos de Aprendizagem são definidos como uma entidade, digital ou não digital, que pode ser usada e reutilizada ou referenciada durante um processo de suporte tecnológico ao ensino e aprendizagem. Exemplos de tecnologia de suporte ao processo de ensino e aprendizagem incluem aprendizagem interativa, sistemas instrucionais assistido por computadores inteligentes, sistemas de educação à distância, e ambientes de aprendizagem colaborativa. Exemplos de objetos de aprendizagem incluem conteúdos de aplicação multimídia, conteúdos instrucionais, objetivos de aprendizagem, ferramentas de *software* e *software* instrucional, pessoas, organizações ou eventos referenciados durante o processo de suporte da tecnologia ao ensino e aprendizagem. (BALBINO, 2007, p.1)

Diversos estudos têm demonstrado a significância de *software*s educativos no ensino específico de conceitos matemáticos. Um dos pontos principais é sua possibilidade interativa, além de permitir também a ligação entre múltiplas representações de um conceito. Como bem assinala Melo e Silva, em artigo intitulado "Jogos digitais e objetos de aprendizagem no ensino da matemática":

> No contexto do ensino da matemática, a aprendizagem depende de ações que caracterizem experimentação, interpretação, visualização, indução, abstração, generalização e demonstração, as quais podem ser realizadas através da interação dos alunos com Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs), como os jogos digitais e os objetos de aprendizagem, considerados poderosas ferramentas de apoio aos processos de ensino-aprendizagem. (MELO; SILVA, 2012, s/p)

Nesse viés, salientamos a relevância de uma TD específica, o *software* GeoGebra, no ensino da Geometria Descritiva.

Considerando o conteúdo de GD e a problemática, fomento deste estudo, a inserção de uma TD nas aulas dessa disciplina torna a construção do conhecimento mais significativa, em primordial, pois ao se trabalhar com a transição do espaço para o plano, tais recursos são muito relevantes na visualização das representações no quesito tridimensional e bidimensional, possibilitando ainda rotações dessas visões, o que não seria satisfatório com o uso de metodologias tradicionais como desenho à mão, com uso de esquadros, compasso, réguas, no quadro-negro ou branco.

O instrumento permite uma melhor visualização do objeto situado no espaço R^3, bem como sua representação no espaço R^2 (visualização da épura correspondente). Outro aspecto positivo é a possibilidade de interação que o programa permite, podendo inclusive na JV3D, realizar rotações dos planos de projeção Mongeana, obtendo assim uma infinidade de vistas do objeto.

Nota-se que os conteúdos da disciplina em questão são estudados de forma muito mais proveitosa e interativa. É proporcionado aos acadêmicos maior abrangência das aplicações; equivalência entre teoria e prática, o que consequentemente contribui para maior assimilação da disciplina.

A seguir, descrevemos de forma objetiva o percurso metodológico deste trabalho.

CAPÍTULO III – ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, uma vez que se destina, conforme Prodanov e Freitas (2013), gerar conhecimentos para aplicação prática dirigidos à solução de problemas específicos. Kourganoff define pesquisa como:

> conjunto de investigações, operações e trabalhos intelectuais ou práticos que tenham como objetivo a descoberta de novos conhecimentos, a invenção de novas técnicas e a exploração ou a criação de novas realidades”(KOURGANOFF,1990, p.43)

Neste trabalho, objetivamos, primordialmente, gerar produto, isto é, criar novas ferramentas com finalidade imediata de otimizar o uso do *software* GeoGebra, voltado para o estudo da Geometria Descritiva e, consequentemente, contribuir para melhorias no ensino da Matemática.

Quanto aos procedimentos, caracterizam-se tanto como exploratório, quanto descritivo. No primeiro, considerando que, para criação das ferramentas no GeoGebra, foi necessário um estudo aprofundado do *software,* suas lacunas, estudo bibliográfico acerca de trabalhos - já divulgados - que exploraram o mesmo programa. Além disso, foi preciso fazer a revisão da literatura acerca de metodologias diferenciadas com uso de TD, no ensino da disciplina em questão. Sobre esse assunto Pádua (2007, p. 55) acentua que:

> A Pesquisa bibliográfica é fundamentada nos conhecimentos de biblioteconomia, documentação e bibliografia; sua finalidade é colocar o pesquisador em contato com o que já se produziu a respeito do seu tema de pesquisa.

No caráter descritivo, tem-se o detalhamento do recurso apreciado, bem como pontuações no que diz respeito à utilização do referido nas aulas de GD.

Desse modo, para o desenvolvimento deste estudo, culminando com a escrita final, foram percorridas as seguintes etapas:

1ª - Estudo bibliográfico acerca de trabalhos já realizados utilizando o GeoGebra;

2ª - Estudo aprofundado do objeto, visando conhecer e explorar suas ferramentas, possíveis lacunas e funcionalidade;

3ª - Constituiu-se o momento base desta pesquisa, a criação de ferramentas no GeoGebra, utilizando o próprio recurso do programa: criação de novas ferramentas. Ainda nessa etapa, foram feitos vários testes, resolução de problemas, validação da funcionalidade dessas novas ferramentas, por meio de aplicações do conteúdo de GD.

4ª - Consolidação da redação e, consequentemente, apresentação do produto final. Vale ressaltar que nesse momento foram necessários novos processos de pesquisa bibliográfica, tanto relativo aos aspectos teóricos dos conceitos matemáticos requisitados, quanto relativo à natureza linguística - refinamento da escrita acadêmica, estudo das normas para elaboração de trabalhos científicos.

No capítulo que se segue, abordamos, a priori, antes de criar as ferramentas, uma parte teórica da Geometria Descritiva - relativa à aplicação da ferramenta utilizada, deixando assim, de forma clara, qual a finalidade de cada item criado. Logo após a criação, enunciaremos e resolveremos vários exercícios, passo a passo.

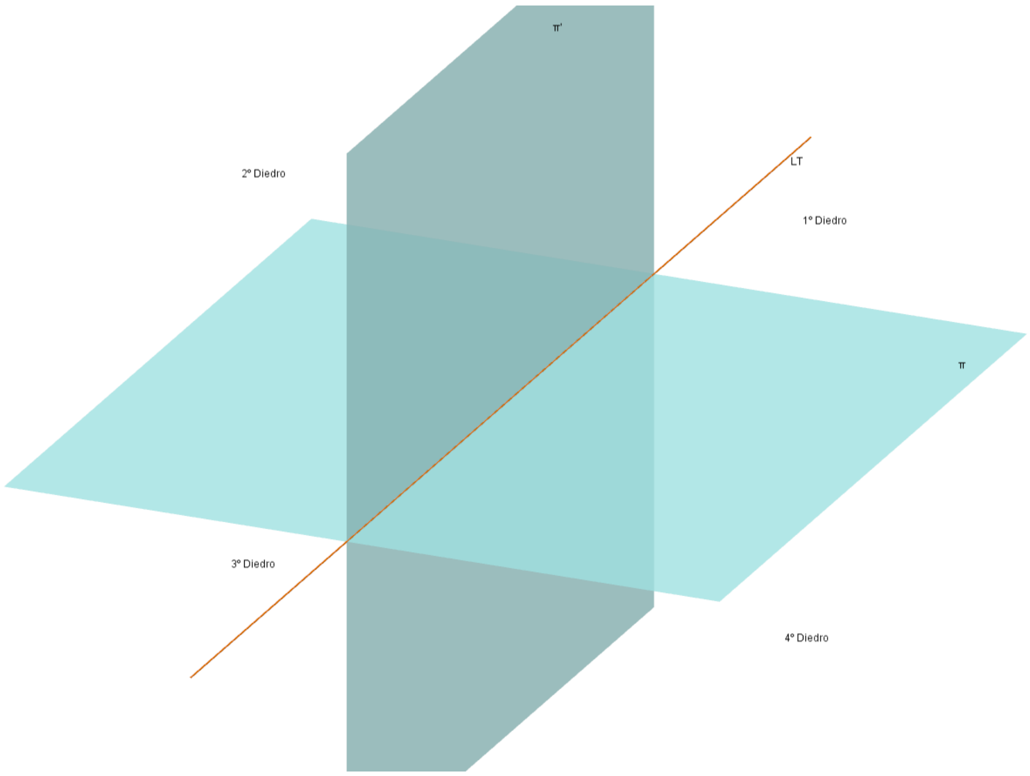
CAPITULO IV – A GEOMETRIA DESCRITIVA COM A CONSTRUÇÃO DE FERRAMENTAS NO GEOGEBRA

Conforme já dito, resumidamente a geometria descritiva é utilizada para resolver problemas geométricos de objetos pertencentes ao espaço R^3, no espaço R^2.

Ao longo desta dissertação, utilizaremos as mesmas notações e definições de Junior (1982), elencadas no livro Geometria Descritiva.

Dados dois planos π e π' (plano horizontal e vertical, respectivamente), ortogonais entre si, denotaremos a reta definida pela intersecção destes planos por LT (Linha de terra), tais planos serão chamados de planos de projeções mongeanas. Nota-se que esses dividem o espaço $\mathcal{R}^3$ em 4 regiões, chamadas de diedros.

Figura 4: Diedros do plano de projeção mongeana



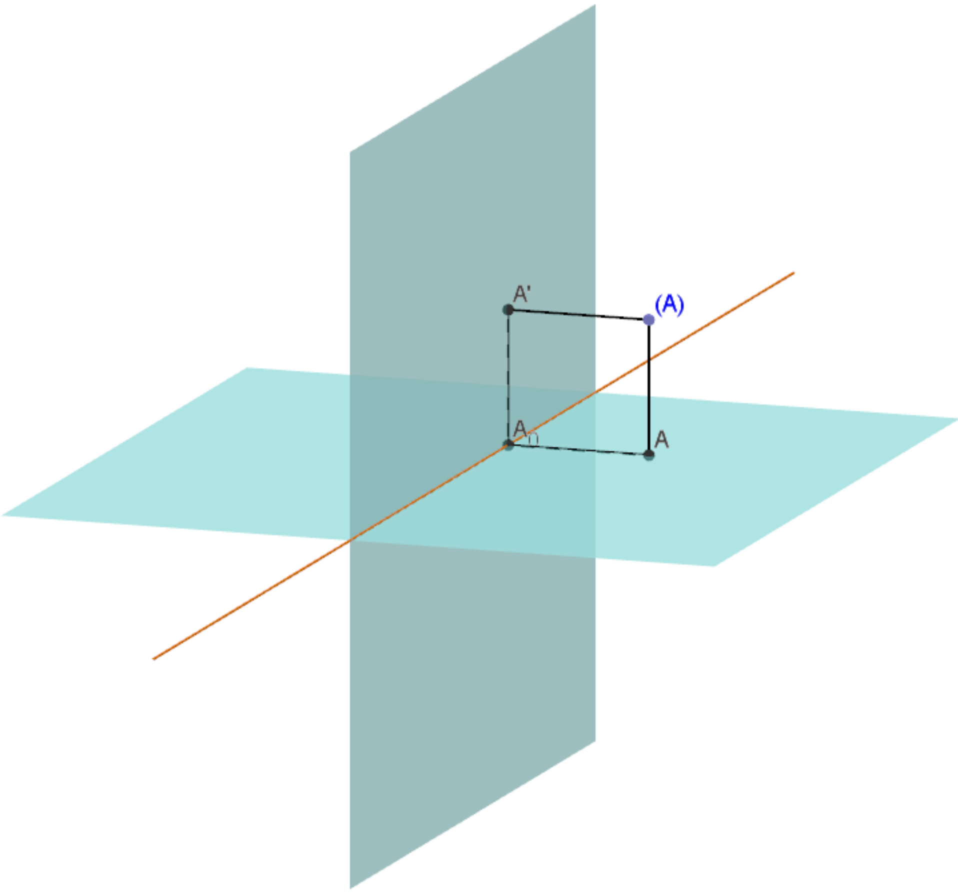
Fonte: Arquivo do autor

4.1. Estudo do ponto

4.1.1. Definições:

Como método de projeção, utilizaremos a projeção cilíndrica ortogonal. Nesse caso, é fácil ver que dado $(A) \in \mathcal{R}^3$, teremos duas projeções, uma sobre o plano horizontal (plano π) e outra sobre o plano vertical (plano π'). A notação utilizada para representar a projeção horizontal será a mesma do ponto no espaço, porém sem os parênteses, logo, para o ponto (A), sua projeção horizontal será denotada por A. Já para a projeção vertical, será utilizada a mesma letra do ponto no espaço, sem o parêntese e acrescida de uma "linha", assim, a projeção vertical do ponto (A) será denotada por A'. O ponto correspondente ao ponto (A), sobre a linha de terra, será denotado por A_0.

Figura 5: Projeções do ponto (A).



Fonte: Arquivo do autor

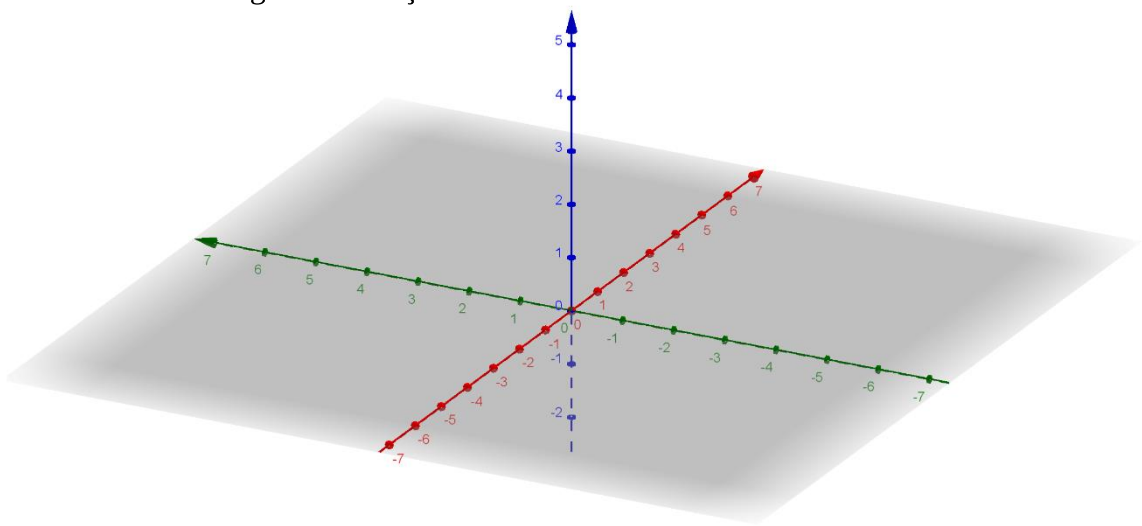
A distância do ponto (A) a sua projeção horizontal *A* é denominada *cota*. A distância do ponto (A) a sua projeção vertical, *A'*, é denominada *afastamento*. A posição do ponto A em relação à linha de terra, é denominada *abscissa*. Munindo-se dessas coordenadas, o ponto A fica bem determinado (A)=[*abscissa; afastamento; cota]*. Como já mencionamos anteriormente haverá a necessidade de inverter o sinal da coordenada *afastamento*, devido a uma restrição do GeoGebra, ficando as coordenadas no *software*:

(A)=[*abscissa;* ***-afastamento****; cota]*.

4.1.2. Construção do Plano de Projeção Mongeana:

Antes de iniciarmos as criações das ferramentas, é fundamental que se posicione os eixos coordenados da janelas de visualização 3D da seguinte forma:

Figura 6: Posição dos eixos coordenados no GeoGebra

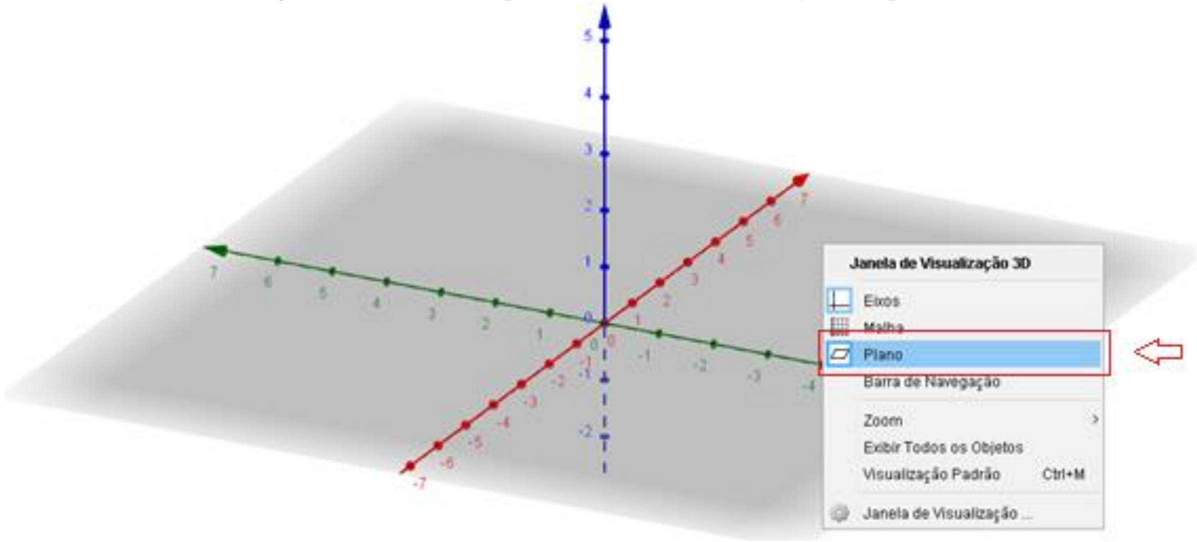


Fonte: Arquivo do autor

Denotaremos os eixos da seguinte forma: O eixo em vermelho será o eixo X (Abscissa), o verde será o eixo Y (Afastamento) e o eixo em azul será o eixo Z (Cota).

