UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

JOÃO PAULO DA CRUZ ALMEIDA

INDUÇÃO FINITA, DEDUÇÕES E MÁQUINA DE TURING

Ilha Solteira
2017

JOÃO PAULO DA CRUZ ALMEIDA

INDUÇÃO FINITA, DEDUÇÕES E MÁQUINA DE TURING

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pólo em Ilha Solteira, como requisito para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Prof. Dr. LUCIANO BARBANTI
Orientador

Ilha Solteira
2017

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

A447i

Almeida, João Paulo da Cruz.
Indução finita, deduções e máquina de turing / João Paulo da Cruz Almeida. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2017
50 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Matemática, 2017

Orientador: Luciano Barbanti
Inclui bibliografia

1. Introdução. 2. Conjuntos dos números naturais. 3. Aplicação da indução. 4. Dedução lógica. 5. Principio de indução para problemas específicos do ensino médio. 6. Máquina de turing.

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de São José do Rio Preto

IBILCE

São José do Rio Preto, 19 de junho de 2017.

Prezado Professor,

Informamos a Vossa Senhoria que a Defesa da Dissertação de Mestrado em MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL de **JOÃO PAULO DA CRUZ ALMEIDA**, cujo trabalho se denomina ***Indução Finita, Deduções e Máquina de Turing***, será realizada no dia 29 de junho de 2017, às 09:00 horas, no(a) UNESP/ Câmpus de Ilha Solteira.

A Comissão Examinadora será composta pelos seguintes membros:

TITULARES
1. Prof. Dr. LUCIANO BARBANTI - Orientador
   Departamento de Matemática / UNESP/ Câmpus de Ilha Solteira
2. Prof. Dr. ERNANDES ROCHA DE OLIVEIRA
   Departamento de Matemática / UNESP/ Câmpus de Ilha Solteira
3. Prof. Dr. ANTONIO CARLOS TAMAROZZI
   Departamento de Ciências Exatas / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

SUPLENTES
1. Prof. Dr. PEDRO TONIOL CARDIN
   Departamento de Matemática / UNESP/ Câmpus de Ilha Solteira
2. Profa. Dra. LORENA RAMOS CORREIA CARDOSO
   / Universidade Federal do Rio Grande do Norte

Atenciosamente,

Rosimar Rosa de Carvalho Brena
Supervisor Técnico de Seção
Seção Técnica de Pós-Graduação

Ilustríssimo Senhor
Prof. Dr. Pedro Toniol Cardin

Dedico este trabalho primeiramente à Deus, “A Ele toda Glória e todo Louvor”, à minha mãe Manoela Pereira da Cruz Almeida, que é a mulher da minha vida, que está comigo para o que der e vier. Dedico também ao meu saudoso pai Manoel Francelino Batista de Almeida que foi fundamental na minha formação. Quero dedicar ao meu Orientador Prof.º Dr.º Luciano Barbanti que me ajudou extremamente redigir esse trabalho, deu-me a direção e o caminho das pedras para alcançar a minha vitória.

AGRADECIMENTOS

Quero diante dessa oportunidade, exaltar ao Senhor, Deus meu, nessa caminhada de dois anos, uma palavra resume o meu esforço e minha dedicação, a palavra é Ebenezer “Até aqui o Senhor me ajudou”.

Esse mesmo Deus que me ajudou que nos sustenta, colocou duas pessoas no meu caminho para ajudar-me e também me abençoar, pelas vidas delas quero agradecer à Deus.

Agradeço pela vida do meu parceiro de viagem o professor e colega de mestrado Luis Caio Ferreira, que foi grande parceiro e companheiro nessa caminhada, o qual aprendi muito, vencemos os desafios das disciplinas e da qualificação, juntos e unidos.Valeu a pena Luis Caio!

A outra pessoa que Deus colocou em meu caminho a mais de um ano é o meu orientador Prof.º Dr.º Luciano Barbanti que me apoiou todo tempo, o homem muito inteligente e de grande coração, nunca vou me esquecer o que fez por mim. Agradeço tremendamente a Natalia Michelan por ajudar a mim e ao Prof. Barbanti na redação e normas técnicas deste trabalho.

Agradeço à Deus, por conhecer meu amigos e colegas de sala, além do Luis Caio, agradeço pela amizade e a companhia de curso do Bruno, o qual apelidei de Birigui, pela Júlia e João Carlos, estes foram até o fim da mesma turma 2015 da IBILCE no pólo de Ilha Solteira.

Meus agradecimentos vão também para aqueles que me dão cobertura espiritual em orações, meus pastores, o casal Alberto Carlos e Nair e todos os irmãos em Cristo da Igreja do Evangelho Quandrangular. Agradeço principalmente para minha família, minha mãe Manoela, vovó Maria e meu tio Gonçalo.

Não posso deixar de agradecer à todos os professores de Matemática, que eu tive na minha vida, pois todos foram ótimos professores, principalmente os professores da UFMS campus de Três Lagoas – MS, instituição a qual me formei. Agradeço todos funcionários e Professores do PROFMAT do pólo da Ilha Solteira da UNESP.

Enfim, agradeço a todos os meus amigos e colegas de serviço do Centro Odontológico, Agendamento de Exames e Consultas do CIS de Castilho-SP que torcem pelo meu sucesso.

“Ainda que eu falasse as línguas dos homens e dos anjos, e não tivesse amor, seria como o metal que soa ou como o sino que tine.

E ainda que tivesse o dom de profecia, e conhecesse todos os mistérios e toda a ciência, e ainda que tivesse toda a fé, de maneira tal que transportasse os montes, e não tivesse amor, nada seria.

E ainda que distribuísse toda a minha fortuna para sustento dos pobres, e ainda que entregasse o meu corpo para ser queimado, e não tivesse amor, nada disso me aproveitaria.

O amor é sofredor, é benigno; o amor não é invejoso; o amor não trata com leviandade, não se ensoberbece.

Não se porta com indecência, não busca os seus interesses, não se irrita, não suspeita mal;

Não folga com a injustiça, mas folga com a verdade;

Tudo sofre, tudo crê, tudo espera, tudo suporta.

O amor nunca falha; mas havendo profecias, serão aniquiladas; havendo línguas, cessarão; havendo ciência, desaparecerá;

Porque, em parte, conhecemos, e em parte profetizamos;

Mas, quando vier o que é perfeito, então o que o é em parte será aniquilado.

Quando eu era menino, falava como menino, sentia como menino, discorria como menino, mas, logo que cheguei a ser homem, acabei com as coisas de menino.

Porque agora vemos por espelho em enigma, mas então veremos face a face; agora conheço em parte, mas então conhecerei como também sou conhecido.

Agora, pois, permanecem a fé, a esperança e o amor, estes três, mas o maior destes é o amor.”

(Coríntios 1, 13)

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta relacionada ao ensino e prática do pensamento dedutivo formal em Matemática. São apresentados no âmbito do conjunto dos números Naturais três temas essencialmente interligados: indução/boa ordem, dedução e esquemas de computação representados pela máquina teórica de Turing. Os três temas se amalgamam na teoria lógica de dedução e tangem os fundamentos da Matemática, sua própria indecidibilidade e extensões / limites de tudo que pode ser deduzido utilizando a lógica de Aristóteles, caminho tão profundamente utilizado nos trabalhos de Gödel, Church, Turing, Robinson e outros. São apresentadas inúmeros esquemas de dedução referentes às "fórmulas" e Teoremas que permeiam o ensino fundamental e básico, com uma linguagem apropriada visando treinar os alunos (e professores) para um enfoque mais próprio pertinente à Matemática.

Palavras-chave - Números naturais. Axiomas de peano. Indução. Primeiro elemento dos naturais. Máquinas de Turing. Tese de Turing-Church.

ABSTRACT

This work deals with the teaching and practice of formal deductive thinking in Mathematics. Three essentially interconnected themes are presented within the set of Natural Numbers: induction, deduction and computation schemes represented by the Turing theoretical machine. The three themes are put together into the logical theory of deduction and touch upon the foundations of Mathematics, its own undecidability and the extent / limits of what can be deduced by using Aristotle's logic, that is the subject in the works of Gödel, Church, Turing, Robinson, and others. There are a large number of deduction schemes referring to the "formulas" and Theorems that are usual subjects in elementary and basic degrees of the educational field, with an appropriate language in order to train students (and teachers) for a more pertinent approach to Mathematics.

Keywords - Natural numbers. Peano's axioms. Induction. The first natural element. Turing machines. Turing-Church thesis.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema principal deste trabalho é ensinar como deixar mais rigorosas algumas demonstrações que são feitas em Matemática no Ensino Básico.

Historicamente uma onda de rigor em Matemática se deu no início do século XX, com o advento da axiomatização em Teoria dos Conjuntos, e concomitantemente, a percepção de que algo bem mais profundo do que parecia, estava atrás da prática rigorosa desta axiomatização. O exemplo deste fenômeno foi o aparecimento do paradoxo de Russel que mostra que tomar a ideia “intuitiva” de que uma propriedade determina um conjunto é falsa, no sentido de que leva a contradições em Matemática.

Nesta época, o rigor que tanto se buscava fez confluir várias questões em lógica e de Teoria dos Conjuntos como um esquema axiomático para a Matemática. K. Gödel (1906-1978), E. Zermelo (1871-1953), A. Church (1903-1995), A. Turing (1912-1954), A. Fraenkel (1891-1965) e T. Skolem (1887-1963) são figuras exponenciais deste período.

Então, questionava-se, o que era possível demonstrar em Matemática com esquemas lógicos de dedução.

Gödel provou que com um esquema de dedução é impossível demonstrar se a Matemática é consistente (no sentido inclusive de que nunca se provará dentro da Matemática se uma contradição pode ou não aparecer). Isto é grave, pois aparecendo uma contradição a Matemática usual se trivializa.

Investigando este assunto que relacionou ao modo como as pessoas pensam quando querem deduzir algo, A. Turing, criou um esquema de dedução automático, chamado de Máquina Universal ou Máquina de Turing.

