Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Sistemas dinâmicos discretos: uma introdução através da modelagem

Tarcis Alvan Oliva dos Santos

Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Reinaldo de Marchi**

Cuiabá - MT

Setembro de 2017

Sistemas dinâmicos discretos: uma introdução através da modelagem

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Tarcis Alvan Oliva dos Santos e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 29 de setembro de 2017.

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Edgar Nascimento
Prof. Dr. Moiseis dos Santos Cecconello

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

S237s Santos, Tarcis A. O..
Sistemas dinâmicos discretos: uma introdução através da modelagem / Tarcis A. O. Santos. -- 2017
xii, 62 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Reinaldo de Marchi.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Recorrências. 2. Pontos Fixos e Periódicos. 3. Estabilidade. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCACÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUACÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: "Sistemas dinâmicos discretos: uma introdução através da modelagem"

Autor: **Tarcis Alvan Oliva dos Santos**

defendida e aprovada em 29/09/2017.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Reinaldo de Marchi
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor Moiseis Dos Santos Cecconello
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Edgar Nascimento
Instituição : Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Mato Grosso

Cuiabá,29/09/2017.

À minha doce amada esposa Elisângela e a meus queridos filhos Catarina e Benjamin.

Agradecimentos

Agradeço à todos os gestores do programa por idealizarem um programa de mestrado com tamanha abrangência, do qual pude participar e que me proporcionou tamanho crescimento.

Aos professores do curso por todas as suas contribuições e, em especial, ao professor Reinaldo de Marchi, por sua paciência e dedicação em me encorajar e auxiliar na finalização deste texto.

Aos membros da banca, Moiseis e Edgar, por se disponibilizarem a ler e avaliar meu trabalho.

À todos meus colegas de turma, pelas experiências que vivenciamos, em especial à Antônio, Paulo e Lívia, pelo tempo que passamos juntos.

À toda minha família pelo apoio.

À minha mãe, Luzia, por ter se esforçado ao máximo para que eu tivesse a base necessária para almejar um curso de mestrado.

Em especial à minha esposa Elisângela por toda sua paciência nos momentos de ausência e pelo carinho e apoio, sem os quais não conseguiria realizar o curso e esta dissertação.

Muito obrigado a todos.

"Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes."

(Marthin Luther King).

Resumo

Apresentamos neste trabalho um estudo introdutório sobre sistemas dinâmicos discretos lineares de primeira e segunda ordem, pontos fixos e cíclicos, a análise de estabilidade e suas aplicações à diversas áreas como Biologia, Matemática Financeira, dentre outros. O objetivo central é constituir um material de estudo diferenciado, que proporcione um primeiro contato dos alunos do início de cursos de graduação com a Teoria dos Sistemas Dinâmicos, buscando uma abordagem através da modelagem matemática.

Palavras-chave: Recorrências, Pontos fixos e periódicos, Estabilidade.

Abstract

In this work, we present an introductory study about linear discrete dynamical systems of first and second order, fixed points and cycles, stability analysis and their applications on several fields like Biology, Financial Math, among others. The main goal is to build a differentiated study material, which provide a first contact of early graduation students with the Dynamic System Theory, using a mathematical modeling perspective.

Keywords: Recurrences, Fixed and Periodic Points, Stability.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

> "Se você quiser saber a posição de uma mosca a voar em todo instante de tempo, então estudará um modelo Contínuo. Se quiser saber a evolução mensal de juros estudará um modelo Discreto."
>
> (Geraldo L. Diniz)

Uma grande motivação para que usemos modelos matemáticos é a vontade de responder algumas perguntas, tais como: Que horas o Sol nasce amanhã de manhã? Quantas pessoas terão gripe no próximo inverno? Quanto valerá certo investimento daqui um ano? Para auxiliar nas respostas destas questões, diversos tipos de modelos foram criados nos últimos séculos para investigar fenômenos naturais ou sociais que evoluem com o tempo. Alguns desses modelos, por suas características descritivas, recebem o nome de *Sistemas Dinâmicos.*

Alinhado ao propósito do Mestrado Profissional em Matemática de contribuir para a formação de especialistas em matemática, esse trabalho tem a intenção de se constituir num curso introdutório de sistemas dinâmicos para alunos de graduação, dado que esse tema é pouco abordado nos cursos de matemática contemporâneos.

Nesse primeiro contato do estudante com a teoria de sistemas dinâmicos, a abordagem do tema se restringirá aos sistemas dinâmicos discretos, visto que necessitam de um menor aprofundamento na utilização das ferramentas do cálculo e de pouco ou mesmo nenhum conhecimento de análise matemática. Ainda assim o entendimento desse material pressupõe conhecimentos do calculo básico.

Neste sentido, este material se constitui de uma base teórica para posteriores estudos e aprofundamento no tópico. Portanto, a intenção é apresentar esse tema tão oportuno aos alunos de modo que estes se interessem ainda mais pela matemática. Sendo assim, o trabalho está estruturado da seguinte forma:

Capítulo 1 - Sistemas Dinâmicos: uma breve abordagem histórica introdutória sobre o desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos, a justificativa do por que consideramos importante a visitação desse tema para alunos de matemática e de como esses conceitos serão apresentados aos alunos, no caso através de modelagem de situações (Modelagem Matemática). Finalizamos com um breve conceito de sistemas dinâmicos;

Capítulo 2 - Evolução de um sistema dinâmico: Aqui, através de exemplos, definições e teoremas, tornaremos mais elaborados os conceitos apresentados no tópico anterior. Trataremos também superficialmente da estabilidade destes sistemas;

Capítulo 3 - Recorrências Lineares: Nesta seção trataremos de sequências numéricas que possuem como lei de formação uma equação recursiva, ou seja, cada termo é determinado pelo(s) seu(s) antecessor(es) imediatos. Com algumas definições e teoremas deixaremos os alunos mais familiarizados com este assunto;

Capítulo 4 - Modelos e Resultados: Serão apresentados algumas situações que podem ocorrer no cotidiano, nas quais tentaremos aplicar os conceitos de recorrência e sistemas dinâmicos para a análise do comportamento das mesmas. Faremos aqui também um apanhado geral dos resultados obtidos desta análise, bem como alguns caminhos que podem ser trilhados como prosseguimento no estudo deste assunto tão oportuno.

Ao apresentarmos estes exemplos com a aplicação destas teorias estaremos aptos a prosseguir para um estudo aprofundado dos mesmos. Começaremos então por um pequeno passeio na história do desenvolvimento da teoria dos sistemas dinâmicos para posteriormente iniciarmos o principal objetivo deste trabalho.

Capítulo 1

Sistemas Dinâmicos

1.1 De Aristóteles a Poincaré: a busca pela previsibilidade matemática

O conceito de sistema dinâmico surge da necessidade de se construir uma teoria que seja capaz de prever a evolução de fenômenos naturais e humanos que ocorrem nos mais diversos campos do conhecimento. Desde a antiguidade o homem tem tentado entender o mundo que o cerca e buscado meios de prever acontecimentos. Podemos perceber rudimentos desta teoria nos trabalhos de Aristóteles (384-322 a.C.).

Aristóteles foi um grande estudioso que, segundo Boyer Boyer (1974), contribuiu nas mais diversas áreas do conhecimento. Para a matemática seu legado inclui a base para o pensamento lógico e a teoria sobre movimento de corpos. Em sua obra "Mecânica", Aristóteles postulou que um corpo em movimento chegaria à imobilidade somente se a força que atua sobre ele deixasse de atuar, ou seja, só existe velocidade se existir uma força. Das discussões aristotélicas a respeito de movimento de corpos, Ptolomeu (90-168) formulou a teoria geocêntrica. Para ele todo o universo girava em torno da Terra. Essa teoria perdurou por mais de um milênio. O primeiro a coletar fatos que negam esta teoria foi Nicolau Copérnico (1473-1543) que propôs que a Terra girava em torno do Sol e não o contrário como se acreditava. Mais tarde, Johannes Kepler (1571-1630) aperfeiçoou a teoria de Copérnico e afirmou que as órbitas dos planetas eram elípticas e criou as três leis da mecânica celeste.

Newton (1643-1727) corroborou as teorias e propôs o fator que faltava às leis de Kepler, afirmando que o motivo pelo qual os planetas se moviam de tal forma era a gravidade. Ele provou que, se desprezarmos a interação gravitacional entre os planetas, isso implica que os planetas se movem em orbitas elípticas com o Sol num dos focos, tal como proposto por Kepler. Newton criou e formulou a teoria da Gravitação Universal. Ele afirmou que "dois corpos atraem-se com força proporcional às suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que separa seus centros de gravidade", ou seja, gravitação mantém o universo em equilíbrio, pois todos os corpos do universo que possuem massa se atraem mutuamente proporcionalmente a sua distância. Apesar de sua teoria, Newton sabia que o sistema solar era instável, pois seu movimento apresentava irregularidades provenientes da interação gravitacional entre os planetas, e não conseguindo descrevê-las, admitiu que seu funcionamento requereria intervenção regular de Deus.

Duzentos anos mais tarde, Poincaré (1854-1912), motivado pela falta de uma demonstração rigorosa da estabilidade do sistema solar propõe que a evolução de tal sistema é frequentemente caótica, pois pequenas alterações em seu estado inicial irão levar a uma mudança substancial em seu estado final. Assim, se essa pequena alteração não puder ser medida por instrumentos, não será possível predizer um estado final condizente. Dessa premissa, foram abandonados os modelos de Newton, pois as medidas de velocidade e distância poderiam ser incertas devido ao método utilizado para aferir a medida.

Poincaré apresentou um trabalho que consiste em determinar o movimento de três corpos com massa (problema restrito de 3 corpos), dadas suas posições e velocidades iniciais. Considerando que estes corpos interagem entre si conforme a teoria gravitacional de Newton, chegou a conclusão que o problema não poderia ser solucionado com expressões algébricas e integrais, dado que o sistema é extremamente sensível as condições iniciais. Descobriu que duas órbitas em condições iniciais similares poderiam afastar-se rapidamente uma da outra, tomando percursos extraordinariamente complexos, sem nunca passarem pelo mesmo ponto. Esse comportamento irregular foi reconhecido como caos. A partir do reconhecimento do caos, Poincaré compreendeu que mais importante que "resolver"uma equação, é descrever qualitativamente o comportamento das suas soluções.

De fato, a maioria das ferramentas utilizadas no estudo do comportamento de sistemas dinâmicos foram iniciadas nos trabalhos de Poincaré, sendo desenvolvidas mais profundamente por matemáticos que estudavam seus trabalhos, a citar: o americano George David Birkhoff (1884-1944), matemáticos soviéticos da Escola de Gorki como Alexander Andronov (1901-1952) e Lev Pontryagin (1908-1988), o russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) e o também soviético Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), sendo inclusive atribuída à George Birkhoff a publicação do primeiro livro na área de sistemas dinâmicos (Dynamical Systems), publicada em 1927.

Ainda que revisitados, os estudos de Poincaré sobre sistemas dinâmicos não tiveram grande espaço no meio científico até a década de 60, sendo que a partir dai os estudos modernos sobre sistemas dinâmicos foram impulsionados pelo desenvolvimento acelerado dos meios computacionais. Para (Villate, 2011), o uso do computador como ferramenta de análise numérica possibilitou meios de explorar as ideias de Poincaré, tornando o estudo dos sistemas dinâmicos uma nova área de investigação, com caráter próprio e inovador, aplicado as mais diversas áreas do conhecimentos.

1.2 A importância dos Sistemas Dinâmicos e Modelagem Matemática

Os sistemas dinâmicos são importantes devido à sua capacidade de expressar e analisar fenômenos naturais que se comportam de maneira caótica, aparentemente imprevisíveis, em todos os ramos das Ciências. Envolvem a análise e a simulação de sistemas físicos de interesse das engenharias e das áreas agrícolas, tendo também aplicação importante em simulações de sistemas biológicos, sociais e econômicos. Seu grande diferencial é tratar sistemas cujos estados mudam com o tempo, podendo simular importantes cenários para o estudos científicos.

Estranhamente, tendo os sistemas dinâmicos essa capacidade de comportar situações reais e extraordinárias, uma breve análise dos currículos de alguns cursos de graduação em matemática[1], mostrou que este ainda não é um assunto muito difundido e, quando o é, é o objeto de estudo de cursos de pós-graduação, com abordagem mais abstrata e com enfoque contínuo. Parte da resistência, segundo Vilate Villate (2011) deve-se as críticas em relação a falta de rigor científico nas novas abordagens dos estudos de sistemas dinâmicos, principalmente os que utilizam-se dos computadores para explorar equações, alegando não existir uma teoria sólida que explique os resultados obtidos, inclusive, essa nova "disciplina"é vista como uma implementação computacional de

[1]Unemat, Ufmt, Ufscar, Ufmg, Uem, dentre outras

conhecimentos antigos e já bem estabelecidos.

