UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
JÚLIO DE MESQUITA FILHO
Campus de Presidente Prudente
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Douglas Yugi Bocal Harada

Entendendo as Filas de Espera: Uma Abordagem para o Ensino Médio

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2017

DOUGLAS YUGI BOCAL HARADA

Entendendo as Filas de Espera: Uma Abordagem para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de Presidente Prudente.

Orientador: Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
2017

Harada, Douglas Yugi Bocal.
Entendendo as Filas de Esperas: uma abordagem para o ensino médio/ Douglas Yugi Bocal Harada. -- São José do Rio Preto,2017
62 f. : il., grafs.

Orientador: José Gilberto Spasiani Rinaldi
Dissertação (Mestrado - profissional) - Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino Médio) – Estudo e ensino. 2. Teoria das filas. 3. Matemática aplicada. I. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Douglas Yugi Bocal Harada

Entendendo as Filas de Espera: Uma Abordagem para o Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Campus de Presidente Prudente.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi - UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Luiz Carlos Benini - UNESP - Presidente Prudente

Profª. Dra. Silvia Maria Prado – UFMT – Cuiabá.

SÃO JOSÉ DO RIO PRETO
Agosto de 2017

A todas que sempre acreditaram que eu seria capaz de alcançar este objetivo.

Eu te dedico!

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

Agradeço a minha família, por sua capacidade de acreditar em mim e investir em mim. Minha mãe Márcia Bocal Harada, seu cuidado e dedicação foi que deram, em alguns momentos, a esperança para seguir. Meu pai, sua presença significou segurança e certeza de que não estou sozinho nessa caminhada. Minha irmã Érika Mayumi Bocal Harada, sempre com incentivo e pelos apoios constantes.

Agradeço a minha noiva Giovanna pessoa com quem amo partilhar a vida. Com você tenho me sentido mais vivo de verdade. Obrigado pelo carinho, a paciência e por sua capacidade de me trazer paz na correria de cada semestre.

Agradeço a todos os professores do curso por todos os ensinamentos, experiências, dedicação e tempo disponibilizados, mas agradeço principalmente pelas palavras de estímulo nos momentos mais difíceis.

Agradeço ao Prof. Dr. José Gilberto Spasiani Rinaldi, que acreditou em meu trabalho e me aceitou como seu orientando, sempre atendeu prontamente a cada dúvida e partilhou suas ideias, experiências e conhecimentos. Quero expressar o meu reconhecimento, gratidão e carinho por ser um profissional extremamente qualificado e pela forma calma e tranquila que conduziu minha orientação. Deixando-me um ótimo exemplo de pessoa e profissional.

Agradeço a equipe gestora da escola ETEC Prof. Dr. Antônio Eufrásio de Toledo por permitir que eu aplicasse as atividades, principalmente a coordenação pedagógica, uma vez que apresentou grande interesse pelo projeto e imediatamente considerou meu pedido.

Agradeço aos alunos que participaram dessa pesquisa com respeito e interesse.

Agradeço aos professores Dr. Luiz Carlos Benini e a professora Dra. Silva Maria Prado que participaram da banca de defesa. Graças as suas precisas indicações e correções, foi realizado um ótimo trabalho.

Agradeço a CAPES pela contribuição financeira.

O tempo é um dos bens mais valiosos do ser humano, no entanto, desperdiça-se considerável parcela do tempo de vida nas filas.

Samuel Cogan.

RESUMO

O tempo de espera é uma variável muito estudada em nosso cotidiano e não pode ser desconsiderada ou minimizada, principalmente quando algum tempo é tomado de uma pessoa por outras que não respeitam uma ordenação estabelecida em sistemas de atendimento. No caso das filas, isso poderia ser evitado em boa parte, se todos entendessem sua estrutura e sua finalidade. Esta investigação tem como objetivo desenvolver um aprendizado sobre sistemas de filas e suas possíveis aplicações, além de estabelecer alguns aspectos educacionais sobre esse assunto. Este estudo foi desenvolvido no âmbito escolar, considerando o caso da educação em filas. A investigação iniciou-se com pesquisa bibliográfica de aspectos teóricos sobre filas e sobre os conceitos de tempo de espera, tipos de filas e suas aplicações. Seguidamente, foi realizado um questionário referente à estrutura de filas e sua educação básica, com a finalidade de avaliar o nível de conhecimento dos alunos. Após a aplicação dessa etapa, foi realizada uma apresentação sobre o tema tratado e, em seguida, aplicação de outro questionário, a fim de analisar a existência de melhoria na aprendizagem. Com o desenvolvimento e aplicação deste estudo, foi possível concluir que houve significativo ganho de conhecimento e de aprendizado dos alunos com relação à educação de filas e seus aspectos. Como motivações aos alunos, foram realizadas duas aplicações simples de filas com comportamentos distintos: uma situação em que os alunos presenciam no seu cotidiano, a fila da cantina, e outra com a teoria mais conhecida e regularmente aplicada. As situações estudadas fornecem subsídios aos alunos na compreensão e na aplicação da teoria em sistemas de filas de espera.

Palavras- chave: filas, filas de espera, educação em filas de espera, aplicação em filas de espera.

ABSTRACT

Waiting time is a very studied variable in our daily life and can not be disregarded or minimized, especially when some time is taken from a person by others who do not respect an ordering established in care systems. In the case of queues, this could be largely avoided if everyone understood its structure and purpose. This research aims to develop a learning about queuing systems and their possible applications, besides establishing some educational aspects about this subject. This study was developed in the school context, considering the case of education in queues. The investigation began with a bibliographical research of theoretical aspects about queues and about the concepts of waiting time, types of queues and their applications. Next, a questionnaire was carried out regarding the structure of queues and their basic education, with the purpose of evaluating the students' level of knowledge. After the application of this step, a presentation was made on the subject treated and then application of another questionnaire, in order to analyze the existence of improvement in learning. With the development and application of this study, it was possible to conclude that there was a significant gain in the knowledge and learning of students regarding the education of queues and their aspects. As motivations to the students, two simple applications of queues with different behaviors were carried out: a situation in which the students see in their daily lives, the canteen queue, and another with the best known and regularly applied theory. The situations studied provide support for students in the understanding and application of the theory in queuing systems.

Key-words: queues. waiting queues. education in waiting queues. application in waiting queues.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É nítido o descontentamento da população em geral em relação a qualquer tipo de fila, desde uma simples fila de um restaurante até um engarrafamento no trânsito. Não existe nenhuma novidade em saber que esperas em filas é algo muito desgastante e incomoda, notadamente nos dias atuais, onde as pessoas tendem a dar prioridade ao seu tempo livre. De acordo com Cogan (1998), "[...] a demora nas filas é terrivelmente cruel para cada individuo – ela rouba das pessoas um dos mais valiosos recursos: o tempo".

Pode parecer algo muito simples, mas em se tratando de fila devemos ter uma grande preocupação em relação à sua educação e funcionamento. Neste contexto, informações e orientações podem prevenir discussões, brigas, acidentes e até mesmo mortes.

Um exemplo são as filas de transplantes no Brasil. Dados da Associação Brasileira de Transplantes de Órgãos (ABTO) mostram que duas mil trezentos e trinta e três pessoas morreram a espera de um transplante de órgão no Brasil no ano de 2015. Ainda, é revelado que, dentre esse número, sessenta e quatro são crianças.

O nefrologista Roberto Manfro, presidente da ABTO, informou pelo Registro Brasileiro de Transplantes (RBT) que os números reforçam que, para alguns pacientes, a espera é fatal.

> "No caso do rim, se não tem doador, a pessoa ainda vive em hemodiálise. Não é o mesmo que se conseguir o transplante, mas vive um tempo. Para outros órgãos, não existe um tratamento de substituição da função, como um coração terminal, por exemplo."

Ainda, segundo este registro, a taxa de doadores efetivos no Brasil está abaixo da meta estipulada pela ABTO. Em 2015, ela foi de 14,1 por milhão de habitantes – com uma queda em relação a 2014. A intenção era que ela chegasse a 17, sendo um dos fatores que ainda inviabilizam um crescimento de doações é a recusa familiar. Em 2015, ela foi responsável por 44% dos casos de não concretização (bem à frente de contraindicação médica, com 15%, por exemplo).

Um fato bastante interessante em relação aos transplantes é que existe uma ordem de atendimento, uma fila. Contudo, esta apresenta prioridade por idade, condição da doença e outros fatores importantes.

Outro exemplo de filas que envolve a saúde dos integrantes são os indivíduos que frequentemente estão em congestionamento ou engarrafamento no trânsito. A lentidão, ou em algumas ocasiões a paralisação, causa ansiedade, insegurança e outros problemas que afetam diretamente o organismo.

Uma das filas mais comuns que muitos enfrentam são filas de supermercados e bancos. Para tentar não frustrar seus clientes, esses estabelecimentos buscam alguns meios de atenuar este problema. Uma das formas é o gerenciamento das percepções nas filas de espera, que tem basicamente a ideia de captar a atenção dos clientes enquanto esperam de modo que não percebam a passagem do tempo. Em muitos estabelecimentos, como exemplo supermercados e bancos, essa técnica aplicada a esta área tem obtido alguns resultados satisfatórios. Este procedimento tem se tornado de grande importância em setores nos quais pouco se pode melhorar a espera, seja por impossibilidade física ou de falta de recursos. Alguns estudos revelam que, em alguns casos, as esperas estão relacionadas diretamente aos altos custos a elas atribuídos, tornando impeditivas as melhorias.

Segundo Cogan (1998) a Teoria das Filas tem um papel essencial no planejamento e análise de serviços e do *layout* do espaço utilizado, dispõe de conceitos básicos de processo estocástico e da matemática aplicada para estudar o fenômeno de formação de filas e suas características. Seu desenvolvimento teve finalidade de prever o comportamento das filas de modo a permitir o dimensionamento adequado de instalações, equipamentos e sua infraestrutura.

1.1 Objetivo do Estudo

O interesse pelo tema abordado surgiu, inicialmente, devido a observar os diferentes comportamentos dos alunos em fila, enquanto trabalhava como professor em uma escola de período integral. Ao mesmo tempo em que frequentava a escola, semanalmente se observava diferentes momentos nos quais os alunos enfrentavam algum tipo de fila, como ir à biblioteca, na hora do intervalo, no momento do almoço e na hora de ir embora com transporte público.

O primeiro pensamento enquanto professor foi sobre a observação de como os alunos apresentavam comportamentos distintos em certas filas. Nas filas da biblioteca, almoço e do transporte os alunos apresentavam um comportamento adequado em fila, nas quais foi possível perceber poucos casos de fraudes (aproveitar a oportunidade de subverter a ordem tomando um lugar a frente na fila que não é seu por direito ou pela prioridade estabelecida). Quando era observado o comportamento na fila formada no intervalo de aulas eram percebidas várias situações não adequadas, aparentando não existir uma ordem plausível.

Tomando como base as observações iniciais descritas anteriormente, foi realizada uma sondagem em alguns dos alunos daquela escola. Foram solicitadas, informalmente como era a experiência nas filas, se entendiam o porquê da existência das mesmas, se usavam a fila sem saber a importância da sua finalidade e se alguma vez se sentiram prejudicados por outros alunos em respeito à fila. Obtidas as respostas desta sondagem surgiu a decisão de utilizar essa temática com o intuito de esclarecer as dúvidas dos alunos referentes a esse assunto, e educá-los em relação à mesma para que eles não se sintam prejudicados e evitem conflitos e confusões, como acontecem em muitas filas de espera pelo motivo de desinformação e educação.

1.2 Organização do Texto

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, sendo que o Capítulo 1 faz uma introdução ao tema proposto neste trabalho.

O segundo capítulo traz informações sobre a história e origem da Teoria de Filas e seu principal precursor.

O terceiro capítulo trata de um referencial teórico sobre a definição, os tipos de filas e suas estruturas.

No quarto capítulo é tratado o conceito da Cadeia de Markov, junto da matriz de transição e vetor de probabilidade para a explicação de uma situação que envolva o conceito de filas de espera em um supermercado.

No quinto capítulo são apresentados os dados coletados junto aos participantes da pesquisa e as respectivas análises. As análises foram organizadas partindo-se dos relatos dos participantes e comparadas com a bibliografia estudada sobre o assunto. Uma aplicação é mostrada a partir dos dados da fila de espera do refeitório da escola, mostrando uma das possíveis aplicações da fila de espera aos alunos.

2 ASPECTOS HISTÓRICOS DA TEORIA DE FILAS

Neste capítulo é apresentada a origem da Teoria de Filas, de forma breve e concisa. Posteriormente são apresentadas algumas aplicações, nas quais, inicialmente e historicamente, só era observado algum tipo de avanço em aplicações telefônicas, mas com o passar do tempo, esta teoria foi aplicada em outras áreas. Na segunda seção deste capítulo será contada a história de Erlang, e aborda o seu primeiro contato com os estudos e como se envolveu com o trabalho para o desenvolvimento da teoria. As informações contidas foram retiradas da obra *The life and Works of A. K. Erlang*.

2.1 A origem da Teoria de Filas

A teoria de filas é um campo de estudo da probabilidade, que foi desenvolvida para analisar a formação de filas, como forma de evidenciar antecipadamente o comportamento de sistemas que provêm atendimento às demandas em contínuo crescimento aleatório. Essa análise pode ser descrita por meio de modelos matemáticos precisos e comensuráveis, tornando-se, como exemplo, viável financeiramente para àquele que oferece algum serviço remunerado e, desta forma, possivelmente gerando o contentamento dos clientes atendidos. Em consonância com o que foi relatado acima, Fogliatti e Mattos (2007) destaca que:

> As filas de espera fazem parte do dia-a-dia dos indivíduos na sociedade moderna e, como não podem ser evitadas, tendem a ser toleradas, apesar dos atrasos e das inconveniências que causam. Entretanto, os processos geradores de filas podem ser estudados e dimensionados de forma a aliviar os prejuízos em tempo e produtividade, assim como as perdas financeiras que elas acarretam.

Ainda, de acordo com as autoras, a Teoria de Filas, surge em Copenhagen, na Dinamarca, no início do século XX (1909), pelo matemático, estatístico e engenheiro dinamarquês Agner Krarup Erlang, considerado por muitos como o “pai” da Teoria de Filas. Erlang desenvolveu fórmulas matemáticas para estudar o problema de redimensionamento da Copenhagen Telephone Company, uma companhia telefônica daquela cidade, que apresentava grande congestionamento nas centrais telefônicas.