Neste mesmo período, A. Church demostrou que tudo o que pode ser deduzido em Matemática, tem como correspondente uma Máquina de Turing, que por sua vez faz a parte vice-versa, isto é, todo esquema chamado de Máquina de Turing corresponde a uma dedução em Matemática.

Esta relação entre a totalidade de deduções e esquemas computacionais de dedução ainda está para ser devidamente pensado.

É nestes aspectos que nos inspiramos para fazer este trabalho.

Então, para deixar mais rigoroso e menos esparso os Teoremas e resultados em Matemática no Ensino Básico, neste trabalho usamos em primeiro lugar a Técnica da indução Matemática para demonstrar certas fórmulas ou fatos matemáticos usuais no Ensino Básico.

É notável a sutileza embutida do Princípio de Indução: se queremos demonstrar certos Teoremas onde os números naturais estão envolvidos, não precisamos na verdade criar uma demonstração que na maioria dos casos dispara uma confusão mental nos alunos que não sabem onde buscar as ideias aleatórias para eles, para tal demonstração. Basta que provemos o Teorema para um primeiro número e depois considerando o Teorema provado para n, prová-lo para o caso $n + 1$, um caminho claro e preciso a seguir.

Em segundo lugar, faremos a transição para um modo de dedução lógica onde pensamos num encadeamento válido para obter demonstrações.

Finalmente, damos até onde possível ao objetivo deste trabalho no Ensino Básico, os princípios da Máquina de Turing e seu rigor para esquematizar deduções.

Estes três aspectos que se juntaram no momento em que se começa a discutir os fundamentos da Matemática são explicados neste trabalho com exemplos e deduções.

Pretendemos com a abordagem neste trabalho, preparar melhor os alunos do Ensino Básico, inclusive para chegar com o pensamento melhor estruturado em relação à Matemática no Ensino Superior.

Sendo assim, este trabalho divide-se em 5 capítulos.

No capítulo I, damos os axiomas de Peano e o princípio de Boa Ordem (que pode ser utilizado ao invés do princípio de indução- 4º axioma de Peano).

No capítulo II, mostramos a aplicação do princípio de indução para demonstrar teoremas numéricos importantes.

No capítulo III, introduzimos a noção de dedução e construímos esquemas reproduzindo teoremas deduzidos com indução, no capítulo anterior.

Depois, passamos ao capítulo IV, que enfatiza problemas básicos em álgebra, trigonometria e números complexos dos diversos anos do Ensino Básico.

Finalmente, damos no capítulo V, os princípios da Máquina de Turing, e mostramos com dois exemplos (um uni e o outro bidimensional) o espírito de seu funcionamento.

Observamos que tratamos o conteúdo de todos os capítulos (sobre rigor nos fundamentos da Matemática) com o rigor que nos foi possível, ao abordarmos lógica e fundamentos da Matemática vista através da Teoria dos Conjuntos. Como exemplo desta atitude nunca justificamos uma passagem explicitamente com a regra “modus ponens” ou entramos na Teoria de Decidibilidade que remete à Teoria dos Modelos, altamente especializada em Lógica.

2 CAPÍTULO I - CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS

Os Números Naturais estão associados à ideia de contagem (LIMA, 2013). O conjunto dos Naturais dá a noção de enumerabilidade, ou seja, da possibilidade de listar os seus elementos, pois, os Números Naturais são números cardinais, mas são também vistos como números ordinais (daí a origem das listagens) e esta pode também ter uma origem, segundo Boyer, a partir de rituais religiosos.

A noção de números naturais se perde no tempo. Mas, modernamente foram tratados por Georg Cantor, Richard Dedeking, Quine, entre outros (TARSKI, 1994). Ao longo da história da Matemática, de acordo, com a necessidade de representar certas situações, o homem buscou símbolos capazes de satisfazer suas necessidades. Os primeiros números que surgiram foram os Naturais, e tiveram o objetivo de representar quantidades.

Podemos representar o conjunto dos Números Naturais de forma explícita, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

O conjunto $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente e limitado inferiormente. Isso significa que o conjunto $\mathbb{N}$ “tem começo, mas, não tem fim”. $\mathbb{N}$ é um conjunto infinito. Esta coloquialidade se expressa mais precisamente, assim: “existe uma bijeção entre os Naturais e uma das suas partes próprias” (NERI; CABRAL, 2011).

Às vezes, como veremos, o Conjunto dos Naturais será considerado sem elemento 0. Neste caso o conjunto é notado como $\mathbb{N}^*$.

Neste trabalho para efeitos práticos (mais especificamente com o princípio da indução- que será abordado abaixo), não vamos considerar o símbolo zero 0 como número natural. Consideraremos o primeiro elemento dos naturais como sendo o número um.

2.1 SISTEMA DE NUMERAÇÃO

O nosso Sistema de Numeração Decimal vigente é conhecido como indo-arabico.Teve contribuições de várias civilizações.Um dos povos que contribui foi o babilônico que utilizava seu sistema na base sessenta.

Segundo Eves (2011), o sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que o inventaram, e devido aos árabes, que o transmitiram para a Europa Ocidental. Os mais antigos exemplos de nosso atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka. Outros exemplos primitivos na Índia se corretamente interpretados, encontram-se em registros talhados por volta do ano 100 a.C. nas paredes de uma caverna numa colina perto de Poona e em algumas inscrições de cerca 200 d.C.. Essas primeiras amostras não contêm o zero e não utilizam a notação posicional. Contudo, a ideia de valor posicional e do zero devem ter sido introduzidos na Índia algum tempo antes do ano 800 d.C., como o matemático persa Al-Khowârizmî descreveu de maneira completa num livro do ano 825 d.C.

De acordo, com o nosso sistema decimal, podemos representar qualquer número natural m, pela seguinte expressão:

$$m = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + a_{n-2}10^{n-2} + \ldots + a_1 10^1 + a_0$$

Os símbolos $\{0, 1, \ldots, 9\}$ compõem o que é chamado de base do sistema de numeração (dos Naturais). Neste caso a base é dita decimal.

Observe que este procedimento para criação do sistema decimal permite de modo semelhante, criar sistemas com um número finito qualquer de algarismos em sua base.

Um sistema de numeração muito usado na computação e em particular na máquina de Turing, é o sistema binário representado pelos algarismos $0\ e\ 1$, isto é, na $base = 2$ (HEFEZ, 2014).

Podemos representar os números naturais m, como:

$$(m)_2 = a_n 2^n + a_{n-1}2^{n-1} + a_{n-2}2^{n-2} + \cdots \ldots \ldots . + a_1 2^1 + a_0$$

$$\text{ou } (m)_2 = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .. a_1 a_0$$

Esses coeficientes a_i, i variando de n a 0 são os algarismos de um número natural na $base$ 2.

2.2 AXIOMAS DE PEANO

Em meados do século XIX, nasceu na Itália na cidade de Turim, o matemático Giuseppe Peano (1845-1918) que axiomatizou os números naturais (WIKIPÉDIA, 2017). Tais axiomas são chamados de Axiomas de Peano. Mas o que são axiomas (do grego *axis* = eixo)?

Definição: Axioma são proposições aceitas sem necessidade de demonstração, ou são verdades consideradas para construir uma teoria.

O matemático Giuseppe Peano no século XIX, conseguiu melhorar ou qualificar a ideia de números naturais. Pelos axiomas de Peano podemos construir os números Naturais.

Essencialmente os Axiomas de Peano possibilitam a dedução de resultados em números naturais.

Os axiomas de Peano são estes:

Axioma 1: Todo número natural tem um único sucessor.

Axioma 2: Números naturais diferentes tem sucessores diferentes.

Axioma 3: Existe um único número natural chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

Axioma 4: (Axioma da Indução) Seja X um conjunto dos Números naturais, isto é, $\mathrm{X} \subseteq \mathbb{N}$ diferente do vazio. Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$. Observa-se que, em geral, X é definido por uma propriedade.

2.3 PRINCÍPIO DE INDUÇÃO FINITA

O axioma 4 é conhecido como o último axioma de Peano ou também como o axioma de indução. Ele é base de um eficiente método de demonstração de proposições referentes a números naturais. Este método é chamado de prova por indução. Enunciamos o princípio de indução em forma de propriedades. Ele se formula assim (WIKIPÉDIA, 2017):

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i) $P(1)$ é valida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n+1)$ onde $n+1$ é o sucessor de n.

Então, $P(n)$ é válida para qualquer que seja o número natural n.

Observação:como usual na literatura, o proprio fato de escrevermos $P(n)$ quer significar que n tem a propriedsde P.

Se a propriedade $P(n)$ vale para o primeiro elemento do conjunto, isto é, $P(1)$ é válido, temos o denominado base de indução.

Agora, se supusermos a propriedade válida para um número natural n qualquer, chamamos essa condição de hipótese de indução. Chamamos de tese de indução a validade da propriedade para o sucessor de n, isto é, $P(n+1)$.

Fazendo uma analogia, podemos tomar o processo de indução como no exemplo do Efeito Dominó, onde coloca-se as peças do jogo de dominó numa fileira em pé, calculando distâncias para que se uma peça cai a seguinte também cai. Após derrubar a primeira peça sob estas condições, temos que todas as peças cairão, ou seja, se a ação valer para o primeiro então vale para todo o conjunto.

Princípio da Boa Ordem:Todo conjunto não-vazio $A \subset \mathbb{N}$ contém um elemento mínimo.

O Princípio da Indução Finita é equivalente ao Princípio da Boa Ordem, pois o caso base de indução é o valor mínimo para qual vale tal propriedade.

Vamos demonstrar que se o princípio da Boa Ordem vale, então o Princípio da Indução vale, e vice-versa (NERI; CABRAL, 2011).De fato:

Suponhamos o princípio da Boa Ordem, e seja $A \subset \mathbb{N}$, com $1 \in A$. Suponhamos por absurdo que $A \neq \mathbb{N}$. Temos assim, o conjunto $C = A^C \neq \emptyset$. Pelo princípio da Boa Ordem existe $m \in C$, mínimo, com $m > 1$, pois $1 \in A$. Assim, $m - 1 \in \mathbb{N}$ e $m - 1$ é menor que m, portanto, $m - 1 \notin C$, pela minimalidade de m. Assim, $m - 1 \in A$, mas se $m - 1 \in A$, pela hipótese que está no enunciado do princípio, então $m \in A$, o que é absurdo.

