UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

MATEUS EDUARDO BOCCARDO

SISTEMAS LINEARES: APLICAÇÕES E PROPOSTAS DE AULA USANDO A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA

São José do Rio Preto
2017

MATEUS EDUARDO BOCCARDO

SISTEMAS LINEARES: APLICAÇÕES E PROPOSTAS DE AULA USANDO A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientadora: Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti

São José do Rio Preto
2017

Boccardo, Mateus Eduardo.
Sistemas lineares: aplicações e propostas de aula usando a metodologia de resolução de problemas e o software Geogebra/ Mateus Eduardo Boccardo. -- São José do Rio Preto, 2017.
82 f. : il.

Orientador: Ermínia De Lourdes Campello Fanti
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Matemática – Metodologia. 3. GeoGebra (Software de computador). 4. Sistemas. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Mateus Eduardo Boccardo

SISTEMAS LINEARES: APLICAÇÕES E PROPOSTAS DE AULA USANDO A METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O SOFTWARE GEOGEBRA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr.Anderson Paião dos Santos
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UFTPR

Profª. Drª. Flávia Souza Machado da Silva
UNESP – São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
25 de Setembro de 2017

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, por ter me dado força, iluminado meu caminho e me cercado por pessoas boas.

Agradeço a Prof.ª Ermínia pela paciência, pela ajuda e por ter contribuído, e muito, na minha formação profissional. Um agradecimento aos demais professores que atuaram no PROFMAT.

Agradeço a minha família, em especial a Adriana, que vivenciou esse trabalho, sempre ao meu lado.

Agradeço a CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Obrigado a todos os colegas do PROFMAT e a todos os amigos que participaram deste momento.

RESUMO

Sistemas Lineares, mais precisamente, Sistemas de Equações Lineares, é ferramenta útil para a resolução de vários problemas práticos e importantes, por exemplo, problemas relacionados a tráfego de veículos, balanceamento de equações químicas, cálculo de uma alimentação diária equilibrada, circuitos elétricos e interpolação polinomial. Neste trabalho abordamos o conteúdo Sistemas Lineares, seus métodos de resolução, algumas de suas inúmeras aplicações, bem como a interpretação geométrica do conjunto solução de sistemas lineares em duas ou três variáveis. Apresentamos também, uma análise de como esse assunto é tratado em alguns documentos oficiais de ensino. Por fim, são expostas duas Propostas de Aula que foram elaboradas para alunos do Ensino Básico, uma para ser desenvolvida usando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino (na abordagem de problemas sobre sistemas lineares) e outra, sobre a Interpretação Geométrica do conjunto solução de Sistemas Lineares, para ser realizada na Sala de Informática, utilizando o *software* GeoGebra.

Palavras-chave: Sistemas de Equações Lineares. Metodologia da Resolução de Problemas. GeoGebra. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Linear System, more precisely, System of Linear Equations, is a useful tool for their solution of several practical and important problems, for example problems related to vehicle traffic, balancing of chemical equations, elaboration healthy daily diet, electrical circuits and polynomial interpolation. In this work, we study Linear System, its methods of resolution, some of its numerous applications, as well as the geometric interpretation of the solution set of linear system in two or three variables. We also present an analysis of how this subject is treated in some official teaching documents. Finally, we present two Class Proposals that are elaborated for Basic Education students, one to be developed using Problem Solving as a teaching methodology (in the approach to problems on linear system) and another, on the Geometric Interpretation of the solution set of Linear System, to be held in the Computer Laboratory, using GeoGebra software.

KEY-WORDS: System of Linear Equations. Problem Solving Methodology. GeoGebra. Mathematics Teaching.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O assunto Sistemas Lineares está relacionado com muitos problemas importantes do dia a dia. Problemas que vão desde tráfego de veículos em ruas movimentadas a situações nas quais é necessário encontrar o peso de algo desconhecido, balanceamento de equações químicas e aplicações em interpolação polinomial. Assim, é um tema de bastante relevância no ensino de Matemática. Além disso, é ferramenta fundamental para trabalhar com os alunos outros conteúdos de Matemática, como Matrizes, Determinantes, Modelagem, Otimização, entre outros. É um assunto abordado desde o Ensino Fundamental, passando pelo Ensino Médio e, também, em algumas disciplinas de cursos superiores da área de Exatas.

Neste trabalho abordamos o conteúdo sistemas lineares, suas formas de resolução, algumas de suas várias aplicações, bem como a interpretação geométrica do conjunto solução para sistemas lineares de duas ou três incógnitas. Apresentamos, também, uma análise relativa a esse assunto em alguns documentos oficiais de ensino, finalizando com duas Propostas de Aula para o Ensino Básico.

O trabalho está dividido da seguinte forma.

No Capítulo 1, apresentamos a parte teórica de Sistemas Lineares. Discutimos as formas de resolução: via escalonamento, e quando pertinente, via Regra de Cramer e matriz inversa. Finalizando este capítulo, apresentando uma abordagem geométrica de Sistemas Lineares 2×2 e 3×3, mais precisamente do conjunto solução dos sistemas.

No Capítulo 2, é feito uma análise de como esse assunto é tratado em alguns documentos oficiais de Ensino, a saber, nos PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998), nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2006), no Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio (SÃO PAULO, 2010), nas Matrizes de Referência para Avaliação do SARESP (SÃO PAULO, 2009) e, finalmente, nas Recomendações para Avaliação de Aprendizagem em Processo – AAP (SÃO PAULO, 2017).

Na sequência, no Capítulo 3, uma série de aplicações de sistemas lineares é apresentada, abordando vários problemas práticos, questões de vestibulares, de provas de acesso ao PROFMAT, e outras, que ilustram a importância dessa ferramenta na resolução de vários problemas. Incluindo ainda neste capítulo outras duas aplicações, uma aplicação de sistemas lineares em interpolação polinomial e outra em otimização.

No último capítulo, Capítulo 4, são apresentados dois tipos de Propostas de Aula sobre sistemas lineares para serem desenvolvidas com alunos do Ensino Básico. A primeira Proposta de Aula é para ser desenvolvida usando a Resolução de Problemas como metodologia de ensino (na abordagem de problemas sobre sistemas lineares). A outra Proposta de Aula é sobre a Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares, mais precisamente do conjunto solução de Sistemas Lineares com duas ou três incógnitas, para ser realizada com os alunos na Sala de Informática, utilizando o *software* livre GeoGebra.

CAPÍTULO 1

SISTEMAS LINEARES

Sistemas lineares é um assunto que pode ser abordado de várias maneiras e está relacionado com muitos problemas importantes do dia a dia. Problemas que vão desde tráfego de veículos em ruas movimentadas a situações nas quais é necessário encontrar o peso de algo desconhecido, balanceamento de reações químicas e aplicações em interpolação polinomial. Assim, é um assunto de bastante relevância no ensino de Matemática. Além disso, é ferramenta fundamental para trabalhar com os alunos outros assuntos de Matemática, como Matrizes, Determinantes, Modelagem, Otimização, entre outros.

Neste capítulo abordaremos a parte teórica de Sistemas Lineares e para seu desenvolvimento foram usadas as referências Callioli, Domingues e Costa (1990), Iezzi e Hazzan (2002) e Hefez e Fernandez (2012).

1.1 Sistemas Lineares: Definição e Métodos de Resolução

Definição 1: Chama-se *equação linear* nas incógnitas (ou variáveis) $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$, toda equação na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... + \ a_nx_n = b$, onde $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ e b, são constantes reais. As constantes $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ são chamadas de *coeficientes*, enquanto a constante b é denominada de *termo independente*. Dada uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... + \ a_nx_n = b,$ uma solução desta equação é uma sequência de n números reais $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ tais que $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ ... + \ a_n\alpha_n = b$. Se $b = 0$, a equação $a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... + \ a_nx_n = 0$ é denominada *equação homogênea*. O conjunto de todas as soluções de uma equação linear é chamado seu *conjunto solução* ou *solução geral da equação*.

Exemplo: Dada a equação linear $3x + 2y - z = 6$, temos que $(1, 2, 1)$ é uma solução, pois $3.(1) + 2.(2) - (1) = 6$ tornando a sentença verdadeira e, $(1, 1, 2)$ não é solução pois $3.(1) + 2.(1) - (2) \neq 6$, o que torna a sentença falsa.

Definição 2: Um sistema formado por $\boldsymbol{m}$ equações lineares e $\boldsymbol{n}$ incógnitas (com $m,\ n \geq 1$) é chamado *Sistema Linear* e se apresenta do seguinte modo:

$$S:\begin{cases} \mathrm{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1} \\ \mathrm{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2} \\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\ \mathrm{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m} \end{cases}$$

Uma *solução* do sistema anterior é uma n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, de números reais, que é solução de cada uma das m equações lineares do sistema.

Quando $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, chamamos o sistema de *Sistema Homogêneo*.

Forma Matricial: Usando o produto entre matrizes, podemos escrever um Sistema Linear na notação matricial $A.X = B$, em que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo: O sistema linear $S: \begin{cases} 5x + 3y = 8 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$ é formado por duas equações lineares e duas incógnitas, a saber, x e y. Escrito em sua forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Definição 3: (*Classificação*) Se um sistema linear S não admitir solução o chamamos de sistema *Impossível* (ou *Incompatível*). Um sistema linear S que admite apenas uma solução é chamado de *Possível Determinado* (ou *Compatível Determinado*). Se o sistema S possuir mais de uma solução, chamamos o sistema de *Possível Indeterminado* (ou *Compatível Indeterminado*).

Discussão e Resolução de Sistemas: *Discutir* um sistema linear S significa classificá-lo como *Impossível*, *Possível Determinado* ou Possível *Indeterminado*. *Resolver* um sistema linear S significa encontrar seu conjunto solução.

Sistemas Equivalentes

Um dos problemas enfrentados, em geral, é como obter o conjunto solução de um sistema dado.

Definição 4: Dois sistemas lineares S e S_1 são *equivalentes,* se toda solução de S_1 for solução de S e toda solução de S for solução de S_1.
Notação: $S \sim S_1$

Pode-se verificar que a relação acima (de ser equivalente), no conjunto de sistemas lineares de m equações e n incógnitas, é uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva).

A partir de um sistema S, queremos obter um novo sistema S_1, que tem as mesmas soluções de S (equivalente a S) e cujo conjunto solução é mais fácil de ser encontrado. Esse sistema S_1 será obtido via operações efetuadas em S, denominadas "*operações elementares*".
Essas operações elementares estão especificadas a seguir:

i) *Permutar duas equações de S.*
ii) Multiplicar uma das equações de S por um número real $\lambda \neq 0$.
iii) *Somar a uma equação do sistema S uma outra equação desse sistema, multiplicada por um número real*.

Teorema 1: Dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas, se S_1 é o sistema obtido de S por efetuar alguma das operações elementares acima descritas, então S_1 é equivalente a S.

Demonstração*:*

i) *Permutar duas equações de S:* Se S_1 for obtido de S, apenas trocando a posição de duas equações, pode-se facilmente ver que as soluções de S também são soluções de S_1. De fato, dado

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ seja sua solução. Permutando, por exemplo, a primeira e a m-ésima equações de S, obtemos

$$S_1: \begin{cases} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \end{cases},$$

onde $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ continua sendo solução.

ii) *Multiplicar uma das equações de S por um número real* $\lambda \neq 0$: Suponhamos que S_1 é obtido de S por multiplicar uma das equações por $\lambda \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que seja a primeira equação. Sabendo-se que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é uma solução de S, obtém-se $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1$. Multiplicando essa equação por λ, tem-se $(\lambda a_{11})\alpha_1 + (\lambda a_{12})\alpha_2 + \cdots + (\lambda a_{1n})\alpha_n = \lambda b_1$, e assim $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ continua sendo solução do sistema S_1, já que as outras equações são as mesmas.

Por outro lado, se a n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S_1, então $(\lambda a_{11})\alpha_1 + (\lambda a_{12})\alpha_2 + \cdots + (\lambda a_{1n})\alpha_n = \lambda b_1$ é verdadeira. Dividindo ambos os membros dessa igualdade por $\lambda \neq 0$, obtemos $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1$, de modo que $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ é solução de S.

iii) *Somar a uma equação do sistema S outra equação desse sistema, multiplicada por um número real não nulo*: Considere o sistema

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Substituindo a i-ésima equação de S pela soma, membro a membro, dela pela j-ésima equação de S multiplicada por $\lambda \neq 0$, obteremos o sistema S_1 a seguir:

$$S_1:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{i1}+\lambda a_{j1})x_1 + (a_{i2}+\lambda a_{j2})x_2 + \cdots + (a_{in}+\lambda a_{jn})x_n = b_i + \lambda b_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Observe que S e S_1 diferem apenas pela i-ésima equação. Analisaremos apenas essas equações. Mostraremos que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S se, e somente se, for solução de S_1.

(⇒) Suponha que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ seja solução de S e provemos que é, também, solução de S_1. Por hipótese:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i \qquad \text{(I)}$$

e, multiplicando a j-ésima equação por λ obtemos

$$\lambda a_{j1}\alpha_1 + \lambda a_{j2}\alpha_2 + \cdots + \lambda a_{jn}\alpha_n = \lambda b_j. \qquad \text{(II)}$$

Somando membro a membro (I) e (II) e colocando os α_i's em evidência, temos: $(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2}+\lambda a_{j2})\alpha_2 + \cdots + (a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n = b_i + \lambda b_j$, ou seja, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução da i-ésima equação de S_1. Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S_1, já que as demais equações de S_1 são as mesmas de S.

(⇐) Suponha, agora, que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução de S_1 e provemos que é solução de S. Por hipótese:

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1 + (a_{i2}+\lambda a_{j2})\alpha_2 + \cdots + (a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n = b_i + \lambda b_j \qquad \text{(I)}$$

$$\lambda a_{j1}\alpha_1 + \lambda a_{j2}\alpha_2 + \cdots + \lambda a_{jn}\alpha_n = \lambda b_j\ . \qquad \text{(II)}$$

Subtraindo (II) de (I), temos que $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n = b_i$, mostrando que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é solução da i-ésima equação de S. Logo, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ é também solução de S. ■

Sistemas Escalonados

Definição 5: Um sistema linear S de m equações e n incógnitas é denominado *sistema linear escalonado,* se o número de coeficientes nulos, antes do primeiro coeficiente não nulo, aumenta de equação para equação. Mais precisamente, um sistema linear de m equações e n incógnitas é um *sistema escalonado* se tem o seguinte aspecto:

$$S:\begin{cases} a_{1r_1}x_{r_1} + a_{12}x_2 + \quad \dots \quad + a_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad a_{2r_2}x_2 + \quad \dots \quad + \; a_{2n}x_n = \beta_2 \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kr_k}x_{r_k} + \cdots + a_{kn}x_n = \beta_k \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0x_n = \beta_{k+1} \end{cases},$$

onde $a_{1r_1} \neq 0, a_{2r_2} \neq 0, \dots, a_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$, com $1 \leq r_1 < r_2 < \cdots < r_k \leq n$. Caso $\beta_{k+1} = 0$, podemos eliminar a última equação do sistema. Portanto, num sistema linear escalonado o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior que na anterior.

Alguns autores consideram como sistema escalonado um sistema um pouco diferente do apresentado acima, exigindo que $a_{kr_k} = 1$ e os $a_{kj} = 0$, para $j > r_k$ (ver, por exemplo, Hefez e Fernandez (2012, p. 32)). Neste trabalho, adotaremos a definição de sistema escalonado apresentada acima, na Definição 5.

Exemplo: O sistema S é um sistema escalonado:

$$S:\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ \qquad\quad y - z = 0. \\ \qquad\qquad\;\; z = 1 \end{cases}$$

Note que sua solução é facilmente obtida, pois $z = 1$ e, substituindo esse valor na segunda equação, temos y= 1. Substituindo, agora, na primeira equação, teremos $x = 1$. Logo, $(1, 1, 1)$ é a solução do sistema.

Em geral, dado um sistema na “forma escalonada” é mais fácil obter seu conjunto solução, como observado no exemplo anterior. Assim, dado um sistema S, obter um sistema linear S_1, na forma escalonada, é bastante interessante, uma vez que o conjunto solução de S é o mesmo de S_1. O resultado seguinte nos garantirá que sempre é possível obter um sistema S_1, na forma escalonada, equivalente ao sistema S dado.

Proposição 1: Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

***Demonstração*:** Suponhamos, sem perda de generalidade, que o sistema linear seja dado por

$$S: \begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1n}\mathrm{x}_n = \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{a}_{21}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{2n}\mathrm{x}_n = \mathrm{b}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathrm{a}_{m1}\mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{m2}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{mn}\mathrm{x}_n = \mathrm{b}_m \end{cases},$$

e para cada $a_{i1} \neq 0$ $(i = 2, 3, \dots, m)$, multipliquemos a primeira equação por $(-a_{i1})$ e somemos o resultado à i-ésima equação.