Ainda segundo Fogliatti e Mattos (2007), por meio de seu raciocínio, Erlang foi capaz de perceber que a matemática resolveria ainda outro problema, relacionado à quantidade de operadores telefônicos necessários para atender um número de chamadas determinadas previamente. Naquela época era comum entre as centrais telefônicas usarem trabalhadores como operadores para gerenciarem as suas chamadas, conectando os fios telefônicos em tomadas elétricas das placas com circuitos.

Erlang trabalhou no desenvolvimento da área de tráfego nos sistemas de chamadas telefônicas tendo publicado o seguinte:

> Em 1909, "A Teoria das Probabilidades e as Conversões Telefônicas" em que provou que a distribuição de Poisson se aplica ao tráfego aleatório de chamadas telefônicas.
> Em 1917, "Soluções de Alguns Problemas na Teoria de Probabilidades de importância nas Chamadas Automáticas de Telefone" em que inclui sua fórmula clássica de tempo de espera e tempo perdido. (CARRIÒN 2007, p.15)

Mesmo com a Teoria das Probabilidades e as Conversões Telefônicas, não se obteve um avanço significativo na Teoria de Filas, como ocorreu nas aplicações telefônicas. Entretanto, a partir dos anos 50 as aplicações em áreas, além dos sistemas de telefone, começaram a evoluir, como por exemplo, as áreas de economia, de administração e de processamento de fluxos usufruíram dessa técnica com aplicações em problemas de congestionamento de tráfego, de escoamento de fluxo de carga de terminais, de carregamento/descarregamento de veículos, de escoamento de fluxo de processamento de informações, de formação de estoques, de comunicação de computadores entre muitas outras.

2.2 O pai da Teoria de Filas

Em primeiro de janeiro de 1878 na cidade Lonborg, Jutland na Dinamarca, nasce Agner Krarup Erlang. Seu pai Hans Nielsen Erlang se tornou professor do vilarejo onde havia nascido. Sua mãe Magdalene Krarup, por outro lado veio de família eclesiástica, na qual tinha como parente um matemático dinamarquês bastante conhecido: Thomas Fincke. Ele foi físico, matemático, médico e professor, por um longo período de tempo, na Universidade de Copenhaguen. Seu maior estudo está relacionado a um tratado de funções trigonométricas, publicado em 1583 que tem por título "Geometria Rotundi".

Erlang tinha três irmãos, Frederik era o mais velho e Marie e Ingeborg suas irmãs mais novas. Juntos compartilharam os primeiros anos escolares no prédio onde seu pai lecionava, onde demonstrou uma ótima memória e facilidade no aprendizado. De acordo com Brockmeyer et al. (1948):

> ... Ele era um menino tranquilo e pacífico que preferiu ler a brincar com os outros meninos. À noite, ele e seu irmão mais velho, muitas vezes compartilhavam a leitura de um livro entre eles, o procedimento habitual é que o irmão Frederik iria lê-lo na forma aprovada, enquanto Agner, sentado em frente a ele na mesa, lendo o livro de cabeça para baixo.

Tinha como matéria favorita a astronomia, visto que era encorajado por seu avô materno, que também adorava esta matéria. Além disso, continuou seu interesse com a escrita de poemas sobre assuntos astronômicos, algo que gostava muito.

Quando tinha 16 anos, seu pai queria que ele cursasse a universidade, porém sua família não possuía grandes bens, visto que a única fonte de renda vinha do salário de professor de seu pai, e por sua vez, este era todo direcionado para o sustento da família. Nesta época então um familiar distante de sua mãe lhe ofereceu acomodação por dois anos, para que ele se preparasse para os exames de admissão na universidade. Enquanto se preparava frequentou a escola secundária de Frederiksborg. Conseguiu uma bolsa de estudos para a Universidade de Copenhaguen, concluindo em 1901, tendo a matemática como a matéria principal e como matérias secundárias astronomia, física e química.

Ao término de seus estudos, voltou ao vilarejo, onde seguiu a carreira de seu pai, tornando-se também professor, atuando por dois anos na escola onde concluiu o primário. Neste período em que estava atuando como docente aprendeu francês e latim.

Erlang mostrou grande inclinação para o ensino e apesar de ter demonstrado uma aptidão natural para a pesquisa, preferia ser um observador a uma pessoa muito sociável. Suas falas eram sempre sucintas, recebendo de seus amigos o apelido de “A pessoa Privada”.

No ano de 1904, recebeu um prêmio por um estudo a respeito da solução de problemas infinitesimais que apresentou na Universidade de Copenhaguen Huygens.

Um grande amigo que encontrou na Associação de Estudantes Cristãos na Universidade de Copenhaguen foi H.C. Nybolle, que anos mais tarde assumiu o cargo de professor de estatística da referida universidade. Esta situação, além de uma nova amizade, também se tornou uma grande colaboração científica. Direcionou-se para a teoria da probabilidade, mantendo o seu interesse pela matemática agora se unindo à Associação de Matemática Dinamarquesa.

Conheceu outros grandes matemáticos naquela associação. Lá conheceu Johan Ludwing Jensen que era naquela época o engenheiro-chefe da Companhia Telefônica de Copenhaguen. Este convenceu Erlang a solucionar problemas, que surgiam na empresa, a partir de um estudo dos tempos de espera para chamadas telefônicas. Em 1908 Erlang começou a trabalhar na empresa como colaborador científico, onde aplicou suas habilidades, assim se tornando o principal membro do laboratório.

Segundo Brockmeyer et al. (1948), A. K. Erlang começou por estudar a troca de ligações de uma pequena vila e criou uma fórmula, agora conhecida como a fórmula de Erlang, para calcular a fração de ligações para fora da vila que tinham de esperar porque todas as linhas estavam ocupadas.

Por meio dos problemas de tráfego de telefonia, Erlang começou a aplicar a teoria da probabilidade, e em 1909 surge o primeiro trabalho publicado sobre o assunto "A Teoria da Probabilidade e Conversas Telefônicas" (The Theory of Probabilities and Telephone Conversations), mostrando que as ligações telefônicas distribuídas aleatoriamente seguem a lei de distribuição de Poisson e conseguindo uma solução parcial para o problema de atraso.

Foram publicados mais alguns trabalhos, e como destaque, temos no ano de 1917 "*Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges"*, trabalho esse que apresenta fórmulas para a perda e tempo de espera. Estas fórmulas tornaram-se bastante conhecidas na teoria de tráfego de telefonia, e rapidamente foram utilizadas nestas empresas (deste porte) em muitos países, como exemplo, na British Post Office.

Pela grande procura e interesse por seu trabalho, vários documentos foram traduzidos para outros idiomas, como inglês, francês e alemão. Assim como suas falas, sua escrita tinha um estilo conciso, às vezes Erlang omitia certas evidências, o que dificultava o trabalho dos tradutores. Devido a isso pesquisadores de alguns laboratórios, como o da Telefonia Bell, aprenderam o dinamarquês para compreenderem seus documentos no idioma original, tornando-se aptos a lerem e compreenderem seus pensamentos.

Seu reconhecimento internacional foi obtido após a realização do trabalho na teoria de tráfego de telefonia, no qual sua fórmula para a probabilidade de perda foi aceita pela agência postal britânica, servindo de base para o cálculo das instalações de circuitos telefônicos.

Erlang nunca se casou, tendo sempre dedicado seu tempo e energia aos estudos e trabalho, onde frequentemente trabalhava até tarde da noite. Possuía uma vasta biblioteca, esta continha principalmente livros de matemática, astronomia e física. Seu interesse não se limitava apenas aos conteúdos de seus estudos, mas ele também mostrava gosto por história, filosofia e poesia.

Sempre foi um homem generoso e bom com seus amigos, sendo conhecido por ser uma pessoa caridosa. As pessoas frequentemente o visitavam em seu laboratório para solicitar ajuda sobre qualquer assunto. Brockmeyer et al. (1948) nos apontam que:

> "Erlang tinha uma personalidade notável e original. Ele era um cristão sincero de um modo simpático, ao mesmo tempo, cheio de humor e sagacidade satírico; exteriormente, sua pesada barba vermelha e sua maneira de vestir apresentou certo toque artístico à sua aparência característica. Extremamente modesto e discreto de comportamento, ele preferiu a atmosfera pacífica de seu estudo do que para reuniões e festas sociais; ele nunca tomou bebidas alcoólicas nem fumava tabaco... Erlang era um homem beneficente; vivia uma vida modesta, ele poderia dar ao luxo de ajudar os outros, o que ele fez até mesmo em uma extensão muito grande".

Na Companhia Telefônica de Copenhague Erlang trabalhou durante 20 anos, dos quais nunca tirou um dia de folga por motivos de doença. Entretanto em janeiro de 1929, com a idade de 51 anos começou a sentir dores abdominais, precisando ir ao hospital para submeter-se a uma operação. Alguns dias depois, em 03 de fevereiro, Erlang veio a falecer.

Erlang recebeu diversas homenagens, após seu falecimento, dentre elas temos a de Ericsson Communications, chamou a linguagem de programação, de linguagem de programação Erlang. Esta linguagem de programação é utilizada preferencialmente pelos grandes sistemas de tempo real industrial. A distribuição de probabilidade estatística que ele utilizou em seu trabalho, também recebeu seu nome.

3 DEFINIÇÃO, CARACTERÍSTICAS E CLASSIFICAÇÃO DE UM SISTEMA DE FILAS

A definição de fila, de acordo com Fogliatti e Mattos (2007), consiste por qualquer processo no qual os usuários vindo de uma determinada população chegam para receber algum serviço pelo qual estão esperando, caso seja necessário, saindo do sistema quando é terminado o serviço. Esta espera ocorre quando a demanda é superior à capacidade de atendimento ofertado, se tratando de fluxo.

> “No decorrer do dia-a-dia passar por diversas situações onde existem filas é normal, na hora do almoço, no banco, no cinema, no trânsito, no mercado, no aeroporto e muito mais. Elas são formadas quando um cliente chega para ser atendido e tem que esperar pelo serviço, assim percebe-se que a procura pelo serviço é maior do que a capacidade de atendimento naquele momento”. (ALMEIDA, 2011).

As filas de espera são um fenômeno que ocorre quando há um número de clientes superior ao número de servidores (servidores são os atendentes que prestam serviços que, para serem utilizados, é necessário que os clientes esperem e formem uma fila física ou abstrata), pois o servidor demora algum tempo aleatório (denominado tempo de serviço) para atender cada um dos clientes, sendo que este serviço só se encerra quando o cliente se retira.

De acordo com Moreira (2007), “Teoria das Filas é um corpo de conhecimentos matemáticos, aplicado ao fenômeno das filas”.

Os sistemas de filas se descrevem, de forma geral, por um processo de chegada de clientes (ou produtos) a um sistema de atendimento (beneficiamento, produção) para receberem um ou mais serviços, executados por certa quantidade de servidores.

Como forma de aferir o comportamento do sistema de filas, associam-se medidas de desempenho como tempo médio de espera dos clientes na fila, tempo médio de chegada de clientes, probabilidade de encontrar o sistema lotado, entre outras. Dessa forma, a Teoria das Filas tenta, através de análises matemáticas detalhadas, aprimorar o funcionamento das filas de espera, encontrando soluções equilibradas que satisfaça o cliente (ou linha de produção) e seja viável economicamente para o provedor do serviço. O objetivo principal é que o cliente seja atendido de forma satisfatória sem que isto tenha alto custo para o provedor de serviços.

Existem diversas aplicações da Teoria das Filas. Entre elas destacam-se:

- Fluxo de tráfego como aviões, navios, carros, pessoas, comunicações, entre outros. Com exemplo no fluxo de tráfego de navios nos portos, a utilização da Teoria de Filas, pode reduzir custos e tempo de operação e com isso garantir a competitividade entre os portos.

- Prestação de serviços tais como bancos, correios, etc. Verifica-se que o estudo de serviços, por meio da Teoria das Filas, pode proporcionar uma ferramenta poderosa para gestão dos processos em busca da prestação de serviços de excelência gerando satisfação, e consequentemente, mais negócios e menos custos para as agencias.

- Sistema médico-emergencial em rodovias "Anjos dos Asfaltos" e filas de transplantes entre outras. No atendimento do setor de saúde, onde o cliente precisa ser atendido, mas deseja ter que esperar o mínimo possível, satisfazer sua vontade nesta espera é um objetivo que as empresas tentam realizar para cativá-los diante dos serviços oferecidos (isto é conhecido como processo de fidelização).

Tem-se a seguir os conceitos que podem ser encontrados em PEREIRA (2009) referente à definição, características e classificações de um sistema de filas.

3.1 Elementos constituintes de um sistema

Para formar um sistema de fila de espera existem cinco elementos fundamentais que podem tomar vários formatos: processo de chegada, fila de espera, serviço, capacidade do atendimento e disciplina de atendimento.

3.1.1 Processo de chegada (Fonte ou População):

A chegada representa o elemento que fornece os clientes que vão chegar ao sistema, que pode ter características muito diferentes, como seguidamente se descreve.

3.1.1.1 Dimensão da população:

A dimensão da população pode ser finita (grupo de tamanho limitado de clientes que usará o serviço) ou infinita. Neste último caso a probabilidade de ocorrer uma nova chegada não é influenciada pelo número de clientes que já se encontram no sistema.

3.1.1.2 Dimensão da chegada.

A dimensão da chegada pode ser unitária quando os clientes chegam um a um ou pode haver chegada em grupo (como exemplo, a chegada de um ônibus com várias pessoas).

3.1.1.3 Controle das chegadas.

O processo de chegada pode ser controlável (como por exemplo, quando existem inscrições em dias fixos) ou incontrolável (como por exemplo, numa urgência de um hospital).

3.1.1.4 Distribuição das chegadas.

A distribuição das chegadas pode ser descrita pelo tempo de entre duas chegadas seguidas ou pela quantidade de chegadas por unidade de tempo. Podem ser constantes quando existem intervalos de tempo fixos entre chegadas sucessivas (como por exemplo, em filas de montagem industrial) ou aleatórias quando os intervalos de tempo entre chegadas sucessivas não podem ser previstos, usando-se neste caso distribuições de probabilidade.