Suponhamos o Princípio da Indução e seja $C \subset \mathbb{N}$, com $C \neq \emptyset$, e que por absurdo não tenha elemento mínimo (em particular $1 \notin C$, pois neste caso teria o elemento mínimo 1).

Seja $A = \{n \in \mathbb{N}; n < m, para\ todo\ m \in C\}$. Vemos que $A \cap C = \emptyset$ (pois, se $A \cap C \neq \emptyset$, então existe $n \in A \cap C$, e, assim $n \in A$, e, portanto, $n < m$, para todo $m \in C$. Usando $n = m$, vemos que $n < n$, o que é um absurdo).

Suponha que $A = \mathbb{N}$. Com este resultado teremos demonstrado o teorema. De fato: teremos que $\emptyset = A \cap C = \mathbb{N} \cap C = C$, contradizendo a hipótese $C \neq \emptyset$.

Resta-nos então provar que $A \neq \mathbb{N}$.

Como $1 \notin C$, vale : $1 < m, \forall\ m \in C$. Portanto, $1 \in A$. Seja $n \in A$. Então, para todo $m \in C, n < m$, e assim $n + 1 \leq m$, para todo $m \in C$. Se $n + 1 \in C$, então $n + 1$, é elemento mínimo de C. Como por hipótese C, não possui elemento mínimo segue que $n + 1 \notin C$, deste modo $n + 1 < m$ para $m \in C$.

Assim, $n + 1 \in A$. E pelo princípio de indução $A = \mathbb{N}$.

2.4 PROPRIEDADES EM $\mathbb{N}$

Na aritmética dos naturais, definimos duas operações, a adição e a multiplicação. Estas operações são fechadas em $\mathbb{N}$, isto é, o resultado da operação com dois números naturais, é ainda um número natural. Podemos definir, em geral:

Definição:

Seja A um conjunto, A $\neq \emptyset$. Toda aplicação $f: A \times A \rightarrow A$ recebe o nome de operação (binária) fechada sobre A, se $Imf \subset A$.

As operações $+$ (adição) e $\times$ (multiplicação) são operações fechadas sobre $\mathbb{N}$, pois dados $n, p \in \mathbb{N}$ temos que $n + p \in \mathbb{N}$ e $n.p \in \mathbb{N}$.

Demonstraremos por indução, algumas propriedades referentes a estas operações:

- <u>Associatividade da Adição:</u>

Para quaisquer números naturais m, n, p tem-se:

$$m + (p + n) = (m + p) + n$$

Fixemos $m, p \in \mathbb{N}$ e façamos indução sobre n.

Para $n = 1$, temos o caso base:

$$m + (p + 1) = (m + p) + 1$$

Portanto, $P(1)$ é válida.

Suponhamos por hipótese de indução que, $m + (p + n) = (m + p) + n \ \ \forall m, n, p \in \mathbb{N}$.

Provaremos que $P(n + 1)$ é válida se $P(n)$ o fôr, ou seja, $P(n) \Longrightarrow P(n + 1)$

$$m + \big(p + (n + 1)\big) = (m + p) = (n + 1)$$

No próximo passo utilizaremos nossa hipótese de indução e o caso $n = 1$.

$$m + (p + (n + 1)) = m = \big((p + n) + 1\big) = (m + \big(p(p + n)\big) + 1 = \big((m + p) + n\big) + 1$$
$$= (m + p) + (n + 1)$$

Para $P(n + 1)$ o mesmo poser afirmado.

Portanto, para quaisquer m, p, n números naturais vale: $m + (p + n) = (m + p) + n$.

- <u>Comutatividade da Adição:</u>

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$m + n = n + m$$

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ fixamos um $m \in \mathbb{N}$ qualquer, e usaremos a indução sobre n.

No caso base de indução, temos:

$P(1)$: $m + 1 = 1 + m$ é válido, fazendo $n = 1$.

Suponhamos por hipótese de indução que a propriedade vale para $n \in \mathbb{N}$. Então $m + n = n + m$, portanto $m \in \mathbb{N}$.

Provaremos a implicação $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$:

$$(m + n) + 1 = (n + m) + 1 = (n + 1) + m$$

Na primeira igualdade foi utilizado a hipótese de indução.

Logo, a comutatividade da adição é válida.

- Comutatividade de Multiplicação:

Para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$m.n = n.m$$

Demonstração: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, aplicaremos a indução sobre n.

O caso base é: $P(1)$: $m.1 = 1.m$.

Suponhamos por hipótese de indução a validade de $P(n)$, isto é, que $m.n = n.m$, dado $m, n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

De fato: $m(n+1) = m.n + m$

No próximo passo utilizaremos a hipótese de indução, obtendo assim, $m.n + m = n.m + m = (n+1).m$.

Portanto, a comutatividade da multiplicação dos números naturais é válida.

- Lei do Corte:

Se $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m + n = p + n$, então $m = p$

Faremos indução sobre n. Para $n = 1$, temos; se $m + 1 = p + 1$, então $m = p$ pois os números têm o mesmo sucessor, (Ax. 3, Peano).

Se $m + n = p + n$ então $m = p$ que é nossa hipótese de indução.

Como $m + (n+1) = p + (n+1)$ temos $(m+n) + 1 = (p+n) + 1$. Os sucessores se $m + n$ e $p + n$ são iguais. Logo,

$$m + n = p + n$$

que é a hipótese de indução, implicando que $m = p$.

Deixamos a cargo do leitor as demonstrações da transitividade da relação de ordem (dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m < n$ e $n < p$ então $m < p$) e da tricotomia em relação à ordem $<$: dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, há três possibilidades, as quais se excluem mutuamente: $m = n$, $m < n$ ou $n < m$.

Demonstraremos a seguir a propriedade da invariância por acréscimo de quantidades em relação a $<$:

Se $m, n \in \mathbb{N}$ são tais que $m < n$ então $m + p < n + p$ e $m.p < n.p$ para qualquer $p \in N$.

De fato:

Temos por hipótese que $m < n$ o que significa $n = m + r$ para algum $r \in \mathbb{N}$. Assim $n + p = m + p + r$. Diante disso, vale: $m + p < n + p$.

Em relação à multiplicação temos $n = m + r$ implicando $np = (m + r)p = mp + mr$.

Logo, $m < n \Rightarrow mp < np$.

Seria interessante o leitor demonstrar por indução o teorema acima. Outra propriedade dos números naturais que seria interessante ao leitor demonstrar por indução é a seguinte:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Não existe p número natural tal que $n < p < n + 1$.

De fato:

Se tal p existisse, teríamos

$p = n + q$ e $n + 1 = p + r$ com $q, r \in \mathbb{N}$. Assim:

$$n + 1 = n + q + r \Rightarrow 1 = q + r$$

o que é um absurdo.

3 CAPÍTULO II - APLICAÇÕES DA INDUÇÃO

Vimos que o Princípio de Indução Finita é o último axioma de Peano que diz assim:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

i) $P(1)$ é válida.

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica na validade de $P(n+1)$ onde $n+1$ é o sucessor de n.

Então a propriedade de $P(n)$ é válida para todo n, natural.

Damos a seguir a prova por indução de algumas (des)igualdades fundamentais que aparecem no âmbito dos números naturais, e que listamos com Problemas.

Problema1:

Soma Gaussiana $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Demonstração:

Caso base $n = 1$, onde $P(1)$ é

$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1.2}{2} = 1.$

Logo, $P(1)$ é verdadeiro.

Suponhamos por hipótese de indução que a igualdade $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ para $n \in \mathbb{N}$, é válida.

Provaremos que se vale para n, teremos $P(n+1)$ Utilizando a hipótese de indução temos:

$$1+2+3+\cdots \ldots \ldots .+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Assim, provamos a Soma Gaussiana.

Problema 2:

A soma dos n primeiros números pares é:

$$2+4+6+8+\cdots \ldots \ldots \ldots .+2n = n^2+n$$

De fato:

O caso base é:

$$P(1) \text{ para } n = 1.$$

Escrevendo o caso para o primeiro número natural:

$2.1 = 2 = 1^2 + 1,$ o que é verdadeiro.

Suponhamos que a propriedade, $2+4+6+8+\ldots+2n = n^2+n$ para $n \in \mathbb{N}$, é válida.

Assim, $P(n+1)$, é:

$$2+4+6+8+\cdots\ldots\ldots\ldots.+2n+2(n+1)=n^2+n+2(n+1)$$

Na última linha foi utilizado a hipótese de indução.

Deste modo, alcançamos o que queríamos:

$$n^2+2n+1+n+1=(n+1)^2+(n+1)$$

Portanto, a soma dos primeiros n pares é n^2+n.

<u>Problema 3:</u>

A soma dos n primeiros números ímpares é dado por:

$$1+3+5+7+\cdots\ldots\ldots\ldots.+2n-1=n^2$$

Demonstração:

Caso base:

$$P(1): 1=1^2$$

Suponhamos por hipótese de indução que a soma dos n primeiros números ímpares é:

$P(n)$: $1+3+5+7+\ldots+2n-1=n^2$, para $n\in\ \mathbb{N}$.

Vamos provar que $P(n)$ implica $P(n+1)$.

Utilizando a hipótese de indução, na primeira linha da demonstração, teremos:

$$1+3+5+7+\cdots\ldots\ldots\ldots..+2n-1+2(n+1)-1=n^2+\ 2(n+1)-1$$
$$=n^2+2n+1=(n+1)^2$$

Portanto, para todo $n\in\mathbb{N}$, $P(n)$: $1+3+5+7+\ldots+2n-1=n^2$.

A seguir provamos uma desigualdade por indução, onde o menor elemento dos naturais considerado para a qual é verdadeira, não é o $n=1$,mas sim $n=4$.

<u>Problema 4:</u>

$$n!\geq n^2\ para\ n\geq 4$$

Podemos ver que $P(1)$: $1!\geq 1^2$, isto é verdadeiro, mas, $P(2)\ e\ P(3)$ não o são, $(pois\ 2!<2^2\ e\ 3!<3^2)$.