Após posicionar os eixos coordenados, iremos, com o botão direito do mouse sobre o plano, desabilitá-lo, conforme a figura 8.

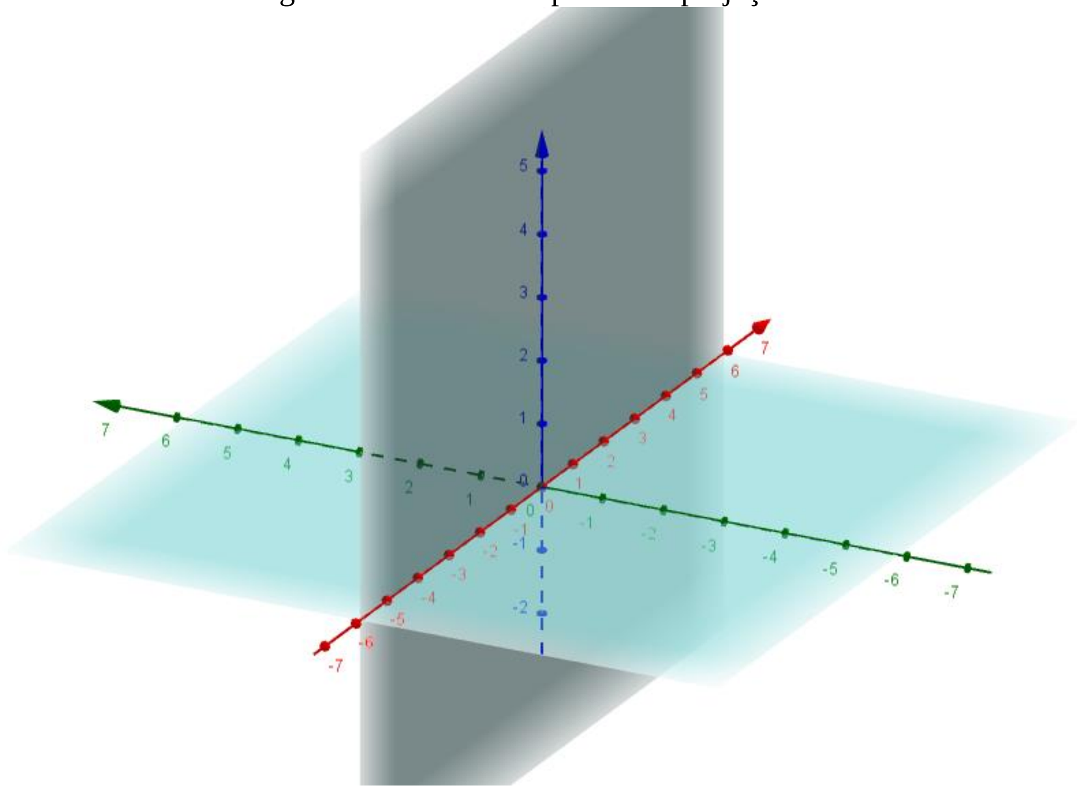
Figura 7: Comando para desabilitar a exibição do plano



Fonte: Arquivo do autor

Em seguida, iremos, com a ferramenta na barra de tarefas, plano, definir os planos de projeções, selecionando primeiramente os eixos X e Y, definindo assim o plano de projeção horizontal. Após isso, selecionamos os eixos X e Z, definindo o plano de projeção vertical. Tendo como resultado a figura 9.

Figura 8: Definindo os planos de projeção

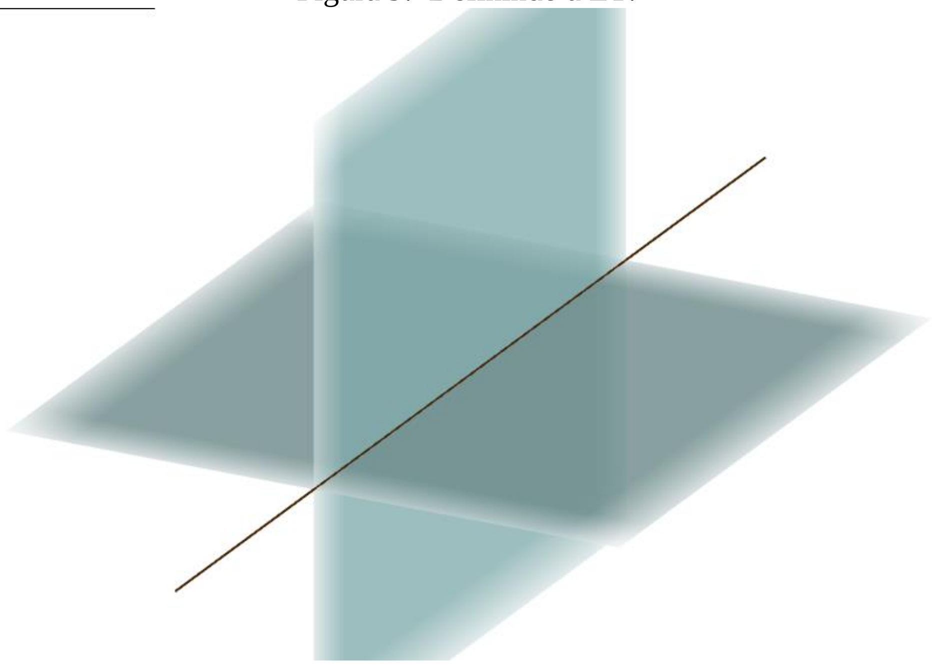


Fonte: Arquivo do autor

Prosseguindo, com o botão direto do mouse, sobre a janela de visualização 3D, desabilitaremos a visualização dos eixos coordenados.

Finalmente, com o auxílio da ferramenta da barra de tarefas, *interseção de duas superfícies*, definiremos a Linha de Terra, selecionando os planos vertical e horizontal, obtendo assim uma reta definida pela interseção destes planos. Obtendo como resultado a figura 10.

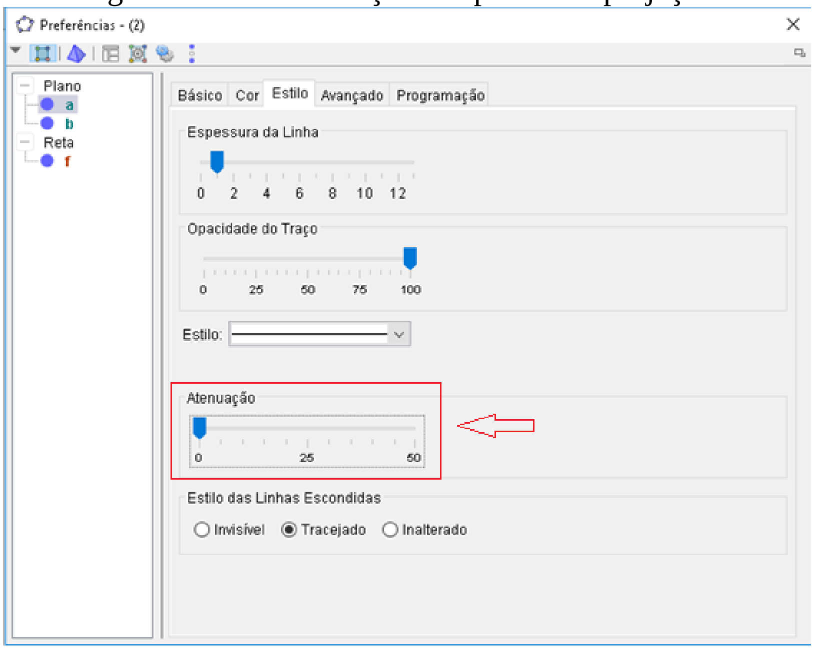
Figura 9: Definindo a LT.



Fonte: Arquivo do autor.

Note que as bordas dos planos estão atenuadas, para uniformizá-los clicamos com o botão direito do mouse sobre cada plano, ir em propriedades, na aba *estilo*, e definir a atenuação como 0.

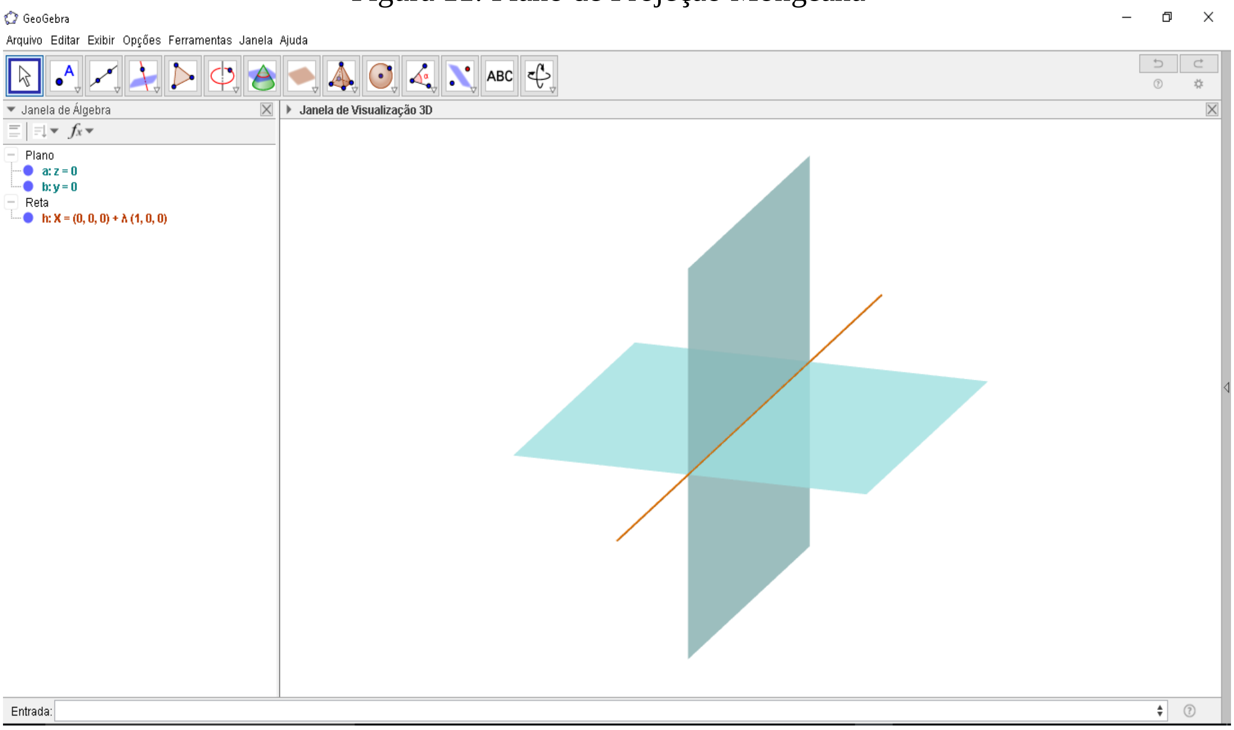
Figura 10: Uniformização dos planos de projeções.



Fonte: Arquivo do autor.

Como já mencionamos anteriormente, o primeiro diedro possui todas as coordenadas positivas. Obtendo como resultado final:

Figura 11: Plano de Projeção Mongeana



Fonte: Arquivo do autor

4.1.3. Construção das ferramentas no GeoGebra - ponto

Projeção horizontal:

i. Na janela de visualização 3D, determinar um ponto arbitrário A, por exemplo A=(6,-6,6);

ii. Criar o ponto B=(x(A),y(A),0).

Para aqueles que não estão familiarizados com a expressão, B=(x(A),y(A),0), ela define a primeira coordenada do ponto B e será a mesma abscissa do ponto A (B=(**x(A),**y(A),0)), e ainda que a segunda ordenada do ponto B, será a mesma coordenada do ponto A (B=(x(A),**y(A)**,0)).

Note que o ponto B será a projeção horizontal de (A), já que possui a mesma abscissa, mesmo afastamento e cota nula. Não haverá, neste momento, a necessidade de renomear o ponto B, para sua notação de projeção horizontal.

iii. Criar um segmento “r” com extremidades A,B.

iv. Ainda com a janela de visualização 3D selecionada, ir na barra de ferramentas, “ferramentas”, “criar nova ferramenta”;

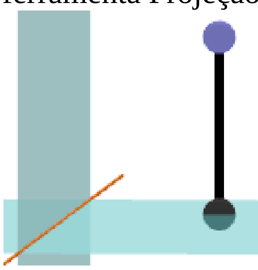
v. Como objetos finais, tem-se o ponto B e o segmento “r”;

vi. Como objetos iniciais, tem-se o ponto A.

vii. Denominamos a ferramenta como “Projeção Horizontal do ponto” e o texto de ajuda será: “*Clique na ferramenta, depois no ponto em que deseja obter sua projeção horizontal”*

viii. Como ícone da ferramenta, buscamos elaborar no próprio GeoGebra algo que fosse intuitivo, como demonstrado na figura a seguir:

Figura 12: Ícone da ferramenta Projeção horizontal do ponto



Fonte: Arquivo do autor

Projeção Vertical:

i. Na janela de visualização 3D, determinar um ponto arbitrário A (por exemplo A=(6,-6,6);

ii. Criar o ponto C=(x(A),0,(z(A)),

Note que o ponto C, por construção, será a projeção vertical do ponto A, já que possui a mesma abscissa e a cota, e possui afastamento nulo.

Assim como na criação da ferramenta *projeção horizontal*, não há necessidade nesse momento de renomear os pontos com as notações utilizadas na Geometria descritiva, pois essas notações não serão salvas no procedimento que faremos.

iii. Criar um segmento “r’ ” com extremidades A,C.

iv. Ainda com a janela de visualização 3D selecionada, ir na barra de ferramentas, “ferramentas”, “criar nova ferramenta”;

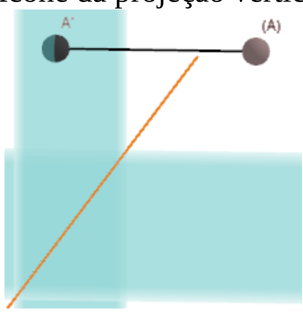
v. Como objetos finais, tem-se o ponto C e o segmento “r’ ”;

vi. Como objetos iniciais, tem-se o ponto A.

vii. Denominamos a ferramenta como “Projeção vertical do ponto” e o texto de ajuda será “*Clique na ferramenta, depois no ponto em que deseja obter sua projeção vertical”*

viii. Criamos no próprio GeoGebra uma imagem que fosse intuitiva, para representar a projeção vertical de um ponto, conforme demonstrado na figura a seguir:

Figura 13: Ícone da projeção vertical do ponto



Fonte: Arquivo do autor

Projeções do Ponto: Essa ferramenta será uma junção das ferramentas criadas acima, incluindo a representação do ponto (A) sobre a linha de terra “A_0=(x(A),0,0)”. Será criado ainda os segmentos $\overline{A\,A_0}$ e $\overline{A'\,A_0}$, assim, ao utilizar essa ferramenta, o *software* definirá as duas projeções A, A', o ponto A_0 e os 4 segmentos, $\overline{(A)A}$, $\overline{(A)A'}$, $\overline{A\,A_0}$ e $\overline{A'\,A_0}$

i. Na janela de visualização 3D, determinar um ponto arbitrário (A) (por exemplo A=(6,-6,6), em seguida, na janela de propriedades do ponto A, definir na legenda **(A)**;

A fim de não haver confusão nos pontos que serão criados de forma automática, pelas novas ferramentas, iremos nessa construção denotar todos os pontos conforme a notação adotada nesta dissertação. Deixando claro que tais notações não são salvas após a criação da ferramenta, com isso sempre haverá a necessidade de nomear os pontos gerados pelas ferramentas que criamos.

ii. Com a ferramenta personalizada, *projeção horizontal do ponto*, definimos a projeção horizontal do ponto (A), após criarmos tal ponto, iremos na janela de propriedades deste, na aba *básico* e definir sua legenda como **A**.

Como resultado final desse processo, tem-se o ponto (A) no R^3, e sua respectiva projeção horizontal **A**, sobre o plano horizontal.

iii. Agora, com a ferramenta personalizada, *projeção vertical do ponto*, definimos a projeção vertical do ponto (A), logo em seguida iremos na janela de propriedades deste, na aba básico, e definir sua legenda como **A'**.