3.1.1.5 Taxa de chegada.

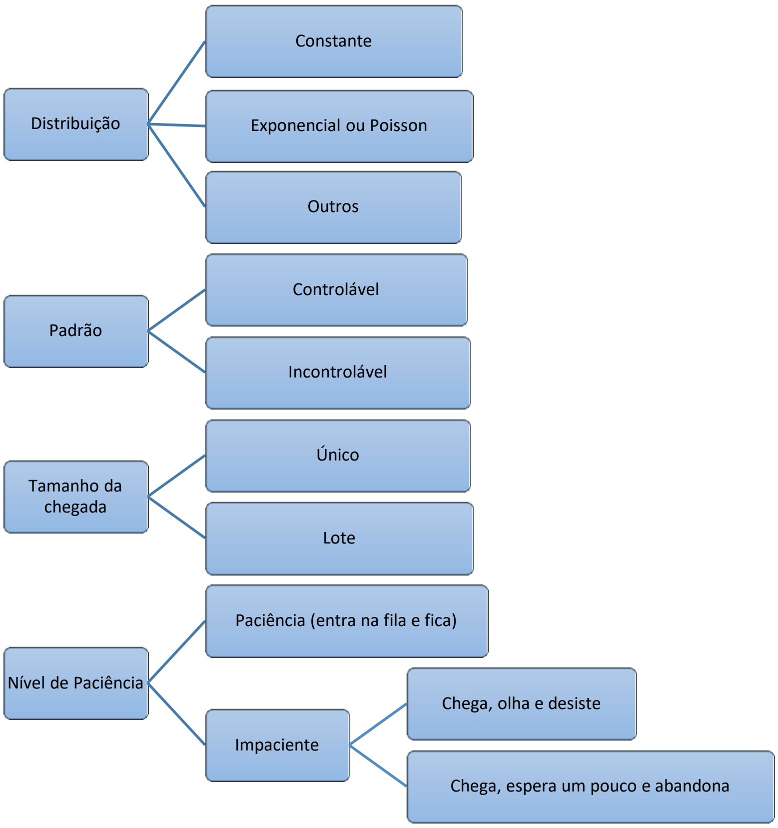
A taxa de chegada é o número médio de clientes que procuram o serviço por unidade de tempo. Esta taxa habitualmente denotada por λ (lambda) pode ser independente do número de clientes existente no sistema ou dependente deste. Neste último caso, se o número de clientes for n definimos por λ_n (ou seja, λ varia conforme o valor de n).

3.1.1.6 Atitude dos clientes.

Os clientes podem ter duas formas de atitudes: paciente e impaciente, sendo a impaciente dividida em duas categorias de comportamento (categorias conhecidas como desistência e abandono).

Uma chegada paciente é aquela em que o cliente entra na fila e espera quanto tempo for necessário para que o estabelecimento o atenda. Uma chegada impaciente da categoria de desistência seria o cliente que chega à fila e observa o local de atendimento e o comprimento da fila e, então, decidem ir embora. A chegada impaciente da categoria abandono são os clientes que chegam, observam a situação, entram na fila de espera e, então, depois de algum tempo, saem da fila.

Figura 1- Chegadas de Cliente em Filas



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

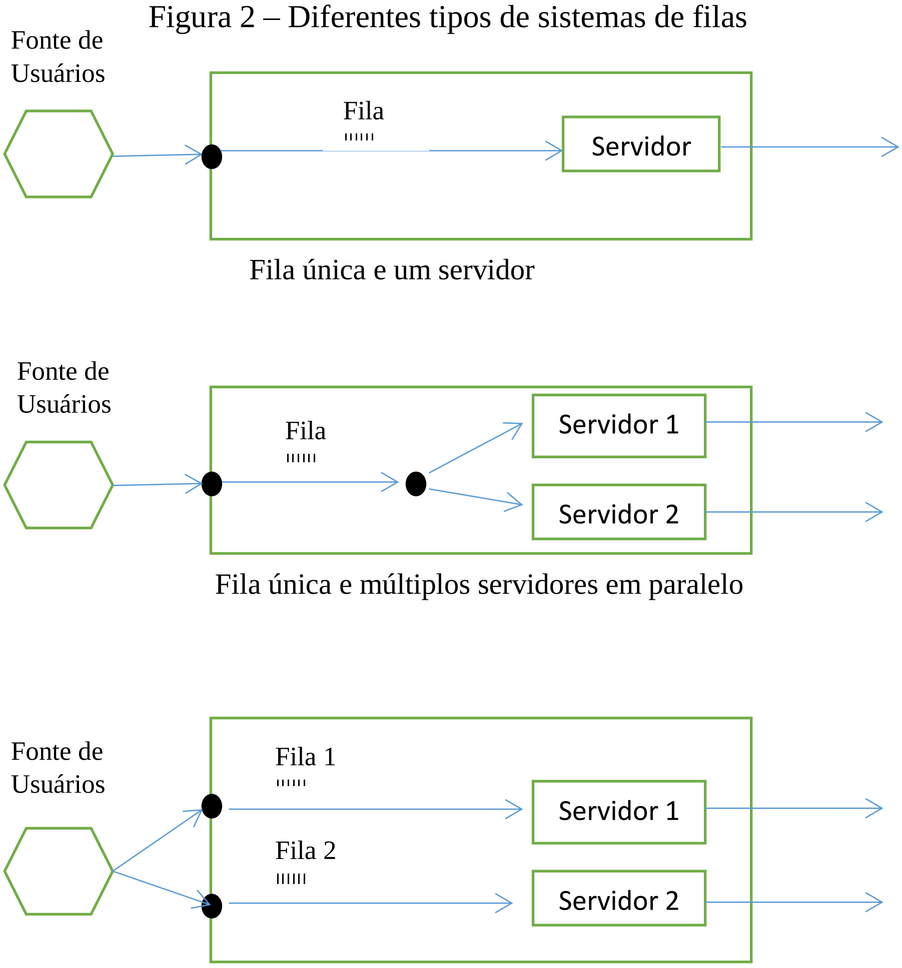
3.1.2 Fila de espera

As características da fila de espera também podem variar de sistema para sistema, como mostramos a seguir.

3.1.2.1 Número de filas.

O número de filas para um sistema pode variar entre uma fila simples, com uma única fila mesmo que o servidor tenha vários postos de atendimento, ou fila múltipla que consiste em filas únicas que se formam na frente de dois ou mais atendentes ou ainda as filas únicas que convergem em algum ponto central de redistribuição.

Figura 2 – Diferentes tipos de sistemas de filas



Múltiplas filas e múltiplos servidores em paralelo

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

3.1.3 Serviço

As características do serviço e do tipo de serviço também são importantes e podem variar:

3.1.3.1 Configuração de serviço.

A configuração de serviço corresponde ao número de servidores em paralelo (postos de atendimento), e do número de fases de atendimento.

3.1.3.2 Dimensão de serviço.

A dimensão de serviço pode ser simples (como por exemplo, em um banco) ou em grupo quando vários clientes podem ser atendidos ao mesmo tempo no mesmo servidor (como exemplo, o que ocorre em um elevador).

3.1.3.3 Distribuição do tempo de serviço.

O tempo de serviço pode ser constante (determinístico) ou aleatório (quando o tempo de atendimento é uma variável aleatória e segue uma distribuição de probabilidade presumivelmente conhecida).

3.1.3.4 Taxa de serviço.

A taxa de serviço corresponde ao número médio de clientes que podem ser atendidos por cada servidor e por unidade de tempo, e denotados por μ (mi).

Esta taxa pode ser independente do número de clientes existente no sistema ou dependente do número de clientes e, nesse caso, se o número de clientes for, por exemplo, n escrevemos μ_n (análogo ao que ocorre com a taxa de chegada).

3.1.4 Capacidade do sistema

A capacidade do sistema corresponde ao número máximo de clientes que o sistema suporta, incluindo os que estão em espera e os que estão sendo atendidos. Pode ser infinita ou finita.

Caso seja finita e o sistema esteja cheio, não pode entrar nenhum cliente antes que outro tenha saído.

3.1.5 Disciplina de atendimento

A disciplina da fila é uma regra de prioridades ou um conjunto de regras que determinam a ordem de atendimento aos clientes que estão em uma fila. As regras selecionadas podem exercer um efeito drástico no desempenho geral do sistema. O número de clientes na fila, o tempo médio de espera, a amplitude da variabilidade no tempo de espera e a eficiência do local de serviços são apenas alguns fatores influenciados pela escolha das regras de prioridades. Existem várias formas:

- **FCFS** (*First Come, First Served*) que traduzido significa "primeiro a chegar é o primeiro a ser atendido" ou FIFO (*First In, First Out*) traduzido significa "primeiro a entrar é o primeiro a sair". As filas com características FCFS (ou FIFO) são as filas onde o primeiro cliente a chegar é o primeiro a ser atendido. Estas são as filas mais comuns na vida diária (como por exemplo, acontece com as filas comuns num banco).

- **LCFS** (*Last Come, First Served*) que traduzido significa "último a chegar é o primeiro a ser atendido" ou LIFO (*Last In, First Out*) traduzido significa "último a entrar é o primeiro a sair". As filas com características LCFS (ou LIFO) são as filas onde o último cliente a chegar é o primeiro a ser atendido e a sair (como por exemplo, acontece ao se empilhar caixotes).

- **SIRO** (*Service In Random Order*) As filas SIRO são filas em que o serviço é feito de forma aleatória (como exemplos de um sorteio de casas habitacionais, o primeiro a ser sorteado "atendido" foi escolhido de uma forma aleatória).

- **PRI** (Prioritárias) As filas PRI são as filas com prioridade, onde é atribuída uma prioridade a cada cliente, tendo duas formas:
    - **Preemptivo:** Um cliente com maior prioridade será atendido imediatamente, interrompendo o atendimento ao cliente com menor prioridade. Ao terminar, o cliente de menor prioridade volta a ser atendido, podendo continuar o processo de onde parou ou então reiniciá-lo (como por exemplo, pode acontecer num serviço de emergência médica).
    - **Não-preemptivo:** O cliente com maior prioridade será colocado no início da fila, sendo o próximo a ser atendido após a saída do cliente que está nesse momento a ser atendido (como por exemplo, é a prioridade dada às grávidas em certos serviços).

- **RR** (*Round-Robin*) Nas filas que seguem a regra de Round-Robin cada cliente recebe uma fatia de tempo do serviço, dentro da qual é atendido. Após terminar esse tempo, mesmo que a atividade não tenha sido completada, o cliente é retirado e outro passa a ser atendido. O cliente cujo serviço foi interrompido retorna posteriormente ao serviço (como por exemplo, num lugar que só tem um computador e os clientes só têm direito a usá-lo por 30 minutos de cada vez).

- **GD** (*General Discipline*) As filas GD seguem uma disciplina genérica, ou seja, nestas filas não é especificada a disciplina de atendimento.

3.2 Estruturas do serviço da Fila

As filas podem apresentar diversas configurações denominadas de estruturas. Conforme é mostrado a seguir, o fluxo de itens a serem atendidos pode passar por uma fila única, múltiplas filas ou alguma combinação entre ambas. A escolha do formato depende, em parte, do volume de clientes atendidos e, em parte, das restrições impostas por exigências sequenciais que regem a ordem em que o serviço deve ser executado.

3.2.1. Canal único, fase única.

Esse é o tipo mais simples de estrutura de fila de espera, fórmulas diretas estão disponíveis para solucionar o problema para modelos mais comuns de distribuição de chegada e serviço. Quando as distribuições não são comuns, o problema é solucionado com mais facilidade pela simulação em computador. Um exemplo típico de uma situação de canal único, fase única é o de uma pessoa na barbearia na qual há apenas um barbeiro.

3.2.2. Canal único, fases múltiplas.

Uma lavadora de automóveis ilustraria esse caso porque uma série de serviços (onde terá que terminar um serviço para pegar outro como passar aspirador, molhar, lavar, tirar o sabão, secar, limpar janelas e estacionar) é realizada em uma sequência consideravelmente uniforme. Um fator fundamental no caso do canal único com serviço em séries é a quantidade de itens acumulados permitidos na frente de cada serviço referente às fases, o que, por sua vez, constituiria filas de espera separadas, o que não é o caso..

3.2.3. Canais múltiplos, fase única.

Guichês de caixas de um banco e caixas de supermercado em lojas de departamento de grande volume exemplificam este tipo de estrutura. A dificuldade com este formato é que o tempo de atendimento desigual dado a cada cliente resulta em velocidade ou fluxo desigual entre as filas. Isso faz que alguns clientes sejam atendidos antes de outros que chegaram primeiro e que possam mudar de filas. Modificar essa estrutura para garantir o atendimento às chegadas em ordem cronológica exigiria a formação de uma fila única, a partir da qual, assim que um atendente fica livre, o próximo cliente da fila é atendido.

O principal problema relacionado a essa estrutura é que ela exige um controle rígido da fila para manter a ordem e direcionar os clientes aos atendentes disponíveis. Em alguns casos, distribuir números (senhas) aos clientes na ordem de chegada ajuda a sanar esse problema.