Esse trabalho parte do pressuposto que os estudos de sistemas dinâmicos tem muito a contribuir com as diversas áreas das ciências e que a apresentação desse conteúdo é deveras importante, sendo sua abordagem necessária já no início dos cursos de graduação. Com o estudo dos sistemas dinâmicos os alunos são encorajados a apreender conceitos de sua área - não só da Matemática - bem como de outras áreas do conhecimento. Para Bassanezi (Bassanezi, 2002, p. 173), "a Matemática tem penetrado fortemente na Economia, Química, Biologia, [...] Física, como as leis de conservação e analogias consequentes. Outras áreas como Sociologia, Psicologia, Medicina, Linguística, Música, e mesmo a Historia, começam a acreditar na possibilidade de ter suas teorias modeladas por meio da linguagem matemática."É neste contexto que produzimos este texto com a finalidade de expor tópicos da matemática contemporânea para os alunos, com conteúdos palpáveis a eles e que estes possam tentar explicar, compreender ou modificar os conceitos até então apreendidos.

O objetivo então é não só apresentar o tema, mas fazê-lo de forma instigadora. Corroboramos com Bassanezi Bassanezi (2002) e entendemos que formar especialistas em matemática é importante para o país, pois é necessário produzir conhecimento, não somente importá-lo e para isso é necessário buscar estratégias que facilitem a compreensão e a utilização da matemática no ambiente de aprendizagem, motivar o usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela.

Despertar o interesse para a matemática, envolver o aluno nos processos matemáticos tirando o foco exclusivo da busca pelo resultado, levar os problemas reais para análise por métodos científicos. Aqui surge uma importante questão: como tornar os problemas reais passíveis de análise pelo método científico? Defenderemos aqui o uso da Modelagem Matemática. Modelagem nada mais é que recorrer a modelos para tentar explicar o mundo em que vivemos e os fenômenos que nele ocorrem, como, quando ou por que estes fenômenos ocorrem de uma maneira ou de outra. A modelagem matemática, visa a elaboração de um modelo matemático que explique ou descreva uma situação "real", previamente delimitada, tendo um enfoque no "processo"ao "criar um modelo matemático baseado em hipóteses e aproximações simplificadoras", e outro no ensino, tratando de "questões metodológicas para conectar a matemática ao interesse dos alunos"(Bean, 2001, p. 55).

Para Bassanezi (Bassanezi, 2002, p. 13), a modelagem matemática é a matemática “por excelência”, já que a origem das ideias centrais da matemática são resultados da tentativa humana de entender e explicar fenômenos observados na realidade, ou seja, o “desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações do real”.

Criar um modelo matemático tende a ser uma tarefa desafiadora, pois modelar a realidade, ainda que simplificada, exige um grau de comprometimento e de observação do pesquisador. Um modelo matemático deve conter um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representem, de alguma forma, o objeto ou a situação estudados, além disso, deve ter uma linguagem concisa, expressando as ideias de maneira clara e sem ambiguidades, proporcionando um “arsenal de teoremas”passíveis de uso de métodos para calcular suas soluções numéricas (Bassanezi, 2002, p. 20-21).

Grande parte destes modelos não são muito complexos, de modo que as ferramentas necessárias para sua elucidação são mais elementares, como contagem, aritmética e até mesmo o conceito de número têm se provado fundamentais em diversas culturas. O grande desenvolvimento científico dos últimos séculos culminou na criação de modelos mais elaborados e específicos, objetos deste trabalho: os Sistemas Dinâmicos Discretos.

1.3 Sistemas Dinâmicos: alguns conceitos

Entendamos primeiramente que um sistema é um conjunto de elementos interligados de modo a formarem um todo organizado. Um bom exemplo na matemática são os sistemas lineares, onde há equações de múltiplas variáveis que interagem nestas equações.

Quando tratamos de sistemas dinâmicos, podemos dizer genericamente, que o seu conceito surge para estudar o comportamento das soluções de sistemas que evoluem segundo uma regra relacionando seu estado presente ao estado inicial. Como já citamos, o grande diferencial de um sistema dinâmico é que suas propriedades descritivas variam com o tempo, podendo variar também espacialmente.

A partir do estado inicial, um sistema dinâmico pode apresentar um comportamento bem definido, sendo classificado como linear, ou apresentar um não tão previsível, caracterizado como não linear. O fato é que os sistemas dinâmicos não lineares expressam melhor os problemas reais. Quanto a observação da passagem do tempo nos sistemas dinâmicos, eles podem ser contínuos ou discretos, sendo que que no contínuo os valores são medidos sem interrupções e podem ser avaliados a qualquer instante e no discreto o sistema não se altera a não ser em espaços de tempo pré-determinados.

Todos essas definições de um sistema dinâmico estão atreladas a observação da passagem do tempo nestes sistemas, bem como o comportamento do sistema observado nessa passagem. Para tal, estudaremos agora algumas definições que podem nos auxiliar ao tentarmos encontrar soluções para as equações derivadas de nossos modelos. Estudaremos agora Equações de Recorrência de Primeira e Segunda Ordem.

Capítulo 2

Recorrências Lineares

Nesse capítulo iremos tratar de equações de recorrência da forma

$$a_k(n)x_{n+k} + a_{k-1}(n)x_{n+k-1} + \cdots + a_1(n)x_{n+1} + a_0(n)x_n = q(n). \qquad (2.1)$$

onde os coeficientes $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ e q são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, com a_k e a_0 nunca se anulando. Equações do tipo 2.1 são chamadas de equações de diferenças lineares (ou equações de recorrência lineares). Se $q = 0$, a equação é dita de homogênea, caso contrário, não-homogênea. O grau de uma recorrência é determinado pelo valor de k presente nesta equação, ou seja, por quantos termos anteriores são necessários para a determinação de um novo termo. Se $k = 1$ temos uma equação de primeira ordem, para $k = 2$ temos uma equação de segunda ordem. Vejamos agora alguns exemplos para $k = 1$ e $k = 2$:

Exemplo 2.1. Seja $k = 1$, a aplicação de um montante M na poupança à juros j por um tempo t. Consideremos o juro mensal de 0,5% ao mês (tempo discreto). A equação do montante M_n é dada por

$$M_{n+1} = (1 + j)M_n$$

Neste caso cada item é determinado pelo anterior multiplicado pela taxa de juros acrescida de 1.

Tomemos agora outro caso para $k = 1$.

Exemplo 2.2. Considere a seguinte situação: queremos saber o maior número de regiões que n retas podem dividir um plano. O primeiro passo é definir uma equação recursiva para este problema. Primeiramente, o plano possui uma região quando nenhuma reta o divide, logo temos $x_0 = 1$; com a primeira reta dividimos o plano em dois e temos $x_1 = 2$. A partir daí obteremos o maior número possível de regiões quando a reta $n+1$ intercepta todas as n anteriores, sem interceptar nenhuma das interseções anteriores, formando assim $n+1$ novas regiões. Podemos escrever esta equação na forma da equação 2.2:

$$x_{n+1} = x_n + (n+1), para \;\; n = 0, 1, 2, 3, ..., \tag{2.2}$$

pois cada termo x_{n+1} será a soma de x_n regiões anteriores com as $n+1$ novas.

Para $k = 2$ no próximo exemplo tomemos o problema dos coelhos de Fibonacchi:

Exemplo 2.3. Começando com um casal de coelhos jovens, presos numa área cercada, quantos serão os casais de coelhos depois de n meses? Consideremos que cada casal de coelhos se reproduzam quando forem adultos, o que ocorre quando completa dois meses, e a partir daí gerem a cada mês outro casal de coelhos. O período de gestação é de um mês. Assim $F_0 = 1$, pois começamos com um casal e $F_1 = 1$, pois com um mês este casal ainda não se reproduz. No segundo mês eles geram mais um casal, então $F_2 = 2$. No terceiro o primeiro casal gera mais um casal e o segundo ainda não está adulto para se reproduzir, logo $F_3 = 3$. No quarto o primeiro casal gera mais um, o segundo já está apto a se reproduzir e o terceiro ainda não se reproduz, logo $F_4 = 5$.

Podemos notar nesta sequência que teremos sempre dois tipos de casais de coelhos: os adultos, com dois meses ou mais, aptos a se reproduzirem; e os jovens que ainda não podem se reproduzir. Podemos assim dizer que o número de casais de coelho num mês será igual a quantidade de casais adultos somada a de casais jovens, ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Neste exemplo temos uma recorrência de segunda ordem, pois cada termo é formado pela soma de seus dois anteriores imediatos. além disso, ambos são homogêneos pois não possuem uma função de n, $(f(n))$, adicionada aos termos anteriores da sequência.

Tomemos agora outro caso para $k = 2$.

Exemplo 2.4. Seja uma árvore que produza sementes da seguinte maneira: cada uma de suas sementes, após ser plantada, produz 21 novas sementes ao completar o primeiro ano e 44 novas sementes a cada ano a partir do segundo. Se inicialmente plantarmos uma semente, ou seja $x_1 = 1$, e se cada nova semente produzida for imediatamente plantada, quantas sementes termos após n anos?

No ano $n+2$ serão geradas 21 sementes para cada semente gerada no ano $n+1$ e 44 sementes para cada semente gerada nos anos anteriores. Assim, se x_n denota o número de sementes geradas no ano n, temos

$$x_{n+2} = 21x_{n+1} + 44(x_n + x_{n-1} + x_{n-2}, ..., x_1 + x_0),$$

com $x_1 = 1$ e $x_2 = 44 + 21 \times 21 = 485$.

Vejamos agora como são as formas da equação de termo geral, que é a equação que fornece o valor de x_n apenas em função de n, de algumas equações mais simples de recorrência que podem ser encontrados no estudo de sistemas dinâmicos.

2.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

Começaremos esta seção definindo o que é uma recorrência de primeira ordem, de acordo com as definições de Morgado Morgado e Carvalho (2013).

Definição 1. *Uma Recorrência Linear de Primeira Ordem é da forma*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n). \tag{2.3}$$

onde a g e h são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$, com $g(n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Este é um caso particular da equação (2.2), para $k = 1$. Antes de apresentarmos a equação do termo geral de (2.3), dividiremos as recorrências de primeira ordem em duas categorias: homogêneas e não-homogêneas.

2.1.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Homogênea

Definição 2. *Uma recorrência linear de primeira ordem é homogênea quando o termo $h(n)$ for nulo, ou seja, sua equação é da forma*

$$x_{n+1} = g(n)x_n. \tag{2.4}$$

Sabendo a forma da equação da recorrência, vamos agora encontrar a equação de seu termo geral. Para tal, listemos os termos da sequência

$$\begin{aligned} x_2 &= g(1)x_1 \\ x_3 &= g(2)x_2 \\ x_4 &= g(3)x_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= g(n-1)x_{n-1} \end{aligned}$$

Obtemos a equação do termo geral multiplicando as equações dos termos acima de modo a cancelarmos os termos que aparecem dos dois lados da igualdade, à exceção de x_n e x_1 que aparecem apenas uma vez. Assim, o termo geral da recorrência (2.4) é da forma:

$$x_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} g(k)\right) x_1.$$

Quanto ao termo $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} g(k)$, temos dois casos particulares a considerar :

a) Se $g(n) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} g(k) = k^{n-1}$;

b) Se $g(n) = n$, então $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} g(k) = (n-1)!$;

Com isto, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Para as equações abaixo, temos*

a) A solução de $x_{n+1} = kx_n$ *é* $x_n = k^{n-1}x_1$*;*

b) A solução de $x_{n+1} = nx_n$ *é* $x_n = (n-1)!x_1$*.*

Vamos agora resolver dois problemas de valor inicial (PVI) que envolvem esses cálculos.

Exemplo 2.5.

Vejamos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n \\ x_1 = 2. \end{cases}$$

Neste caso temos $g(n) = 3$, e assim, temos

$$\begin{aligned} x_n &= 3^{n-1}x_1 \\ x_n &= 2.3^{n-1}. \end{aligned}$$

Assim, para este PVI, temos uma solução na forma $x_n = 2.3^{n-1}$ para $n = 1, 2, 3, ...$

Exemplo 2.6. Tomemos agora o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x_{n+1} = nx_n \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Neste caso temos $g(n) = n$ e nos deparamos com o segundo caso, possibilitando assim calcularmos

$$\begin{aligned} x_n &= (n-1)!x_1 \\ x_n &= (n-1)!, \end{aligned}$$

logo $x_n = (n-1)!$, com $n \in \mathbb{N}$, é uma solução para o problema em questão.