Vale:$4!\geq 4^2$.Logo, há uma indicação para o caso base ser o $n=4$.

Caso base: $n=4$

Suponhamos por hipótese de indução que $n!\geq n^2\ para\ n\geq 4$

Provaremos que vale, $(n+1)!\geq(n+1)^2$.

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

Temos por hipótese de indução que $n^2\leq n!$ então

$n^2 \leq n! \Rightarrow n^2 + 2n + 1 \leq n! + 2n + 1 \leq n! + 3n! \leq n! + n.n! \leq (n+1)!$

Portanto, $(n+1)! \geq (n+1)^2$.

<u>Problema 5:</u>

$$n! \geq 2^n \text{ para } n \geq 4$$

Caso base: $n = 4$.

$$4! \geq 2^4\, pois\ 24 > 16$$

Suponhamos, por hipótese de indução, que dado $n > 4$, vale: $n! \geq 2^n$. Mostraremos que $P(n+1)$ é válido.

Aplicando a hipótese de indução na primeira desigualdade, temos:

$$2^{n+1} = 2.2^n \leq 2.n! \leq (n+1)!,$$

pois $n \geq 4$.

Portanto, $(n+1)! \geq 2^{n+1}$

Como mostramos no Capítulo 1, O princípio de Indução é equivalente ao Princípio da Boa Ordem. O Princípio da Boa Ordem diz que qualquer subconjunto de números naturais possui um número natural mínimo. No problema presente, seja $A = \{n \in \mathbb{N} \backslash n! \geq 2^n\}$

Então existe o menor elemento de A e esse elemento é o número 4.

Logo:

$$min\ A = 4.$$

Em geral, podemos reescrever desigualdades nos problemas, de modo a ter o caso base, sendo uniformemente o $P(1)$. Por exemplo, nesta perspectiva, o Problema 5 acima, poderia ser posto como: $(n+3)! \geq 2^{n+3}$.

<u>Problema 6</u>:

$$n! \geq 3^n, \text{ para } n \geq 7$$

Demonstração:

Caso base: $n = 7$.

$$7! \geq 3^7\, pois\ 5040 \geq 2187$$

Suponhamos por hipótese de indução que para $n \geq 7$, $n! \geq 3^n$. Vamos verificar que $P(n)$ implica $P(n+1)$. De fato:

$$3^{n+1} = 3.3^n \leq 3.n! \leq (n+1)!\, pois\ n \geq 7.$$

Vamos apresentar agora problemas que envolvem Aritmética em $\mathbb{N}$ contemplando divisibilidade e congruência módulo n.

Problema 7:

$$4^n + 6n - 1 \text{ é } divisível\ por\ 9.$$

Antes de provar isto, por indução sobre n, vamos demonstrar outro resultado, necessário para a demonstração, também por indução. Mostremos que

$$4^n + 2 \text{ é } divisível\ por\ 3.$$

Caso base: $n = 1$

$$4^1 + 2 = 4 + 2 = 6 = 2.3$$

Para $P(1)$ é $verdadeiro$.

Suponhamos por indução finita sobre n, que para todo $n \in \mathbb{N}$; $4^n + 2 = 3k\ ;\ k \in \mathbb{N}$.

Provaremos que; $3/\ 4^{n+1} + 2$.

Logo;

$$4^{n+1} + 2 = 4.4^n + 2 = 3.4^n + 4^n + 2 = 3.4^n + 3k = 3(4^n + k) = 3k'; k' \in \mathbb{N}.$$

Usamos nossa hipótese de indução na terceira igualdade.

Portanto, $4^n + 2$ é $divisível\ por$ 3.

Demonstrado este resultado, podemos provar o nosso problema.

$4^n + 6n - 1$ é $divisível\ por$ 9.

Caso base: $n = 1$.

$$4^1 + 6.1 - 1 = 4 + 6 - 1 = 10 - 1 = 9 = 9.1$$

Logo; $P(1)$ é $válido$.

Suponhamos por hipótese de indução que; para todo $n \in \mathbb{N}$;

$$4^n + 6n - 1 = 9t; t \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos que vale, a implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

$$4^{n+1} + 6(n+1) - 1 = 4.4^n + 6n + 6 - 1 = 3.4^n + 6 + 4^n + 6n - 1$$
$$= 3(4^n + 2) + 4^n + 6n - 1 = 3.3k + 9t = 9k + 9t = 9(k + t)$$

Na antepenúltima igualdade, usamos nossa hipótese de indução, na mesma, utilizamos a hipótese de indução da prova anterior.

Portanto; $4^n + 6n - 1$ é $divisível\ por$ 9.

Problema 8:

A soma dos cubos de três números consecutivos é divisível por 9.

Demonstração:

Caso base:

$P(1)$ para $n = 1$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36 = 9.4$, a sentença é verdadeira.

Suponhamos por hipótese de indução que: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = 9K$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $K \in \mathbb{N}$.

Para $n + 1$, temos:

$$(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 = (n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3 + 9n^2 + 27n + 27$$

Pela hipótese de indução é válido escrever $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + 9n^2 + 27n + 27 = 9K + 9(n^2 + 3n + 3) = 9K + 9(n^2 + 3n + 3) = 9K + 9M = 9(K + M)$, onde $M = n^2 + 3n + 3 \in \mathbb{N}$.

Portanto, a soma de três cubos de três números naturais consecutivos é divisível por 9.

Problema 9:

$11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133.

Caso base: $n = 1$

$$11^{1+2} + 12^{2.1+1} = 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 133.23.$$

Supondo válida a propriedade,

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 133q;\ q \in \mathbb{N}\ e\ n \in \mathbb{N},$$

para $n + 1$, temos:

$$11^{(n+1)+2} + 12^{2(n+1)+1} = 11^{n+2+1} + 12^{2n+1+2} = 11.\,11^{n+2} + 144.\,12^{2n+1} =$$

$$= 11.\,11^{n+2} + 144.\,12^{2n+1} = 11.\,11^{n+2} + 11.\,12^{2n+1} + 133.\,12^{2n+1} =$$

$$= 11.\,(11^{n+2} + 12^{2n+1}) + 133.\,12^{2n+1} = 11(133.\,q) + 133.\,12^{2n+1}.$$

e assim :

$133.11q + 133.\,12^{2n+1} = 133(11q + 12^{2n+1})$.

Portanto, $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ é divisível por 133, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 10:

(Pequeno Teorema de Fermat) Seja p um número primo e n um número natural.

$$n^p \equiv n\ mod\ p$$

Prova: Para $n = 1$, vale para todo $p \in \mathbb{N}$

$$1^p \equiv 1 \, mod \, p \iff p \, divide \, 0,$$

O que é verdadeiro, portanto, para p primo.

Suponhamos, por hipótese de indução que,

$$n^p \equiv n \, mod \, p$$

Considerando agora o caso $(n+1)$, utilizando o Binômio de Newton.

$$(n+1)^p = n^p + p.n^{p-1} + p.\frac{(p-1)}{2}.n^{p-2} + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots .. + p.n + 1 \equiv n^p + 1 \equiv n + 1$$

Para a última congruência, utilizamos a hipótese de indução e o fato das parcelas intermediárias serem divisíveis por p.

Portanto, $(n+1)^p \equiv (n+1) \, mod \, p$.

<u>Problema 11:</u>

Um conjunto A de n elementos tem 2^n subconjuntos.

Prova: Seja A um conjunto com 1 elemento, $A = \{a\}$. Os subconjuntos de A formam o conjunto das partes de A, $P(A) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Logo, temos que $P(A)$ tem 2^1 elementos.

Seja C com $n+1$ elementos, $C = B \cup \{c\}$ onde $c \in B$.

Por hipótese de indução $P(B)$ tem 2^n elementos e como $c \neq B$, por construção vemos que $P(C)$ tem 2^{n+1} elementos.

<u>Problema 12:</u>

Essa aplicação considera o conceito de matriz. Dada uma matriz quadrada de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, provaremos pelo princípio de indução finita que $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$.

Vamos considerar nosso caso base para $n = 2$.

$A^2 = A.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,que é valido.

Suponhamos por hipótese de indução que, para $n \geq 2$; $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$.

Provaremos que vale propriedade para $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n.A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo; $A^{n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{bmatrix}$.

Portanto, vale esta propriedade para todo número natural $n \geq 2$,isto é:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}.$$

4 CAPÍTULO III – DEDUÇÃO LÓGICA

A dedução de Hedman (2014) é uma tabela utilizada para construir argumentos, em que só se utilizam premissas (axiomas) e argumentos deduzidos anteriormente, através das regras da Lógica de Aristóteles.

Em outras palavras, método dedutivo é o procedimento de raciocínio lógico que encadeia argumentos válidos na Teoria para obter uma conclusão que será assim considerada válida também.

Ou seja, os raciocínios dedutivos se caracterizam por apresentar conclusões que devem necessariamente, ser verdadeiras caso todas as premissas sejam verdadeiras e a Lógica utilizada seja válida.

Neste capítulo faremos a dedução de fórmulas que apareceram nos problemas do Capítulo II, onde usamos os axiomas de Peano para construção do conjunto dos números naturais. As fórmulas foram demosntadas por indução,devido ao ponto de vista assumido nesta parte.

A primeira dedução se refere à soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1. Antes da dedução mostraremos tal resultado por indução sobre n.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

O resultado $S_1 = \frac{(a_1+a_1).1}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$, vale para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução que vale para $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}.$$

Provaremo o resultado para $n + 1$,usando nossa hipótese de indução na segunda igualdade:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_{n+1}.$$

Isto implica em:

$$\frac{(a_1 + a_n).n}{2} + a_{n+1} = \frac{a_1 n + a_n n + 2.a_{n+1}}{2} = \frac{a_1.n + (a_1 + (n-1).r).n + 2(a_1 + n.r)}{2}$$

$$= \frac{a_1.n + a_1.n + (n-1).n.r + 2a_1 + 2nr}{2}$$

$$= \frac{a_1(n+1) + a_1(n+1) + (n-1+2).nr}{2}$$

$$= \frac{a_1(n+1) + a_1(n+1) + n.r(n+1)}{2} = \frac{a_1(n+1) + (a_1 + n.r)(n+1)}{2}$$

$$= \frac{a_1(n+1) + a_{n+1}(n+1)}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}.$$

Assim, pelo Princípio de Indução a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética S_n é válida para n no conjunto dos números naturais.