3.2.4. Canais múltiplos, fases múltiplas.

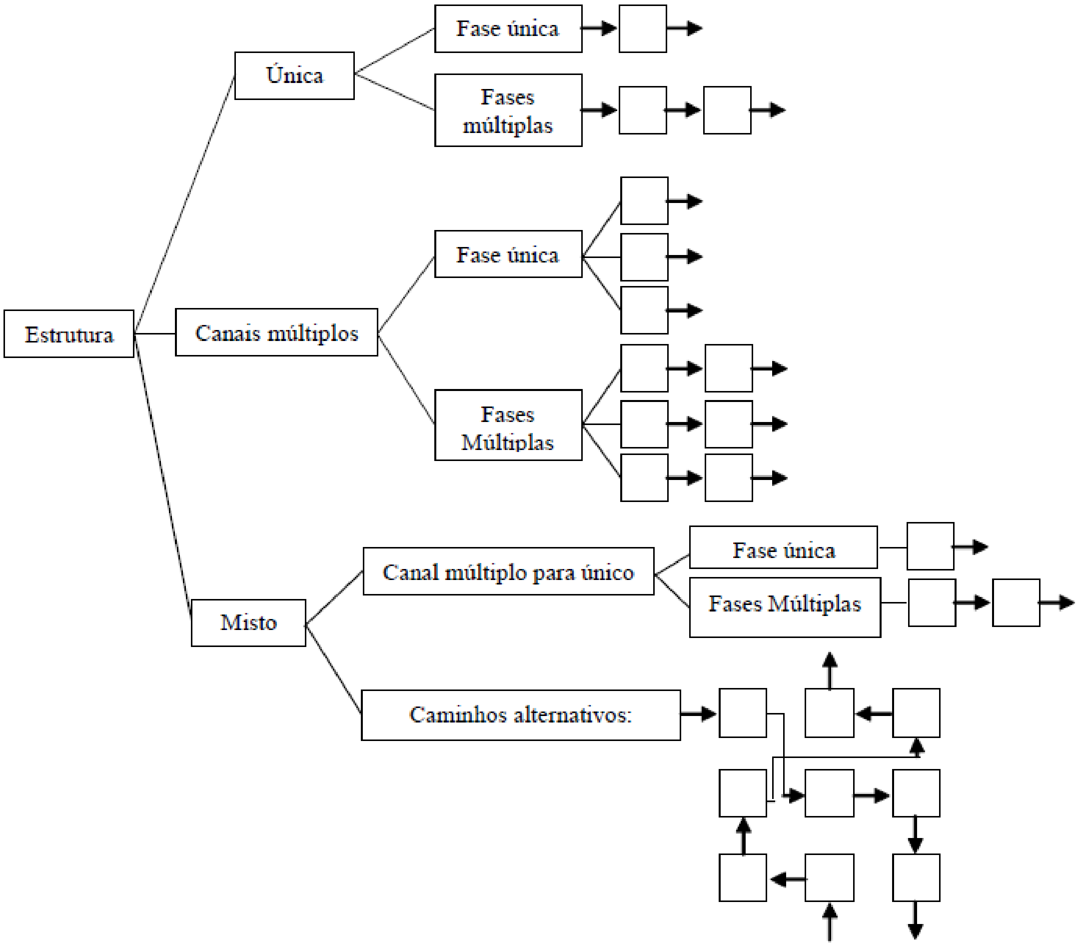
Esse caso é semelhante ao anterior, exceto pelo fato de que dois ou mais serviços são realizados em sequência. A internação de pacientes em um hospital segue esse padrão, porque uma sequência específica de etapas geralmente é seguida: contato inicial no balcão de atendimento, preenchimento de ficha, confecção de etiquetas de identificação, obtenção de leito, acompanhamento do paciente até o quarto e assim por diante. Como diversos atendentes normalmente ficam disponíveis para esse procedimento, mais de um paciente pode ser atendido por vez.

3.2.5. Mista.

Dentro dessa categoria mais geral, consideraremos duas subcategorias: (I) estruturas de canal múltiplo a único e (II) estruturas de caminhos alternativos. De acordo com (I), encontramos filas que podem ser combinadas em uma para serviço de fase única, como em uma ponte em que duas pistas convergem em uma, ou filas que se combinam em uma para serviços em canais múltiplos, como em filas de submontagem alimentando uma fila principal. No caso (II), temos duas estruturas que diferem em termos de exigências de fluxo direcional. A primeira é semelhante ao caso de canais múltiplos (fases múltiplas), com exceção de que (a) pode haver mudança de um canal para o próximo depois que o primeiro serviço foi prestado e (b) o número de canais e fases pode variar — novamente — depois da execução do primeiro serviço.

Para melhor entendimento desses conceitos é apresentada uma figura com a representação das várias configurações distintas apresentadas.

Figura 3- Estrutura das Filas



Fonte: Richard B. Chase, F. Robert Jacobs, Nicholas J. Aquilanos, 2006, p.11.

3.3 Modelos de fila de espera

Segundo Müller et al.(1953), o matemático inglês David George Kendall propôs a seguinte notação para representar cada fila de espera: A / S / m / K / N / Q onde:

- A denota a distribuição do tempo entre chegadas sucessivas (processo de chegada);
- S denota a distribuição do tempo de serviço (processo de atendimento);
- m é o número de servidores em paralelo.
- K é a capacidade do sistema.
- N é o tamanho da população.
- Q é a disciplina de atendimento

As notações A e B podem indicar, por exemplo, a distribuição exponencial (denotada por M, de Markov, sem memória), assim como a distribuição de Erlang com parâmetro n (denotada por E_n) e a distribuição Geral (denotada por G e utilizada quando a distribuição não é especificada).

As notações N e K podem ser consideradas variando de 1 a ∞. Quando e/ou estão ausentes, consideram-se elas como sendo ∞.

Muitas vezes, os três últimos símbolos são omitidos. Nestes casos, assume-se capacidade ilimitada, população infinita e disciplina de atendimento FCFS.

3.3.1 Modelos de Filas mais utilizados

3.3.1.1 Modelo M / M / 1

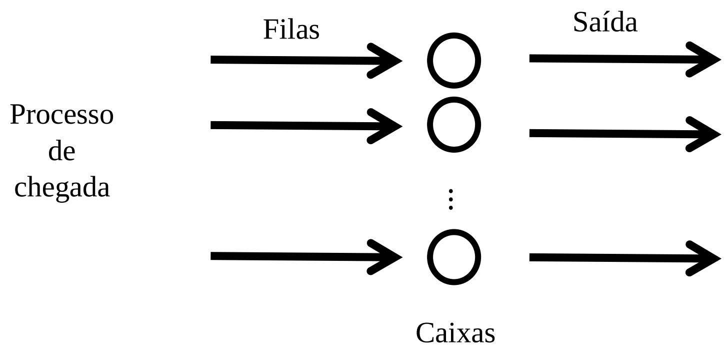
Este modelo é baseado num processo de vida e morte (entes da população chegam e saem), segundo Correia et. all (1996) "são processos sem memória na distribuição exponencial que, aplicados às filas de espera associam "vida" a uma chegada à fila e "morte" à saída de um cliente depois de atendido".

A M /M / 1 corresponde ao modelo básico onde o sistema tem uma distribuição de chegadas Poisson e dos tempos de atendimento exponencial, contém um só servidor, a capacidade do sistema e da população é infinita e a disciplina é FIFO, a mais comum, correspondendo a quem entra primeiro no sistema é o primeiro a ser atendido.

3.3.1.2 Modelo $[M / M / 1]^m$

Tal situação pode ser descrita, utilizando m filas representadas por M / M / 1, paralelas e independentes, também denotada por $[M / M / 1]^{m.}$ Aqui, a suposição é de que os caixas são idênticos e independentes com taxa de serviço μ e consideram uma taxa de chegada λ para cada uma das m filas. Neste caso supõe-se que, tendo o cliente entrado em uma fila, ele não mudará para outra. A ideia do funcionamento das filas representadas por M / M / 1 paralelas é mais bem compreendida observando a figura a seguir.

Figura 4 - Modelo $[M / M / 1]^m$

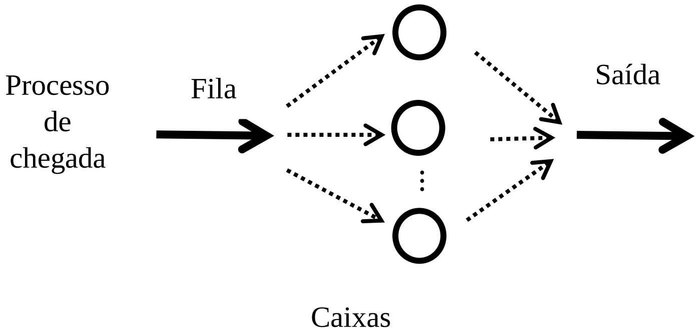


Fonte: Elaborado pelo próprio autor

3.3.1.3 Modelo M / M / m

O modelo M / M / m com fila única se trata de um sistema de filas Markoviano, o qual dispõe de caixas atendendo em paralelo e com fila única. Tal modelo é visto como muito justo para os clientes, já que se trata um modelo de disciplina FCFS. Um exemplo são os caixas rápidos de supermercado ou filas de bancos que não trabalham com uma única fila. A figura a seguir representa bem esta situação.

Figura 5 - Modelo M / M / m



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

4 CADEIAS DE MARKOV

Para o desenvolvimento deste capítulo, deve-se relembrar o conceito de probabilidade, no qual o conjunto dos possíveis resultados de um experimento aleatório é denominado de espaço amostral e é representado por Ω. Um subconjunto de Ω é chamado de evento. O conjunto $\emptyset$ é dito evento impossível e Ω evento certo. Por fim o conjunto simples $\{\omega\}$, sendo $\omega \in \Omega$, é chamado evento elementar ou unitário.

Definição Clássica: Seja Ω não vazio, e suponha cada evento elementar de Ω é igualmente provável. Então para qualquer evento $A \subset \Omega$, define-se a probabilidade de A como:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Aqui $n(A)$ representa o número de elementos do evento A e $n(\Omega)$ o número de elementos de Ω. Supondo todos os casos igualmente possíveis podemos interpretar a seguinte definição da seguinte forma:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{números casos possíveis}}$$

A partir desse conceitos, resumidamente, uma cadeia de Markov é um processo que se desenvolve no tempo em que a probabilidade deste estar em um estado e passar para outro estado em um tempo futuro (mais próximo) depende somente do estado atual do sistema, mas não dos estados em tempos passados. Em outras palavras, um estado futuro qualquer depende estritamente do estado que o precede, mas não dos anteriores.

Considere uma sequência aleatória $\{X_n\} = \{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ na qual o espaço de estados (os valores possíveis das variáveis aleatórias X_n) é discreto. Então $\{X_n\}$ é um processo aleatório de parâmetro discreto.

Uma descrição menos formal de cadeia de Markov será realizada da forma mais simples possível para que a mesma possa ser acessível mesmo com pouco conhecimento matemático e estatístico.

Descrevemos uma cadeia de Markov da seguinte maneira: seja S = {0,1,2,...,r} um conjunto finito de estados (os estados são todas as possibilidades nas quais a cadeia possa ser encontrada). O processo começa em um desses estados e move-se sucessivamente de um estado para outro. Cada movimento (mudança de estado) é chamado de passo. Se a cadeia está atualmente no estado i então ela se move para o estado j no próximo passo com uma probabilidade denotada por p_{ij} (como exemplo i=1 e j=1 representada por p_{11}). Essa probabilidade, por hipótese, não depende dos estados ocorridos nos passos anteriores, apenas do estado i atual. Logo a probabilidade p_{ij} é chamada probabilidade de transição do estado i para o estado j. O processo pode permanecer no estado que se encontra e isso ocorre com probabilidade p_{kk} (probabilidade de estar em k e depois de um passo permanecer em k).

Como exemplo, pode- se pensar que, na abertura de um banco, não há clientes na fila. Assim que o primeiro cliente chega a fila muda do estado 0 para o estado1 (aqui o estado é o número de clientes que estão na fila). Após o cliente ser atendido, se não chegou outro cliente nesse período, a fila retorna para o estado 0 (mudou do estado 1 para o 0). Assim, consecutivamente, a fila vai passando pelos possíveis estados conforme a entrada e saída de clientes.

4.1 Matriz de Transição

Definição: Considere uma cadeia de Marokv com estados 0, 1, 2, · · ·, N. Seja p_{ij} a probabilidade de transição do estado i para o estado j. Então a matriz $P_{N\times N}$ com entradas p_{ij} denomina-se matriz de transição da cadeia de Markov, com a condição de que:

$$\sum_{j=0}^{N} p_{ij} = 1, \text{para } i = 0, 1, 2, 3, \dots, N$$

Como exemplo, se a cadeia de Markov tem três estados 0, 1, 2 a matriz de transição pode ser representada como da forma abaixo:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \end{array}$$

Aqui, por exemplo, $p_{00} = P\left\{X_{(k+1)} = 0 \,\middle|\, X_{(k)} = 0\right\}$ em algum instante qualquer k na matriz de transição de um passo.

4.1.1 Matriz de Transição de Dois Passos

Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição $P = [p_{ij}]$. A probabilidade de transição do estado i para o estado j em dois passos (ou dois períodos de tempo) denota-se por $p_{ij}^{(2)}$. A matriz $P^{(2)} = [p_{ij}^{(2)}]$ obtida denomina-se matriz de transição de dois passos da cadeia de Markov.

Suponha uma cadeia de Markov com N estados (0,1, 2, ..., N), de modo que a matriz $P=[p_{ij}]$ seja uma matriz NxN. Então a probabilidade de transição do estado i para o estado j, em dois passos, é dada por:

$$p_{ij}^{(2)} = P\{X_{(k+2)} = j \mid X_{(k)} = i\},$$

que equivale a $p_{ij}^{(2)} = p_{i1} \cdot p_{1j} + p_{i2} \cdot p_{2j} + \dots + p_{iN} \cdot p_{Nj}$.

4.1.1 Matriz de Transição em n Passos

Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição $P = [p_{ij}]$. A probabilidade de transição do estado i para o estado j em n passos é denotada por $\mathbf{p_{ij}^{(n)}}$. Podemos representá-la por:

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{(k+n)} = j \mid X_{(k)} = i\}$$

Desta forma, $p_{ij}^{(n)}$ são probabilidades condicionais, estas precisam ser não negativas e desde que o processo precisa realizar uma transição em algum estado, estas precisam satisfazer as seguintes propriedades:

$$\text{para } p_{ij}^{(n)} \geq 0 \text{ e } \forall\,(i,j) = 1,2,\dots,N, \text{ temos que } \sum_{j=0}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1.$$

Uma maneira conveniente de representar todas as Probabilidades de Transição de Passo n é por uma matriz $P^{(n)}$, dada por

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{iN}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1N}^{(n)} \\ \dots & \dots & \cdots & \dots \\ p_{N0}^{(n)} & p_{N1}^{(n)} & \cdots & p_{NN}^{(n)} \end{bmatrix}$$

A matriz $P^{(n)} = [p_{ij}^{(n)}]$ obtida denomina-se matriz de transição de n passos da cadeia de Markov.

4.2 Cadeia de Markov Regular

Uma das mais importantes características exibidas por muitas cadeias de Markov é um comportamento de equilíbrio em longo prazo. Em outras palavras, "depois de um longo tempo", o comportamento probabilístico da cadeia de Markov tende a permanecer aproximadamente em um mesmo patamar. Isso significa que, em longo prazo, as probabilidades de o sistema estar em cada um dos vários estados pouco ou nada variam à medida que mais tempo é decorrido.

4.3 Vetor Fixo Probabilidade

Definição: Qualquer vetor $t = \{t_1, \ t_2, \dots, \ t_n\}$, tal que $t_n \geq 0$ e com a condição $t_1 + \ t_2 + \cdots + \ t_n = 1$ é chamado de vetor probabilidade.

