UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Roteiro e Aplicação - Feira Matemágica: Curiosidades e Desafios no Âmbito Social da Educação Básica

Cléverson Wesley Cavalcanti

Orientador
Prof. Dr. José Roberto Nogueira

São José do Rio Preto

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Roteiro e Aplicação - Feira Matemágica: Curiosidades e Desafios no Âmbito Social da Educação Básica

Cléverson Wesley Cavalcanti

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.
Finaciadora: CAPES
Orientador: Prof. Dr. José Roberto Nogueira

São José do Rio Preto

2017

Cavalcanti, Cléverson Wesley.
Roteiro e aplicação - Feira Matemágica: curiosidades e desafios no âmbito social da educação básica/ / Cléverson Wesley Cavalcanti. -- São José do Rio Preto, 2017
124 f. : il.

Orientador: José Roberto Nogueira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino. 2. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 3. Educação básica. 4. Matemática recreativa. 5. Matemática – Métodos de ensino. 6. Feira matemática. 7. Respeito e amorosidade. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.
CDU – 51(07)

TERMO DE APROVAÇÃO

Cléverson Wesley Cavalcanti

Roteiro e Aplicação - Feira Matemágica: Curiosidades e Desafios no Âmbito Social da Educação Básica

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. José Roberto Nogueira
Universidade Estadual Paulista - FCT/UNESP
Campus de Presidente Prudente/SP
Orientador

Prof. Dr. Suetônio De Almeida Meira
Universidade Estadual Paulista - FCT/UNESP
Campus de Presidente Prudente/SP

Prof.ª Dr.ª Suellen Ribeiro Pardo Garcia
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR
Campus de Toledo/PR

Presidente Prudente, 28 de Agosto de 2017

Dedico este trabalho a você leitor, que por motivos diversos, se interessou por ler este projeto, por isso espero, que essas escritas sejam prazerosas e significativas para seu entendimento e que os conhecimentos contidos neste humilde trabalho, venha colaborar de alguma forma, com a tua formação profissional.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de cursar esse programa de Mestrado Profissional em Matemática, no Campus da UNESP/FCT de Presidente Prudente-SP, com saúde, paz, alegria, determinação e muita sabedoria. O Grande Arquiteto do Universo colocou pessoas para me favorecer de forma direta ou indireta, sendo elas: - a minha esposa amável e compreensiva, bem como meu filho primogênito Clevertony; - meu pai e minha mãe pelo carinho, assim como meus irmãos pela torcida do meu sucesso; - a todos os Professores da UNESP/FCT e do YouTuber que mediaram meus conhecimentos; - a todos os meus amigos de sala, cursistas do PROFMAT; - amigos professores das escolas onde trabalhei e trabalho; - às Professoras: Abelani Negri Puentes, Marcia Martins e Aparecida de Lurdes Belasco às quais me ajudaram na correção deste trabalho; - aos meus alunos e ex-alunos, aos amigos gerais, que torceram também para o meu sucesso; - a toda irmandade da CCB que oraram para minha vitória; - ao orientador deste trabalho, José Roberto Nogueira pelo apoio. Enfim, foram tantas pessoas que me ajudaram de forma direta e indireta, que não é possível relatar o nome de cada uma delas. Mas sim, agradecer a todos, com um muito obrigado, pelas contribuições que foram fundamentais para a construção desta dissertação. Por isso, não cesso de agradecer ao Espírito Santo que rege o universo e ilumina meu ser. Muito obrigado a tudo e a todos!

Mágico Infantil

A mágica brilha no olhar da criança

Enquanto os adultos veem um espetáculo de mágica com desconfiança, tentando descobrir qual o truque que está por trás da apresentação, a criança se encanta com absolutamente tudo. Para ela aquilo é realmente mágica, algo especial e possível de ser feito. Elas apreciam o espetáculo sem intenção em revelar o segredo do truque.

Nada paga o brilho no olhar de uma criança ao ver que uma moeda sumiu bem debaixo do nariz dela, que foi possível tirar lenços de dentro de uma bolsa vazia ou uma cenoura de dentro do seu ouvido. Nunca será chato ou previsível ver um coelho sair da cartola. Todas as mágicas serão especiais.

Para a criança tudo é novidade e, por isso, ficam facilmente encantadas. O mágico aparece como alguém capaz de realizar façanhas extraordinárias que qualquer outra pessoa não seria capaz.

feedback

As crianças oferecem um feedback muito melhor para o mágico do que os adultos, que disfarçam as reações devido à maior preocupação com a falha do que com o espetáculo.

As crianças possuem reações muito mais espontâneas. Se elas não gostarem de um truque, acredite, você vai saber. É muito mais fácil mensurar se está indo no caminho certo.

O carinho dado pelas crianças é um ponto positivo. Abraços, beijos e risadas não vão faltar. Qualquer mágico infantil se sente realizado se faz um bom trabalho.

Magicando, Luiz Laurito

Resumo

Neste trabalho apresentamos a discussão, a fundamentação teórica, a organização e a implementação de uma feira de interação e exposição matemática no âmbito escolar, denominada Feira Matemágica. Apresentamos a discussão dos resultados obtidos através da implementação da feira em uma escola do interior do Estado de São Paulo, demonstrando os ganhos de aprendizagem dos alunos com relação a conceitos matemáticos abstratos que estão presentes na matriz curricular. Apresentamos também um roteiro detalhado para implementação do Projeto Feira Matemágica em escolas de Ensino Fundamental e Médio.

Palavras-chave: Atividades Lúdicas, Mágicas Matemáticas, Estímulo de Reforço Positivo, Amorosidade e Respeito, Feira com Roteiro.

Abstract

In this work we present the discussion, the theoretical foundation, the organization and the implementation of a fair of interaction and mathematical exposition in the school environment, called Mathematical Fair. We present the discussion of the results obtained through the implementation of the fair in a school in the interior of the State of São Paulo, demonstrating students' learning gains in relation to abstract mathematical concepts that are present in the curricular matrix. We also present a detailed script for the implementation of the Matemágica Fair Project in primary and secondary schools.

Keywords: Play Activities, Mathematical Magics, Positive Reinforcement Stimulus, Love and Respect, Script Fair.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

1 Introdução

Os professores de matemática tem se preocupado com a falta de compromisso no que tange o estudo da disciplina por parte dos educandos. Esse comportamento tem se refletido nas avaliações, que gera como consequências altercações entre as duas partes. Dessa forma, um bom professor busca teoria de grandes educadores a fim de refletir sua prática de ensino, criando assim caminhos que promovem melhor abordagem de ensino e aprendizagem.

Este projeto tem como objetivo propor um roteiro que descreve abordagem metodológica para quem pretende iniciar a construção de uma Feira Matemágica, no social escolar, cujas finalidades são: mostrar ao professor práticas eficazes para despertar no educando curiosidades pela aprendizagem, conduzi-lo e auxilia-lo na pesquisa; esclarecer as importâncias das atividades lúdicas no processo de ensino- aprendizagem de matemática; posturas pedagógicas que influenciam em melhoras na relação de comunicação professor-aluno e o gosto pelo ensino de matemática que conduz de forma gradual o educando das atividades lúdicas as teóricas.

Com as estruturas objetivas é feito uma leitura de um mundo mágico, por meio do diálogo e da arte Mágicas Matemáticas, em que todos os estudantes motivados da sala serão mágicos e para sua formação, serão direcionados a pesquisarem os conceitos e os procedimentos matemáticos envolvidos no roteiro de atividades lúdicas. Os alunos e aprendizagem serão o centro do ensino, resultando, portanto, em um suporte para uma boa execução e compreensão dos efeitos transformadores e motivadores, despertados em cada uma das mágicas. O palco desses mágicos será no âmbito social escolar da educação básica, onde ocorrerão anualmente com o nome de Feira Matemágica, lugar esse que os estudantes mágicos, entusiasmado pela aprendizagem farão seus espetáculos de mágicas matemáticas com alegria, amorosidade e respeito para a plateia estudantil, com a exposição e apresentação de um cartaz, que relatam breves conceitos de matemática pesquisados e que são suportes para o desenvolvimento dos algoritmos da mágica apresentada.

O projeto Feira Matemágica foi delimitado de um tema Complexo: Feira de Matemática, envolvendo não só a matemágica, como também: histórias da matemática; construções e demonstrações geométricas; demonstrações e interações com jogos matemáticos, eletrônicos, ou não; apresentações de gráficos e fórmulas matemáticas em dispositivos móveis, dentre outros. Todas essas ideias propostas serão estudadas e desenvolvidas numa próxima etapa, pois, assim como uma criança cresce e se desenvolve, a Feira Matemágica tem esta perspectiva de crescimento e desenvolvimento.

1.1 Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é despertar o interesse em compartilhar respostas de alguns questionamentos pedagógicos realizados em uma abordagem metodológica lúdica, na construção de um evento chamado Feira Matemágica, no âmbito social escolar, que pretende dar suporte a todos os professores de matemática, por meio de um roteiro de como criar uma Feira Matemágica na escola a partir das mágicas matemáticas associadas aos conteúdos pertinentes à Matriz Curricular.

Para isso, tais questionamentos foram abordados:

- É possível fazer uma Feira Matemágica no ambiente social escolar?
- Quais abordagens pedagógicas de ensino são adequadas para construção de uma feira?
- As atividades lúdicas mágicas despertaria o desenvolvimento de quais competências e habilidades matemáticas do educando?
- A Feira Matemágica desperta o interesse do aluno para aprendizagem matemática?
- Quais estratégias de ensino fazem a diferença no processo em ensino-aprendizagem de matemática?
- A Feira Matemágica melhora a relação de comunicação, respeito e amorosidade entre professor-aluno no processo de ensino- aprendizagem?
- É possível despertar no estudante interesse futuro para extender criação de uma feira com maior número de atividades lúdicas?
- Os estudantes mobilizariam a construção de uma Feira matemágica?
- A ideia de ser mágico despertaria o interesse do educando para pesquisar conceitos matemáticos?
- A comunicação professor-aluno melhoraria a mediação em relação ao processo de ensino-aprendizagem?
- Estudantes motivados pelas curiosidades mágicas constroem e reproduzem conhecimentos?
- Quando o aluno aprende ele passa a gostar mais da disciplina de matemática?

1.2 Organização do Trabalho

A estratégia de ensino foi apresentar ao educando um mundo encantado de ilusões e truques, utilizado nas artes mágicas por Mágicos. Fato motivador para o início de um projeto Feira Matemágica, em que os estudantes são futuros mágicos e necessitam pesquisar os saberes necessários para a elaboração e execução das mágicas matemáticas. Os educandos são livres para pesquisar também outras mágicas matemáticas que enriquecem, além das repertoriadas e direcionadas pelo professor. Dessa forma, os estudantes tornar-se-ão equipes de mágicos, onde o palco é o âmbito escolar social e a plateia será formada pela comunidade educandos.

O trabalho esta organizado da seguinte forma:

- Capítulo 2: Fundamentação Teórica
  - Definição das Artes Mágicas e atividades lúdicas;
  - Orientações pedagógicas que respondem e orientam este trabalho.
- Capítulo 3: Metodologia
  - Memorial que levou a escrever esta dissertação;
  - Metodologia da Pesquisa;
  - Lócus da Pesquisa;
  - Delineamento da Pesquisa;
  - Roteiro para aplicação do projeto na escola social: Feira Matemágica.
- Capítulo 4: Estruturas Álgebricas
  - Contextos Históricos;
  - Grupos;
  - Anéis;
  - Corpos;
  - Anéis de Polinômios.
- Capítulo 5: Roteiros de Atividades Lúdicas Matemágicas
- Capítulo 6: Resultados
- Capitulo 7: Discussão
- Capítulo 8: Conclusão e Considerações Finais

2 Fundamentação Teórica

2.1 Definição das Artes Mágicas matemáticas e das atividades lúdicas matemáticas

Rescrevendo com as ideias do dicionário online, `https://www.dicio.com.br/`, Artes é a habilidade para demonstrar uma ideia ou um pensamento, por meio de uma interpretação ou impressão sensorial, emocional e estética. Mágica é uma peça teatral com transformações fantásticas, por meio de certas práticas ocultas ou efeitos que contrariam as leis naturais.

Sendo assim neste trabalho ficará definido que: - Artes Mágicas Matemáticas é a habilidade que um indivíduo tem em gerar nas pessoas, efeitos fantásticos sensoriais, emocionais e estéticos, provocado por uma representação teatral, para conduzir uma ideia ou pensamento de caráter matemático, que pode ser demonstrado por um algoritmo.

No dicionário de sinônimos online, `https://www.sinonimos.com.br`, a palavra lúdica tem sentido de divertido, recreativo, alegre, prazenteiro, brincalhão entre outros, relativos a jogos, brinquedos e diversões.

Desse modo, podem-se interpretar as atividades lúdicas matemáticas, como atividades matemáticas manuseadas no brincar, atividades matemáticas que gera prazer, isto é, tudo que for relativo a uma atividade ou a um conceito matemático que seja alegre e divertido.

Dessa forma, a idealização dessa Feira Matemágica é projetar caminhos para que o evento ocorra em forma de exposição e interação aos conjuntos de atividades ou conceitos para aprender e brincar, com alegria e prazer, no âmbito social escolar. Baseado nesses princípios, o tema Feira de Matemática, amplo e complexo, foi delimitado para Feira Matemágica, com início focado em apenas atividades lúdicas das artes mágicas matemáticas. Porém, com perspectiva que visa um futuro gradativo anual, para ampliação de atividades lúdicas nas Feiras mais Complexa de Inteirações Matemágicas, Curiosidades e Desafios.

2.2 Orientações pedagógicas que respondem e orientam este trabalho

As orientações pedagógicas, presentes, destinadas a professores da educação básica são baseados em arquivos que relatam as experiências e os modelos pedagógicos, testados que deram certo ou não, idealizado por grandes educadores do mundo. Ao longo desse tempo, bem-aventurado o professor que busca esses conhecimentos para refletir sobre a sua didática.

2.2.1 Claparèd

Segundo Édouard Claparèd a arte de ensinar não pode ser baseada em uma didática do bom senso, da adivinhação, do voluntarismo, mas sim, numa pedagogia eficaz que é fundamentada na psicologia que explica o desenvolvimento cognitivo e o comportamento humano. Didática essa que auxilia de forma eficaz a ação do educador, para estimular interesses intelectuais e morais do aprendiz, pois, quando o educando formula hipóteses e soluciona o problema do ambiente, do cotidiano, e se adapta com facilidade, Claparèd, define como inteligência, o que era confundido com capacidade de armazenar conhecimento. Para aguçar essa inteligência o professor deve provocar e capitar interesses profundos, espontâneos, manifestados em interesses mediados.

> "A escola deve fazer amar o trabalho.[...]. É, pois, indispensável que a escola seja um ambiente de alegria, onde a criança trabalhe com entusiasmo". [3]

Para Édouard Claparèd a escola social deve ser mais um laboratório do que um auditório, para que o educando seja o centro da aprendizagem, como a Revolução de Copérnico. Assim, o professor tem condições para afastar da abordagem tradicional de ser: - o centro da atividade; - expositor do conhecimento verbalista; - o autoritário da sala social; - ter estudantes passíveis, imóveis, que memorizam e são apenas receptáculos dos conhecimentos. Outrossim, seja o professor preparado para mediar os estudantes para uma ação de interesse de: criação, pesquisa, hipóteses e conclusões, que visa o bem coletivo, cooperativismo e trabalho em grupo. A escola social tem medida de diferenciar o ritmo de aprendizagem de cada indivíduo. Além do mais, o âmbito social escolar do educando tem que ser um lugar motivador, de brincadeira, alegria, com jogos, pois, são elementos importantes para ocorrer aprendizagem e para proporcionar plasticidade infantil, que é capacidade que o indivíduo terá para adaptar ao ambiente.

> Art.9º - A escola de qualidade social adota como centralidade o estudante e a aprendizagem,...[2]

A Feira Matemágica vem ao encontro com as ideias de Édouard Claparèd e do artigo 9º da Lei de Diretriz e Base, pois, cumpre com a proposta de ensino atual que é a centralidade do estudante e da aprendizagem. Onde, o professor motiva os estudantes com as brincadeiras das artes mágicas matemáticas e media os interesses à pesquisa para elaboração de mágicas para ser mágicos, onde o fruto do conhecimento ocorre da organização coletiva e cooperativa do trabalho pedagógico.

2.2.2 Dewey

> "Refletir é olhar para trás sobre o que foi feito e extrair os significados positivos, que irão constituir o capital para se lidar inteligentemente com as posteriores experiências". [6]

> "[...] A função dos educadores é organizar as condições de expressão dos interesses práticos, de tal modo que se desperte o desenvolvimento daquelas fases intelectuais da atividade, e, por esse meio, a transição gradual para o tipo de atividade teórica". [6]

Segundo Dewey, a educação não tem verdades eternas, mas, provisórias que pode ser mudada por um consenso coletivo. Por isso, fala que o professor reflexivo é o educador que sempre esta questionando sua prática de ensino com educando, é um problematizador de situações de aprendizagens, que testa as hipóteses, confirma ou nega o conceito proposto. E a partir dos significados positivos, em situações semelhantes, reaplica o mesmo método, contudo, se o resultado não for o esperado, reformula a metodologia novamente. Pois, a educação tem que ser significativa para ambos os lados e não apenas para o professor, caso contrário, a educação se torna tradicional e acaba apenas depositando informações sem relevância ao educando.

> "O aprendizado se dá quando compartilhamos experiências, e isso só é possível num ambiente democrático, onde não haja barreiras ao intercâmbio de pensamento"[6]

Os princípios de Dewey esta presente no desenvolvimento metodológico da Feira Matemágica, pois, possibilita o professor refletir sobre a sua abordagem e retirar os resultados positivos, para que em futuras experiências semelhantes, possa oferecer uma aprendizagem mais efetiva ao educando. O educador utiliza a estratégia de transitar, gradualmente, o educando mágico, de uma atividade matemática lúdica, para uma mais teórica. E além do mais, cumpre com a hipótese que é verificar se o estudante aprendeu a atividade proposta. E a validade é afirmativa, para o professor, quando, o estudante compartilha e interagem as experiências mágicas matemáticas, no âmbito social escolar e na comunidade em que está inserido.

2.2.3 Freire

> "[...] "leitura" resultava a percepção critica do que é cultura, pela compreensão da prática ou do trabalho humano, transformador do mundo. [...]. Em qualquer caso, o estudo exige sempre esta atitude séria e curiosa na procura de compreender as coisas e os fatos que observamos."[8]

De acordo com Paulo Freire, o professor deve despertar no educando curiosidades, para que ele faça uma leitura de mundo, de modo, a ser o protagonista da sua própria aprendizagem, o sujeito que retira informações sucessivamente de objetos, assuntos, acontecimento ou fato do mundo que o cerca, pois, com essa atitude e identidade, o estudante começa entender melhor o sentido da aprendizagem para vida cotidiana. E de forma autônoma, consegue compartilhar e transformar o mundo lido que vive. E para esse fim, o educador tem que partir das experiências, já vividas ou conhecidas do educando, para conduzir, de forma organizada, a construção de novos conhecimentos.

> "não há educação sem amor [...] Quem não é capaz de amar os seres inacabados não pode educar."[9]

> "É preciso que saibamos que, sem certas qualidades ou virtudes como amorosidade, respeito aos outros, tolerância, humildade, gosto pela alegria, gosto pela vida, abertura ao novo, disponibilidade à mudança, persistência na luta, recusa aos fatalismos, identificação com a esperança, abertura à justiça, não é possível a prática pedagógico-progressista, que não se faz apenas com ciência e técnica".[7]

Paulo Freire acredita que a educação está baseada no querer ensinar e aprender com o amor, respeito, tolerância, humildade, entre outras virtudes e considera fundamentais na relação professor-estudante, em razão de, estes vínculos afetivos, amorosos, favorecer a ambos uma boa convivência no âmbito social escolar, gerados por atitudes de respeito e diálogos construtivos, para que, ocorra um bom ensino-aprendizagem no ser inacabado.

2.2.4 Cortella

> "Pode parecer estranho invadir uma reflexão sobre a construção do conhecimento com estas considerações, mas um dos componentes fulcrais do comportamento infantil e adolescentes é o lúdico (que os adultos parcialmente represamos em nos, e neles) e a amorosidade, e a sala-de-aula deve ser, portanto, antes de todo mais, o lugar de uma situação com contornos amorosos: a aula". [4]

Para Mario Sérgio Cortella, uns dos elementos centrais, para que, ocorra à construção do conhecimento cognitivo da criança e do adolescente, é o lúdico, e a amorosidade, que ocorre no âmbito social da sala-de-aula.

Os fundamentos de Paulo Freire e Mario Sergio Cortella convergem na construção da Feira Matemágica, porque o Professor Mágico chega à sala-de-aula e realiza mágicas no ambiente social, contagia o lugar onde despertas emoções, imaginações, assombros pelo desconhecimento, e amorosamente o professor conduz o estudante a fazer uma leitura de mundo, um mundo mágico, lúdico que é apresentado, por diversos mágicos, na televisão, circos, teatros, nas ruas e outros lugares, uma leitura de mundo que desperta naturalmente o desejo de busca para ser um mágico, aprender a fazer mágicas. Momento em que o professor conduz o educando a ser o protagonista da sua aprendizagem, formador do seu repertório de atividades mágicas, por meio, da pesquisa, da compreensão dos conceitos e dos procedimentos envolvidos em cada uma delas.

2.2.5 Skinner

> "Quando nosso comportamento é reforçado positivamente, nós dizemos que gostamos do que estamos fazendo; dizemos que estamos felizes."[16]

Conforme Skinner, todo estudante aprende, basta o educador idealizar condições adequadas no processo de aprendizagem, que estimule de forma gradativa o desenvolvimento do indivíduo, porque, quando a pessoa é estimulada a uma ação presente, ela aumenta a probabilidade futura de repetir a mesma ação, ou ação semelhante. Esse condicionamento operante leva o nome de reforço positivo e essa contingência de reforço positivo, faz com que, o indivíduo venha repetir ações posteriores, movido a comportamentos de satisfação e realização. Porém, se o educando é frustrado nas suas tentativas de acertos, então essa pessoa vai gerar no cognitivo, consequências aversivas ao processo de aprendizagem, isto é, terá probabilidade futura de repulsa a resposta ao fato que antecedeu.

O fato do estudante ter sido estimulado a realizar um projeto simples, mas bem-sucedido, Feira Matemágica no âmbito social escolar, pode-se dizer baseado nas ideias de Skinner, que os cognitivos desses estudantes aumentaram a probabilidade futura de querer desenvolver novos projetos, iguais ou semelhantes e mais complexos, o que para o Professor de Matemática é de grande importância, porque o estudante poderá incluir novos aprendizados lúdicos e curiosos, como histórias da matemática, jogos matemáticos, construções e demonstrações lúdicas de geometria, utilização de dispositivos eletrônicos para representações de gráficos, jogos matemáticos e desafios. Todo esse aparato presente nas futuras Feiras Matemágicas complexas a serem estruturadas e estudadas pelo Professor, será um avanço para o desenvolvimento gradativo de ensino e aprendizagem desses educando da escola.

3 Metodologia

3.1 Memorial que levou a escrever esta dissertação

Sou Cléverson Wesley Cavalcanti, nasci em 15 de Dezembro de 1980, na capital de São Paulo. Minha infância foi permeada por mágicas realizadas pelo meu pai, que encantava a mim e a meus irmãos com suas façanhas. Essas eram extraídas de um livro que guardava em seus pertences e que o acompanha até os dias de hoje. Em 1985, mudamos para um assentamento rural, conseguido através do movimento Sem Terra, localizado na cidade de Euclides da Cunha Paulista interior de São Paulo. Em 1987, inicio os meus estudos com muita dificuldade e somente no final da quarta série aprendo a ler, escrever e calcular. Minha mãe que só estudou até a quarta série, não desistiu da minha alfabetização defasada e passou então a me estimular nos estudos. Intervinha principalmente na aprendizagem da tabuada e de contas que envolvia as quatro operações, o que foi fundamental para que eu viesse a gostar do ensino da matemática. No final da 8º série ganho, entre todos os colegas da sala, um prêmio pela melhor experiência realizada na Feira de Ciências, onde construí e expliquei o princípio do motor elétrico. Ao terminar o Ensino Médio, venho passear em São Paulo, compro vários kits de mágicas, na ladeira São Bento, despertando em mim o gosto por executar mágicas e encantar as pessoas a minha volta. Trabalhei como voluntário na Escola da Família e fiz muitos amigos, devido aos encantos das mágicas. Dessa forma, havia iniciado o gosto por falar com o público presente no social escolar, logo decido ser professor. Em 2005 inicio a graduação em Matemática na UNESP/FCT, Presidente Prudente - SP, meus amigos de sala, ficam encantados ao presenciar algumas mágicas realizadas por mim e tomam a iniciativa de criar o meu primeiro e-mail com o nome de cleversomagico@bol.com.br ao qual faço uso até os dias de hoje. Já em 2007, no Simpósio de Matemática UNESP/FCT assisto a um minicurso de Mágicas Matemáticas, com os Professores Doutores, Malagutti e Sampaio[14], da UFSCAR, aprendendo vários algoritmos de mágicas matemáticas. Foi nesse período que o orientador desse trabalho, José Roberto Nogueira, me incentiva a dar continuidade aos estudos dos algoritmos de mágicas desses Doutores, acima citado e sugere que eu venha obter um livro Matemágica [15], com 100 atividades lúdicas matemáticas de outro Matemático, Fausto Arnaud Sampaio, que em 1999 recebeu o Prêmio, Professor nota 10. Em

2009, passo a lecionar no Colégio Positivo na Cidade de Primavera-SP, onde adquiri experiência, na prática, por ter que auxiliar os educandos em várias Feiras Culturais realizadas no Colégio. Local esse em que todos os professores trabalhavam em conjunto com o intuito de realizar várias atividades lúdicas, no qual o foco não era apenas a matemática, mas sim, outras áreas do conhecimento envolvidas no currículo. Assim, reflito então, o motivo pelo qual os estudantes pouco realizam exposições de atividades lúdicas voltadas a matemática e sim nas demais disciplinas.