Estes são os casos mais simples de recorrências e de mais fácil resolução. Vejamos agora a equação do termo geral de recorrências não-homogêneas.

2.1.2 Recorrências Lineares de Primeira Ordem Não-Homogênea

Definição 3. *Uma recorrência linear de primeira ordem é não-homogênea quando o termo $h(n)$ for não-nulo, ou seja, sua equação é da forma:*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n). \tag{2.5}$$

Os casos de mais simples manipulação da equação (2.5) ocorrem quando $g(n) = 1$, deixando a equação (2.5) na forma:

$$x_{n+1} = x_n + h(n). \tag{2.6}$$

Obtemos a equação do termo geral somando as equações dos termos acima de modo a cancelarmos os termos que aparecem dos dois lados da igualdade, à exceção de x_n e x_1 que aparecem apenas uma vez. Assim, o termo geral da recorrência (2.6) é da forma:

$$x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} h(k) \tag{2.7}$$

Vejamos então dois exemplos.

Exemplo 2.7.

Tomemos a equação (2.2) como o PVI,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (n+1) \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Neste caso $x_0 = 1$ representa a situação onde não há retas para dividir o plano, e este apresenta uma região. Neste caso precisamos apenas substituir o valor de $(n+1)$ na equação (2.7) para obtermos

$$x_n = x_1 + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1),$$

resultando em

$$x_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Note que o termo $\sum_{k=1}^{n-1}(n+1)$ é a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1. Por esta razão aplicamos apenas a equação de soma de termos de PA para obtermos o resultado.

Exemplo 2.8. Para o PVI

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 2^n \\ x_1 = 1, \end{cases}$$

substituindo 2^n na equação (2.7), obtemos

$$\begin{array}{rcl} x_n &=& x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1}) \\ x_n &=& 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1} \\ x_n &=& 1\dfrac{2^n - 1}{2 - 1} \\ x_n &=& 2^n - 1. \end{array}$$

Para os outros casos, onde $g(n) \neq 1$ há a possibilidade de manipularmos a equação da recorrência de modo a encontrarmos uma equação da forma (2.6). Podemos assim enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.2. *Toda recorrência linear de primeira ordem não-homogênea da forma*

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \tag{2.8}$$

pode ser escrita na forma da equação (2.6) quando aplicada a seguinte substituição: Seja a_n *uma solução não-nula de* $x_{n+1} = g(n)x_n$*, então a substituição* $x_n = a_n y_n$ *transforma a equação (2.8) em*

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}$$

Demonstração. A substituição $x_n = a_n y_n$ transforma

$$x_{n+1} = g(n)x_n + h(n) \text{ em } a_{n+1}y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$$

Mas $a_{n+1} = g(n)a_n$, pois a_n é solução de $x_{n+1} = g(n)x_n$. portanto a equação se transforma em

$$g(n)a_n y_{n+1} = g(n)a_n y_n + h(n)$$

Quando dividimos a equação acima por $g(n)a_n$ obtemos

$$y_{n+1} = y_n + h(n)[g(n)a_n]^{-1}.$$

$\square$

Podemos exemplificar este teorema pelo seguinte PVI:

Exemplo 2.9.

Encontre a solução da equação $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, quando $x_1 = 2$. Utilizaremos o Teorema (2.2) para encontrar tal solução. Consideremos então a equação homogênea $x_{n+1} = 3x_n$. Encontramos uma solução para esta equação anteriormente e esta foi $x_n = 3^{n-1}$. Façamos agora a substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$, obtendo assim

$$\begin{aligned} 3^n y_{n+1} &= 3^n y_n + 3^n \\ y_{n+1} &= \frac{3^n y_n}{3^n} + \frac{3^n}{3^n} \\ y_{n+1} &= y_n + 1 \end{aligned}$$

Como $y_{n+1} = y_n + 1$ é uma progressão aritmética de razão 1, uma solução para esta equação tem a forma $y_n = y_1 + (n-1)1$, ou ainda $y_n = y_1 + n - 1$. Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 2$, temos que $y_1 = 2$ e $y_n = n + 1$. Portanto

$$x_n = (n+1)3^{n-1}.$$

Partiremos agora para o caso em que a equação (2.1) apresenta $k = 2$, ou seja, para as equações lineares de segunda ordem.

2.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Definição 4. *Uma Recorrência Linear de Segunda Ordem é uma equação da forma:*

$$x_{n+2} = g(n)x_{n+1} + h(n)x_n + t(n). \tag{2.9}$$

Quando o termo $t(n) = 0$ da equação 2.9 esta equação é homogênea, caso contrário, esta é não-homogênea. Trataremos aqui apenas dos casos homogêneos e deixaremos os casos não-homogêneos para uma outra oportunidade, pois o tratamento dos casos não-homogêneos se tornariam mais complexos do que o intuito deste trabalho. Sendo assim, para encontrarmos o termo geral de uma recorrência linear de segunda ordem de coeficientes constantes do tipo $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, tomemos sua equação característica dada pelos seus coeficientes, no caso $r^2 + pr + q = 0$ cujas raízes são r_1 e r_2. A partir destes fatos podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.3. *Seja a equação de recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, com sua equação característica $r^2 + pr + q = 0$, com raízes r_1 e r_2. A solução desta equação será dada por:*

a) $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ quando as raízes forem reais e $r_1 \neq r_2$;

b) $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ quando $r_1 = r_2 = r$ for uma raiz real;

c) $a_n = \rho^n[C_1 \cos(n\theta) + C_2 \operatorname{sen}(n\theta)]$ quando $r_1 = \alpha + \beta i$ e $r_2 = \alpha - \beta i$ são raízes complexas e a forma polar de r_1 e r_2 é dada por $\rho(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$.

Demonstração. Vamos analisar os seguintes casos:

a) $r_1 \neq r_2$ são raízes reais.

Substituindo $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$ na expressão $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$ e agrupando convenientemente os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} &C_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q) \\ &= C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0 \end{aligned}$$

b) $r_1 = r_2 = r$

Como as raízes são iguais, temos $r = -\frac{p}{2}$. Substituindo $a_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$ em $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n$ e agrupando convenientemente os termos, obtemos

$$\begin{aligned} &C_1 r^n (r^2 + pr + q) + C_2 n r^n (r^2 + pr + q) + C_2 r^n r (2r + p) \\ &= C_1 r^n 0 + C_2 n r^n 0 + C_2 r^n r 0 = 0 \end{aligned}$$

c) De modo análogo ao caso a), temos que $a_n = c_1 r_1 + c_2 r_2$ é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} +$

$qx_n = 0$ para o caso complexo. Assim[2] ,

$$\begin{aligned} a_n &= c_1(\rho\cos\theta + i\rho\,\mathrm{sen}\theta)^n + c_2(\rho\cos\theta - i\rho\,\mathrm{sen}\theta)^n \\ &= \rho^n[(c_1+c_2)\cos(n\theta) + i(c_1-c_2)\,\mathrm{sen}(n\theta)] \\ &= \rho^n[C_1\cos(n\theta) + C_2\,\mathrm{sen}(n\theta)], \end{aligned}$$

onde $C_1 = (c_1 + c_2)$ e $C_2 = i(c_1 - c_2)$. c.q.d.

Vamos resolver dois exemplos de PVI para $k = 2$ da equação (2.1).

Exemplo 2.10. Seja o PVI de equação

$$\begin{cases} x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \\ x_0 = 3 \text{ e } x_1 = -6 \end{cases}$$

Sua equação característica é $r^2+5r+6 = 0$, cujas raízes são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$, o que pelo Teorema (2.3) nos mostra que a solução geral desta equação é da forma $x_n = C_1r_1^n + C_2r_2^n$. Assim, temos

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n.$$

Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ para os valores de $x_0 = 3$ e $x_1 = -6$ respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 3 \\ -2C_1 - 3C_2 = -6. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de duas equações e duas incógnitas encontramos os valores de $C_1 = 3$ e $C_2 = 0$, levando a solução

$$x_n = 3(-2)^n$$

Exemplo 2.11. Considere agora o PVI de equação

$$\begin{cases} x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0 \\ x_0 = 3 \text{ e } x_1 = 6. \end{cases}$$

[2]Usamos aqui a fórmula de De Moivre: $[\rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)]^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)]$. Ver (Elaydi, 2005, p. 78).

Sua equação característica é $r^2 - 4r + 4 = 0$, cujas raízes são $r_1 = r_2 = 2$, o que pelo teorema (2.3) nos mostra que a solução geral desta equação é da forma $x_n = C_1 r^n + C_2 n r^n$. Assim, temos

$$x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n.$$

Substituindo $n = 0$ e $n = 1$ para os valores de $x_0 = 3$ e $x_1 = 6$ respectivamente, obtemos

$$\begin{cases} C_1 = 3 \\ 2C_1 + 2C_2 = 6 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema de duas equações e duas incógnitas encontramos os valores de $C_1 = 3$ e $C_2 = 0$, levando a solução

$$x_n = 3.2^n$$

Finalizamos assim nosso estudo das equações de recorrência lineares. Partiremos agora para uma tentativa de agrupar todos os conhecimentos abordados até aqui, para a partir deles efetuarmos a análise da dinâmica de alguns sistemas: modelarmos equações de recorrência a partir de algumas situações encontradas na natureza, de como se comportam, quais são suas soluções gerais e o comportamento de tais soluções.

Capítulo 3

Comportamento dos Sistemas Dinâmicos Discretos

Sistemas Dinâmicos estudam a evolução de uma grandeza ao longo do tempo. Essa evolução deve obedecer uma lei em forma de equação que permita determinar o valor da grandeza x no instante t. De acordo com a forma em que a passagem do tempo é considerada, classificamos o sistema dinâmico. Se t toma valores em um intervalo real, então estamos lidando com um *sistema dinâmico contínuo.* No caso em que t assume valores em um conjunto discreto, então estamos trabalhando com um *sistema dinâmico discreto.*

Para exemplificar, temos que a equação

$$x''(t) - 3x'(t) + x(t) - t^2 = 0, \ t \in [0, +\infty), \tag{3.1}$$

determina uma lei em um sistema dinâmico contínuo, bastando observar que t assume valores no intervalo real $[0, +\infty)$. Por outro lado, equação

$$x(t+2) = x(t+1) + x(t), \ t \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

nos fornece uma regra que determina a evolução de x para t no conjunto dos números naturais, que é discreto. Decorre desta equação particular que o valor de x em qualquer instante é a soma dos valores de x nos instantes imediatamente anteriores.

A equação (3.1) é um exemplo de uma *equação diferencial ordinária.* Já a equação (3.2) exemplifica um tipo conhecido de *equação de diferenças ou recorrências.* Existem outros tipos de equações que determinam sistemas dinâmicos, tais como equações integrais, equações diferenciais com retardo, equações diferenciais parciais, dentre outros. No entanto, nosso trabalho é focado em equações de recorrência, que determinam sistemas dinâmicos discretos.

3.1 Sistemas Dinâmicos Discretos

Os sistemas dinâmicos discretos descrevem uma grandeza x que é determinada pelos valores temporais $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$, com $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$. Em outras palavras, x é uma função de t_n, e escrevemos $x(t_n)$ para destacar essa dependência. Para simplificar nossa notação, iremos denotar $x_n = x(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e salvo menção contrária, consideramos $t_n = n$. Iremos supor que a grandeza x_n obedece uma lei, isto é, existe uma expressão em forma de equação que relaciona os valores de x_n em diversos instantes, sendo que x_n desempenha o papel de incógnita.

Exemplo 3.1. Considere a equação

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n, \; n \in \mathbb{N},$$

com $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Esta equação nos permite calcular x_2, bastando fazer $n = 0$ nela:

$$x_2 = x_1 + x_0 = 1 + 0 = 1.$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} x_3 &= x_2 + x_1 = 1 + 1 = 2, \\ x_4 &= x_3 + x_2 = 2 + 1 = 3, \\ x_5 &= x_4 + x_3 = 3 + 2 = 5, \end{aligned}$$

e assim por diante. Esta equação é conhecida como *equação de Fibonacci* e a sequência de valores obtidos $(0, 1, 1, 2, 3, 5, \dots)$ é chamada de *sequência de Fibonacci*.

De modo geral, qualquer expressão da forma

$$F(x_{n+k}, x_{n+k-1}, \dots, x_n, n) = 0, \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

onde F é uma função dada e k é um número inteiro positivo nos fornece um sistema dinâmico discreto. Equações como (3.3) recebem o nome de equações de recorrência. O número k é a ordem da equação de recorrência.