Se t é um vetor de probabilidade que representa o estado de uma cadeia de Markov, então pensamos na i-ésima componente de t como a probabilidade de que a cadeia esteja no estado correspondente a essa posição (um estado s_i, por exemplo).

O principal objetivo de estudar o comportamento da uma cadeia de Markov é quando esta funciona a um grande período de tempo (ou seja, quando $n \to \infty$), sendo isto possível de se obter de duas formas. A primeira é verificar para onde tende $P^{(n)}$ quando n tende a ∞. Em certo ponto de n a matriz resultante ($P^{(n)}$) tende a tornar todas as suas linhas iguais, ficando estabilizada. Ao vetor resultante da linha dessa matriz se dá o nome de vetor fixo de probabilidade ou distribuição estacionária ou ainda distribuição limite. Sua interpretação é de que, quando n tende a ∞, a cadeia ficará uma proporção de tempo relativa à probabilidade resultante para cada estado da cadeia.

A segunda forma é dada pelo teorema a seguir.

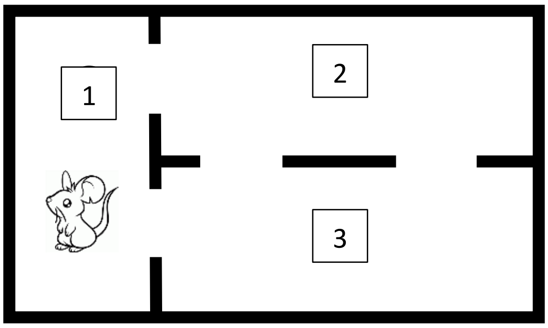
Teorema: Em uma cadeia de Markov regular, a distribuição limite da cadeia é dada pela única solução do sistema $t = tP$.

Nota-se que, para obter a distribuição limite, se trata de resolver um sistema de equações lineares.

O exemplo a seguir foi retirado e adaptado de Júnior (2014).

Um ratinho que ocupa, inicialmente, a gaiola 1 (vide figura 6) é treinado para mudar de gaiola atravessando uma porta sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer uma das portas incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Considere que o alarme ficou programado para tocar a cada minuto. Qual a distribuição da proporção de vezes que esse ratinho passou pelas gaiolas, considerando um longo lapso temporal?

Figura 6 - Labirinto



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Se p_{ij} denota a probabilidade de o ratinho passar da gaiola i para a gaiola j, com i, j = 1,2,3, então, como inicialmente ele se encontra na gaiola 1, as probabilidades de transições são $p_{11} = p_{22} = p_{33} = 0$, $p_{12} = p_{13} = {}^{1}/_{2}$, $p_{21} = p_{31} = {}^{1}/_{3}$ e $p_{23} = p_{32} = {}^{2}/_{3}$. De posse destas probabilidades, a matriz de transição fica sendo:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz possui três entradas nulas, logo com a utilização de uma planilha eletrônica (em excel, por exemplo) obtemos o produto $\mathrm{P}^{(2)} = \mathrm{P}.\mathrm{P}$, segue que:

$$\mathrm{P}^{(2)} = \mathrm{P}.\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3333 & 0{,}3333 & 0{,}3333 \\ 0{,}2222 & 0{,}6111 & 0{,}1667 \\ 0{,}2222 & 0{,}1667 & 0{,}6111 \end{pmatrix}$$

Como $P^{(2)}$ possui todas as entradas positivas e não nulas então é obtido que P representa uma Cadeia de Markov regular.

Pode-se, portanto, determinar o vetor fixo de probabilidade. Desta forma seja $t = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]$ o vetor fixo de probabilidade. Então segue que:

$$t \cdot P = t \Rightarrow [t_1 \quad t_2 \quad t_3].\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]$$

Contudo, pela multiplicação de matrizes é possível realizar uma análise de sensibilidade do processo pela evolução da convergência da cadeia. Logo, utilizando uma planilha eletrônica para resolver este problema, temos as seguintes matrizes:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}500 & 0{,}500 \\ 0{,}3333 & 0 & 0{,}6666 \\ 0{,}3333 & 0{,}6666 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{(8)} = \begin{pmatrix} 0{,}2501 & 0{,}3749 & 0{,}3749 \\ 0{,}2500 & 0{,}3945 & 0{,}3555 \\ 0{,}2500 & 0{,}3555 & 0{,}3945 \end{pmatrix}$$

$$P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0{,}3333 & 0{,}3333 & 0{,}3333 \\ 0{,}2222 & 0{,}6111 & 0{,}1667 \\ 0{,}2222 & 0{,}1667 & 0{,}6111 \end{pmatrix} \qquad P^{(16)} = \begin{pmatrix} 0{,}2500 & 0{,}3750 & 0{,}3750 \\ 0{,}2500 & 0{,}3758 & 0{,}3742 \\ 0{,}2500 & 0{,}3742 & 0{,}3758 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0{,}2593 & 0{,}3704 & 0{,}3704 \\ 0{,}2469 & 0{,}4753 & 0{,}2778 \\ 0{,}2469 & 0{,}2778 & 0{,}4753 \end{pmatrix} \qquad P^{(32)} = \begin{pmatrix} 0{,}2500 & 0{,}3750 & 0{,}3750 \\ 0{,}2500 & 0{,}3750 & 0{,}3750 \\ 0{,}2500 & 0{,}3750 & 0{,}3750 \end{pmatrix}$$

Assim, é obtido que

$$\boxed{t_1 \cong 0{,}2500} \quad \boxed{t_2 \cong 0{,}3750} \text{ e } \boxed{t_3 \cong 0{,}3750}$$

Logo, $t = [0{,}250 \quad 0{,}375 \quad 0{,}375]$.

Essa distribuição estabelece que, por exemplo, a cada 1000 vezes que o alarme toca, o ratinho visita, em média:

- A gaiola 1: 250 vezes;
- A gaiola 2: 375 vezes;
- A gaiola 3: 375 vezes.

5 PESQUISA DE CAMPO E APLICAÇÕES

Neste capítulo foram realizadas aplicações simples com filas e uma pesquisa que versa sobre o conhecimento dos alunos a respeito desse assunto.

A pesquisa foi realizada com uma classe composta por 36 alunos presentes do primeiro ano de agropecuário integrado ao ensino médio, matriculados na escola técnica ETEC Prof. Dr. Antônio Eufrásio de Toledo, localizada na cidade de Presidente Prudente, interior do estado de São Paulo, que atende alunos no ensino integrado (agropecuária, florestas e informática), sendo estes cursos de período integral, também existem cursos no período vespertino (agropecuária) e no período noturno (florestas, agroindústria, agrimensura e administração).

5.1 Desenvolvimento da pesquisa

Inicialmente os alunos receberam um questionário diagnóstico (apêndice A) precedidas de permissão pela coordenadora pedagógica da instituição. O material era composto por quatro perguntas, com o objetivo de verificar os conhecimentos básicos em relação aos conceitos de filas. Logo após a apresentação do projeto, seria novamente aplicado outro questionário (apêndice B) para comparar a evolução de cada aluno.

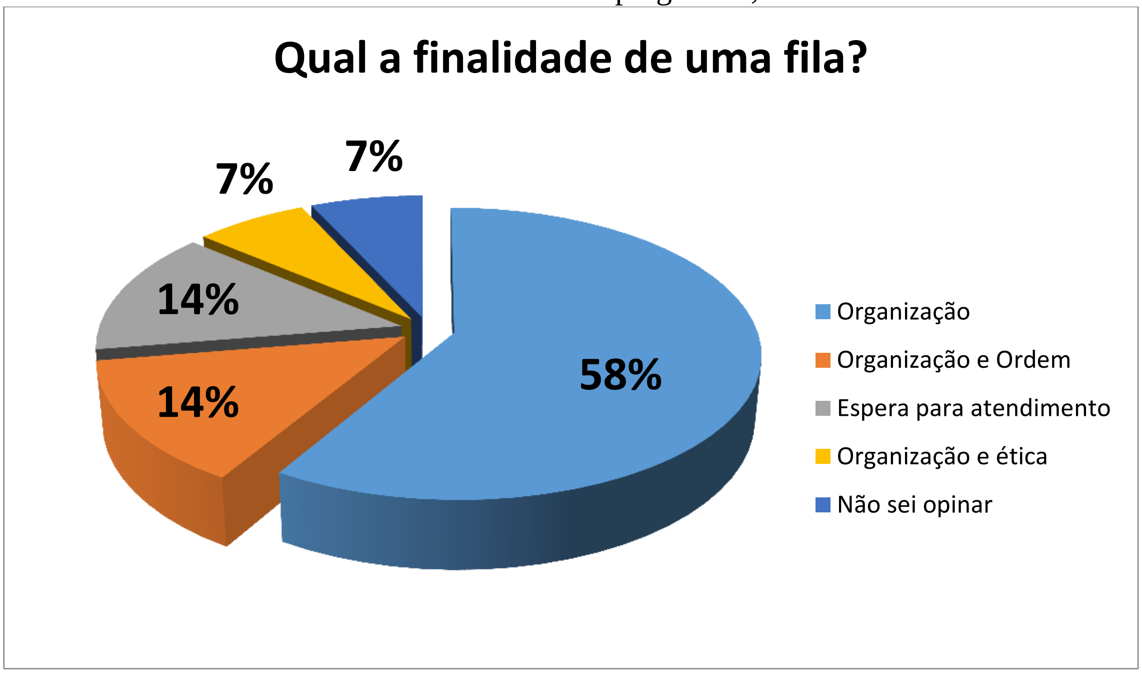
A mostra do projeto foi constituída por uma fala inicial e um debate com os alunos sobre a necessidade de filas e uma apresentação em *Power Point* sobre o tema trabalhado. Esta apresentação continha a origem do estudo da Teoria de Filas e a importância deste estudo, junto das aplicações desta teoria no ramo da telefonia, transportes, serviços e outros. Foi mostrada a notação de Kendall sobre os elementos de formação de filas constituídos em: distribuição do tempo de chegadas sucessivas, distribuição do tempo de serviço, número de atendentes, capacidade do sistema, tamanho da população e a disciplina de atendimento, sendo desta ultima citada comentada os três principais tipos de atendimento (FIFO, LIFO e PRI). Na sequência foi feita uma fala sobre alguns exemplos em que ocorrem problemas em filas de espera, e de suas consequências, tanto para quem desobedeça às regras estabelecidas, quanto pra quem se sinta lesado em alguma ocorrência. Ainda, na apresentação, foram mostrados aos alunos dois vídeos, sendo o primeiro, sobre a questão da troca de filas que se baseia na divertida “Lei de Murphy”: *A fila ao lado sempre anda mais rápido*. O segundo vídeo, mais ilustrativo e chamativo, versa sobre os tipos e formas de filas, realizado por Thiago M. Leandro, mestrando em Engenharia de Transportes no IME

(Instituto Militar de Engenharia). O objetivo do primeiro vídeo foi utilizado como objeto de diversão ilustrativa, para prender a atenção dos alunos. O segundo vídeo introduz uma visão mais técnica e educativa a respeito do tema estudado.

5.1.1 Resultado do teste inicial

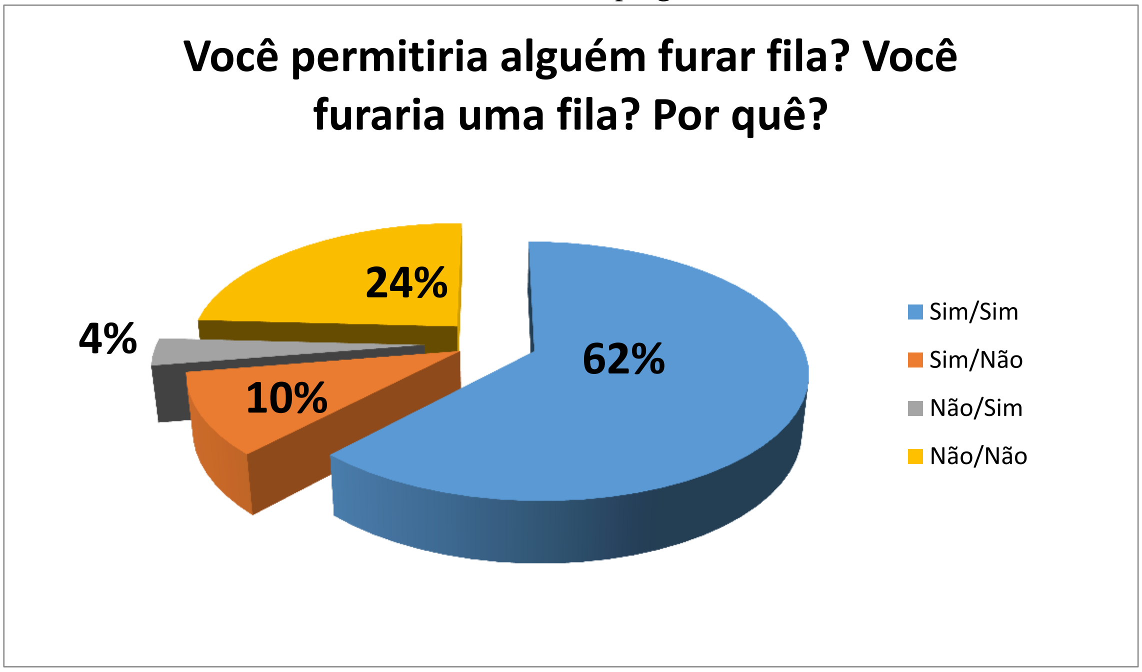
Antes da aplicação da pesquisa os alunos foram comunicados sobre as atividades que seriam realizadas, assim como a data em que ocorreriam. No dia da realização do primeiro teste apenas 29 alunos estavam presentes. Os resultados obtidos podem ser visualizados por meio dos gráficos abaixo.

Gráfico 1 - Resultado da pergunta 1, teste 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Gráfico 2 - Resultado da pergunta 2, teste 1



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Gráfico 3 - Resultado da pergunta 3, teste 1

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Gráfico 4 - Resultado da pergunta 4, teste 1

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

5.1.2 Análise do teste inicial

A coleta de dados realizada antes das atividades propostas envolvendo o conhecimento básico sobre filas, expostas nos gráficos conforme mostrados na Seção 5.1.1, nos permite realizar as observações que seguem.