No ano de 2010, passo a lecionar em uma escola rural e me deparo pela primeira vez com a resistência em aceitação a uma prática inovadora no ensino de matemática, nesse caso, as atividades mágicas matemáticas. Essa era uma metodologia extremamente inovadora que fugia do método tradicional da referida Unidade Escolar.

Em 2012, venho tornar-me vencedor entre os 75 planos de aula de matemática realizados pelos cursistas da Diretoria de Ensino de Mirante do Paranapanema-SP e sou convocado para apresentar meu trabalho em um Seminário Melhor Gestão Melhor Ensino, pela SEE-SP. Foi uma honra estar junto ao secretário da Educação daquele ano, Prof. Dr. Herman Jacobus Cornelis Voorwald, e ao mesmo tempo apresentar meu plano de aula com o título, Equação do 1º grau: com o uso de um vídeo aula, Equação e do videogame Labirinto Equação.

Em 2015, ingresso no Mestrado Profissional de Matemática, PROFMAT, no Campus de Presidente Prudente - SP, UNESP-FCT. E no mesmo ano, sou convidado pelo orientador para ministrar um minicurso no XSMAT, 10º Simpósio de Matemática, com o título, Melhor Ensino com Matemágica. Após ministrar esse minicurso de mágicas matemáticas tenho a iniciativa de filmar e postar num canal do youtube com o nome **Professor Clevertony**. Em 2016, apresento no XIMAT, 11º simpósio de Matemática, um relato de Experiência ocorrido em 2012, com o título Equação do 1º grau.

Toda essa trajetória gerou em mim o desejo de desenvolver este projeto, Feira Matemágica.

3.2 Metodologia da Pesquisa

O método científico desta dissertação tem como fator predominante as abordagens qualitativas, sob a modalidade pesquisa-ação, técnica de planejamento participativo e questionário, isto é, neste trabalho, são adotados caminhos, que vieram estruturar os dados reais da criação da Feira Matemágica. As estratégias para obtenção dos dados foram por questionários, com perguntas fechadas, abertas e pelo planejamento participativo, ou seja, por meio de diálogos, trabalhos colaborativos, participações coletivas com os educandos, de modo que, todos possam em comum decidir a solução de um determinado fato ou problema relacionado ao trabalho cooperativo. Assim, em conformidade com Paulo Freire "É decidindo que se aprende a decidir". [7]

3.3 Lócus da Pesquisa

As interações e os espetáculos da Feira Matemágicas, Curiosidades e Desafios foram realizados com os educandos do 9º ano do Ensino Fundamental Ciclo II, no social ambiente da Escola Estadual Francisco Piergentile, Município de Rosana- SP, pertencente à Diretoria de Ensino de Mirante do Paranapanema-SP, interior do Estado de São Paulo. Nessa unidade escolar, os estudantes são bem acolhidos por gestores, professores e funcionários da Escola. Os educandos têm suas realidades diferenciadas como morar em ilhas, assentamentos rurais, nos subúrbios da cidade em residências humildes, assim como em casas suntuosas no centro da cidade. As famílias apresentam uma vida com característica típica da vida contemporânea, os adolescentes estão inseridos nas diferentes formações familiares, alguns são criados pelos pais, outros pelos avós, tios, assim como inúmeras situações de parentesco. Apesar dos estudantes viverem muito bem com a diferença entre eles, no âmbito social da escola pública, essa realidade social diversa exige também um professor que tenha um olhar diferenciado a diversidade de aprendizagem dos educandos, para que eles tenham maior clareza nos procedimentos das atividades escolares e como sujeitos da aprendizagem possam escolher seu caminho de desenvolvimento.

3.4 Delineamento da Pesquisa

Com a entrega do projeto: Feira Matemágica ao gestor da escola social, foi iniciado o projeto Feira Matemágicas Curiosidades e Desafios com os estudantes por meio de uma realização surpresa com algumas mágicas na sala-de-aula, onde foi arrancado expressões de alegria, sorrisos e encantos, assombros pelo desconhecido e admirações pelas façanhas mágicas. Assim foi feito a leitura de mundo com os estudantes sobre o mundo mágico, para que os interesses despertados por eles fossem direcionados para realizar o projeto. Dessa maneira, foram distribuídos 12 impressos contendo diferentes roteiros de atividades lúdicas matemáticas. Roteiros que direcionavam os estudantes a buscar conceitos através da pesquisa para facilitar a compreensão e o procedimento da mágica.

Para a execução desse projeto os educandos puderam também contar com o apoio da escola social que disponibilizou material de consumo como cartolinas e outros. Na elaboração, foram disponibilizados ambientes físicos sociais como sala de informática e biblioteca para a pesquisas. Essas foram realizadas a critério do educando nos horários de contra turno das aulas.

No planejamento participativo coletivo foram feitos alguns combinados, tais como o professor oferecer no mínimo dois atendimentos aos grupos, sendo que um dos atendimentos deveria ocorrer no início e o outro no final da elaboração, assim foi atendido pelo menos um grupo nos finais de cada aula.

Como no Estado de São Paulo a grade do 9°ano do Ensino Fundamental - Ciclo II é constituída de 6 aulas semanais de matemática, o professor pressupõe que é possível iniciar, desenvolver e apresentar o projeto, novamente, com tranquilidade num intervalo inferior a dois meses, com ao menos um atendimento, nos finais de cada aula.

Ver o fruto de um trabalho agradável resultará a todos os envolvidos, sensações de alegria, entusiasmo, respeito e amorosidade ao processo de ensino e aprendizagem, o que para Skinner é causado por um estímulo de reforço positivo.

3.5 Roteiro para aplicação do projeto na escola social: Feira Matemágica

Para aplicação deste projeto na escola social, o professor deve apresentar um impresso que converge com este modelo sugerido para entregar ao coordenador ou diretor da escola.

Projeto: Feira Matemágica

Escola..................................

Estudantes: ...° do Ensino Fundamental ou ...° do Ensino Médio. **Turma**.....

Professor: ....

Justificativa

O motivo da escolha de uma Feira Matemágica é que essa despertará no educando aquele interesse intrínseco pelas atividades lúdica matemática, conforme Claparèd; justapõe estudante e aprendizagem como centro do ensino, na construção e realização de atividades estimulantes para brincar, divertir, e a partir do momento que esses estão bem mediados, poderão ser conduzidos gradativamente a uma pesquisa teórica, segundo Dewey. Essa Feira estabelece o respeito, afeto e estreita as relações de afinidade entre aluno e professor no ensino de matemática, proporciona uma boa relação de ensino-aprendizagem e o lúdico na sala de aula, que para Cortella, são elementos centrais para a construção do conhecimento. Além do mais, o professor vai despertar curiosidades nos estudantes por meio das artes mágicas matemáticas, contextualizando e dando sentido ao mundo mágico por meio das leituras de mundo, dito por Freire, pretexto que leva o educando a ter um amadurecimento cognitivo e uma autonomia na construção da aprendizagem. Segundo Skinner, a motivação dessa Feira Matemágica faz que o estudante repita a atividade norteada por mágicas algébricas, aumentando a probabilidade futura de ter aulas produtivas e significativas, causada por um estímulo de reforço positivo.

Objetivos

O objetivo da Feira Matemágica é melhorar o aprendizado do estudante afim de que ele venha:

- adquirir autonomia para pesquisar curiosidades matemáticas;
- ter compromisso pelo ensino-aprendizagem de matemática;
- graduar sistematicamente as atividades algébricas lúdicas a mais teórica exigidas pela grade curricular do Ensino Fundamental e Médio;
- despertar amorosidade e o respeito pelo o professor;
- ampliar a capacidade em planejar e organizar, comunicar pela oralidade e escrita, as atividades lúdicas matemáticas;
- adquirir competências e habilidades além do conhecimento teórico, desenvolver o raciocínio lógico, o senso crítico e autonomia, provocar uma participação efetiva;
- aprender a aprender, aprender a fazer.

Conteúdos Curriculares

Conteúdos a serem trabalhados durante o projeto: álgebra, aritmética, geometria, probabilidade. Que estarão dentro das atividades lúdicas matemáticas que serão inseridas em brincadeiras e diversão.

Metodologia

O professor basicamente deverá seguir os sete passos abaixo:

- Primeiro passo:

O professor desenvolvedor iniciará o projeto Feira Matemágicas: Curiosidades e Desafios em uma aula com os estudantes, por meio, de uma realização surpresa de algumas mágicas realizadas por ele, na sala-de-aula, onde esse professor deverá incorporar-se como mágico para arrancar dos estudantes envolvidos, expressões de alegria, sorrisos, encantos, assombros pelo desconhecido e admirações pelas façanhas mágicas.

- Segundo passo:

Após a demonstração de algumas mágicas, o professor deverá fazer, segundo Paulo Freire, uma leitura de mundo, um mundo mágico, relacionando as mágicas relacionando os conhecimentos já adquidos, para que nesse seja despertado o interesse em realizar o projeto Feira Matemágica.

- Terceiro passo:

No momento em que o estudante se tornar um curioso em potencial, bem como motivado para se tornar um futuro aluno mágico, o professor deverá aproveitar esse interesse e proceder a distribuição dos impressos roteiros contendo diferentes atividades lúdicas matemática. Roteiros esses que irão direcionar os estudantes a realizar buscas através de pesquisa aos conceitos matemáticos que facilitarão a compreensão e o procedimento das mágicas.

- Quarto passo:

O professor deverá mediar o processo de ensino-aprendizagem do educando para que seja protagonista, assim como atribuir autonomia para pesquisar outras atividades lúdicas matemáticas além das repertoriadas atribuídas neste trabalho.

- Quinto passo:

O professor deverá fazer combinados no planejamento participativo coletivo com os estudantes como: no mínimo dois atendimentos para todos os grupos. Sendo o primeiro no início da elaboração e o outro no final da elaboração. Os atendimentos deverão ser de preferência nos últimos minutos das aulas de matemáticas.

- Sexto passo:

O projeto Feira Matemágica deverá ser realizado com um tempo tranquilo e hábil para que os estudantes pesquisem e elaborem com um amadurecimento cognitivo significativo, assim o professor realizador poderá marcar com os estudantes e com a escola um dia para apresentar após 30 dias do primeiro dia do início do projeto em sala de aula.

- Sétimo e ultimo passo:

O projeto Feira Matemágica deverá ser apresentado pelos estudantes mágicos, próximo a uma lousa para que esses possam interagir, se necessário com outros estudantes da plateia, na lousa.

Recursos necessários

O estudante necessitará dos recursos disponíveis na escola social tais como: cartolinas, canetão, lápis, régua, colas, fitas, papel sulfites, tesoura, laboratório, biblioteca e sala de informática para pesquisar em contra turnos os conteúdos necessários e outros.

Avaliação

A Feira Matemágica seguirá alguns critérios para avaliações diagnósticas do trabalho pedagógico do professor e dos estudantes por meio da:

Estudante

- Elaboração e produção individual e coletiva das atividades lúdicas matemágicas;
- Boa conduta e integração na equipe;
- Estética da elaboração do trabalho e do ambiente;
- Boa escrita, oralidade e domínio do que vai ser apresentado;
- Pelas interações e compartilhamento das atividades entre estudantes.

Professor

O professor será avaliado pelos estudantes que responderão a um questionário e redigirão um relatório.

– **Questionário**

Os estudantes devem atribuir um valor numérico de 0 a 10 para todas as perguntas abaixo: Em que o valor zero (0) significa pouco e o valor dez (10) muito.

1. Pesquisei o conceito das atividades lúdica matemática na internet, nos livros ou outros recursos didáticos?
2. Aprendi conceitos matemáticos na elaboração da minha atividade lúdica?
3. Aprendi conceitos matemáticos com a atividade lúdica apresentada pelo meu colega?

4. Gostei de apresentar as atividades lúdicas matemágicas?
5. A feira matemágica me deixa motivado para aprendizagem em processo?
6. Acho importante que haja na escola uma Feira Matemágica anual, cada vez melhor, para motivar os alunos a apresentar e aprender as atividades lúdicas matemáticas por meio da pesquisa?
7. Antes de fazer a Atividade Lúdica, na Feira Matemágica, minha relação de amizade e de aprendizagem com o professor era?
8. Depois de Fazer a Atividade Lúdica na Feira Matemágica minha relação de amizade e aprendizagem com o professor passou a ser?
9. Antes da Feira Matemágica, gostava de matemática?
10. Depois da Feira matemágica, passei a gostar de Matemática?
11. Senti mais confiança na apresentação, de ter pesquisado as atividades lúdicas?
12. As aulas são mais dinâmicas com as matemágicas, curiosidades, desafios e outras atividades Lúdicas?

– **Relatório**

O relatório será avaliado de modo individual ou coletivo de forma que seja contemplado nesse: o que foi trabalhado durante o evento; sugestões dos aspectos positivos e negativos da Feira; a importância da matemática na comunidade e no mundo em que vivemos; os conceitos matemáticos que foram ensinados e aprendidos durante a elaboração e execução do trabalho.

4 Estruturas Algébricas

Nesse capítulo foi feito estudo mais teórico e uma transcrição das principais estruturas algébricas, do livro Álgebra Moderna, [1] que é a essência para sistematizar procedimentos de atividades matemáticas que são utilizadas no cotidiano escolar e nas aplicações lúdicas.

4.1 Contextos Históricos

4.1.1 Criação do conceito de grupos

O matemático italiano (1456-1526), Scipione del Ferro, mostrou ser possível expressar as raízes cúbicas em termos de seus coeficientes: adição, subtração, divisão e radiciação.

Ou seja, (1500-1515) descobriu o procedimento de resolver a equação cúbica $x^3 + px = q$ $(p, q) > 0$ se traduz atualmente $x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{3}\right)^3}}$-$\sqrt[3]{\frac{q}{2}\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{q}{3}\right)^3}}$

Pois, como já se sabia há muitos séculos que as equações de 1^o e 2^o grau era resolúvel, colocou o seguinte desafio para os algebristas: "será que toda equação algébrica é resolúvel por radicais?"

As pesquisas visando a responder a essa questão se arrastaram por mais de dois secúlos e meio, frustaram alguns dos grandes matemáticos desse período, porém contribuiram decisivamente para a criação do conceito grupos.

O matemático ítalo-francês (1736-1813), Joseph Louis Lagrange, possivelmente o 1^o a perceber o caminho para abordar o problema. Observou (1770-1771) que as teorias das permutações que envolvia as raízes da equação era de grande importância.

O matemático norueguês (1802-1829), Niesl Henrik Abel, (1824) prova o que Lagrange suspeitara fortemente, que não há nenhuma fórmula geral por radical para resolver as equações de grau ≥ 5.

O matemático francês (1811-1832), Evariste Galois, responde o porque de umas equações radicais de grau ≥ 5 são resolúveis e outras não. Para responder essa pergunta associou cada equação um grupo formado por permutações de suas raízes e condiciona a resolubidade por radicais a uma propriedade a esse grupo e como para toda equação de grau ≤ 4 o grupo de permutação que lhe é associado goza dessa propredade e para $n > 4$ sempre há equação cujo não sujeita a essa propriedade.

A questão da resolubidade por radicais estava por fim esclarecido.

Com o tempo, verificou-se a idéia de grupo era um instrumento da mais alta importância para a organização e o estudo de muitas partes da matemática em nível mais elementar um exemplo é a teoria da simetria muito importante para a cristolografia e a química.

4.1.2 Histórico Anéis e Corpos

A álgebra teve seu desenvolvimento tardio, século XIX, na organização lógica e axiomatização, em relação a geometria que axiomatizou nos elementos de Euclides (c.300 a.c).

A primeira tentativa de axiomatização da álgebra publicada 1830 foi pelo matemático inglês (1791-1858), Benjamim Peacok.

O matemático irlandês (1805-1865), Willian R. Hamilton, mostrou que as leis clássicas da álgebra (como a comutatividade) podem não ser aplicáveis em certos casos. Colaborou para a criação de inúmeras estruturas algébricas novas entre as "Corpos" e de "Anel". (1830) descobriu que o sistema numérico que desempenha no espaços tridimencional era do tipo $a + bi + cj + dk$.

O matemático Norueguês (1802-1829), N. H.Abel, (1820) "embrião" da idéia de corpo, entendia por corpo um coleção de números fechada para adição subtração, multiplicação e divisão.

O matemático Alemão (1831-1916), R. Dedekind, introduziu os corpos de números de grau finito como base para o estudos dos números algébricos.

H.Weber (1842-1913), o primeiro matemático a dar uma definição abstrata de corpos.

O matemático A.Fraenkel Alemão (1891-1965), Estudando as pesquisas de corpos levou-se naturalmente a idéia de inteiro. Assim, inspira-se a definição de Anel embora o nome anel tivesse sido introduzido por D. Hilbert (1852-1943).

4.1.3 Histórico Ideal

O ”último teorema de Fermat”, formulado na 1^a metade do século XVII, afirma que não há nenhum terno de números inteiro estritamente positivos que seja solução de $x^n + y^n = z^n$ quando $n > 2$..., foi demonstrado em 1994 pelo Inglês Andrew Wiles apesar do matemático alemão(1810-1893) Ersnt Kummer ter sido o que mais contribuiu para a resolução do teorema. Em seu empenho encontrou resposta para a questão ”fatoração única” introduziu outros tipo de números a que chamou números ideáis, fez uma pretensa demonstração do teorema, porém, P. G. L. Dirichlet(1805-1859) enxergou um erro.

O matemático Alemão (1831-1916), R. Dedekind, em 1871 mostrou que os fatores ideais de Kummer poderiam ser substituido por classe de números algébricos, porém em consideração a Kummer definiu como ideal em um corpo algébrico.

Ideal é um instrumento poderoso para o desenvolvimento da teoria dos anéis. Tem aplicações em áreas diversas como estudo das curvas ágebricas fazem um dos mais importantes da matemática moderna.

4.2 Grupos

4.2.1 Conceito de grupo

Definição: Seja G um conjunto não vazio e $*$ (estrela) uma operação constituida de um sistema matemático, chamamos o par $(G, *)$ de grupo se sujeitar aos seguintes axiomas:

- Associatividade

  $(a * b) * c = a * (b * c)$, quaisquer que sejam $a, b, c \in G$

- Existência de elemento neutro

  $\exists e \in G$ tal que $a * e = e * a = a$, $\forall a \in G$

- Existência de simétricos

  $\forall a \in G$, $\exists a' \in G$ tal que $a' * a = a * a' = e$.

Se, além disso, ainda cumprir o axioma da

- comutatividade

  $a * b = b * a$, quaisquer que sejam $a, b \in G$ o grupo recebe o nome de **grupo comutativo ou abeliano**.

Propriedades imediatas de um grupo

Seja $(G, *)$ um grupo. As propriedades abaixo podem ser demonstradas:

- unicidade do elemento neutro de $(G, *)$;
- unicidade do simétrico de cada elemento de G;
- que se e é elemento neutro, então $e' = e$;
- que $(a')' = a$, qualquer que seja $a \in G$;
- que $(a * b)' = b' * a'$ e, portanto (raciocinando por indução), que $(a_1 * a_2 *, ..., *a_n)' = a'_n * a'_{n-1} *, ..., *a'_1 \quad (n \geq 1)$;
- que todo elemento de e é regular para a operação $*$ou seja, se $a * x = a * y$ ou $a * y = a * x$, então $x = y$.
- no grupo G, a equação $a * x = b$, $(x * a = b)$ tem conjunto solução unitário, constituído do elemento $a\prime * b$ (respectivamente, $b * a'$), substituindo-se x po $a\prime * b$ temos $a * (a' * b) = (a * a') * b = e * b = b$, o que garante efetivamente $a\prime * b$ é solução da equação.

Observação:

- chamamos $(G, +)$ de grupo aditivo e seu simétrico $a\prime$ de oposto representado por $-a$
- chamamos $(G, .)$ de grupo mutiplicativo e seu simétrico $a\prime$ de inverso representado por a^{-1}

4.2.2 Grupos finitos

Chamamos de grupo finito um grupo $(G, *)$ em que o conjunto G é finito, no qual chamaremos o número de elementos de G ordem do grupo (notação oG)

Tábua do grupo: denominaremos tábua do grupo o conjunto de grupos finito representado por tabela

$G = \{-1, 1\}$ é um grupo multiplicativo sua ordem obviamente é 2 e sua tábua:

.	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Alguns grupos importantes

Grupos numéricos aditivo e multiplicativo $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ são abelianos, basta verificar.

Exemplo 1 - Grupo aditivo dos inteiros(comutativo).$(\mathbb{Z}, +)$

- Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ temos $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Comutativa: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ temos $a + b = a + b$
- Elemento simétrico: $\forall a' \in \mathbb{Z}$ temos $e \in \mathbb{Z}$ tal que $a' + a = a + a' = e$
- Elemento neutro: $\forall e \in \mathbb{Z}$ temos $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a + e = e + a = a$ #

Exemplo 2 - Grupo multiplicativo dos reais (comutativo).$(\mathbb{R}, .)$

- Associativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ temos $(a.b) .c = a. (b.c)$
- Comutativa: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ temos $a.b = a.b$
- Elemento simétrico: $\forall a' \in \mathbb{R}$ temos $e \in \mathbb{R}$ tal que $a'.a = a.a' = e$
- Elemento neutro: $\forall e \in \mathbb{R}$ temos $a \in \mathbb{R}$ tal que $a.e = e.a = a$ #

Grupos diedrais: Chamamos grupos diedral de grau n representamos por Dn o número de lados de um poligono regular de n lados e no qual tem simetria igual $2n$

Ex: O grupo Diedral $D3$ e $D4$ é um exemplo de um grupo de simetria

4.2.3 Subgrupos

Definição: Seja $(G, *)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:

- H é fechada para a operação $*$, isto é, se $a, b \in H$, entã $a * b$.
- $(H, *)$ também é um grupo

Nota: Se $e \in G$, então obviamente $\{e\}$ é um subgrupo de G, também que o próprio G é um subgrupo de si mesmo . Esses dois subgrupos, ou seja, $\{e\}$ e G, são chamados subgrupos triviais.

Proposição: Seja $(G, *)$ um grupo. Para que uma parte não vazia $H \subset G$ seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que $a * b\prime$ seja um elemento de H sempre que a e b pertencerem a esse conjunto.

Observação: A condição de subgrupo dada pela proposição apresenta-se assim:

- grupo é aditivo, se $a, b \in H$, então $a + (-b) \in H$
- grupo é multiplicativo, se $a, b \in H$, então $a.b^{-1} \in H$

Exemplo: O conjunto $H = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo reais $(\mathbb{R}^*, .)$. *De fato, se* $a, b \in H$, *então* $a, b \in \mathbb{R}^*, a > 0$ *e* $b > 0$, *mas se* $b > 0$ *então* $b^{-1} > 0$ *Logo,* $a.b^{-1} > 0$, *pois o produto de dois números estritamente positivo também é estritamente positivo, de onde ,* $a.b^{-1} \in H$. #

4.2.4 Homomorfismo de Grupos

Definição: Dá se o nome de homomorfismo de um grupo $(G, *)$ num grupo $(J, .)$ a toda aplicação $f : G \to J$ tal que , quaisquer $x, y \in G$

$f(x * y) = f(x) . f(y)$

Observação: Se um homomorfismo é uma aplicação injetora, sobrejetora e bijetora, chamamos respectivamente de homomorfismo injetor(monomorfismo), homomorfismo sobrejetor(epimorfismo)e isomorfismo.

Proposição sobre Homomorfismo de Grupo

Sejam G e J grupos multiplicativos cujos elementos neutros indicaremos sempre por e e u, repectivamente, e $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos

Proposição: $f(e) = u$.