Vamos exibir este resultado como uma dedução.

Dedução 1

1: Axioma da Indução de Peano

2: Se n=1 então a soma é igual a a_1.

3: Se $P(n)$ então $P(n+1)$.

4: (2) e $(3) + P(n) \to \ P(n+1)$

5: $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$

A próxima dedução mostrará a validade da soma Gaussiana, $1 + 2 + \cdots + n$, par uma progressão de razão 1 e primeiro termo igual a 1.

Dedução 2

1: $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$ (resultado válido, pela dedução 1)

2: $a_1 = 1 \ e \ a_n = n$ (premissa)

3: (1) e (2)

4: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Podemos ainda fazer a soma dos n primeiros números pares.

Dedução 3

1: $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot.n}{2}$

2: $a_1 = 2 \ e \ a_n = 2n$

3: (1) e (2)

4: $S_n = \frac{(2+2n).n}{2} = n(n+1) = n^2 + n$.

Fazendo a soma dos n primeiros números ímpares, temos:

Dedução 4

1: $S_n = \frac{(a_1+a_n).n}{2}$

2: $a_1 = 1\ e\ a_n = 2n - 1$

3: (1) e (2)

4: $S_n = \frac{(1+2n-1).n}{2} = n^2$.

Vale do mesmo modo, para uma progressão geométrica de razão q $(q \geq 0$ e $q \neq 1)$ e primeiro termo a_1 que:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Para explicitar melhor o método dedutivo neste caso vamos provar tal igualdade por indução sobre n. Para $n = 1$,

$$S_1 = a_1 \frac{q^1 - 1}{q - 1} = a_1.$$

Suponhamos por hipótese de indução que para $n \in \mathbb{N}$.

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Então, para $n + 1$ teremos, utilizando a hipótese de indução:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = a_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1.q^n$$

$$= \frac{a_{1(q^n-1)+a_1}.q^n(q-1)}{q - 1} = \frac{a_1.q^n - a_1 + a_1.q^{n+1} - a_1.q^n}{q - 1}$$

$$= \frac{a_1.q^{n+1} - a_1}{q - 1} = a_1.\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Portanto, a soma dos n primeiros termos desta P.G. é $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

Vamos, agora colocar esta demonstração na forma de uma dedução.

Dedução 5

1: Axioma da indução de Peano e $(P1)$

2: Se $n = 1$ então a soma S_1 é igual a a_1

3: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

4: (2) e (3)

5: $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

A próxima dedução será a réplica da solução do problema 11 do capítulo II, no caso em que o conjunto $A \subset \mathbb{N}$ tem n elementos.

Dedução 6

1: Axioma de Peano da Indução

2: Se $n = 1$ então A tem 2 subconjuntos (Teorema de verificação direta)

3: Se $P(n)$ então $P(n+1)$

4: (2) e (3) e $P(n) \rightarrow \ P(n+1)$

5: Um conjunto que tem n elementos tem 2^n subconjuntos.

Para finalizar faremos os passos da dedução do Problema 6 do Capítulo II em que $n! \geq 3^n$.

Dedução 7

1: Axioma de Peano da Indução

2: Se n=7 então $7! \geq 3^7$ (Teorema de verificação direta)

3: Se a desigualdade vale para n; $(n! \geq 3^n)$ então, $(n+1)! \geq 3^{n+1}$

4: (2) e $(3) + \ (n! \geq 3^n) \ \rightarrow \ (n+1)! \geq 3^{n+1}$

5: Para $n \geq 7$ vale a propriedade $P(n): n! \geq 3^n$

5 CAPÍTULO IV – PRINCÍPIO DE INDUÇÃO PARA PROBLEMAS ESPECÍFICOS DO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo abordaremos aplicações do Princípio de Indução Finita no Ensino Médio. Deduziremos às fórmulas que os alunos do ensino médio em geral, decoram para fazer o vestibular. Faremos tais deduções utilizando os axiomas de Peano. Selecionamos algumas fórmulas ou propriedades e expressões do conteúdo de Matemática do Ensino Médio, os quais serão demonstraremos através de esquema da indução.

Existem muito mais fórmulas ou expressões em cuja dedução podemos utilizar tal método. Cremos que este é um tema propício para considerações futuras.

A proposta deste trabalho é que um professor de Matemática do Ensino Médio possa usar este método mais "rebuscado" pondo o aluno em contato com os fundamentos do pensamento matemático e, portanto, com o próprio pensamento.

Este procedimento, além disso, é fundamental para dar um foco nas demonstrações para os alunos. Vejamos porque: se o aluno vai demonstrar um resultado "do nada", ele se embaralha bastante com todas as possibilidades que lhe vêm à cabeça, e isto, em geral, se transforma num tremedal de fórmulas na maioria das vezes conflitantes umas com as outras, até pela inexperiência de ainda dar peso a cada fórmula ou ideia.

No princípio da indução, ao invés disto, temos o resultado assumido para n e o trabalho do aluno – visto o resultado assegurado para n – tem que apenas levar focadamente a dedução para $n + 1$.

Além disso, tal método dedutivo por ser abrangente induziria o aluno a patamares mais altos e claros, preparando-o assim melhor para um curso de Graduação, evitando desta maneira as diferenças de grande porte no ingresso ao Ensino Superior.

O aluno de Ensino Médio ao aprender indução matemática saberá, por exemplo, identificar naturalmente conjuntos infinitos, a ideia de sucessor, da Boa Ordem, e dos tipos de infinitude, facilitando desta maneira o entendimento dos Números Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

A dedução lógica, melhora várias habilidades cognitivas expandindo o conhecimento.

As demonstrações matemáticas ajudarão o professor a convencer o aluno da veracidade dos resultados apresentados.

No 1º ano do Ensino Médio é ensinado a Progressão Aritmética.

A P.A., progressão aritmética, trata de uma sequência de números naturais que tem a propriedade da diferença entre dois termos consecutivos (razão) ser uma constante.

Sabendo-se a razão e considerando-se um termo, para se obter o termo seguinte basta adicionar esta constante.Assim, apenas o primeiro termo da P.A. e sua razão é suficiente para descreve-la.

Para obter a fórmula do termo geral da progressão aritmética, temos que o primeiro termo é a_1, o segundo termo a_2 é $a_1 + r$. Logo, a sequência fica:

$$a_1$$
$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$$
$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Mostraremos por indução, a fórmula que representa a sequência acima:

$$a_1 = a_1 + (1-1).r = a_1 + 0.r = a_1,$$

Portanto, temos a fórmula válida para $n = 1$.

Suponhamos, por hipótese de indução, que valha para $n \in \mathbb{N}$, isto é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r.$$

Provemos a implicação $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, onde $P(n)$ é a propriedade para n. Pela lei de formação da P.A., temos:

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

Usando a H.I vem:

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n-1).r + r$$
$$= a_1 + (n+1-1).r = a_1 + n.r$$

Por conseguinte , pelo Princípio da Indução, a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética de razão r e primeiro termo a_1 é $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Vamos fazer a Dedução Lógica do Termo Geral de uma P.A de razão r e a_1 sendo o primeiro termo.

Dedução 8

1: Axioma da Indução de Peano

2: Se $n = 1$, então temos a_1 o primeiro termo.

3: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

4: (2) e $(3) +\ P(n) \rightarrow\ P(n+1)$

5: $a_n = a_1 + (n-1)r$

Diante da formula do termo geral da Progressão Aritmética, podemos deduzir uma expressão em função de n. Esta função depende da razão.

Exemplo 1:

Uma P.A $(3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots)$ tem primeiro termo $a_1 = 3$ e razão $r = 3$

$a_n = a_1 + (n-1)r$ é o termo geral,

$a_n = 3 + (n - 1).3$

$a_n = 3 + 3n - 3$

$a_n = 3n$

Dedução 9

1: $a_n = a_1 + (n - 1)r \ \ \forall n \in N$

2: $a_1 = 3 \ e \ r = 3$

3: (1) e $(2) + \ P(n = 1)$

4: $a_n = 3n$.

Uma aplicação de P.A é que o professor poderia oferecer seria localizar o conjunto dos números primos ímpares nas Progressões Aritméticas $4n + 1$ ou $4n + 3$. De fato, todos os naturais n divididos por 4 dão como resto da divisão ou 0, ou 1, ou 2, ou 3. Se n der resto 0 ou 2, então n é par. Daí o teorema.

Exemplo 2:

Se um número $p \neq 2$ é primo, então é da forma $4n + 1$ ou $4n + 3$.

$4n + 1$ é uma P.A de razão 4, com primeiro termo 1.

$(1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, \ldots)$.

$4n + 3$ é uma P.A de razão 4, primeiro termo 3.

$(3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, \ldots)$.

Dedução 10

1: p é primo e $p \neq 2$

2: p pertence a uma P.A $4n + 1$ ou $4n + 3$

3: (1) e (2)

4: $p = 4n + 1$ ou $p = 4n + 3$

Outra fórmula frequente é a soma dos n primeiros termos de uma Progressão Aritmética.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

Esta fórmula já foi provada por indução e deduzida no capítulo III e inclusive possibilitou outras deduções.

No 1º ano do Ensino Médio é também estudada a Progressão Geométrica (P.G.). Obtemos o termo geral da P.G. do seguinte modo, para um $q > 0$ fixo,

a_1 1º termo

$a_2 = a_{1.}.q$ 2º termo

$a_3 = a_2.q = a_1.q.q = a_1.q^2$ 3º termo

.

.

.

$a_n = a_1.q^{n-1}.$ nº termo

Na P.G multiplicamos os termos por uma razão ou constante q. As razões serão consideradas positivas, ou seja, $q \in R_+$.

Aplicando o Princípio de Indução sobre n:

Para $n = 1$ (caso base):

$a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.q^0 = a_1.1 = a_1$, então $P(1)$ é verdadeiro.