Com algumas operações elementares, obteremos um sistema S' do seguinte tipo:

$$S': \begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{a}_{12}\mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{a}_{1n}\mathrm{x}_n = \mathrm{b}_1 \\ d_{22}\mathrm{x}_2 + \cdots + d_{2n}\mathrm{x}_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ d_{m2}\mathrm{x}_2 + \cdots + d_{mn}\mathrm{x}_n = \beta_m \end{cases},$$

com $d_{22} \neq 0$, que é equivalente a S. Dividindo a segunda equação de S' por d_{22}, obtemos um sistema S'', ainda equivalente a S', com o qual repetiremos o raciocínio já adotado, um número finito de vezes, chegando a um sistema S_1 escalonado equivalente a S.■

Exemplo: Obtenha um sistema equivalente ao sistema abaixo e que esteja na forma escalonada, em seguida dê a solução do sistema

$$S: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

Efetuando as operações descritas, obteremos o sistema escalonado S_1.

$$S: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3: L_3 - 2L_1]{L_2: L_2 - L_1} S_1: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + z = 2 \\ -z = -1 \end{cases}$$

É fácil verificar, na terceira equação de S_1, que $z = 1$. Substituindo esse valor na segunda equação de S_1, encontraremos $y = -\frac{1}{2}$. Trocando esses valores na primeira equação de S_1, obtemos $x = -\frac{1}{2}$. Portanto, $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$ e $z = 1$ e $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$ é a única solução do sistema S_1. E, pelos dois resultados anteriores, é também, a única solução do sistema linear S.

Neste trabalho, como o foco é Sistemas Lineares, vamos admitir conhecidos o conceito de "determinante de uma matriz quadrada" e alguns resultados relacionados. Para maiores detalhes, ver Hefez e Fernandez (2012), Iezzi e Hazzan (2002) ou Callioli, Domingues e Costa (1990).

Lembramos que:

1. Uma matriz quadrada A de ordem n (ou $n \times n$), é *inversível* se existe uma matriz B, de ordem n, tal que $A.B = I_n = B.A$, em que I_n indica a matriz identidade de ordem n.
2. Uma matriz quadrada A é inversível, se e somente se, $\det(A) \neq 0$, onde $\det(A)$ indica o determinante de A. E neste caso, a *matriz inversa de* A, denotada por A^{-1}, é dada por $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.(cof(A))^t$, com $cof(A) = (A_{ij})_{n \times n}$, em que $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$ e D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, referente ao elemento a_{ij}, suprimindo a linha i e a coluna j.
3. Dada uma matriz A de ordem n, é possível efetuar nas linhas de A operações elementares similares às efetuadas nas equações lineares de um sistema (permutar duas linhas de A; multiplicar uma linha de A por $\lambda \neq 0$, somar a uma linha de A outra linha de A multiplicada por um número real não nulo). Se uma matriz B puder ser obtida de A por um número finito dessas operações, diz-se que B é *equivalente* à matriz A e escreve-se $B \sim A$. Vale o seguinte resultado: Uma matriz quadrada A é inversível se, e somente se, $I_n \sim A$. Neste caso a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n em A^{-1} (CALLIOLI, DOMINGUES, COSTA, 1990, p.29).

Sistemas de Cramer – Regra de Cramer

Como visto anteriormente, podemos escrever um sistema linear de m equações e n incógnitas na notação matricial, $A.X = B$.

Definição 6: Um *Sistema de Cramer* é um sistema linear de n equações e n incógnitas, cuja matriz dos coeficientes é inversível.

Proposição 2: Se S é um sistema de Cramer então S é possível determinado.

Demonstração: Suponhamos S dado na forma matricial S: $A.X = B$, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

sendo A uma matriz inversível. Como a matriz A é inversível, temos:

$$A.X = B \Leftrightarrow A^{-1}A.X = A^{-1}B \Leftrightarrow (A^{-1}A).X = A^{-1}B \Leftrightarrow I_n.X = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Logo, a única solução do sistema de Cramer é dada por $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$, de modo que S é possível determinado. ■

Exemplo: Resolva o Sistema de Cramer $S: \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - y + 5z = -1 \\ 2x + 5y - 2z = 3 \end{cases}$.

Solução: Escrevendo o sistema S na forma matricial $A.X = B$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, é preciso encontrar A^{-1}, a matriz inversa de A.

$$[A \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{L3: L3}-2\text{L1}]{\text{L2: L2}-3\text{L1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & -8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{L2: 2L2}-\text{L3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -8 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{L3: L3}-9\text{L2}]{\text{L1: L1}+2\text{L2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & 34 & -18 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3:-\left(\frac{1}{8}\right).L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right] \xrightarrow{L1:\,L1-3L3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{23}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{array}\right] = [\, I_3 \quad | \, A^{-1} \,].$$

Assim, $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{7}{4} \\ -4 & 2 & -1 \\ -\frac{17}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$. Usando que $X = A^{-1}.B$, obtemos

$X = \begin{bmatrix} \frac{23}{4} & -\frac{11}{4} & \frac{7}{4} \\ -4 & 2 & -1 \\ -\frac{17}{4} & \frac{9}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}$ e portanto $(8, -5, -6)$ é a única solução de S.

Regra de Cramer: Temos, pela Proposição 2, que para obter a solução de um Sistema de Cramer "$S: A.X = B$", basta encontrar a inversa da matriz A e multiplicá-la pela matriz B, no entanto, existe uma outra forma de obter a solução de um sistema de Cramer, usualmente referida como *Regra de Cramer*.

Proposição 3: Considere S um sistema de Cramer, com n equações e n incógnitas, escrito no formato matricial $S: A.X = B$. A (única) solução do sistema é dada por $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, tal que $\alpha_i = \frac{D_i}{D}$, com $D \neq 0$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, em que D_i, também denotado por D_{x_i}, é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema e D é o determinante da matriz A.

Demonstração: Seja $S: A.X = B$ um sistema linear de Cramer dado na forma matricial, com $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ onde A é uma matriz inversível.

Pela Proposição 2, $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$ e, sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.(cof(A))^t$, onde

$(cof(A))^t = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$. Dessa forma, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{det(A)}.(cof(A))^t.B = \frac{1}{det(A)}.\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \frac{1}{det(A)}.\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{j1}\, b_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} A_{jn}\, b_j \end{bmatrix}$$

O termo $\sum_{j=1}^{n} A_{j1}\, b_j$ é o determinante da matriz $\Delta_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b_1} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ \boldsymbol{b_2} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ \boldsymbol{b_n} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ desenvolvida pela sua primeira coluna.

De um modo geral, o termo $\sum_{j=1}^{n} A_{jk}\, b_j$ $(k = 1,2,\dots,n)$ é o desenvolvimento, pela k-ésima coluna do determinante da matriz $\Delta_k = \begin{bmatrix} a_{11} \dots & \boldsymbol{b_1} & \dots\ a_{1n} \\ a_{21} \dots & \boldsymbol{b_2} & \dots\ a_{2n} \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ a_{n1} \dots & \boldsymbol{b_n} & \dots\ a_{nn} \end{bmatrix}$ obtida de A pela substituição de sua k-ésima coluna por B. Temos, finalmente, $x_k = \frac{det\,(\Delta_k)}{det(A)}$, para todo $k = 1,2,\dots,n$.

Essa fórmula dá a solução de $A.X = B$ quando A é inversível e é conhecida como *Regra de Cramer*. ■

Exemplo: Resolva o sistema $S: \begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$ usando a Regra de Cramer.

Solução: Podemos escrever o sistema S na forma A.X = B, com $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$. Vamos, inicialmente, calcular $D = det(A)$.

$D = det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 27$. Como $det(A) \neq 0$, podemos usar a Regra de Cramer para resolver o sistema. Temos:

$$Dx = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -54 \text{ e daí, } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-54}{27} = -2.$$

$$Dy = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 81 \text{ e assim } y = \frac{D_y}{D} = \frac{81}{27} = 3.$$

$$Dz = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \text{ e, dessa forma, } z = \frac{D_z}{D} = \frac{0}{54} = 0.$$

Portanto, $x = -2$, $y = 3$ e $z = 0$ e $(-2, 3, 0)$ é a única solução do sistema S.

Notemos que, dado um sistema de n equações e n incógnitas, Possível Determinado (sistema de Cramer) temos três métodos para resolvê-lo: por escalonamento, Regra de Cramer e multiplicação de matrizes (matriz inversa). Uma pergunta natural que surge é:

Qual desses métodos de resolução de sistemas é o melhor? Qual desses métodos “tem custo operacional” mais baixo?

Um tratamento interessante sobre isso é apresentado em Lima (1993), para sistemas lineares 3×3. Na sequência resolveremos um sistema de Cramer usando os três métodos.

Exemplo: Dado o sistema S: $\begin{cases} 5x - 3y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases}$, resolva-o usando os três métodos observados anteriormente: por escalonamento, por multiplicação de matrizes e pela Regra de Cramer.

- *Solução por escalonamento*:

$$S: \begin{cases} 5x - 3y + 3z = 2 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x - 3y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow[L_3:4L_1-5L_3]{L_2:5L_2-3L_1} \begin{cases} 5x - 3y + 3z = 2 \\ 14y + 11z = -11 \\ 3y + 7z = 7 \end{cases} \xrightarrow{L_3:3L_2-14L_3}$$

$$S_1: \begin{cases} 5x - 3y + 3z = 2 \\ 14y + 11z = -11, \\ -65z = 65 \end{cases}$$

que nos fornece $x = 1$, $y = 0$ e $z = -1$ e assim $(1, 0, -1)$ é a única solução de S_1. E, pelo Teorema 1, é também a única solução de S.

- *Solução por multiplicação de matrizes:*

Podemos escrever o sistema linear S na forma matricial $A.X = B$, onde $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Vamos calcular a matriz A^{-1}, inversa de A, usando escalonamento.

$$[A \quad | \, I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{L3: L3}-\text{L2}]{\text{L1: L1}-\text{L3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{L1:3L1}-\text{L2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 1 & -4 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{L3: L3}-\text{L1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & -5 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{L3:L3}-\text{4L2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -13 & -13 & 3 & 14 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3: -\frac{1}{13}\text{L3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{13} & -\frac{14}{13} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{L}_2\text{: 2L3}-\text{L2}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{7}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{13} & -\frac{14}{13} \end{array}\right] \xrightarrow{\text{L1:L1}-\text{2L3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & \frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{7}{13} & \frac{11}{13} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{13} & -\frac{14}{13} \end{array}\right] = [\, I_3 \,|\, A^{-1}].$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ -1 & \frac{7}{13} & \frac{11}{13} \\ 1 & -\frac{3}{13} & -\frac{14}{13} \end{bmatrix}$. A solução do sistema é dada por $X = A^{-1}.B$, assim

$X = \begin{bmatrix} -1 & \frac{6}{13} & \frac{15}{13} \\ -1 & \frac{7}{13} & \frac{11}{13} \\ 1 & -\frac{3}{13} & -\frac{14}{13} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, de onde se obtém a solução $(x, y, z) = (1, 0, -1)$.

- *Solução pela Regra de Cramer:*

Temos que $D = det(A) = -13 \neq 0$. Vamos aplicar a Regra de Cramer. Seja Dx a matriz obtida substituindo a primeira coluna pelos elementos da matriz B, e calculemos seu determinante:

$$\mathrm{D_x} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = -13 \text{ e assim } x = \frac{D_x}{D} = \frac{-13}{-13} = 1.$$

Da mesma forma, calculamos os determinantes Dy e Dz, substituindo a segunda e terceira coluna da matriz A, respectivamente, pelos elementos da matriz B. Vejamos:

$$\mathrm{D_y} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 0 \text{ e daí } y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{-13} = 0;$$

$$\mathrm{D_z} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} = 13 \text{ e } z = \frac{D_z}{D} = \frac{13}{-13} = -1.$$

Portanto, $x = 1, y = 0$ e $z = -1$ e $(1, 0, -1)$ é a única solução de S_1.

Observação: Segundo Lima (1993), por exemplo, para resolver *por escalonamento* um sistema linear 3 × 3, nas variáveis x, y e z (desconsiderando operações de adição e subtração) são necessárias 28 operações de multiplicação e divisão. Este número, 28, tem a seguinte origem: $(4+4)+(4+4)=16$ operações para eliminarmos x nas segunda e terceira equações; $(3+3)=6$ operações para eliminarmos y na terceira equação; 1 (uma) referente a divisão para encontrar z; 1 multiplicação e 1 divisão para encontrar y e, finalmente, 2 multiplicações e 1 divisão para encontrar x, totalizando, assim, $16+6+1+1+1+2+1=28$ operações.

Já pelo *método de Cramer*, é necessário, inicialmente, calcular 4 determinantes. Expandindo, por linha ou coluna, temos 9 multiplicações a fazer em cada um, ou seja, $4x9 = 36$ operações. Feito isso, temos agora 3 divisões para fazer, totalizando $36 + 3 = 39$ operações.

Em seu artigo, Lima (1993) apresenta, mais geralmente, o custo operacional relacionando o número de operações (multiplicação e divisão) necessárias para resolver sistemas de n equações e n incógnitas, as quais não serão apresentadas/discutidas aqui. Ao citar esse artigo, nosso intuito foi mais para chamar a atenção em relação ao número de operações que são feitas de forma imperceptível quando resolvemos sistemas lineares e para observar que quando utilizamos a *Regra de Cramer* o número de operações efetuadas é maior do que quando usamos o método de *escalonamento*.

1.2 Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares

Podemos interpretar geometricamente o conjunto solução (em $\mathbb{R}$) de um sistema linear de duas ou mais equações com duas (ou três) incógnitas, uma vez que cada equação do sistema linear é a equação de uma reta no plano, ou a equação de um plano no espaço (no caso de três incógnitas). De modo que, dada uma equação linear com duas incógnitas, o conjunto formado por todos os pares ordenados de números reais que são soluções da equação determina, no plano, uma reta. Similarmente, o conjunto formado por todas as triplas de números reais que são soluções de uma equação linear com três incógnitas determina, no espaço, um plano.

Assim, para classificar os sistemas lineares, via essa interpretação geométrica, precisamos analisar as posições relativas das retas (ou planos), relacionadas ao sistema.

Utilizamos o software GeoGebra para fazer as construções geométricas aqui ilustradas.

Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 2x2

Uma equação geral de reta no plano $\mathbb{R}^2$ é da forma $ax + by + c = 0$, em que a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Assim, dado um sistema de equações lineares com duas incógnitas:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases}$$

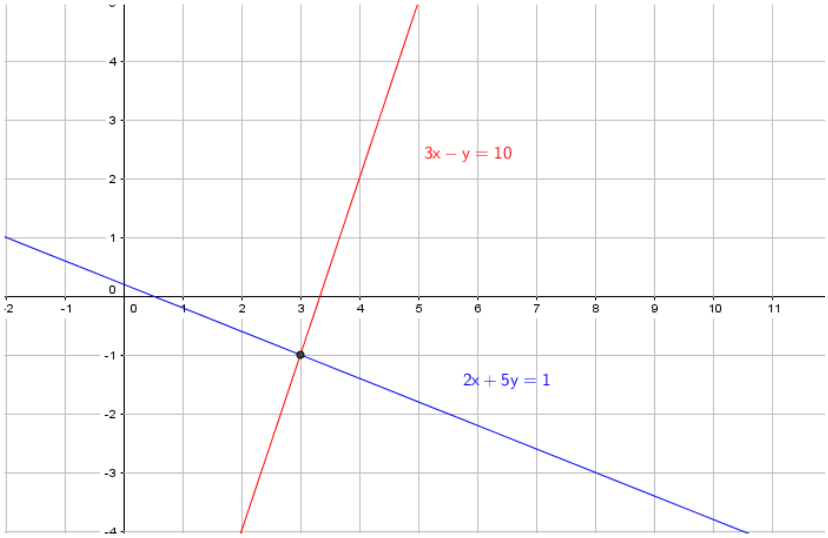
com $a_i, b_i, c_i,\ i = 1, 2$ elementos em $\mathbb{R}$, podemos ver tal sistema como um sistema de equações de retas no plano.

Como visto anteriormente, um sistema linear pode ser classificado em: *Possível Determinado*; *Possível Indeterminado* ou *Impossível*. Queremos analisar isso geometricamente e exemplificar cada caso.

- **Sistema Possível Determinado**: Ocorre quando *"As duas retas são concorrentes"*. Como sabemos, um sistema desse tipo possui apenas uma solução. Esta solução será o ponto de interseção das duas retas concorrentes.

Exemplo: Dado o sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$, temos duas retas concorrentes que se cruzam no ponto $(3, -1)$, que é a solução do sistema linear.

Figura 1: Duas retas concorrentes

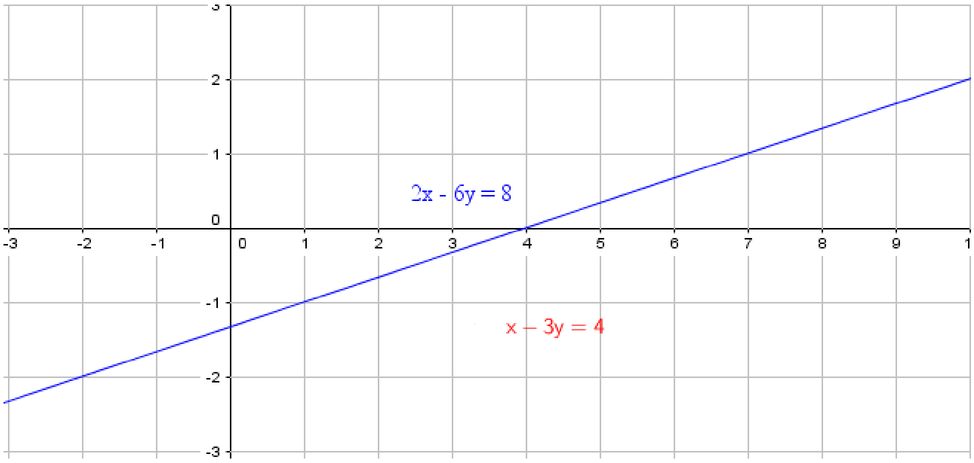


Fonte: Elaborado pelo autor

- **Sistema Possível Indeterminado**: "*Quando as retas são coincidentes*." Um sistema de duas equações e duas incógnitas é Possível Indeterminado se possui infinitas soluções. Geometricamente isto ocorre quando as retas associadas ao sistema são coincidentes.