Na Pergunta 1, ao serem questionados sobre a finalidade de uma fila, era esperado que os alunos refletissem e elaborassem uma resposta. Pode-se observar por meio do Gráfico 1, que 7% dos alunos deixaram a pergunta sem resposta e 93% dos alunos apresentam uma resposta sobre filas. Deste percentual, 21% dos alunos têm uma ideia mais avançada do que seja fila (são os 7% que apontaram organização e ética e os 14% que apontaram organização e ordem). Com bases nesses resultados e na reação dos alunos durante a aplicação do teste, vemos que possuem certo conhecimento sobre o assunto abordado.

Na Pergunta 2 os alunos forneceram uma informação mais pessoal, sobre furar fila e consentir outras pessoas a furarem a fila. Durante a aplicação o professor solicitou que todas as perguntas fossem respondidas com sinceridade. Como podemos ver no

Gráfico 2, 62% dos alunos já furaram filas e permitiram outras pessoas a furarem a fila, enquanto que 24% dos alunos não furaram fila e não permitem essa infração. Dos 14% restantes, tem-se que 4% já furaram fila, mas não permitem que outros furem a fila e 10% não furaram fila, mas permitem que outras pessoas furem a fila. Em muitos destes casos os alunos disseram permitir que pessoas furem a fila somente no caso de pessoas que possuem alguma deficiência, idade avançada ou mulheres gestantes ou com crianças de colo passaram a sua frente.

Na Pergunta 3 foi questionado se a fila é a melhor opção de se organizar, ou se existe uma outra forma que organize melhor e a justificativa. Por meio do Gráfico 3 percebemos que 66% dos alunos acreditam que a fila seja a melhor forma para se organizar mas não justificaram o porquê da sua escolha. Por outro lado, 34% dos alunos revelaram que a fila não é a melhor opção, onde optaram por distribuição de senhas, horários marcados ou mais servidores.

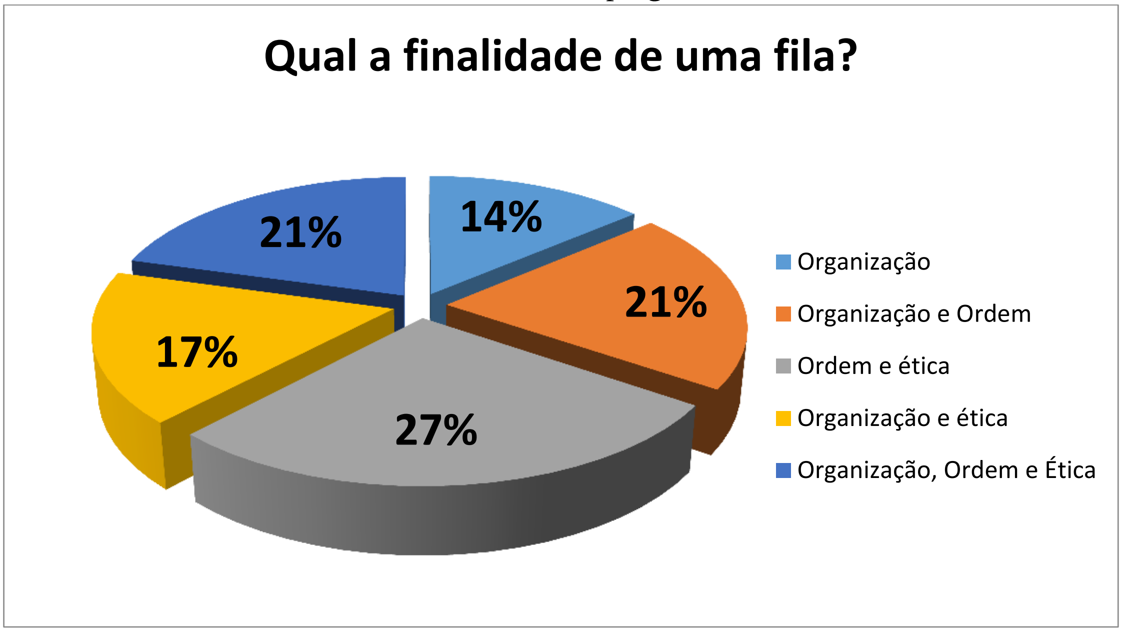
Na Pergunta 4 o assunto abordado foi a relação entre filas convencionais e preferenciais. Qual seria a melhor forma de fila, apenas convencional ou ambas as filas e sua justificativa. Conforme o Gráfico 4, 76% dos alunos acreditam que a melhor opção é de se ter os dois tipos de fila, enquanto que 10% creem que a melhor opção seria apenas filas convencionais e, ainda, 14% não souberam opinar.

Com base nos dados obtidos pelas perguntas, pode-se observar que a maior parte dos alunos entende um pouco sobre a ideia de filas, mas não consegue justificar esse conhecimento. De forma geral, fica compreendido que os alunos parecem ter um conhecimento usual, no sentido comum, sobre as filas e sua utilização. Esta compreensão provavelmente se deve ao senso comum, ou conhecimento cotidiano, como ocorre naturalmente com boa parte das pessoas.

5.1.3 Resultado do teste final

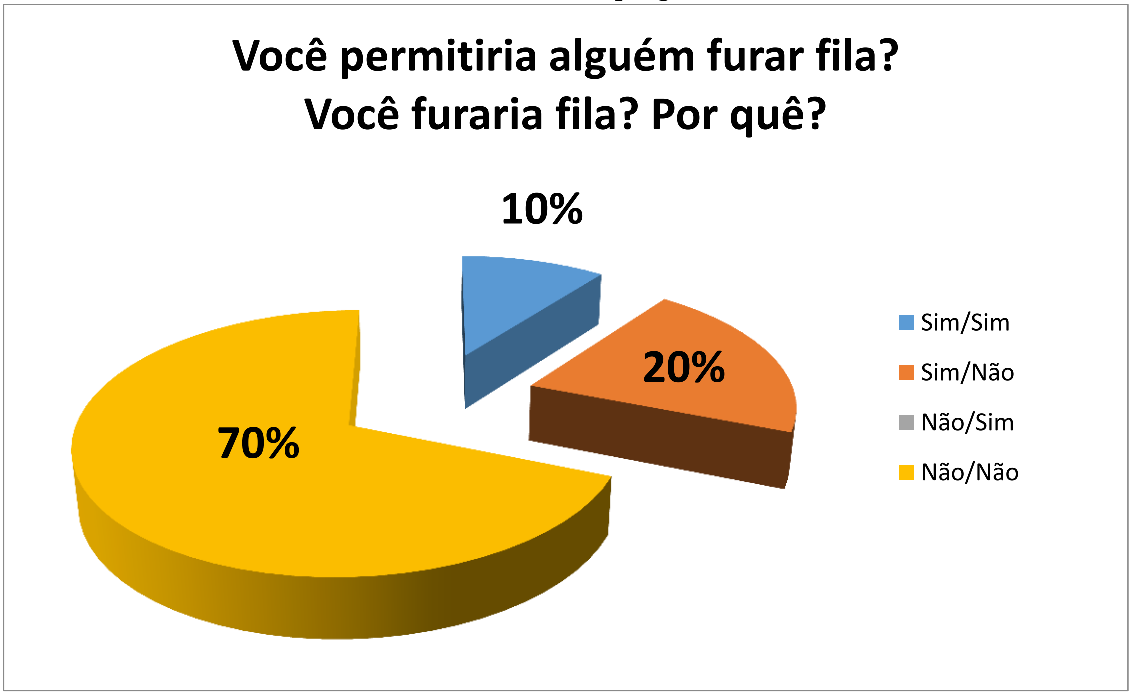
A coleta de dados final foi realizada após a aplicação da atividade proposta. A aplicação ocorreu quando os mesmos 29 alunos do teste anterior estavam presentes. Havia, ainda, mais três alunos que não realizaram o teste anterior, logo suas respostas foram descartadas. Os resultados obtidos podem ser visualizados por meio dos gráficos abaixo.

Gráfico 5 - Resultado da pergunta 1, teste 2



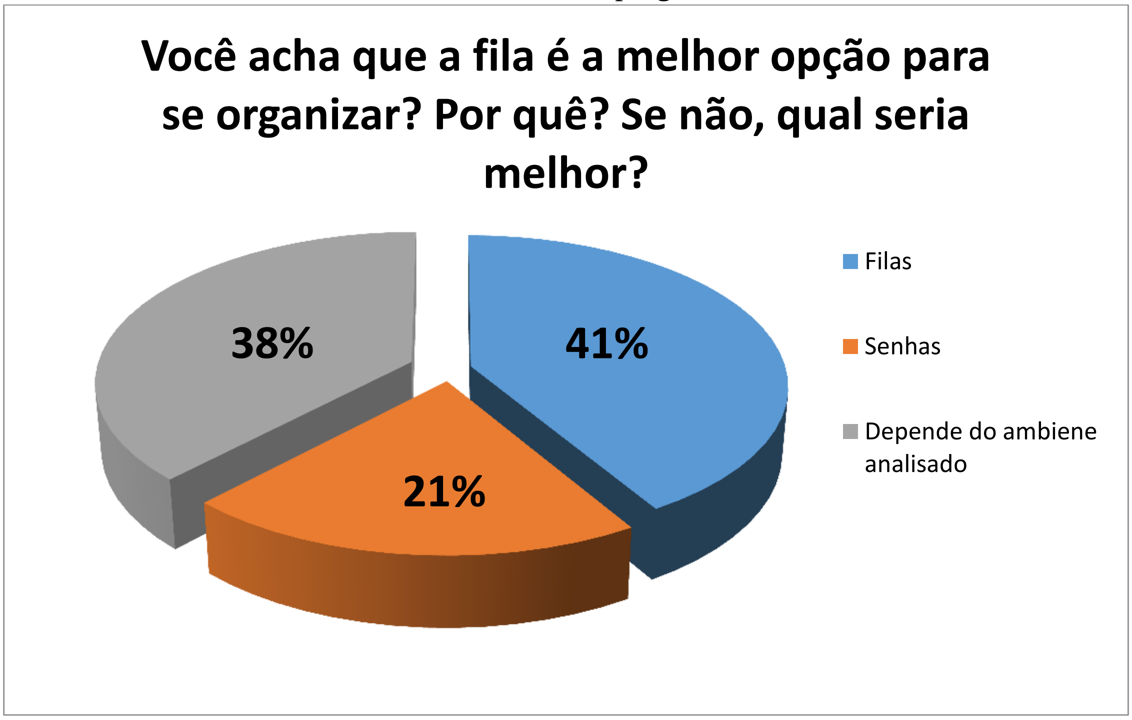
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Gráfico 6 - Resultado da pergunta 2, teste 2



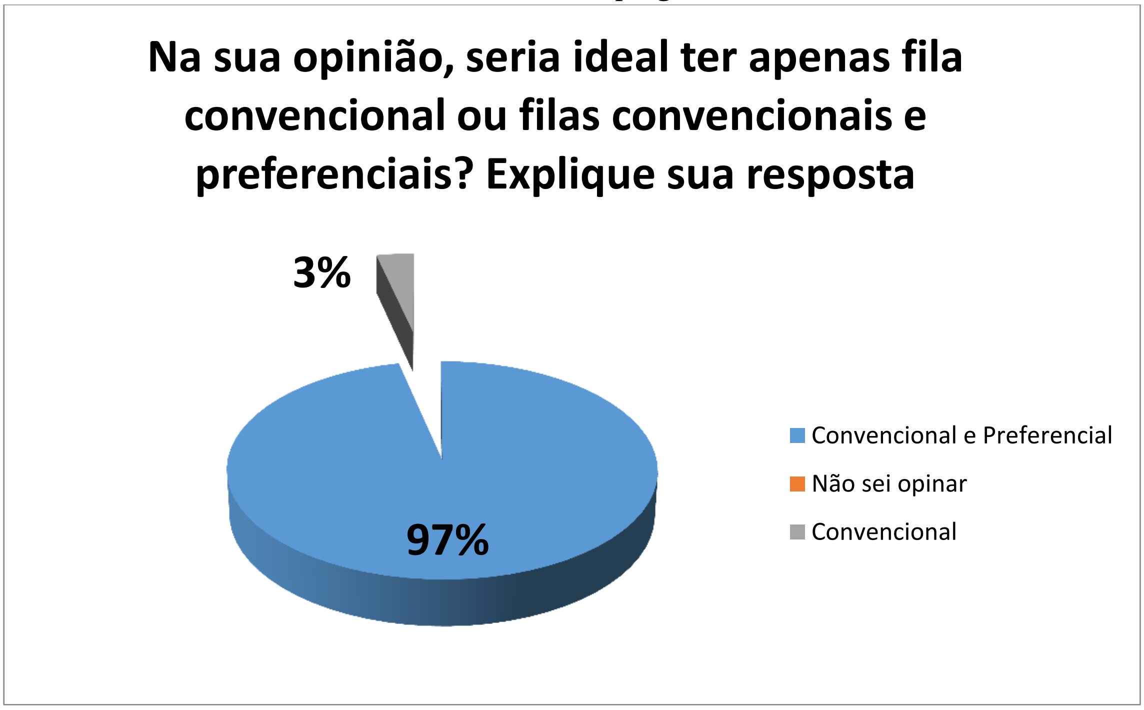
Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Gráfico 7 - Resultado da pergunta 3, teste 2



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Gráfico 8 - Resultado da pergunta 4, teste 2



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

5.1.4 Análise estatística do teste final

A coleta de dados realizada posteriormente às atividades propostas, expostas nos gráficos conforme mostrados na Seção 5.1.3, em comparação com os dados referentes ao teste inicial mostrado na Seção 5.1.2 nos permite observar que:

Em relação a Pergunta 1, no primeiro teste 7% dos alunos não sabiam opinar sobre a finalidade da fila, já no teste final esse número foi zerado, como podemos observar no Gráfico 5. Ainda, em comparação ao teste inicial, apenas 21% dos alunos apresentaram uma resposta mais avançada em relação ao conceito de fila, enquanto no teste final este número aumentou para 86% dos alunos, ainda tendo que 14% acham que a sua finalidade é apenas organização.

A Pergunta 2 foi alterada do teste inicial para o teste final onde incialmente se perguntava se o aluno já furou fila e se permitiu alguém furar fila mudou para se o aluno furaria fila e se permitiria furar fila. Inicialmente foi apresentado um alto percentual de alunos que furavam e permitiam furar filas (62%), enquanto que depois do projeto trabalhado este número caiu para 10%. Uma das respostas dos alunos foi que "só iria permitir que alguém entrasse na sua frente se a pessoa fosse da classe de prioridade, mesmo ela tendo uma fila especial".