Suponhamos, por hipótese de indução, que para $n \in \mathbb{N}$ tenhamos válido:

$a_n = a_1.q^{n-1}$,

Então,

$$P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

De fato:

$$a_{n+1} = a_n.q = a_1.q^{n-1}.q = a_1.q^{n+1-1} = a_1.q^n$$

Nesta igualdade foi utilizada a hipótese de indução.

Portanto, a P.G. obedece o termo geral $a_n = a_1.q^{n-1}$

Dedução 11

1: Axioma de Peano da Indução

2: Uma P.G de razão q e primeiro termo a_1

3: Se $n = 1$, então $a_n = a_1$

4: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

5: (3) e $(4) +\ P(n) \to P(n+1)$

6: $a_n = a_1.q^{n-1}$, para todo $n \in\ \mathbb{N}$.

Interessantes aplicações de Progressões Geométricas são também assunto do 1º ano do Ensino Médio. São aplicações no campo da Matemática Financeira e envolvem juros compostos. A mais imediata é dada pela relação:

$$M_1 = C(1+i)$$

Onde C é o capital aplicado por um período (mensal, anual, ...) à taxa de juro i (em centésimos) e M_1 é o montante após o cálculo do juro.

Vamos provar, então, que para quaisquer t períodos ($t \in \mathbb{N}$), M_t é:

$$M_t = C\,(1+i)^t,$$

Através de indução sobre t.

Para $t = 1$, temos a própria definição de M_1.

Supondo, agora, que para um $t \in \mathbb{N}$ tenhamos a H.I., vamos provar que:

$$M_{t+1} = C\,(1+i)^{t+1}.$$

De fato, pela H.I.,

$$M_{t+1} = M_t(1+i) = C(1+i)^t.(1+i) = C(1+i)^{t+1}.$$

Deste modo provou-se que para todo $t \in \mathbb{N}$, $M_t = C\,(1+i)^t$.

Vamos deduzir o mesmo como aplicação de uma P.G com $q = (1+i)$,considerando agora, $M_t = M$ (montante)

Dedução 12

1: $a_n = a_1.q^{n-1}$

2: $q = (1+i)$, $M_1 = C$

3: (1) e (2)

4: $M = C(1+i)^{t-1}$

Outro importante item da Aritmética é o que tratado da soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, que também já foi provado e deduzido no capítulo III.

Ainda no 1º ano do Ensino Médio, há uma propriedade de logarítmos que é possível provar por indução sobre n. Sabemos que os logaritmos e suas propriedades são para números reais. Adaptaremos a propriedade para os números naturais.

A propriedade em questão é:

$$\log_b a^n = n \log_b a.$$

Demonstração por indução sobre n:

Para $n = 1$

$\log_b a^1 = 1.\log_b a$, que é válido.

Suponhamos, por hipótese de indução que para $n \in N$ vale a igualdade.

$$log_b^{a^n} = n.log_b^a \ .$$

Provemos para $n + 1$.

Na terceira igualdade utilizaremos a nossa hipótese de indução H.I.

$$log_b^{a^{n+1}} = log_b^{a^n.a^1} = log_b^{a^n} + log_b^a$$
$$= n.log_b^a + log_b^a = (n+1).log_b^a$$

Dedução 13

1: 4º Axioma de Peano da Indução

2: $P(1)$ $(log_b^{a^1} = 1.log_b^a = log_b^a)$

3: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

4: (2) e $(3) + P(n) \rightarrow P(n+1)$

5: $log_b^{a^n} = n.log_b^a \ n \ \in \mathbb{N}$

Tratamos neste capítulo de problemas do 1º ano do Ensino Médio.

Agora vamos dar exemplos e fórmulas ou problemas do 2º ano do Ensino Médio. Começamos com problemas em Análise Combinatória.

Teorema:

Seja $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma função verificando as seguintes propriedades:

$$i) f(0) = f(1) = 1$$
$$ii) \ para \ n \geq 1 \ , f(n+1) = (n+1)f(n),$$

então, $f(n) = n!$ para todo n natural

Demonstração por indução sobre n.

Caso base $n = 1$, $1! = 1$ (Verdadeiro)

Suponhamos por hipótese de indução dado $n \in \mathbb{N}$, $n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 1$.

Para $(n+1)!$,usando a hipótese de indução:

$$(n+1)! = (n+1).n! = (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots1.$$

Assim, para todo n vale a fórmula da fatorial de n.

Também, poderíamos, por exemplo, tomar a própria forma da permutação simples $\binom{n}{k}$, ou mesmo através da expressão da função gama: $n! = \int_0^\infty \frac{t^n}{e^t}$dt (não estamos dizendo que esta fórmula deva ser dada aos alunos).

Dedução 14

1: Axioma da Indução de Peano

2: $1! = 1$

3: Se $n! = n(n-1)(n-2) \ldots 1$ então $(n+1)! = (n+1).n!$

4: (2) e $(3) +\ n! = n(n-1)(n-2) \ldots 1 \rightarrow (n+1)! = (n+1).n!$

5: $n! = n(n-1)(n-2)\ldots 1$

Há aquela brincadeira de criança denominada Ciranda-Cirandinha, na qual se forma uma roda de crianças em círculo, onde podemos permuta-las. Este tipo de permutação chama-se Permutação Circular que é dada pela relação:

$$Pc(n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Vamos mostrar por indução que tal fórmula vale para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para formar uma roda precisamos de no mínimo 2 crianças. Assim,

$$Pc(2) = \frac{2!}{2} = (2-1)! = 1! = 1.$$

o que é verdadeiro.

Suponhamos, por hipótese de indução que a permutação circular é dada por $Pc(n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$ para n crianças.

Para mais uma criança nessa roda $[n + 1\ crianças]$, temos:

$$Pc(n+1) = \frac{(n+1)!}{n+1} = n! = (n-1)!\,n = \frac{n!}{n}.n.$$

Observe que na última igualdade foi utilizada a hipótese de indução H.I

Dedução 15

1: Axioma de Peano da Indução

2: Se $n = 2$ então $Pc(2) = \frac{2!}{2} = 1! = 1$

3: Se $P(n)$ então $P(n+1)$

4: (2) e $(3) +\ Pc(2)$

5: $n \geq 2\ \ Pc(n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$

Nesta linha de raciocínio, dados x e y números reais quaisquer, e um número natural n, provaremos por indução finita o Binômio de Newton.

O Binômio de Newton é dado por:

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3y^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n$$

Demonstração:

Tomando o nosso caso base $n = 2$:

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,

o que é verdadeiro.

Suponhamos por hipótese de indução que vale relação do binômio de Newton para $n \geq 2$.

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3y^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n.$$

Vamos provar para $n+1$,que

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n.$$

Utilizaremos agora nossa hipótese de indução H.I.

$$= (x+y)\left(x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3y^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n\right)$$

$$= x^{n+1} + nx^ny + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-2}y^3 + \cdots \ldots . + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^4y^{n-3} + \frac{n(n-1)}{2!}x^3y^{n-2} + nx^2y^{n-1} + xy^n$$
$$+ x^ny + nx^{n-1}y^2 + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^3 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^4 + \cdots \ldots . + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3y^{n-2} + \frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-1} + nxy^n + y^{n+1}$$

$$= x^{n+1} + (n+1)x^ny + \frac{(n+1)n}{2!}x^{n-1}y^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}x^{n-2}y^3 + \cdots \ldots \ldots . + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}x^3y^{n-2} + \frac{(n+1)n}{2!}x^2y^{n-1} + (n+1)xy^n + y^{n+1}$$

Portanto,

$$(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^ny + \frac{(n+1)n}{2!}x^{n-1}y^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}x^{n-2}y^3 + \cdots \ldots \ldots . + \frac{(n+1)n(n-1)}{3!}x^3y^{n-2} + \frac{(n+1)n}{2!}x^2y^{n-1} + (n+1)xy^n + y^{n+1}$$

Dedução 16

1: 4º Axioma de Peano da Indução

2: Se $n = 2$ então $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

3: Se $P(n)$ então $P(n+1)$

4: (2) e $(3) + P(2) \rightarrow P(n+1)$

5: $(x+y)^{n+1} = x^{n+1} + (n+1)x^n.y + \ldots + (n+1)x.y^n + y^{n+1}$ para todo $n \geq 2$.

No 2º ano do Ensino Médio lidamos com Matrizes e Determinantes (IEZZI; HAZZAN, 2012).

Vamos provar por indução que utilizando a propriedade $\det(A.B) = \det A \,.\, detB$, teremos

$\det(A^n) = (\det(A))^n$.

Prova:

Para $n = 1$

$\det(A^1) = (\det(A))^1 = \det(A)$ que é verdade

Suponhamos por hipótese de indução que

$\det(A^n) = (\det(A))^n,\ n \in N$

Provaremos para $n + 1$, que:

$$\det(A^{n+1}) = \det(A^n.A) = \det(A^n)\,.\det(A) = (\det(A))^n.(\det(A)) = (\det(A))^{n+1}$$

Utilizamos nossa hipótese de indução na penúltima igualdade.

Dedução 17

1: Axioma de Peano da Indução

2: Se $n = 1$ então $\det(A^1) = (\det(A))^1 = \det(A)$

3: Se $\det(A^n) = (\det(A))^n,\ n \in \mathbb{N}$, então $\det(A^{n+1}) = (\det(A))^{n+1}$

4: (2) e $(3) +\ (\det(A))^n = (\det A)^n \rightarrow\ \det(A^{n+1}) = (\det(A))^{n+1}$

5: $\det(A^n) = (\det(A))^n,\ n \in \mathbb{N}$

No 3º ano do Ensino Médio ensina-se números complexos. Todo número real é complexo, pois $z = a + 0i$ onde $a, b\ \in \mathbb{R}$. Em geral para $a, b\ \in \mathbb{N}$,

$$z = a + bi$$

O número a é parte real do número complexo z e b é sua parte imaginária. Denotamos, $i = \sqrt{-1}$.

O número z pode ser escrito na forma trigonométrica.

$z = p(cos\theta + isen\theta)$, onde p é o módulo de z e θ é seu argumento.