Agora teremos os pontos, (A) no R^3 e as projeções horizontal e vertical de (A), A e A', respectivamente.

iv. Definir o ponto A_0=(x(A),0,0)

No GeoGebra, para definir um índice subscrito, basta usar o caractere *underline* "**_**" logo após a letra, seguido do índice desejado, logo a escrita no campo de entrada do *software* ficará desta maneira:

A_0=(x(A),0,0)

v. Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *segmento* e definir os seguintes segmentos , $\overline{(A)A}$, $\overline{(A)A'}$, $\overline{A\,A_0}$ e $\overline{A'\,A_0}$

Ocultar o nome de todos os segmentos

vi. Ainda com a janela de visualização 3D selecionada, ir na barra de ferramentas, "ferramentas", "criar nova ferramenta"

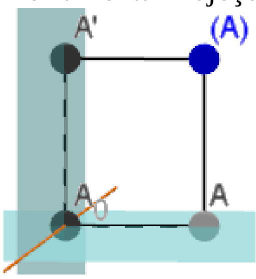
vii. Como objetos finais, tem-se os segmentos $\overline{(A)A}$, $\overline{(A)A'}$, $\overline{A\,A_0}$ e $\overline{A'\,A_0}$, e os pontos A,A' e A_0

viii. Como objetos iniciais, tem-se o ponto (A).

ix. Denominamos a ferramenta como "Projeções do ponto" e o texto da ajuda será "*Clique na ferramenta, depois no ponto em que deseja obter suas projeções*"

x. Como ícone da ferramenta, construímos uma imagem com um ponto e suas devidas projeções, figura abaixo:

Figura 14: Ícone da ferramenta Projeções do ponto



Fonte: Arquivo do autor

Rebatimento do ponto:

i. Criar um ponto$B' \epsilon\ \pi'$, por exemplo B'=(4,0,3),

ii. Determinamos os ponto B_0=(x(B'),0,0) e B_1'=(x(B'),z(B'),0),

iii. Agora com a ferramenta "arco circular" determinamos o arco "c" de 90º, com centro em B_0 e raio B_0B', fazendo uma rotação no sentido anti-horário a partir de B', definindo o arco B'B_1'

iv. Definimos os segmentos B_0B' e B_0B_1' .

v. Ainda com a janela de visualização 3D selecionada, ir na barra de ferramentas, "ferramentas", "criar nova ferramenta"

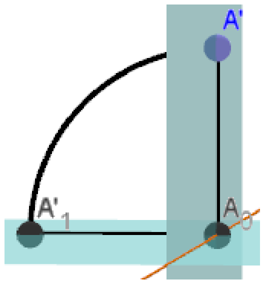
vi. Definir como objetos finais os segmentos B_0B' e B_0B_1' o arco "c", os pontosB_1' e B_0.

vii. Definir como objetos iniciais o ponto B'.

viii. O texto da ajuda será "*Clique sobre a projeção vertical do ponto para obter seu rebatimento*"

ix. Como imagem da ferramenta, construímos no GeoGebra a seguinte imagem:

Figura 15: Ícone da ferramenta Rebatimento do ponto



Fonte: Arquivo do autor

Projeção + Rebatimento: Essa ferramenta é uma união da ferramenta "Projeções do ponto" com a ferramenta "Rebatimento do ponto", assim, dado um ponto (A), ao utilizar essa ferramenta, o *software* definirá as duas projeções A, A', o ponto A_0, os 4 segmentos, $\overline{(A)A}$, $\overline{(A)A'}$, $\overline{A\,A_0}$, $\overline{A'\,A_0}$, $\overline{A_0A_1'}$ e o arco $\widehat{A'A_1'}$.

i. Na janela de visualização 3D, determinar um ponto arbitrário (A) (por exemplo A=(6,-6,6), em seguida, na janela de propriedades do ponto A, definir na legenda **(A)**;

ii. Com a ferramenta personalizada, *projeção horizontal do ponto*, definimos a projeção horizontal do ponto (A), após criarmos tal ponto, iremos na janela de propriedades deste, na aba *básico* e definir sua legenda como **A**.

   Como resultado final desse processo, tem-se o ponto (A) no R^3, e sua respectiva projeção horizontal **A**, sobre o plano horizontal.

iii. Agora, com a ferramenta personalizada, *projeção vertical do ponto*, definimos a projeção vertical do ponto (A), logo em seguida iremos na janela de propriedades deste, na aba básico, e definir sua legenda como **A'**.

   Agora teremos os pontos, (A) no R^3 e as projeções horizontal e vertical de (A), A e A', respectivamente.

iv. Definir o ponto A_0=(x(A),0,0)

v. Na barra de ferramentas, selecionar a ferramenta *segmento* e definir os seguintes segmentos , $\overline{(A)A}$, $\overline{(A)A'}$, $\overline{A\,A_0}$ e $\overline{A'\,A_0}$

   Ocultar o nome de todos os segmentos

x. Agora com a ferramenta “arco circular” determinamos o arco “c” de 90º, com centro em A_0 e raio A_0A', fazendo uma rotação no sentido anti-horário a partir de A’, definindo o arco $\widehat{A_0A'_1}$.

xi. Definimos os segmentos $\overline{A_0A'}$ e $\overline{A_0A'_1}$.

xii. Ainda com a janela de visualização 3D selecionada, ir na barra de ferramentas, “ferramentas”, “criar nova ferramenta”

Como objetos finais, tem-se os segmentos $\overline{(A)A}$, $\overline{(A)A'}$, $\overline{A\,A_0}$ e $\overline{A'\,A_0}$, $\overline{A_0A'_1}$ o arco “c”, os pontos A'_1, A ,A’ e A_0

xiii. Como objetos iniciais, tem-se o ponto (A).

xiv. Denominamos a ferramenta como “Projeções do ponto” e o texto da ajuda será “*Clique na ferramenta, depois no ponto em que deseja obter suas projeções e rebatimento”*

Observações:

- Na construção de uma nova ferramenta, houve algumas dificuldades ao se utilizar pontos, cujas coordenadas eram variáveis dependentes de outros pontos. Como solução, foi necessário fazer toda a construção a partir do ponto inicial, ao invés de dar sequência na construção anterior.

- Observe que a última ferramenta criada, é uma junção de todas as outras anteriores, ela constrói tanto as projeções, como seu devido rebatimento. Inicialmente poderia se pensar que essa substitui todas as outras, todavia nem sempre queremos esses resultados completos, pode ser de interesse obter apenas uma projeção horizontal, ou vertical etc. Foi pensando nessas particularidades que se criou ferramentas específicas, para cada finalidade.

4.1.4. Resolução de atividades utilizando as ferramentas criadas

1. Dado o ponto (A)=[4;2;1], determine no plano de projeção e em épura os seguintes pontos:
   - (B) simétrico ao ponto (A) em relação a LT
   - (C) simétrico ao ponto (B) em relação a π’

Resolução:

Como o ponto (B) é simétrico ao ponto (A) em relação a LT, logo (B) pertencerá ao 3º diedro, mantendo em módulo as coordenadas *afastamento* e *cota*, ou seja(B)=[4;-2;-1]

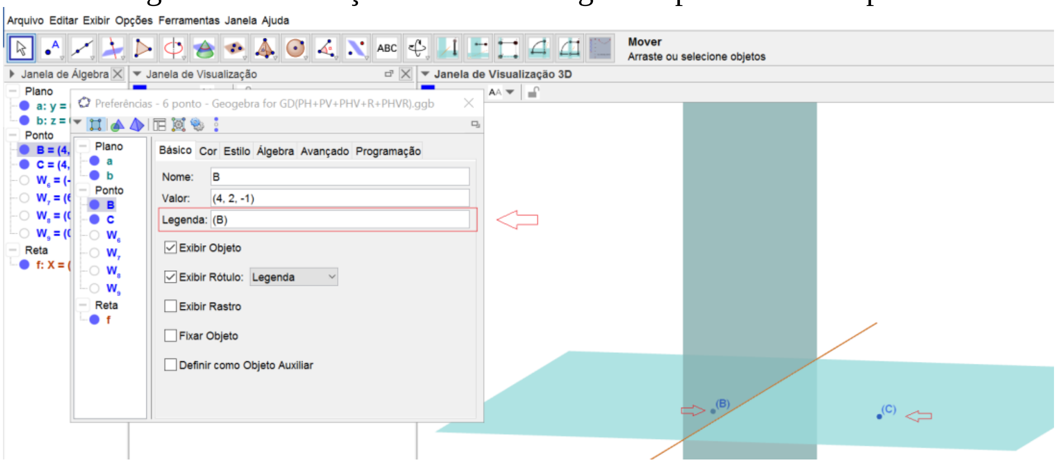
Como (C) é simétrico ao ponto (B) em relação a π', segue que (C) terá a mesma abscissa e cota do ponto (B), todavia seu afastamento terá o sinal inverso (a distância de (C) ao plano vertical é, por construção, a mesma distância do ponto (B) ao plano vertical, porém o afastamento é positivo no 4º diedro), logo (C)=[4;2;-1].

Conhecendo-se as coordenadas dos pontos (B) e (C), passamos a realização das construções no GeoGebra:

i. No campo de entrada do GeoGebra, definimos os pontos B=(4;2;-1) e C=(4;-2;-1)
   a. Note que não utilizamos a notação (B) para inserir os pontos no campo de entrada do GeoGebra, já que a linguagem do *software* não aceita essa nomenclatura, utilizaremos a legenda do ponto para nomeá-los de forma correta.
   b. Note ainda que invertemos a coordenada da coordenada afastamento, a qual mencionamos no início desta dissertação.

ii. Agora alteramos o modo de exibição dos pontos, para legenda, com suas notações correspondentes:

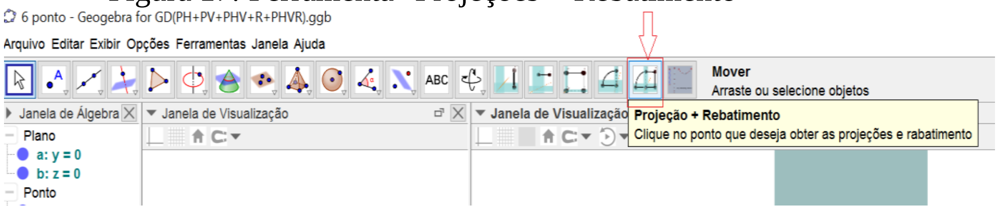
Figura 16: Utilização do recurso "legenda" para nomear o ponto



Fonte: Arquivo do autor

iii. Com a ferramenta *Projeção + Rebatimento*, faremos as devidas projeções e rebatimentos dos pontos (B) e (C). Note que é preciso renomear as projeções e rebatimentos, como já mencionado.

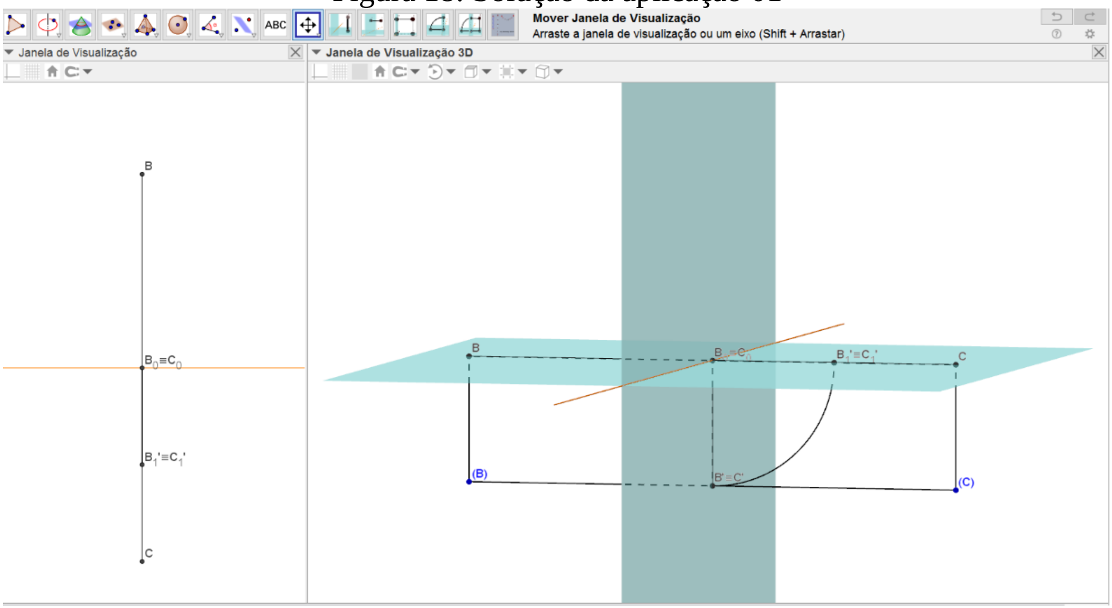
Figura 17: Ferramenta "Projeções + Rebatimento"



Fonte: Arquivo do autor

Após a utilização da ferramenta *projeções + rebatimento* obtemos imediatamente, além das projeções e rebatimento, a épura correspondente.

Figura 18: Solução da aplicação 01



Fonte: Arquivo do autor

Ao resolvermos o problema na janela de visualização 3D, imediatamente obtemos a solução em épura na janela de visualização 2D.

Passemos a mais uma resolução:

2. Determine, em uma mesma épura, os pontos (A) e (B), tais que:
   a. (A) tenha seu afastamento três vezes maior que sua cota.

b. (B) tenha cota e afastamento com o mesmo valor absoluto, porém sinais contrários.

Resolução:

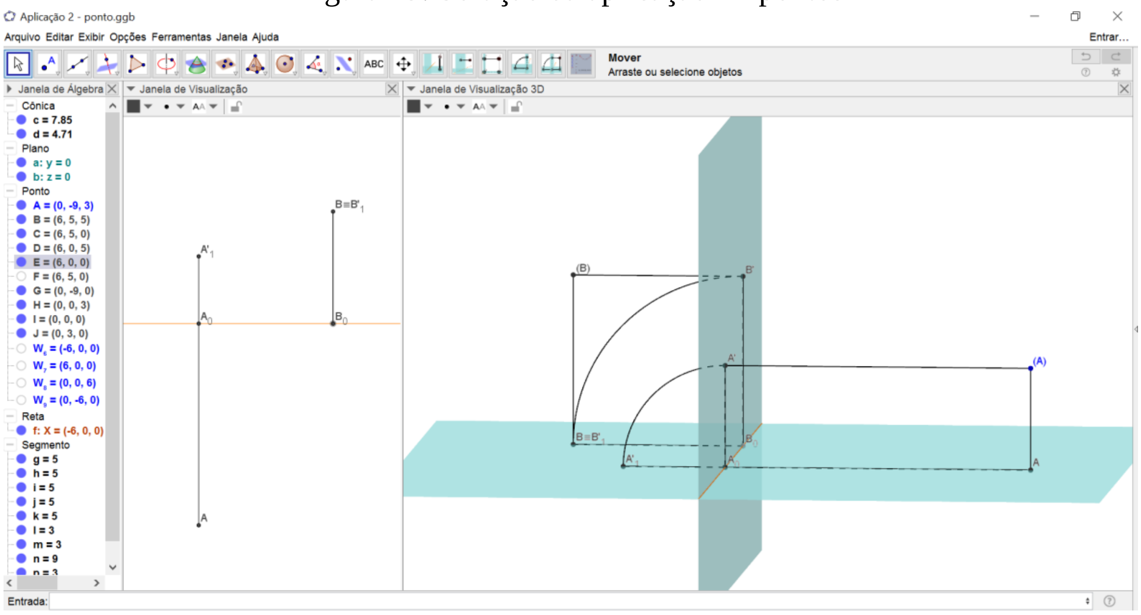
Para o ponto (A), basta definir as seguintes coordenadas no campo de entrada do GeoGebra A=(0,-9,3). Veja que estamos representando o ponto (A)=[0;9;3], que tem afastamento três vezes maior do que a cota.

Para o ponto (B), temos que criar um ponto, necessariamente, no segundo ou quarto diedros, para satisfazer a condição dos sinais contrários, ou seja, (B)=[6;-5;5]. Assim digitamos no campo de entrada do GeoGebra o ponto B=(6,5,5), lembrando apenas de inverter a coordenada afastamento.

Após inserir os pontos A e B no campo de entrada do GeoGebra, definimos, com a ferramenta *projeções + rebatimento*, as projeções dos pontos A e B. Em seguida nomeamos os pontos com suas respectivas notações.

Assim, tem-se o representado na figura abaixo:

Figura 19: Solução da aplicação 2 - pontos



Fonte: Arquivo do autor

CAPITULO V – ESTUDO DA RETA

Utilizando a mesma notação do livro Geometria Descritiva do autor Príncipe Junior, passemos a denotação de uma reta $r \in \mathbb{R}^3$ por (r).