Exemplo: No sistema $\begin{cases} x - 3y = 4 \\ 2x - 6y = 8 \end{cases}$ as duas retas são coincidentes (note que uma equação é múltipla da outra). Temos que $\{(4 + 3\alpha,\ \alpha),\ com\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto solução deste sistema.

Figura 2: Duas retas paralelas coincidentes

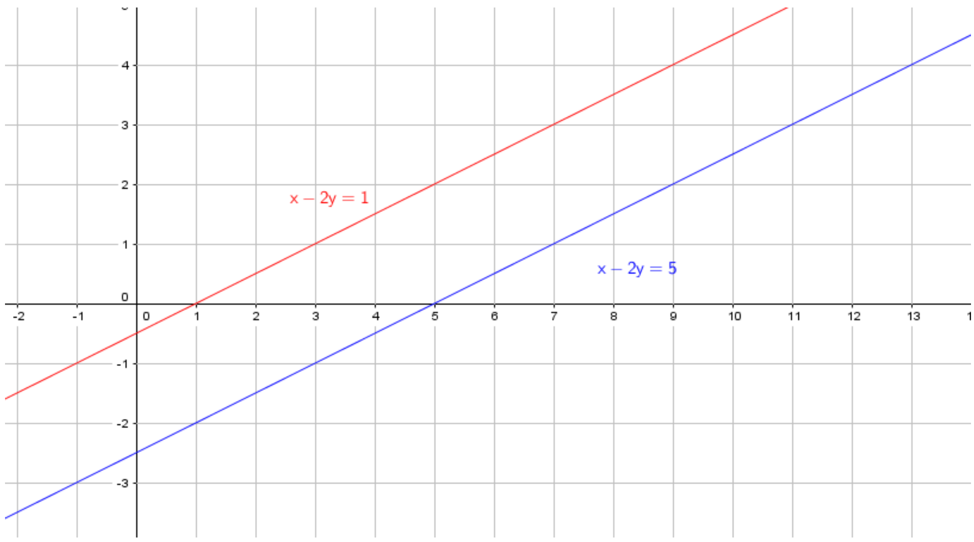


Fonte: Elaborado pelo autor

- **Sistema Impossível**: "*As retas são paralelas distintas*." Um sistema é impossível se não possui solução, isso ocorre quando as retas são paralelas e distintas.

Exemplo: Considere o sistema $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$. Geometricamente o que se obtém são duas retas paralelas distintas. O conjunto solução desse sistema é vazio.

Figura 3: Duas retas paralelas distintas

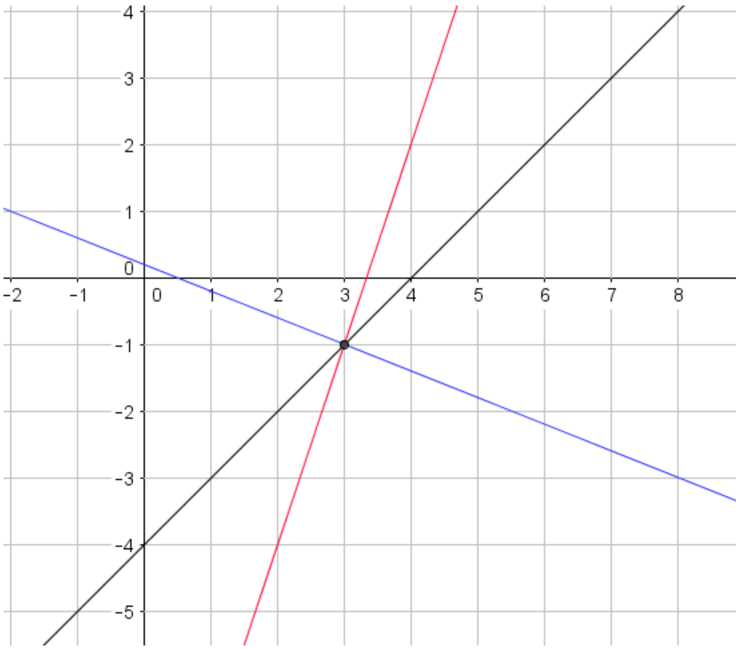


Fonte: Elaborado pelo autor

Note que se tivermos um sistema linear com duas incógnitas formado por mais de duas equações o tratamento é similar, porém agora temos que analisar a posição de três ou mais retas. Ilustramos no exemplo abaixo uma dessas situações.

Exemplo: Dado o sistema $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10, \\ x - y = 4 \end{cases}$ temos três retas concorrentes duas a duas com um ponto em comum, a saber o ponto $(3, -1)$, que é a solução do sistema linear de modo que o sistema é Possível Determinado.

Figura 4: Três retas que se cruzam em um único ponto



Fonte: Elaborado pelo autor

Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares 3x3

A equação geral de um plano π no espaço $\mathbb{R}^3$ é da forma $ax + by + cz = d$, em que a, b, c e d são números reais (não todos nulos). Assim podemos ver um sistema de equações lineares com três incógnitas como um sistema de equações de planos no espaço.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

com $a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ i\ =\ 1,\ 2,\ 3$ elementos em $\mathbb{R}$.

Geometricamente, cada uma das equações apresentadas no sistema representa um plano. Considere os seguintes planos $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ e $\pi_3 :\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ no espaço $\mathbb{R}^3$.

Vamos analisar, inicialmente, sistemas lineares de 2 equações e 3 incógnitas e depois sistemas lineares de 3 equações e 3 incógnitas. Os casos de n equações e 3 incógnitas, com n>3, são similares.

a) Sistema linear de 2 equações e 3 incógnitas:

Neste caso temos dois planos e não temos a possibilidade de um sistema possível determinado. As possibilidades são:

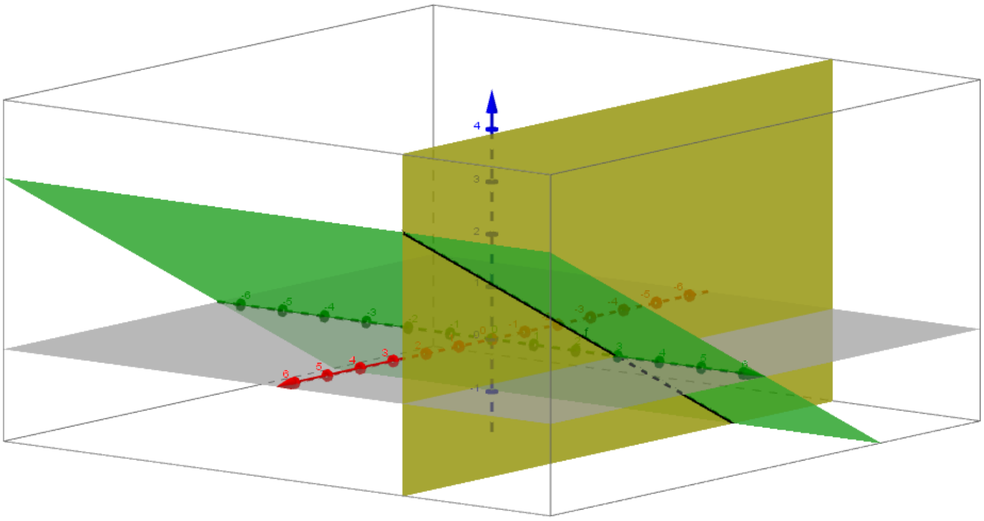
- **1. Sistema Possível Indeterminado:** temos duas situações a considerar:

- ***Situação* 1**. "*Os planos são transversais*." O sistema tem infinitas soluções e o conjunto solução neste caso é representado por uma reta (dada pela interseção dos planos). Ao representar os elementos do conjunto solução do sistema usamos apenas uma variável livre.

Exemplo: Considere, por exemplo, o sistema:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y \qquad = 3 \end{cases} \Rightarrow\ (x, y, z)\ =\ (x, 3, x),\ \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Figura 5: Planos transversais

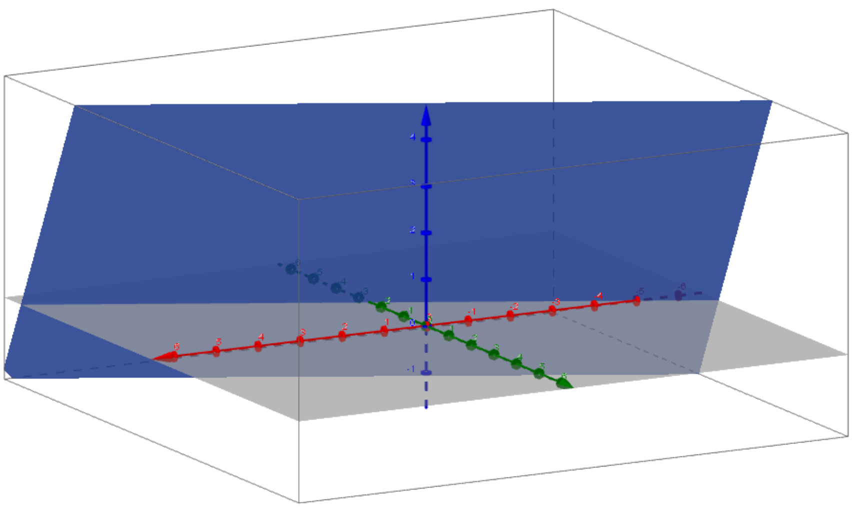


Fonte: Elaborado pelo autor

- ***Situação* 2.** "*Os dois planos são paralelos coincidentes*." Nessa situação o sistema tem infinitas soluções e o conjunto solução é representado por um plano. Para representar todos os elementos do conjunto solução do sistema necessitamos de duas variáveis livres.

Exemplo: $\begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 4x + 8y - 4z = -20 \end{cases} \sim \begin{cases} x + 2y - z = -5 \\ 0 = 0. \end{cases} \Rightarrow (x, y, 2x + y + 5), x, y \in \mathbb{R}.$

Figura 6: Planos paralelos coincidentes

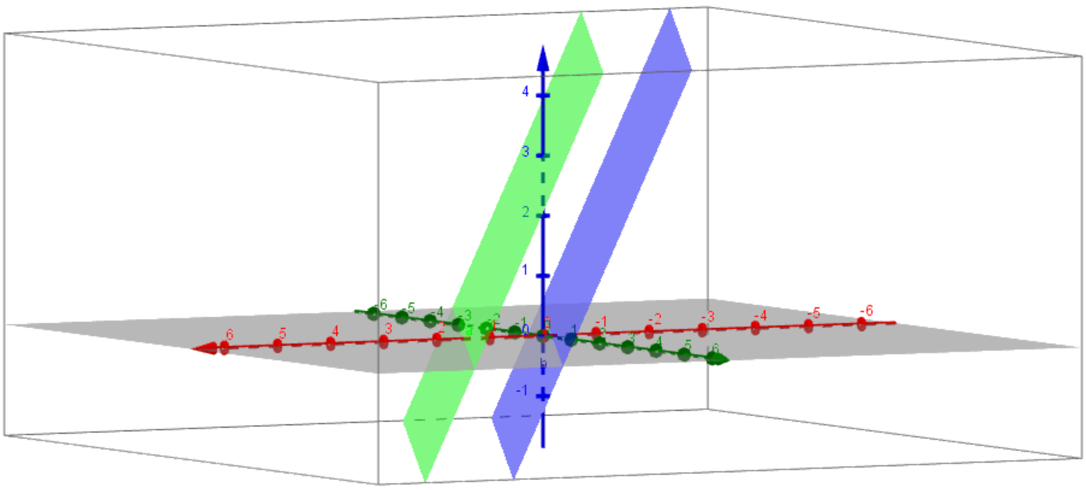


Fonte: Elaborado pelo autor

- **2. Sistema Impossível:** "*Os dois planos são paralelos distintos*." Neste caso os planos não se intersectam e o conjunto solução é vazio.

Exemplo: Considere o sistema $S: \begin{cases} 2x - y + z \;=\; 3 \\ 6x - 3y + 3z = -1 \end{cases}$, facilmente verifica-se que $S \sim \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ \qquad\quad 0 = \; -10 \end{cases}$.

Figura 7: Planos paralelos distintos



Fonte: Elaborado pelo autor

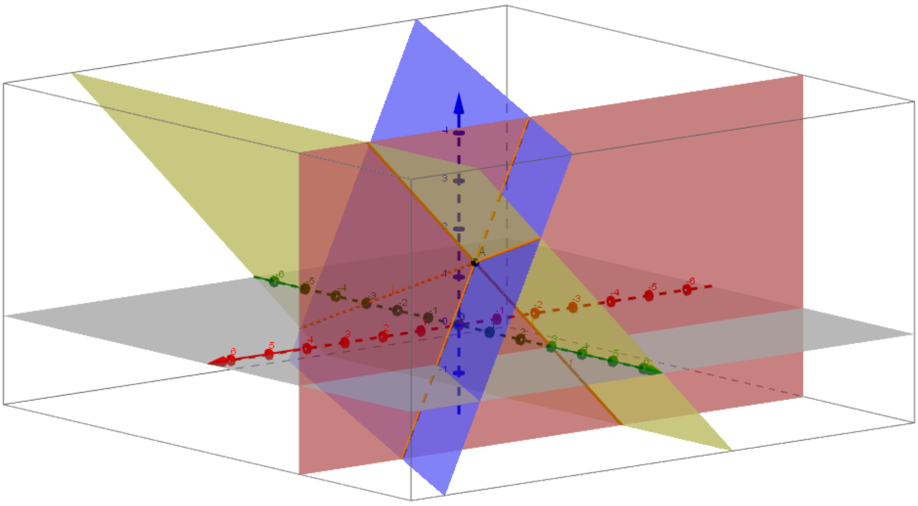
b) Sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas.

Vejamos as possibilidades que podemos ter:

1. **Sistema Possível Determinado:** "*Os três planos se intersectam em um único ponto.*" Isto acontece quando os três planos se cortam dois a dois, segundo três retas concorrentes que se intersectam em um único ponto, que é a solução do sistema.

Exemplo: No sistema $S: \begin{cases} x \qquad - z = \;\; 0 \\ \qquad y \qquad = \; 3 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$ isso ocorre. A única solução do sistema linear é $(2, 3, 2\,)$.

Figura 8: Interseção de três planos distintos



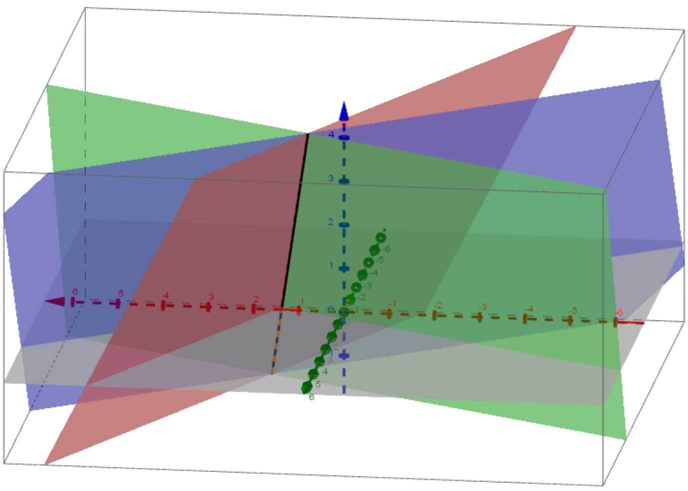
Fonte: Elaborado pelo autor

2. **Sistema Possível Indeterminado:** neste caso temos que considerar três tipos de situações.

***Situação* 1.** "*Os três planos são distintos e se intersectam em uma única reta.*" Assim o conjunto solução é formado por todos os pontos dessa reta.

Exemplo: Considere o sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 2y - z = 1 \\ 3x - 4y + 3z = 5 \end{cases}$.

Figura 9: Três planos distintos

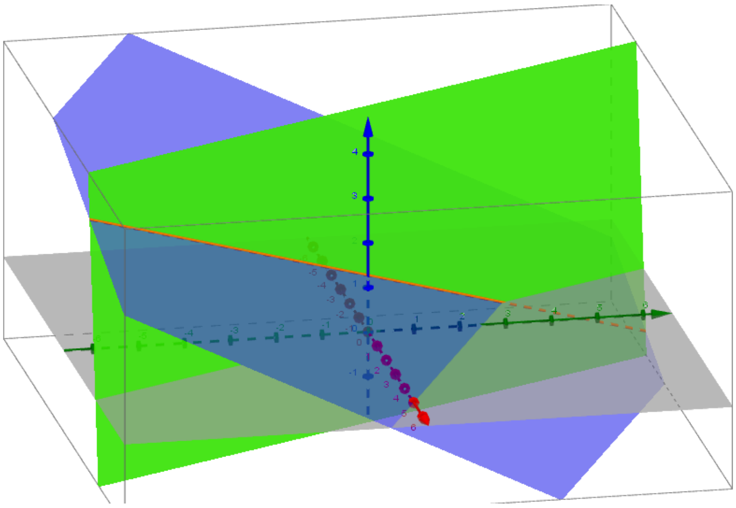


Fonte: Elaborado pelo autor

Situação 2. "*Quando dois planos são coincidentes e o terceiro plano intersecta-os segundo uma reta*."