Proposição: Se a é um elemento qualquer de G, então f$(a^{-1}) = [f(a)]^{-1}$.

Corolário: $f(ab^{-1}) = f(a)[f(b)]^{-1}$

Proposição: Se H é um subgrupo de G, então $f(H)$ é um subgrupo de J

Proposição: Sejam G, J e L grupos se $f : G \to J$ e $g : J \to L$ são homomorfismos de grupos então o mesmo se pode dizer de $gof : G \to L$

Corolário: Se f e g são homomorfismos injetores (sobrejetores), então gof também é um homomorfismo injetores (sobrejetores)

Núcleo de um Homomorfismo

Definição: Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Se u indica o elemento neutro, o seguinte subconjunto de G será chamado núcleo de f e denotado por $N(f)$ (na literatura é comum também a notação $Ker(f)$;)

$$N(f) = \{x \in G/f(x) = u\}$$

Proposição: Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupo .Então:

(i) $N(f)$ é um subgrupo de G

(ii) f é um homomorfismo injetor, se, e somente se, $N(f) = \{e\}$

4.2.5 Isomorfismos de grupos

A idéia de isomorfismo: Seja $G = \{1, -1\}$ um grupo multiplicativo e o grupo S_2 das permutações sobre o conjunto $\{1, 2\}$. Lembrar que $S_2 = \left\{ f_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ e a operação neste caso, é a composição de permutações.

Observando as tábuas desse grupos $\begin{array}{c|cc} . & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{array} \approx \begin{array}{c|cc} o & f_0 & f_1 \\ \hline f_0 & f_0 & f_1 \\ f_1 & f_1 & f_0 \end{array}$

Verificamos que salvo quanto ao 'nome' dos elementos e das operações, elas são idênticas mais precisamente, se na segunda tábua substituirmos o por ., f_0 por 1 e f_1 por -1 obtemos a tábua de G.

Definição: Seja $f : G \to J$ um homomorfismo de grupos. Se f for também uma bijeção, então será chamado de isomorfismo do grupo J. Neste caso, diz que f é um isomorfismo de grupo. Se $G = J$ e a operação é a mesma, então, f é um isomorfismo de G.

Proposição: Se $f : G \to J$ é um isomorfismo de grupos, então $f^{-1} : J \to G$ também é um isomorfismo de grupos.

4.2.6 Teorema de Cayley

Definição: Seja $(G, .)$ um grupo. Para cada $a \in G$, a aplicação

$\delta_a : G \to G$ tal que $\delta_a(x) = ax$, será chamada translação á esquerda definida por a. De maneira análoga se definiria translação à direita.

Observação: No caso G ser um grupo aditivo, a translação á esquerda definida por um elemento $a \in G$ é assim definida: $\delta_a(x) = a + x$

Proposição: Toda translação é uma bijeção, ou seja, é uma permutação dos elementos de G

Proposição: (i) A composição de translação é uma operação sobre $T(G)$;

(ii) A inversa da translação δ_a é a translação δ_{a-1};

(iii) $T(G)$ é um subgrupo do grupo $S(G, o)$ das permutações do elementos de G

Proposição: (Teorema de Cayley): Se G é um grupo, a aplicação $f : G \to T(G)$ que associa a cada a cada elemento de a a translação δ_a (isto é $f(a) = \delta_a$) é um isomorfismo de grupos.

4.2.7 Grupos cíclicos

Potências e múltiplos

Definição: Seja G um grupo multiplicativo se $a \in G$ e m é um número inteiro, a potência m-ésima de a, ou potência de a expoente m, é o elemento de G denotado por a^m e definido da seguinte maneira:

(i) Para $m \geq 0$, $a^0 = e$ e $a^m = a^{m-1}.a$

(ii) Para $m < 0$, $a^{m=} (a^{-m})^{-1}$

Proposição: Seja G um grupo multiplicativo. Se m e n são números inteiros e $a \in G$, então:

(i) $a^m.a^n = a^{m+n}$;

(ii) $a^{-m} = (a^m)^{-1}$;

(iii) $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Definição: Seja G um grupo aditivo. Se $a \in G$ e m é um número inteiro, o múltiplo m-ésimo de a é o elemento de G denotado por $m.a$ e definido da seguinte maneira:

para $m \geq 0$, $0.a = e$ e $m.a = (m-1)\,a + a$

para $m < 0$, $m.a = -[(-m)\,.a]$

Proposição: Seja G um grupo aditivo. Se m e n são números inteiros e $a \in G$, então:

(i) $m.a + n.a = (m+n)\,.a$;

(ii) $-m.a = -(m.a)$;

(iii) $n.(m.a) = (mn)\,.a$.

Grupos cíclicos

Definição: Seja $(G, .)$ e $a \in G$, denotaremos por $[a]$ subconjunto de G formado pelas potências inteiras de a, ou seja, $[a] = \{a^m / m \in \mathbb{Z}\}$

Proposição: (i) O subconjunto $[a]$ é um subgrupo de G; (ii) Se H é um subgrupo de G ao qual a pertence, então $[a] \subset H$.

Definição: Um Grupo multiplicativo G será chamado grupo cíclico se, para algum elemento $a \in G$, se verificar a igualdade $G = [a]$. Nessas condições, o elemento a é chamado gerador do grupo G.

Nota-se: Dizer que $(G, .)$ é ciclico significa dizer que $G = \{a^m / m \in \mathbb{Z}\}$ para algum $a \in G$, e no caso aditivo $a \in G$ tal que $G = \{m.a \ / \ m \in \mathbb{Z}\} = \{..., (-2)\,.a, -a, e = 0.a, a, 2a, ...\}$

O fato de $m \in \mathbb{Z}$ ser infinito não quer dizer que $[a]$ seja infinito .

Proposição: Todo subgrupo de um grupo cíclico é também cíclico.

Proposição: Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição $a^r \neq a^s \Rightarrow r \neq s$, então a aplicação $f : \mathbb{Z} \to G$ definida por $f\,(r) = a^r$ é um isomorfismo de grupos.

Proposição: Se $G = [a]$ é um grupo cíclico que cumpre a condição $a^r \neq a^s \Rightarrow r \neq s$. Então existe um inteiro $h > 0$ tal que:

(i) $a^h = e$;

(ii) $a^r \neq e$ sempre que $0 < r < h$

Proposição: Se a um elemento de período $h > 0$ de um grupo G, Então $a^m = e$ se, e somente se, $h|m$.

Proposição: Seja $G = [a]$ um grupo cíclico finito de ordem h. então:

(i) a correspondência $\bar{s} \to a^s$ é uma aplicação de $\mathbb{Z}_h$ em G

(ii) essa aplicação é um isomorfismo do grupo $(\mathbb{Z}, +)$ no grupo $(G, .)$

Grupos cíclicos finitos

Num grupo cíclico finito $G = [a]$ de ordem m, valem as seguintes propriedades:

(i) $a^m = 1$;

(ii) $G = \{1, a, a^2, ..., a^{n-1}\}$;

(iii) $a^n = 1 \Leftrightarrow m|n$;

(iv) $a^i = a^j \Leftrightarrow i \equiv j\,(mod m)$.

Todo grupo cíclico finito $G = [a]$, de ordem m, é isomorfo ao grupo $(Fm, \oplus)$ dos inteiros módulos m.

4.2.8 Classes Laterais - Teorema de Lagrange

Classes Laterais Seja H um subgrupo não trivial do grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Como já vimos, H necessariamente é cíclico, ou seja, H possui um elemento $n > 1$ tal que $H = [n] = \{0, \pm n, \pm 2n, ...\}$

Observermos então que quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{Z}$:

$a \equiv b\,(modn)$ se, e somente se, $a - b \in H$.

Proposição: (i) A relação $\approx$ sobre G definida por "$a \approx b$ se, e somente se, $a^{-1}.b \in H$" é uma relação de equivalência (ii) Se $a \in G$, então a classe de equivalência determinada por a é o conjunto $aH = \{ah | h \in H\}$.

Definição: Para $a \in G$, a classe de e quivalência aH definida pela relação $\approx$ introduzida pela proposição anterior é a chamada classe lateral direita, módulo H, determinada por a

Uma decorrência imediata da proposição anterior é que o conjunto das classe laterais à direita, módulo H, determina uma partição em G, ou seja:

(a) se $a \in G$, então $aH \neq \emptyset$;

(b) se $a, b \in G$, então $aH = bH$ ou $aH \cap bH = \emptyset$;

(c) a união de todas as classes laterais é igual a G.

Nota-se, o conjunto quociente de G por essa relação, denotado por G/H, é o conjunto das classes lateráis aH $(a \in G)$. Um dos elementos desse conjunto é o próprio H, pois $H = eH$

Proposição: Seja H um subgrupo de G. Então duas classe laterais quaisquer módulo H são subconjunto de G que têm a mesma cardinalidade.

Obs: Se G é um grupo finito, então o conjunto G/H também é finito. O número de elementos distintos de G/H é chamado índice de H e é denotado por $(G : H)$.

Teorema de Lagrange

Proposição: (Teorema de Lagrange): Seja H um subgrupo de um Grupo finito G, Então $o\,(G) = o\,(H)\,(G : H)$ e, portanto, $o\,(H)\,|o\,(G)$.

Corolário: Seja G um grupo finito, Então a ordem de um elemento $a \in G$ divide a ordem de G e o quociente é $(G : H)$, em que $H = [a]$.

Corolário: Se a é um elemento de um grupo finito G, então $a^{o(G)} = e$.

Corolário: Seja G um grupo finito cuja ordem é um numero primo. Então G é cíclico e os únicos subgrupos de G são os triviais, ou seja $\{e\}$ e o próprio G.

4.2.9 Subgrupos Normais - Grupos Quocientes

Multiplicação de subconjuntos

Sejam $(G, .)$ um grupo e A e B subconjunto de G. indicaremos por AB e chamaremos de produto de A por B o sequinte subconjunto de G:

$AB = \emptyset$, se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$

portanto, AB é uma operação sobre o conjunto $P(G)$ das partes de G, chamada multiplicação de subconjuntos de G.

Subgrupos Normais

Um subgrupo N de um grupo G é chamado subgrupo normal se para todo $x \in G$, se verificar a igualdade $XN = NX$.

Proposição: Seja N um subgrupo normal do grupo G. Então, para quaisquer $a, b \in G$, vale a igualdade $(aN)(bN) = (ab)N$.

Observação: (i) todo subgrupo de um grupo abeliano G é normal em G;

(ii) todo grupo G admite pelo menos dois subgrupos normais $\{1\}$ e G.

Grupos Quociente

Seja N um subgrupo normal de G. **As seguintes propriedades,** envolvendo a multiplicação de subconjuntos de G, restrita a G/N, são:

(i) $(aN)(bN) = (ab)N$;

(ii) $[(aN)(bN)](cN) = (aN)[(aN)(bN)]$;

(iii) $(aN)(eN) = (ae)N = aN = (ea)N = (eN)(aN)$;

(iv) $(aN)(a^{-1}N) = (aa^{-1})N = eN = (a^{-1}a)N = (a^{-1}N)(aN)$;

Portanto, o conjunto quociente G/N, com a multiplicação de subconjuntos, restritos a seus elementos e um grupo cujo elemento neutro é $eN = N$ e no qual $(aN^{-1}) = a^{-1}N$.

Definição: Sejam G um grupo e N um subgrupo normal de G, nessa condições, o grupo quociente de G por N é o par formado pelo conjunto quociente G/N e a restrição aos elementos desses conjunto da multiplicação de subconjuntos de G.

Proposição: Seja $f : G \to L$ um homomorfismo de grupos. Se N é um subgrupo normal de G, então a aplicação $\mu : G \to G/N$ definida por $\mu(a) = aN$ é um homomorfismo sobrejetor de grupos cujo núcleo é N.

Definição: Seja $f : G \to L$ um homomorfismo de grupos. Se N é um subgrupo normal de G, então o homomorfismo $(a) = aN$ é chamado homomorfismo canônico de G sobre G/N.

Teorema do Homomorfismo

Lema: Se $f : G \to L$ é um homomorfismo de grupos então $N = (f)$ é um subgrupo normal de G e, portanto, G/N tem uma estrutura de grupo.

Proposição: (teorema do homomorfismo para grupos): Seja $f : G \to L$ um homomorfismo sobrejetor de grupo. Se $N = (f)$, então o grupo quociente G/N é um isomorfismo ao grupo L.

4.2.10 Permutação

Definição: Sejam $a_1, a_2, ..., a_r \in I_n$ inteiros distintos. Se $\sigma \in S_n$ é uma permutação tal que $\sigma(a_1) = a_2, \sigma(a_2) = \sigma^2(a_1) = a_3, ..., \sigma(a_{r-1}) = \sigma^{r-1}(a_1) = a_r$ e $\sigma(a_r) = \sigma^r(a_1) = a_1$ e $\sigma(x) = x$, para todo $x \in i_n - \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, então se diz que σ é um ciclo de comprimento r e que $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ é o conjunto suporte de σ. Para designar a permutação assim definida, usaremos a notação $(a_1, a_2, ..., a_r)$. Se $r = 2$, então σ é chamado de transposição.

Proposição: Se $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_r) \in S_n$ é um comprimento $r > 1$, então $o(\sigma) = r$ e, portanto, se ε indicar a permutação idêntica de $S_n[\sigma] = \{\varepsilon, \sigma, \sigma^2, ..., \sigma^{r-1}\}$.

Proposição: Dois ciclos disjuntos comutam.

Proposição: Toda permutação $\sigma \in S_n$, exceção feita á permutação idêntica, pode ser escrita univocamente (salvo quanto á ordem dos fatores) como um produto de ciclos disjuntos

Proposição: Se $n > 1$, então toda permutação de S_n pode ser expressa como um produto de transposições.

Assinatura de uma permutação

Definição: A assinatura de uma permutação $\sigma = \begin{pmatrix} a_1, a_2, ..., a_n \\ b_1, b_2, ..., b_r \end{pmatrix}$ é o número real, aqui denotado por sgn σ, e definido por:

$$\text{sgn } \sigma = \prod \frac{a_1 - a_j}{b_1 - b_j}$$

em que o produto é estendido a todos os pares (i, j) de índices tais que $i > j$.

Proposição: A assinatura de uma transposição é -1.

Proposição: para quaisquer permutações $\sigma, \varphi \in S_n$, sgn $(\varphi \circ \sigma)\,(\text{sgn } \varphi)\,(\text{sgn } \sigma)$.

Colrolário: Se $\sigma \in S_{n,}$ então sgn $\sigma = \pm 1$.

Corolário: Qualquer que seja a permutação $\sigma \in S_n$, sgn $\sigma^{-1} = (\text{sgn } \sigma)^{-1}$.

Proposição: Seja dada uma permutação $\sigma \in S_n$ e consideremos duas decomposições de σ em transposições:

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_r \text{ e } \sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ ... \circ \rho_s$$

Então os inteiros r e s têm a mesma paridade.

Definição: Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada par ou ímpar conforme possa ser expressa como um produto de um número par ou ímpar de transposições. Em outras palavras, conforme sua assinatura seja $+1$ ou -1. O conjunto das permutações pares de S_n, será indicado por $A_n.A_n \neq \emptyset$ pois $\varepsilon = (12)\,(21)$ é o par.

Proposição: Para todo $n > 1$, o conjunto A_n é subgrupo, de ordem $n!/2$ e índice 2, de S_n. O subgrupo A_n será chamado grupo alternado de grau n.

Corolário: A_n é um subgrupo normal de S_n.

4.3 ANÉIS E CORPOS

4.3.1 Anéis

Definição: Um sistema matemático constituido de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A, respectivamente uma adição $(x, y) \to x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \to xy$ é chamado anel se:

i. $(A, +)$ é um grupo abeliano, ou seja:

A. se $a, b, c \in A$, então $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associatividade);

B. se $a, b, c \in A$, então $a + b = b + a$ (comutatividade);

C. existe um elemento $0_A \in A$ tal que , qualquer que seja $a \in A$, $a + 0_A = a$ (existência de elemento neutro);

D. qualquer que seja $a \in A$, existe um elemento em A, indicado generiamente por $-a$, tal que $a+(-a) = 0_A$ (existência de opostos).

ii. A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é: se $a, b, c \in A$ então $(ab)\,c = a\,(bc)$.

iii. A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer: se $a, b, c \in A$, então $a\,(b + c) = ab + ac = ac + ab = (b + c)\,a$

Propriedades imediatas de um anel

Seja $(A, +, .)$ um anel.

i. As propriedades aqui reunidas são conseqüências do fato de que a adição é uma operação sobre A e de que $(A, +)$ é um grupo aditivo abeliano:

A. O elemento neutro 0_A é único. Poderá ser indicado apenas pelo símbolo 0.

B. O oposto $-a$ de um elemento A do anel é único.

C. Se $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, então, $-(a_1 + a_2 + ..., +a_n) = (-a_1)+(-a_2)+ ... + (-a_n)$.

D. Se $a \in A$, então $-(-a) = a$.

E. Se $a + x = a + y$, então $x = y$. Ou seja, todo elemento de A é regular para a adição. (vale a lei do cancelamento da adição).

F. A equação $a + x = b$ tem uma e uma só solução: o elemento $b + (-a)$.

ii. Se $a \in A$, então $a.0 = 0.a = 0$

iii. Se $a, b \in A$ então $a(-b) = (-a)b = -(ab)$.

iv. Se $a, b \in A$ então $(-a)(-b) = ab$.

v. Se $a, b, c \in A$,então $a\,(b - c) = ab - ac = ac - ab = (b - c)\,a$

Definição: (diferenças em um anel): Sejam $a, b \in A$. Chama-se diferença entre a e b e indica-se por $a - b$ o elemento $a + (-b) \in A$, portanto $a - b = a + (-b)$.

Alguns anéis importantes

i. Anéis numéricos $(\mathbb{Z}, +, .)\,, (\mathbb{Q}, +, .)\,, (\mathbb{R}, +, .)\,, (\mathbb{C}, +, .)$.

ii. Anéis das classes de restos módulo m.

iii. Anéis de matrizes $(M_n(\mathbb{Z}), +, .)\,, (M_n(\mathbb{Q}), +, .)\,, (M_n(\mathbb{R}), +, .)\,, (M_n(\mathbb{C}), +, .)$.

iv. Anéis de funções

v. Sejam $A = \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}} = \{f | f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\}$.

Subanéis

Definição: Sejam $(A, +, .)$ um anel e L um subconjunto não vazio de A,diz-se que L é um subanél de A se:

i. L é fechado para as operações que dotam o conjunto A da estrutura de anel, isto é, $(\forall a, b)\,(a, b \in A \Longrightarrow a + b \in L$ e $ab \in L)$

ii. $(L, +, .)$ também é um anel.

Proposição: Sejam A um anel e L um subconjunto não vazio de A. Então L é um subanel de A se, e somente se, $a - b,\ ab \in L$.

(i) se A é um anel, então A é um grupo aditivo;.

(ii) um subconjunto não vazio de um grupo aditivo é um subgrupo desse grupo se, e somente se, é fechado para a subtração

"Sejam A um anel e L um subconjunto não vazio de A. Então L é um subanel de A se, e somente se, L é um subgrupo do grupo aditivo $(A, +)$ e $ab \in L$, quaisquer que sejam os elementos $a, b \in L$."

Tipos de Anéis

Definição: (Anéis Comutativos) Seja A um anel. Se a multiplicação de A goza da propriedade comutativa, isto é, $ab = ba$, para quaisquer $a, b \in A$ então se diz que A é um anel comutativo.

Definição: (Anéis com unidade) Seja A um anel. Se A conta com elemento neutro para a multiplicação, isto, se existe um elemento $1_A \in A$, $1_A \neq 0_A$, tal que $a1_A = 1_A.a = a$, qualque que seja $a \in A$, então se diz que 1_A é a unidade de A e que A é um anel com unidade.

Definição: (potências num anel) Seja A um anel com unidade. Se $a \in A$ e n é um número natural, define-se a^n (potência n-ésima de A) por recorrência da seguinte maneira: $a^0 = 1_A$ e $a^{n+1} = a^n a$ (sempre que $n \geq 0$)

Proposição: Seja A um anel com unidade . Se $a \in A$ e m, n são números naturais, então: (i) $a^m a^n = a^{m+n}$; (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

Definição: Seja A um anel e L um subanel de A, ambos com unidade. Se $1_A = 1_B$, diz-se que L é um subanel unitário de A.

Definição: (Anéis comutativos com unidade) Um anel cuja multiplicação é comutativa e que possui unidade chama-se anel comutativo com unidade.

Definição: (Anéis de Integridade) Seja A um anel comutativo com unidade. Se para esse anel vale a lei do anulamento do produto, ou seja, se uma igualdade do tipo $ab = 0_A$ em que $a, b \in A$, só for possível para $a = 0_A$ ou $b = 0_A$ então se diz que A é um anel de integridade ou domínio. A forma contrapositiva dessa condição é a sequinte: Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, então $ab \neq 0$.

Proposição: Um anél de classes de restos $\mathbb{Z}_m$ é anel de integridade se, e somente se, m é um número primo.

Proposição: Seja A um anel comutativo com unidade A. Então A é um anel de integridade se, e somente se, todo elemento não nulo de A é regular para a multiplicação, isto é, $(\forall a, b, c \in A)\,(a \neq 0 \text{ e } ab = ac \Longrightarrow b = c)\,.$

4.3.2 CORPOS

Definição: Um anel K, comutativo com unidade, recebe o nome de corpo se todo elemento não nulo de K admite simétrico multiplicativo. Ou seja: $(\forall a \in K)$ $(a \neq 0 \Longrightarrow \exists\, b \in K \mid ab = 1)\,.$

Exemplos: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são corpos.

Proposição: Todo corpo é um anel de integridade.

Proposição: Todo anel de integridade finito é um corpo

Definição: Um objeto matemático constituído de um conjunto não vazio K, uma adição e uma multiplicação sobre K recebe o nome de corpo:

i. se K é um grupo abeliano no que se refere à adição;
ii. se 0 indica o elemento neutro da adição $K^* = K - \{0_K\}$ é um grupo abeliano no que se refere á multiplicação;
iii. se a multiplicação é distributiva em relação á adição.

Definição: (subcorpo): Seja $(K, +, .)$ um corpo. Um subconjunto não vazio $L \subset K$ é chamado subcorpo de K se é fechado para a adição e a multiplicação de K e se L também tem uma estrutura de corpo.

Proposição: Sejam K um corpo e L um subconjunto não vazio de K. Para que L seja um subcorpo de K é necessário e suficiente que:

i. $0, 1 \in L$;
ii. se $x, y \in L$, então $x - y \in L$;
iii. se $x, y \in L$ e $y \neq 0$, então $xy^{-1} \in L$.

4.3.3 HOMOMORFISMOS DE ANÉIS

Definição: Dá-se o nome de homomorfismo de um anel $(A, +, .)$ num anel $(B, +, .)$ a toda aplicação $f : A \rightarrow B$, ou seja:

i. $(\forall x, y)\,(x, y \in A \Longrightarrow f\,(x+y) = f\,(x) + f(y))$

ii. $(\forall x, y)\,(x, y \in A \Longrightarrow f\,(xy) = f\,(x)\,f(y))$

Proposições sobre Homomorfismo de Anéis

Proposição: Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de anéis, então:

i. $f\,(0_A) = 0_B$;

ii. $f\,(-a) = -f\,(a)\,;$

iii. $f\,(a-b) = f\,(a) - f\,(b)\,.$

Proposição: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis e suponhamos que A possua unidade. Então:

i. $f\,(1_A)$ é a unidade de B e portanto, B também é um anel com unidade;

ii. se $a \in A$ é inversível, então $f\,(a)$ também o é e $[f\,(a)]^{-1} = f\,(a^{-1})\,.$

Proposição:

(i) Se $f : A \to B$ é um homomorfismo de anéis e L é um subanel de A, então $f\,(L)$ é um subanel de B; (ii) Se $f : M \to N$ é um homomorfismo de corpos, $f\,(1_m) \neq 0_n$ e K é um subcorpo de m, então $f\,(K)$ é um subcorpo de N.

Proposição: Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ homomorfismo de anéis. Então $gof : A \to C$ também é um homomorfismo de anéis.

NÚCLEO DE UM HOMOMORFISMO DE ANÉIS

Definição: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Damos o nome de núcleo de f, e denotamos por $N\,(f)\,((f))$, ao seguinte subconjunto de A : $N\,(f) = \{x \in A | f\,(x) = 0_B\}\,.$

Proposição: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Então

i. $N\,(f)$ é um subanel de A;

ii. f é injetor se, e somente se, $N(f) = \{0_A\}\,.$

ISOMORFISMO DE ANÉIS

Definição: Seja $f : A \to B$ um homomorfismo de anéis. Se f for uma bijeção, então será chamado de isomorfismo do anel A no anel B.

Proposição: Seja $f : A \to B$ um isomorfismo de anéis. Então $f^{-1} : B \to A$ também é um isomorfismo de anéis.