Dada a reta (r), definimos suas projeções, que serão pontuais, ou outras retas, a saber:

i. Seja (r) uma reta perpendicular ao plano π, é fácil ver que:

$$Se\ (r) \perp \pi \text{ então } \forall\ (A_i) \in (r) \Rightarrow\ A_1 \equiv A_2 \equiv A_3 \equiv \cdots \equiv A_{i+1} \equiv \cdots, i \in \aleph$$

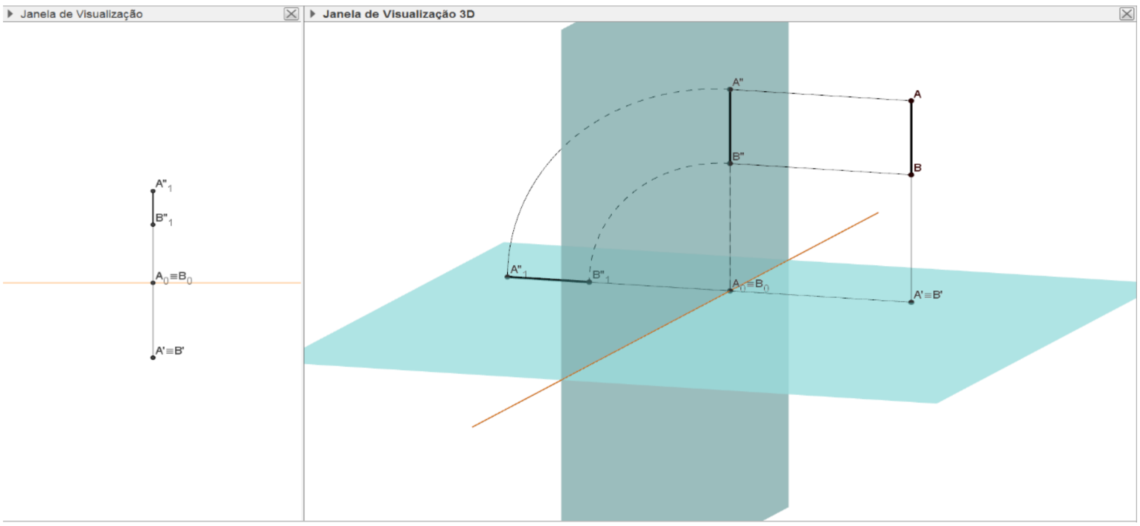
ou seja, as projeções de todos os pontos pertencentes à reta (r) sobre o plano π são coincidentes. Nesse caso, diremos que a projeção da reta (r) em relação ao plano π é pontual.

ii. No caso em que (r) não é perpendicular ao plano π, sua projeção será outra reta.
De fato, seja $(A_1), (A_2), \dots, (A_n) \in (r), n \in \aleph$, assim as projetantes $(A_1)A_1, (A_2)A_2, \dots, (A_n)A_n$,..., determinam um plano α | α ⊥ π, e como a intersecção destes determinam uma reta, conclui-se que a reunião de todas as projeções horizontais da reta r determinam outra reta, a qual denotamos de r.

De forma análoga, mostra-se o caso das projeções verticais, a qual denotamos a projeção vertical da reta (r) por r'.

Quando uma reta for paralela a um plano de projeção, diremos que sua projeção é de verdadeira grandeza – VG.

Figura 20: Projeção horizontal pontual –Projeção vertical de VG



Fonte: Arquivo do autor

Na figura 21, à direita do plano de projeção mongeana, podemos notar a reta (A)(B) que é perpendicular ao plano π, logo sua projeção horizontal será pontual. Notamos também que a reta (A)(B), por ser perpendicular ao plano π, é paralela ao plano π', ou seja, sua projeção vertical é de verdadeira grandeza – VG. À esquerda da figura 21, tem-se a épura, que mostra um ponto representando a projeção horizontal da reta (A)(B), e uma reta de VG representando a projeção vertical.

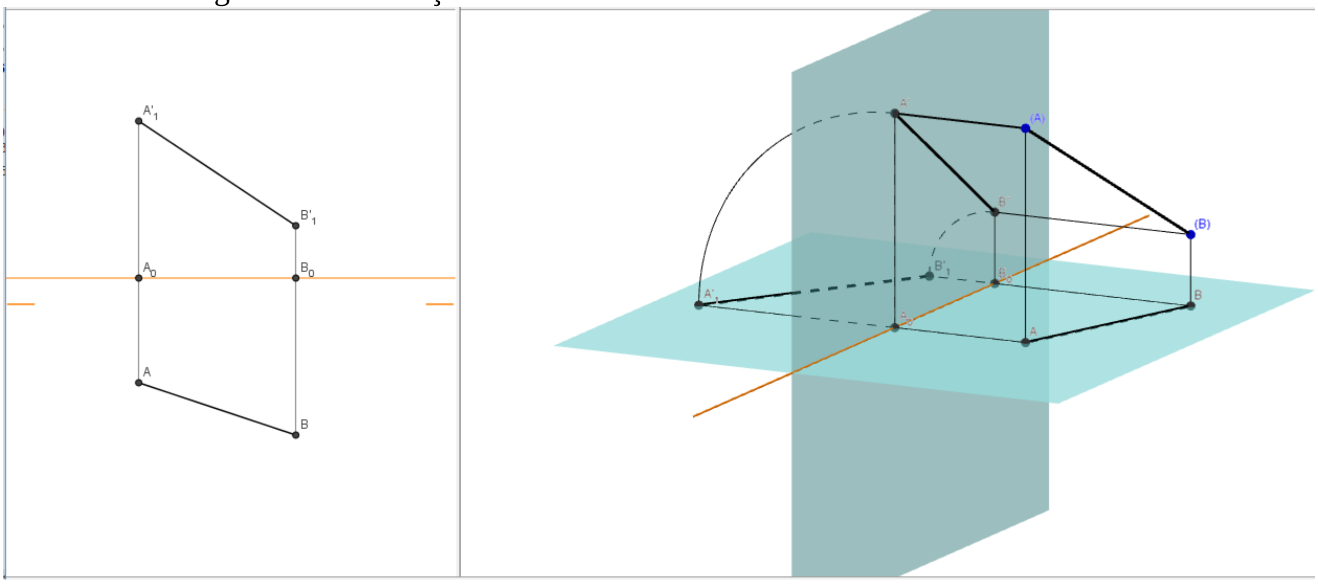
Não trataremos neste estudo das diferentes posições da reta em relação aos planos de projeção, a menos da reta de perfil, devido às suas particularidades.

5.2.1. Construção das ferramentas, referentes à retas, no GeoGebra:

Os itens **i** ao **x** serviram de base para a construção das ferramentas: *Projeção horizontal da reta*, *Projeção vertical da reta*, *Projeções + Rebatimento da reta* e *Traços de retas*, está última será construída em ambas janelas JV2D e JV3D.

i. Definir dois pontos, (A) e (B), no 1º Diedro, por exemplo A=(1,-2,3) e B=(4,-3,1);
ii. Com a ferramenta segmento, definir o segmento (A)(B);
iii. Com a ferramenta Projeção do ponto, definir as projeções horizontais e verticais dos pontos (A) e (B);
iv. Nomear todos os pontos e projeções com suas devidas notações;
v. A partir das projeções dos pontos, definir, com a ferramenta segmento, as projeções verticais e horizontais da reta (A)(B) (segmento AB e A'B');
vi. Na barra de ferramentas, aba "Editar" ir em propriedades, na aba estilo, definir a espessura da linha em 1 para os seguintes seguimentos: (A)A, (B)B, (A)A', (B)B', AA_0, BB_0, $A'A_0$ e $B'B_0$;
vii. Definir os rebatimentos dos pontos com a ferramenta rebatimento do ponto;
viii. A partir do rebatimento dos pontos, definir o rebatimento da reta;
ix. Nomear todos os pontos e projeções com suas devidas notações;
x. Na barra de ferramentas, aba "Editar" ir em propriedades, na aba estilo, definir a espessura da linha em 1 para os seguintes seguimentos A'_1A_0 e B'_1B_0 e nos arcos $\widehat{A'_1A'}$ e $\widehat{B'_1B'}$;

Figura 21: Construção das ferramentas no GeoGebra - Retas - item i ao x.



Fonte: Arquivo do autor.

5.1.4.1. Construção da ferramenta – Projeção horizontal da reta

i. Na barra de ferramentas, selecionar “criar nova ferramenta”;

ii. Na aba “Objetos Finais”, selecionar os segmentos AB, (A)A e (B)B, e as projeções horizontais dos pontos (A) e (B), ou seja, A e B;

iii. Na aba “Objetos Iniciais” selecionar os pontos (A) e (B);

iv. Na aba “Nome e Ícone” em “Nome da Ferramenta” inserir: Projeção horizontal da reta (r);

v. Na “Ajuda da Ferramenta” inserir a seguinte descrição: Selecione 2 pontos que determinam a reta (r);

vi. Na aba ícone, adicionar um ícone que corresponda à ferramenta.

5.1.4.2. Construção da ferramenta – Projeção vertical da reta

i. Na barra de ferramentas, selecionar “criar nova ferramenta”;

ii. Na aba “Objetos Finais”, selecionar os segmentos A’B’, (A)A’ e (B)B’, e as projeções verticais dos pontos (A) e (B), ou seja, A’ e B’;

iii. Na aba “Objetos Iniciais” selecionar os pontos (A) e (B);

iv. Na aba “Nome e Ícone”, em “Nome da Ferramenta” inserir: Projeção vertical da reta (r);

v. Na "Ajuda da Ferramenta" inserir a seguinte descrição: Selecione 2 pontos que determinam a reta (r);
vi. Na aba ícone, adicionar um ícone que corresponda à ferramenta.

5.1.4.3. Construção da ferramenta – Projeções + Rebatimento da reta.

i. Na barra de ferramentas, selecionar "criar nova ferramenta";
ii. Na aba "Objetos Finais", selecionar os seguimentos: AB, (A)A, (B)B,A'B', (A)A', (B)B', A'A$_0$, B'B$_0$,A'_1A_0 e B'_1B_0, os arcos:$\widehat{A'_1A'}$ e $\widehat{B'_1B'}$ e os pontos:A, B, A', B', A'_1, A_0,B'_1 e B_0;
iii. Na aba "Objetos Iniciais" selecionar os pontos (A) e (B);
iv. Na aba "Nome e Ícone" em "Nome da Ferramenta" inserir: Projeções e Rebatimento da reta;
v. Na "Ajuda da Ferramenta" inserir a seguinte descrição: Selecione 2 pontos que determinam a reta (r);
vi. Na aba ícone, adicionar um ícone que corresponda à ferramenta.

5.1.5. Traços de retas

Chamaremos de traços de retas o lugar geométrico definido pela intersecção da reta (r) com os planos de projeções mongeanas, assim uma reta pode conter, dois, um ou mesmo nenhum traço de reta, nos respectivos casos: ser oblíqua a ambos planos de projeções, ser paralela a um dos planos de projeções e ser paralela a ambos planos de projeções.

Chamaremos de traço de reta horizontal a interseção da reta com o plano de projeção horizontal e o denotaremos por (H). Chamaremos a interseção da reta com o plano de projeção vertical de traço de reta vertical, o qual denotaremos por (V).

5.1.5.1. Construção da ferramenta "traços de reta" na JV2D

i. Na janela de visualização 3D, definir dois pontos quaisquer (A) e (B) no 1º Diedro (por exemplo A=(-1,-2,4) e B=(4,-4,1));
ii. Com a ferramenta segmento, definir o segmento (A)(B);
iii. Com a ferramenta *Projeções e Rebatimento da Reta*, definir as projeções horizontais e verticais e o rebatimento da reta (A)(B);

iv. Nomear todos os itens adequadamente;

v. Na janela de visualização 2D (épura), com a ferramenta *reta,* vamos definir uma reta, r', passando por A' e B';

vi. Agora com a ferramenta *intersecção de dois objetos* vamos definir a interseção da reta r' com a linha de terra, note que esse ponto trata-se da projeção vertical do traço de reta horizontal, **h'**;

vii. Com a ferramenta *Reta Perpendicular* iremos criar uma linha de chamada (reta perpendicular à linha de terra) passando por **h'**;

viii. Com a ferramenta *Retas* vamos definir a reta, **r,** passando pelos pontos A e B;

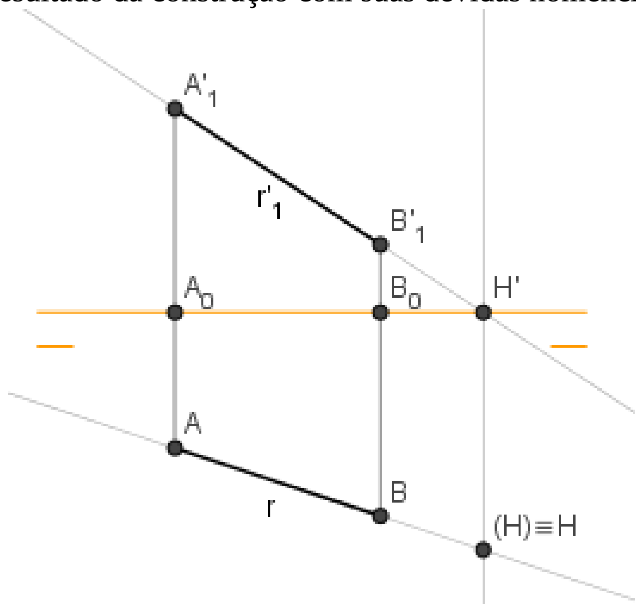
ix. Com a ferramenta *intersecção de dois objetos* vamos definir a interseção da linha de chamada que passa por h',com a reta **r**. Note que o ponto definido por essas duas retas é o traço de reta horizontal, ***(H)***.

x. Com a ferramenta *Segmentos*, definir os segmentos ***B'h'***,***h'(H)*** *e* ***(H)B****;*

xi. Na barra de ferramentas, aba "Editar" ir em propriedades; na aba estilo, definir a espessura da linha em 1 para todos seguimentos do item anterior. Na aba cor, definir a cor, 1/8 cinza, em todos segmentos criados no item anterior;

xii. Editar a linha de terra conforme a sua devida nomenclatura;

Figura 22: Resultado da construção com suas devidas nomenclaturas



Fonte: Arquivo do autor

xiii. Na barra de ferramentas, selecionar "criar nova ferramenta";

xiv. Na aba “Objetos Finais”, selecionar os seguimentos: ***B’₁H’, H’(H)*** *e* ***(H)B****. E os pontos* ***H’*** *e* ***(H).***

xv. Na aba “Objetos Iniciais” inserir os objetos na seguinte ordem: Linha de terra, A’$_1$, B’$_1$, A e B. (Obs: é imprescindível conservar a ordem destes objetos)

xvi. Na aba “Nome e Ícone” em “Nome da Ferramenta” inserir: Traços de reta;

xvii. Na “Ajuda da Ferramenta” inserir a seguinte descrição: Para obter o traço de reta horizontal selecione na sequência: Linha de terra-projeções verticais dos pontos-projeçõeshorizontais. Para obter o traço de reta vertical, inverta a ordem da seleção "projeção vertical por horizontal, horizontal por vertical" Na aba ícone, adicionar um ícone que corresponda à ferramenta.

Como alertado no item **xiv**, é de extrema importância conservar a ordem dos objetos finais na construção desta ferramenta, pois esta determina na execução se o usuário estará obtendo o traço de reta horizontal ou o traço de reta vertical.

5.1.5.2. Construção da ferramenta “traços de reta” na JV3D

Ainda utilizando a construção feita nesta unidade, iremos, na JV3D, construir a ferramenta Traços de Reta. Nessa etapa houve um problema, construir a ferramenta exigindo-se que se faça a projeção da reta (r) no plano em que se deseja definir o traço de reta, por exemplo, para se definir o traço de reta horizontal, exigir que se faça a projeção horizontal da reta (r) ou então criar uma ferramenta que apenas defina o traço de reta a partir da reta no R^3. Nesse caso poder-se-ia apenas ter como resultado da ferramenta, um prolongamento do segmento (A)(B) contendo em sua extremidade (interseção com o plano) o traço de reta. Contudo, pensando em uma forma mais didática, é muito interessante que se faça a projeção da reta, pois facilita a visualização no R^3 dos procedimentos realizados em épura para determinar os traços de retas.

Dando continuidade à construção desta unidade (itens i ao x, figura 20),

i. Com a ferramenta reta, definiremos uma reta passando pelos pontos (A) e (B) e outra passando pelos pontos A e B. Note que por construção, tais retas são concorrentes e sua interseção definirá o traço de reta horizontal - Claramente tem-se que a interseção da reta (A)(B) com sua projeção horizontal AB determina um ponto que pertence a reta (A)(B), mas também pertence ao plano horizontal, já que pertence à reta AB, que é a projeção horizontal de (A)(B), ou seja, é o ponto determinado pela interseção da reta (A)(B) com o plano horizontal, isto é, o traço de reta horizontal de (A)(B).