Exemplo: $\begin{cases} 6x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 5 \\ 3x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Figura 10: Dois planos coincidentes intersectados por um terceiro plano

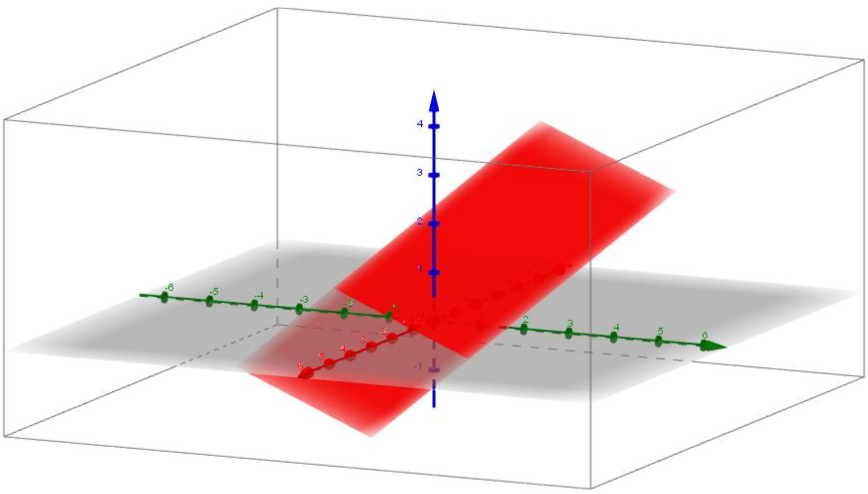


Fonte: Elaborado pelo autor

Situação 3. "*Quando os três planos coincidem*." Obviamente o conjunto solução é formado por todos os pontos do plano.

Exemplo: $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = 2 \\ 3x - 3y + 6z = 3 \end{cases}$.

Figura 11: Três planos coincidentes



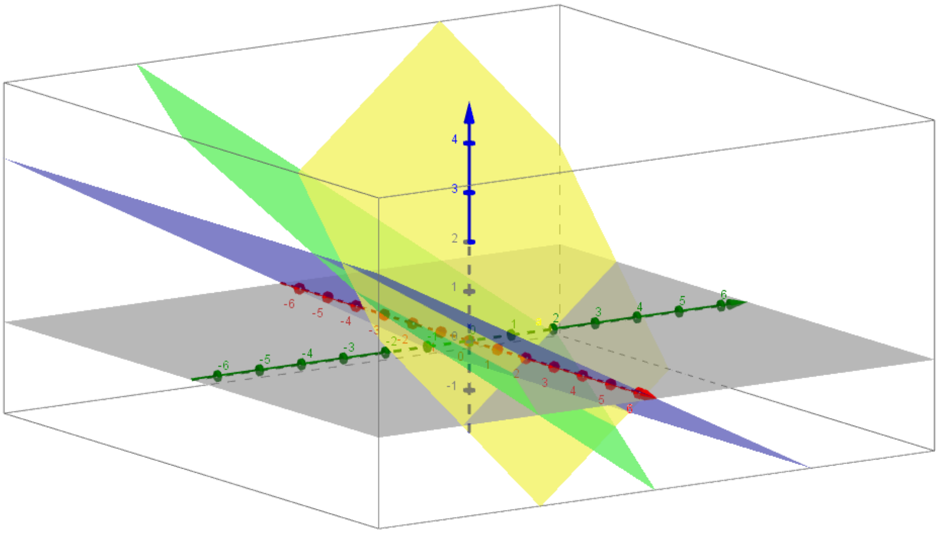
Fonte: Elaborado pelo autor

3. Sistema Impossível: temos neste caso quatro tipos de situações.

***Situação* 1**. "*Quando os três planos se intersectam dois a dois, mas não existe interseção dos três planos*."

Exemplo: $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ \quad y + 2z = 0 \end{cases}.$

Figura 12: Três planos se intersectando dois a dois

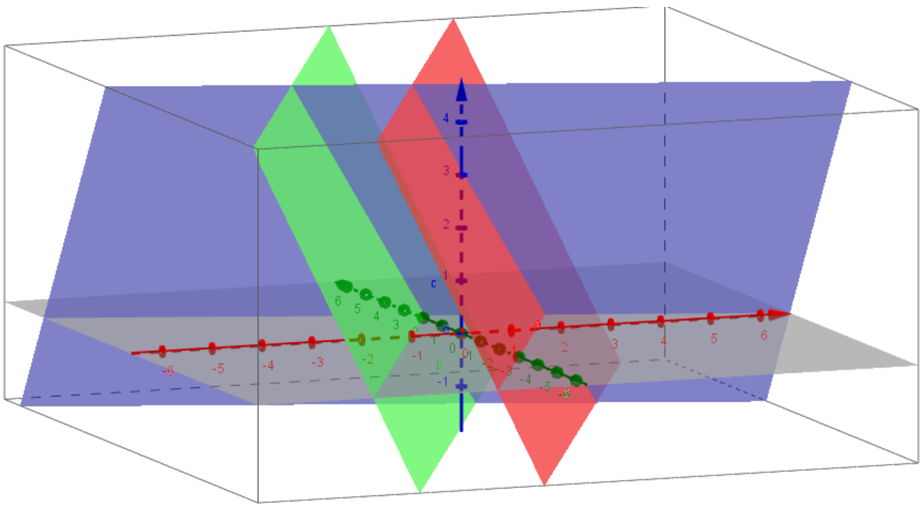


Fonte: Elaborado pelo autor

***Situação* 2.** "*Quando dois planos são paralelos distintos e o terceiro é transversal a ambos, cortando-os segundo retas paralelas distintas*." Neste caso não existe nenhum ponto comum aos três planos, de modo que o conjunto solução é o vazio.

Exemplo: $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 2x - y + z = -2 \\ x + 3y + 2z = 2 \end{cases}.$

Figura 13: Dois planos paralelos e um transversal

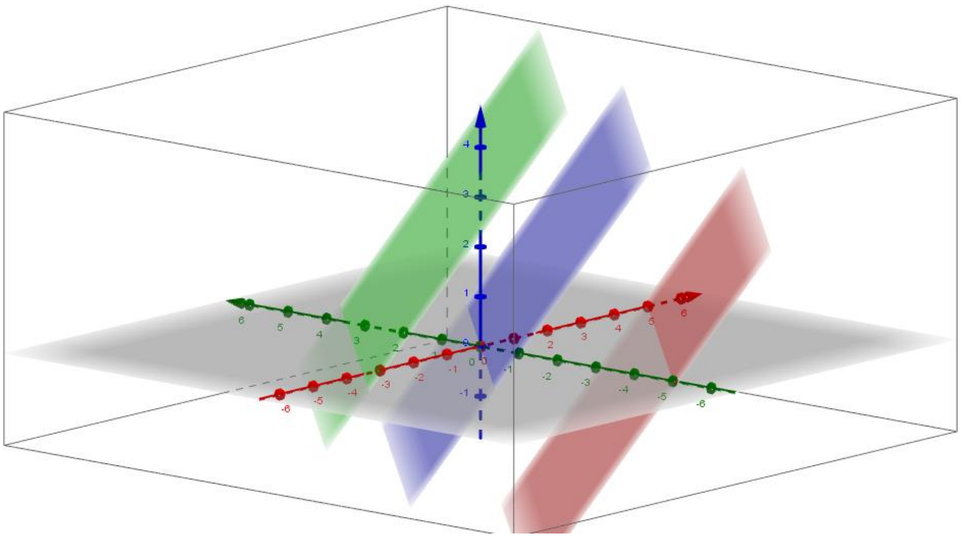


Fonte: Elaborado pelo autor

***Situação* 3.** "*Quando temos três planos paralelos distintos*." E assim não existe nenhum ponto em comum.

Exemplo: $\begin{cases} 2x - 2y - 2z = 7 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 5 \end{cases}.$

Figura 14: Três planos paralelos distintos

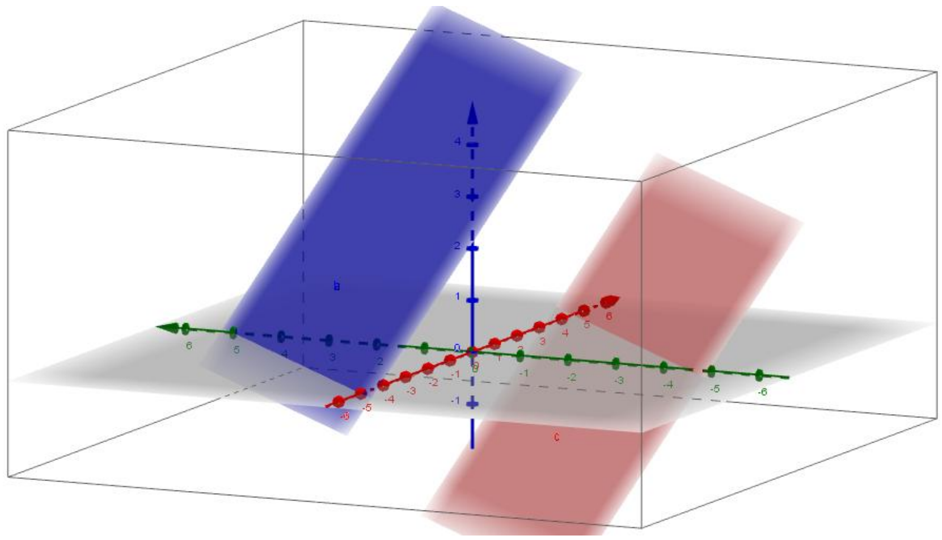


Fonte: Elaborado pelo autor

***Situação* 4.** "*Quando dois planos são coincidentes e o outro é paralelo* (*e distinto*) *a estes dois*."

Exemplo: $\begin{cases} x - y - z = -15 \\ 2x - 2y - 2z = -30 \\ 2x - 2y - 2z = 9 \end{cases}$.

Figura 15: Dois planos coincidentes e um plano paralelo



Fonte: Elaborado pelo autor

CAPÍTULO 2

SISTEMAS LINEARES E ALGUNS DOCUMENTOS OFICIAIS DO ENSINO BÁSICO

Apresentamos, a seguir, uma análise relativa ao assunto Sistemas Lineares em alguns documentos oficiais de ensino, mais precisamente, nos Parâmetros Curriculares Nacionais, no Currículo do Estado de São Paulo, nas Matrizes de referências do SARESP e na Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP).

2.1 Sistemas Lineares segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática do Ensino Fundamental 3º e 4º ciclos

O assunto Sistemas Lineares, assim como os demais conteúdos específicos de Matemática, não é tratado de modo direto nos Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática do Ensino Fundamental 3º e 4º ciclos (5ª série/6º ano à 8ª série/9º ano), já que nesses PCN é apresentada uma abordagem mais geral do ensino e dá organização didática dos conteúdos. Os mesmos indicam como objetivos do Ensino Fundamental, que os alunos sejam capazes de:

- Compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia-a-dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
- Posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
- Conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
- Conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;

- Perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente, identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
- Desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em suas capacidades afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
- Conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
- Utilizar as diferentes linguagens verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- Saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos;
- Questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação. (BRASIL, 1998, p. 7-8).

Relativamente à Matemática, no Ensino Fundamental os PCN destacam que as finalidades do ensino de Matemática visando à construção da cidadania tem como objetivos levar o aluno a:

- Identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- Selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- Resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;

- Estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
- Sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 1998, p.47-48).

Na organização didática do Ensino Fundamental estão apresentados quatro blocos para a divisão de conteúdos de Matemática, a saber:

- *Números e operações*;

- *Espaço e formas*;

- *Grandezas e medidas*;

- *Tratamento da Informação*,

de acordo com o especificado abaixo:

> Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devam contemplar o estudo dos **números e das operações** (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do **espaço e das formas** (no campo da Geometria) e o estudo das **grandezas e das medidas** (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento). Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão **"tratar" as informações** que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1998, p. 49, **grifo nosso**).

Sistemas Lineares é um assunto que está inserido tanto em Números e Operações quanto em Tratamento da Informação, devido a seu caráter algébrico e sua aplicação prática, o que poderá ser observado no próximo capítulo. Pode ainda ser inserido no estudo do Espaço e Formas, quando consideramos a sua interpretação geométrica.

2.2 Sistemas Lineares segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (BRASIL, 2006) servem de norte aos professores do Ensino Médio. Conforme observado nesse documento, ao final do Ensino Médio espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

Os conteúdos de Matemática são, também, organizados em quatro blocos: *Números e operações; Funções; Geometria; Análise de dados e probabilidade.* Destacando que esta divisão não significa que os conteúdos desses blocos devam ser trabalhados de forma estanque, mas, ao contrário, deve-se buscar constantemente a articulação entre eles. (BRASIL, 2006, p. 70).

Especificamente sobre Sistemas Lineares, as Orientações Curriculares sinalizam que além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas lineares, é recomendável colocar a álgebra sob o olhar da geometria. A resolução de um sistema linear 2×2, de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de interseção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3×3, através da regra de Cramer sugere-se que a mesma deve ser abandonada, pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto, de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. (BRASIL, 2006, p. 77-78).

2.3 Sistemas Lineares segundo o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias

O Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias no Ensino Fundamental (ciclo II) e Ensino Médio (SÃO PAULO, 2012), é baseado em três eixos norteadores:

> – O eixo **expressão/compreensão**: a capacidade de expressão do eu, por meio das diversas linguagens, e a capacidade de compreensão do outro, do não eu, do que me complementa, o que inclui desde a leitura de um texto, de uma tabela, de um gráfico, até a compreensão de fenômenos históricos, sociais, econômicos, naturais etc.;
> – O eixo **argumentação/decisão**: a capacidade de argumentação, de análise e de articulação das informações e relações disponíveis, tendo em vista a viabilização da comunicação, da ação comum, a construção de consensos e a capacidade de elaboração de sínteses de leituras e de argumentações, tendo em vista a tomada de decisões, a proposição e a realização de ações efetivas;
> – O eixo **contextualização/abstração**: a capacidade de contextualização dos conteúdos estudados na escola, de enraizamento na realidade imediata, nos universos de significações – sobretudo no mundo do trabalho –, e a capacidade de abstração, de imaginação, de consideração de novas perspectivas, de virtualidades, de potencialidades para se conceber o que ainda não existe. (SÃO PAULO, 2012, p. 31-32).

De acordo com o Currículo de Matemática do Estado de São Paulo, no Ensino Fundamental, o assunto Sistemas Lineares é conteúdo proposto na 7º Série/ 8º Ano, 3º bimestre (Figura 16). A abordagem apresentada tem como objetivo capacitar o aluno a resolver sistemas 2×2 usando método da adição e substituição, e dar noções (básicas) de sua interpretação geométrica no plano cartesiano. Na 2º série do Ensino Médio, 2º bimestre, propõe-se que o aluno retome o conteúdo de Sistemas Lineares, resolvendo sistemas 3×3 ou 4×4, classificando os sistemas quanto ao número de soluções (Figura 17).

Figura 16: Conteúdos e Habilidades de Matemática do 3º bimestre do 7ª série/ 8º Ano do Ensino Fundamental

7ª série/8º ano do Ensino Fundamental		
	Conteúdos	**Habilidades**
3º Bimestre	**Números/Relações** Equações • Resolução de equações de 1º grau • Sistemas de equações e resolução de problemas • Inequações de 1º grau Gráficos • Coordenadas: localização de pontos no plano cartesiano	• Compreender situações-problema que envolvem proporcionalidade, sabendo representá-las por meio de equações ou inequações • Saber expressar de modo significativo a solução de equações e inequações de 1º grau • Saber explorar problemas simples de matemática discreta, buscando soluções inteiras de equações lineares com duas incógnitas • Saber resolver sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas pelos métodos da adição e da substituição, sabendo escolher de forma criteriosa o caminho mais adequado em cada situação • Compreender e usar o plano cartesiano para a representação de pares ordenados, bem como para a representação das soluções de um sistema de equações lineares

Fonte: São Paulo (2012, p. 62)

Figura 17: Conteúdos e Habilidades de Matemática do 2º bimestre da 2ª série do Ensino Médio

2ª série do Ensino Médio		
	Conteúdos	**Habilidades**
2º Bimestre	**Números/Relações** Matrizes, determinantes e sistemas lineares • Matrizes: significado como tabelas, características e operações • A noção de determinante de uma matriz quadrada • Resolução e discussão de sistemas lineares: escalonamento	• Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano • Saber expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, *pixels* etc.) • Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo método de escalonamento de matrizes • Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los

Fonte: São Paulo (2012, p. 67)

2.4 Sistemas Lineares nas Matrizes de Referência para Avaliação do SARESP

O SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) é uma avaliação com finalidade de coletar dados sobre o desempenho dos alunos ao final da quarta, sexta e oitava séries (respectivamente, 5º, 7º e 9º Anos) do Ensino Fundamental e terceira série do Ensino Médio. O aluno é avaliado de acordo com habilidades e competências, separadas em três grupos: GI (competências para observar), GII (competências para realizar) e GIII (competências para compreender). (SÃO PAULO, 2009, p. 16 - 20).