Vamos provar por indução a fórmula de De Moivre referente às potências de z dada por:

$$z^n = p^n(\cos(n\theta) + isen(n.\theta)).$$

Demonstração:

Para $n = 1$, temos o próprio número complexo na forma trigonométrica.

$z^1 = p^1(\cos(1.\theta) + isen(1.\theta))$

$z = p(cos\theta + isen\theta)$

Suponhamos por hipótese de indução que

$$z^n = p^n\big(\cos(n\theta) + isen(n.\theta)\big)\ para\ n \in N$$

Provar para $n + 1$; temos

Utilizaremos a hipótese de indução na segunda igualdade.

$$z^{n+1} = z^n.z = p^n(\cos(n.\theta) + isen(n.\theta).p(cos\theta + isen\theta)$$
$$= p^{n+1}\big(\cos(n.\theta) + isen(n.\theta)\big)(cos\theta + isen\theta)$$
$$= p^{n+1}(\cos(n.\theta)\,.cos\theta + isen\theta.\cos(n.\theta) + isen(n.\theta), cos\theta - sen(n.\theta)sen\theta)$$
$$= p^{n+1}(\cos(n.\theta)\,.cos\theta - sen(n.\theta).sen\theta + i(sen(n.\theta).cos\theta + sen\theta.\cos(n.\theta)))$$
$$= p^{n+1}(\cos(n+1)\,.\theta + isen(n+1).\theta)$$

Deduzindo o resultado:

Dedução 18

1: Axioma da Indução de Peano

2: Se $n = 1$, então $z = p(cos\theta + isen\theta)$

3: Se $P(n)$ então $P(n+1)$

4: (2) e (3) + $P(n) \rightarrow P(n+1)$

5: $\forall n \in N;\ z^n = p^n\big(\cos(n.\theta) + isen(n.\theta)\big), z \in C$

Estes foram alguns exemplos da Matemática do Ensino Médio, onde pudemos utilizar o Princípio de indução finita e dedução lógica utilizando os Axiomas de Peano.

Terminaremos este trabalho, no próximo capítulo, ensinando aos alunos os princípios da modelagem da Máquina de Turing aproveitando a ideia da Indução Finita. Sabemos que com o princípio de indução nenhum computador do mundo pode calcular o que acontece no infinito, mas, o computador pode sim calcular para um n suficientemente grande de modo mais rápido do que homem (NISAN; SCHOCKEN, 2004) .Observe-se neste contexto que o número $10^{10^{10}}$ seria o suficiente para nomear e operar com todas as quantidades de coisas possíveis no “mundo real”. Porém, o homem consegue ter percepção do infinito ou percepção do conceito e processo de indução.

6 CAPÍTULO V – MÁQUINAS DE TURING

Após apresentarmos princípios de Indução e Dedução nos capítulos anteriores, vamos além, apresentando o que é um esquema formal de computação que Alan Turing engendrou ao tentar responder para sí a pergunta: como as pessoas pensam quando estão deduzindo algo? (MALDONADO; COSTA, 2017).

Turing esquematizou um processo de “raciocínio” do tipo puramente lógico/computacional (denominado uma máquina universal ou de Turing) e que se mostrou tão abrangente em relação ao que se consegue com deduções matemáticas, que na verdade - como mostrado depois por A. Church um lógico dos anos 1930 na famosa tese de Church-Turing - qualquer fato que possa ser deduzido em Matemática tem um esquema tipo máquina de Turing para realiza-lo e vice-versa um esquema tipo Máquina de Turing é uma dedução em Matemática (ZIMBARG SOBRINHO, 1987).

Após a apresentação sucinta dos princípios que regem a Máquina de Turing, apresentamos à seguir exemplos de deduções através de máquinas, para maior compreensão dos princípios computacionais envolvidos, por parte dos alunos.

A automação de raciocínios e contas sempre foi objetivo do ser humano. Os primeiros passos em direção aos computadores digitais foram dados no Egito e Babilônia, há mais de 4 milênios, com os sistemas de medidas de distâncias e previsão do curso das estrelas. Durante a civilização grega, estas pré-ciências tomaram forma através de sistemas axiomáticos (POZZA; PENEDO, 2017).

Como visto no Cap.III acima, um sistema axiomático é uma ferramenta para aumentar a capacidade humana de pensar, ordenando-a. O ingrediente “ mágico” no caso é uma espécie de "receita de bolo" que conduz os cálculos e que chamamos algoritmo. O que a publicação de Turing (Sobre números computáveis, com uma aplicação para o Entsheidungsproblem) (SCHECHTER, 2017) fez, e que tornou possível os computadores digitais, foi resultado de centenas de anos de esforço para reduzir os vários sistemas formais a um sistema básico subjacente a todos eles.

Um sistema formal pode ser visto como uma espécie de jogo rigorosamente definido, que especifica regras para manipulação de símbolos.

O que caracteriza um sistema formal é muito semelhante às regras dispostas para um determinado jogo (de xadrez por exemplo).

Para dizer a alguém como jogar e para estabelecer as regras que qualificam de formal um sistema, três aspectos desse 'jogo' devem ser estabelecidos: a natureza dos símbolos, a descrição da situação inicial do jogo (ou o layout do 'tabuleiro') e uma lista de quais movimentos são permitidos em uma dada posição (regras para se mover peças).

Por volta da década de 1930, os esforços para reduzir a matemática a fundamentos lógicos seguros (MOSTOWSKI, 1982) levou a várias tentativas de se tratar a aritmética – o braço da matemática que lida com operações sobre números - como um sistema formal.

Em 1936, com a idade de 24 anos, Alan M. Turing consagrou-se como um dos maiores matemáticos do seu tempo quando fez antever que era possível executar operações computacionais sobre a teoria dos números por meio de uma máquina que tivesse embutidas as regras de um sistema formal (SCHECHTER, 2017).

Embora propriamente não existisse tal máquina, Turing enfatizou desde o início que tais mecanismos poderiam ser construidos. Sua descoberta abriu uma nova perspectiva no esforço de formalizar a Matemática, e, ao mesmo tempo, marcou fortemente a história da computação.

Seu trabalho descreveu em termos matematicamente precisos, um sistema formal automático, com regras muito simples de operação e que é a solução para um dos problemas-chave discutidos pelos formalistas, na teoria lógica de dedução, que tange os fundamentos da Matemática, e sua própria indecidibilidade ao explicitar a extensão / limite de tudo que pode ser deduzido utilizando a lógica de Aristóteles (ou outras diferentes), caminho tão profundamente utilizado nos trabalhos de Gödel, Church, Robinson e outros (MOSTOWSKI, 1982).

6.1 MÁQUINA DE TURING

Apesar da máquina de Turing ser um tipo de encadeamento de raciocínio, ela pode ser materializada através de objetos materiais. Segundo Pozza e Penedo (2017) máquina de Turing é composta de:

- Uma fita que é dividida em células, uma adjacente à outra. Cada célula contém um símbolo de algum alfabeto finito. O alfabeto contém um símbolo especial branco (em geral, B) e um ou mais símbolos adicionais. Assume-se que a fita é arbitrariamente extensível para a esquerda e para a direita,o que significa que a máquina de Turing possui tanta fita quanto é necessário para a computação. Assume-se também que células que ainda não foram escritas estão preenchidas com o símbolo branco B.

-Um cabeçote, que pode ler e escrever símbolos na fita e mover-se para a esquerda e para a direita.

-Um registrador de estados, que armazena o estado da máquina. O número de estados diferentes é sempre finito e há um estado especial denominado estado inicial com o qual o registrador de estado é inicializado.

-Uma tabela de ação (ou função de transição) que diz à máquina que símbolo escrever, como mover o cabeçote (← para esquerda e → para direita) e qual será seu novo estado, dados o símbolo que ele acabou de ler na fita e o estado em que se encontra. Se não houver entrada alguma na tabela para a combinação atual de símbolo e estado então a máquina pára.

Note que cada parte da máquina é finita; é sua quantidade de fita potencialmente ilimitada que dá uma quantidade potencialmente ilimitada de espaço de armazenamento.

6.2 FUNCIONAMENTO DA MÁQUINA DE TURING SEGUNDO POZZA E PENEDO (2017)

A Máquina de Turing deve assumir sempre em um estado, pertencente à um conjunto finito de estados;

O processamento de uma Máquina de Turing (MT) começa sempre em um estado especial, chamado estado inicial;

Inicialmente a primeira célula da fita é preenchida com “⟨”, que indica o início da mesma;

A cabeça de leitura é posicionada inicialmente na segunda célula da fita, a célula seguinte a “⟨”;

As células em branco, que não fazem parte da palavra a ser processada, são preenchidas com o símbolo “B”;

O processamento em uma MT consiste em uma sequência de passos que consistem em:

Observar o símbolo corrente da fita (aquele em que o cabeçote está posicionado);

Escrever um símbolo nesta célula da fita;

Mover o cabeçote para a esquerda ou direita;

Mudar o estado corrente;

A ação exata a ser executada é determinada por um programa (função de transição) que comunica à unidade de controle o que deve ser feito com base na configuração (estado + símbolo corrente da fita) em que a Máquina de Turing se encontra.

O processamento termina quando a máquina atinge uma configuração para a qual não existe função prevista, neste caso:

Se a máquina estiver com um estado final ativo, a palavra de entrada é aceita;

Se o estado ativo não for final (isto é se MT não parar), a palavra de entrada não é aceita;

Se a máquina não parar, escrevendo símbolos em frases periódicas (looping), a entrada também não é aceita.

6.3 DOIS EXEMPLOS

Vamos dar dois exemplos de funcionamento de uma máquina de Turing.

6.3.1 Multiplicando um número por 2 (POZZA; PENEDO, 2017)

Recapitulando:

Considere os símbolos "I" e "-" (branco,ao inves do usual B). Suponha que o dispositivo possa limpar qualquer um deles quando ele os lê em um quadrado ativo e trocá-lo por outro (i.é., apagar "I" e substituir por "-" e vice-versa). O dispositivo pode mover a cabeça de leitura e de gravação para a direita ou esquerda, de acordo com instruções interpretadas pela unidade de controle. As instruções podem limpar um símbolo, escrevê-lo ou deixá-lo como está, de acordo com o símbolo lido.