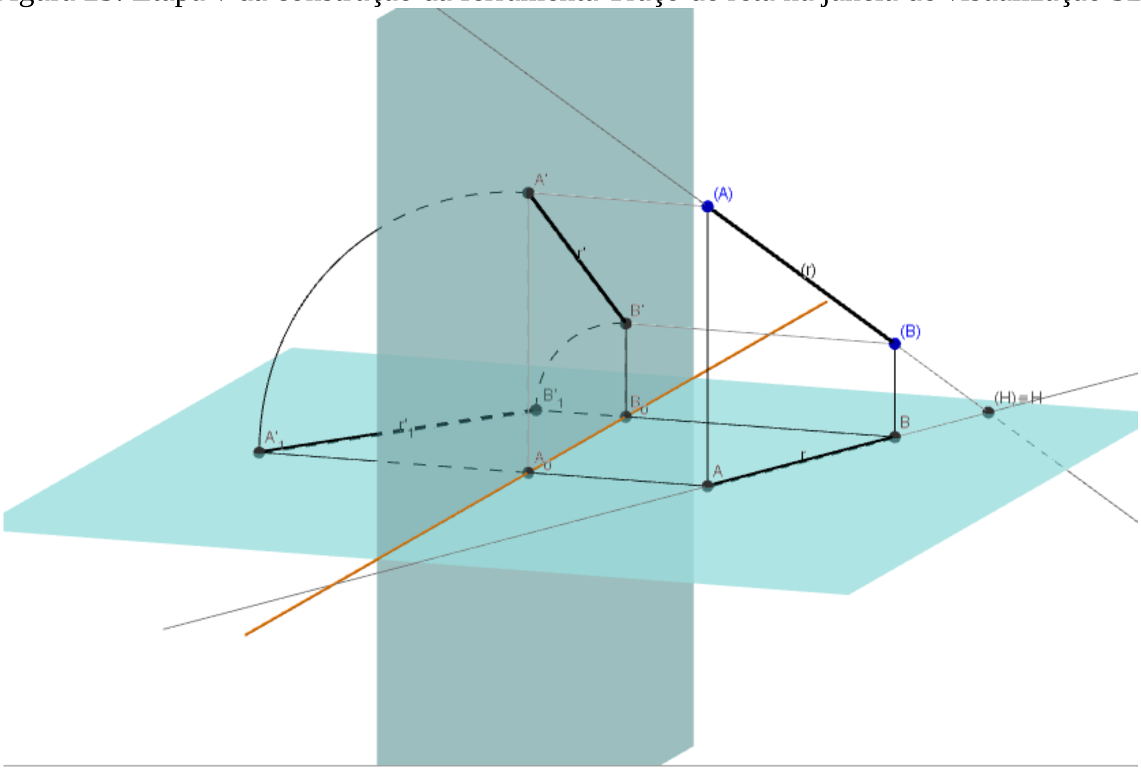
ii. Com a ferramenta interseção de dois objetos, definiremos a interseção da reta (A)(B) e AB e o ponto gerado por essa interseção é o traço de reta horizontal (H). Note que por (H) pertencer ao plano horizontal, sua projeção horizontal é congruente com ele mesmo, ou seja (H)≡H.

iii. Nomear adequadamente o ponto criado (Obs: Podemos copiar o símbolo de congruência no word e colar no GeoGebra);

iv. Com a ferramenta segmento, criar os segmentos $\overline{(B)(H)}$ e $\overline{B(H)}$;

v. Definir na aba estilo a espessura dos segmentos do item anterior em 1, e na aba cor definir a cor 1/8 cinza;

Figura 23: Etapa v da construção da ferramenta Traço de reta na janela de visualização 3D



Fonte: Arquivo do autor.

vi. Na barra de ferramentas, selecionar "criar nova ferramenta";

vii. Na aba "Objetos Finais", selecionar os seguimentos: $\overline{(B)(H)}$ e $\overline{B(H)}$. E o ponto (H).

viii. Na aba "Objetos Iniciais" inserir os objetos na seguinte ordem: pontos (A), (B), A e B.

ix. Na aba "Nome e Ícone" em "Nome da Ferramenta" inserir: Traços de reta 3D;

x. Na "Ajuda da Ferramenta" inserir a seguinte descrição: Para obter o traço de reta horizontal selecione os dois pontos da reta no R³ e em seguida dois pontos da sua projeção horizontal. Proceda de forma análoga para obter o traço de reta vertical, porém em vez de selecionar dois pontos da projeção horizontal, selecione dois pontos da projeção vertical.

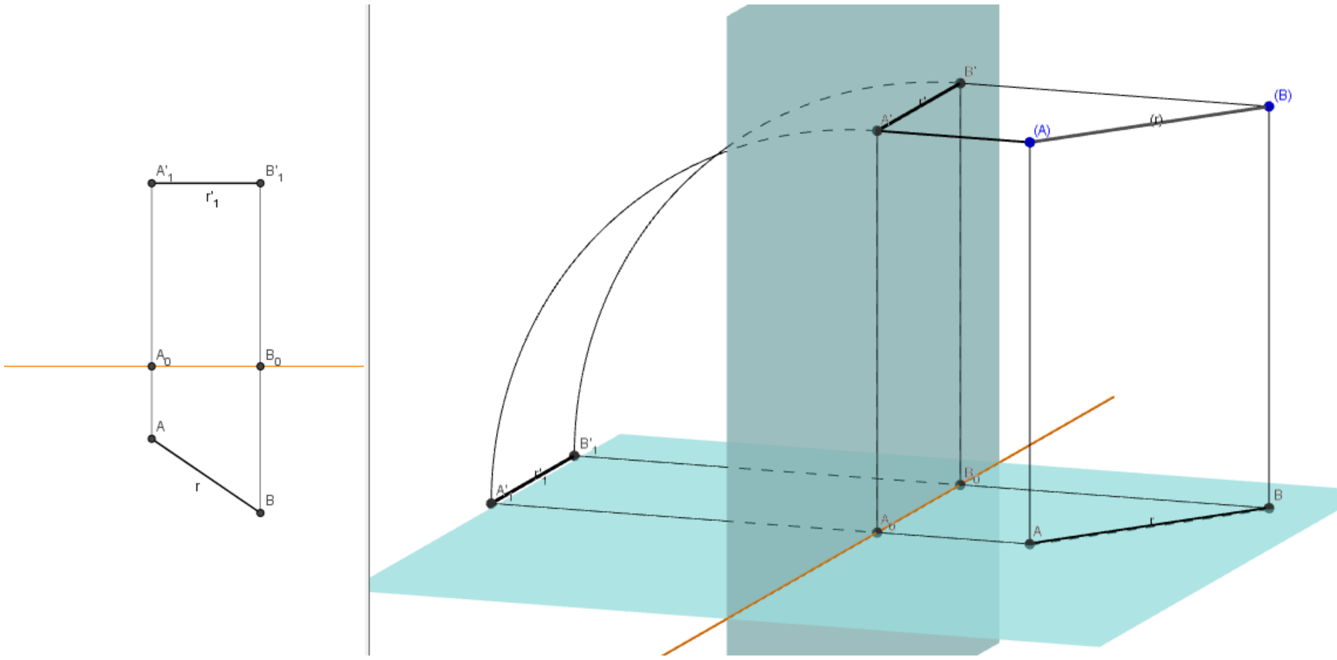
5.1.6. Resolução de atividades com as ferramentas criadas

3. Determine no plano de projeção Mongeana na sua respectiva épura, uma reta (r) que passe pelo ponto (A)[3; 2; 5] e que atravesse somente o 1º e 2º diedros.

   Resolução: Para que uma reta atravesse somente 1º e 2º diedros, esta deve ser paralela ao plano horizontal, caso contrário ela atravessaria o 3º ou 4º diedro, ou seja, todos os pontos pertencentes à reta (r) possuem a mesma cota, logo qualquer reta (A)(B), donde (B)$[x_1; x_2;\ 5]$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ satisfaz o problema, assim definimos de forma aleatória o ponto (B)[6; 4; 5]

   i. Inserir os pontos (A) e (B) na janela de visualização 3D do GeoGebra (lembrando de inverter a coordenada afastamento);
   ii. Definir o segmento $\overline{(A)(B)}$;
   iii. Com a ferramenta Projeções e Rebatimento da reta (r), definir as projeções e rebatimento da reta (A)(B);
   iv. Nomear adequadamente todos os pontos e retas.

Figura 24: Solução da Aplicação 3 - Retas



Fonte: Arquivo do autor.

Note na figura 25 que a projeção vertical da reta (r) é paralela à linha de terra, o que caracteriza uma reta paralela ao plano horizontal.

4. Dados os pontos (A) e (B), determine em épura os traços da reta (r):(A)(B), caso existam, caso não, justifique.

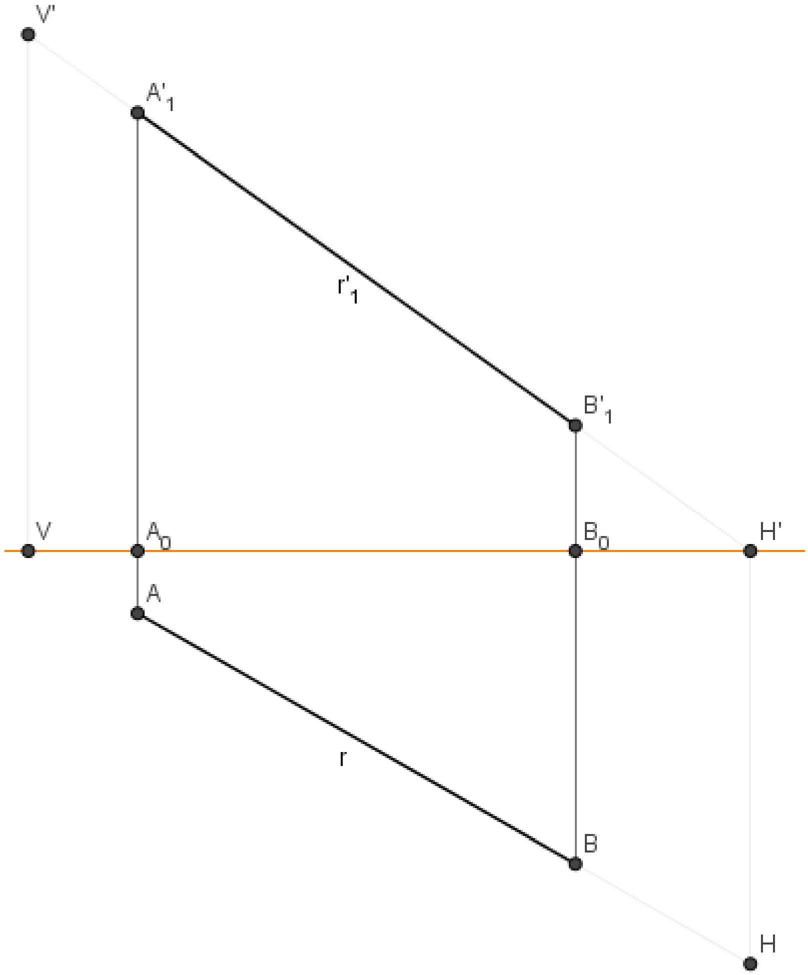
   (A)[-3; 1; 7]

   (B)[4; 5; 2]

   Resolução:

   i. Inserir os pontos A=(-3, -1, 7) e B=(4, -5, 2) na JV3D (Apesar do exercício não solicitar a representação no R^3, é mais fácil obter as projeções na JV2D a partir da JV3D, do que inserir diretamente na JV2D.);
   ii. Obter as projeções da reta com a ferramenta Projeções + Rebatimento da reta (r);
   iii. Na JV2D, utilize a ferramenta Traço de Reta, para definir os traços horizontal e vertical;
   iv. Nomeie adequadamente os pontos obtidos.

Figura 25: Solução da Aplicação 4 - Retas



Fonte: Arquivo do Autor

5.1.7. Posições relativas das retas

Duas retas no R³ podem ser: Coincidentes, Paralelas, Concorrentes ou Reversas. Por ser um caso trivial, não trataremos das retas coincidentes.

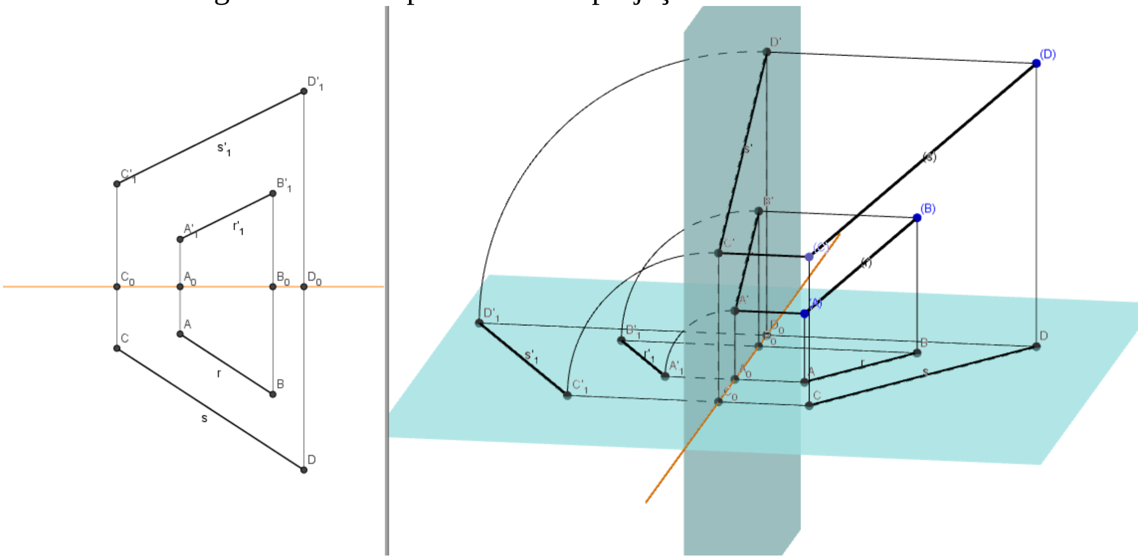
1) Retas Paralelas

Podemos subdividir esse conceito em três partes, a saber:

a) Quando as projeções das duas retas também são retas:

   i) Suas projeções de mesmo nome são distintas. Nesse caso, se (r)//(s), trivialmente suas projeções horizontais também serão paralelas, ou seja, r//s, pois os planos projetantes, definidos pela reta e sua devida projeção, são paralelos, ou seja, o plano definido pela reta (r) e sua projeção horizontal r é paralelo ao plano definido pela reta (s) e sua projeção horizontal s. Note ainda que as projeções das retas (r) e (s) são definidas pela interseção do plano projetante com o plano de projeção mongeano, o que prova que as projeções são paralelas. De forma análoga, mostra-se que as projeções verticais são paralelas.

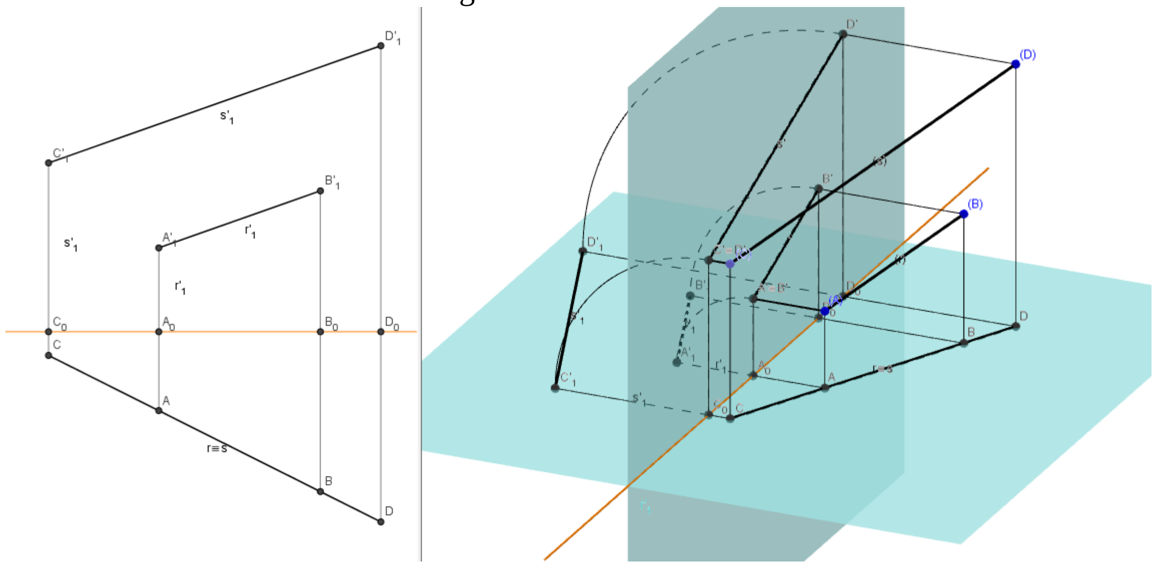
Figura 26: Retas paralelas com projeções distintas.



Fonte: Arquivo do Autor

ii) Quando uma das projeções de mesmo nome são coincidentes. Sem perda de generalidade, suponhamos que as projeções horizontais são coincidentes, neste caso ambas as retas estão contidas em um plano projetante, ortogonal ao plano horizontal, mas por hipótese (r) e (s) são paralelas, logo os planos projetantes, ortogonais ao plano vertical, são paralelos, então a interseção destes planos projetantes com o plano de projeção vertical define duas retas paralelas, ou seja r'//s'. Como resultado em épura temos duas projeções de mesmo nome coincidentes e as outras paralelas.