Os Sistemas lineares pertencem à Habilidade 18 (8ª série do Ensino Fundamental) e Habilidade 14 (3ª série do Ensino Médio), conforme figuras seguintes.

Figura 18: Sistemas Lineares na Matriz de referência do SARESP para o 9º Ano do Ensino Fundamental

H18 Resolver sistemas lineares (métodos da adição e da substituição) . **(GIII)**

Fonte: São Paulo (2009, p. 81)

Figura 19: Sistemas Lineares na Matriz de referência do SARESP para 3ª série do Ensino Médio

H14 Resolver situações-problema por intermédio de sistemas lineares até a 3ª ordem. **(GIII)**

Fonte: São Paulo (2009, p. 86)

2.5 Sistemas Lineares nas Recomendações para a Avaliação de Aprendizagem em Processo - AAP.

Além da avaliação do SARESP, no Estado de São Paulo ocorre uma ação desenvolvida entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional, chamada Avaliação de Aprendizagem em Processo (AAP). Essa avaliação se iniciou em 2011.

Contempla uma prova baseada no Currículo do Estado de São Paulo, que é aplicada ao final de cada bimestre, para todos os alunos do ensino Básico (Fundamental e Médio), e que, assim como o SARESP, exige do aluno algumas habilidades. Essa Avaliação propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua. (SÃO PAULO, 2017, p. 2).

Nas AAP, os Sistemas Lineares são cobrados nas habilidades MP09 (Figura 20) e MP10 (Figura 21).

Figura 20: Habilidade MP09 de Sistemas Lineares na AAP para 2ª série do Ensino Médio

- *(MP09) – Resolver sistemas de equações lineares.*

Para a resolução dos sistemas obtidos a partir de situações problemas, é importante a revisão dos métodos utilizados nos Anos Finais do Ensino Fundamental, isto é, os métodos de adição, substituição ou comparação. Salientamos a importância de o professor priorizar que a resolução dos sistemas seja feita com base nesses métodos, ou por escalonamento, em detrimento do método de Crammer com o uso de determinantes.

Fonte: São Paulo (2017, p. 6)

Figura 21: Habilidade MP10 de Sistemas Lineares na AAP para 2ª série do Ensino Médio

- *(MP10) – Resolver problemas envolvendo sistema de equações lineares.*

Para finalizar o diagnóstico do desenvolvimento das habilidades relativo ao 2º bimestre, pretendemos verificar quais os métodos que os alunos utilizam, quando resolvem um sistema linear.

Todavia, ressaltamos que a aplicação de regras de cálculo, que exigem dos alunos apenas a mobilização da habilidade de memorização, e estas não podem ser priorizadas em detrimento de outras condutas e outros procedimentos que permitem aos alunos exercitarem de estratégias de raciocínio. Nesse sentido, chamamos a atenção do professor para que a resolução e a discussão de sistemas lineares por intermédio do escalonamento seja, se não o único procedimento apresentado, aquele que priorize a apresentação conceitual.

Fonte: São Paulo (2017, p. 6)

Em 2017, na Avaliação de Aprendizagem em Processo para a 2ª Série do Ensino Médio, relativa ao 2º bimestre, realizada em Agosto, das 12 questões apresentadas 7 abordaram problemas sobre sistemas lineares.

Vale destacar que a Questão 5 da AAP é muito parecida com a questão (constante do Caderno do Professor – da 2ª série do Ensino Médio) que usamos para trabalhar a Proposta de Aula, utilizando a metodologia de Resolução de Problemas (vide Capítulo 4). Os dados iniciais são os mesmos, a diferença é que na Questão 5 da AAP foi solicitado apenas *a "representação matricial do sistema linear"* que se pode estabelecer a partir dos dados apresentados, enquanto que na questão abordada no capítulo 4, pede-se "*Quanto a loja está cobrando por cada tipo de aparelho*?", que para ser respondida é preciso resolver o sistema. Observa-se que outras duas questões (das 7 que tratou de sistemas lineares) nessa AAP (de 2017) apresentaram enunciados que englobavam os dois assuntos, sistemas lineares e matrizes.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES GERAIS DE SISTEMAS LINEARES

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira seção são apresentadas algumas das mais variadas formas de aplicações de Sistemas Lineares. São problemas retirados de alguns livros, dos Cadernos do Professor do Estado de São Paulo, questões de vestibulares, como VUNESP e FUVEST e, em especial, questões retiradas do Exame de Acesso do PROFMAT.

Na segunda seção apresentamos duas outras situações de aplicações de sistemas lineares: uma envolvendo um problema de Interpolação Polinomial, em que sistemas lineares são usados para se obter os coeficientes do polinômio interpolador e outra em que é apresentado um problema de Otimização (programação linear) para obtenção do custo mínimo de uma dieta alimentar, em que sistemas lineares são utilizados para determinar os vértices da região de solução.

3.1 Aplicações Gerais de Sistemas Lineares

Como já citado no início do capítulo, apresentaremos aqui vários problemas sobre Sistemas Lineares bem como suas respostas, problemas esses retirados do material bibliográfico consultado como livros, sites, etc.

1. (BOLDRINI, 1980, p. 54) Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar de 170 unidades de vitamina A, 180 unidades de vitamina B, 140 unidades de vitamina C, 180 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E. Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição equilibrada, foram estudados cinco alimentos. Fixada a mesma quantidade (1 grama) de cada alimento, determinou-se que:

i) O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 10 unidades de vitamina B, 1 unidade de vitamina C, 2 unidades de vitamina D e 2 unidades de vitamina E.

ii) O alimento II tem 9 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B, 0 unidades de vitamina C, 1 unidade de vitamina D e 1 unidade de vitamina E.

iii) O alimento III tem 2 unidades de A, 2 unidades de B, 5 unidades de C, 1 unidade de D e 2 unidades de E.

iv) O alimento IV tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 2 unidades de D e 13 unidades de E.

v) O alimento V tem 1 unidade de A, 1 unidade de B, 1 unidade de C, 9 unidades de D e 2 unidades de E.

Quantos gramas de cada um dos alimentos I, II, III, IV e V devemos ingerir diariamente para que nossa alimentação seja equilibrada?

Solução: Vamos indicar por x a quantidade, em gramas, ingerida do alimento tipo I, y a quantidade ingerida do alimento tipo II, z do alimento tipo III, w do alimento tipo IV e t do alimento tipo V. Com base nos dados do problema, formamos o seguinte sistema de equações lineares:

$$S: \begin{cases} x + 9y + 2z + w + t = 170 & (A) \\ 10x + y + 2z + w + t = 180 & (B) \\ x + 5z + w + t = 140 & (C) \\ 2x + y + z + 2w + 9t = 180 & (D) \\ 2x + y + 2z + 13w + 2t = 350 & (E) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por escalonamento, obtemos como solução do problema $(x, y, z, w, t) = (10,\ 10,\ 20,\ 20,\ 10)$.

2. (BOLDRINI, 1980, p. 55) (*Aqui adaptado usando R$ ao invés da unidade u.c.p. indicada no livro*). Necessita-se adubar um terreno acrescentando a cada 10 m^2, 140 g de nitrato, 190 g de fosfato e 205 g de potássio. Dispõe-se de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

i) Cada quilograma do adubo I custa R$ 5,00 e contém 10 g de nitrato, 10 g de fosfato e 100 g de potássio

ii) Cada quilograma do adubo II custa R$ 6,00 e contém 10 g de nitrato, 100 g de fosfato e 30 g de potássio.

iii) Cada quilograma do adubo III custa R$ 5,00 e contém 50 g de nitrato, 20 g de fosfato e 20 g de potássio.

iv) Cada quilograma do adubo IV custa R$ 15,00 e contém 20 g de nitrato, 40 g de fosfato e 35 g de potássio.

Quanto de cada adubo devemos misturar, para conseguir o efeito desejado, se estamos dispostos a gastar R$ 54,00 a cada 10 m^2, com a adubação?

Solução: Considere x a quantidade, em gramas, do adubo I, y a quantidade do adubo II, z a quantidade do adubo III, e w a quantidade do adubo IV. Temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 10x + 10y + 50z + 20w = 140 & (Nitrogênio) \\ 10x + 100y + 20z + 40w = 190 & (Fósforo) \\ 100x + 30y + 20z + 35w = 205 & (Potássio) \\ 5x + 6y + 5z + 15w = 54 & (Custo) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos os seguintes valores aproximados, em quilogramas: $x = 0{,}67$ kg, $y = 0{,}46$ kg, $z = 1{,}50$ kg e $w = 2{,}70$ kg.

3. (POOLE, 2004, p.109) Faça o balanceamento da equação química para reação $CO_2 + H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + O_2$ (Essa reação ocorre quando uma planta verde converte dióxido de carbono e água em glicose e oxigênio durante a fotossíntese).

Solução: Na equação química dada, sejam x, y, z e t as quantidades de CO_2 , H_2O, $C_6H_{12}O_6$ e O_2 , respectivamente, distribuídos da seguinte forma:

$$x\ CO_2 + y\ H_2O \longrightarrow z\ C_6H_{12}O_6 + t\ O_2$$

A quantidade de elementos químicos do lado esquerdo da equação química deve ser a mesma que a do lado direito. Assim, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 6z & (C) \\ 2x + y = 6z + 2t & (O) \\ 2y = 12z & (H) \end{cases} \sim \begin{cases} x = 6z \\ t = x = 6z. \\ y = 6z \end{cases}$$

Logo as soluções são da forma $(x, y, z, t) = (6z, 6z, z, 6z)$, com z variável livre. Uma possível solução seria $(6, 6, 1, 6)$ o que significa que 6 moléculas de CO_2 somadas a 6 moléculas de H_2O resultam em 1 molécula de $C_6H_{12}O_6$ e 6 moléculas de O_2.

4. (POOLE, 2004, p.113) A soma das idades de Ana, Beto e Cristina é 60 anos. Ana é mais velha que Beto pelo mesmo número de anos que Beto é mais velho que Cristina. Quando Beto tiver a idade que Ana tem hoje, Ana terá três vezes a idade que Cristina tem hoje. Quais são suas idades?

Solução: Sejam A, B e C as idades atuais de Ana, Beto e Cristina, respectivamente, e x representa quantos anos Ana é mais velha que Beto. Resolveremos este exercício por substituição. Temos as seguintes equações:

$$\begin{cases} A + B + C = 60 & (1) \\ A = B + x & (2) \\ B = C + x & (3) \end{cases}.$$

Somando as equações (2) e (3) obteremos: $A = C + 2x$ (4)

Além disso, a sentença "quando Beto tiver a idade que Ana tem hoje, Ana terá três vezes a idade que Cristina tem hoje" nos resultará $A + x = 3C$ (5).

Substituindo (4) em (5) teremos: $C = \frac{3}{2}x$. Usando esse valor de C em (4), teremos $A = \frac{7}{2}x$. Substituindo este valor obtido para A em (2), encontraremos $B = \frac{5}{2}x$.

Para encontrarmos x, substituiremos A, B e C encontrados anteriormente em (1), da seguinte forma:

$$A + B + C = 60 \Rightarrow \frac{7}{2}x + \frac{5}{2}x' + \frac{3}{2}x = 60 \Rightarrow \frac{15}{2}x = 60 \Rightarrow x = 8.$$

Portanto, Ana é 8 anos mais velha que Beto. Para encontrarmos suas idades, substituímos este valor de x nas expressões de A, B e C, e encontramos: $A = 28$, $B = 20$ e $C = 12$, ou seja, Ana tem 28 anos, Beto tem 20 anos e Cristina tem 12 anos.

5. (POOLE, 2004, p.113) O problema a seguir, extraído de um texto chinês é descrito na forma em que é apresentado em Poole (2004).

> Há mais de 2000 anos, os chineses desenvolveram métodos de resolução de sistemas de equações lineares, incluindo uma versão do método de eliminação de Gauss, que não se tornou conhecido na Europa até o século XIX. (Não há evidências de que Gauss conhecesse os métodos chineses quando desenvolveu aquele que chamamos atualmente de método de eliminação de Gauss. Porém, é claro que os chineses já conheciam a essência do método, embora eles não justificassem seu uso). O seguinte problema foi extraído do texto chinês Jiuzhangsuanshu (Nove capítulos em arte matemática), escrito durante a Dinastia de Han, cerca de 200 anos a. C.

Há três tipos de milho. Três feixes do primeiro tipo, dois do segundo tipo e um do terceiro tipo fazem 39 medidas. Dois feixes do primeiro tipo, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. Um feixe do primeiro tipo, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho há em um feixe de cada tipo? (Observamos aqui que no problema proposto usa-se a palavra medidas não se restringindo a nenhuma unidade de medida específica).

Solução: Considerando que x seja a quantidade do milho tipo I, y seja a quantidade do milho tipo II, e z do milho tipo III, temos o seguinte sistema de equações:

$$S:\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases} \sim\ S_1:\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ \frac{5}{3}y+\frac{1}{3}z=8 \\ 4z=11 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, teremos $x=\frac{37}{4}$, $y=\frac{17}{4}$ e $z=\frac{11}{4}$, ou seja, teremos $\frac{37}{4}$ medidas de milho do tipo I, $\frac{17}{4}$ medidas de milho do tipo II e $\frac{11}{4}$ medidas de milho do tipo III.

6. (POOLE, 2004, p.113) (*Aqui adaptado*). Por três pontos não colineares passa uma única circunferência. Encontre a circunferência (cuja equação geral é da forma $x^2+y^2+ax+by+c=0$) que passa pelos pontos $(-3,1),(-2,2)\ e\ (-1,5)$. Para conferir a validade de sua resposta, encontre o centro e o raio dessa circunferência.

Solução: Como a circunferência passa pelos pontos $(-3,1),(-2,2)$ e $(-1,5)$, substituiremos estes pontos na equação dada no enunciado e obteremos o seguinte sistema linear:

$$S:\begin{cases} -3a+b+c=-10 \\ -2a+2b+c=-8 \\ -a+5b+c=-26 \end{cases} \sim \begin{cases} -3a+b+c=-10 \\ 4b+c=-4 \\ -\frac{3}{4}c=-27 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos $a=12, b=-10$ e $c=36$. Substituindo esses valores na equação $x^2+y^2+ax+by+c=0$, teremos:

$$x^2+y^2+12x-10y+36=0$$

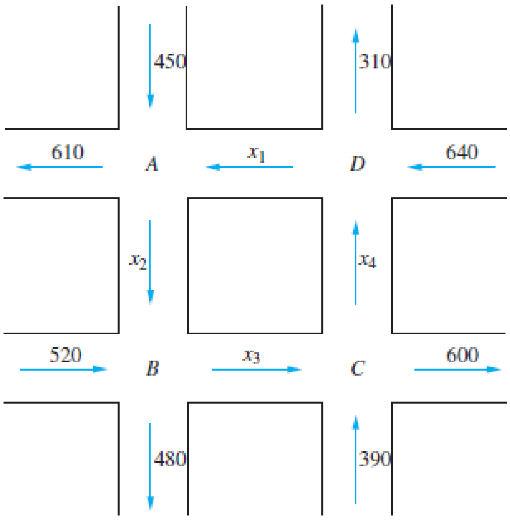
Usando completamento de quadrados, obtemos:

$$(x + 6)^2 \; + \; (y - 5)^2 \; = \; 25,$$

que representa a equação de uma circunferência de centro $(-6, 5)$ e raio 5.

7. (LEON, 2010, p.17) Na área central de uma determinada cidade, dois conjuntos de ruas de sentido único se cruzam como mostrado na figura abaixo. O fluxo médio de tráfego que entra e sai desta seção durante a hora do rush é dado no diagrama. Determine a quantidade de tráfego entre cada um dos quatro cruzamentos.

Figura 20: Dois conjuntos de ruas de sentido único



Fonte: Leon (2010, p.18).

Solução: De acordo com a figura, x_i, com $i = 1, 2, 3, 4$ representa a quantidade de carros que está trafegando na quadra especificada. Em cada cruzamento, o número de carros que entram deve ser igual ao número de carros que sai de cada cruzamento. Logo, no cruzamento A, temos que $x_1 + 450 = x_2 + 610$. Da mesma forma, temos $x_2 + 520 = x_3 + 480$ no cruzamento B, $x_3 + 390 = x_4 + 600$ no cruzamento C, e $x_4 + 640 = x_1 + 310$ no cruzamento D. Escrevemos, assim, o seguinte sistema de equações lineares:

$$S: \begin{cases} x_1 + 450 = x_2 + 610 \\ x_2 + 520 = x_3 + 480 \\ x_3 + 390 = x_4 + 600 \\ x_4 + 640 = x_1 + 310 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 - x_2 = 610 - 450 \\ x_2 - x_3 = 480 - 520 \\ x_3 - x_4 = 600 - 390 \\ x_4 - x_1 = 310 - 640 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 = 330 + x_4 \\ x_2 = 170 + x_4. \\ x_3 = 210 + x_4 \end{cases}$$

Observe que o sistema em questão é Possível e Indeterminado, onde x_4 é sua variável livre. Para que tenhamos uma idéia para sua solução, suponhamos que $x_4 = 100$. Teremos $x_1 = 430$, $x_2 = 270$, $x_3 = 310$ e $x_4 = 100$, em que esta é uma possível solução deste problema.