Na Pergunta 3 a maior parte dos alunos (66%) acreditavam que a fila é a melhor opção de se organizar, mas no teste final este número se reduziu para 41% pois o projeto apresentou para os alunos a questão do layout do ambiente, que depende da estrutura do lugar que receberá essas pessoas, sendo que 38% dos alunos lembraram deste enfoque. Um aluno justificou que "antes de analisar a questão da fila era preciso prestar atenção no espaço físico onde esta fila estará, assim pode ser analisa qual a melhor forma de organização".

Na pergunta 4, 14% dos alunos não sabiam opinar, agora este número caiu para 0%. E os alunos que disseram preferir apenas filas convencionais (10%) foram reduzidos para 3%, pois o projeto trabalhou com educação em filas, mostrando a questão das filas preferencias.

Assim refletiu positivamente nos resultados e respostas dos alunos.

Para estabelecer se há diferenças entre as situações dos alunos avaliados foram aplicados dois questionários, antes e depois da apresentação de material instrutivo a respeito de sistemas de filas, suas aplicações e utilizações de modo correto e justo aos seus usuários.

A análise estatística adequada para esta situação de comparação do mesmo aluno antes e depois de receber a apresentação do material instrutivo é típica de dados pareados. Esta se encontra na situação em que os dados são pareados do ponto de vista de que são do mesmo indivíduo e relativas a dois momentos, aqui denominados simplesmente de antes e depois. Esta análise tem como objetivo avaliar estatisticamente se há diferença significativa entre os dois instantes: antes e depois do questionário, atribuindo-se scores (notas de 0 a 10) para cada um dos momentos.

Os dados coletados dos alunos são referentes a vinte e nove indivíduos que responderam aos dois questionários e podem ser visualizados na tabela 2 abaixo.

Tabela 1 - Tabulação de notas dos alunos nas duas avaliações.

Questionário 1	Questionário 2	Diferenças
3,75	6,00	2,25
6,75	9,25	2,50
3,75	5,75	2,00
3,75	6,00	2,25
4,00	6,00	2,00
4,00	5,75	1,75
3,75	6,00	2,25
4,00	7,50	3,50
3,75	5,50	1,75
3,75	6,00	2,25
3,25	5,75	2,50
3,75	5,50	1,75
4,00	7,25	3,25
3,75	6,25	2,50
3,75	5,75	2,00
3,75	8,75	5,00
3,75	6,25	2,50
4,50	5,75	1,25
5,00	7,25	2,25

3,75	5,75	2,00
3,25	6,25	3,00
3,75	6,00	2,25
3,75	7,00	3,25
3,75	5,75	2,00
4,50	6,00	1,50
4,25	8,00	3,75
3,75	5,75	2,00
4,50	7,00	2,50
3,75	7,75	4,00

Testar se há diferença, em termos de testes estatísticos, significa testar estatisticamente uma hipótese H_0 de forma que:

$$H_0: \mu_d = 0 \ \textit{versus} \ H_1: \mu_d \neq 0$$

na qual μ_d é a média das diferenças. Uma vez que não se aceita H_0 pode-se dizer estatisticamente que $\mu_d \neq 0$, ou seja, a média das diferenças não pode ser considerada como zero. Este teste é conhecido como Teste t para dados pareados (ARNOLD, 1990) estando bem adequado à situação em que estes dados foram planejados em coleta, para esta finalidade. É muito comum que esses testes tenham suposições e neste caso isto também ocorre. Para a aplicação deste teste é necessário que os dados tenham uma distribuição normal, e isto também pode ser testado aplicando-se outro teste, denominado como Teste estatístico de Ryan-Joiner (CONOVER, 1999).

Em muitas ocasiões o pesquisador, por meio de gráficos e tabelas, fica tentado em deduzir que existem diferenças significativas entre duas situações, como ocorre aqui. É possível observar na Tabela 1 que não há pontos com valores negativos na coluna Diferenças, contudo estas podem não ser tão grandes quanto se pode achar simplesmente observando-as. Logo, de acordo com a teoria e para maior segurança nas conclusões, é necessário que testes sejam aplicados.

Uma vez decidido que serão realizados testes estatísticos, uma alternativa é a utilização do software estatístico Minitab. Por meio do teste Ryan-Joiner foi possível verificar que a distribuição normal não foi aceita e, portanto, tornando as conclusões posteriores não válidas. Para resolver este problema é possível verificar o motivo da não aceitação, geralmente pontos que estão fora do esperado da distribuição normal, os denominados *outliers*. Verificou-se que um ponto muito fora das Diferenças é um valor 5, duas vezes maior que a média destes dados. Foi decidido então retirar este ponto e refazer a análise com os 28 restantes. Feito este procedimento, foi possível confirmar que os dados da coluna Diferenças têm comportamento de uma distribuição normal com nível de significância de 95%, bastante seguro para continuar a análise. Assim sendo, as conclusões obtidas no Teste *t* para os 28 dados pareados podem ser consideradas como estatisticamente válidas.

Deve-se ressaltar que esta análise está sendo feita com a diferença entre Depois e Antes às atividades propostas (denominadas Diferenças). Assim sendo, se a diferença for significativamente diferente de zero (não rejeitando $H_1: \mu_d \neq 0$) implica que, em média, os valores da coluna Depois são significativamente maiores que a coluna Antes e, portanto, houve um aumento de conhecimento por parte dos alunos após a apresentação de material instrutivo a respeito de sistemas de filas.

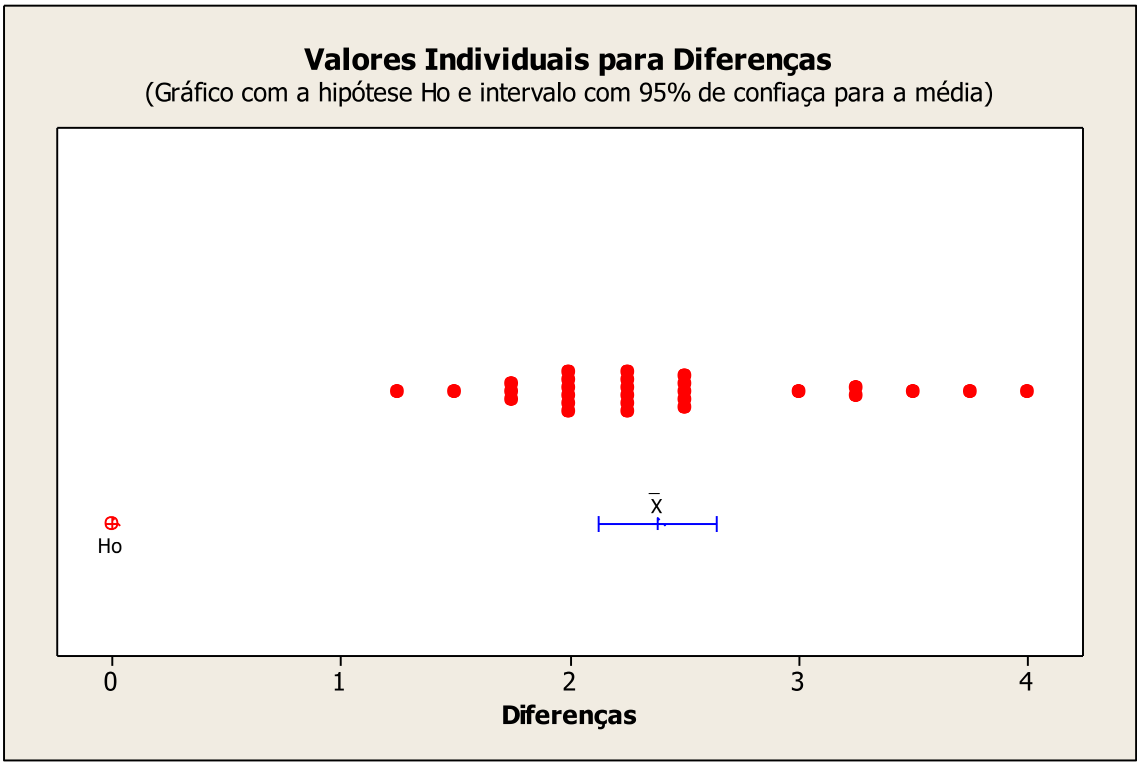
Um fato interessante é que, retirar o ponto 5 seria prejudicial ao que se tenta demonstrar, ou seja, esta retirada é danosa quando se pensa que quanto maior o ganho da coluna Diferenças seria mais fácil demonstrar que houve um aumento de conhecimento por parte dos alunos. Contudo, foi necessário para validar a suposição de normalidade e as conclusões do Teste *t* para dados pareados.

Com a suposição de normalidade satisfeita pode-se agora testar o ganho na aprendizagem, novamente utilizou-se o Minitab e o Teste *t* para dados pareados. Os resultados estão sintetizados na figura 7 a seguir.

Pela Figura 7 pode-se observar que o intervalo de confiança (intervalo em azul) está bem distante do valor zero em teste (sinal em vermelho, no canto inferior esquerdo). O intervalo com 95% de confiança obteve valores entre 2,126 e 2,642, centrado na média de 2,384. Pode-se observar que, após a apresentação de material instrutivo a respeito de sistemas de filas, a média saltou de 4 para cerca de 6,4, mesmo tendo retirado um ponto alto. Desta forma, pode-se dizer que há um ganho aproximado de 60% de conhecimento adquirido em relação à situação anterior dos alunos.

Os resultados apresentados fornecem fortes subsídios em afirmar que houve um ganho significativo de conhecimento por parte dos alunos.

Figura 7 - Análise estatística para as diferenças obtidas entre as avaliações Depois e Antes sem o ponto 16.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

O processo de educação, conhecimento, interpretação e avaliação de um sistema de filas podem ser interpretados pelos alunos com conceitos básicos. Avaliar em situações práticas o motivo pela qual os sistemas de filas são montados, o que é justo socialmente e quais os fatores que os influenciam é parte integrante desse tipo de educação e pode funcionar como elemento multiplicador, ofertando exemplos a outros usuários e, possivelmente, mudando o comportamento de mais indivíduos.

5.2. Aplicações

Em algumas situações as filas não se apresentam em equilíbrio (por exemplo, mais chegadas do que se pode atender causando um aumento contínuo na fila). Também, podem apresentar a característica de depender do instante em que se encontram (o número de usuários depende do instante em que o sistema se encontra, como exemplo, os chamados “horários de pico”). Como exemplo pode-se citar as chegadas em um banco, dependendo do horário (geralmente na abertura e no fechamento de atendimento) pode haver mais clientes que a média diária. Com as técnicas usuais de análise de filas esta situação pode não ser resolvida ou, pelo menos, ficar bem mais complexa de ser estudada. Contudo, em outras situações, quando o comportamento da fila pode ser descrito pelo tempo, pode-se aplicar alguma técnica de modelagem simples.

No presente estudo, foram coletados dados da fila do refeitório da ETEC Prof. Dr. Antônio Eufrásio de Toledo, onde este é aberto às 11h30min e tem fechamento às 12h45min. Com o término das aulas às 11h20min os alunos já se posicionam na fila para o almoço. A coleta começou quando o primeiro aluno chegou até o início da fila (11h20min), assim a cada um minuto era contabilizado o número de alunos que estavam presentes na mesma (Tabela 2). Foi perceptível durante a coleta que a maior concentração de alunos foi no intervalo dos 30 aos 50 primeiros minutos (11h50min às 12h10min). A coleta foi encerrada quando chegou o último estudante a fila que foi às 12h41min, após este horário não surgiu nenhum outro aluno.

A Tabela 2, a seguir, apresenta o tempo decorrido (em minutos) e o número de pessoas na fila naquele instante.

Como recurso de análise para a situação descrita anteriormente foi proposto utilizar um ajuste do número de pessoas na fila por meio dos instantes de tempo. Vários *softwares* estão disponíveis para realizar um ajuste polinomial, tais como os pagos LAB – Fit e Minitab, e os gratuitos SciDavis, Winplot, Octave e Gnuplot. Para este trabalho foi utilizado o software estatístico Minitab, bastante conhecido e utilizado inclusive para análises estatísticas mais complexas. O modelo ajustado foi

$$\mathrm{p(t)} = -11{,}76 + 4{,}204\mathrm{t} - 0{,}09244\mathrm{t}^2 + 0{,}000516\mathrm{t}^3$$

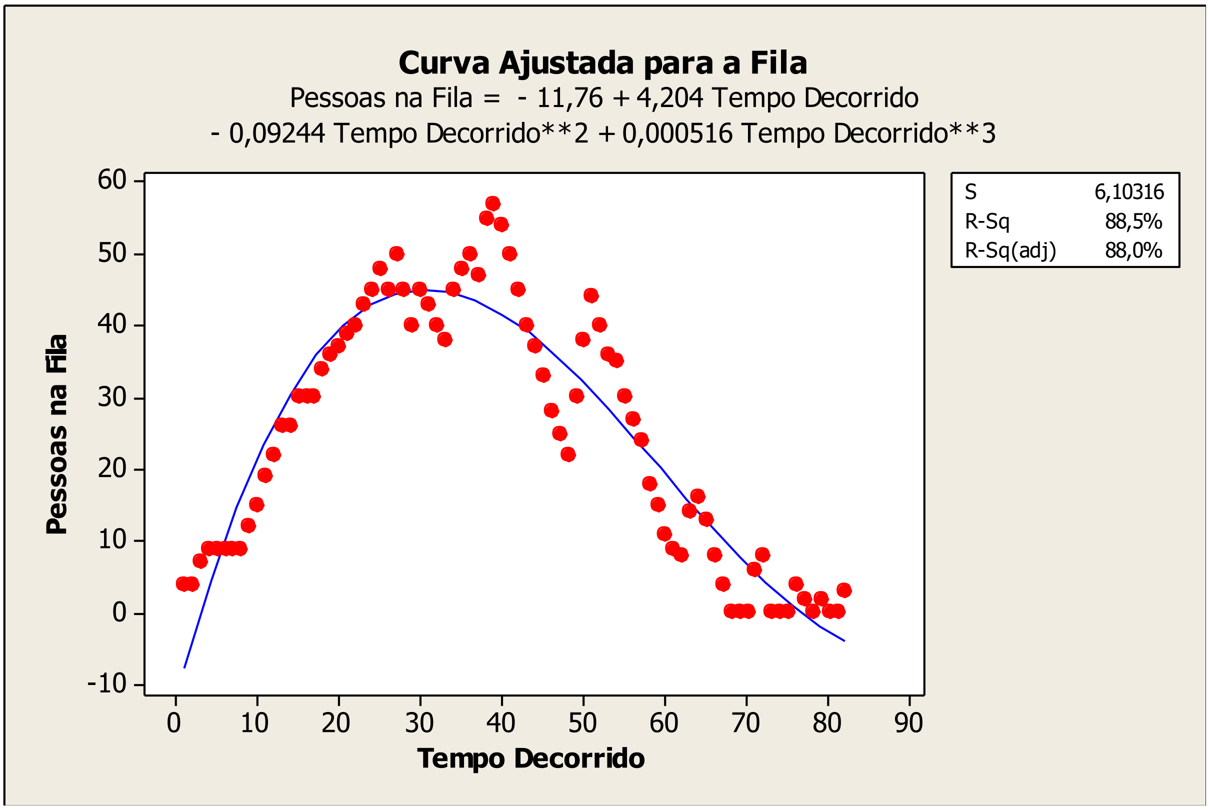
no qual p(t) representa o número de pessoas na fila, t é o tempo decorrido a partir do início do processo com termos de primeiro a terceiro graus (o tempo decorrido se inicia quando há a presença de pessoas esperando na fila). O software fornece algumas informações a respeito da qualidade de ajuste e, neste caso, uma das informações é que cerca de 88% dos dados reais podem ser satisfatoriamente explicados pelo ajuste obtido.