4.3.4 CORPO DE FRAÇÕES DE UM ANEL DE INTEGRIDADE

Quocientes em um corpo

Num corpo K, a equação $ax = b$, em que $a \neq 0$, tem uma unica solução, que é o elemento $a^{-1}b = ba^{-1}$. Um elemento de escrito na forma $a^{-1}b = ba^{-1}$ é chamado quociente de a por b e denotado por $\frac{a}{b}$. É fácil ver por outro lado, que todo elemento $a \in K$ é um quociente: por exemplo, se $b \neq 0$ é um elemento de K, então $a = (ab)\, b^{-1} = \frac{ab}{b}$.

Proposição: Sejam a, b, c, d elementos de um corpo K. Se $b \neq o$ e $d \neq 0$, então:

1. (a) i. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, $ad = bc$;
   ii. $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$;
   iii. $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$;
   iv. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b}$;
   v. se $a \neq 0$ (além de b), então $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$.

4.3.5 Característica de um Anel

Definição: Seja A um anel. Suponhamos que, para algum inteiro $n > 0$ e qualquer $a \in A$, verifica-se a igualdade $n.a = 0$ (zero do anel). Então $\exists r,\ r > 0$ tal que $r.a = 0,\ \forall a \in A$. Esse inteiro r é chamado característica do anel A e indicado por $c(A)$. Se ao contrário, o anel A possui pelo menos um elemento a tal que $n.a \neq 0$, qualquer que seja o inteiro estritamente positivo n, então se diz que a carcterística do anel é 0.

Proposição: Seja A um anel com unidade. Então a característica de A é um inteiro $h > 0$ se, e somente se, h é o menor inteiro estritamente positivo tal que $h.1_A = 0_{A.}$ Ou seja, se, e somente se, h é a ordem de 1_A no grupo aditivo $(A, +)$.

Proposição: Se a característica de um anel de integridade A não é zero, então é um número primo.

Proposição: Dos anéis isomorfos têm a mesma característica.

Proposição: Seja A um anel com unidade.

i. se $c(a) = h > 0$, então a correspondência que associa a cada $\bar{r} \in \mathbb{Z}_h$ o elemento $r.1_a$ é um isomorfismo de anéis.

ii. E se $c\,(A) = 0$, então é um isomorfismo de anéis a aplicação $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}.1_A$ definida por $f(r) = r.1_A$.

4.3.6 IDEAIS

Definição: Seja A um anel comutativo. Um subconjunto $I \subset A, I \neq \emptyset$, será chamado de ideal em A se, e somente se,

i. $(\forall x, y)\,(x, y \in I \Longrightarrow x - y \in I)\,;$

ii. $(\forall a, x)\,(a \in A \text{ e } x \in I \Longrightarrow ax \in I)\,.$

4.3.7 Ideais em um Anel Comutativo

Proposição: Seja J um ideal em um anel comutativo A. então:

i. $0 \in j$ ($0 =$ zero do anel);

ii. se $a \in J$, então $-a \in J$;

iii. Se $a, b \in J$, então $a + b \in$.

iv. se o anel possui unidade e se algum elemento inversível do anel pertence a J, então $J = A$.

IDEAIS GERADOS POR UM NÚMERO FINITO DE ELEMENTOS

Definição: Se A é um anel comutativo e $S = \{a_{1,}a_2, ..., a_n\} \subset A$, então o ideal $< a_{1,}a_2, ..., a_n >$, introduzido nas considerações anteriores, é chamado ideal gerado por S(ou pelos elementos de S). O ideal gerado por um conjunto unitário $\{a\}$ é chamado ideal principal gerado por a. Se todos os ideais de um anel comutativo são principais, então esse anel recebe o nome de anel principal.

Proposição: Seja A um anel comutativo com unidade. Então A é um corpo se, e somente se, os únicos ideais de A são os triviais ($\{0\}$ e A).

Operações com Ideais

Proposição: Se I e J são ideais em A, então $I \cap J$ é o 'maior' ideal contido em I e em J.

Proposição: Se Ie J são ideais em um anel comutativo A, então:

i. $I + J$ contém I e J;

ii. $I + J$ é o "menor" ideal em A com essa propriedade.

IDEAIS PRIMOS E MAXIMAIS

Definição: Seja P um ideal em um anel comutativo A. Diz-se que P é um ideal primo se $P \neq A$ e se qualquer relação do tipo $ab \in P$, em que $a, b \in A$, tiver como consequência que $a \in P$ ou $b \in P$.

Definição: Seja P um ideal num anel comutativo A. Diz-se que M é um ideal maximal se $M \neq A$ e se os únicos ideais em A que contêm M são o próprio M e A

Definição: Todo ideal maximal em um anel comutativo é necessariamente um ideal primo.

4.3.8 Anéis Quocientes

Proposição: Seja I um ideal em um anel comutativo A. Considerando-se I como subgrupo normal de A, então o grupo quociente A/I torna-se um anel comutativo definindo-se a multiplicação em A/I assim: $(a+I)(b+I) = (ab)+I$.

Proposição: Sejam A um anel de comutativo com unidade e J um ideal em A. Então:

i. J é um ideal primo se, e somente se, A/J é um anel de integridade;

ii. J é um ideal maximal se, e somente se, A/J é um corpo.

Proposição: Seja I um ideal em um anel comutativo A e consideremos a aplicação $\mu(a) = a + I$, para cada $a \in A$. Então μ é um homomorfismo sobrejetor de anéis cujo núcleo é I.

Definição: Seja I um ideal em um anel comutativo A. Então o homomorfismo $\mu : A \to A/I$ introduzido na proposição anterior e definido por $\mu(a)\, a + I$, para cada $a \in A$ é chamado homomorfismo Canônico de A sobre A/I.

Proposição: (teorema do homomorfidmo para anéis): Seja $f : A \to B$ um homomorfismo sobrejetor de anéis. Se $I = (f)$, então o anel quociente A/I é isomorfo a B.

4.3.9 ORDEM EM UM ANEL DE INTEGRIDADE

ANÉIS DE INTEGRIDADE ORDENADOS

Definição: Consideremos um par ordenado constituído de um anel de integridade $(A, +, .)$ e uma relação de ordem total $\leq$ sobre A. Nessas condições, diz-se que $(A, +, ., \leq)$ é um anel de integridade ordenado quando os seguintes axiomas se cumprem:

(a) Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$.

(b) Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.

PROPRIEDADES IMEDIATAS DE UM ANEL DE INTEGRIDADE ORDENADO

Proposição: Em um anel ordenado são equivalentes as afirmações

i. $a \leq b$;

ii. $a - b \leq 0$;

iii. $-b \leq -a$.

Proposição: Seja A um anel ordenado. Então, para quaisquer $a, b, c \in A$:

i. Se $a + c \leq b + c$, então $a \leq b$;

ii. $a < b$ se, e somente se, $a + c < b + c$

Corolário: Num anel ordenado, são equivalentes as afirmações:

i. $a < b$;

ii. $a - b < 0$;

iii. $-b < -a$.

Em particular são equivalentes as condições: (a) $a > 0$ e (b) $-a < 0$

Proposição: Sejam a, b, c elementos de um anel ordenado. Então: $a < c$ sempe que

i. $a \leq b$ e $b \leq c$;

ii. $a < b$ e $b \leq c$;

iii. $a < b$ e $b < c$.

Proposição: ("adição de desigualdades"): Seja A um anel ordenado. Se $a_1, a_2, ..., a_n$, $b_1, b_2, ..., b_n \in A$ e $a_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, ..., n;\ n \geq 1)$, então: $a_1 + a_2 + ..., +a_n \leq b_1 + b_2 + ... + b_n$. Se, demais, $a_r \leq b_r$, para algum índice $r(1 \leq r \leq n)$, então: $a_1 + a_2 + ..., +a_n < b_1 + b_2 + ... + b_n$. Em particular, se $a \leq b$ $(a < b)$ e $n.a \leq n.b$ $(n.a < n.b)$.

Proposição: Se $a < b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$. Mais: $ac = bc$ se, e somente se, $c = 0$ e portanto, $ac < bc$, sempre que $c > 0$.

Corolário: Se $a < b$ e $c \leq 0$, então $bc \leq ac$. Mais:$ac = bc$ se, e somente se, $c = 0$ e portanto, $bc < ac$, sempre que $c < 0$.

Proposição: (regra de sinais) Num anel ordenado, $ab > 0$ se, e somente se, $a > 0$ e $b > 0$ ou $a < 0$ e $b < 0$. (Isto é, $ab > 0$ se, e somente se, a e b têm o "mesmo sinal".)

Proposição: $a^2 \geq 0$ e $a^2 = 0$ se, e somente se, $a = 0$.

Corolário: Se 1 indica a unidade de um anel ordenado A e 0 o zero desse anel, então $1 > 0$. se $a_{1,}a_2, ..., a_n, b_{1,}b_2, ..., b_n \in A$

Corolário: Seja A um anel ordenado.Se $a_{1,}a_2, ..., a_n \in A$, então $a_1^2 + a_2^2 + ..., +a_n^2 \geq 0$. E se $a_r \neq 0$, para algum índice $r\,(1 \leq r \leq n)$, então $a_1^2 + a_2^2 + ..., +a_n^2 > 0$.

Proposição: A característica de um anel de integridade ordenado é zero.

Corolário: Se $(A, +, .)$ é um anel de integridade finito, então nenhuma relação de ordem sobre A é compatível com as operações do anel. Em outras palavras, não há como ordenar o anel A.

Anéis de integridade bem ordenados

Definição: Seja A um anel de integridade ordenado. Então os elementos de $P = \{x \in A \mid x \geq 0\}$ são chamados elementos positivos do anel. Se todo subconjunto de P possui mínimo, então se diz que A é um anel de integridade bem ordenado.

Proposição: Seja A um anel bem ordenado. Então A não possui nenhum elemento x tal que $0 < x < 1$.

Definição: Um anel de integridade ordenado A se diz arquimediano se, qualquer que seja $a \in A$, existe um número natural $n > 0$ tal que $n.1_A > a$.

Proposição: Todo anel de integridade bem ordenado é arquimediano.

Corpos ordenados

Seja K um corpo. Então K é um anel de integridade e , como tal, pode se tratar de um anel ordenado. Neste caso, diz -se que K é um corpo ordenado.

Proposição: Sejam a, b elementos arbitrários de um corpo ordenado K. Indicando-se o zero e a unidade desse corpo respectivamente por 0 e 1, tem-se:

i. Se $a > 0$, então $a^{-1} > 0$, e se $a < 0$, enão $a^{-1} < 0$.
ii. se $0 < a < 1$,então $1 < a^{-1}$, e se $1 < a$, então $0 < a^{-1} < 1$.
iii. se $b > a > 0$, então $b^{-1} < a^{-1}$.
iv. se $a < b < 0$, então $b^{-1} < a^{-1} < 0$.

Proposição: Sejam a e b elementos de um corpo ordenado K. Se $a < b$, então o corpo K possui um elemento c tal que $a < c < b$.

Corolário: Nenhum corpo ordenado é um anel bem ordenado.

4.4 Anéis de Polinômios

Seja A um anel de integridade infinitos. Uma função $f : A \rightarrow A$ denomina-se função polinomial sobre A se existem elementos $a_0, a_1, ..., a_r$ em A tais que, para todo $x \in A$:

$$f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$$

.

Definição: Seja f um polinômio sobre A. Um elemento $u \in A$ é chamado raiz de f se $f(u) = 0$ (zero do anel).

Proposição: Se u uma raiz de um polinômio não constante $f \in A\left[x\right]$. Se $f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$, com $a_r \neq 0$, para todo $s \in A$, então $f\left(x\right) = \left(x - u\right) q(x)$, para algum polinômio q com uma forma padrão do seguinte tipo: $q\left(x\right) = ... + a_r x^{r-1}$.

Corolário: Seja $f \in A\left[x\right]$ assim definido: $f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$, com $a_r \neq 0$. Se $u_{1,} u_{2,} ... u_m$ são raizes de f, então:

$$f\left(x\right) = \left(x - u_1\right)\left(x - u_2\right) ... \left(x - u_m\right) q_m\left(x\right)$$

em que q_m é um polinômio de $A[x]$ que admite uma forma padrão do tipo $q_m(x) = ... + a_r x^{r-1}$, para todo $x \in A$. Ademais, qualquer outra eventual raiz de f é raiz de q_m .

Proposição: Seja $f \in A\left[x\right]$ um polinômio assim definido: $f\left(x\right) = a_0 +, a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$, com $a_r \neq 0$ (zero de A). Então f tem r raízes, no máximo, em A.

Proposição: (princípio de identidade de polinômios): Sejam f e g polinômios de $A\left[x\right]$, que admitem forma padrão do tipo $f\left(x\right) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_r x^r$ e $g\left(x\right) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_s x^s$, para todo $x \in A$. Então $f = g$ se, e somente se, $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$, ...

Divisibilidade em $A\left[x\right]$

Divisão exata: Dados $f, g \in A\left[x\right]$, diz que um polinômio f divide g se existe um polinômio $h \in A\left[x\right]$ tal que $g = fh$. Para indicar essa relação usa-se a notação $f|g$. Se f não é divisor de g, isso é indicado por $f \nmid g$.

Definição: Dois polinômios $f, g \in A\left[x\right]$ tais que $f|g$ e $g|f$ dizem-se associados. Quando f e g são associados, diz-se também que g é associado de f, e vice-versa.

Proposição: Seja $f \in A[x]$ é associado de f se, e somente se, $g = cf$, para algum polinômio constante inversível c.

Proposição: (algoritmo euclidiano): Dados os polinômios $f, g \in A[x]$, com $g \neq 0$ e o coeficiente dominante de g inversível, entãoexistem polinômios q e r tais que $f = gq + r$, em que ou $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(g)$. Ademais, é único o par de polinômios (q, r) que cumpre as condições da proposição.

Corolário: Seja K um corpo e consideremos $f, g \in K[x]$, com $g \neq 0$. Então existem polinômios q e r tais que $f = gq + r$, em que ou $r = 0$ ou $\partial(r) < \partial(g)$. Ademais, é único o par de polinômios (q, r) que cumpre essas condições.

Sobre Raízes

Definição: Seja f um polinômio sobre A definido por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_rx^r$. Suponhamos ainda que A é um subanel unitário de um anel de integridade L. Um elemento $u \in L$ é chamado raiz de f se $f(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + ... + a_ru^r = 0$. Neste caso, diz-se também que u é raiz da equação $f(x) = 0$

Proposição: (teorema do resto): Seja f um polinômio sobre A, de grau ≥ 1. Se A é um Subanel unitário do anel de integridade L e u é um elemento de L, então o resto da divisão de $f(x)$ por $(x - u)$ em $L[x]$ é $f(u)$.

Corolário: Seja f um polinômio sobre A, de grau ≥ 1. Se A é um Subanel unitário do anel de integridade L e u é um elemento de L, então $(x - u)|f$ (em $L[x]$) se, e somente se $f(u) = 0$.

Proposição: Seja f um polinômio sobre A, de grau ≥ 1. Se A é um Subanel unitário $u_1, u_2, ...u_n \in L$ são raízes distintas de f, então existe um polinômio $q \in L[x]$ de grau $n - r$ tal que $f(x) = (x - u_1)...(x - u_r)q(x)$.

Polinômios Irredutíveis

Definição: Um polinômio não nulo e não inversível $p \in K[x]$ se diz irredutível sobre K se uma decomposição de p num produto de dois fatores de $K[x]$ só for possível com um dos fatores inversível. ou seja, se $p = fg$, então f é inversível ou g é inversível.

Proposição: Todo polinômio de grau 1 sobre um corpo K é irredutível.

4.5 Anéis Principais e Fatoriais

Divisibilidade em um Anel de Integridade

Definição: (Elementos associados) Sejam a e b elementos de um anel de integridade A. Diz-se que a é associado de b se $a|b$ e $b|a$. Essa relação será indicada por $a \sim b$.

Proposição: Para dois quaiquer elementos a e b de A são equivalentes as seguintes afirmações: (i)$a \sim b$; (ii) $< a >=< b >$; (iii) $b = au$, para um conveniente elemento inversível $u \in A$.

Definição: Um elemento $p \in A$ se diz primo se: (i) $p \neq 0$; (ii) p não é inversível; (iii) quaisquer que seja $a, b \in A$, se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Definição: Dizemos que um elemento $d \in A$ é máximo divisor comum dos elementos $a, b \in A$ se: (i) $d|a$ e $d|b$; (ii) todo divisor de a e b é divisor de d (ou seja, se $d_1 \in A$ e $d_1|a$ e $d_1|b$ então $d_1|d$)

Proposição: Sejam a e b elementos de A. Se d é máximo divisor comum de a e b, então todo associado de d também o é. Reciprocamente, se d e $d\prime$ são máximos divisores comuns de a e b, então $d \sim d\prime$.

Anéis Principais, Fatorais e Euclidiano

Definição: (Anéis principais) Se I é um ideal em um anel principal, então existe $a \in I$ tal que $I =< a >$.

Proposição: Em um anel principal todo elemento irredutível é primo.

Proposição: Dois elementos quaisquer de um anel principal têm máximo divisor comum nesse anel.

Corolário: Dois elementos, a e b, de um anel principal A são primos entre si se, e somente se, existem elementos $x_0,\ y_0 \in A$ tais que $ax_0 + by_0 = 1$.

Corolário: Se d é um máximo divisor divisor comum de a e b, com um deles pelo menos não nulo, então (a/b) e (b/d) são primos entre si.

Proposição: Um elemento $p \neq 0$ de um anel principal A é irredutível (ou primo) se, e somente se, o ideal $< p >$ é maximal.

Lema: Se $I_1 \subset L_2 \subset I_3 \subset ...$ uma seqüência de ideais em um anel principal A. Então existe um índice $r \geq 1$ tal que $L_r = I_{r+1} = ...$, ou seja, a seqüência é estacionária.

Lema: Seja A um anel principal. Então todo elemento não inversível $a \in A$ tem um divisor irredutível nesse anel.

Definição: (Anéis fatorais) Diz-se que um anel de integridade A é um anel fatorial se as seguintes condições se cumprem: (i)Todo elemento $a \in A$, não nulo e não inversível. pode ser escrito como um produto de elementos irredutíveis de A. (ii) Se $a = p_1 p_2 ... p_r = q_1 q_2 ... q_s$ são fatores irredutíveis de A, então $r = s$ e , para um conveniente permutação π dos ìndices, se for o caso $p_i \sim q_{\pi(i)}$ $(i = 1, 2, ..., r)$.

Definição: (Anéis euclidiano) Seja A um anel de integridade e suponhamos que se possa definir uma aplicação $d : A^* = A - \{o\} \to N$ que cumpra as seguintes condições:

i. Se $a, b \in A^*$, então $d(ab) \geq d(a)$.

ii. se $a, b \in A$ e $b \neq 0$, então existem $q, r \in A$(o quociente e o resto, respectivamente) tais que $a = bq + r$, em que $r = 0$ ou $d(r) < d(b)$.

Neste caso, dizse que A é um anel d-euclidiano ou, subentendiada a aplicação d, simplesmente euclidiano.

Proposição: Todo anel d-euclidiano é principal.

Polinômios sobre Anéis Fatorais

Definição: Um polinômio não constante pertence a $A[x]$ se diz primitivo se a unidade de A é um máximo divisor comum de seus coeficientes. Em outras palavras, isso significa que os únicos divisores dos coeficientes do polinômio são os elementos inversíveis do anel.

Proposição: Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \in A[x]$ um polinômio não nulo. Então existem um elemento $d \in A$ e um polinômio primitivo $f^* \in A[x]$, de mesmo grau que f, tais que $f = df^*$.

Proposição: Seja $f \in A[x]$ um polinômio não constante. Se f é irredutível, então f é primitivo.

Lema: Se $f, g \in A[x]$ são polinômios primitivos e par elementos $a, b \in A$ vale a igualdade $af = bg$, então $a \sim b$ e $f \sim g$.

Lema: (lema de Gauss):O produto de dois polinômio primitivos $f, g \in A[x]$ também é um polinômio primitivo.

Lema: Seja K o corpo das frações de A. Se o polinômio $f \in A[x]$ é irredutível sobre A, então também é erredutível sobre K.

Proposição: (critério de Eisenstein): Seja $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n \in A[x]$. Se existir um elemento irredutível $p \in A$ que seja divisor de $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$ mas não de a_n e se p^2 não divide a_0, então f é irredutível sobre o corpo das frações de A.

Lema: Seja A um anel fatorial. Então todo polinômio irredutível $f \in A[x]$ também é primo.

Proposição: Se um anel A é fatorial, então $A[x]$ também é um anel fatorial.

5 Roteiros de Atividades Lúdicas Matemágicas

Neste capítulo apresentamos de forma detalhada alguns roteiros de atividades lúdicas para a implementação da Feira Matemágica em outras escolas. As atividades lúdicas matemágicas foram desenvolvidas de forma que o estudante continue a desenvolver as competências e habilidades dos conteúdos e temas que estão disponíveis no Currículo de Matemática do Estado de São Paulo [5]. Nas referências [14] e [15] podem ser encontradas uma série de outras atividades. No link `https://www.youtube.com/watch?v=N2Aj9nTCQbo&list=PL4RwlMtuvyzvX1m3Qw7LH2_bdT89zl-mC` você pode encontrar algumas vídeos-aulas que organizei durante a implementação da Feira. Assim como a apresentação desta dissertação.

O diferencial deste roteiro está na abordagem metodológica. A proposta é que o estudante e a atividade sejam os centros do processo de ensino-aprendizagem. O professor tem que deixar de ser a figura central do conhecimento. Deve tornar a aula mais um laboratório do que um auditório para que o estudante assuma a posição de protagonista da sua curiosidade e possa construir de forma significativa o seu conhecimento. A função e a figura do professor neste roteiro de atividade lúdicas será aproveitar a motivações dos educandos para mediar, cooperar, conduzir e facilitar o entendimento matemático para que esses possam avançar nos conceitos teóricos propostos, isto é, quando ele terminar a sequência pesquisada de conceitos matemáticos, possa de forma significativa compreender o algoritmo matemático por de trás das matemágicas. Pois, dessa maneira, o educando gradua nos conhecimentos e sentirá que foi estimulado e bem-sucedido de forma positiva. Caso contrário sentirá aversão, ou simplesmente não avançará a conceitos teóricos matemáticos, pois fez mágica por mágica, isto é, realizou uma decoreba sem compreender.

5.1 Mágica de Fibonacci

Conteúdos ou temas: Álgebra; sequência numérica; números/relações.

Competência e Habilidades: Identificar a lei de formação de uma sequência numérica e completá-la; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema; demonstrar a compreensão de regularidades observadas em sequências de números; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. Quem foi Fibonacci?
  3. Como é a sequência de Fibonacci?
  4. Qual é a relação entre Proporção Áurea (número de ouro) e a sequência de Fibonacci?
  5. Sugestão: assistir o vídeo, Donald proporção Áurea.
  6. Descreva o problema dos coelhos de Fibonacci.
  7. Mostrar a validade da Mágica de Fibonacci por meio da álgebra ou aritmética com auxílio do professor.
  8. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica de Fibonacci

- **Primeiro Passo:** Convidar uma pessoa da plateia aleatória e orientar escrever dois números inteiros quaisquer de 1 a 10 que chamaremos de 1º termo e 2º termo.

Exemplo :

Supõe-se que os números escolhidos foram $a_1 = 2$ e $a_2 = 5$

- **Segundo Passo**: Formar um terceiro número, sendo que o 3º termo é igual o 2º termo mais o 1º termo.

Exemplo :

Termos	a_1	$+$	$a_2 =$	a_3
Números	2	$+$	$5 =$	7

- **Terceiro Passo:** Formar um 4º número, sendo que o 4º termo é igual o 3º termo mais o 2º termo.

Exemplo :

Termos	a_2	+	$a_3 =$	a_4
Números	5	+	7 =	12

- **Quarto Passo:** Formar um 5º número, sendo que o 5º termo é igual o 4º termo mais o 3º termo.

Exemplo :

Termos	a_3	+	$a_4 =$	a_5
Números	7	+	12 =	19

- **Quinto Passo:** Formar um 6º número, sendo que o 6º termo é igual o 5º termo mais o 4º termo.

Exemplo:

Termos	a_4	+	$a_5 =$	a_6
Números	12	+	19 =	31

- **Último Passo:** Mostrar todos os seis termos para que o Mister Matemágico faça a revelação total das somas dos seis termos. Enquanto a pessoa da plateia irá fazer a conta de soma para verificar a validade da resposta.