Exemplo 3.2. As seguintes equações são equações de recorrência de ordem 1:

- $x_{n+1} = x_n$,
- $x_{n+1} + x_n = 3n - 1$,
- $x_{n+1} + nx_n = x_n^2$

Exemplo 3.3. São equações de recorrência de ordem 2:

- $x_{n+2} = x_n$,
- $x_{n+2} + x_{n+1} - x_n^2 = n^3$,
- $x_{n+2} + 4nx_n = 1$

É importante observar que o termo de menor ordem em uma equação de recorrência deve ser x_n. Caso isso não ocorra, dizemos que a equação está transladada no tempo. Para eliminar essa translação de tempo, procedemos uma substituição, de modo a tornar o termo de menor ordem como x_n. A exemplo disso, considere a equação

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}.$$

Escrevendo $m = n - 1$, temos que $n = m + 1$. Desse modo, a equação acima torna-se

$$x_{m+2} = x_{m+1} + x_m,$$

trocando m por n, obtemos uma equação na forma (3.3), que é a equação de Fibonacci.

Quando F não depender de n, isto é, quando na equação não aparecer dependência do tempo n, diremos que a equação de recorrência correspondente é autônoma.

A expressão (3.3) é chamada de equação implícita. Isso significa que para determinar o valor de x_{n+k}, devemos substituir na equação implícita os valores de n, x_n, $x_{n+1}, \ldots, x_{n+k-1}$ e resolver a equação em x_{n+k} obtida. Em diversas situações, é possível isolar x_{n+k} na equação (3.3), obtendo uma equação do tipo:

$$x_{n+k} = f(x_{n+k-1}, \ldots, x_n, n), \; n \in \mathbb{N}, \tag{3.4}$$

em que f é uma função adequada. Neste caso, dizemos que a equação 3.4 está na forma *explícita*.

Exemplo 3.4. Uma pessoa faz um empréstimo de R$ 1000 a um banco, a uma taxa de juros mensal de 1,4% ao mês, com prazo de 24 meses. A prestação mensal é de R$ 49,27. Determine uma equação explícita do montante x_n em função de x_{n-1} e n.

No n-ésimo mês, o montante da dívida será igual ao montante em dívida no mês anterior, x_{n-1}, acrescido os juros devidos nesse período, menos a prestação p paga nesse mês. Desse modo, obtemos a equação:

$$x_n = x_{n-1} + jx_{n-1} - p,$$

onde j é a taxa de juros mensal. A partir dessa equação, podemos usar uma planilha eletrônica para obter os valores:

n	x_{n-1}	x_n
1	R$ 1.000,00	R$ 964,73
2	R$ 964,73	R$ 928,89
3	R$ 928,89	R$ 892,54
4	R$ 892,54	R$ 855,69
5	R$ 855,69	R$ 818,32
6	R$ 818,32	R$ 780,42
7	R$ 780,42	R$ 742,00
8	R$ 742,00	R$ 703,04
9	R$ 703,04	R$ 663,53
10	R$ 663,53	R$ 623,47
11	R$ 623,47	R$ 582,85
12	R$ 582,85	R$ 541,66
13	R$ 541,66	R$ 499,89
14	R$ 499,89	R$ 457,54
15	R$ 457,54	R$ 414,59
16	R$ 414,59	R$ 371,05
17	R$ 371,05	R$ 326,89
18	R$ 326,89	R$ 282,12
19	R$ 282,12	R$ 236,72
20	R$ 236,72	R$ 190,68
21	R$ 190,68	R$ 144,00
22	R$ 144,00	R$ 96,67
23	R$ 96,67	R$ 48,67
24	R$ 48,67	R$ 0,00

Tabela 3.1: Evolução de uma dívida mensalmente com taxa constante.

Vale observar que após 12 meses, exatamente metade do prazo para pagamento, o valor devido será $x_{12} = 541,66$ reais, que não corresponde metade do valor tomado no empréstimo.

Exemplo 3.5. Lactobacillus é um gênero de bacilo, o qual é uma bactéria em forma de bastonete. Essas bactérias apresentam forte produção de ácidos, sobretudo ácido láctico, razão pelo qual coagulam o leite. Vamos obter um modelo matemático para a expansão populacional de Lactobacillus, supondo que a população dobra a cada 12 horas.

Sendo x_n o número de indivíduos da população no instante $t_n \in 0, 12, 24, 36, ...$, usando a hipótese, temos que

$$x_n = 2x_{n-1}, \text{ com } x_0 \text{ dado.}$$

Exemplo 3.6 (Crescimento Populacional: Thomas Malthus)**.** De acordo com Giordano (Giordano et al., 2013), podemos ver que o interesse no crescimento populacional foi estimulado durante o século XVII por Thomas Malthus (1766-1834) quando este publicou "An Essay on the Principle of Population as It Affects the Future Improvement of Society". Nesta obra, Malthus propôs um modelo de crescimento exponencial no qual ele previu que a população mundial cresceria além de um ponto no qual seria possível produzir comida para todos.

Apesar deste modelo atualmente não é mais utilizado "na prática", já que não leva em conta a evolução tecnológica dos países desenvolvidos dentre outros fatores, mas em sua época foi um modelo incrível que proporcionou ferramentas para previsões incríveis a respeito do crescimento populacional e da produção de alimentos. Segundo Malthus a População crescia de forma exponencial enquanto a produção de alimentos cresci de forma linear. Assim este é um modelo a ser estudado e preparado para futuras melhorias/aperfeiçoamentos.

Vamos apresentar agora o modelo de Malthus para determinar o número de habitantes p_n de uma população ao longo de n anos, sendo p_0 a população atual. Primeiramente observamos que de um ano para outro, o número de habitantes que são acrescidos é $p_{n+1} - p_n$. Por outro lado, considerando a_n a quantidade de nascidos durante o ano n e b_n a quantidade de falecidos no ano n, e supondo que não há migração populacional, temos que

$$p_{n+1} - p_n = a_n - b_n.$$

Vamos assumir que o número de nascimentos a_n e o número de falecimentos b_n no ano n sejam ambos proporcionais à p_n,ou seja, $a_n = \alpha p_n$ e $b_n = \beta p_n$. As constantes α e β são chamadas, respectivamente, de índice de natalidade e índice de mortalidade. Desse modo, a equação acima torna-se

$$p_{n+1} - p_n = \alpha p_n - \beta p_n = \lambda p_n$$
$$p_{n+1} = (1 + \lambda) p_n$$

sendo $\lambda = \alpha - \beta$ conhecido como taxa de crescimento populacional. Este modelo de Malthus pode ser usado para descrever a evolução de uma população sem migrações e que a taxa de crescimento é constante.

Definição 5. *Dizemos que uma sequência* $(s_n)_{n\in I}$ *é solução da equação de recorrência* (3.3) *se*

$$F(s_{n+k}, s_{n+k-1}, \ldots, s_n, n) = 0,$$

para todo $n \in I$ *para o qual tenha sentido. Podemos também dizer que* s_n *é solução da equação. As soluções que possuem maior interesse dinâmico são aquelas que estão definidas para todo* n *natural, isto é,* $J = \mathbb{N}$.

Exemplo 3.7. Considere a equação de recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 2$. Temos que $s_n = 3^n - 1$ é uma solução, pois

$$s_{n+1} = 3^{n+1} - 1 = 3.3^n - 1 = 3(3^n - 1) + 2 = 3s_n + 2.$$

Contudo essa solução não é única. De fato a sequência constante $r_n = -1$ também é uma solução da equação em questão. De modo geral, qualquer sequência da forma $a.3^n - 1$, com $a \in \mathbb{R}$, é uma solução dessa equação.

O exemplo acima serve para ilustrar que uma equação de recorrência pode ter infinitas soluções. Em uma equação de ordem k como (3.4), se tivermos os valores de x para k tempos consecutivos, então a solução da equação será única. Problemas como estes são chamados de *problema de valores iniciais* (abreviadamente denotado por PVI).

Exemplo 3.8. Considere o PVI

$$\begin{cases} x_{n+1} = 3x_n + 2 \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Este problema tem solução única dada por $s_n = 5.3^n - 1$.

É possível demonstrar por indução que todo PVI associado a equação (3.4) possui solução única. Contudo, resolver essa equação e exibir a solução explicitamente nem sempre será possível. No Capítulo 3 iremos tratar de tipos de equações de recorrência em que é possível se resolver.

Aqui está uma grande vantagem de se trabalhar com sistemas dinâmicos discretos: mesmo que não se consiga explicitar a solução de um PVI, podemos fazer seu estudo de modo qualitativo no sentido em que investigaremos como as soluções se comportam conforme o tempo passa.

3.2 Tipos Especiais de Solução

Vamos apresentar alguns tipos de soluções de equações de recorrência do tipo (3.3), ou (3.4).

Definição 6. *Uma solução s_n é constante se é da forma $s_n = p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde p é uma constante real. Neste caso, dizemos que p é um ponto fixo ou ponto de equilíbrio da equação.*

Para se determinar um ponto fixo associado a um sistema, devemos substituir todos os termos $x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}$ por p na equação de recorrência e resolver a equação obtida.

Para exemplificar, vamos encontrar os pontos fixos da equação de recorrência

$$x_{n+2} = 8x_{n+1} - x_n^2 - 10.$$

Pondo $x_{n+2} = x_{n+1} = x_n = p$, obtemos a equação $p = 8p - p^2 - 10$, ou equivalentemente, $p^2 - 7p + 10 = 0$, cujas soluções são $p = 2$ e $p = 5$.

Definição 7. *Uma solução s_n da equação de recorrência é dita periódica se existe um número inteiro positivo k, tal que $s_{n+k} = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O menor dos números k com essa propriedade é chamado de período. Uma solução periódica de período k também é chamada de k-ciclo.*

Vale observar que $k = 1$ se reduz ao caso anterior, isto é, 1-ciclo são soluções constantes. Já 2-ciclos são soluções da forma $(p, q, p, q, p, q, \dots)$ e para determinar os valores p e q, devemos resolver um sistema formado por duas equações, que se obtém após fazer as substituições

$$x_n = p, x_{n+1} = q, x_{n+2} = p, x_{n+3} = q, \dots, \quad \text{com } n \text{ par},$$

$$x_n = q, x_{n+1} = p, x_{n+2} = q, x_{n+3} = p, \dots, \quad \text{com } n \text{ ímpar}.$$

Como exemplo, vamos verificar se existem 2-ciclos associados à equação de recorrência

$$3x_{n+1} + 2x_n^2 - 9x_n - 8 = 0. \tag{3.5}$$

Tomando $x_n = p$ e $x_{n+1} = q$ para n par, $x_n = q$ e $x_{n+1} = p$ para n ímpar, chegamos ao sistema não linear

$$\begin{cases} 3q + 2p^2 - 9p = 8 \\ 3p + 2q^2 - 9q = 8. \end{cases}$$

Isolando a variável q na primeira equação, temos que $q = (8 + 9p - 2p^2)/3$. Substituindo essa expressão na segunda equação e desenvolvendo os cálculos, surge a equação polinomial:

$$p^4 - 9p^3 + 19p^2 + 9p - 20 = 0.$$

É importante observar que os pontos fixos de (3.5) também satisfazem essa última equação, além da equação

$$3p + 2p^2 - 9p - 8 = 0 \Rightarrow 2p^2 - 6p - 8 = 0,$$

cujas soluções são $p = -1$ e $p = 4$. Dividindo o polinômio de grau 4 por $(p + 1)(p - 4) = p^2 - 3p - 4$, resulta em $p^2 - 6p + 5$, que possui raízes $p = 1$ e $p = 5$. Como $q = (8 + 9p - 2p^2)/3$, os pares p e q são

p	q
-1	-1
4	4
1	5
5	1

Tabela 3.2: Raízes da equação 3.5.

Temos que -1 e 4 são pontos fixos do sistema que não são considerados 2-ciclos. Já as duas últimas linhas da Tabela 3.2 representam o mesmo 2-ciclo.

Esse modo de obter ciclos pode ser generalizado para qualquer k-ciclos. Na seção 3.7 iremos apresentar um outro modo de obter k-ciclos para equações de recorrência de primeira ordem.

Definição 8. *Uma solução s_n é crescente se dados $n_1 < n_2$, vale que $s_{n_1} \leq s_{n_2}$. Uma solução s_n é decrescente se dados $n_1 < n_2$, vale que $s_{n_1} \geq s_{n_2}$. Se as desigualdades anteriores são estritas, dizemos que as soluções são, respectivamente, estritamente crescente e estritamente decrescente. Qualquer um desses casos será chamado de solução monótona.*

Exemplo 3.9. Temos que todas as soluções da equação

$$x_{n+1} = x_n + 1$$

são estritamente crescente, visto que seu valor aumenta uma unidade a cada iteração.