8. (PROFMAT- EXAME DE ACESSO, 2014) Roberto pensou em três números inteiros; somando-os, dois a dois, obteve os resultados 37, 41 e 44. O produto dos três números é:

(A) 4250

(B) 5620

(C) 6230

(D) 8160

(E) 10530

Solução: Sejam a, b e c os números inteiros pensados por Roberto. Temos, associado ao problema, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + b = 37 \\ b + c = 41 \\ ac = 44 \end{cases} \sim \begin{cases} a + b = 37 \\ b + c = 41 \\ 2c = 48 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontraremos $a = 20$, $b = 17$ e $c = 24$. E, o produto $a.b.c$ pedido será, então, $20.17.24 = 8160$. Assim, a alternativa correta é a (D).

9. (PROFMAT- EXAME DE ACESSO, 2014) Em uma competição escolar, todos os alunos da torcida da turma 32 tinham o número de sua turma estampado na camiseta e todos os alunos da torcida da turma 34 também tinham o número de sua turma estampado na camiseta. Pedro somou os números de todas as camisetas das duas torcidas, e obteve 2752 como resposta. Qual é o número de alunos na torcida da turma 32, se o número total de alunos nas duas torcidas é 84?

(A) 32

(B) 34

(C) 42

(D) 52

(E) 58

Solução: Sejam x a quantidade de alunos da Turma 32 e y a quantidade de alunos da Turma 34. Equacionando, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + \quad y = \quad 84 \\ 32x + 34y = 2752 \end{cases} \sim \begin{cases} x + \ y = 84 \\ \qquad 2y = 64 \end{cases}$$

Assim, $x = 52$ e $y = 32$, ou seja, têm 52 alunos da Turma 32 e 32 alunos da Turma 34 e, portanto, a alternativa correta é a (D).

10. (PROFMAT- EXAME DE ACESSO, 2017) A diferença entre um número de dois algarismos e outro escrito com os mesmos algarismos, em ordem inversa é 54. Sabendo que a soma dos algarismos é igual a 12, podemos afirmar que a soma dos seus quadrados é igual a

(A) 72

(B) 74

(C) 80

(D) 90

(E) 112

Solução: Considere ab um número de dois algarismos, com $0 < a \leq 9$ e $0 < b \leq 9$, para $a, b \in \mathbb{N}$. Usando a primeira informação do enunciado obtemos:

$$ab - ba = 54 \Rightarrow 10a + b - 10b - a = 54 \Rightarrow 9a - 9b = 54 \Rightarrow a - b = 6.$$

Ainda, segundo o enunciado, a + b = 12. Assim, temos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a - b = 6 \\ a + b = 12 \end{cases}$$

E sua solução é $a = 9$ e $b = 3$. Mas, como é pedido a soma dos quadrados desses algarismos, faremos $a^2 + b^2 = 9^2 + 3^2 = 90$. Logo, (D) é a alternativa correta.

11. (UFSCar-2008). Uma loja vende três tipos de lâmpada $(x, y\ e\ z)$. Ana comprou 3 lâmpadas tipo x, 7 tipo y e 1 tipo z, pagando R$ 42,10 pela compra. Beto comprou 4 lâmpadas tipo x, 10 tipo y e 1 tipo z, o que totalizou R$ 47,30. Nas condições dadas, a compra de três lâmpadas, sendo uma de cada tipo, custa nessa loja:

(A) R$ 30,50

(B) R$ 31,40

(C) R$ 31,70

(D) R$ 32,30

(E) R$ 33,20

Solução: No enunciado foram dadas as identificações x, y e z para os tipos de lâmpadas. Usando essas identificações e os dados do problema obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3x + 7y + z = 42{,}10 \\ 4x + 10y + z = 47{,}30 \end{cases}.$$

Observe que temos um Sistema Possível Indeterminado com duas equações e três incógnitas. Não são pedidos os valores de x, y e z Queremos encontrar o valor da compra de uma lâmpada de cada tipo. Multiplicando a primeira equação por 3 e a segunda equação por 2, temos

$$\begin{cases} 9x + 21y + 3z = 126{,}30 \\ 8x + 20y + 2z = 94{,}60 \end{cases}$$

Em seguida, subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos como resultado $x + y + z = 31{,}70$. Portanto, o valor da compra de uma lâmpada do tipo x, uma do tipo y e uma do z resultará R$ 31,70. Logo a alternativa correta é a (B).

Observa-se que nesta questão foi possível obter o valor de $x + y + z$ sem determinar cada um dos valores de x, y e z especificamente porque foi possível obter uma equação do tipo $x + y + z = k$, a partir de operações elementares nas duas equações do sistema obtida inicialmente.

12. (VUNESP-1999) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas, entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi R$ 1400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, o número de sócios presentes ao show é:

(A) 80

(B) 100

(C) 120

(D) 140

(E) 160

Solução: Considere x o número de sócios presentes no evento e y o número de não sócios presentes no evento. Pelas informações do enunciado, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 5x + 10y = 1400 \end{cases}.$$

Resolvendo, encontraremos $x = 120$ e $y = 80$. Portanto, compareceram neste evento 120 sócios e 120 não sócios. Assim, a alternativa correta é a (C).

13. (VUNESP-2006) Se a, b, c são números reais tais que

$$ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = (x + 3)^2$$

para todo x real, então o valor de $a - b + c$ é

(A) -5

(B) -1

(C) 1

(D) 3

(E) 7

Solução: Primeiramente vamos agrupar os coeficientes de x^2, x e do termo constante:

$$ax^2 + b(x^2 + 2x + 1) + c(x^2 + 4x + 4) = x^2 + 6x + 9 \iff$$

$$(a + b + c)x^2 + (2b + 4c)x + b + 4c = x^2 + 6x + 9.$$

Pela igualdade de polinômios, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 2b+4c=6 \\ b+4c=9 \end{cases} \sim \begin{cases} a+b+c=1 \\ b+2c=3 \\ 4c=12 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 1$, $b = -3$ e $c = 3$. Como é pedido no enunciado o resultado de $a - b + c$, substituindo os valores encontrados anteriormente, temos

$$a - b + c = 1 - (-3) + 3 = 7,$$

resposta que se encontra na alternativa (E) dessa questão.

14. (UFSCar-2001) Para as apresentações de uma peça teatral (no sábado e no domingo, à noite) foram vendidos 500 ingressos e a arrecadação total foi de R$ 4560,00. O preço do ingresso no sábado era de R$ 10,00 e, no domingo, era de R$ 8,00. O número de ingressos vendidos para a apresentação do sábado e para a do domingo, nesta ordem, foi:

(A) 300 e 200

(B) 290 e 210

(C) 280 e 220

(D) 270 e 230

(E) 260 e 240

Solução: Sejam s a quantidade de ingressos vendidos no sábado e d a quantidade de ingressos vendidos no domingo. Logo, teremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} s + d = 500 \\ 10s + 8d = 4560 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $s = 280$ e $d = 220$, ou seja, foram vendidos 280 ingressos no sábado e 220 ingressos no domingo. A resposta correta está na alternativa (C) da questão.

15. (VUNESP-2008) Numa campanha de preservação do meio ambiente, uma prefeitura dá descontos na conta de água em troca de latas de alumínio e garrafas de plástico (PET) arrecadadas. Para um quilograma de alumínio, o desconto é de R$ 2,90 na conta de água; para um quilograma de plástico, o abatimento é de R$ 0,17.

Uma família obteve R$ 16,20 de desconto na conta de água com a troca de alumínio e garrafas plásticas. Se a quantidade (em quilogramas) de plástico que a família entregou foi o dobro da quantidade de alumínio, a quantidade de plástico, em quilogramas, que essa família entregou na campanha foi

(A) 5

(B) 6

(C) 8

(D) 9

(E) 10

Solução: Sejam L a quantidade de alumínio que essa família entregou e seja G a quantidade de garrafas PET que essa família entregou, ambas em quilogramas. Logo, temos:

$$\begin{cases} 0{,}17G + 2{,}90L = 16{,}20 \\ G = 2L \end{cases}.$$

Após a resolução do sistema, obtemos $G = 10$ e $L = 5$. Isso significa que a família entregou 10 kg de garrafas PET e 5kg de latas de alumínio. A resposta certa se encontra na alternativa (E) desse problema.

16. (FGV -2004) Num escritório há 3 impressoras: A, B e C. Em um período de 1 hora:

A e B juntas imprimem 150 folhas;

A e C juntas imprimem 160 folhas;

B e C juntas imprimem 170 folhas.

Em 1 hora, a impressora A imprime sozinha:

(A) 60 folhas

(B) 65 folhas

(C) 75 folhas

(D) 70 folhas

(E) 80 folhas

Solução: A partir dos dados do problema, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} A + B = 150 \\ A + C = 160 \\ B + C = 170 \end{cases}$$

Considere $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a matriz do sistema. Calculando seu determinante, temos $det(M) = -2$, logo, podemos aplicar o método de Cramer para resolvê-lo. Assim:

$$M_A = \begin{vmatrix} 150 & 1 & 0 \\ 160 & 0 & 1 \\ 170 & 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } det(M_A) = -140. \text{ Logo } A = \frac{M_A}{M} \Rightarrow A = \frac{-140}{-2} \Rightarrow A = 70;$$

$$M_B = \begin{vmatrix} 1 & 150 & 0 \\ 1 & 160 & 1 \\ 0 & 170 & 1 \end{vmatrix} \text{ e } det(M_B) = -160. \text{ Logo } B = \frac{M_B}{M} \Rightarrow A = \frac{-160}{-2} \Rightarrow B = 80;$$

$$M_C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 150 \\ 1 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & 170 \end{vmatrix} \text{ e } det(M_C) = -180. \text{ Logo } C = \frac{M_C}{M} \Rightarrow A = \frac{-180}{-2} \Rightarrow C = 90.$$

Portanto, a impressora A imprime sozinha 70 folhas, a impressora B 80 folhas e a C 90 folhas. A resposta correta está na alternativa (D) da questão.

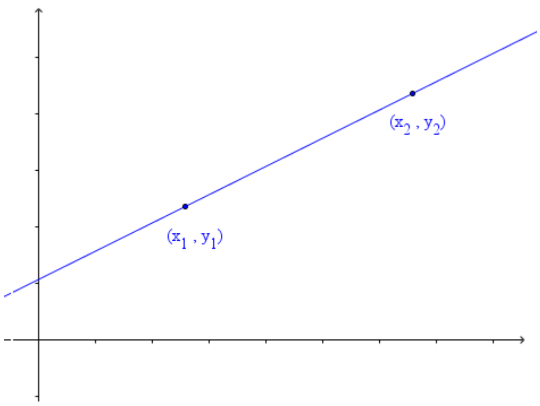
3.2 Duas Aplicações Específicas

Como foi dito no início deste capítulo, nesta seção serão apresentadas duas outras situações em que sistemas lineares são ferramentas importantes. Aqui, também, usamos o software GeoGebra para ilustrar os gráficos apresentados.

I. Sistemas Lineares e Interpolação polinomial

A referência básica para o que segue é Anton e Rorres (2012). Queremos abordar um tipo de problema bastante interessante com várias aplicações, que é o de encontrar um polinômio cujo gráfico passe por uma coleção de pontos especificados no plano; tal polinômio é dito *polinômio interpolador* dos pontos. O exemplo mais simples de um problema desses é encontrar um polinômio linear $p(x) = ax + b$ cujo gráfico passe por dois pontos distintos conhecidos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) do plano xy, conforme figura:

Figura 21: Representação gráfica do polinômio linear passando por dois pontos



Fonte: Elaborado pelo autor (usando o GeoGebra)

Para encontrarmos os valores de a e b, a partir dos dois pontos dados, precisamos resolver o sistema linear $\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$. De onde obtemos $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $b = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$.

Quando temos um número bem maior de pontos, em geral a aproximação por um polinômio linear deixa de ser significativa. Neste caso é interessante utilizar polinômios de grau maiores. E para obter tal polinômio, usualmente tem-se que resolver um **sistema linear de n equações e n incógnitas.** Isto ficará mais claro logo a seguir:

Consideremos, o problema de encontrar um polinômio cujo gráfico passe pelos n pontos de coordenadas distintas $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_k, y_k), \ldots, (x_n, y_n)$. Como temos n condições a satisfazer, a intuição sugere que comecemos procurando por polinômios da forma $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, com $a_i \epsilon \mathbb{R}$,, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Para encontrarmos o polinômio interpolador que passa por esses n pontos, teremos que resolver um **sistema linear de n equações e n incógnitas**, da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_{n-1} x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_{n-1} x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_0 + a_1 x_k + a_2 x_k^2 + \cdots + a_{n-1} x_k^{n-1} = y_k \\ \ldots \ldots \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_{n-1} x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

Problema: Encontre um polinômio cúbico cujo gráfico passa pelos pontos $(1,3)$, $(2,-2)$, $(3,-5)$ e $(4,0)$.

Solução: Procuramos um polinômio de grau 3, da forma

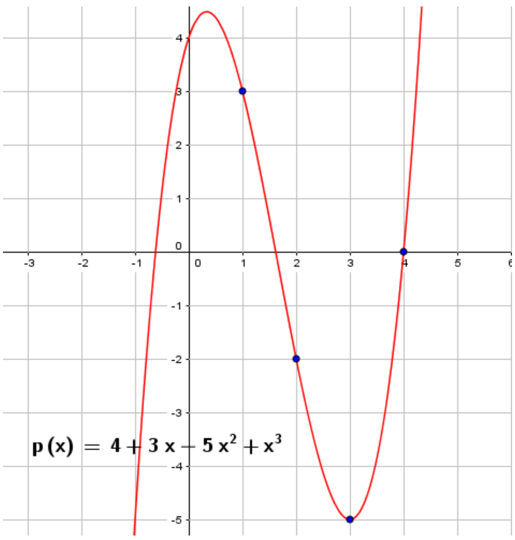
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \text{ com } a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2,3.$$

Substituindo os pontos dados no polinômio, encontraremos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = -2 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = -5 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3 \\ a_1 + 3a_2 + a_3 = -5 \\ a_2 + 6a_3 = 1 \\ a_3 = 1 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a_0 = 4$, $a_1 = 3$, $a_2 = -5$ e $a_3 = 1$. Assim, o polinômio procurado será da forma $p(x) = 4 + 3x - 5x^2 + x^3$, cujo gráfico se encontra abaixo:

Figura 22: Gráfico do polinômio de terceiro grau - solução do problema



Fonte: Elaborado pelo autor (usando o GeoGebra)

II. Sistemas Lineares e uma Situação de Otimização

O material utilizado para o que segue é Dante (2012). As equações e inequações lineares, bem como os sistemas de equações e inequações simultâneas, são bastante úteis na resolução de problemas de economia, transporte, alimentação (dietas), etc. Em problemas como esses, é comum precisarmos saber os valores máximo ou mínimo de uma função cujas variáveis são lineares e estão sujeitas a certas desigualdades. Quando isso ocorre, dizemos então que estamos diante de um problema de **programação linear** (que é um problema mais complexo que um problema de sistemas lineares, mas que usa fortemente sistemas lineares para sua resolução, como ilustraremos no problema a seguir).

Problema: Dois produtos, P e Q, contêm as vitaminas A, B e C nas quantidades indicadas no quadro abaixo. A última coluna indica a quantidade mínima necessária de cada vitamina para uma alimentação sadia, e a última linha indica o preço de cada produto por unidade. Que quantidade de cada produto uma dieta deve conter para que proporcione uma alimentação com custo mínimo?

Tabela 1: Quantidade das vitaminas A, B e C dos produtos P e Q.

	P	Q	
A	3	1	12
B	3	4	30
C	2	7	28
	3	2	

Fonte: Elaborado pelo autor

Solução: Diante de um problema desse tipo (em programação linear), deve-se considerar as seguintes orientações para resolvê-lo:

1. Estabelecemos a função objetivo, isto é, a função que queremos maximizar ou minimizar.

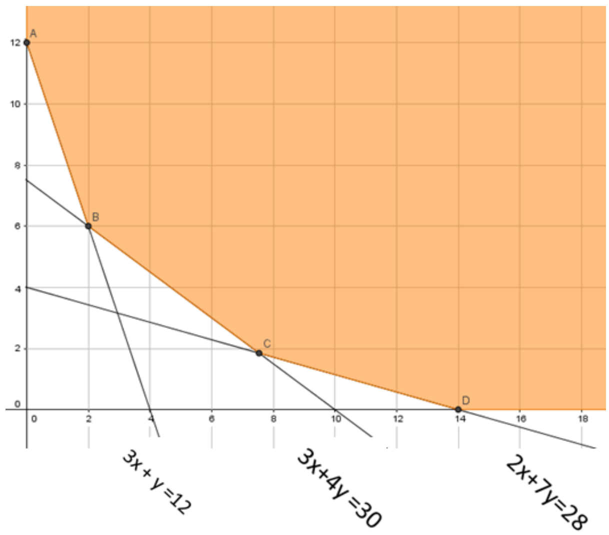
2. Transformamos as restrições impostas no problema em um sistema de inequações lineares.
3. Traçamos o gráfico da região poligonal convexa correspondente a essas restrições determinando as coordenadas dos seus vértices.
4. Calculamos os valores da função objetivo em cada um dos vértices.
5. Constatamos que o maior desses valores é o máximo e o menor é o mínimo da função objetivo.