Figura 27: Caso aii



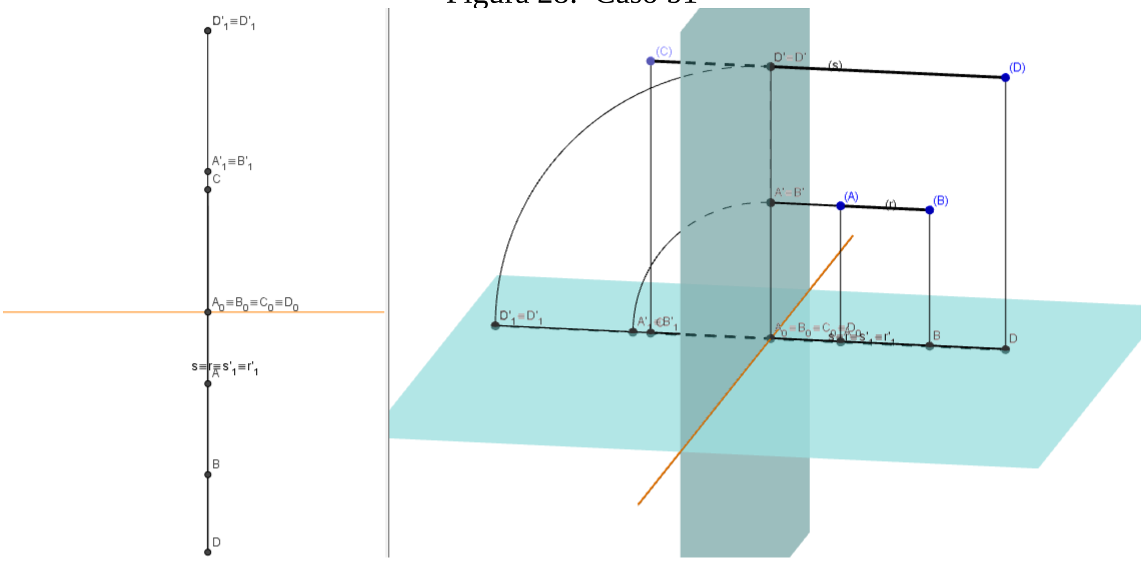
Fonte: Arquivo do autor.

b) As duas retas são perpendiculares a um plano de projeção. Ora, se ambas as retas são perpendiculares a um dos planos de projeção, logo são paralelas ao outro plano de projeção, já que por construção os planos de projeções mongeanas são ortogonais entre si. Dai temos dois casos, a saber:

Sem perda de generalidade, suponhamos que as retas (r) e (s) são perpendiculares ao plano vertical.

i) $\exists\varphi, \varphi\ plano\ projetante \mid (r),(s)\ \epsilon\ \varphi$. Ou seja, duas projeções de mesmo nome

Figura 28: Caso b1

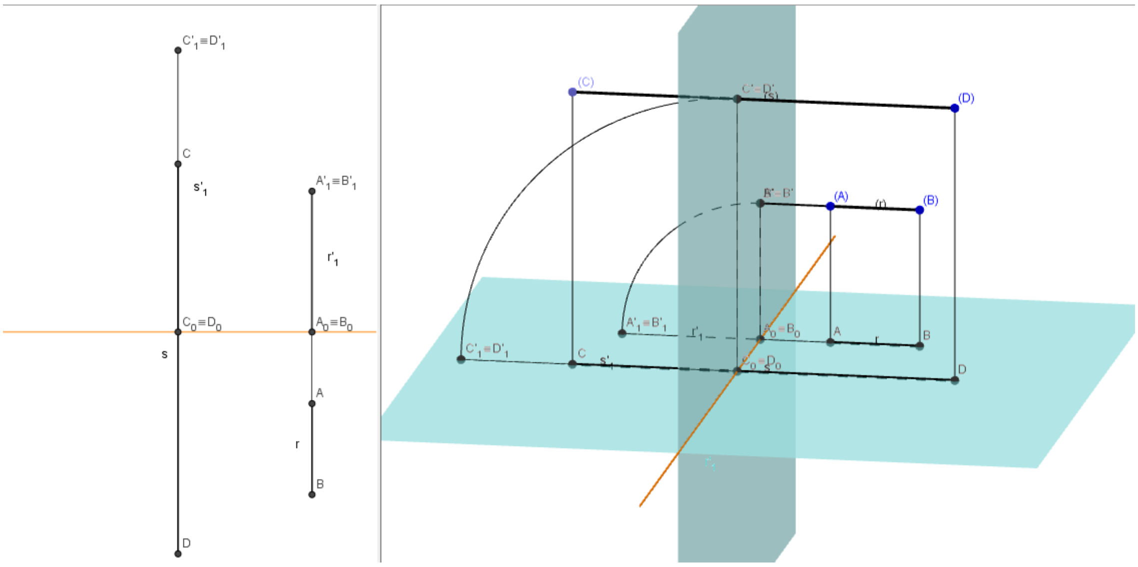


serão pontuais e as outras duas serão coincidentes.

Fonte: Arquivo do autor.

ii) $\nexists\, \varphi, \varphi\ plano\ projetante \mid (r), (s) \in \varphi$. Ou seja, duas projeções de mesmo nome serão pontuais e as outras duas paralelas.

Figura 29: Caso b-ii



Fonte: Arquivo do autor

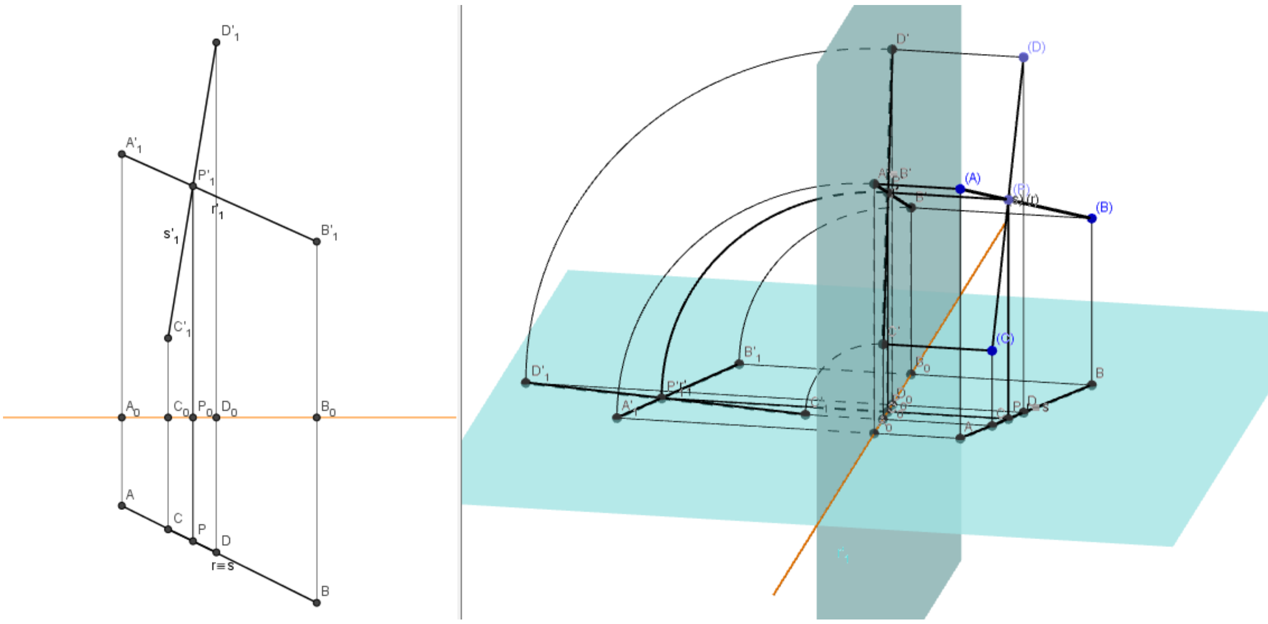
2) Retas Concorrentes

Trivialmente duas retas (r) e (s) são ditas concorrentes se $\exists!\,(P) \mid (P) \in (r) \cap (s)$.

Teremos 3 casos, porém neste momento não trataremos o caso em que (r) e (s) são retas de perfis, devido à sua particularidade.

a) As retas (r) e (s) determinam um plano projetante. Sem perda de generalidade, suponhamos que as retas (r) e (s) determinam um plano Ω tal que $\Omega \perp \pi$, ou seja, Ω é um plano projetante, logo as projeções r e s são coincidentes, como por hipótese $\exists!\,(P) \mid (P) \in (r) \cap (s)$, então $\exists!\, P' \mid P' \in r' \cap s'$, isto é, as projeções verticais são concorrentes. Portanto em épura duas projeções de mesmo nome são coincidentes e as outras são concorrentes.

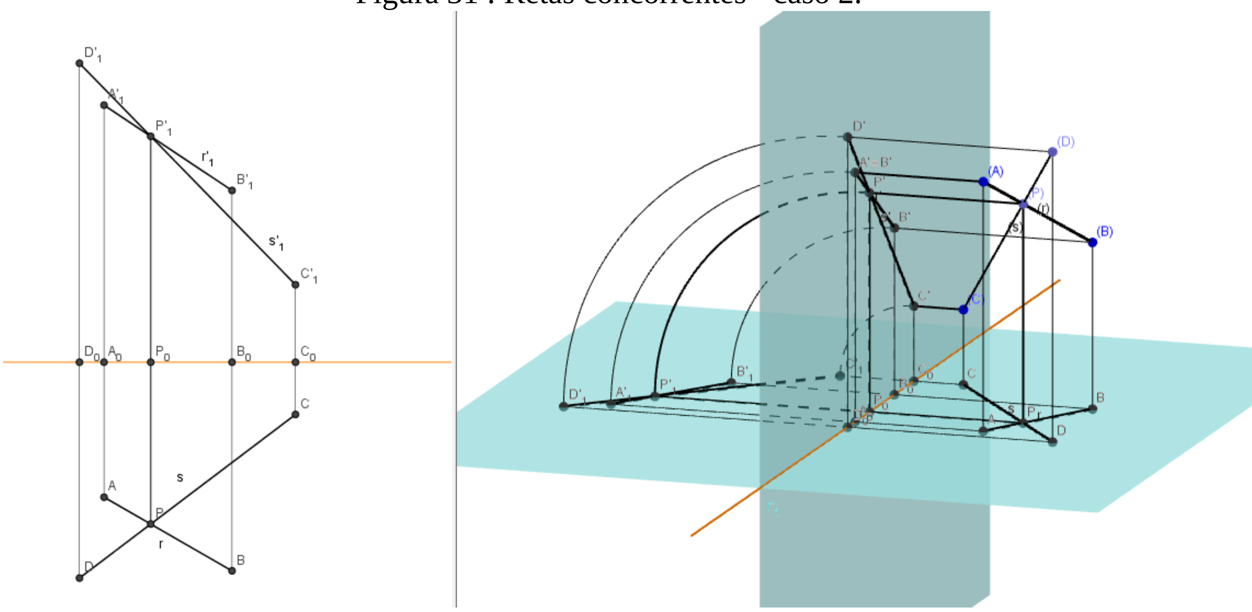
Figura 30 Retas concorrentes - caso 1



Fonte: Arquivo do autor

b) As retas (r) e (s) determinam um plano φ tal que φ não é um plano projetante, então $\exists!\, P' |\, P' \in r' \cap s'$ e ainda $\exists!\, P |\, P \in r \cap s$, portanto em épura as projeções de mesmo nome são concorrentes e a interseção destas estão sobre a mesma linha de chamada (Por definição a projeção horizontal e vertical de um ponto estão sobre a mesma linha de chamada, neste caso, P e P').

Figura 31 : Retas concorrentes - caso 2.

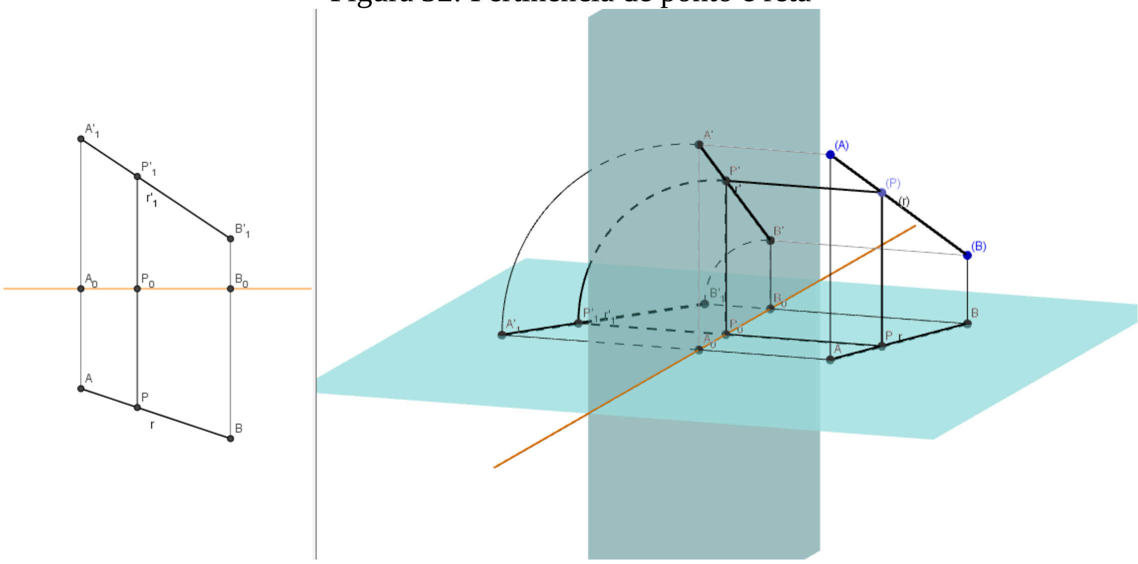


Fonte: Arquivo do autor.

5.1.8. Pertinência de ponto e reta

Seja (P) um ponto e (r) uma reta, tal que $(P) \in (r)$, é fácil notar que $P \in r$ e $P' \in r'$, ou seja, as projeções do ponto (P) estão sobre as projeções de mesmo nome da reta (r). Excetuando-se o caso em que (r) é uma reta de perfil e (P) um ponto com a mesma abscissa de (r) tal que $(P) \notin (r)$, nota-se claramente que as projeções do ponto (P) estarão sobre as projeções de mesmo nome da reta (r), mas não trataremos dessa particularidade. De forma resumida, um ponto pertence a uma reta (excetuando-se o caso da reta de perfil) se suas projeções estão sobre as projeções de mesmo nome da reta.

Figura 32: Pertinência de ponto e reta



Fonte: Arquivo do autor

Note na figura 33 que as projeções do ponto (P) estão sobre as projeções de mesmo nome da reta (r).

5.1.9. Resolução de atividades com as ferramentas criadas

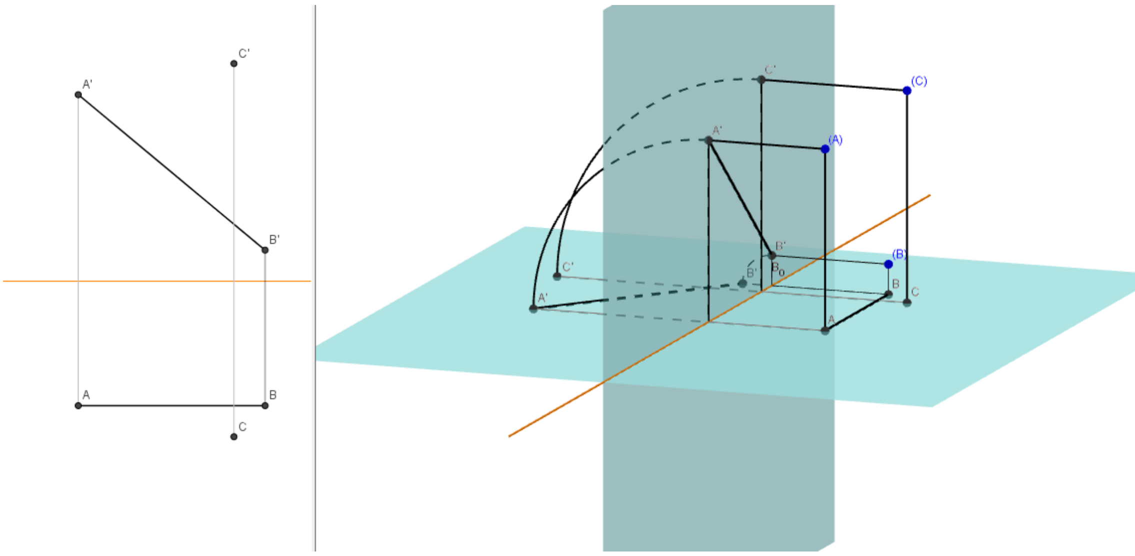
5. Dados (A)[-3,4,6], (B)[3,4,1], (C)[2,5,7] e (D)[?,?,?], Determine em épura
   a. Uma reta (C)(D) concorrente a (A)(B);
   b. Uma reta (C)(E) paralela a (A)(B).
   c. Os traços das retas (A)(B), (C)(D) e (C)(E).