Definição 9. *Uma solução s_n é oscilante se dado qualquer número natural n, existem números naturais n_1 e n_2 maiores do que n, tais que $s_n \leq s_{n_1}$ e $s_n \geq s_{n_2}$.*

Exemplo 3.10. Todo 2-ciclos é oscilante. Além disso, $s_n = 3(-\frac{1}{2})^n$ é solução da equação

$$s_{n_1} = -\frac{x_n}{2}.$$

Definição 10. *Uma solução s_n é limitada se existe $M > 0$ tal que $|s_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 3.11. Qualquer solução da equação

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

é limitada, visto que se s_n é uma solução dessa equação, então vale $|s_n| = |\cos(x_{n-1})| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definição 11. *Uma solução s_n é convergente a um ponto p se dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - p| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$. Neste caso, denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = p$.*

Exemplo 3.12. A solução $s_n = 3\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ da equação

$$x_{n+1} = -\frac{x_n}{2}$$

é convergente, sendo seu limite igual a 0. Conforme a definição acima, dado $\varepsilon > 0$, devemos obter n_0 de tal modo que $n \geq n_0$ implique em $|s_n - 0| < \varepsilon$. Começamos por observar que sempre existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n_0} > \dfrac{3}{\varepsilon}$. Desse modo, para $n > n_0$, temos que $2^n > 2^{n_0}$ e portanto

$$|s_n| = \frac{3}{2^n} < \frac{3}{2^{n_0}} < \varepsilon.$$

Teorema 3.1. *Toda solução monótona e limitada é convergente.*

Demonstração. Vamos considerar o caso em que a solução s_n é crescente, sendo os demais casos tratados de modo análogo. Sendo a sequência s_n limitada, ela possui supremo, que iremos denotar por S. Afirmamos que s_n converge para S quando n cresce. De fato, dado $\varepsilon > 0$, temos que $S - \varepsilon$ não pode ser cota superior do conjunto $\{s_n : n \in \mathbb{N}\}$, pois do contrário seria menor que S, que é a menor das cotas superiores desse conjunto. Assim, deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que $S - \varepsilon < a_{n_0} < S$. Como a sequência s_n é crescente, $a_{n_0} \leq a_n$ para todo $n > n_0$, de modo que vale

$$n > n_0 \Rightarrow S - \varepsilon < a_n < S + \varepsilon,$$

concluindo a demonstração.

3.3 Equações de Recorrência de Primeira Ordem

Vamos agora considerar sistemas dinâmicos que são obtidos por meio de uma equação de recorrência de primeira ordem. A ideia é obter os termos da sequência a partir da anterior, iterando-se uma determinada função em cada passagem de tempo. Tais equações são também chamadas de equações de recorrência.

Exemplo 3.13. Para descrever situações como esta, considere a função dada por $f(x) = -x^3$. Tendo x_0 como ponto de partida, temos que os termos da sequência são obtidos pela iteração de f, obtendo

$$
\begin{aligned}
x_1 &= f(x_0) = -x_0^3 \\
x_2 &= f(x_1) = -(-x_0^3)^3 = x_0^9 \\
x_3 &= f(x_2) = -(x_0^9)^3 = -x_0^{27} \\
x_4 &= f(x_3) = -(-x_0^{27})^3 = x_0^{81} \\
&\vdots \\
x_n &= f(x_{n-1}) = (-1)^n x_0^{3^n}
\end{aligned}
$$

A validade da fórmula $x_n = f(x_{n-1}) = f^n(x_0) = (-1)^n x_0^{3^n}$ pode ser demonstrada por indução matemática.

Em geral, equações do tipo $x_{n+1} = f(x_n)$ geram expressões $x_n = f^n(x_0)$. Surgem então algumas perguntas que queremos responder perguntas como: "Dado um real x_0 qual é $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$?" ou com maior generalidade "Quais propriedades tem a sequência $x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), f^4(x_0), ..., f^n(x_0)$?"

Vale lembrar que a notação $f^n(x_0)$ representa a *n-ésima* iteração de x_0 em f e não a *n-ésima* potência de f, ou a *n-ésima* derivada de f. Podemos chamar o comportamento dos pontos desta função em suas iterações de dinâmica da função.

Ao termo $f(x_0)$, chamamos primeira iterada de x_0 em f; ao termo $f^2(x_0)$, chamamos segunda iterada de x_0 em f; generalizando, termo $f^n(x_0)$, chamamos *n-ésima* iterada de x_0 em f. O conjunto formado pelas iterações positivas de x_0 em f é chamado de órbita de x_0, e será denotado por $\mathcal{O}(x_0)$. Este processo de iterações é um exemplo de Sistema Dinâmico Discreto que ocorre com muita frequência em aplicações.

Em Holmgren (1994) encontramos o seguinte exemplo, suponhamos que todos nós vivêssemos sobre a reta dos reais, e que o endereço de cada um fosse o ponto no qual estamos sobre a reta. Por exemplo, um apartamento sobre o número 2. O governo promulga uma lei que dispõe que a cada ano todos os moradores da reta devem se mudar, e o novo endereço será fornecido quando elevamos nosso endereço atual ao cubo e tomamos seu inverso aditivo, ou seja, pela aplicação da função $f(x) = -x^3$ ao número da casa onde residimos atualmente. No caso do exemplo, moramos na casa 2, logo nos mudaremos para $f(2) = -2^3 = -8$. No próximo ano será $f(-8) = -(-8)^3 = 512$ e após n anos será no endereço $f^n(2) = (-1)^n 2^{3^n}$. Não importa quanto tempo passe nunca voltaremos ao mesmo endereço novamente. Mas e se o endereço inicial fosse outro? Iniciemos então de $x_0 = \frac{1}{2}$. Após o primeiro ano mudaríamos para $f(1/2) = -(1/2)^3 = -1/8$. E após n anos teríamos $f^n(1/2) = (-1)^n/2^{3^n}$.

Há no entanto três pontos que têm propriedades mais notáveis que o geral $x = \pm 1$ e $x = 0$. Como $f(1) = -1$ e $f(-1) = 1$, então se $x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$ a cada ano trocaremos de lugar com nosso oposto aditivo, e não importa quanto tempo passe sempre voltaremos à nossa casa original a cada dois anos. Finalmente quando $x_0 = 0$ nunca nos mudaremos já que $f(x_0) = x_0$ e ficaremos sempre na casa de número 0.

Podemos notar que a dinâmica desta função se altera de acordo com o ponto escolhido inicialmente. Se $x_0 > 1$ em valor absoluto, então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = \infty$. Ou seja, o valor de f^n irá alternar de um lado para outro do ponto 0 na reta e seu valor absoluto irá crescer conforme n aumentar.

Já quando $-1 < x_0 < 1$, então $\lim_{n\to\infty} f^n(x_0) = 0$. Ou seja, f^n alterna os lados de 0 na reta e se aproxima cada vez mais de 0 de acordo com que n aumenta, se $x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$ f irá alternar sempre em dois pontos, a saber -1 e 1. E por fim um ponto que não se altera em $x_0 = 0$.

De tal maneira podemos verificar neste exemplo um tanto peculiar que iterando a função dada podemos encontrar nosso novo endereço em qualquer que seja o ano desejado. Funções e suas iteradas podem ser usadas da mesma maneira para problemas mais práticos e relevantes.

Definição 12. *Dada uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, consideramos a equação de recorrência autônoma de primeira ordem:*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{3.6}$$

Essa equação é também chamada de equação de recorrência de primeira ordem.

De acordo com as definições da seção 3.2, os pontos de equilíbrio p da equação (3.6) são pontos fixos da função f, ou seja, $f(p) = p$.

Podemos representar graficamente a evolução do sistema desenhando um ponto para cada passo na sequência, como abcissa igual à n e ordenada x_n. Usando um Sistema Computacional Algébrico (CAS), torna-se uma tarefa muito simples desenhar esse diagrama. O exemplo a seguir apresenta esse procedimento.

Exemplo 3.14. Para o PVI

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos(x_n) \\ x_0 = 1, \end{cases}$$

iremos usar o CAS chamado Maxima que permite determinar sua evolução. Neste caso, a função de iteração é $f(x) = \cos(x)$, com valor inicial $x_0 = 1$. O Maxima possui um comando específico para este caso, o *evolution*. Para usá-lo, basta digitarmos na linha de comando

$$evolution(f(x), x_0, n);$$

sendo $f(x)$ a função que iremos iterar, x_0 o ponto inicial da iteração e n o número de iterações. Para $n = 50$ iterações temos o seguinte gráfico:

```
(%i1)  evolution(cos(x), 1, 50);
```

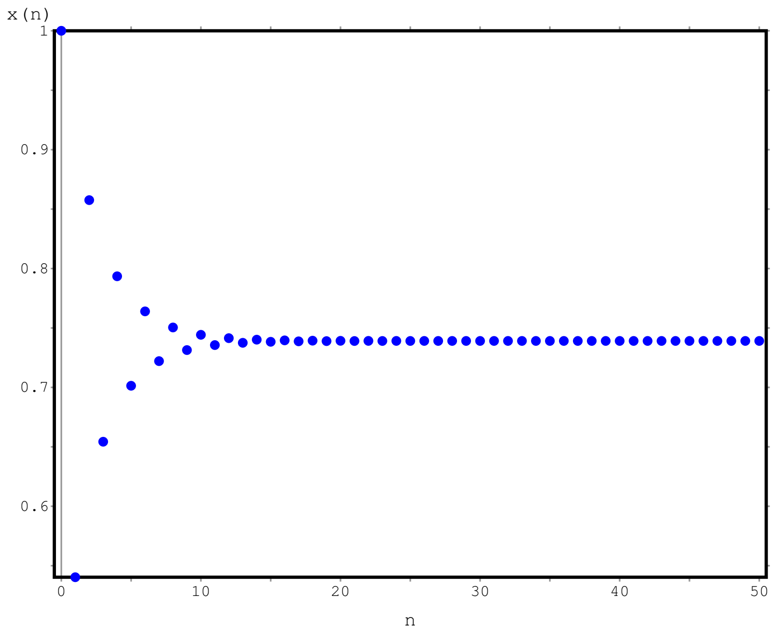


Figura 3.1: Gráfico da evolução de $x_{n+1} = \cos(x_n)$, $x_0 = 1$ e $n = 50$

Para $n = 100$ iterações, temos:

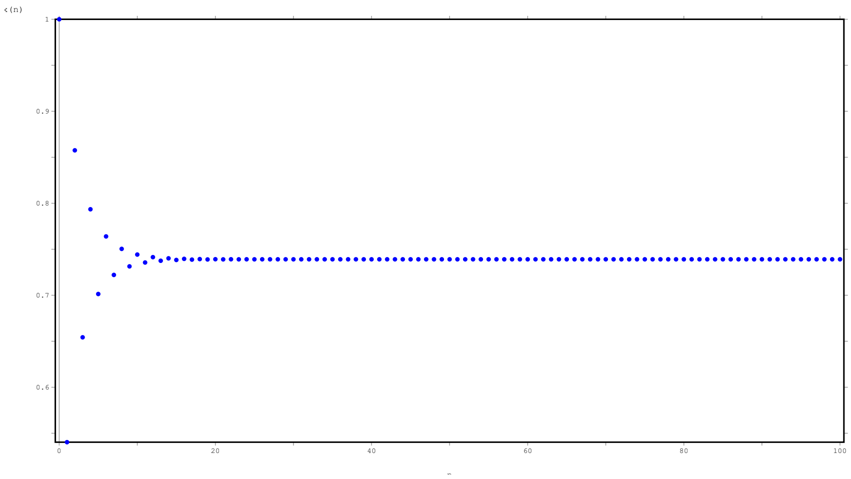


Figura 3.2: Gráfico da evolução de $x_{n+1} = \cos(x_n)$, $x_0 = 1$ e $n = 100$

Eles gráficos sugerem que a sequência x_n tem limite quando n cresce. Mas pelo gráfico não podemos ver precisamente qual o valor desse limite, apenas que ele está entre $0,7$ e $0,8$. Com o auxílio do Maxima, através do comando exibido a seguir, obtemos as seguintes aproximações para os 20 primeiros termos da sequência x_n, de acordo com a Tabela 3.3:

```
(%i1)  x: 1$
(%i2)  for i thru 10 do (x: float(cos(x)), print(x))$
```

Valores das iterações	
x1=0.5403023058681398	x2=0.8575532158463934
x3=0.6542897904977791	x4=0.7934803587425656
x5=0.7013687736227565	x6=0.7639596829006542
x7=0.7221024250267077	x8=0.7504177617637605
x9=0.7314040424225098	x10=0.7442373549005569
x11=0.7356047404363474	x12=0.7414250866101092
x13=0.7375068905132428	x14=0.7401473355678757
x15=0.7383692041223232	x16=0.7395672022122561
x17=0.7387603198742113	x18=0.7393038923969059
x19=0.7389377567153444	x20=0.7391843997714936

Tabela 3.3: Iterações da função $x_{n+1} = \cos(x_n)$

Assim, temos que o valor limite da sequência x_n é aproximadamente $0,739$. Vale observar que esse limite é um ponto fixo de $f(x) = \cos(x)$, ou seja, esse limite p satisfaz a equação $\cos(p) = p$.