Exemplo: *Para todas as somas, basta o Mágico ver o quinto termo e multiplicar sempre pelo número 4, assim obterá a soma dos seis primeiros termos da soma. Mágica que exige do mágico a habilidade do cálculo mental entre outras.* $4 \cdot a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$, isto é, $4 \cdot 19 = 76$

Soma dos Termos	a_1	+	a_2	+	a_3	+	a_4	+	a_5	+	$a_6 =$	$\Sigma_{n=1}^{6} a_n$
Soma dos Números	2	+	5	+	7	+	12	+	19	+	31 =	76

5.2 Mágica da Descoberta do número do Sapato e da Idade

Conteúdos ou temas: Expressão numérica; álgebra; números/relações.

Competências e Habilidades: Ler e escrever expressões algébricas correspondentes a textos escritos em linguagem corrente e vice-versa; calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema; realizar operações simples com monômios e polinômios; calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; compreender o conceito de equação a partir da ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta; conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é linguagem algébrica? Dar exemplos.
  3. O que é equacionar?
  4. O que é incógnita de uma equação?
  5. O que é termo de uma equação do 1º grau? Dar exemplos.
  6. O que significa equação equivalente? Dar exemplos.
  7. O que são operações inversas?
  8. O que são operações inversas numa equação?
  9. O que é solução de uma equação?
  10. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica da descoberta do número do sapato e da idade

- **Primeiro Passo:** Uma pessoa da plateia deverá pegar uma calculadora para registrar o número do sapato e multiplicar por 5.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa calça um sapato nº 43. Então ela digitará em segredo* $5 \cdot 43 = 215$*. Já na forma algébrica teríamos* $5 \cdot ab$.

- **Segundo Passo:** Ao resultado obtido adicionar 50.

Exemplo: *Forma Numérica* $215 + 50 = 265$ *Forma Algébrica* $5 \cdot ab + 50$.

- **Terceiro Passo** Ao resultado multiplicar por 20.

Exemplo: *Forma Numérica* $20 \cdot 265 = 5300$ *Forma Algébrica* $20 \cdot (5 \cdot ab + 50) = 100ab + 1000$.

- **Quarto Passo:** Ao resultado obtido adicionar 1017.

Exemplo: *Forma Numérica* $5300+1017 = 6317$ *Forma Algebrica* $((100ab+1000)+1017) = 100ab + 2017$.

- **Quinto Passo:** Ao resultado subtrair o ano de nascimento.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa nasceu em 1988, isto é, fez ou faria 29 anos. Logo ela poderia calcular da seguinte forma. Forma Numérica* $6317-1988 = 4329$ *Forma Algebrica* $((100ab + 2017) - 1988) = 100ab + 29$.

– **Último Passo:** Revelar a todos a soma total e aguardar a revelação do mágico.

Exemplo: *Quando a pessoa da plateia revelar o número total 4329. Então colocará as duas mãos na cabeça e revelará apontando para a pessoa que os dois primeiros dígitos (dos milhares e das centenas) são o números do sapato e os dois últimos (das dezenas e das unidades) é a idade que a pessoa tem ou que irá fazer. Observe que, se você acompanhar o raciocínio da forma algébrica, perceberá que sempre os dois primeiros algarismos será o número do sapato e os dois últimos será o número da idade que a pessoa da platéia tem ou irá fazer.*

5.3 Mágica da Soma Gigante

Conteúdos ou temas: Expressões numéricas; números/relações.

Competência e Habilidades: Reconhecer e utilizar características do sistema decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas que envolve parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema;

– O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

1. O que é algoritmo na matemática?
2. O que é Aritmética?
3. Quais são as propriedades da adição?
4. Exemplos da propriedade associativa da adição.
5. Dê exemplos de Expressão numérica equivalente ou números equivalentes?
6. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar.

Procedimento didático da Mágica da Soma Gigante

∗ **Primeiro Passo:** Uma pessoa do público deverá escrever um número de 4 algarismos numa lousa.

Exemplo : *Supõe-se que a pessoa da plateia escreva na lousa o número* 2735.

	DM	UM	C	D	U
Pessoa		2	7	3	5

∗ **Segundo Passo:** O Mágico ao ver o número escrito. Escreverá no papel o resultado da soma e deixará com a pessoa que só no final abrirá o papel e ficando surpreso com a previsão do resultado da soma.

Exemplo: *O mágico escreverá numa folha de papel o resultado final da conta que será de* 22733.

∗ **Terceiro Passo:** A pessoa escreverá novamente um número qualquer de mesma ordem, e alternando com o mágico duas vezes.

Exemplo : *No final das interações a pessoa verá o resultado final da conta que será de* 22733.

	DM	UM	C	D	U
Pessoa		2	7	3	5
Pessoa		7	9	1	4
Mágico		2	0	8	5
Pessoa		1	4	8	9
Mágico		8	5	1	0

∗ **Ultimo Passo:** A pessoa calculará a adição e verificará a façanha do Mister Mago ao abrir o papel com o resultado previsto.

Exemplo:

	DM	UM	C	D	U
Pessoa		2	7	3	5
Pessoa		7	9	1	4
Mágico		2	0	8	5
Pessoa		1	4	8	9
Mágico	+	8	5	1	0
	2	2	7	3	3

Nota que: *O número escolhido pelo mágico sempre será aquele que somado com os algarismos das unidades resultará no número 9, assim como, os da dezenas, centenas e milhares. Para que a soma final dê dois blocos de 9999, isto é, pela propriedade associativa o mágico consegue prever o resultado final, porque pela propriedade associativa basta o mágico sempre somar mentalmente o primeiro número de quatro algarismos com 20 mil e subtrair 2 unidades*

$$\begin{array}{cccc} \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ 2 & 7 & 3 & 5 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{ccccc} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 7 & 9 & 1 & 4 \\ + & 2 & 0 & 8 & 5 \\ \hline & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array} \quad + \quad \begin{array}{ccccc} & \text{UM} & \text{C} & \text{D} & \text{U} \\ & 1 & 4 & 8 & 9 \\ + & 9 & 5 & 1 & 0 \\ \hline & 9 & 9 & 9 & 9 \end{array}$$

2735	+	(10 000 - 1)	+	(10 000 -1)
2735	+	10 000 + 10 000	+	(-1 -1)
2735	+	20 000	+	-2
		22733		

5.4 Mágica do Calendário: Mês e Dia

Conteúdos ou temas: Números/Relações; operações com potências de números inteiros.

Competências e Habilidades: Resolver problemas expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; reconhecer e utilizar características do sistema decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional; resolver problemas com números inteiros envolvendo as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação); expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema; identificar, ler e interpretar as informações do calendário; estabelecer um relação entre as unidade de tempo: ano, mês, dia; aplicar conceitos de potência em situações diversas; efetuar cálculos envolvendo expressões numéricas com potência de números inteiros; compreender o funcionamento de sistemas decimais e não decimais de numeração e realizar cálculos simples com potências.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é potência de uma base?
  3. Como calcular potência de base 2?
  4. Como fazer as representações das 10 primeiras potências na base 2?
  5. O que é sistema de numeração decimal?
  6. O que é sistema de numeração binária?
  7. Exemplo de como converter um número do sistema decimal para o sistema binário e vice-versa.

8. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica do calendário: mês e dia

– **Primeiro Passo:** Ter uma cola dos dias dos períodos dos inícios e términos dos meses dos zoodíacos sem que a plateia veja ou decore-os.

Exemplo: *Áries - 21/3 a 20/4; Touro - 21/4 a 20/5; Gêmeos - 21/5 a 20/6; Câncer - 21/6 a 21/7 ; Leão - 22/7 a 22/8; Virgem - 23/8 a 22/9; Libra - 23/9 a 22/10 ; Escorpião - 23/10 a 21/11; Sagitário - 22/11 a 21/12; Capricórnio - 22/12 a 20/1; Aquário - 21/1 a 19/2; Peixes - 20/2 a 20/3.*

– **Segundo Passo:** Contar uma história qualquer!

Exemplo: *Um fato público, o racionamento de água em São Paulo no período de 2014 - 2016.*

– **Terceiro Passo:** Chamar uma pessoa da plateia, perguntar o signo dela.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa disse que é do signo de Áries, logo o mágico sem falar para pessoa sabe que ela nasceu entre 21/03 a 20/04*

– **Quarto Passo:** Orientar a pessoa para responder se é aniversário dela, sim ou não, para cada uma das 5 folhas que será mostrada.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa pensou no dia 21, e disse que o dia do seu aniversário foi no dia de racionamento de água no calendário 1, 3 e 5.*

D	S	T	Q	Q	S	S
			[1]	2	[3]	4
[5]	6	[7]	8	[9]	10	[11]
12	[13]	14	[15]	16	[17]	18
[19]	20	[21]	22	[23]	24	[25]
26	[27]	28	[29]	30	[31]	

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	[2]	[3]	4
5	[6]	[7]	8	9	[10]	[11]
12	13	[14]	[15]	16	17	[18]
[19]	20	21	[22]	[23]	24	25
[26]	[27]	28	29	[30]	[31]	

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	[4]
[5]	[6]	[7]	8	9	10	11
[12]	[13]	[14]	[15]	16	17	18
19	[20]	[21]	[22]	[23]	24	25
26	27	[28]	[29]	[30]	[31]	

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
5	6	7	[8]	[9]	[10]	[11]
[12]	[13]	[14]	[15]	16	17	18
19	20	21	22	23	[24]	[25]
[26]	[27]	[28]	[29]	[30]	[31]	

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	[16]	[17]	[18]
[19]	[20]	[21]	[22]	[23]	[24]	[25]
[26]	[27]	[28]	[29]	[30]	[31]	

– **Último Passo:** Aguardar a revelação do Mister Matemágico.

– Exemplo: *O mágico fará o cáculo mental da soma do primeiro número marcado do calendário 1, 3, e 5, isto é, [1] + [4] + [16] = [21]. Como a pessoa afirmou ser do signo de Áries o mágico então revelará que a pessoa nasceu no dia 21 de março.*

Note que: existe uma relação equivalência entre os números do calendário com a soma de potências na base 2. Considerando D dia do mês e os 5 calendários a, b, c, d, e e o expoente da potência binária $n \in 0, 1, 2, 3, 4$, a descoberta do dia D do mês esta no fato da pessoa da plateia dizer para o mágico sim ou não respectivamente 1 ou 0, para cada um dos 5 calendários, se for sim você troca a letra por 1 se for não, por 0, Dessa maneira, $[D] = [\sum_n^4 2^n] = 2^0a + 2^1b + 2^2c + 2^3d + 2^4e$. Isto é, se a pessoa disse sim no calendário a, c, e então $[21] = 2^0{\cdot}1+2^1{\cdot}0+2^2{\cdot}1+2^3{\cdot}0+2^4{\cdot}1 = 1{\cdot}1+2{\cdot}0+4{\cdot}1+8{\cdot}0+16{\cdot}1 = 1+0+4+0+16 = [21]$.

5.5 Mágica: Revelação da Moeda Escondida

Conteúdos ou temas: Expressões numérica; números/relações.

Competências e Habilidades: Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas que envolve parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é probabilidade?
  3. O que é espaço amostral?
  4. O que é evento na matemática?
  5. João tem duas moedas, uma de 5 centavos e outra de 10 centavos. Qual é a probabilidade de pegar uma moeda de 5 centavos, entre as duas mãos?
  6. Quando um número é par? E Quando ele é impar?
  7. Quais são as propriedades da adição, dê exemplos numéricos?
  8. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina,treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica: revelação da moeda escondida

- **Primeiro Passo:** Chamar uma pessoa da plateia, dar duas moedas, uma de 5 centavos e outra de 10 centavos. Orientar que cada uma das mãos deve ter uma moeda. E perguntar se ele sabe qual é a chance de uma pessoa acertar ou errar qual é o tipo da moeda. Diga que não errará com um simples calculo.
- **Segundo Passo:** Multiplicar a moeda da mão direita por 3 e a da mão esquerda por 2. E somar o total das duas mãos.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa esta com a moeda de 10 centavos na mão direita e a de 5 centavos na mão esquerda. Logo o cáculo mental feito por ela será:* $3.10 + 2.5 = 30 + 10 = 40$

- **Último Passo:** Dizer a soma total para o mágico e aguardar a revelação do Mister Matemágico.

Exemplo: *Se a pessoa disse que o total é* 40*, o mágico revelará que a moeda de 10 centavos está na mão direita. Note que temos duas moedas, uma é par (10 centavos) e outra ímpar (5 centavos). Observa-se a relação de paridade no cálculo que o* $n^o 10$ *por ser par acarretou no* $n^o 40$ *que também é par. Nota-se que se pessoa tivesse escolhido a moeda de 5 centavos, ímpar, na mão direita o cálculo gera o resultado ímpar, isto é,* $3.5 + 2.10 = 15 + 20 = 35$

5.6 Mágica: Resultado do Pensamento

Conteúdos ou temas: Múltiplos e divisores; números/relações.

Competências e Habilidades: Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores; estabelecer relações entre números naturais tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de"e identificar números primos e números compostos; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas que envolve parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é divisão euclidiana? Dê exemplo?
  3. O que é Múltiplo de um número natural? Dê exemplo dos múltiplos 2, 3, 4, 5,6, e 9.
  4. O que é divisor de um número natural?
  5. Qual é o critério para um número ser divisível por 2, 3, 4, 5, 6, e 9.
  6. Mostrar que o resultados da tabuada do 9 satisfaz o critério de divisibilidade por 9. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica: Resultado do Pensamento

– **Primeiro Passo:** Convidar uma pessoa da plateia para pensar no número nove na sequência multiplicar por um número de 1 a 9.

Exemplo: *Supõ-se que a mesma tenha pensado no nº9 e multiplicado por 7, isto é* $9.7 = 63$

– **Segundo Passo:** Ela deverá somar os algarismos das unidades com o da dezenas. Exemplo: 38 ficará 3+8 = 11.

Exemplo: *logo* 63 *ficará* $6 + 3 = 9$

– **Último Passo:** Peça que subtraia 4 do resultado, aguardar a revelação do Mister Matemágico.

Exemplo: *Assim* $9 - 4 = 5$. *note que para esse algoritmo, o resultado sempre será* 5*, pois, a soma dos algarismos dos múltiplos de* 9 *são iguais a* 9 *e* $9 - 4 = 5$

5.7 Mágica: Adivinhando três dias consecutivos do mês, escolhidos em segredo

Conteúdos ou temas: Equação; algebra; sequência; média aritmética; números/relações.

Competências e Habilidades: Demonstrar a compreensão de regularidades observadas em sequências de números; saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica; saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações; efetuar cálculos para determinar a média aritmética de um conjunto de números; resolver problema que envolva equação do 1º grau; conhecer as características principais das progressões aritméticas, expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras, sabendo aplicá-las em diferentes contextos; calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é sequência aritmética?

3. O que é termo de uma sequência aritmética?
4. O que é razão de uma sequência aritmética?
5. O que é Média Aritmética?
6. Como calcular a média de três números consecutivos que estão numa sequência aritmética.
7. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica, apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica: adivinhando 3 dias consecutivos do mês, escolhido

– **Primeiro Passo:** Convidar uma pessoa da plateia aleatoriamente, orientá-la para escolher 3 dias consecutivos de um calendário qualquer.

D	S	T	Q	Q	S	S
			1	2	3	4
[5]	[6]	[7]	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

– **Segundo Passo:** Somar 3 dias consecutivos do mês escolhido.

– **Último Passo:** Dizer a soma total para o mágico e aguardar a revelação do Mister Matemágico.

– **Resolução**Supõe-se que a pessoa faça a opção pelos números 5, 6 e 7 ao somar os três $5 + 6 + 7 = 18$ a pessoa dirá 18 e o mágico apenas fará o cálculo mental 18 : 3 e Revelará 5, 6 e 7. nota-se que algebricamente pode-se representar três números consecutivos como $(x-1)+x+(x+1) = x-1+x+x+1 = 3x$ assim para saber o valor de x basta dividir a soma total dita pela pessoa por 3 em seguida fazer a revelação.

5.8 Mágica Egípcia

Conteúdos ou temas: Múltiplos e divisores; Números/relações.

Competências e Habilidades: Reconhecer e utilizar características do sistema decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional; calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores; estabelecer relações entre números naturais tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de"e identificar números primos e números compostos; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas que envolve parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é incognita de uma equação?
  3. Quando um número é par? E Quando ele é impar?
  4. O que é divisão euclidiana? Dê exemplo?
  5. Quando um número é divisível por 2?
  6. Quais são as regras para resolver expressões numéricas?
  7. O que são operações inversas?
  8. O que é dobro? O que é metade?
  9. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica Egípcia

- **Primeiro Passo:** Convidar uma pessoa da plateia em seguida orientá-la a escrever um número na calculadora entre 10 e 100 em segredo. Nesse momento, o mágico deverá registrar todos os passos na forma algebrica das informações obtidas da pessoa da plateia envolvida na mágica.
- **Segundo Passo:** Perguntar, se o número pensado é par, ou ímpar.
- **Terceiro Passo:** Após a resposta, se for par, peça à pessoa que divida o n^o por 2.
- **Quarto Passo:** Se for ímpar, solicite que subtraia 1 e divida por 2.
- **Quinto Passo:** Repetir o procedimento descrito, até o resultado tornar-se igual a 1.
- **Último Passo:** Informar ao Mister Matemágico, quando o resultado for igual a 1, aguardar o tempo necessário das anotações para a grande revelação.

– **Resolução** Supõ-se que a pessoa tenha escolhido o número 26 e diz para o mágico que o número pensado foi par e faz a seguinte operação, conforme as orientações acima, $26/2 = 13$. Torna a falar para o mágico que a operação resultou em um número ímpar, e faz a seguinte operação, $(13 - 1)/2 = 6$. Novamente volta a falar para o mágico que a operação agora é par, e faz a operação, $6/2 = 3$. Fala que o resultado foi ímpar,e faz a operação $(3 - 1)/2 = 1$. E anuncia para o mágico que finalmente o resultado chegou no número 1, Assim o mágico terminará as seguintes anotações que nada mais é do que fazer o cálculo das operações inversas, isto é, $(1.2 = 2$ e $2 + 1 = 3) \Rightarrow (3.2 = 6) \Rightarrow (6.2 = 12$ e $12 + 1) \Rightarrow (13.2 = 26)$ e revelará para a pessoa que o número pensado foi o número 26 .

5.9 Mágica dos números invertidos

Conteúdos ou temas: Múltiplos e divisores; números/relações.

Competências e Habilidades: Reconhecer e utilizar características do sistema decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional; conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores; estabelecer relações entre números naturais tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de"e identificar números primos e números compostos; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas que envolve parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

1. O que é algoritmo na matemática?
2. Quais são os números com 3 algarismos?
3. A representação de alguns números distintos?
4. O que é divisão euclidiana? Dar exemplo?
5. O que é Múltiplo de um número natural? Dê exemplo dos múltiplos 3 e 9.
6. O que é divisor de um número natural?
7. Qual é o critério para um número ser divisível por 3 e 9.

8. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica, finalizar apresentando a pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica dos números invertidos

- **Primeiro Passo:** Uma pessoa da plateia deverá pegar uma folha e uma caneta para registrar um número com 3 algarismos distintos qualquer que pensar.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa tenha anotado o número* 123

- **Segundo Passo:** Oriente a ela que inverta a ordem dos algarismos e formar outro número.

Exemplo: *Ao inverter irá obter* 321

- **Terceiro Passo:** em seguida peça para subtrair o número menor do maior e obter um 1º resultado.

Exemplo: *Ao subtrair obteve* $321 - 123 = 198$

- **Quarto Passo:** Peça que faça o mesmo procedimento com o 1º resultado e inverta a ordem dos algarismos obtendo outro resultado.

Exemplo: *Inverter a ordem de* 198 *e obter* 891.

- **Quinto Passo:** Com a ordem inversa adicionar com o 1º resultado.

Exemplo: *logo a soma de* $891 + 198 = 1089$

- **Ultimo Passo:**: Aguardar a revelação do mágico
  O Mágico revelará que o resultado é 1089, independente do número de três algarismos distintos escolhido pela pessoa o resultado sempre será 1089.

Demonstração *Seja* $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *com* $a > b > c$. *Como* $c < a$ *e* $(b - 1) < b$ *Deve-se fazer as correções de 1 dezena para 10 unidades e 1 centena para 10 dezenas.*

Milhares	centenas	dezenas	unidades
	a (- 1 + 1)	b (-1 + 1)	c
-	c	b	a
	?	?	?

Milhares	centenas	dezenas	unidades
	a - 1	10 + (b -1)	10 + c
-	c	b	a
	(a-1)-c	[10+(b - 1)]- b	(10 +c)-a
	a - c -1	9	c - a + 10

Milhares	centenas	dezenas	unidades
	a - c - 1	9	c - a + 10
+	c - a + 10	9	a - c - 1
	9	18	9
1	0	8	9

5.10 Mágica: resgatando o Número Suprimido

Conteúdos ou temas: Múltiplos e divisores; números/relações.

Competências e Habilidades: Reconhecer e utilizar características do sistema decimal, tais como agrupamentos e trocas na base 10 e princípio do valor posicional; conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores; estabelecer relações entre números naturais tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de"e identificar números primos e números compostos; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas com parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é suprimir?
  3. Quais são os números com 4 algarismos?

4. A representação de alguns números distintos?
5. O que é divisão euclidiana? Dar exemplo?
6. O que é Múltiplo de um número natural? Dê exemplo dos múltiplos 3 e 9?
7. O que é divisor de um número natural?
8. Qual é o critério para um número ser divisível por 3 e 9?
9. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica, apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da Mágica: Resgatando o Número Suprimido

– **Primeiro Passo:** Convidar uma pessoa da plateia e orientá-la a escrever um números de 4 ou 5 dígitos em segredo.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa tenha escolhido o nº* 23564

– **Segundo Passo:** Pedir que calcule a soma dos algarismos de seu número.

Exemplo: $23564 \rightarrow (2+3+5+6+4) = 20$

– **Terceiro Passo:** Suprimir um dos algarismos de seu número, riscando-o.

Exemplo: *Supõe-se que foi suprimido o nº* 3, *isto é,* $23564 \rightarrow 2564$

– **Quarto Passo:** Com os algarismos que restaram, peça que a pessoa forme um novo número alterando a ordem dos algarismos como quiser.

Exemplo: $2564 \rightarrow 5246$

– **Quinto Passo:** Em seguida ela deverá subtrair, desse novo número a soma dos algarismos do número original.

Exemplo: *subtrair* 20 *de* $5246 \rightarrow 5246 - 20 = 5226$

– **Último Passo:** Informar o resultado dessa subtração, aguardar a revelação do Matemágico.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa diga que foi o número* 5226 *então o mágico fará mentalmente os seguintes cálculos* $5226 \rightarrow (5+2+2+6) = 15, 15 \rightarrow (1+5) = 6, 6$ *para* 9 *falta* 3. *Logo, então ele anuciará que o número suprimido foi o* 3. *Nota-se que o Mágico utilizou na mágica o conceito de divisibilidade pelo nº 9.*

5.11 Mágica do número do Telefone

Conteúdos ou temas: Equação; álgebra; expressão numérica; números/relações.

Competências e Habilidades: Ler e escrever expressões algébricas correspondentes a textos escritos em linguagem corrente e vice-versa; calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica; saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações; resolver problema que envolva equação do 1º grau; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema; realizar operações simples com monômios e polinômios; compreender o conceito de equação a partir da ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta; conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é linguagem algébrica? Dar exemplos.
  3. O que é equacionar?
  4. O que é incógnita de uma equação?
  5. O que é termo de uma equação do 1º grau? Dar exemplos.
  6. O que significa equação equivalente? Dar exemplos.
  7. O que é operações inversas?
  8. O que é operações inversas numa equação?
  9. O que é solução de uma equação?
  10. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar pesquisa e mágica.

Procedimento didático da mágica do número do telefone

- **Primeiro Passo:** Uma pessoa da platéia pegará uma calculadora para registrar os cinco primeiros números do seu telefone.

Exemplo: *Supõ-se que o número do telefone da pessoa seja o nº* 987654321. *Logo ela digitará no painel da calculadora* 98765.

- **Segundo Passo:** Peça que multiplique por 80 e o resultado adicionar 1.

Exemplo: *Logo ela digitará no painel da calculadora* $(98765 \cdot 80) = 7901200$, $(7901200 + 1) = 7901201$.

- **Terceiro Passo:** Com o resultado anterior multiplicar por 250.

Exemplo: *Logo ela digitará no painel da calculadora* $(7901201 \cdot 250) = 1975300250$.

- **Quarto Passo:** Adicionar ao resultado do terceiro passo, os 4 últimos números do mesmo telefone por duas vezes.

Exemplo: *Logo ela digitará no painel da calculadora* $(1975300250{+}4321) = 1975304571$, $(1975304571 + 4321) = 1975308892$.

- **Quinto Passo:** Subtrair 250 do resultado do quarto passo.

Exemplo: *Logo ela digitará no painel da calculadora* $(1975308892{-}250) = 1975308642$.