Qualquer tipo de jogo pode ser elaborado usando estas regras, não tendo necessariamente algum significado. Uma das primeiras coisas que Alan Turing demonstrou foi que alguns jogos construídos sob estas regras podem ser sofisticados, considerando a simplicidade destas operações primitivas.

Dado um quadrado que seja uma posição inicial de uma seção da fita preenchida por quaisquer caracteres ou brancos, o dispositivo executa ações especificadas por uma lista de regras, seguindo-as uma por vez até chegar àquela que force sua parada (se não há uma instrução explícita na tabela para uma determinada configuração da fita, então não há nada que a máquina possa fazer quando alcança aquela configuração, encerrando a execução, portanto).

Cada instrução - ou regra - estabelece uma ação a ser executada se houver determinado símbolo no quadrado ativo no tempo em que é lido. No nosso caso vamos estabelecer 4 diferentes tipos de regra:

1. Substituir -(branco) por símbolo
2. Substituir símbolo por -(branco)
3. Ir um quadrado para a direita
4. Ir um quadrado para a esquerda

Um exemplo de instrução seria: "Se houver um I no quadrado ativo, substitua-o por –(branco)". Esta instrução faz a máquina executar a segunda ação da lista acima. Para se elaborar um "jogo" nós necessitamos fazer uma lista que especifique o número da regra que se deve observar no momento atual, e, de alguma forma, qual será a próxima. Cada regra desta lista será composta pela seguinte sequência: o número da regra - estado da máquina -, um caracter/branco para comparação, próximo estado e ação (novo símbolo que irá para o quadrado ou movimentar para direita(>)/esquerda(<) cabeça de leitura/gravação).

Segue abaixo uma lista de regras - código e descrição - que dirão a uma máquina de Turing como desenvolver um determinado "jogo" (este jogo pode ser visto como a multiplicação de um número natural por 2).

1 I 2 –

Estado 1: se há um I no quadrado ativo, substitua-o por - e vá para estado 2;

2 - 3 >

Estado 2: se há um - no quadrado ativo, vá para estado 3 e ande um quadrado a direita;

3 I 3 >

Estado 3: se há um I no quadrado ativo, vá para estado 3 e ande um quadrado a direita;

3 - 4 >

Estado 3: se há um - no quadrado ativo, vá para estado 4 e ande um quadrado a direita;

4 I 4 >

Estado 4: se há um I no quadrado ativo, vá para estado 4 e ande um quadrado a direita;

4 - 5 I

Estado 4: se há um - no quadrado ativo, substitua-o por I vá para estado 5;

5 I 5 >

Estado 5: se há um I no quadrado ativo, vá para estado 5 e ande um quadrado a direita;

5 - 6 I

Estado 5: se há um - no quadrado ativo, substitua-o por I vá para estado 6;

6 I 6 <

Estado 6: se há um I no quadrado ativo, vá para estado 6 e ande um quadrado a esquerda;

6 - 7 <

Estado 6: se há um - no quadrado ativo, vá para estado 7 e ande um quadrado a esquerda;

7 I 8 <

Estado 7: se há um I no quadrado ativo, vá para estado 8 e ande um quadrado a esquerda;

8 I 8 <

Estado 8: se há um I no quadrado ativo, vá para estado 8 e ande um quadrado a esquerda;

8 - 1 >

Estado 8: se há um - no quadrado ativo, vá para estado 1 e ande um quadrado a direita;

Note que se houver um branco no quadrado ativo quando os estados forem 1 ou 7, ou se há um I no quadrado ativo quando o estado da máquina é 2, ela para, pois não saberia o que fazer.

Neste caso, o programa-como observado- duplica uma sequência de Is que estejam na fita. Se a fita contiver I I I I, no final conterá I I I I I I I I. Para executar o programa descrito na lista de regras é necessário especificar uma configuração inicial na fita, além de indicar quais são o quadrado inicial ativo e o estado inicial da máquina. Quando a máquina começa a executar partindo do estado inicial e do quadrado ativo, seguirá a sequência (lógica) de regras que darão o produto final.

Podemos usando algum programa de computação (por ex. a linguagem de programação visualg 2.0) estabelecer o algoritmo para este objetivo do exemplo:

- algoritmo "Multiplicar um número inteiro por 2”
- var
- x,n,r:inteiro
- I,P:caracter
- inicio
- Escreval(" Entre com um número natural n")
- leia(n)
- r<-n mod 2

- Se r=0 entao
- Escreva(" P ","Substitua por I")
- Escreva(" I ","Move-se para direita")
- Escreva(" P ","Move-se para direita“)
- senao
- Escreva(" I ","Substitua por P ")
- Escreva(" P ","Move-se para direita")
- Escreva(" P ","Move-se pra esquerda“)
- Fim se
- x<-2*n
- Escreva(x)
- fimalgoritmo

Em sua essência, toda máquina de Turing move-se ou move símbolos, de uma posição na fita, da mesma maneira que neste exemplo. Nos dias de hoje, estes símbolos podem ser impulsos eletrônicos em um microcircuito e a fita uma série de endereços de memória em um chip, mas a ideia é a mesma. Turing provou que sua hipotética máquina é uma versão automatizada de um sistema formal especificado por uma combinação inicial de símbolos (o conjunto de "I"s na fita no início do processo) e as regras (aquelas instruções escritas). Os movimentos são mudanças de 'estado' da máquina que correspondem à específicos passos de computação.

6.3.2 Exemplo de máquina de Turing a 2 dimensões

Construimos a seguir um exemplo onde a máquina utiliza um retículo de quadrados no plano. É evidente que com um maior esforço poderíamos programar a máquina para um contexto com apenas uma dimensão .

A cabeça da máquina tem agora,uma mobilidade em duas dimensões (colunas A, B, C, ... e linhas 1, 2, 3, ...)

Exemplo:

Objetivo :Dada uma tabela de números inteiros, o número de elementos positivos (ou zero) na tabela e a soma destes elementos, através de uma máquina M.

Pressupostos:

A máquina M utiliza,

1) a propriedade de somar números inteiros, dada por outra máquina P.

2) a propriedade de marcar com 1 se numa célula está localizado um número positivo (ou zero) e com 0 se na célula está localizado um número negativo, dada por uma máquina Q.

3) o símbolo branco da célula vazia é β.

colunas / linhas	A	B	C
1	8	1	8
2	22	1	22
3	-15	0	0
4	17	1	17
5	8	1	8
6	-3	0	0
7	-5	0	0
10	0	1	0
11	β	β	β
12	β	5	55

Instruções:

a) ler em sequência as células A1, ..., A10

b) se a coluna A na linha i (Ai) houver um número positivo (ou zero) ou então negativo, marcar em Bi, 1 ou 0, respectivamente.

c) ao primeiro β na coluna A parar o processo.

d) na coluna Ci colocar o produto de Ai por Bi.

e) colocar na posição B10 a soma B1+ ... + B8.

f) colocar na posição C10 a soma C1+ ... + C8.

Resultado:

Em B10 e C10, temos o número de elementos não negativos da tabela em A $(= 5)$ e soma destes números (=55), respectivamente.

Observação Final:

Um programa tipo libreoffice-CALC é uma excelente máquina de Turing em matéria de diversidade e um enorme número de programas tipo máquina de Turing embutidos no próprio CALC.

Como exercício, sugerimos várias demonstrações a serem feitas no libreoffice-CALC com os mais diferentes vínculos nos dados e resultados.

REFERÊNCIAS

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 5. ed. Campinas: Unicamp, 2011. 843 p.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar:** combinatória, probabilidade. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 2 v., 5 p.

HEDMAN, Shawn. **A first course in logic:** an introduction to model theory, proof theory, computability, and complexity. New York: Oxford University, 2014. 452 p.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética.** Rio de Janeiro: SBM, 2014. 330 p.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar:** complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual, 2013. 6 v., 250 p.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de matemática elementar:** Logaritmos. 10. ed. São Paulo: Atual, 2013. 2 v. 218 p.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de matemática elementar:** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. São Paulo: Atual, 2012. 4 v. 282 p.

LIMA, Elon Lages. **Números e funções reais.** Rio de Janeiro: SBM, 2013. 297 p.

MALDONADO, Yandre; COSTA, Gomes da. **Máquina de Turing.** Maringá: Departamento de Informática, 2014. 32 slides color. Disponível em: <http://www.din.uem.br/yandre/TC/MT-grande.pdf>. Acesso em: 26 maio 2017.

MOSTOWSKI, Andrzej. **Sentences undecidable in formalized arithmetic:** an exposition of the theory of kurt godel. Amsterdam: North-holland Publishing Company, 1982. 117 p.

NERI, Cassio; CABRAL, Marco. **Curso de análise real.** 2. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática (UFRJ), 2011. 163 p.

NISAN, Noam; SCHOCKEN, Shimon. **The elements of computing systems:** building a modern computer from first principles. Massachusetts: The Mit Press, 2004. 325 p.

POZZA, Osvaldo Antonio; PENEDO, Sérgio. **A Máquina de Turing.** 2002. 6 f. Trabalho (Mestrado em Ciências da Computação) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianápolis 2002. Disponível em: <http://www.inf.ufsc.br/~j.barreto/trabaluno/MaqT01.pdf>. Acesso em: 26 maio 2017.

SCHECHTER, L. M. **A vida e o legado de Alan Turing para a ciência.** Rio de Janeiro: Rio de Janeiro, [200-]. Disponível em: <http://www.dcc.ufrj.br/~luisms/turing/seminarios.pdf>. Acesso em: 26 maio 2017.

TARSKI, Alfred. **Introduction to logic and to the methodology of the deductive sciences.** 4. ed. New York: Oxford University Press, 1994. 272 p.

WIKIPÉDIA. **Giuseppe Peano.** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano>. Acesso em: 26 maio 2017.

ZIMBARG SOBRINHO, Jacob. Aspectos da tese de Church-Turing. **Matemática Universitária,** São Paulo, v. 1, n. 6, p. 1-23, dez. 1987.