Do ponto de vista gráfico, os pontos fixos de uma função f são todos os pontos onde a curva $y = f(x)$ intersectam a reta $y = x$. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 3.15. A equação de recorrência

$$x_{n+1} = x_n^3$$

possui três pontos fixos, como mostra a figura a seguir.

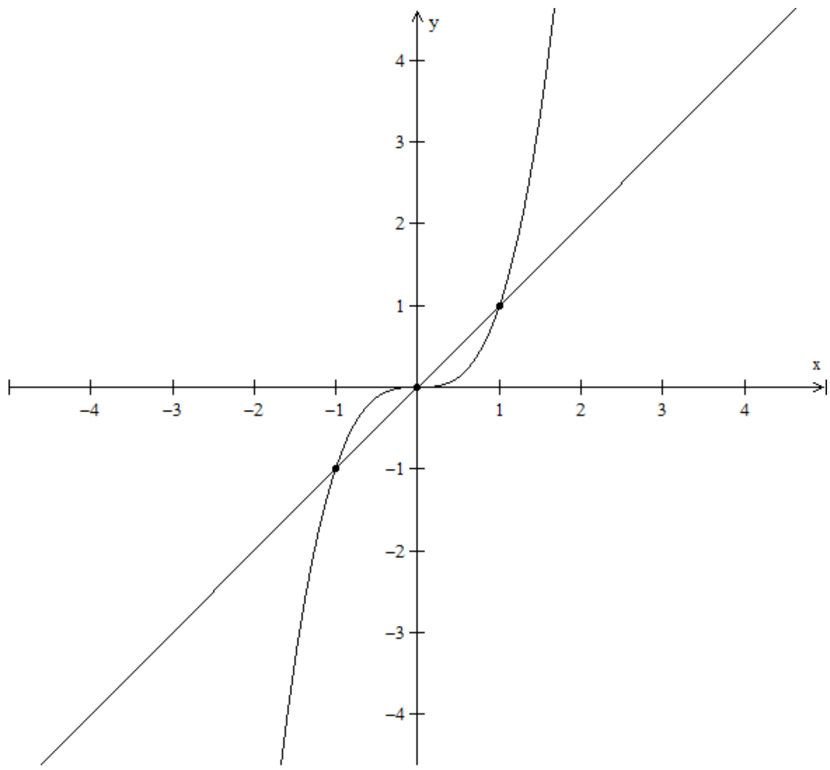


Figura 3.3: Gráfico de $f(x) = x^3$ e $f(x) = x$.

De modo analítico, para encontrar os pontos fixos em destaque na Figura 3.3, devemos resolver a equação $f(p) = p$, onde $f(x) = x^3$, ou seja, $p^3 = p$. Assim, $p = -1$, $p = 0$ e $p = 1$ são pontos de equilíbrio da equação de recorrência em questão.

Exemplo 3.16. Outro exemplo é a equação $f(x) = x^2 - x + 1$. Resolvendo a equação para $f(p) = p$ encontramos $p = p^2 - p + 1$ e concluímos que esta equação possui apenas um ponto fixo em $p = 1$, como mostra a Figura 3.4.

Definição 13. *Uma solução s_n da equação (3.6) é dita eventualmente de equilíbrio se não é constante e existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n = s_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. Isso significa que s_n atinge um ponto de equilíbrio após um número finito de iterações, de modo que, em tempos finitos, passa de um estado de não equilíbrio para um estado de equilíbrio. Esse*

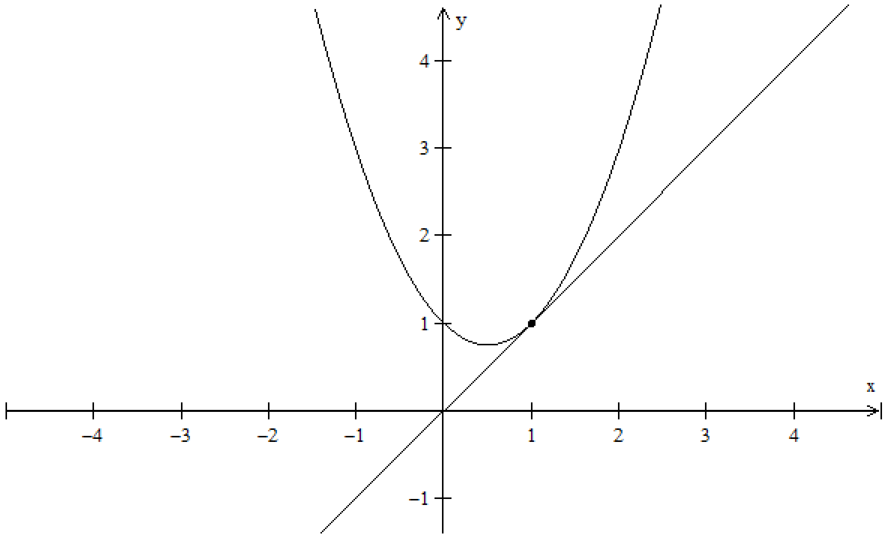


Figura 3.4: Gráfico de $f(x) = x^2 - x + 1$ e $f(x) = x$.

ponto de equilíbrio é chamado de ponto eventualmente fixo ou ponto eventualmente de equilíbrio.

Exemplo 3.17. Para ilustrar o conceito da definição anterior, considere a equação $x_{n+1} = T(x_n)$ onde

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{se} \quad \dfrac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

Neste caso há dois pontos fixos, 0 e 2/3. Se $x_0 = 1/6$, como podemos ver na Figura 3.5, então $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$. Assim $x_0 = 1/6$ é um ponto eventualmente fixo, pois 2/3 é um ponto fixo. Se $x_0 = 1/4$, então $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, e assim $x_0 = 1/4$ é um ponto eventualmente fixo da mesma maneira. A Figura 3.5 mostra o gráfico desta equação, com os pontos fixos 0 e 2/3.

3.4 Diagramas de Teia de Aranha (Cobweb)

Discutir a estabilidade de um sistema a partir das definições acima pode se mostrar uma tarefa impossível em muitos caso. Isto ocorre pois pode não ser possível encontrar uma solução exata para uma equação que a primeira vista parece ser bastante simples como a (3.6). Na maioria dos casos pode ser utilizada uma ferramenta gráfica que pode auxiliar nesta tarefa, a chamada *teia de aranha*. Descreveremos agora o método de criação de uma destas teias.

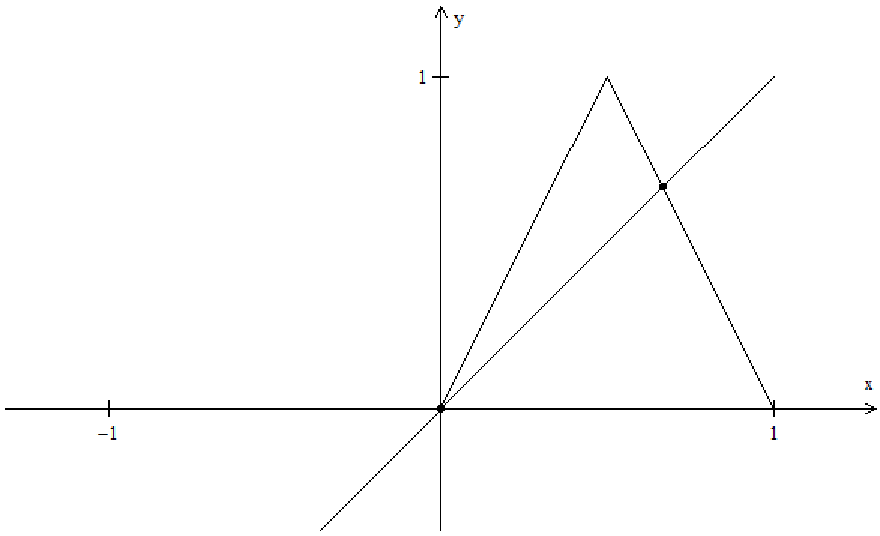


Figura 3.5: Gráfico de $x_{n+1} = T(x_n)$.

Primeiramente desenhe o gráfico de uma função a ser estudada e da reta $y = x$. Tomamos nosso ponto inicial x_0 e a partir dele traçamos um segmento que encontra o gráfico de f no ponto (x_0, x_1). A seguir trace um segmento horizontal até a reta $y = x$ no ponto (x_1, x_1). A partir de (x_1, x_1) trace outro segmento vertical até a curva de f, no ponto (x_1, x_2). Repita o processo e poderemos encontrar todos os pontos x_n para $n > 0$. A Figura 3.6 a seguir ilustra esse procedimento.

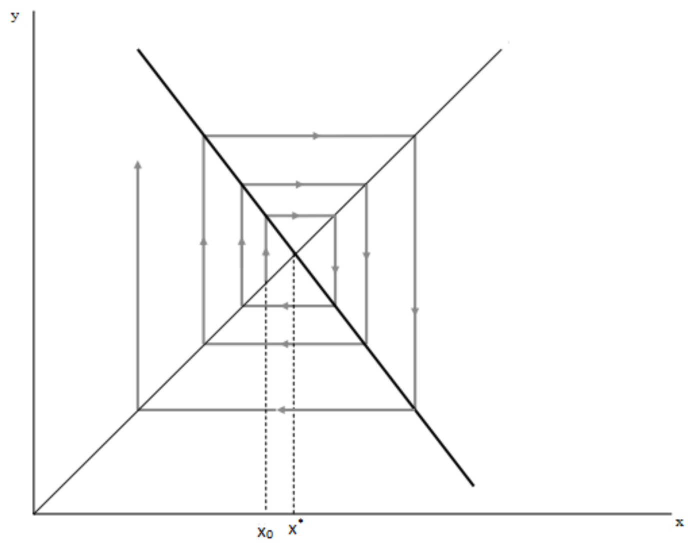


Figura 3.6: Teia de Aranha em uma equação $x_{n+1} = f(x_n)$

No Maxima, existe o comando *staircase* que gera gráficos teia de aranha, e sua sintaxe básica é

$$staircase(f(x), x_0, n);$$

sendo x_0 o ponto inicial n o número de iterações da função f. Certamente existem várias outras opções computacionais como Matlab, Maple, Geogebra, entre outros programas, que nos permitem implementar essas rotinas, porém não é esse nosso foco, sendo que o leitor poderá fazer uso do que lhe estiver ao alcance, bastando estudar seus comandos. Nosso objetivo é apenas destacar que existem ferramentas que nos auxiliam no estudo de equações de recorrências.

Exemplo 3.18. Vamos descrever o diagrama de teia de aranha para o PVI

$$\begin{cases} x_{n+1} = \cos(x_n) \\ x_0 = 1, \end{cases}$$

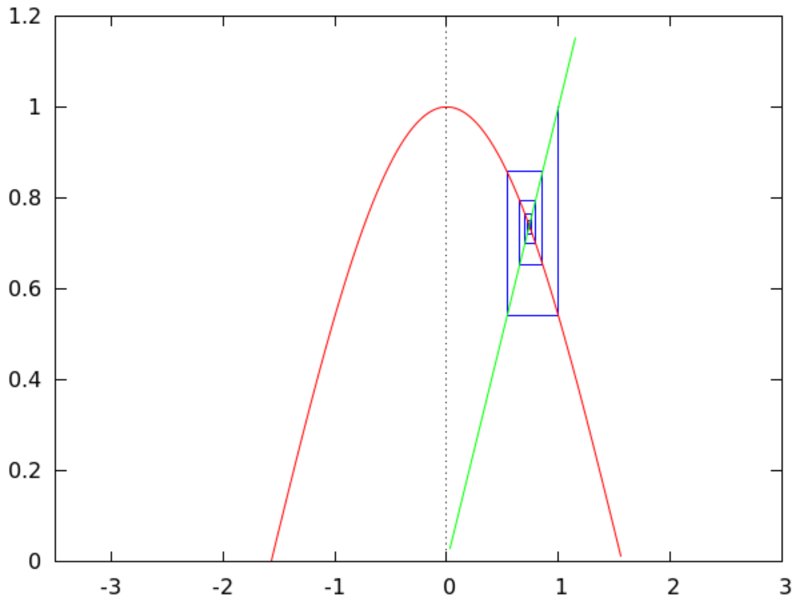


Figura 3.7: Teia de Aranha na equação $x_{n+1} = \cos(x_n)$, com $x_0 = 1$

Na Figura 3.7 vemos que o a solução deste PVI converge para um ponto que é o ponto de equilíbrio do sistema. Vamos considerar um outro exemplo que possui um comportamento diferente deste caso.