- **Ultimo Passo:** Divida por 2 o resultado do quinto passo e contempla o seu número do telefone no painel da calculadora revelado pelo Mistes Matemágico.

Exemplo: *Logo ela digitará no painel da calculadora* $(1975308892/2) = 987654321$. *observe que o algoritimo algebrico vale para todos os número de telefone.*

5.12 Mágica com Dominós

Conteúdos ou temas: Equação; algebra; expressão numérica; números/relações.

Competências e Habilidades: Ler e escrever expressões algébricas correspondentes a textos escritos em linguagem corrente e vice-versa; calcular o valor numérico de uma expressão algébrica; saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica; saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações; resolver problema que envolva equação do 1º grau; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema; realizar operações simples com monômios e polinômios; conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é linguagem algébrica? Dar exemplos.
  3. O que é equacionar?
  4. O que é incógnita de uma equação?
  5. O que é termo de uma equação do 1º grau? Dar exemplos.

6. O que significa equação equivalente? Dar exemplos.
7. O que é operações inversas?
8. O que é operações inversas numa equação?
9. O que é solução de uma equação?
10. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar.

Procedimento didático da Mágica com Dominó

– **Primeiro Passo:** Convidar uma pessoa da plateia aleatória em seguida orientá-la para que ao pegar uma peça qualquer de dominó comum e escolha também um dos números da peça para fazer as operações a seguir.

Exemplo: *supõe-se que a pessoa pegue a peça de dominó com a face marcada com o número 2 e 4. Genericamente, o dominó com a face* x *e* y *com* $x, y \epsilon \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

– **Segundo Passo:** Peça que multiplique por 5.

Exemplo: *Supõe-se que pessoa tenha multiplicado a parte 2 do dominó pelo número 5, isto é,* $2 \cdot 5 = 10$. *Genericamente,* $x \cdot 5 = 5x$.

– **Terceiro Passo:** Somar ao resultado o número 15.

Exemplo: $10 + 15 = 25$. *Genericamente,* $5x + 15$.

– **Quarto Passo:** A pessoa deverá dobrar o resultado.

Exemplo: $2 \cdot (25 + 15) = 50$. *Genericamente,* $2 \cdot (5x + 15) = 10x + 30 = 10(x + 3)$.

– **Quinto Passo:** Peça que some o resultado com o outro número da peça.

Exemplo: $50 + 4 = 54$. *Genericamente,* $10(x + 3) + 4$. *Nota-se que,* $10(x + 3)$ *representam as dezenas de um número de dois digitos e o número* 4 *as unidades.*

– **Último Passo:** A pessoa deverá informar a soma total para o mágico e aguardar a revelação do Matemágico.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa informe ao mágico que o resultado total dos cálculos foi* 54, *então o mágico revelará que a peça escolhida foi a de face 2 e 4. Nota-se que,* $54 = 50 + 4$ *e comparando* $50 = 10(x + 3) \rightarrow 5 = x + 3 \rightarrow x = 5 - 3 = 2$. *Assim para dizer qual foi a peça de dominó escolhido pela pessoa, basta saber o total do algorítimo informado pela pessoa e subtrair 3 unidades da dezena do total e anunciar com número da unidade.*

5.13 Mágica previsão de número

Conteúdos ou temas: Múltiplos e divisores; números/relações.

Competências e Habilidades: Conhecer as características e propriedades dos números naturais: significado dos números primos, de múltiplos e de divisores; estabelecer relações entre números naturais tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de"e identificar números primos e números compostos; aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas que envolve parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. O que é algoritmo na matemática?
  2. O que é Aritmética?
  3. Quais são as propriedades da adição?
  4. Dê exemplos de propriedade associativa da adição.
  5. Dê exemplos de Expressão numérica equivalente ou números equivalentes.
  6. Sinteticamente reproduzir todo o conhecimento numa cartolina, treinar a mágica e apresentar.

Procedimento didático da Mágica Previsão de número

- **Primeiro Passo:** Deixar com alguém da plateia um papel dobrado, com um número, que será verificado pela pessoa apenas no final da mágica.

Exemplo: *O mágico escreverá no papel* 4034*, ou seja, o dobro do ano vigente. Isto é,* $2 \cdot 2017 = 4034$

- **Segundo Passo:** A pessoa deverá escrever na calculadora o ano que nasceu.

Exemplo: *Supõe-se que a pessoa nasceu em 1990.*

- **Terceiro Passo:** Ela deverá adicionar com o ano que aconteceu um fato importante da sua vida.

Exemplo: *Supondo que o fato importante ocorreu ano de 2005. Logo, ficará* $1990 + 2005 = 3995$.

- **Quarto Passo:** Ao resultado ela deverá adicionar a idade que irá fazer este ano.

Exemplo: *Supondo que irá fazer 27 anos. Logo,* $3995 + 27 = 4022$.

- **Quinto Passo:** Ao novo resultado, adicionar com o número de anos que faz o acontecimento histórico.

Exemplo: *Fazendo uma suposição que o acontecimento ocorreu há 12 anos. Logo,* $4022 + 12 = 4034$

- **Ultimo Passo:** Ao obter o resultado da Soma a pessoa poderá abrir o papel para contemplar a grande previsão do Matemágico.

Exemplo: *A pessoa então ficará surpresa ao confirmar que o número escrito era o* 4034 *nota-se que o mágico utilizou o conceito de associatividade e comutatividade nas operações da adição, isto é,* $(((1990 + 2005) + 27) + 12) = (((1990 + (2005 + 27)) + 12) = (((1990 + (27 + 2005)) + 12) = (((1990+27)+2005)+12) = ((2017+2005)+12) = (2017+(2005+12)) = (2017 + 2017) = 4032$.

5.14 Curiosidade do Paradoxo de Curry (Paradoxo da área do triângulo)

Conteúdos ou temas: Área, semelhanças entre figuras planas, teorema de tales; proporcionalidade; razões trigonométricas; raciocinio lógico; geometria/relações.

Competências e Habilidades: Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos; saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes; compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos; calcular áreas de polígonos de diferentes tipos; resolver problemas envolvendo o cálculo ou a estimativa da área de quadrados ou retângulos com uso de malhas quadriculadas; resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. Quem foi Paul Curry?
  2. O que é figura geométrica?

3. O que é triângulo Retângulo?
4. O que é um paralelogramo?
5. O que é incógnita de uma equação?
6. O que é área?
7. O que é perímetro?
8. Quando que dois triângulos são semelhantes?
9. O que são retas paralelas?
10. O que é ilusão ótica?
11. Como é a relação trigonométrica da inclinação da reta.

Procedimento didático da curiosidade desafiante Paradoxo de Curry

– **Primeiro Passo:** Apresentar para a plateia um quadrado feito pelas 4 figuras geométricas

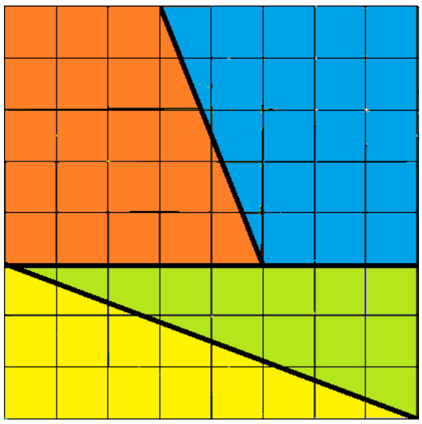


Figura 5.1: Quadrado 8x8

– **Segundo Passo:** Montar com as 4 peças geométrica um retângulo 13X5 aparentemente perfeito

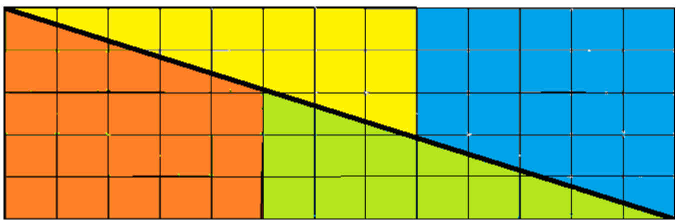


Figura 5.2: Retângulo 5x13

– **Terceiro Passo:**Mostrar que com 4 figuras geométricas é possivel remontar dois triângulos com as mesmas 4 peças um triângulo retângulo 13X5 aparentemente iguais e imperfeitos

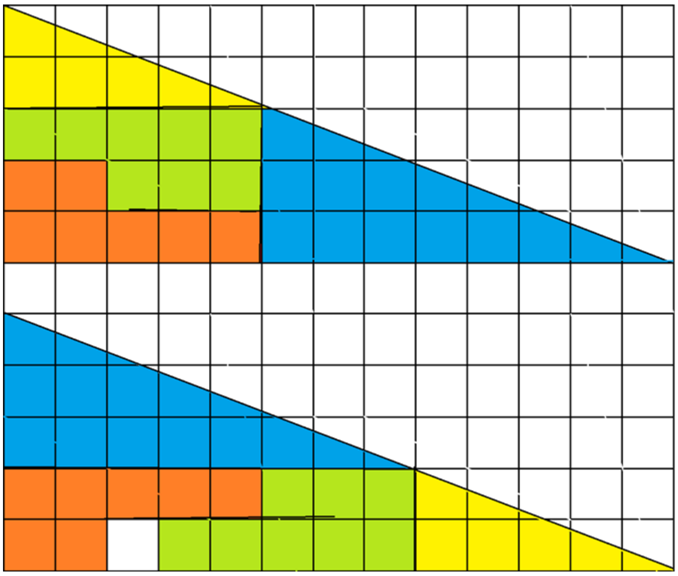


Figura 5.3: Triângulos 5x13

- **Quarto Passo:** Chamar atenção para o paradoxo intrigante.
- **Último Passo:** Justificar matematicamente o motivo do paradoxo do Mágico Paul Curry.

Exemplo: *Nota-se, que as figuras geométricas que forma os triângulos não são semelhantes, pois, tem as tangentes diferentes apesar de bem próximas, os lados não são prorcionais.*

5.15 Desafios dos Quadrados Hiper mágicos 3x3, 5x5 e 7x7

Conteúdos ou temas: Progressão aritmética; matrizes; raciocinio lógico; números/relações.

Competências e Habilidades: Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas; Conhecer as características principais das progressões aritméticas, expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras, sabendo aplicá-las em diferentes contextos; compreender o significado das matrizes na representação de tabelas; resolver problemas com números inteiros expressos oralmente ou por meio de enunciados escritos, envolvendo diferentes significados da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão; expressar por meio de registros escritos os procedimentos de soluções de um problema; realizar operações simples com monômios e polinômios; conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa; demonstrar a compreensão de regularidades observadas em sequências de números.

- O estudante deverá pesquisar na internet ou em livros didáticos:

  1. Quem foi Johann Carl Friedrich Gauss? O que descobriu quando criança? E como foi?
  2. Dê exemplos de sequências aritméticas
  3. Dê exemplo de como somar os 9, 25, e 49 elementos de uma sequência aritmética sem o uso de fórmula.
  4. Exemplos de média aritmética com 3, 5 e 7 números?
  5. O que é um quadrado mágico?

Procedimento didático da curiosidade desafiante Quadrado Hiper-mágico

– **Primeiro Passo:** O aluno mágico irá definir para a plateia o que é um quadrado hiper-mágico e desafiá-lo a construir um 3x3.

Exemplo: *Dado um quadro de m linhas e n colunas, será chamado de quadrado hipermágico quando as somas dos elementos das linhas, colunas e das diagonais dar o mesmo resultado. Isto é, dado um quadrado 3x3, deve-se distribuir os números* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *no quadro de maneira que a soma das linhas, colunas e das diagonais sejam iguais a* 15. *Nota-se que o número* 15 *é resultado da soma aritmética de uma progressão aritmética dividido pelas três linhas* $\dfrac{Soma}{3} = \dfrac{\dfrac{(1+9)\cdot 9}{2}}{3} = 15.$

– **Segundo Passo:** Fazer um quadro de 7x7 ou 5x5 e mostrar que possível fazer de forma rápida sem ensinar a estratégia.

Exemplo: *Dado um quadrado 5x5, deve - se distribuir os nº* $\{1, 2, 3, ..., 23, 24, 25$ *no quadro de maneira que a soma das linhas, colunas e das diagonais seja igual a* 65. *Nota- se que o nº* 65 *é resultado da soma aritmética de uma progressão aritmética dividido pelas cinco linhas* $\dfrac{Soma}{5} = \dfrac{\dfrac{(1+25)\cdot 25}{2}}{5} = 65.$

– **Terceiro Passo:** Ensinar a regra de como fazer de forma rápida um quadro hipermagico 5x5

Exemplo: *Um truque para resolver de forma rápida é seguir o "algoritmo das flechas"*

				↗↓		
			1★ ↗	↓		
		5 ⧫ ↓		↓		
	↗ 4	←	←	↓	←	←↗
				↓	3 ↗	
				2 ↗		

					↗↓	
			1	8 ↗	↓	
		5	7 ↗		↓	
		6 ★ ↗			↓	
	↓ 10	←	←	←	↓	←↗
	11⧫				9 ↗	

		↗↓				
	17 ↗	←	←	←	15↓	←↗
		↓		14↗	16 ↗	
		↓	13↗			
		12 ↗				
	11★ ↗	18⧫			9 ↗	

			↗↓			
		24 ↗	↓			
	23 ↗	←	←	←	16	←↗
			↓	20 ↓	22↗	
			19 ↗	21↗		
		18★ ↗	25 ⧫		9	

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

– **Último Passo:** Auxiliar a resolver o quadrado hipermágico 3x3.

6 Resultados

6.1 Questionário

Os educandos foram orientados a atribuir um valor numérico de 0 a 10 para as perguntas abaixo: Em que o valor zero (0) significa pouco e o valor dez (10) muito.

6.1.1 Pesquisei o conceito da atividade lúdica matemática na internet, nos livros, ou outros recursos didáticos?

Tabela 6.1: Coleta de dados 1.

Valor	0	3	4	5	6	7	8	10	total
pessoas	1	2	1	11	2	2	1	9	29

MÉDIA $= 6,52$

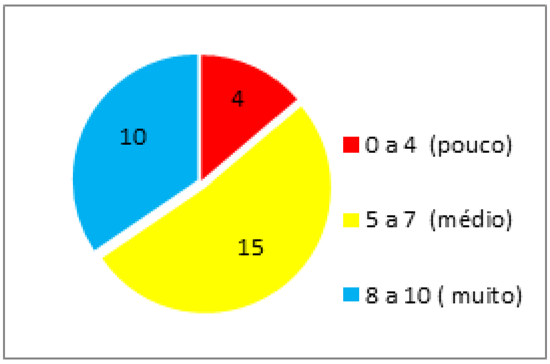


Figura 6.1: Pesquisei o conceito da atividade lúdica matemática.

Nota-se que os conceitos matemáticos foram pesquisados pelos alunos com uma intensidade consideravelmente satisfatória.

6.1.2 Aprendi conceitos matemáticos na elaboração da minha atividade lúdica?

Tabela 6.2: Coleta de dados 2.

Valor	4	5	7	8	9	10	total
pessoas	1	5	1	1	3	18	29

MÉDIA$= 8,66$

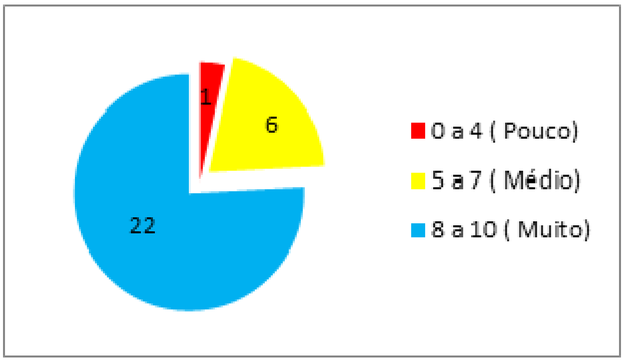


Figura 6.2: Aprendi os conceitos matemáticos na elaboração.

Nota-se que entre 29 alunos, 22 relatam ter aprendido muito, na elaboração das atividades lúdicas.

6.1.3 Aprendi conceitos matemáticos com a atividade lúdica apresentada pelo meu colega?

Tabela 6.3: Coleta de dados 3.

Valor	0	3	5	6	8	9	10	total
pessoas	1	2	4	1	13	4	4	29

MÉDIA $= 7,31$

Nota-se que no compartilhamento das mágicas foi possível que eles aprendessem muitos dos conceitos das atividades lúdicas, apresentadas pelos colegas.

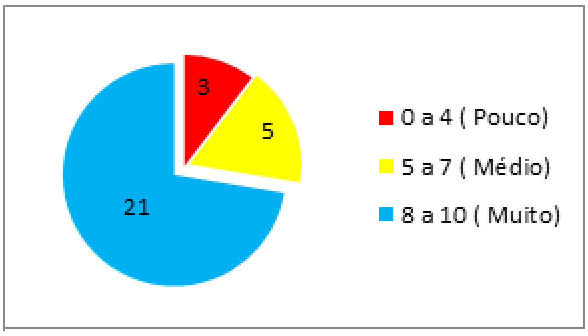


Figura 6.3: Aprendi conceitos matemáticos com a apresentação do meu colega.

6.1.4 Gostei de Apresentar as atividades lúdicas matemágicas?

Tabela 6.4: Coleta de dados 4.

Valor	5	6	7	8	10	total
pessoas	5	1	2	1	20	29

MÉDIA $= 8,72$

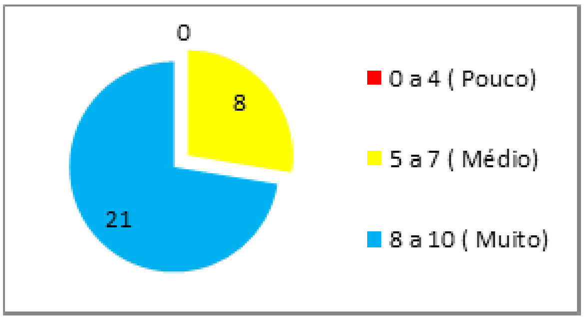


Figura 6.4: Gostei de Apresentar as atividades lúdicas matemática.

Nota-se que todos os estudantes ficaram realizados em apresentar, pois, apenas o professor e o grupo que estavam apresentando, sabiam a mágica, logo todos da plateia estavam curiosos para saber sobre os segredos, gerando dessa forma ao educando mágico uma sensação orgulhosa de controle ao ter todas as atenções voltadas para ele.

6.1.5 A Feira Matemágica me deixa motivado para aprendizagem em processo?

Nota-se que o efeito motivador exige dos estudantes atenção para entender a linha de raciocínio do apresentador aluno mágico, caso contrário não conseguirá

Tabela 6.5: Coleta de dados 5.

Valor	3	4	5	7	8	9	10	total
pessoas	1	1	3	6	5	5	8	29

MÉDIA $= 7,90$

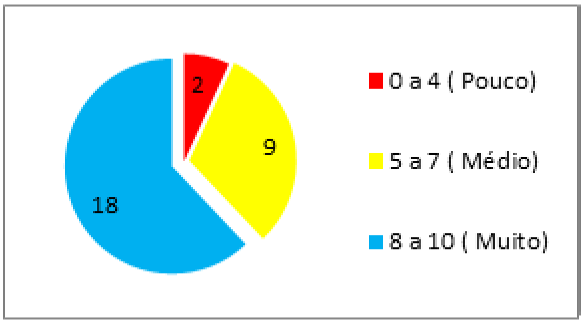


Figura 6.5: A Feira Matemágica me deixa motivado.

ficar motivado.

6.1.6 Acho importante que haja na escola uma Feira Matemágica anual, cada vez melhor, para motivar os alunos a apresentar e aprender as atividades lúdicas matemáticas por meio da pesquisa?

Tabela 6.6: Coleta de dados 6.

Valor	2	3	5	6	7	8	9	10	total
pessoas	1	1	2	2	1	3	2	17	29

MÉDIA $= 8,48$

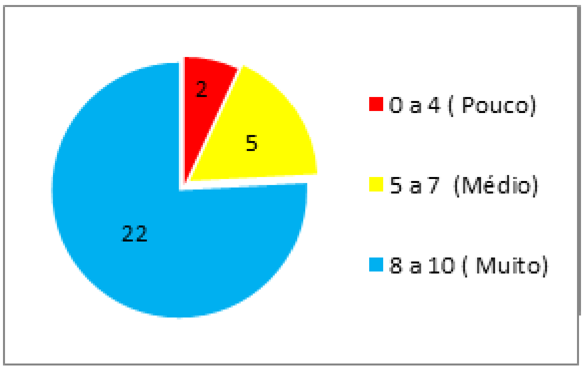


Figura 6.6: Acho importante que haja no social escolar uma feira anual, cada vez melhor.

Nota-se que a maioria dos estudantes obtiveram estímulo de reforço positivo o que demonstra que estão dispostos para repetir a feira ou outro evento mais complexo.

6.1.7 Antes de fazer a Atividade Lúdica, na Feira Matemágica, minha relação de amizade e de aprendizagem com o professor era?

Tabela 6.7: Coleta de dados 7.

Valor	2	3	5	6	7	8	9	10	total
pessoas	1	2	10	1	3	4	4	4	29

MÉDIA $= 6,66$

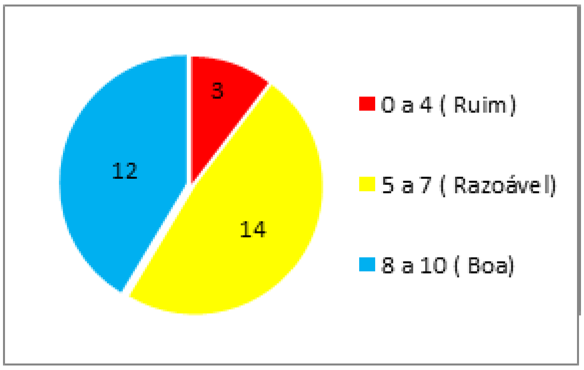


Figura 6.7: Minha relação de amizade e aprendizagem com o professor.

Nota-se que a grande maioria dos alunos não consideravam ter uma boa relação de respeito, amizade e amorosidade com o professor, vínculo importante, que sem essa, dificultava aprendizagem por exelência.

6.1.8 Depois de Fazer a Atividade Lúdica na Feira Matemágica minha relação de amizade e aprendizagem com o professor passou a ser?

Nota-se que a feira colaborou para um melhor diálogo, respeito e amorosidade com o educando, o que gerou uma melhora na vontade de aprender por parte dos alunos.

Tabela 6.8: Coleta de dados 8.

Valor	2	4	5	6	8	9	10	total
pessoas	1	2	3	3	2	4	12	29

MÉDIA $= 8,03$

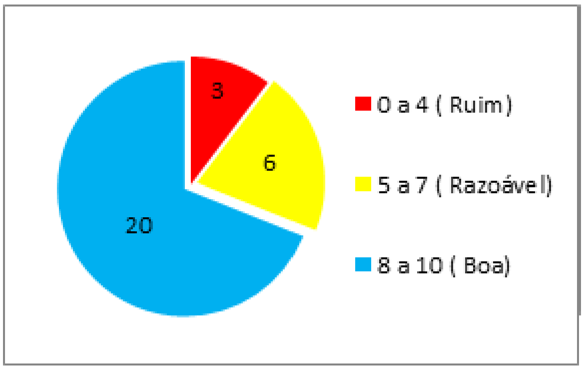


Figura 6.8: Minha relação de amizade e aprendizagem com o professor melhorou.

6.1.9 Antes da Feira Matemágica, gostava de matemática?

Tabela 6.9: Coleta de dados 9.

Valor	0	1	2	4	5	6	7	8	9	10	total
pessoas	1	1	2	3	3	1	5	8	1	4	29

MÉDIA $= 6,41$

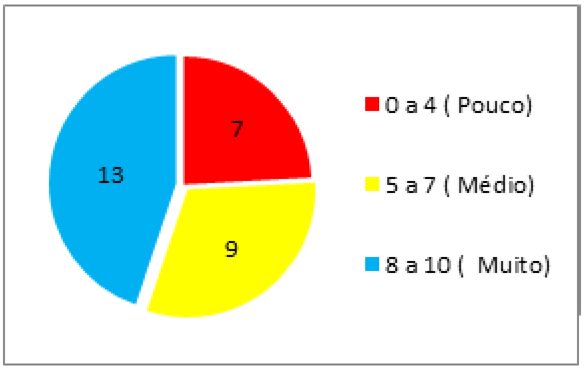


Figura 6.9: Só gostava assim de matemática.

Nota-se que para Skiner o estudante tem estímulo de reforço aversivo a aprendizagem quando cometem erros ou apresentam dificuldades em aprender.

Tabela 6.10: Coleta de dados 10.