Resolução:

Mesmo que a questão tenha solicitado que seja resolvido em épura, vamos utilizar a JV3D para obter as projeções da reta (A)(B) e do ponto (C).

i. Na JV3D inserir os pontos A=(-3,-4,6), B=(3,-4,1) e C=(2,-5,7);
ii. Utilizar a ferramenta *Projeções e Rebatimento da reta* para definir as projeções e rebatimento da reta (A)(B). Utilizar a ferramenta *Projeções e Rebatimento* pra definir as projeções e rebatimento do ponto (C).
    Note que não foi necessário definir o segmento (A)(B) para definir suas projeções.

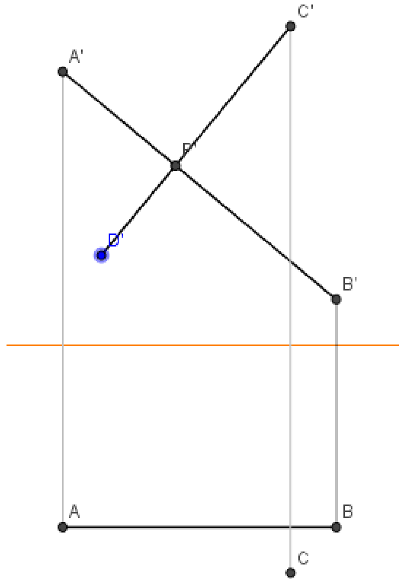
Figura 33: vistas da JV2D e da JV3D



Fonte: Arquivo do autor

iii. Renomear todos os itens adequadamente conforme a figura 34;
iv. Nesse momento podemos fechar a JV3D, já que trabalharemos somente em épura;
v. Para resolver o item a, devemos criar de forma arbitrária a projeção vertical do ponto (D) e definir o segmento C’D’, logo em seguida definir a interseção, P’, da reta A’B’ com a reta C’D’, tendo como resultado a figura 35 abaixo.

Figura 34: Solução parcial do exercício 5

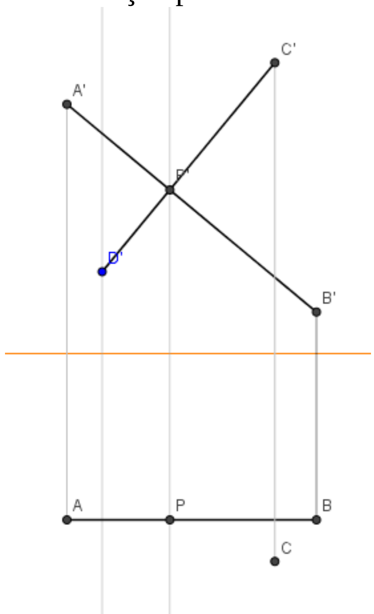


Fonte: Arquivo do autor

vi. Agora vamos passar uma linha de chamada passando por P’ (note que, para (A)(B) ser concorrente com (C)(D), temos que ter a interseção de A’B’ com C’D’ na mesma linha de chamada de da interseção de AB com CD), logo em seguida definiremos a interseção desta linha de chamada com a projeção AB, estamos definindo com essa interseção a projeção horizontal, P, da interseção de (A)(B) com (C)(D);

vii. Passaremos agora uma linha de chamada passando por D’, conforme a figura 36 abaixo:

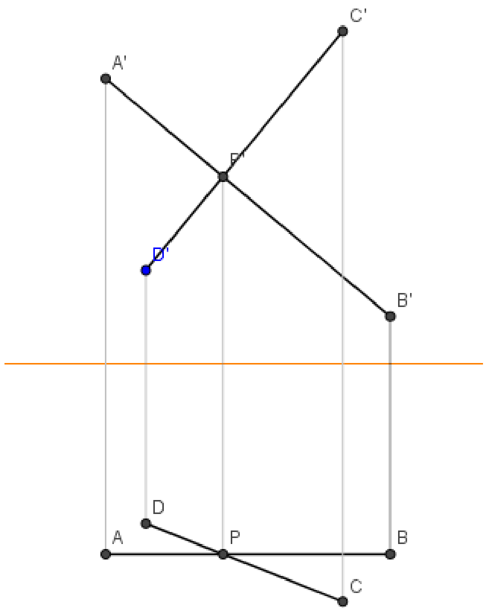
Figura 35: Solução parcial do exercício 5



Fonte: Arquivo do autor

viii. Para (A)(B) ser concorrente a (C)(D), basta, nesse momento definir a projeção horizontal, D, de forma que CD contenha a projeção horizontal P; na figura abaixo temos a solução do item a:

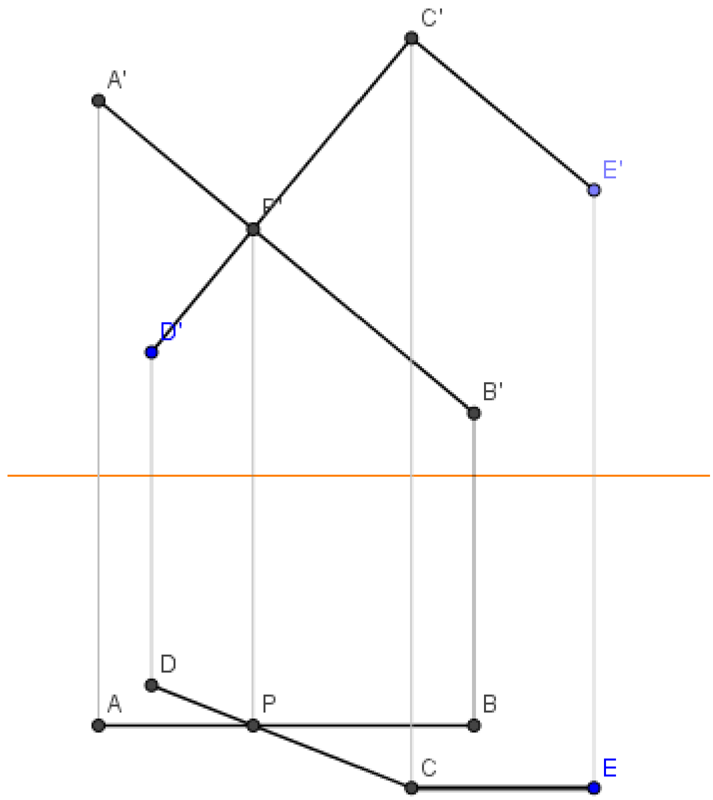
Figura 36: Solução do item a – exercício 5



Fonte: Arquivo do autor

ix. Para resolver o item b, basta passarmos uma reta paralela a A'B', passando por C' e uma reta paralela a AB passando por C, disso definiremos as projeções E' e E, observando obviamente que E' e E devem estar sobre a mesma linha de chamada.

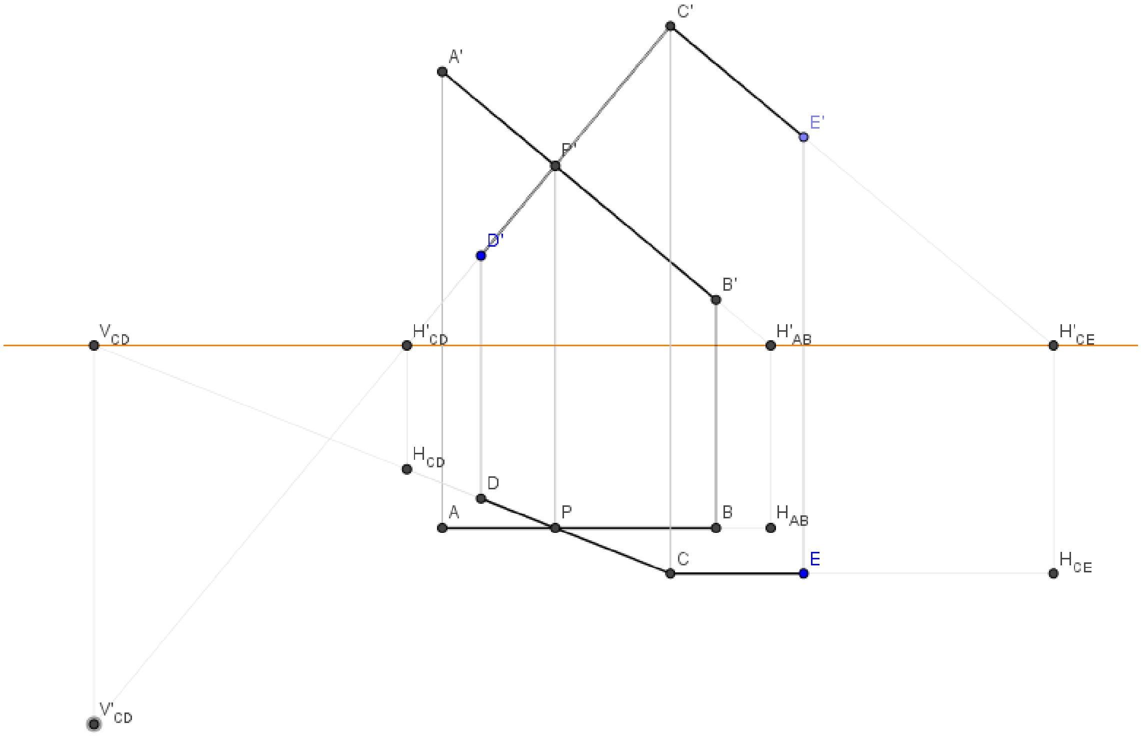
Figura 37: Solução do item b



Fonte: Arquivo do autor

x. Para resolver o item c, usaremos a ferramenta *Traços de reta* da JV2D. Note que as retas (A)(B) e (C)(E) não possuem o traço de reta vertical, já que sua projeção horizontal AB//LT, CE//LT.

Figura 38: Resolução item c



Fonte: Arquivo do autor

CAPITULO VI – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa envolveu, inicialmente, revisão bibliográfica acerca do tema "TD e ensino da GD ", seguida de uma análise detalhada do programa GeoGebra - objeto deste estudo - e a partir disso, reflexões e consequente, como objetivo principal, otimização desse instrumento através da criação de novas ferramentas para utilização como recurso didático no ensino da disciplina Geometria Descritiva.

Este trabalho caracterizou-se de grande importância, uma vez que os objetivos propostos foram concluídos satisfatoriamente. O estudo confirmou o potencial dos novos instrumentos criados. Através dos testes dessas ferramentas, na resolução de exercícios, verificou-se que além da redução significativa do tempo na resolução das atividades, tornou-se possível a visualização do objeto no plano de projeção mongeana e sua respectiva épura (conforme figura 34), o que é de grande valia, já que expõe para o usuário as vistas no R^3 e no R^2.

É notável, então, que a inserção do programa otimizado nas aulas de GD irá contribuir satisfatoriamente com a aprendizagem dos conteúdos dessa disciplina, uma vez que a personalização deste *software* traz as visualizações simultâneas das vistas no R^3 e no R^2, tais visualizações.

A perspectiva é de que este trabalho contribua de forma significativa para o ensino e aprendizagem da disciplina Geometria Descritiva em um curso de graduação e outros estudos afins, instiga também novas pesquisas sobre esse programa, suas outras potencialidades e aplicações. Findamos as considerações e deixamos aqui , para análise, as palavras de Minayo (1993) sobre a conceituação do que é pesquisa, a busca incessante pelo conhecimento, esta que nunca deve cessar:

> (…) atividade básica das ciências na sua indagação e descoberta da realidade. É uma atitude e uma prática teórica de constante busca que define um processo intrinsecamente inacabado e permanente. É uma atividade de aproximação sucessiva da realidade que nunca se esgota, fazendo uma combinação particular entre teoria e dados. (MINAYO, 1993, p.23)

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALENCAR, Gonçalo Coelho. A matemática e os problemas da vida. Revista Mundo Jovem, Ano 50, n. 432, nov. 2012, p.18.
ALVES, David Manuel Cascais. Relatório de Estágio para obtenção do Grau de Mestre na especialidade Ensino de Artes Visuais no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário. Covihã, junho de 2012. Disponível em: https://ubibliorum.ubi.pt/bitstream/10400.6/1470/1/Investiga%C3%A7%C3%A3o%20-%20Relat%C3%B3rio.pdf. Acesso em: mai. 2017.

BALBINO, Jaime. Objetos de aprendizagem: Contribuições para sua genealogia. 2007. Disponível em: < http://www.dicas -1.com.br/educacao_tecnologia/>. Acesso em: 20 jun. 2017.

BECKER, IN: ROMANOWSKI, Joana P. MARTINS, Pura Lúcia Oliver,JUNQUEIRA, Sérgio Rogério Azevedo (orgs.). Conhecimento local e conhecimento Universal: A aula e os campos do conhecimento.Curitiba: Champagnat, v. 3, 2004.

BORBA, M.C.; PENTEADO, M. G. **Informática e educação matemát**ica. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. Desafios da Educação Matemática no novo milênio. Educação Matemática em Revista. São Paulo, 2001.

FREITAS, E.S.; Salvi, R.F. (2008). A Ludicidade no ensino de matemática: perspectiva para uma aprendizagem significativa. Anais do II Encontro Nacional de Aprendizagem Significativa. Canela, Brasil. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/89-4.pdf . Acesso em: 07 out. 2016.

KOURGANOFF, W. A face oculta da universidade.São Paulo: Unesp, 1990

LÉVY, P. Cibercultura. 6ª ed. São Paulo: Ed. 34, 2007.

MELO, Diógenes Maclyne Bezerra de. SILVA, Kátia Cilene da. Jogos digitais e objetos de aprendizagem no ensino da matemática. Disponível em: http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/artigos/objetos/CC_Melo_e_Silva.pdf. Acesso em mai. 2016.

MIGUEL, José Carlos. O Ensino da matemática na perspectiva da formação de conceitos: implicações teórico-metodológicas, 2011. Disponível em: http://www.gradadm.ifsc.usp.br/dados/20121/SLC0630-1/Ensino-Matematica-Enfoque-Conceitos.pdf. Acesso em: out. 2016.

MINAYO, Maria Cecília de Souza . *O Desafio do Conhecimento: Pesquisa Qualitativa em Saúde*. São Paulo, Rio de Janeiro: HUCITEC/ABRASCO, 1993.

MORAN, José Manuel. O Uso das Novas Tecnologias da Informação e da Comunicação na EAD - uma leitura crítica dos meios, 1999. Disponível em http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/T6%20TextoMoran.pdf. Acesso. 23 de abril 2017.

_________. Os novos espaços de atuação do educador com as tecnologias. Anais do 12º Endipe: Conhecimento local e conhecimento universal: diversidade e tecnologias na educação. Curitiba: Champagnat, 2004. Disponível em http://www.eca.usp.br/prof/moran/espacos.htm#intro. Acesso em mai. 2017.

_________. A educação que desejamos: Novos desafios e como chegar lá. – Campinas, SP: Papirus, 2007.

MORAN, José Manuel, MASETTO, Marcos e BEHRENS,Marilda. Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica. São Paulo, Papirus Editora,2000.

_______. Novas tecnologias e mediação pedagógica. 16. ed. Campinas, SP: Papirus, 2009. (Coleção Papirus Educação). Disponível em: . <http://www.uca.gov.br/institucional/noticiasLei12249.jsp>. Acesso em: 17 abr. 2016.

NASCIMENTO, E. G. A. Avaliação do Uso do Software GeoGebra no Ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola. Conferencia Latino americana de GeoGebra, Uruguay, 2012, p. 125 - 132. Disponível em: http://www.GeoGebra.org.uy/2012/actas/67.pdf.Acesso em: mai. 2017.

PÁDUA, E.M.M. Metodologia da pesquisa: abordagem teórico prática. 13. ed. Campinas: Papirus, 2007.

PRÍNCIPE JÚNIOR, Alfredo dos Reis, 1915 – Noções de Geometria Descritiva. São Paulo, Nobel. Vol. 1 . 33ª Edição. 1982.

PRODANOV; FREITAS. Metodologia do trabalho científico: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. Ed. – Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

RIVED. Banco de Dados. Brasília, (2003). Disponível em: . Acesso em: 03 fev. 2014.

ROMANOWSKI, Joana Paulin et al (Orgs). ***Conhecimento local e conhecimento universal: Diversidade, mídias e tecnologias na educação***. vol 2, Curitiba, Champagnat, 2004, páginas 245-253.

SABBATINI, Marcelo. Reflexões críticas sobre o conceito de objeto de aprendizagem aplicado ao ensino de ciências e matemática. EM TEIA – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana – vol. 3 - número 3 – 2012. Disponível em: < www.gente.eti.br › Capa › v. 3, n. 3 (2012) › Sabbatini>. Acesso em 07 jul. 2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Proposta curricular para o ensino de 1º grau - matemática. 3ª ed. São Paulo: SE/CENP,1988.