Exemplo 3.19. Seja o PVI

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{x_n^3} \\ x_0 = 1.1, \end{cases}$$

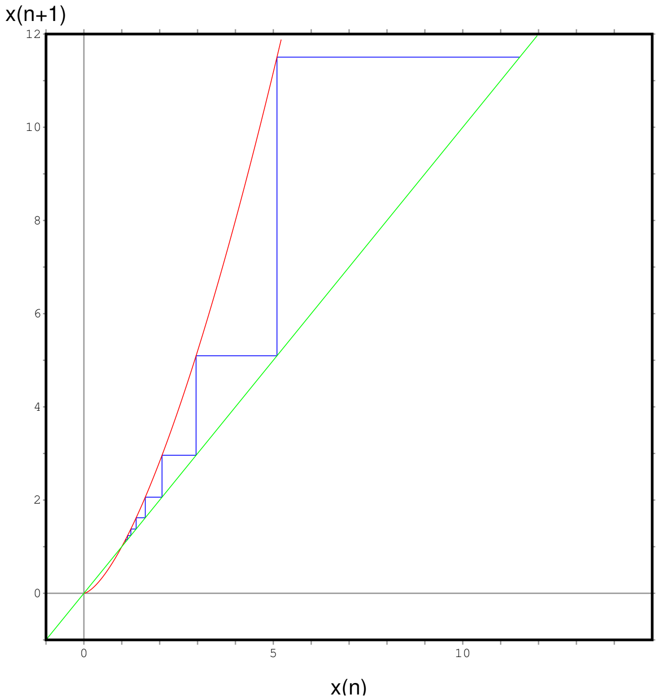


Figura 3.8: Gráfico teia de aranha com valor inicial $x_0 = 1.1$ e $n = 8$ iterações

Vemos na Figura 3.8, que neste caso, a solução se afasta do ponto de equilíbrio $p = 1$. Na próxima seção iremos apresentar uma breve classificação sobre pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico discreto, bem como critérios que permitem distingui-los.

3.5 Estabilidade Assintótica de Pontos Fixos

Um dos principais objetivos do estudo da dinâmica dos sistemas é o comportamento de suas soluções próximo aos seus pontos de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico representa um estado fixo do sistema.

Para ilustrar esse importante conceito de estabilidade, podemos tomar como modelo um pêndulo, onde nem todos os estados de equilíbrio têm a mesma natureza (Veja a figura 3.9). Se o pêndulo estiver na posição de repouso na parte superior e houver uma pequena perturbação, o pêndulo muda de sua posição de equilíbrio e nunca vai retornar a ela. Essa forma de equilíbrio é o que entendemos por equilíbrio instável, típico dos pontos de equilíbrio repulsivo.

Caso o pêndulo esteja em posição de repouso na parte inferior e o pêndulo sofrer um pequeno distúrbio, ele irá retornar ao seu estado de equilíbrio. Este equilíbrio é conhecido como equilíbrio assintoticamente estável e é o tipo de equilíbrio que apresentam pontos de equilíbrio atrativos.

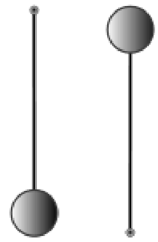


Figura 3.9: Estados de repouso

Pela Figura 3.9, se o pêndulo estiver na mesma posição, mas o pêndulo está sujeito ao atrito, aparece uma forma intermediária de equilíbrio. Após um pequeno distúrbio, o pêndulo permanece oscilando indefinidamente em torno da posição de equilíbrio, sem se afastar e sem retornar ela. Esse equilíbrio é estável, mas não assintoticamente estável.

Uma questão importante é se essas pequenas mudanças irão influenciar o comportamento da solução a longo prazo. Em suma, se para grandes valores de n o efeito é dissipado, o sistema é estável. Pelo contrário, se pequenas mudanças levam a diferenças significativas no comportamento das soluções, o sistema é instável. O estudo do comportamento das soluções de um sistema dinâmico próximo de um ponto de equilíbrio é chamado de teoria da estabilidade e precisa das definições formais dos diferentes conceitos de equilíbrio. Para tal, enunciamos agora algumas definições referentes à estabilidade.

Definição 14 (Estabilidade)**.**

1. *Um ponto de equilíbrio p de (3.6) é dito* ***estável*** *se as órbitas dos pontos que estão próximos de p se mantém próximo de p. Mais precisamente, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|x_0 - p| < \delta$ implica em $|f^n(x_0) - p| < \varepsilon$ para todo $n > 0$. Caso p não seja estável ele será dito* ***instável***

2. *O ponto de equilíbrio p é chamado de* ***atrator*** *se existe $\eta > 0$ tal que*

$$|x_0 - p| < \eta \text{ implica } \lim_{n\to\infty} x_n = p$$

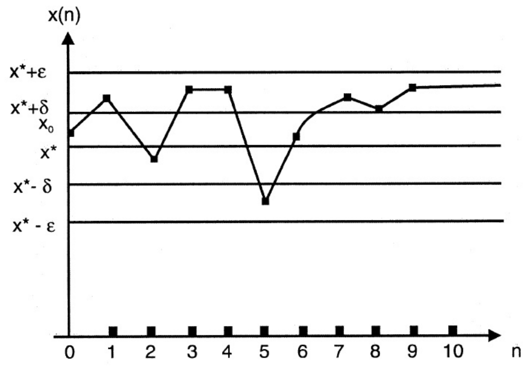
Isso significa que se x_0 é um ponto suficientemente próximo de p, então a solução de (3.6) com valor inicial x_0 converge para p. Se x_0 é qualquer número real (isto é, $\eta = +\infty$), então p é chamado atrator global.

3. *O ponto p é chamado de ponto fixo assintoticamente estável se for estável e atrator. Para $\eta = \infty$, p é chamado globalmente assintoticamente estável.*

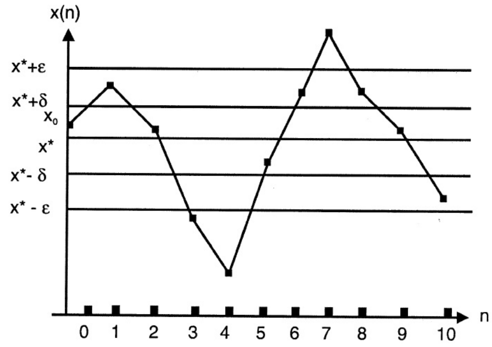
4. *Um ponto de equilíbrio p é chamado de ponto de equilíbrio repulsivo se a órbita dos pontos próximos do ponto de equilíbrio se afastar dele. Formalmente, p é repulsivo se existe um certo $\eta > 0$ de tal forma que a iterada de qualquer um dos pontos que está a uma distância menor que η do ponto de equilíbrio fica mais afastada do ponto de equilíbrio, ou seja,*

$$0 < |x_0 - p| < \eta \Rightarrow |f(x_0) - p| > |x_0 - p|.$$

A Figura 3.10 trás dois exemplos: um sistema estável e um sistema instável.



(a) Exemplo de sistema estável.



(b) Exemplo de sistema instável.

Figura 3.10: Estabiliadade

Teorema 3.2. *Seja p um ponto fixo da equação de recorrência*

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{3.7}$$

onde f é continuamente diferenciável em p. Assim valem as seguintes afirmações:

1. *Se $|f'(p)| < 1$, então p é assintoticamente estável.*

2. *Se $|f'(p)| > 1$, então p é instável.*

Demonstração. 1. Suponha que $|f'(p)| < M < 1$. Então existe um intervalo $J = (p - \gamma, p + \gamma)$ contendo p tal que $|f'(x)| \leq M < 1$ para todo $x \in J$. Pois se não houvesse, para cada intervalo aberto $I_n = (p - \frac{1}{n}, p + \frac{1}{n})$ (para n muito grande) haveria um ponto $x_n \in I_n$ tal que $|f'(x)| > M$. Quando fizermos $n \to \infty$, $x_n \to p$. Como f' é uma função contínua, temos

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(p).$$

Consequentemente,

$$M \leq \lim_{n\to\infty} |f'(x_n)| = |f'(p)| < M,$$

o que é uma contradição e prova nossa afirmação. Para cada $x_0 \in J$, temos

$$|x_1 - p| = |f(x_0) - f(p)|.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe ξ entre x_0 e p tal que

$$|f(x_0) - f(p)| = |f'(\xi)||x_0 - p|.$$

Assim,

$$|f(x_0) - p| \leq M|x_0 - p|.$$

Portanto,

$$|x_1 - p| \leq M|x_0 - p| \tag{3.8}$$

Como $M < 1$, a inequação (3.8) nos mostra que x_1 é mais próximo de p que x_0. Consequentemente, $x_1 \in J$. É fácil ver que refazendo estes passos, por indução matemática mostraremos que

$$|x_n - x_0| \leq M^n|x_0 - p|.$$

Para $\epsilon > 0$, tomamos $\delta = \epsilon/2M$. Assim $|x_0 - p| < \delta$ implica em $|x_n - p| < \epsilon$ para todo $n > 0$. Isto conclui nossa afirmação de estabilidade. Além disso, $\lim_{n\to\infty} x_n - p = 0$, o que nos leva a $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, concluindo assim a estabilidade assintótica.

□

Teorema 3.3. *Suponha a existência de um ponto fixo p da equação (3.7), e tenhamos $f'(p) = 1$. Valem então as seguintes afirmações:*

1. *Se $f''(p) \neq 0$, então p é instável;*

2. *Se $f''(p) = 0$ e $f'''(p) > 0$, então p é instável;*

3. *Se $f''(p) = 0$ e $f'''(p) < 0$, então p é estável assintoticamente.*

Demonstração. 1. Se $f''(p) \neq 0$, então a curva $y = f(x)$ tem a concavidade virada para baixo se $f''(p) < 0$ ou a concavidade virada para cima se $f''(p) > 0$, como mostram as figuras abaixo. Se $f''(p) > 0$, então $f'(x) > 1$ para todo x num pequeno intervalo $I = (p, p + \epsilon)$. Agora, usando o mesmo método de prova do teorema (3.7), é fácil mostrar que p é instável. Por outro lado, se $f''(p) < 0$, então $f'(x) > 1$ para todo x num pequeno intervalo $I = (p - \epsilon, p)$. Então p é instável novamente, ficando p instável quando $f''(p) \neq 0$.

□

Veja na figura 3.11 a seguir, alguns gráficos para exemplificar os casos analisados pelo teorema (3.3).

As provas dos itens (2) e (2 e 3), dos teoremas (3.2) e (3.3) respectivamente, ficam a cargo do leitor como exercício.

3.6 O Método de Newton-Raphson

Um dos mais famosos métodos numéricos para a obtenção de uma raiz de uma função $g(x)$ é o método de Newton-Raphson, onde $g(x)$ é continuamente diferenciável, ou seja, sua derivada existe e é contínua.

A equação do método de Newton para encontrar uma raíz r de $g(x)$ é dada por

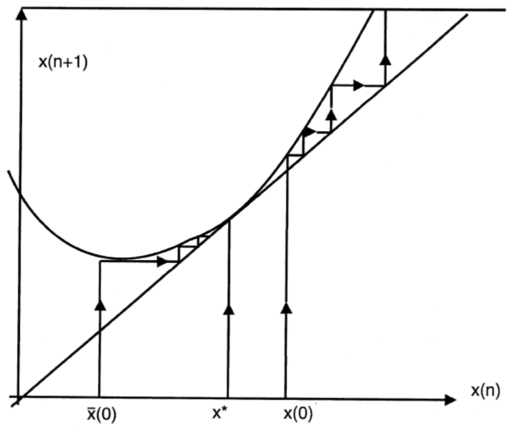
$$x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)} \tag{3.9}$$

onde x_0 é uma primeira aproximação da raiz r de $g(x)$, usualmente obtida através do Teorema do Valor Intermediário. Temos assim a equação 3.9 que é uma equação de recorrência em que $f(x) = x - g(x)/g'(x)$.