Valor	2	3	5	6	7	8	9	10	total
pessoas	1	1	3	1	2	2	6	13	29

MÉDIA $= 8,31$

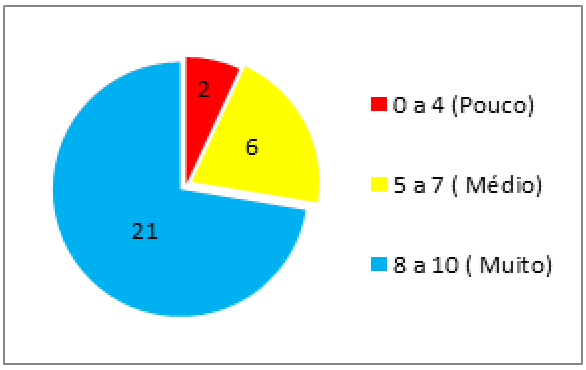


Figura 6.10: Passei gostar assim de Matemática.

6.1.10 Depois da Feira matemágica, passei a gostar de Matemática?

Nota-se que a feira gerou estímulos de reforço positivo, isto é, formou interesses de aprendizagem matemática nos estudantes motivados pelo diálogo, entusiasmo, brincadeiras e interações das construções das atividades lúdicas matemáticas ocorrido durante o evento Feira Matemágica.

6.1.11 Senti mais confiante na apresentação, depois que, pesquisei a atividade lúdica?

Tabela 6.11: Coleta de dados 11.

Valor	2	3	5	6	7	8	9	10	total
pessoas	5	2	2	1	1	4	1	13	29

MÉDIA = 5,76

Nota-se grande parte dos alunos sentiram confiança para realizar suas apresentações.

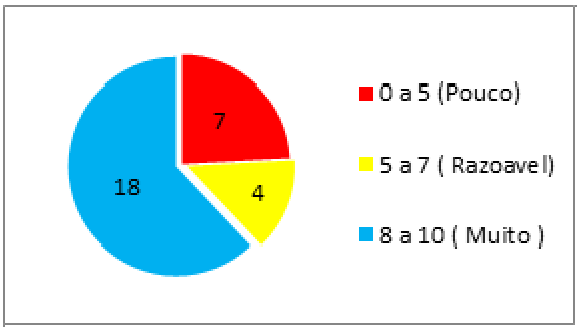


Figura 6.11: Senti mais confiante na apresentação depois que eu pesquisei as atividades lúdicas

Tabela 6.12: Coleta de dados 12.

Valor	5	6	8	9	10	total
pessoas	2	2	3	3	19	29

MÉDIA $= 9,07$

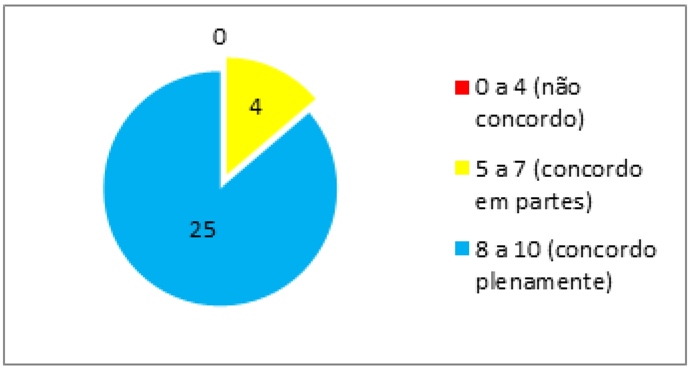


Figura 6.12: As aulas tornaram-se mais dinâmicas com as atividades lúdicas.

6.1.12 As aulas torna mais dinâmica com as matemágicas, curiosidades, desafios e outras atividades Lúdicas?

Nota-se que nem todo conhecimento matemático é lúdico, fornece interação com alegria ou propicia brincadeiras, porém é fundamental para a construção do conhecimento cognitivo do adolescente na educação básica. Conhecimento esse que parte gradativamente do simples para o mais complexos.

6.2 Relatos Manuscritos dos Estudantes

O professor digita com alguns ajuste ortográficos os relatos manuscritos, dos estudantes, que descrevem as suas aprendizagem significativa na Feira de Exposições e Interações Matemágica, Curiosidades e Desafios. Relatos que também corroboram as essências pedagógicas desenvolvida neste projeto. As imagens destes manuscritos se encontra no Apendice A.

6.2.1 Manuscrito 1

Esse projeto realizado deixou meus colegas de classe assim como eu mais interessados pela matemática. Foi uma ótima ideia deixar nossa aula mais divertida, o rendimento foi ótimo e todos os alunos prestaram atenção. Não seria uma má ideia realizar mais atividades nesse modelo, porque todos gostaram e nos ajudou em relação à nota. Em questão ao conceito matemático acho que todos enxergaram a atividade de uma forma mais fácil e gostosa de aprender. Agora a matemática não é aquele monstro de sete cabeças, pois com essas atividades, realizar e resolver contas ficam cada vez mais fáceis. As apresentações foram realmente muito boas, pois nos deixamos o medo e a vergonha de lado para apresentar, e sabemos que isso no futuro irá nos ajudar em alguma faculdade ou vida social.

6.2.2 Manuscrito 2

Achei importante essa feira de exposições da matemática, pois ela incentivou mais nossa vontade de aprender pensamos em sintonia e tomamos nossa aula em dinâmica da aprendizagem. Acho que deveríamos realizar essa atividade mais vezes, porque ela também ensina e deixa nossa relação com a matemática mais intuitiva, legal e espontânea. Foi uma ótima ideia do professor, todos que eu perguntei adoraram a ideia, ficaram com receio antes, mais depois, aproveitaram ao máximo da nossa experiência. Adoramos e acreditamos que deveria ser um projeto realizado em todos os bimestres.

6.2.3 Manuscrito 3

[...]. A maioria da turma se apresentou e todos os projetos eram interessantes e criativos, em alguns nós nos envolvemos tentando descobrir o truque através da mágica. Algumas dessas mágicas foram: A descoberta do número do sapato e da idade, Quadrado mágico, entre outros. Percebemos que a matemática é algo fundamental na vida de um ser humano, sem ela não existiria nada. Em algumas mágicas foi difícil à compreensão de como ela foi feita. [...].

6.2.4 Manuscrito 4

[...]. Cada aluno ou dupla ficou responsável por apresentar uma mágica e se dedicou a preparar o conteúdo para ser apresentado. As mágicas apresentadas foram muito interessantes, por apresentaram um raciocínio simples, mas que nós nunca pensamos em fazer. Mostraram que há diversas formas de resolver problemas matemáticos de nosso cotidiano e sua maneira dinâmica nos ajudou a desenvolver o raciocínio, como o exemplo de uma mágica da soma de três datas consecutivas que quando falado para o aluno, que a apresenta, o resultado, ele descobrirá quais são as datas que você pensou dividido o resultado por 3 e usando sua técnica. [...]

6.2.5 Manuscrito 5

Na feira de exposições e interações matemágica, foi algo muito divertido, o professor Cléverson trouxe para nós esse novo jeito de aprender. Com a matemágica aprendemos novas maneiras de fazer as resoluções, tiramos dúvidas e aprendemos com as curiosidades e dúvidas. O professor Cléverson passa a ideia de trazer uma exposição na feira matemágica, todos adoraram a ideia de trazer isso para a escola. Todos os alunos ficaram dedicados e compromissados, pesquisaram muito para fazer a apresentação, muito apresentaram e explicaram por varia forma, todos os alunos adorou a ideia e assim foi indo, a escola amou a ideia. A matemágica ajudou muitos alunos, a se interessar, até os mais bagunceiros aceitaram a ideia da feira, todos se interessaram... .

6.2.6 Manuscrito 6

[...],percebi que os alunos estavam realmente com vontade de aprender mais e também compartilhar tudo que aprendeu, inclusive eu e meu grupo, apresentamos a atividade descoberta do número do sapato e da idade, onde convidamos alguns colegas para elaborar a atividade ...

6.2.7 Manuscrito 7

Da exposição da atividade lúdica, percebi que a matemática também é divertida, que assim foi mais fácil aprender, já que eu tenho grande dificuldade em matemática, Eu achei legal que na minha apresentação saiu melhor que eu pensei. [...].

6.2.8 Manuscrito 8

A apresentação da Feira matemágica foi bem entusiasmantes todos se preocuparam com a apresentação, minha apresentação foi a quarta. Eu me apresentei meio tenso, mas tudo ocorreu bem. Eu prestei muito atenção nas apresentações e ajudei alguns amigos, o professor ajudou muitos os alunos, todos tiraram dúvidas com ele, ele é um professor muito eficiente. Posso dizer um expert em matemática, eu não era muito acostumado com o modo de ensino dele mais consegui aprender muito.

6.2.9 Manuscrito 9

Todos apresentaram com uma atividade mais interessante que a outra. Aprendemos grandes possibilidades de se aprender matemática brincando. E que matemática não é só ruim, mais também tem lados bem legais e que podem ser aprendidos bem facilmente.

6.2.10 Manuscrito 10

[...], ponto positivo dessa feira, é que me ajudou um pouco, comecei a gostar de matemática, me deu vontade de aprender mais sobre isso, e creio que meus colegas também, meu trabalho foi sobre a mágica da moeda, me diverti bastante, [...].

6.2.11 Manuscrito 11

A matemática criou motivação no ambiente, e também achei importante a feira matemágica na escola, e cada vez melhor motivar os alunos do 9º ano A, produção de atividades etc... Aprendi conceitos das mágicas, brincadeiras, me senti mais confiante em aprender sobre as atividades lúdicas.

6.2.12 Manuscrito 12

[...]. E foi muito bom e divertido, depois eu ensinei a pessoa, e ela adorou. E com isso eu gostei também, porque acabei aprendendo e animando outras pessoas e deu para perceber que matemática não é chato e que tem vários jeitos de aprender, por exemplo, através da mágica, ...

6.2.13 Manuscrito 13

[...], truque é exposto, para que tenhamos um entendimento sobre os exercícios e possamos também praticar, brincar e aprender com esses truques. Esses exercícios facilitaram a matemática e a deixaram mais legal e interessante.

6.2.14 Manuscrito 14

A feira matemágica é a melhor maneira de entreter os alunos com diversos desafios, como o Calculo Gigante, Quadrado mágico e varias atividades, para entreter o público, como por exemplo, achando no calendário, esta feira traz vários tipos de experiências.

6.2.15 Manuscrito 15

Eu gosto de matemática, mas e acho difícil matemática, este tipo de conta é muito difício, as atividade lúdica, a Feira matemágica, me deixou motivada para aprendizagem em processo, a feira matemágica criou uma motivação.

7 Discussão

Considerando a reforma do ensino e as implementações gradativas das Escolas de Ensino Integral que está ocorrendo em todo Brasil, os professores dessas escolas públicas deverão desenvolver projetos nas escolas, além da base de ensino curricular comum a todos. Dessa maneira, as concepções pedagógicas deste projeto vão ao encontro das propostas atuais de ensino pois são passos metodológicos comuns a professores das diversas áreas do conhecimento, que com alguns ajustes específicos de atividades lúdicas também pode criar uma feira qualquer, como: feira de ciências, feira de física, feira de química e outras feiras.

7.1 Buscas e Análises de Trabalhos

Nesse trabalho foram realizadas algumas buscas no site do PROFMAT e em outros sites com o objetivo de encontrar dissertações voltadas a mágicas ou Feiras de Matemática. No entanto foram conseguidos cinco trabalhos com os seguintes títulos: - Primeiro "Proposta de Implantação do Centro de Estudos de Mágicas e Curiosidades matemáticas"; - segundo "Mágicas Matemáticas como Metodologia de Ensino"; - terceiro "O Efeito Transformador das Atividades Lúdicas nas aulas de Matemáticas "; - Quarto "Feira geométrica uma experiência no ensino fundamental"; - Quinto "Feira de Matemática como Agente Estimulador para a Aprendizagem de Matemática".

Apesar dos três primeiros trabalhos apresentarem atividades lúdicas semelhantes, a abordagem metodológica difere deste, pois o primeiro trata-se de propostas voltadas a criação de centros de estudos de invenção de mágicas matemáticas para professores. No segundo e terceiro trabalho, os autores colocam o professor como o centro das artes mágicas e é ele que faz e ensina todas as atividades lúdicas para os alunos, o que difere na abordagem metodológica deste. O professor faz então, apenas algumas mágicas matemáticas para motivar os alunos a pesquisar os procedimentos e a compreensão dessas atividades mágicas matemáticas, isto é, quem irá fazer e explicar como fez é o aluno, ou seja, a centralidade esta no aluno e na aprendizagem, o professor é apenas o mediador, o que facilita o processo da aprendizagem, previsto na LDB. O quarto trabalho traz umas experiências geométricas interessantes como uma introdução a uma feira. Já o quinto e último trabalho, o autor da ênfase a coletas de dados e resultados da feira matemática com histórias de sucesso, porém, deixa a desejar na orientação em como o professor poderá iniciar a construção de uma feira matemática em um social escolar, assim como descrever os procedimentos das atividades lúdicas matemáticas. Essa crítica observada não vem desacreditar os excelentes trabalhos, pois este, apenas realizou uma análise afim de dar continuidade ao projeto feira, para que os procedimentos metodológicos sejam compreensíveis a professores e estudantes que pretendem executar no social escolar.

Observação: Esta dissertação foi ecrita na linguagem de programação LATEX, com o editor Texmaker. Dessa maneira, o estudo não foi só aprofundado nos conhecimentos Pedagógicos e nas Estruturas Algébricas Matemática, como também nessa linguagem programacional Latex.

7.2 Evidências que testificam os resultados da Feira Matemágica

Os trechos dos relatos e os resultados dos questionários abaixo são as evidências que confirmam a efetividade do Projeto Feira Matemágica, quanto aos objetivos, questionamentos e abordagens pedagógicas.

7.2.1 Evidência 1

Trechos que demonstra que as atividades matemágicas gerou no ambiente social escolar um entusiasmo e alegria pelo efeito mágico, assim como, um interesse em aprender, pesquisar e ter compromisso pela aprendizagem lúdica.

Relatos: [...] Esse projeto realizado deixou meus colegas de classe assim como eu mais interessados pela matemática 6.2.1; Achei importante essa feira de exposições da matemágica, pois ela incentivou mais nossa vontade de aprender pensamos em sintonia e tomamos nossa aula em dinâmica da aprendizagem. [...] 6.2.2; [...] todos os projetos eram interessantes e criativos, em alguns nós nos envolvemos tentando descobrir o truque através da mágica 6.2.3; O professor Cléverson passa a ideia de trazer uma exposição e feira matemágica, todos adoraram a ideia de trazer isso para a escola. Todos os alunos ficaram dedicados e compromissados, pesquisaram muito para fazer a apresentação, [...] 6.2.5; A apresentação da feira matemágica foi bem entusiasmantes [...] 6.2.8; A matemágica criou motivação no ambiente[...] 6.2.11; A feira matemágica é a melhor maneira de entreter os alunos 6.2.14; [...] a feira matemágica, me deixou motivada para aprendizagem em processo, a feira matemágica criou uma motivação. 6.2.15

Questionário: Pesquisei o conceito das atividades lúdica matemágica na internet, nos livros, ou outros recursos didáticos 6.1.1? A feira matemágica me deixa motivado para aprendizagem em processo 6.1.5? Senti mais confiança na apresentação, de ter pesquisado as atividades lúdicas6.1.11? As aulas são mais dinâmicas com as matemágicas, curiosidades, desafios e outras atividades Lúdicas 6.1.12?

Objetivos analisados: Estudantes motivados pela artes mágicas matemáticas constroem e reproduzem conhecimentos? Os estudantes mobilizariam a construção de uma feira matemágicas? A ideia de ser mágico despertaria o interesse do educando para pesquisar conceitos matemáticos? É possível fazer uma feira matemágica no ambiente social escolar? Quais abordagens pedagógicas de ensino são adequadas para construção de uma feira? As atividades lúdicas matemágicas despertaria o desenvolvimento de quais competências e habilidades matemáticas do educando? 1.1

Consideração da evidência 1: Em conformidade com Paulo Freire o indivíduo adquire conhecimento quando ele se encharca de informações do ambiente a sua volta de sentidos por meio da leitura de mundo, e nesse caso o estudante foi encharcado de sentido, por meio, de uma leitura de um mundo mágico, e isso é notável nas palavras relatadas, no questionário desses estudantes que realmente tiveram curiosidades e interesse pelo ensino de matemática e estavam propensos a pesquisarem e aprenderem. Em consonância com Sergio Cortela despertar nos estudantes um ambiente de alegria e entusiasmo, assim como um ambiente de respeito e amorosidade ao lúdico, são concepções assertivas e fundamentais para a construção do cognitivo dos educandos.

7.2.2 Evidência 2

Trecho que demonstra ideia que houve aprendizagem, assim como gosto pelo ensino-aprendizagem, compromisso, compartilhamento de aprendizagem e graduação do lúdico ao teórico.

Relatos: [...] o rendimento foi ótimo [...] com essas atividades, realizar e resolver contas ficam cada vez mais fáceis. 6.2.1; [...] um raciocínio simples, mas que nós nunca pensamos em fazer. Mostraram que há diversas formas de resolver problemas matemáticos de nosso cotidiano e sua maneira dinâmica nos ajudou a desenvolver o raciocínio [...], 6.2.4; [...] Com a matemágica aprendemos novas maneiras de fazer as resoluções, tiramos dúvidas e aprendemos com as curiosidades [...] 6.2.5; [...] percebi que os alunos estavam realmente com vontade de aprender mais e também compartilhar tudo que aprendeu, inclusive eu e meu grupo [...] 6.2.6; [...] ponto positivo dessa feira, é que me ajudou um pouco, comecei a gostar de matemática, me deu vontade de aprender mais sobre isso [...] 6.2.10. [...] depois eu ensinei a pessoa, e ela adorou. E com isso eu gostei também, porque acabei aprendendo e animando outras pessoas. 6.2.12

Questionário: Aprendi conceitos matemáticos na elaboração da minha atividade lúdica 6.1.2 ? Aprendi conceitos matemáticos com a atividade lúdica apresentada pelo meu colega 6.1.3 ? Antes da Feira Matemágica, gostava de matemática 6.1.9? Depois da Feira Matemágica, passei a gostar de Matemática 6.1.10 ? Senti mais confiança na apresentação, de ter pesquisado as atividades lúdicas 6.1.11 ?

Objetivo analisados: Ter compromisso pelo ensino-aprendizagem de matemática; 1.1 graduar sistematicamente das atividades algébricas lúdicas a mais teórica exigidas pela grade curricular do Ensino Fundamental e Médio. 3.5

Consideração da evidência 2: Pode-se considerar positivo o resultado dessa feira, mediante aos relatos e questionários dos educandos, pois converge e corroboram as teorias de Dewey e responde os objetivos de graduar o estudante sistematicamente das atividades algébricas lúdicas no brincar a mais teórica, exigida pela grade curricular do Ensino Fundamental e Médio. Evidências que comprovam o compromisso pelo ensino- aprendizagem de matemática ao se interessar em querer aprender a fazer, a executar e compartilhar a atividade matemágica.

7.2.3 Evidência 3

Ideia de centralidade no estudante e na aprendizagem, autonomia para pesquisar e compromisso pela aprendizagem.

Relatos: As apresentações foram realmente muito boas, pois nos deixamos o medo e a vergonha de lado para apresentar e sabemos que isso no futuro irá nos ajudar 6.2.1; [...]. Cada aluno ou dupla ficou responsável por apresentar uma mágica e se dedicou a preparar o conteúdo para ser apresentado 6.2.4; Todos os alunos ficaram dedicados e compromissados, pesquisaram muito para fazer a apresentação, muito apresentaram e explicaram por varia forma 6.2.5; Eu me apresentei meio tenso, mas tudo ocorreu bem. Eu prestei muito atenção nas apresentações e ajudei alguns amigos, o professor ajudou muitos os alunos, todos tiraram dúvidas com ele 6.2.8;

Questionário: Pesquisei o conceito das atividades lúdica matemática na internet, nos livros, ou outros recursos didáticos 6.1.1? Aprendi conceitos matemáticos na elaboração da minha atividade lúdica 6.1.2? Aprendi conceitos matemáticos com a atividade lúdica apresentada pelo meu colega 6.1.3?

Objetivos analisados: Adquirir autonomia para pesquisar curiosidades matemáticas; ampliar a capacidade em planejar e organizar, comunicar pela oralidade e escrita, as atividades lúdicas matemáticas; adquirir competências e habilidades além do conhecimento teórico, desenvolver o raciocínio lógico, o senso crítico e autonomia, provocar uma participação efetiva; aprender a aprender, aprender a fazer; 3.5 ampliar a capacidade em planejar e organizar, comunicar pela oralidade e escrita, as atividades lúdicas matemáticas; Os estudantes para a construção de uma Feira Matemágicas? adquirir autonomia para pesquisar curiosidades matemáticas. 1.1

Consideração da evidência 3: A pedagogia da centralidade do ensino na aprendizagem e no educando previsto na LDB, em consonância com as teoria de Claparèd foi presente na Feira Matemágica, pois os relatos dos estudantes confirmam de forma implícita a mediação do processo de aprendizagem deles à atividade matemágica, que são fulcrais a construção do conhecimento, mantido como uma das abordagens prioritárias ao ensino-aprendizagem. Essa mediação gera liberdade de pesquisa com autonomia dos conceitos necessários para a execução das atividades, proposta no repertório de atividades mágicas ou atividades lúdicas a serem analisadas;

7.2.4 Evidência 4

Ideia de vínculos de aproximação, amorosidade e respeito na relação Professor-estudante e gosto pelo ensino de Matemática.

Relatos: Foi uma ótima ideia deixar nossa aula mais divertida 6.2.1; A matemágica ajudou muitos os alunos, a se interessar, até os mais bagunceiros aceitaram a ideia da feira, todos se interessaram 6.2.5; percebi que a matemática também é divertida 6.2.7; ele é um professor muito eficiente. Posso dizer um expert em matemática, eu não era muito acostumado com o modo de ensino dele, mas consegui aprender muito. 6.2.8; E que matemática não é só ruim, mais também tem lados bem legais e que podem ser aprendidos bem facilmente. 6.2.9.

Questionário: Antes de fazer a Atividade Lúdica, na Feira matemágica, minha relação de amizade e de aprendizagem com o professor era 6.1.7? Depois de Fazer a Atividade Lúdica na Feira matemágica minha relação de amizade e aprendizagem com o professor passou a ser 6.1.8?

Objetivos analisados: Quais estratégias de ensino fazem a diferença no processo em ensino-aprendizagem de matemática? Quando o aluno aprende ele passa a gostar mais da disciplina de matemática? A Feira Matemágica melhora a relação de comunicação, respeito e amorosidade entre professor-aluno no processo de ensino- aprendizagem? A Feira Matemágica melhora a relação de comunicação, respeito e amorosidade entre professor-aluno no processo de ensino-aprendizagem? 3.5 A comunicação professor-aluno melhoraria a mediação em relação ao processo de ensino-aprendizagem? 1.1

Consideração da evidência 4: A importância da Feira Matemágica foi propiciar um ambiente de alegria e entusiasmo ao trabalho lúdico, assim como estreitar entre professor-estudante algumas virtudes como amorosidade, atitudes de respeito, tolerância, humildade, gosto pela alegria, abertura ao novo e diálogos construtivos, concepção pedagógica que é fundamental para construção do cognitivo do educando, essas questões foram constatadas nas palavras declaradas implícito nos relatos e nas respostas do educando que responde parte dos objetivos descritos.

7.2.5 Evidência 5

Ideia de estímulo de reforço positivo.

Relatos: Não seria uma má ideia realizar mais atividades nesse modelo, porque todos gostaram e nos ajudou em relação à nota.[...] 6.2.1; Foi uma ótima ideia do professor, todos que eu perguntei adoraram a ideia, ficaram com receio antes, mais depois, aproveitaram ao máximo da nossa experiência. Adoramos e acreditamos que deveria ser um projeto realizado em todos os bimestres. 6.2.2; Eu achei legal que na minha apresentação saiu melhor que eu pensei. [...] 6.2.7; [...]me senti mais confiante em aprender sobre as atividades lúdicas. 6.2.11; Esses exercícios facilitaram a matemática e a deixaram mais legal e interessante. 6.2.13

Questionário: Acho importante que haja na escola uma Feira Matemágica anual, cada vez melhor, para motivar os alunos a apresentar e aprender as atividades lúdicas matemáticas por meio da pesquisa 6.1.6? Senti mais confiante na apresentação, depois que, pesquisei a atividade lúdica 6.2.11? As aulas são mais dinâmicas com as matemágicas, curiosidades, desafios e outras atividades Lúdicas 6.2.12?