SILVA, Jorge Nuno. Tecnologias na Educação Matemática: Cinderella . Revista Educação e Matemática, nº 67, março/abril 2002. Disponível em: http://www.apm.pt/apm/revista/educ67/Tecnologias.pdf. Acesso em: jan. de 2017.

SILVA, Marco. Sala de Aula Interativa: a educação presencial e a distância em sintonia com a era digital e com a cidadania. In: **Boletim Técnico do Senac**, v. 27, n. 2, maio/agosto 2001. Disponível em: <http://www.senac.br/informativo/BTS/272e.htm ou http:///www.saladeaulainterativa.pro.br/textos.htm>. Acesso em: abr.2015.

TARDIF, Maurice. Saberes Docentes e Formação Profissional. Petrópolis: Vozes, 2002.

APÊNDICE – APLICAÇÕES

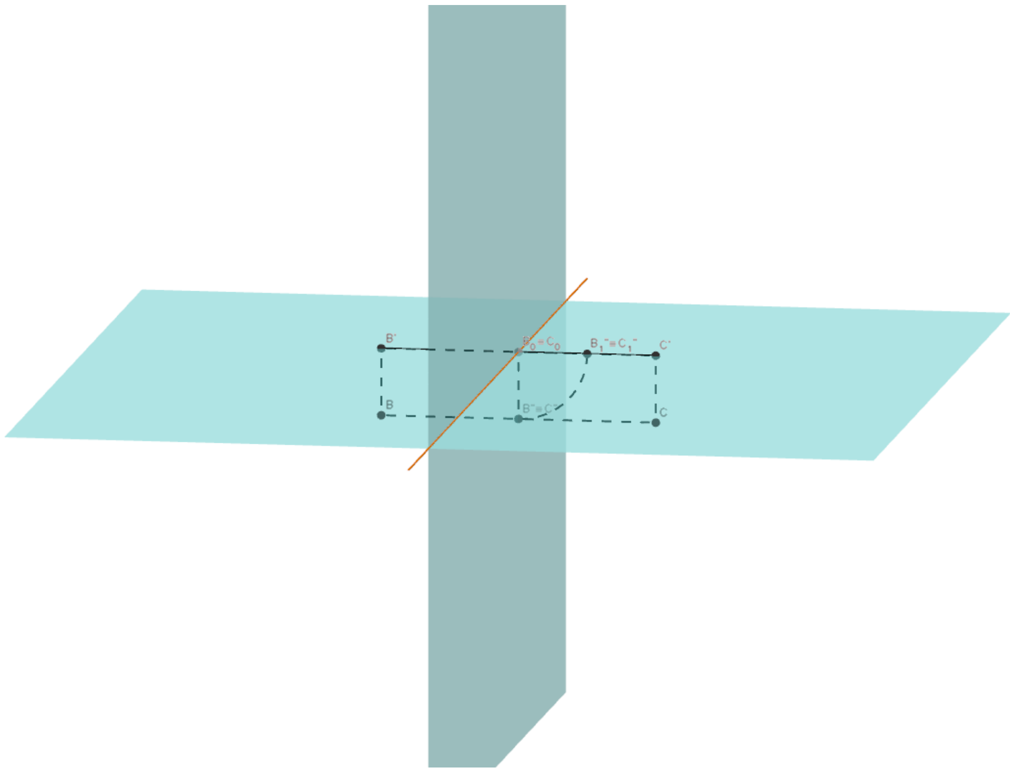
1. Dado o ponto A=(4,2,1), determine no plano de projeção e em épura os seguintes pontos:
   - B simétrico ao ponto A em relação a LT.
   - C simétrico ao ponto B em relação a π’.

Resolução:

Como o ponto B é simétrico ao ponto A em relação a LT, então suas coordenadas serão B=(4,-2,-1), daí teremos que C=(4,2,-1).

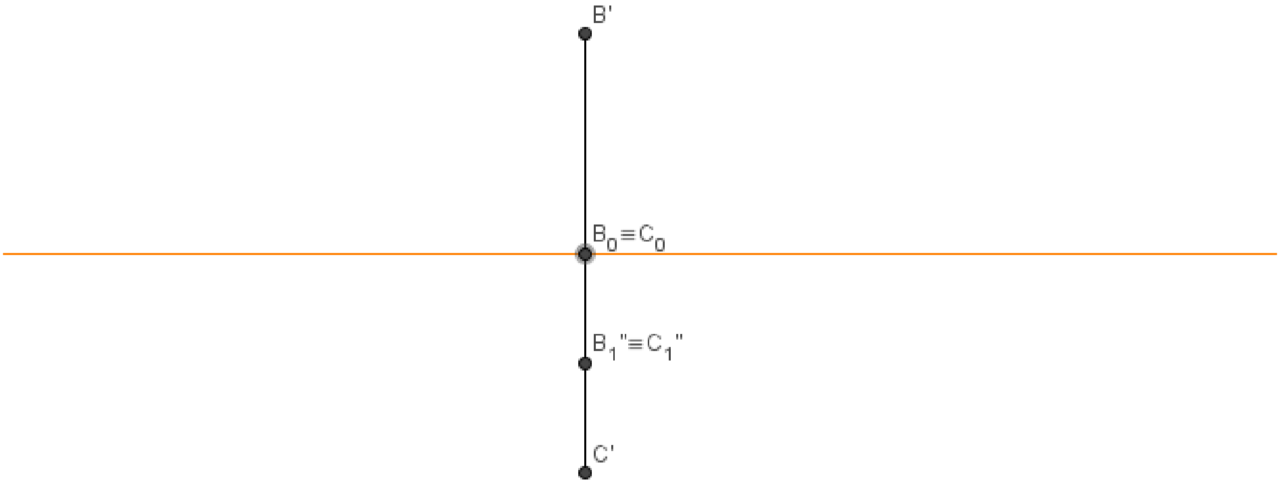
No campo de entrada do GeoGebra, definiremos os pontos B=(4,2,-1) e C=(4,-2-1), note que estamos invertendo o sinal da coordenada afastamento, como já explanado anteriormente. Com a ferramenta *Projeção + Rebatimento*, faremos as devidas projeções e rebatimentos dos pontos B e C, note que teremos de renomear as projeções e rebatimentos, conforme já mencionado.

Figura 39: Solução da aplicação 1 JV3D



Fonte: Arquivo do autor

Figura 40:Solução da questão 1 - JV2D



Fonte: Arquivo do autor

2. Determine em uma mesma épura, os pontos (A) e (B), tais que:
   a. (A) tenha seu afastamento três vezes maior que sua cota.
   b. (B) tenha cota e afastamento com o mesmo valor absoluto, porém sinais contrários.

Resolução:

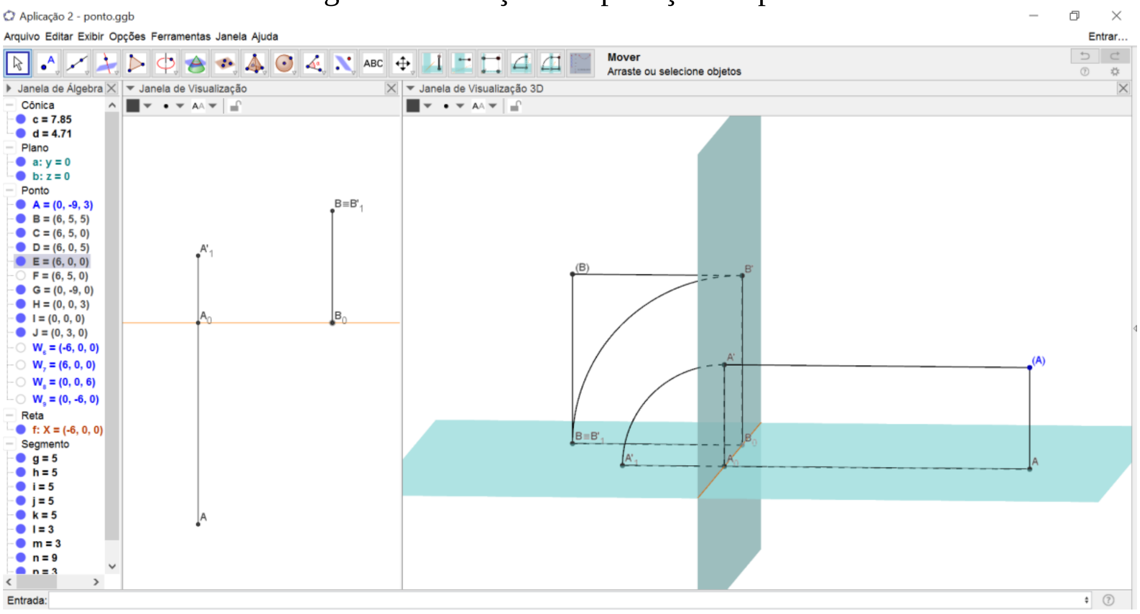
Para o ponto (A), basta definir as seguintes coordenadas no campo de entrada do GeoGebra A=(0,-9,3). Note que estamos representando o ponto (A)=[0;9;3], que tem afastamento três vezes maior que a cota.

Para o ponto (B), temos que criar um ponto, necessariamente, no segundo ou quarto diedros, para satisfazer a condição dos sinais contrários, ou seja, (B)=[6;-5;5], assim digitaremos no campo de entrada do GeoGebra o ponto B=(6,5,5), lembrando apenas de inverter a coordenada afastamento.

Após inserir os pontos A e B no campo de entrada do GeoGebra, iremos definir, com a ferramenta *projeções + rebatimento*, as projeções dos pontos A e B, em seguida nomear os pontos com suas respectivas notações.

Assim, obteremos:

Figura 41: Solução da aplicação 2 - pontos



Fonte: Arquivo do autor

3. Determine no plano de projeção Mongeana, na sua respectiva épura, uma reta (r) que passe pelo ponto (A)[3; 2; 5] e que atravesse somente o 1º e 2º diedros.

   Resolução: Para que uma reta atravesse somente 1º e 2º diedros, esta deve ser paralela ao plano horizontal, caso contrário ela atravessaria o 3º ou 4º diedro, ou seja, todos os pontos pertencentes a reta (r) possuem a mesma cota. Logo qualquer reta (A)(B), donde (B)[$x_1; x_2;$ 5], $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ satisfaz o problema, assim definimos de forma arbitrária o ponto (B)[6; 4; 5]

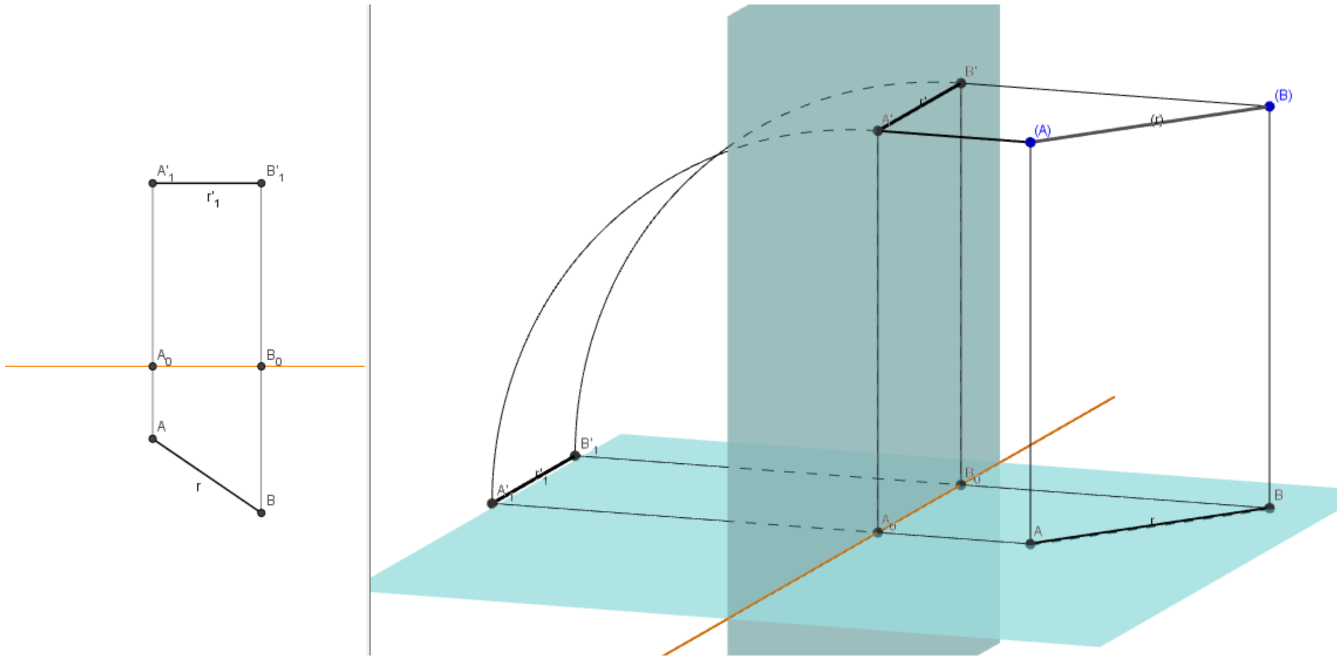
   v. Inserir os pontos (A) e (B) na janela de visualização 3D do GeoGebra (lembrando de inverter a coordenada afastamento);

   vi. Definir o segmento $\overline{(A)(B)}$;

   vii. Com a ferramenta Projeções e Rebatimento da reta (r), definir as projeções e rebatimento da reta (A)(B);

viii. Nomear adequadamente todos os pontos e retas.

Figura 42: Solução da Aplicação 3 - Retas



Fonte: Arquivo do autor.

Note que a projeção vertical da reta (r) é paralela à linha de terra, o que caracteriza uma reta paralela ao plano horizontal.

4. Dados os pontos (A) e (B), determine em épura os traços da reta (r):(A)(B), caso existam, do contrário, justifique.

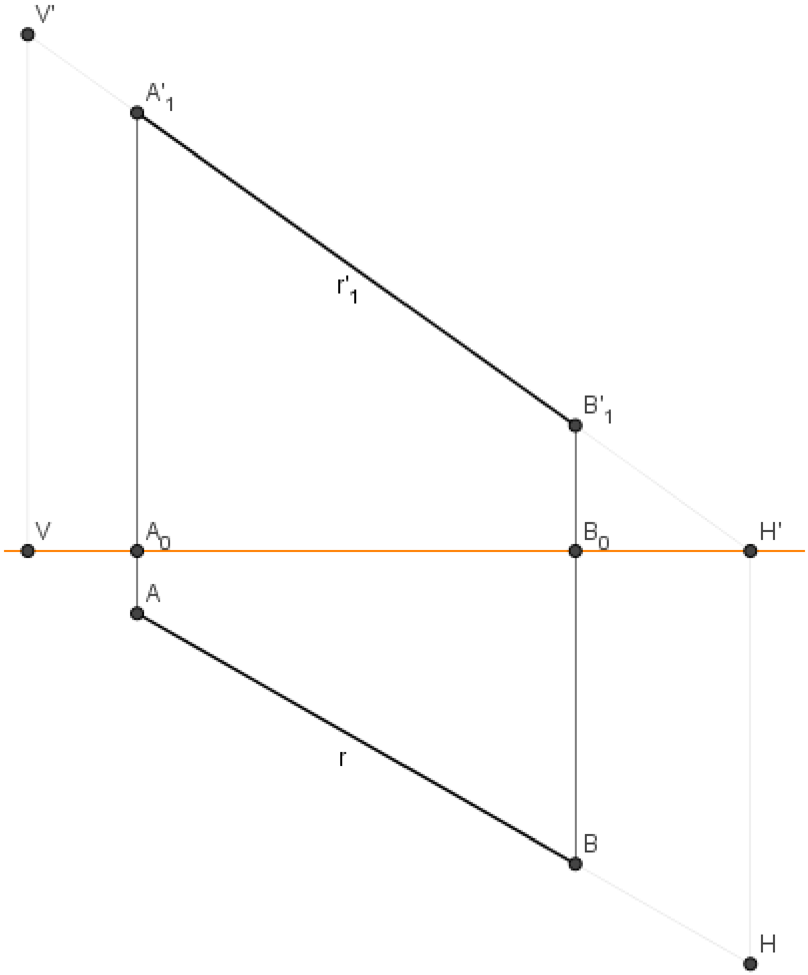
   (A)[-3; 1; 7]

   (B)[4; 5; 2]

   Resolução:

i. Inserir os pontos A=(-3, -1, 7) e B=(4, -5, 2) na janela de visualização 3D (Apesar do exercício não solicitar a representação no R³, é mais fácil obter as projeções na janela de visualização 2D a partir da janela de visualização 3D, do que inserir diretamente na a janela de visualização 2D.);
ii. Obter as projeções da reta com a ferramenta Projeções + Rebatimento da reta (r);
iii. Na janela de visualização 2D utilize a ferramenta Traço de Reta, para definir os traços horizontal e vertical;
iv. Nomeie adequadamente os pontos obtidos.

Figura 43: Solução da Aplicação 4 - Retas



Fonte: Arquivo do Autor