Também, fornece um gráfico (Figura 8 a seguir) do ajuste (em azul) e dos pontos reais (em vermelho).

Tabela 2 – Número de pessoas na fila do refeitório.

Tempo	Número de pessoas na fila	Tempo	Número de pessoas na fila
1	4	42	45
2	4	43	40
3	7	44	37
4	9	45	33
5	9	46	28
6	9	47	25
7	9	48	22
8	9	49	30
9	12	50	38
10	15	51	44
11	19	52	40
12	22	53	36
13	26	54	35
14	26	55	30
15	30	56	27
16	30	57	24
17	30	58	18
18	34	59	15
19	36	60	11
20	37	61	9
21	39	62	8
22	40	63	14
23	43	64	16
24	45	65	13
25	48	66	8
26	45	67	4
27	50	68	0
28	45	69	0
29	40	70	0
30	45	71	6
31	43	72	8
32	40	73	0
33	38	74	0
34	45	75	0
35	48	76	4
36	50	77	2
37	47	78	0
38	55	79	2
39	57	80	0
40	54	81	0
41	50	82	3

Figura 8 - Curva ajustada descrevendo o número de pessoas na fila em função do tempo decorrido no processo.



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Pela Figura 8 pode-se observar que a curva ajustada é capaz de capturar o comportamento do número de pessoas na fila de modo a poder ser utilizado como base de informação para um usuário que pretenda se apresentar nesta fila. Como exemplo, se o tempo decorrido estiver em 40 minutos, segundo o modelo obtido chega-se a um resultado de aproximadamente 42 pessoas na fila. Evidentemente há uma subestimação, este ponto foi escolhido propositadamente por ser um *outline* (ponto fora da linha), o ponto real é de 54 pessoas na fila. Contudo, de forma geral, o modelo descreve bem grande parte dos pontos.

A utilização do modelo ajustado anteriormente pode se dar de várias formas, de um usuário tentando prever a situação em que encontrará a fila, o responsável pelo atendimento em tentar gerenciar essa situação, entre outras.

Uma situação não tão usual é educar os usuários em relação ao comportamento do sistema de fila. Quando faltam recursos para acelerar o atendimento de forma a não haver um acúmulo grande de pessoas na fila pode-se informar aos usuários sobre o comportamento na fila. Desta forma este pode decidir, diante de suas possibilidades de horário, qual seria o melhor momento de se inserir na fila. O ideal é que a curva modelada fosse uma linha paralela ao eixo X, assim o sistema seria justo e equitativo na espera dos usuários. A informação pode propiciar uma situação possivelmente próxima a essa se os usuários mudarem seu comportamento em relação aos horários, se isto for possível por parte dos mesmos.

Em outras situações, as filas têm um comportamento diferente da anterior, elas permanecem de forma que o número de pessoas na fila não depende do tempo. Isto é tratado na próxima aplicação.

No segundo exemplo considerado, imaginemos uma situação como sendo a análise de pessoas que estão na espera da fila de um supermercado. Ainda que para este a legislação determine que o atendimento não possa ultrapassar 30 minutos, estes estabelecimentos têm buscado uma melhoria na sua forma de atendimento por meio da aplicação de gerenciamento de filas.

O exemplo citado a seguir foi retirado e adaptado da dissertação de Rinaldi (2007).

Um gerente gostaria de fazer uma análise de quantas pessoas ficam esperando nas filas de atendimento após a saída de um cliente. Após observar um período de um dia de atendimento foram retiradas as frequências para mudanças de estados (de 0 para 0, de 0 para 1 e assim consecutivamente) sendo obtida a Tabela 3.

Tabela 3 – Dados coletados de pessoas na fila após o atendimento.

Estados de Transição	Frequências	Estados de Transição	Frequências	Estados de Transição	Frequências
$0 \to 0$	80	$1 \to 0$	38	$2 \to 0$	10
$0 \to 1$	43	$1 \to 1$	51	$2 \to 1$	4
$0 \to 2$	7	$1 \to 2$	8	$2 \to 2$	2
Total	130	Total	97	Total	16

Podemos identificar três estados para esta cadeia, de acordo com a quantidade de pessoas na fila, a saber: 0, 1 e 2. Os valores 0 representam não haver nenhum cliente após o término do atendimento, 1 quando se tem apenas um único cliente após o término do atendimento e 2 quando se tem dois clientes após o término do atendimento. Com esta situação, pode ser feita a contagem (frequência) de ocorrência de mudança para todas as combinações de estados. Como exemplo, houve 80 mudanças que mantiveram o estado 0 (de 0 para 0), 38 mudanças do estado 1 para o estado 0 e assim sucessivamente.

Com as frequências de mudanças conhecidas, calculam-se as probabilidades frequentistas das mudanças de estados e é obtida a respectiva matriz de transição.

Assim, a matriz de transição obtida para a cadeia de Markov acima é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{80}{130} & \frac{43}{130} & \frac{7}{130} \\ \frac{38}{97} & \frac{51}{97} & \frac{8}{97} \\ \frac{10}{16} & \frac{4}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix}$$

Esta matriz possui todas as entradas não nulas, logo representa uma Cadeia de Markov regular.

Pode-se, portanto, determinar o vetor fixo de probabilidade. Desta forma seja $t = [t_0 \quad t_1 \quad t_2]$ o vetor fixo de probabilidade. Então segue que:

$$t \cdot P = t \Rightarrow [t_0 \quad t_1 \quad t_2] . \begin{pmatrix} \frac{80}{130} & \frac{43}{130} & \frac{7}{130} \\ \frac{38}{97} & \frac{51}{97} & \frac{8}{97} \\ \frac{10}{16} & \frac{4}{16} & \frac{2}{16} \end{pmatrix} = [t_0 \quad t_1 \quad t_2]$$

Utilizando planilha eletrônica para resolver este problema, temos as seguintes probabilidades:

$$P = \begin{pmatrix} 0,6154 & 0,3308 & 0,0538 \\ 0,3917 & 0,5258 & 0,0825 \\ 0,625 & 0,25 & 0,125 \end{pmatrix} \qquad P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,5419 & 0,3910 & 0,0671 \\ 0,4986 & 0,4267 & 0,0748 \\ 0,5607 & 0,3695 & 0,0699 \end{pmatrix}$$

$$P^{(4)} = \begin{pmatrix} 0,5262 & 0,4035 & 0,0703 \\ 0,5248 & 0,4046 & 0,0706 \\ 0,5272 & 0,4026 & 0,0701 \end{pmatrix} \qquad P^{(8)} = \begin{pmatrix} 0,5257 & 0,4039 & 0,0704 \\ 0,5257 & 0,4039 & 0,0704 \\ 0,5257 & 0,4039 & 0,0704 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{t_0 \cong 0,5257} \quad \boxed{t_1 \cong 0,4039} \ e \ \boxed{t_2 \cong 0,0704}$$

Essa distribuição estabelece que, após um término de atendimento, em média, tem-se a probabilidade de 0,5257 de nenhuma pessoa na fila, 0,4039 de se ter apenas uma pessoa na fila e 0,0704 de se ter duas pessoas na espera.

Este conhecimento pode ser utilizado como base para gerenciar esta fila. Como exemplo, a probabilidade de não encontrar clientes na fila é alto, isto é bom para quem se utiliza da fila, pode representar um diferencial de atendimento para o estabelecimento.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo buscou conscientizar os alunos acerca da fila de espera. Teve a intenção de trazer informações do porquê de sua utilização e mostrar que esta aplicação está presente em diversas ocasiões.

Pode-se comprovar, através da análise do questionário, que por intermédio da apresentação e da devida educação referente ao conteúdo, é possível fazer com que os alunos aprendam de forma significativa, o assunto tratado.

Os objetivos principais foram alcançados, isto é, a conscientização e mudança de comportamento dos alunos durante a fila, pois com a aplicação dos valores sobre comportamento enfatizados durante os debates, fez com que os alunos se sensibilizassem com o tema, e transmitissem as informações e conceitos para seus amigos de escola e familiares. Desta forma, esses alunos funcionam como agentes multiplicadores, passam os conhecimentos adquiridos a outras pessoas que, possivelmente, podem repetir este comportamento.

Deve-se ressaltar que esta mesma atividade, se aplicada em outras instituições escolares, podem apresentar resultados diferentes. Sugere-se que, primeiramente, seja feito um levantamento com os alunos, para se analisar suas experiências e compreensões com os tipos de filas que se apresentam em seu cotidiano e o conhecimento sobre os aspectos de suas regras de funcionamento e seus aspectos éticos em relação aos outros usuários. Contudo, apesar desta ressalva, é tentador que esta experiência seja repetida em outras instituições com a participação mais efetiva e planejada dos alunos, já que o tempo para sua execução poderia ser mais dilatado que o utilizado para este trabalho. Os alunos, enquanto agentes participantes, poderiam tomar parte, com alguma supervisão, da coleta dos dados e da confecção de cálculos, gráficos, entre outros. Esta nova etapa fica como pesquisa a ser realizada futuramente.

Com as informações reveladas por este trabalho é possível determinar a melhor metodologia para que ocorra, de forma positiva, o processo de ensino e aprendizagem a respeito das filas de espera e seus aspectos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, B. T. **Estudo da fila M/M/1/0 com representações atrasadas e desistência por simulação**. 2011. 43 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Estatística) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, Presidente Prudente, 2011.

ARNOLD, S.F. **Mathematical statistics**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1990.

BROCKMEYER, E.; HALSTROM, H. L. e JENSEN, A. **The life and Works of A. K. Erlang**. Copenhagen: Academy of Technical Sciences, 1948.

CARRIÓN, E. **Teoria das filas como ferramenta para análise de desempenho de sistemas de atendimento: estudo do caso de um servidor da UECE**. Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2007

COGAN, S. **Gerenciando as percepções nas filas de espera: para aumentar o nível de satisfação dos clientes**. Rio de Janeiro, Qualitymark, 1998.

CONOVER, W. J. **Practical nonparametric statistics**. 3 ed. New York: John Wiley, 1999

CORREIA, F.N.; OLIVEIRA, R. C.; TAVARES, L.VALADARES.; THEMIDO, I.H. **Investigação Operacional**. Lisboa: McGraw-Hill. (1996)

FOGLIATTI, M. C.; MATTOS, N. M. C. **Teoria de Filas**. Rio de Janeiro: Editora Interciencia, 2007. 290 p.

JÚNIOR, G. P. S. **CADEIAS DE MARKOV**: Uma Proposta de Ensino e Aprendizagem. 2014. 71f. Dissertação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Bahia.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa Operacional – Curso Introdutório. 2. ed.** São Paulo: Thomson Learning, 2007.

MÜLLER, D. **Processos Estocásticos e Aplicações, II série, nº3 da Coleção Econômica**, Almedina, 2007.

RINALDI, J. G. S. **A importância da rapidez de atendimento nos caixas de supermercados: um estudo de caso utilizando um modelo analítico de filas com trocas**. São Carlos, 2007. 175f. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal de São Carlos.

PACHECO, L. **Dimensionamento dos Transplantes no Brasil e em cada estado.** ABTO - Associação Brasileira de Transplante de Órgãos. Disponível em < http://www.abto.org.br/abtov03/Upload/file/RBT/2015/anual-n-associado.pdf> acesso em 12 de fevereiro de 2017.

PEREIRA, C. R. V. **Uma introdução às filas de espera**. 2009. 124 f. Tese (Matemática)-Universidade da Madeira, Funchal, Portugal, 2009.

TEORIA DAS FILAS (Métodos de Otimização II). Produção de Thiago M. Leandro. Coordenação de Cel. Paulo Afonso Lopes da Silva. Mestrado em Engenharia de Transportes – IME (Instituto Militar de Engenharia). Rio de Janeiro – 2011. Vídeo (11min). Disponível em < https://www.youtube.com/watch?v=ybZe4spMFfk >. Acesso em 10 de fevereiro de 2017.

APÊNDICE A

Questionário Inicial

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário sobre filas.

01) Qual a finalidade de uma fila?

____
____
____

02) Você já permitiu alguém furar fila? Você já furou fila? Por quê?

____
____
____
____
____
____

03) Você acha que a fila é a melhor opção para se organizar? Por quê? Se não, qual seria melhor?

____
____
____
____
____
____

04) Na sua opinião, seria ideal ter apenas fila convencionais ou filas convencionais e preferenciais? Explique sua resposta.

____
____
____
____
____
____

APÊNDICE B

Questionário Final

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

PROFMAT
Mestrado Profissional em Matemática

Questionário sobre filas.

01) Qual a finalidade de uma fila?

____
____
____

02) Você permitiria alguém furar fila? Você furaria uma fila? Por quê?

____
____
____
____
____
____

03) Você acha que a fila é a melhor opção para se organizar? Por quê? Se não, qual seria melhor?

____
____
____
____
____
____

04) Na sua opinião, seria ideal ter apenas fila convencionais ou filas convencionais e preferencias? Explique sua resposta.

____
____
____
____
____
____

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, _____/_____/____

____

Assinatura do autor