Objetivos analisados: É possível despertar no estudante interesse futuro para criação de uma feira com maior nº de atividades lúdicas? 1.1 Estudantes motivados pelas artes mágicas matemáticas constroem e reproduzem conhecimentos? Quando o aluno aprende ele passa a gostar mais da disciplina de matemática? 3.5

Consideração da evidência 5: Os trechos dos relatos e o resultado do questionário evidenciam que os educandos foram estimulados com a aprendizagem lúdica matemática desenvolvida no social escolar. Evidências essas que convergem com as teorias de Skiner dando possibilidade de afirmar que a ação presente na Feira Matemágica desenvolve no cognitivo de todos estudantes envolvidos, estruturas de estímulos positivos, para construção de atividades algébricas semelhantes às mais teóricas, condicionamento esse que leva o educando a um modo operante afim de realizar projetos futuros. Conclui-se dessa maneira que o conjunto, professor e estudante, podem dar um segundo passo, para avançar na organização e execução de evento matemático com atividades lúdicas abstratas. 1.1 3.5

Uma das importâncias da realização deste projeto, no social escolar, é estabelecer uma relação de respeito e amorosidade entre o professor- estudante, estimular o interesse do educando ao estudo pela matemática, melhorar o compromisso do professor com os estudantes em arquitetar um projeto, organizar e realizar. Fatos esses que baseado nos estudos, estímulos de reforços positivos, de Skiner, pode se dizer que a execução deste trabalho, na sala de aula, aumenta a probabilidade futura, para novas realizações semelhantes ou complexas.

8 Considerações Finais e Conclusão

Na Escola Estadual Francisco Piergentile foi elaborada e executada a Feira Matemágica, onde foram retiradas informações sucessivas do social escolar, com a finalidade de estruturar procedimentos metodológicos, que posteriormente garantisse a ação norteada pela equipe, professor e 29 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, com uma construção produtiva e significativa do evento.

Desse modo foram organizados dados reais, diálogos e registros, combinados pedagógicos, trabalhos colaborativos e participações coletivas junto ao educando, para que consequentemente a descrição e análise das sequências didáticas convergissem na comprovação ou negação da essência hipotética decorrida na ação da feira. As respostas dos questionários 6.1 e relatos 6.2 dos estudantes, tecnicamente atestaram a abordagem aplicada no projeto, pois, o resultado convergiu com as propostas pedagógicas atuais apregoadas pelas literaturas do assunto, o que corroboram a Feira Matemágica num encadeamento positivo.

Uma das contribuições decorrentes a realização e construção deste projeto, é assegurar um roteiro contendo a proposta pedagógica que o fundamenta. Ele contempla 15 atividades lúdicas que foram desenvolvidas dentre outras, poderão ser encontradas nas referências [14] e [15]. São sugestões fundamentais ao leitor educador que planeja iniciar uma Feira Matemágica respaldada com abordagens e procedimento pedagógico.

O projeto Feira Matemágica em consonância com as literaturas apresentadas na secção 2.2 deste trabalho é relevante por vários motivos: desperta curiosidades por meio das artes mágicas matemáticas; traz um roteiro fácil de executar, que o torna viável; coloca como centro do ensino o estudante e a aprendizagem; proporciona uma compreensão matemática manuseada no brincar; gradua de atividades lúdicas a um aprender teórico apoiado nas Estruturas Algébricas; estimula o estudante a pesquisar, construir com autonomia e compartilhar o que aprendeu; promove o diálogo, a relação de respeito e afetividade entre professor-estudante; promove a construção do conhecimento cognitivo do educando por meio do lúdico e da amorosidade; aumenta a probabilidade futura de todos envolvidos nesse processo em realizar novamente um projeto semelhante ou complexo.

Portanto, fica proposto aos professores, gestores e educandos envolvidos uma reflexão dos erros e acertos da primeira Feira Matemágica para que possam avançar e graduar positivamente no evento da segunda Feira Matemágica, e assim sucessivamente.

Referências

[1] DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. *Álgebra Moderna:* volume único. 4. ed. reformada - São Paulo: Atual, 2003.

[2] BRASIL. MEC. *Diretrizes Curriculares para a Educação Básica:* diversidade e inclusão, Brasília, 2013.

[3] CLAPARÈD, Èdouard. *A Educação Funcional*- tradução e notas J. B. Damasco Penna. p.185, 1954. 4º ed. - São Paulo: Companhia Editora Nacional.

[4] CORTELLA, Mário Sergio. *A Escola e o Conhecimento.* p.109-110, 1997. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

[5] SãoPaulo (Estado) Secretaria da Educação. *Currículo do Estado de São Paulo:* Matemática e suas tecnologias, 1. ed. atual. São Paulo : SEE, 2012.

[6] DEWEY, John. *Experiência e educação.* p.92 e p.107, 1971. São Paulo: Nacional.

[7] FREIRE, Paulo. *Pedagogia da Autonomia:* Saberes Necessários à Práticas Educativa, 1996, p.75. editora: EGA.

[8] ————-. *A Importância do Ato de Ler:* em três artigos que se completam. São Paulo:1981, p.13 e p.33, editora: Cortez.

[9] ————-.*Educação e Mudança.* 1979, p.15, editora: Paz e Terra.

[10] COLEÇÃO GRANDES EDUCADORES. *B.F. Skinner.* [s.l.]: ATTA Mídia e Educação, 2006. 1 DVD.

[11] COLEÇÃO GRANDES EDUCADORES. *Édouard Claparède* [s.l.]: ATTA Mídia e Educação, 2006. 3 DVD.

[12] COLEÇÃO GRANDES EDUCADORES. *John Dewey* [s.l.]: ATTA Mídia e Educação, 2006. 1 DVD.

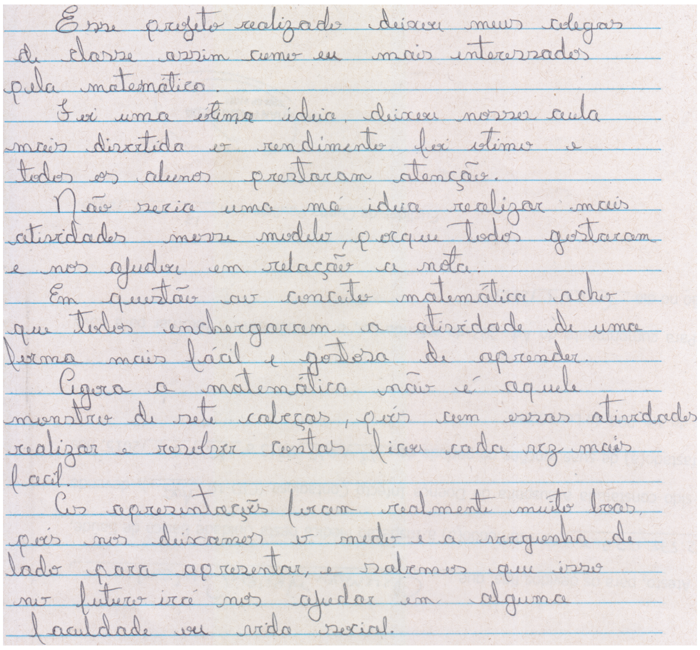
[13] COLEÇÃO GRANDES EDUCADORES. *Paulo Freire.* [s.l.]: ATTA Mídia e Educação, 2006. 3 DVD.

[14] Sampaio, C. J.; Malagutti, P. L.; *Mágicas, Matemática e outros Mistérios.* III Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal de Goiás, São Carlos, 2006.

[15] Sampaio, Fausto Arnaud; *Matemágica:* História, aplicações e jogos matemáticos. Campinas, SP: 2008, Papirus, 4ª ed.

[16] SKINNER, Frederic. *Comportamento Verbal.* 1978, p.5, editora: Cultrix.

Apêndice A - Imagens dos manuscritos dos estudantes



Esse projeto realizado deixou meus colegas de classe assim como eu mais interessados pela matemática.

Foi uma ótima ideia, deixou nossa aula mais divertida o rendimento foi ótimo e todos os alunos prestaram atenção.

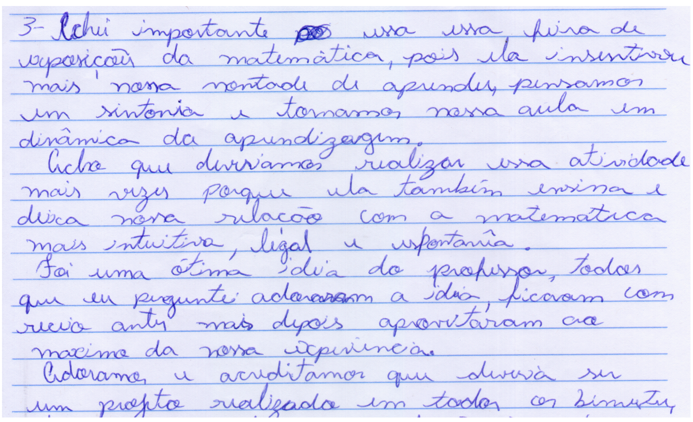
Não seria uma má ideia realizar mais atividades nesse modelo, porque todos gostaram e nos ajudou em relação a nota.

Em questão ao conceito matemática acho que todos enchergaram a atividade de uma forma mais fácil e gostosa de aprender.

Agora a matemática não é aquele monstro de sete cabeças, pois com essas atividades realizar e resolver contas fica cada vez mais fácil.

As apresentações foram realmente muito boas, pois nos deixamos o medo e a vergonha de lado para apresentar, e sabemos que isso no futuro irá nos ajudar em alguma faculdade ou vida social.

Figura 1: Manuscrito 1. 6.2.1



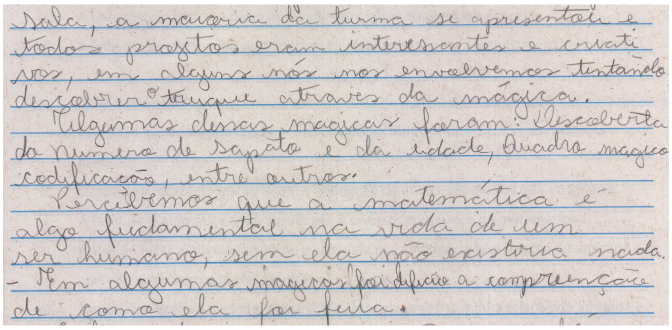
3- Achei importante ~~[illegible]~~ essa essa feira de exposição da matemática, pois ela insentivou mais nossa vontade de aprender, pensamos em sintonia e tornamos nossa aula em dinâmica da aprendizagem.

Acho que deveríamos realizar essa atividade mais vezes porque ela também ensina e deixa nossa relacão com a matemática mais intuitiva, legal e espontanêa.

Foi uma ótima idéia do professor, todos que eu perguntei adoraram a idéia, ficaram com receio antes mais depois aproveitaram ao máximo da nossa experiência.

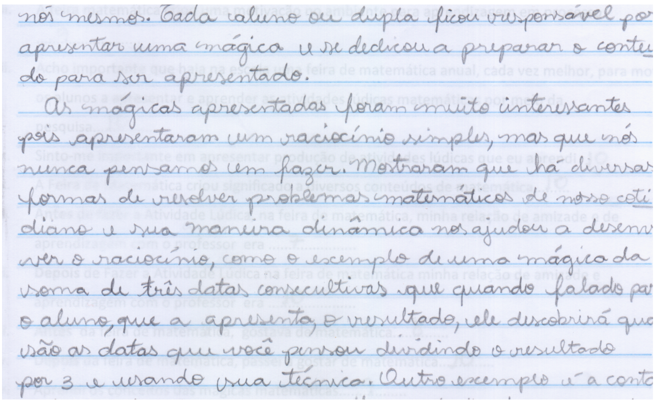
Adoramos e acreditamos que deverá ser um projeto realizado em todos os bimestres,

Figura 2: Manuscrito 2. 6.2.2



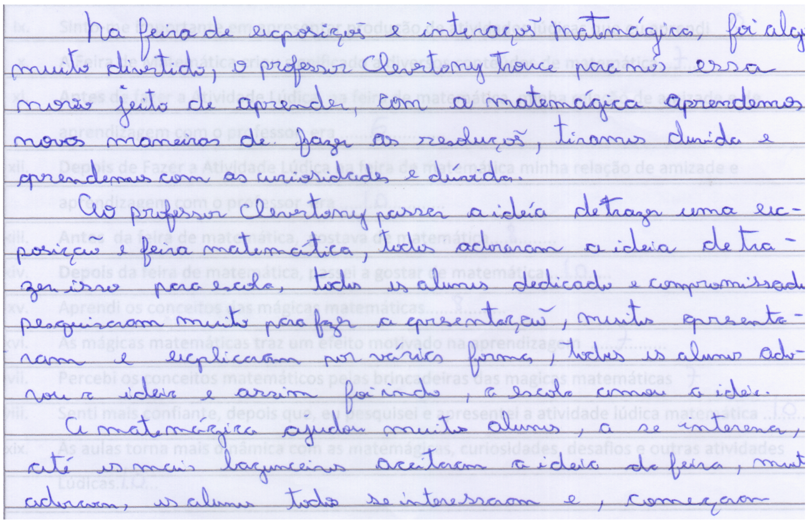
sala, a maioria da turma se apresentou e
todos projetos eram interessantes e criati
vos, em alguns nós nos envolvemos tentando
descobrir o truque através da mágica.
Algumas dessas mágicas foram: Descoberta
do numero de sapato e da idade, Quadro magico
codificação, entre outros.
Percebemos que a matemática é
algo fundamental na vida de um
ser humano, sem ela não existiria nada.
- Em algumas magicas foi dificio a compreenção
de como ela foi feita.

Figura 3: Manuscrito 3.6.2.3



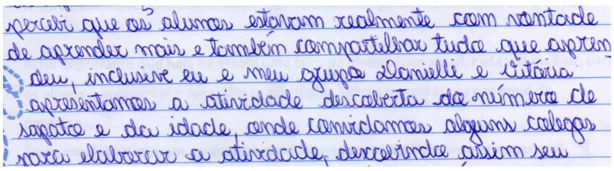
nós mesmos. Cada aluno ou dupla ficou responsável por
apresentar uma mágica e se dedicou a preparar o contéu
do para ser apresentado.
As mágicas apresentadas foram muito interessantes
pois apresentaram um raciocínio simples, mas que nós
nunca pensamos em fazer. Mostraram que há diversas
formas de resolver problemas matemáticos de nosso coti
diano e sua maneira dinâmica nos ajudou a desenvol
ver o raciocínio, como o exemplo de uma mágica da
soma de três datas consecultivas que quando falado par
o aluno, que a apresenta, o resultado, ele descobrirá que
são as datas que você pensou dividindo o resultado
por 3 e usando sua técnica. Outro exemplo é a conta

Figura 4: Manuscrito 4.6.2.4



Na feira de exposições e interações matmágicas, foi alg
muito divertido, o professor Clevertony trouxe para nós essa
nosso jeito de aprender, com a matemágica aprendemos
novas maneiras de fazer as resoluções, tiramos dúvida e
aprendemos com as curiosidades e dúvidas.
O professor Clevertony passou a idéia de trazer uma ex-
posição e feira matemática, todos adoraram a ideia de tra-
zer isso para escola, todos os alunos dedicados e compromissados
pesquisaram muito para fazer a apresentação, muitos apresenta-
ram e explicaram por vários formas, todos os alunos ado-
rou a ideia e assim foi indo, a escola amou a idéia.
A matemágica ajudou muitos alunos, a se interessar,
até os mais bagunceiros aceitaram a ideia da feira, muit
adoraram, os alunos todos se interessaram e, começaram

Figura 5: Manuscrito 5. 6.2.5



percebi que os alunos estavam realmente com vontade
de aprender mais e também compartilhar tudo que apren
deu, inclusive eu e meu grupo Danielle e Vitória
apresentamos a atividade descoberta do número de
sapato e da idade, onde convidamos alguns colegas
para elaborar a atividade, descobrindo assim seu

Figura 6: Manuscrito 6. 6.2.6

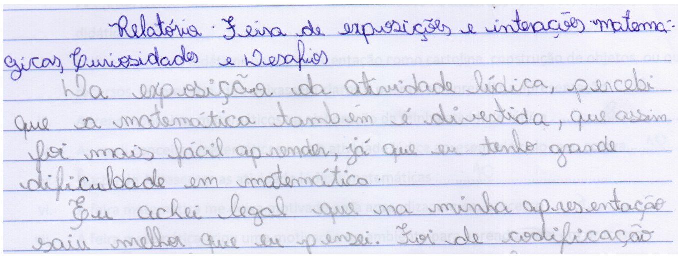

Relatório · Feira de exposições e interações matemágicas, Curiosidades e Desafios
Na exposição da atividade lúdica, percebi que a matemática também é divertida, que assim foi mais fácil aprender, já que eu tenho grande dificuldade em matemática.
Eu achei legal que na minha apresentação saiu melhor que eu pensei. Foi de codificação

Figura 7: Manuscrito 7. 6.2.7

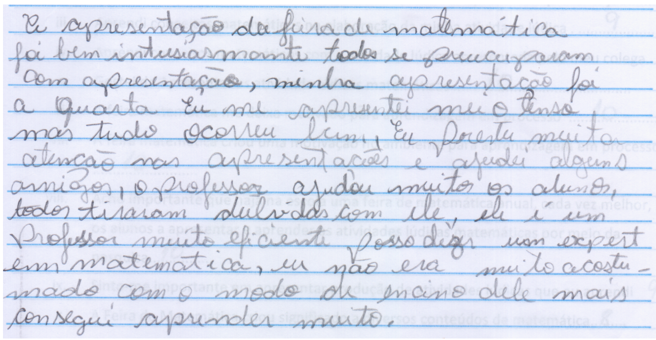

A apresentação da feira de matemática foi bem intusiasmante todos se preucuparam com apresentação, minha apresentação foi a quarta Eu me apresentei meio tenso mas tudo ocorreu bem, Eu Presta muita atenção nas apresentações e ajudei alguns amigos, o professor ajudou muitos os alunos, todos tiraram duvidas com ele, ele é um Professor muito eficiente posso dizer um expert em matematica, eu não era muito acostumado com o modo de ensino dele mais consegui aprender muito.

Figura 8: Manuscrito 8. 6.2.8

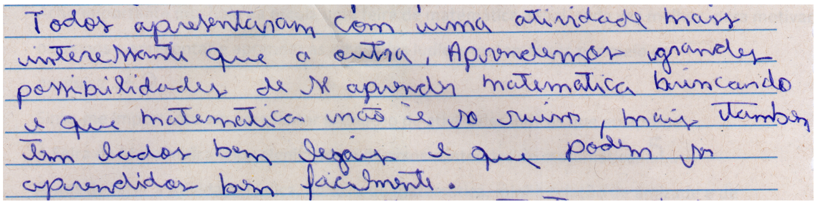
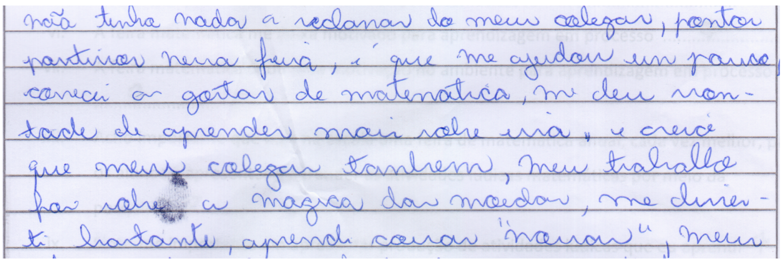
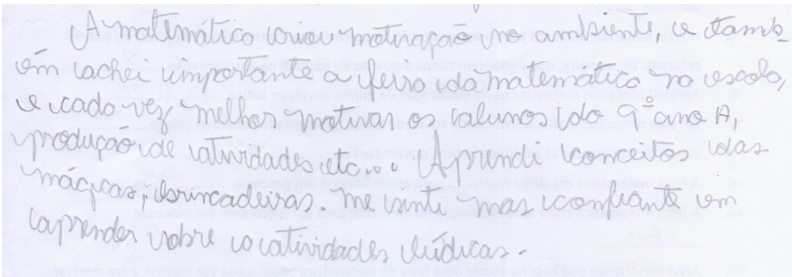

Todos apresentaram com uma atividade mais interessante que a outra, Aprendemos grandes possibilidades de se aprender matematica brincando e que matematica não é so ruim, mais tambem tem lados bem legais e que podem ser aprendidos bem facilmente.

Figura 9: Manuscrito 9.6.2.9

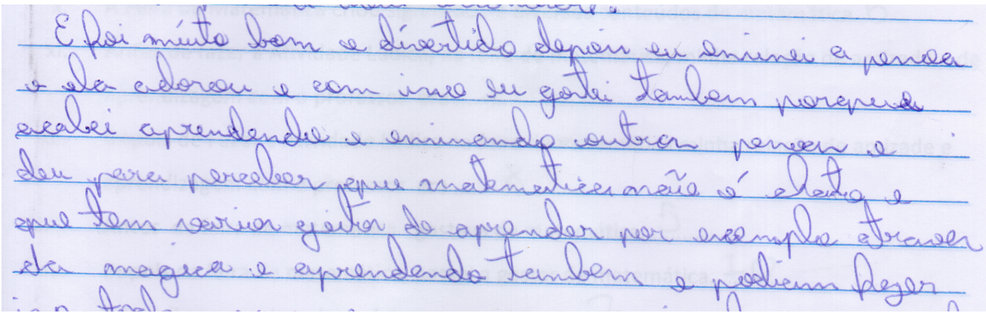
Figura 10: Manuscrito 10.6.2.10


não tenho nada a reclamar do meu colegar, pontar partiçar nessa feira, e que me ajudou em parse, comecei a gostar de matematica, me deu vontade de aprender mais sobre ela, e creio que meus colegas tambem, meu trabalho foi sobre a magica das moedas, me diverti bastante, aprendi caçar "macaco", meu



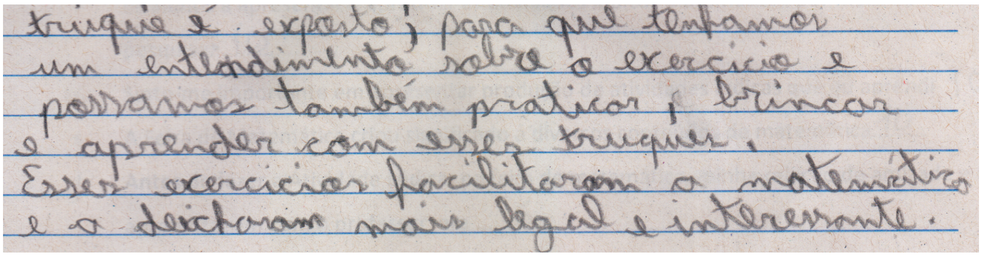
A matemática criou motivação no ambiente, e também achei importante a feira da matemática na escola, e cada vez melhor motivar os alunos do 9º ano A, produção de atividades etc... Aprendi conceitos das mágicas, brincadeiras. Me senti mais confiante em aprender sobre as atividades lúdicas.

Figura 11: Manuscrito 11. 6.2.11



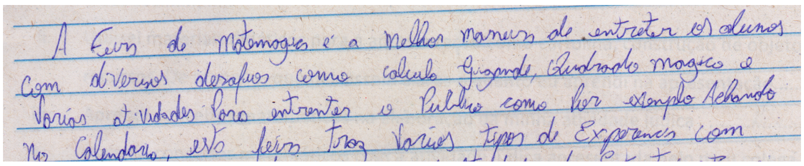
E foi muito bom e divertido depois eu ensinei a pessoa e ela adorou e com isso eu gostei também porque acabei aprendendo e ensinando outras pessoas e deu para perceber que matemática não é chata e que tem vários jeitos de aprender por exemplo através da mágica e aprendendo também e podiam fazer

Figura 12: Manuscrito 12.6.2.12



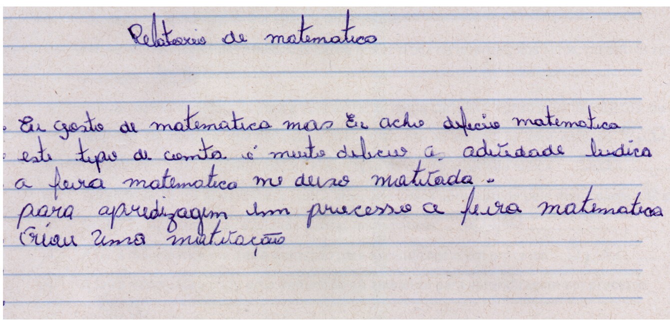
truque é exposto; para que tenhamos um entendimento sobre o exercício e possamos também praticar, brincar e aprender com esses truques. Esses exercícios facilitaram a matemática e a deixaram mais legal e interessante.

Figura 13: Manuscrito 13. 6.2.13



A Feira de Matemágica é a melhor maneira de entreter os alunos Com diversos desafios como calculo Gigante, Quadrado mágico e Várias atividades Para entreter o Publico como Por exemplo Achando no Calendario, esta feira traz Varias tipos de Experiencias com

Figura 14: Manuscrito 14. 6.2.14



Relatorio de matematica

Eu gosto de matematica mas eu acho dificio matematica este tipo de conta é muito delicioso a atividade ludica a feira matematica me deixo motivada.
para aprendizagem um processo a feira matematica Criou uma motivação

Figura 15: Manuscrito 15. 6.2.15