Vejamos, então, a solução do problema.

Seja x a quantidade do produto P, e y a quantidade do produto Q nas condições do problema.

1. Função objetivo: O custo, o qual queremos minimizar, será dado por $C = 3x + 2y$;
2. Restrições: As condições impostas pelo problema são $x \geq 0$, $y \geq 0$, $3x + y \geq 12$, $3x + 4y \geq 30$ e $2x + 7y \geq 28$.
3. Gráfico:

Figura 23: Região de solução



Fonte: Elaborado pelo autor (usando o GeoGebra)

Nesse caso, a região de possibilidades é a parte do plano limitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$, $3x + y = 12$, $3x + 4y = 30$ e $2x + 7y = 28$. Os vértices são dados pelas soluções dos sistemas lineares:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0{,}12),$$

$$\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (2{,}6),$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = \left(\frac{98}{13}, \frac{24}{13}\right),$$

$$\begin{cases} 2x + 7y = 28 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (14{,}0).$$

4. Valores que a função objetivo assume nos vértices:

Tabela 2: Valores assumidos pela função objetivo nos vértices.

Vértice	**Valor da função $\boldsymbol{C = 3x + 2y}$**
$(\mathbf{0}, \mathbf{12})$	$C = 3.0 + 2.12 = 24$
$(\mathbf{2}, \mathbf{6})$	$C = 3.2 + 2.6 = 18 \leftarrow$ **mínimo**
$\left(\frac{\mathbf{98}}{\mathbf{13}}, \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{13}}\right)$	$C = 3.\frac{\mathbf{98}}{\mathbf{13}} + 2.\frac{\mathbf{24}}{\mathbf{13}} = 26{,}3$
$(\mathbf{14}, \mathbf{0})$	$C = 3.14 + 2.0 = 42 \leftarrow$ **máximo**

Fonte: Elaborado pelo autor

5. Conclusão: A dieta ótima, que é sadia e tem custo mínimo, consiste em consumir 2 unidades do produto P e 6 unidades do produto Q.

Observação: Ressaltamos que alguns problemas que examinam situações de otimização, abordando máximos ou mínimos, são encontrados no Caderno do Professor de Estado de São Paulo, v. 1, 3ª Série do Ensino Médio, na Situação de Aprendizagem 3: Sistemas Lineares- Máximos e Mínimos. (SÃO PAULO, 2014c, p. 34-42).

CAPÍTULO 4

PROPOSTAS DE AULA SOBRE SISTEMAS LINEARES: NA PERSPECTIVA DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E USANDO O GEOGEBRA

Neste capítulo serão apresentadas duas Propostas de Aula para serem desenvolvidas no Ensino Básico. Na primeira seção, é apresentada uma proposta de aula envolvendo dois problemas sobre sistemas lineares a serem abordados por meio da metodologia de Resolução de Problemas, uma no Ensino Fundamental e a outra no Ensino Médio. São questões escolhidas do Caderno do Professor do Estado de São Paulo. Na segunda seção é apresentada uma proposta de aula para o Ensino Fundamental e uma para o Ensino Médio sobre sistemas lineares usando o *software* GeoGebra.

4.1 PROPOSTA DE AULA - Sistemas Lineares na Perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas

Apresentamos aqui uma proposta de aula envolvendo dois problemas sobre sistemas lineares para serem abordados utilizando a metodologia de Resolução de Problemas. Os problemas foram retirados do Material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo: um do Caderno do Professor de Matemática do 7º Ano do Ensino Fundamental (SÃO PAULO, 2014a) e o outro do Caderno do Professor da 2ª Série do Ensino Médio (SÃO PAULO, 2014b).

Nos estudos e pesquisas sobre a metodologia de Resolução de Problemas destaca-se o trabalho pioneiro de George Polya (1887-1985). Polya (1995) em seu livro “A Arte de Resolver Problemas” (tradução de “How to solve it” escrito por Polya em 1945) apresenta uma heurística de resolução de problemas específica para a Matemática, que continua muito atual. Seguiremos aqui as ideias apresentadas por Polya, que dividiu o processo de resolução de um problema em quatro etapas: 1. *Compreensão do problema*; 2. *Estabelecimento de um plano* (construção de uma estratégia de resolução); 3. *Execução do plano* e 4. *Retrospecto* (verificação do resultado - revisão da solução). Para mais detalhes, ver Polya (1995).

Proposta de Aula – Trabalhando Sistemas Lineares na Perspectiva da Metodologia de Resolução de Problemas

Problema I (SÃO PAULO, 2014a, p. 48) - 7º Ano do Ensino Fundamental.

Dois amigos foram a uma lanchonete e gastaram R$ 18,00. Eles comeram 2 sanduíches e tomaram 3 sucos. Sabendo que o preço do sanduíche era o triplo do preço do suco, descubra qual era o preço de cada um.

Solução: Seguindo os quatro passos para a resolução de problemas propostos por Polya (1995), são apresentadas a seguir algumas perguntas que o professor deve fazer, de modo a incentivar e orientar seus alunos, para que estes busquem a solução do problema.

1. **Compreender o problema:**

Você entendeu o problema? ___________________________________

Quais são as informações dadas? ________________________________

Quais são as incógnitas (*ou variáveis*)? ___________________________

Mais especificamente, pode-se perguntar ao aluno:

O que o problema está pedindo? ___________________________________

Quanto os amigos gastaram? ________________________________

O que eles consumiram? _________________________

Existe alguma relação entre o preço do suco e do sanduíche? _____________

Espera-se que o aluno entenda que precisará encontrar o preço do sanduíche e do suco, individualmente, e que identifique as incógnitas, a saber, o preço de um sanduíche e o preço de um suco.

2. **Estabelecer um plano:**

Neste passo, as perguntas que norteiam são:

Você já teve contato com algum problema desse tipo?________________________

Consegue encaixar este tipo de problema em algum assunto visto em sala de aula? _______________________

Lembra de algum resultado ou equação que possa ser útil? ____________________

Está usando todas as informações do enunciado? ________________________

Aqui, o aluno vai “nomear” as incógnitas, por exemplo, x será o preço do sanduíche e y será preço do suco e espera-se que ele identifique o problema como um problema de sistema linear.

3. **Executar o plano:**

Agora, baseado nas respostas obtidas anteriormente, o aluno *deve resolver o problema* com aquilo que ele julga ser a melhor estratégia. É esperado que o aluno escreva o sistema linear que representa a situação apresentada no problema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ \qquad\; x = 3y \end{cases}$$

e em seguida resolva o sistema corretamente, aplicando o método que ele souber e quiser usar, obtendo $x = 6$ e $y = 3$, o que significa que o sanduíche custará R$ 6,00 e o suco R$ 2,00.

4. **Verificar os resultados (Retrospecto):**

Esse passo consiste em examinar a solução obtida; conferir o resultado; analisar se o resultado está coerente com o problema apresentado. Sugere-se questionar:

O preço obtido para o sanduíche é de fato o triplo do preço do suco?

Como podemos verificar se a solução obtida está correta?

Assim, espera-se que o aluno teste a solução encontrada, substituindo os valores obtidos para x e y no sistema linear, da maneira apresentada abaixo:

$$\begin{cases} 2.\mathbf{6} + 3.\mathbf{2} = 18 \\ \qquad\quad \mathbf{6} = 3.\mathbf{2}, \end{cases}$$

de modo a obter sentenças verdadeiras e concluindo que, de fato, $x = 6$ e $y = 2$ é a solução do sistema. É importante que o aluno adquira o hábito de verificar se a solução encontrada satisfaz todas as equações do sistema.

Problema II (SÃO PAULO, 2014b, p. 80) - 2ª série do EM

Uma loja de eletrodomésticos está fazendo uma promoção para a compra conjunta de dois tipos de eletrodomésticos, de maneira que o consumidor interessado paga:

- R$ 590,00 por um forno de micro-ondas e um aspirador de pó;
- R$ 1 300,00 por um forno de micro-ondas e uma geladeira.
- R$ 1 250,00 por um aspirador de pó e uma geladeira.

Quanto a loja está cobrando por cada tipo de aparelho?

Solução: Da mesma forma apresentada no problema anterior, propõe-se a resolução seguindo os quatro passos apresentados por Polya. Assim, o professor pode fazer as perguntas a seguir aos seus alunos durante o processo de resolução do problema.

1. **Compreender o problema:**

Você entendeu o problema? ___________________________________

Quais são as informações dadas? ________________________________

Quais são as variáveis (*ou incógnitas*)? ___________________________

As informações apresentadas são suficientes? ______________________

Se necessário, pode-se perguntar mais especificamente,

Em que consiste a promoção da loja? ____________________________________

Quais os eletrodomésticos estão nessa promoção? __________________________

Espera-se que o aluno compreenda que precisará encontrar o preço do forno de micro-ondas, do aspirador de pó e da geladeira, separadamente.

2. **Estabelecer um plano:**

Você já teve contato com algum problema desse tipo? _____________________

Consegue encaixar este tipo de problema em algum assunto da escola? _______

Lembra de algum conteúdo trabalhado em sala de aula que seria útil para resolver esse problema? _________________

Está usando todas as informações do enunciado? _________________________

Espera-se que o aluno perceba que se trata de um problema de sistema linear e que precise estabelecer quais são as incógnitas, nomeando-as, como por exemplo, x será o preço do forno de micro-ondas, y o preço do aspirador de pó, e z o preço da geladeira.

3. Executar o plano:

Agora, baseado nas respostas obtidas os alunos devem resolver o problema com aquilo que cada um julgar ser a melhor estratégia.

Espera-se que o aluno escreva cada equação do problema e depois monte um sistema linear que represente a situação apresentada no problema. Tem-se o sistema inicial e o sistema escalonado equivalente:

$$\begin{cases} x + y = 590 \\ x + z = 1300 \\ y + z = 1250 \end{cases} \sim \begin{cases} x + y \qquad\quad = 590 \\ \quad -y \quad + \quad z = 710 \\ \qquad\qquad 2z = 1260 \end{cases}.$$

De onde encontramos $x = 320$, $y = 270$ e $z = 980$, ou seja, o preço do forno de micro-ondas é R$ 320,00, do aspirador de pó é R$ 270,00 e o preço da geladeira é R$ 980,00.

4. Verificar os resultados (Retrospecto):

Similarmente ao que foi feito no Problema I, os alunos devem examinar a solução obtida. Conferir seus resultados. Analisar se esse resultado é coerente com o problema apresentado. Para tanto o aluno deve testar a solução encontrada, substituindo os valores obtidos para x, y e z no sistema linear da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{320} + \mathbf{270} = 590 \\ \mathbf{320} + \mathbf{980} = 1300 \\ \mathbf{270} + \mathbf{980} = 1250, \end{cases}$$

verificando se são sentenças verdadeiras.

4.2 PROPOSTA DE AULA - Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares (com 2 ou 3 incógnitas) usando o GeoGebra

No Capítulo 1, na seção 2, já discutimos como podemos interpretar geometricamente o conjunto solução de um sistema linear com duas ou três incógnitas analisando as várias situações. O objetivo desta seção é apresentar, com certo detalhe, uma Proposta de Aula sobre a Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares, mais precisamente do conjunto solução de Sistemas Lineares, para ser desenvolvida no Ensino Básico utilizando o software GeoGebra. Vale destacar que no Caderno do Professor da SE, 8º ano do Ensino Fundamental, na "Situação de

Aprendizagem 3 - *Sistemas de Equações Lineares*", nas *Competências* e *Habilidades* encontramos "[...] interpretar graficamente a solução de um sistema". E isso é apresentado (com mais detalhes, nas páginas 57 a 60).

A tecnologia é uma realidade no nosso dia-a-dia e deve ser inserida nas salas de aula. Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática. (BRASIL, 2006, p. 87).

Uma ferramenta muito útil e de fácil acesso é o *software* GeoGebra. É um *software livre* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote simples de se usar. O GeoGebra possui uma comunidade com milhões de usuários em praticamente todos os países. Tornou-se um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Este software é encontrado para download em *https://www.geogebra.org.* Nessa página é possível encontrar vários materiais disponibilizados por colaboradores.

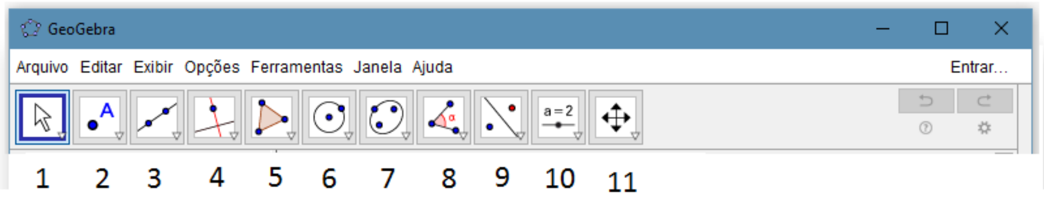
GeoGebra: uma pequena introdução

Ao abrir a área de trabalho do GeoGebra, nos deparamos com uma página (tela de trabalho), nesta página, podemos notar a presença de uma barra de menus (*Arquivo*, *Editar*, *Exibir*, *Opções*, *Ferramentas*, *Janela*, *Ajuda*) e um pouco abaixo uma barra contendo várias "*caixas*" de ferramentas, ferramentas estas que permitem a geração de construções.

Para iniciar um trabalho selecione a(s) janela(s) de interesse (caso não estejam habilitadas ao abrir a tela), para isso clique em *Exibir*, na barra do menu, e selecione a(s) janela(s). Para o desenvolvimento da proposta usaremos as *Janelas de Álgebra*, de *Visualização* 2D e *de Visualização* 3D.

Cada caixa (de ferramentas) é indicada por um quadradinho com uma figura, e é composta de várias ferramentas. Para ter acesso a uma das ferramentas (comandos ou opções) dentro de uma caixa de ferramentas, mantenha o botão esquerdo do mouse pressionado sobre a caixa de ferramenta (quadradinho) e vá deslizando para baixo até à ferramenta de interesse, ou clique na *setinha* localizada abaixo, à direita, em cada caixa de ferramentas. Para fins didáticos enumeraremos de 1 a 11 (da esquerda para a direita), as caixas de ferramentas da Barra inicial da *Janela de Visualização*2D, como na figura abaixo:

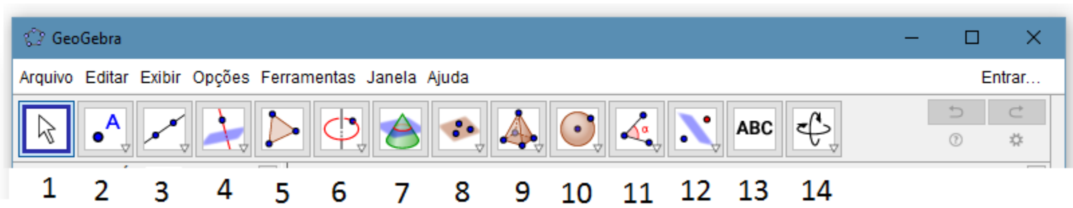
Figura 24: Caixas de Ferramentas da Janela de Visualização 2D do GeoGebra



Fonte: GeoGebra

Similarmente, as caixas de ferramentas da Barra inicial da *Janela de Visualização 3D* também serão numeradas de 1 a 14 (da esquerda para a direita), conforme mostra a figura:

Figura 25: Caixas de Ferramentas da Janela de Visualização 3D do GeoGebra



Fonte: GeoGebra

Para uma melhor visualização, podemos alterar a cor dos objetos construídos, para isso clique com o botão direito do mouse sobre o objeto, selecione "*Propriedades*", clique na aba "*Cor*" e escolha uma cor de sua preferência.

As construções feitas na tela do GeoGebra podem ser copiadas e coladas num arquivo do *Word*, ou *Paint*, por exemplo. Isso pode ser feito abrindo o arquivo desejado do GeoGebra, clicando em *Editar*, depois na opção *Selecionar Tudo* e em seguida clicando em *Arquivo*, *Exportar*, *Copiar para a Área de Transferência* (ou usando *Ctrl+Shift+C*). Depois no arquivo que se pretende copiar (*Word*, por exemplo) use *Ctrl+V* para colar.

Não apresentaremos aqui mais detalhes sobre as várias ferramentas e o funcionamento do GeoGebra, iremos descrever apenas algumas delas no decorrer do texto.

Gostaríamos de observar que o *software* GeoGebra tem passado constantemente por atualizações, sendo assim, o modo de visualização ou a utilização de alguns comandos ou ferramentas podem variar de uma versão para outra.

Antes de abordarmos a interpretação geométrica de sistemas lineares 2×2 e 3×3 usando o GeoGebra, apresentamos duas atividades (bastante simples) relativas a marcar pontos e traçar retas, mas que são bastante úteis para o que segue depois.

As construções apresentadas a seguir servirão para orientar aqueles que são iniciantes ou que não são familiarizados com o *software*, mas querem propor algo diferente em suas aulas. Ressaltamos, entretanto, que o professor tem autonomia para explorar o GeoGebra da maneira que ele julgar melhor.

Proposta de Aula - Interpretação Geométrica de Sistemas Lineares usando o GeoGebra

A proposta apresentada aqui é mais direcionada a alunos da 7ª série/ 8º Ano do Ensino Fundamental (exceto a Atividade 4) ou 2º Ano do Ensino Médio, podendo, entretanto, ser aplicada a alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental e demais séries do Ensino Médio.

ATIVIDADE 1: Marcando pontos no GeoGebra

A) Marcando pontos usando o botão *Ponto*

1- Abra o *GeoGebra*;
2- Ative a *Malha*. Para isso, clique com o botão direito do mouse na tela do GeoGebra e na caixa que aparece, clique no botão *Malha* ;

3- Clique, com o botão esquerdo do mouse, no botão *Ponto* , localizado na barra de menus, localizado na caixa 2;

4- Marque o ponto $(2, 2)$. Faça isso usando a Malha como orientação. O que apareceu na tela? ____________

5- Agora, da mesma forma, marque os pontos $(0,0), (-1,2)$ e $(3,2)$.

6- Usando a ferramenta ponto e a malha você consegue marcar o ponto $(2{,}75, 1)$? Se sim, como? _____________________

B) Marcando pontos digitando suas coordenadas na Caixa de Entrada

1- Abra o *GeoGebra*;

2- Ative a Malha, como visto no passo 2 de A);

3- Na *Caixa de Entrada*, localizada na parte inferior da tela (com o nome Entrada), digite as coordenadas do ponto $P = (2, 1)$ ou apenas $(2, 1)$, e aperte *ENTER*. O que apareceu na tela? ________________

4- Agora, vamos marcar o ponto $(2{,}75, 1)$. Na *Caixa de Entrada*, digite $(2.75, 1)$. O que aconteceu? _______________ Para marcar coordenadas decimais o GeoGebra usa o ponto no lugar da vírgula.

5- Marque, também, os pontos $(-1, 2{,}5)$ e $(1{,}2\ , 3)$.

6- Como você marcaria o ponto $(\sqrt{2},\ -1)$? ________________________

Sugestão: Para marcar $\sqrt{a}$ no GeoGebra, digite o comando $sqrt(a)$ na *Caixa de Entrada*.

ATIVIDADE 2: Traçando retas com o GeoGebra

A) Traçando retas no GeoGebra usando o botão *Reta*

1- Abra o *GeoGebra*;

2- Ative a *Malha*;

3- Clique no botão  (*Reta*), localizado na caixa 3 e clique com o botão esquerdo do mouse em dois pontos quaisquer da Janela de Visualização do GeoGebra. O que aconteceu? _________________________

4- Marque o ponto $(3, 5)$ na tela do GeoGebra. Esse ponto pertence a reta que você construiu? ___________________

5- Marque um ponto sobre essa reta. Dar as coordenadas desse ponto. ______________

B) Traçando retas na tela do GeoGebra usando a Caixa de Entrada

1- Abra o *GeoGebra*;
2- Ative a *Malha*;
3- Na Caixa de Entrada, digite a equação da reta $2x + 3y = 1$ e aperte *ENTER*. O que apareceu na tela? _______________
4- Os pontos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $(-1, 2)$ pertencem a essa reta? _________________
5- Vamos mudar a cor dessa reta. Clique sobre a reta com o botão direito do mouse e clique em *Propriedades* depois em *Cor* e escolha a cor verde, ou uma de sua preferência;
6- Agora, marque os pontos $(-1, 1)$, $(2, -1)$ e $(5, -3)$. Onde esses pontos foram marcados?_____________. Satisfazem alguma propriedade? ____________;
7- Se você substituir os valores de x e y do ponto $(2, -1)$ na equação da reta, o que acontecerá? Pegue papel e lápis e faça as contas. Algo lhe chamou a atenção? ____________________;
8- Faça o mesmo com o ponto $(-1, 1)$ e depois com o ponto $(5, -3)$. O que você concluiu? ____________________;

(O objetivo principal dessa atividade é levar o aluno a concluir que todos os pontos (x, y) que satisfazem a equação apresentada pertencem à reta).

ATIVIDADE 3: Interpretando geometricamente o conjunto solução de Sistemas Lineares com duas incógnitas.

A) Resolver o sistema linear $\begin{cases} \mathbf{2x + 5y = 20} \\ \mathbf{3x - 2y = 11} \end{cases}$ com o auxílio do GeoGebra e interpretar geometricamente o conjunto solução:

Passos auxiliares:

1- Abra o *GeoGebra*;
2- Ative a *Malha*;
3- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $2x + 5y = 20$. O que apareceu na tela do GeoGebra? ___________________.
4- Mude a cor dessa reta para azul, conforme visto na Atividade 2;

5- O ponto $(x, y) = (4, 1)$ pertence á reta obtida?__________

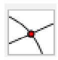
6- Indique na grade um par de pontos (x, y) que satisfaça a 1ª equação, $(x, y) =$__________

7- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $3x - 2y = 11$;

8- Mude a cor da reta obtida para vermelho, conforme visto na Atividade 2;

9- Indique um par de pontos (x, y) na grade que satisfaça a 2ª equação, $(x, y) =$__________

10- Geometricamente você observa algum ponto (x, y) que pertence às duas retas? Algum par ordenado (x, y) que satisfaz as duas equações? _____________ Qual é esse ponto? ________________

11- Para obter o ponto de interseção das retas, clique no botão Ponto, localizado na caixa 2, espere alguns segundos e perceba que abrirá uma caixa de menus com outros botões. Clique no botão  (*Interseção entre Dois Objetos*). Agora, clique em uma reta e depois na outra. O ponto de interseção será marcado. Qual é esse ponto? ___________

12- Para colocar a equação (ou, mais precisamente, o texto referente a cada equação) próxima a cada reta, clique na Janela de Álgebra, com o botão esquerdo do mouse na equação correspondente a cada reta e arraste até a reta.

13- Qual é a classificação esse sistema linear? ________________.

B) Resolver o sistema linear $\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = 3} \\ \boldsymbol{-2x + 4y = 7} \end{cases}$ com o auxílio do GeoGebra e interpretar geometricamente o conjunto solução:

Passos auxiliares:

1- Abra o *GeoGebra*;

2- Ative a *Malha*;

3- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $x - 2y = 3$. O que apareceu na tela do GeoGebra? ___________________.

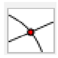
4- Mude a cor dessa reta para azul;

5- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $-2x + 4y = 7$;

6- Mude a cor dessa reta para vermelho;

7- O ponto $(3,0)$ pertence a qual reta? ______________________

8- Geometricamente você observa algum par (x, y) que satisfaz as duas equações? _____________ qual é esse ponto? ________________

9- Tente obter a interseção dessas retas usando o botão  (*Interseção entre Dois Objetos*). O que aconteceu?______________

10- Como se classifica esse sistema linear? ________________.

ATIVIDADE 4: Interpretando geometricamente o conjunto solução de Sistemas Lineares com três incógnitas.

Ativando a *Janela de Visualização 3D*

Para as próximas atividades, usaremos a Janela de Visualização 3D do GeoGebra, para ativá-la siga os seguintes passos:

1- Abra o *GeoGebra*;

2- Clique em *Exibir* e depois *Janela de Visualização 3D*;

3- Feche a Janela de Visualização 2D, clicando no X ao lado do nome Janela de Visualização 2D;

4- Clique com o botão direito do mouse na Janela de Visualização 3D e na caixa que aparece clique em *Janela de Visualização* (último item dessa caixa);

5- Nessa nova janela clique na aba *Básico* (menu superior). Na opção *Clipping*, clique com o botão esquerdo do mouse nas caixas *Usar clipping* e *Habilitar clipping* marcando-as. Feche a Janela de visualização 3D. Perceba que os eixos estão inseridos em uma “caixa”, o que vai facilitar a noção espacial das construções.

A) Resolver o sistema linear $\begin{cases} \boldsymbol{2x - y + 5z = 3} \\ \boldsymbol{6x - 3y + 15z = -7} \end{cases}$ com o auxílio do GeoGebra e interpretar geometricamente o conjunto solução:

Passos auxiliares

1- Abra o *GeoGebra*;

2- Ative a *Janela de Visualização 3D,* conforme feito anteriormente;

3- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $2x - y + 5z = 3$ e mude sua cor para vermelho, da mesma forma que foi feita com a reta. É possível deixar as cores mais intensas colocando o cursor de transparência na posição 100%. O que apareceu na tela? ____________________ ;

4- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $6x - 3y + 15z = -7$ e mude sua cor para azul; quais figuras aparecem? São retas? _____________________;

5- A Janela 3D possui um recurso em que podemos girá-la para ter uma melhor visualização. Basta clicar, com o *botão esquerdo do mouse*, em qualquer lugar da Janela 3D, segurar e arrastar. Experimente;

6- Geometricamente você observa alguma solução comum para as duas equações? _____________. Por que isso ocorre? ________________

7- Como você classificaria esse sistema linear? ________________

B) Resolver o sistema linear $\begin{cases} x \quad -2z = 0 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3y = 4 \end{cases}$ com o auxílio do GeoGebra e interpretar geometricamente o conjunto solução:

Passos auxiliares

1- Abra o *GeoGebra*;

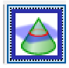
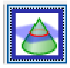
2- Ative a *Janela de Visualização 3D*;

3- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $3y = 4$ e mude sua cor para vermelho, da mesma forma que foi feita com a reta. É possível deixar as cores mais intensas colocando o cursor de transparência na posição 100%. Qual figura apareceu? É uma reta? ____________________;

4- Novamente, na *Caixa de Entrada,* digite a equação $2x - y + z = 3$ e mude sua cor para amarelo. O que apareceu? _____________________;

5- Mais uma vez, na *Caixa de Entrada*, digite a equação $x - 2z = 0$ e mude sua cor para vermelho.

6- Geometricamente você observa alguma solução comum para as três equações? (Gire a Janela 3D para “ver” melhor a disposição desses planos) __________________;

7- A Janela 3D possui um recurso chamado *Interseção de Duas Superfícies*, cujo botão  fica na *Barra de Menus* da Janela 3D, na caixa 7. Para encontrar a interseção entre os planos traçados nos passos anteriores, clique no botão  e depois em dois planos para que o GeoGebra apresente sua interseção. Faça isso e agora responda: o que aconteceu? ______________;

8- Como você classificaria esse sistema? _______________________

C) Resolver o sistema linear $\begin{cases} \boldsymbol{x + 3y + 2z = 1} \\ \boldsymbol{-2x + y + z = -2} \\ \boldsymbol{-x + 4y + 3z = -1} \end{cases}$ **com o auxílio do GeoGebra e interpretar geometricamente o conjunto solução:**

Passos auxiliares

1- Abra o *GeoGebra*;

2- Ative a *Janela de Visualização 3D;*

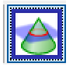
3- Na *Caixa de Entrada*, digite a equação $x + 3y + 2z = 1$ e mude sua cor para vermelho;

4- Digite a equação $-2x + y + z = -2$, na *Caixa de Entrada*, e mude sua cor para azul. O que apareceu? _____________________;

5- Novamente, na *Caixa de Entrada*, digite a equação $-x + 4y + 3z = -1$ e mude sua cor para amarelo.

6- Geometricamente você observa alguma solução comum para as três equações? (Gire a Janela 3D para “ver” melhor a disposição desses planos) __________________;

7- Essa solução é representada por um ponto ou uma reta? ______________;

8- Encontre a Interseção entre os planos usando o botão  fica na Barra de Menus da Janela 3D, localizado na caixa 7, usado na atividade anterior. Qual a interseção entre esses planos? ____________________;

9- Qual a classificação desse sistema? _______________________

Observação: As propostas de aula aqui apresentadas, tanto a desenvolvida usando a metodologia de resolução de problemas quanto a proposta usando o GeoGebra têm o objetivo de auxiliar o docente em sala de aula. Observa-se que na proposta dada via a metodologia de resolução de problemas, na discussão/etapas, considerou-se que os alunos já tinham noção de sistemas lineares, mas o ideal é que esse assunto fosse introduzido através de um problema. Ainda, na etapa 4, referente à verificação dos resultados/retrospecto, é muito importante deixar os alunos apresentarem suas soluções para a classe (em especial as diferentes) e que, em discussão conjunta, os mesmos consigam visualizar os erros e determinar qual está correta. Vale ressaltar que o professor possui autonomia para elaborar seu próprio roteiro de aula, desde a escolha dos problemas até sua execução em sala de aula, deixando claro que o professor pode usá-la da maneira que lhe for mais conveniente, fazendo as adaptações e alterações necessárias para cada turma, cada série que lecionar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O desenvolvimento deste trabalho foi de grande importância para meu crescimento e desenvolvimento profissional. Houve a possibilidade de aprender e refletir muito mais sobre os Sistemas Lineares e suas inúmeras aplicações.

A utilização do software GeoGebra na interpretação geométrica do conjunto solução de um sistema linear de duas ou três incógnitas contribuiu para "enxergar" mais facilmente o que significa um sistema ser Possível Determinado, Possível Indeterminado e Impossível. O GeoGebra pode ser facilmente utilizado na Sala de Informática da Escola por ser um *software* livre e de fácil manuseio. Observa-se que existe também uma versão disponível para celular.

Infelizmente não foi possível aplicar as Propostas de Aula aqui apresentadas, pois durante o desenvolvimento desse trabalho eu não estava lecionando nos Ensinos Fundamental e Médio. Mas, aplicá-las com os alunos e conhecer seu resultado, ficará como motivação para uma ocasião oportuna. Ressalta-se, entretanto, que o trabalho realizado contribuiu, mesmo que indiretamente, na minha postura como professor junto ao Instituto Federal de São Paulo (IFSP), Campus Votuporanga, onde atuo como professor desde Junho de 2016.

Espero que as Propostas de Aula sirvam para motivar (e auxiliar) os professores do Ensino Básico a utilizarem a metodologia da Resolução de Problemas e recursos de Informática em suas aulas. Espero, também, que o trabalho como um todo, em especial as várias aplicações aqui apresentadas sobre sistemas lineares, possa contribuir para que professores e alunos, assim como eu, olhem os sistemas lineares de uma maneira mais relevante e atrativa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, H.; RORRES, C.; **Álgebra Linear com aplicações**. 10ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

AVALIAÇÃO DE APRENDIZAGEM EM PROCESSO (AAP). Disponível em: <http://www.educacao.sp.gov.br/avaliacao-aprendizagem/> Acesso em 15 de ago. 2017.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G.; **Álgebra Linear**. 3ª Ed. São Paulo-SP: HARBRA Ltda., 1980.

BRASIL, Secretaria e Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental/ Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, MEC, SEB. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. v. 2. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações.** 6ª ed. rev. São Paulo: Atual, 1990.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, v. 2, Ensino Médio, 2012.

EXAME DE ACESSO PROFMAT. Disponível em: < http://www.profmat-sbm.org.br/memoria/exames> Acesso em: 18 de jan. 2017.

FGV. Disponível em: < http://vestibular.fgv.br/provas-gabaritos-e-editais > Acesso em: 17 de jan. 2017.

FUNDAÇÃO VUNESP. Disponível em:<https://www.vunesp.com.br/busca/vestibular/encerrados> Acesso em: 13 de jan. 2017.

FUVEST. Disponível em: < http://acervo.fuvest.br/fuvest/ > Acesso em: 20 de jan. 2017.

GEOGEBRA. Disponível em: <https://www.geogebra.org/ > Acesso em: 18 de ago. de 2016.

HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C. S. **Introdução à Álgebra Linear**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2002.

LEON, S. J. ***Linear Algebra with Applications***. 8ª ed. New Jersey-EUA: Pearson, 2010.

LIMA, E. L. **Sobre o Ensino de Sistemas Lineares**. *RPM*, n. 23, 1993.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro- RJ: Interciência, 1995.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo-SP: THOMSON, 2004.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. Avaliação de Aprendizagem em Processo – AAP. **Caderno do Professor: Matemática. Prova de Matemática**. Ensino Médio 2ª série**.** 16ª ed. Secretaria da Educação; Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional, São Paulo, SEE, 2017.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática.** Ensino Fundamental 7ª série/ 8º ano, volume 2/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2014a.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação**. Caderno do Professor: Matemática.** Ensino Médio 2ª série, volume 1/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2014b.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação**. Caderno do Professor: Matemática.** Ensino Médio 3ª série, volume 1/ Secretaria da Educação; Coordenação geral, São Paulo, SEE, 2014c.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas Tecnologias** - Ensino Fundamental – Ciclo II e Médio. São Paulo, SEE, 2012. 72 p.

SÃO PAULO (Estado) Secretaria da Educação. **Matrizes de referência para a avaliação SARESP**: documento básico. Secretaria da Educação; coordenação geral, São Paulo, SEE, 2009. 174 p. v. 1

SILVA, F. S. M.; FANTI, E. de L. C.; BARBARESCO, E. M. Explorando alguns conteúdos de Geometria Espacial com o GeoGebra3D; ***XXVII Semana da Matemática***, SJRP: UNESP/IBILCE, 2015.

SÓ MATEMÁTICA. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/provas.php> Acesso em: 20 de fev. 2017.

UFSCAR. Disponível em: <http://vestibular.brasilescola.uol.com.br/downloads/universidade-federal-sao-carlos.htm> Acesso em: 18 de jan. 2017.