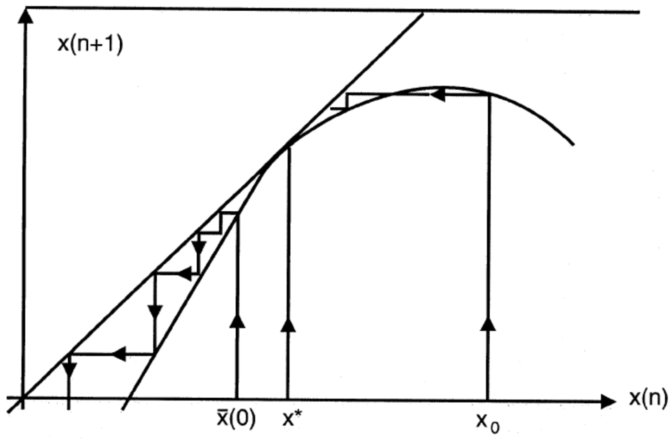
Podemos notar que o valor r, raíz de $g(x)$, é também um ponto fixo de (3.7). Para determinar se o algoritimo de Newton nos fornece uma sequência $\{x_n\}$ que converge para r, basta aplicarmos o teorema anterior (3.2):

$$|f'(r)| = \left| 1 - \frac{[g'(r)]^2 - g(r)g''(r)}{[g'(r)]^2} \right| = 0,$$

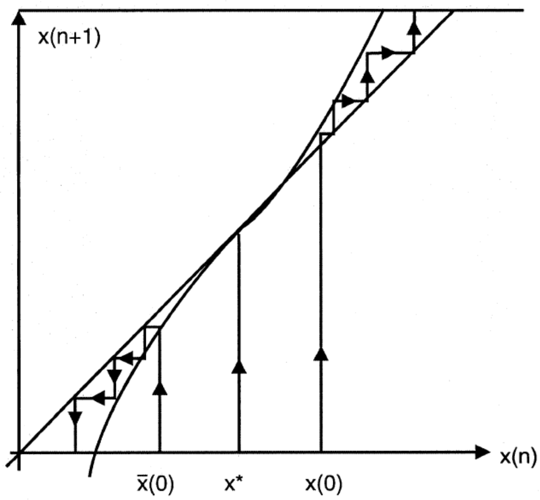
desde que $g(r) = 0$. Pelo Teorema (3.2), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$ se x_0 estiver próximo o suficiente de r e $g'(x) \neq 0$.



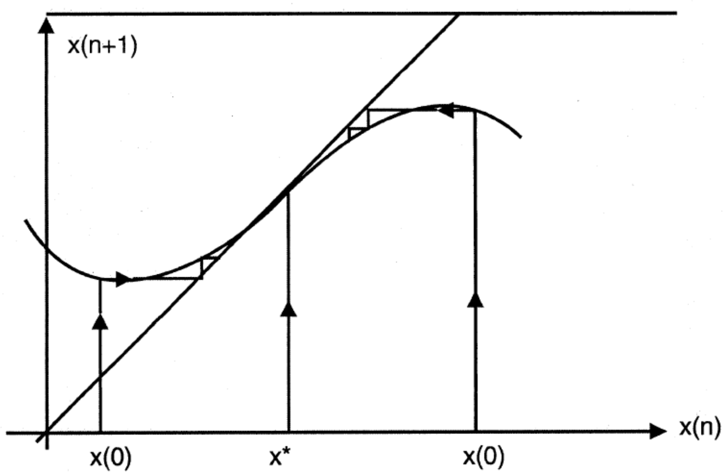
(a) Instável. $f''(x^*) > 0$ (semiestável pela esquerda).



(b) Instável. $f''(x^*) < 0$ (semiestável pela direita).



(c) Instável. $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) = 1$, $f'''(x^*) > 0$.



(d) Ass. Estável. $f'(x^*) = 0$, $f''(x^*) = 1$, e $f'''(x^*) < 0$.

Figura 3.11: Estabilidade pelo teste do Teorema 3.3.

3.7 Pontos Periódicos e Ciclos

Voltando agora ao exemplo da seção 2.3, à equação $f(x) = -x^3$, temos que 0 é um ponto fixo, pois se fizermos $f(0)$, obtemos $f(0) = -0^3 = 0$. Há, no entanto, mais dois pontos que nos chamam a atenção, $x = -1$ e $x = 1$. Em ambos os casos ao tomarmos, por exemplo, $x_0 = 1$, obtemos $f(1) = -1$, $f^2(1) = 1$. Ou seja, após duas iterações da função f no ponto $x_0 = 1$, o mesmo retorna a ser 1. Para estes casos temos a seguinte definição.

Definição 15 (Ponto Periódico). *1. O ponto x é um* **`ponto periódico`** *de f com período k se $f^k(x) = x$. Ou seja, x é um ponto periódico de f se x for um ponto fixo* *de f^k. Ainda, o ponto x possui um período principal k_0 se $f^{k_0}(x) = x$ e $f^n(x) \neq x$ para todo $0 < n < k_0$. Isto é, x possui um período principal se após exatamente k_0 iterações de f, x retorna para seu valor inicial. Em tempo, um ponto é chamado k-periódico se ele é um ponto fixo de f^k, em outras palavras se ele é um ponto fixo de*

$$x_{n+1} = g(x_n),$$

onde $g = f^k$.

A órbita periódica de x, $O(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{k-1}(x)\}$, é um k-ciclo.

2. x é chamado eventualmente periódico se para algum inteiro positivo m, $f^m(x)$ for um ponto k-periódico. em outras palavras, x é eventualmente k-periódico se

$$f^{m+k}(x) = f^m(x).$$

Exemplo 3.20. Voltando para o exemplo da equação de recorrência

$$3x_{n+1} + 2x_n^2 - 9x_n - 8 = 0,$$

temos que $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f(x) = (8+9x-2x^2)/3$. Os pontos 2-periódicos são pontos fixos de $f^2 = f \circ f$. Logo devemos resolver a equação $f^2(p) = p$, que após simplificações resulta em

$$8x^4 - 72x^3 + 152x^2 + 72x - 160 = 0.$$

As raízes dessa equação são -1, 1, 4 e 5. Como todo ponto fixo de f é também de f^2, devemos retirar desses valores os pontos fixos de f, que são -1 e 4. Portanto os 2-ciclos de f são os pontos 1 e 5.

Com esta exposição dos referenciais imprescindíveis para o estudo da dinâmica dos modelos apresentados podemos passar agora a analisá-los, de acordo com suas equações de recorrência e estudarmos seu comportamento.

Capítulo 4

Modelos Discretos

Neste Capítulo iremos apresentar processos que podem ser modelados com o uso de sistemas dinâmicos discretos. Munidos das ferramentas até agora apresentadas, podemos analisar prontamente as equações de recorrência modeladas nestes exemplos.

Exemplo 4.1 (Crescimento Populacional: Modelo de Malthus)**.** Voltando ao modelo de Malthus, descrito pela equação de recorrência $p_{n+1} = rp_n$, temos que essa equação é uma homogênea linear de primeira ordem. Pelo Teorema 2.1, sua solução é dada por $p_n = p_0 r^n$. Em relação à estabilidade, esse modelo possui apenas dois comportamentos, dependendo do parâmetro r. Se $r > 1$, então p_n é uma sequência crescente e que não possui nenhuma restrição de crescimento. Esse tipo de situação pode ser vista em colônias de bactérias. Agora supondo que $0 < r < 1$, temos que p_n é decrescente e independente do ponto inicial, a sequência converge para zero.

Exemplo 4.2 (População de insetos)**.** Apresentaremos agora o exemplo de Diniz (Diniz, 1995, p. 18), que descreve o crescimento de uma colônia de insetos conhecidos como pulgões. Ao tratar de insetos devemos ter em mente que estes podem possuir mais de um estágio de desenvolvimento desde o nascimento até atingir a maturidade e que um ciclo contendo todos estes estágios pode durar desde algumas semanas até anos.

Quando modelamos o crescimento de uma população de insetos, geralmente utilizamos um ciclo completo de vida ou geração como unidade de tempo. Há modelos que podem representar fielmente alguns dos estágios do ciclo através de equações de recorrência, seja num sistema ou mesmo com uma única equação. Mesmo que ele seja representado por um sistema de equações de recorrência, estes sistemas podem ser reduzidos a uma única equação ao combinarmos todos os parâmetros que compõe o modelo.

Consideremos a seguinte equação

$$x_{n+1} = qa_n, \tag{4.1}$$

onde a_n é o número de fêmeas na geração n, q é o número de novos indivíduos gerados por cada fêmea e x_{n+1} é o número total de indivíduos na geração $n+1$.

Se considerarmos que nem todos os indivíduos que nascem conseguem chegar à fase da maturidade, devido a diversos fatores como predadores, competição, dentre outros, seja então μ a fração dos indivíduos que não chega à maturidade e seja também r percentual de fêmeas por geração. Vejamos que, se μ é a fração dos indivíduos que não chega à maturidade, então os indivíduos que chegam à maturidade podem ser expressos por $1-\mu$, podemos assim reescrever a equação (4.1) da seguinte maneira:

$$a_{n+1} = r(1-\mu)x_{n+1}$$

Combinando esta equação à equação (4.1), obtemos:

$$a_{n+1} = qr(1-\mu)a_n, \tag{4.2}$$

Como consideramos q, r e μ constantes, podemos fazer $k = qr(1-\mu)$, e substituindo na equação 4.2, obtemos:

$$a_{n+1} = ka_n.$$

Essa equação é linear de primeira ordem. Conforme vimos na seção 3.1.2, a solução dessa equação é dada por

$$a_n = k^n a_0,$$

onde a_n é o número de fêmeas na geração n. Para obtermos a população total basta substituir este valor em $x_n = \dfrac{a_n}{r}$.

Para exemplificar, considere o seguinte PVI:

$$\begin{cases} a_n = k^n a_0 \\ a_0 = 100, \end{cases}$$

Tomaremos para este caso $r = 1/2$, $\mu = 75\%$ e $q = 32$. obtemos assim a seguinte equação

$$\begin{aligned} a_n &= 100.2^{2n} \\ a_n &= 25.4^{n+1} \end{aligned} \tag{4.3}$$

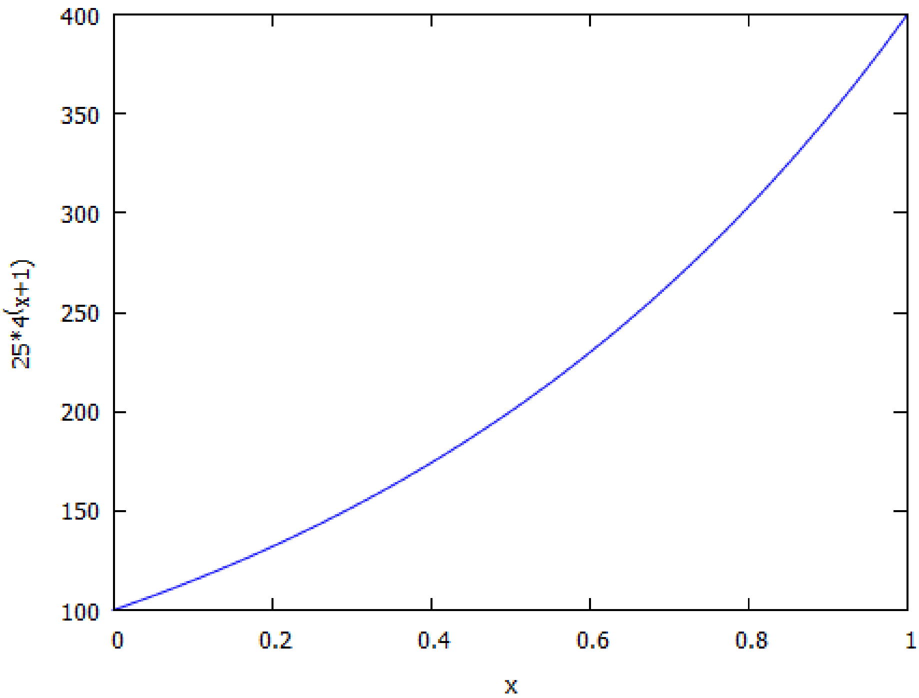


Figura 4.1: Variação da função 4.3.

Podemos notar pela equação (4.3) que, sem nenhuma alteração externa, esta colônia de pulgões crescerá indefinidamente com $a_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Não há, assim, pontos fixos e esta equação é dita instável. Como $x_n = 2a_n$, x_n também é instável.

Em muitas situações de modelagem de crescimento populacional surgem frequentemente equações não lineares. O modelo malthusiano é bastante simplista, embora permitir refletir com precisão a forma como uma população relativamente pequena cresce, diferentes características de crescimento geralmente se aplicam quando a população é grande. Isto se deve ao princípio de que quanto maior a população, menor será a sua taxa de crescimento. No começo, isso pode soar um pouco estranho, mas é um princípio ecológico comum. À medida que a população de uma espécie aumenta, os recursos necessários para a sobrevivência e o taxa de crescimento tendem a reduzir. Por exemplo, alimentos, água, espaço, etc., podem ser insuficientes para suportar uma população tão grande. E talvez para a espécie humana, também pode haver um aumento da poluição, do crime, da guerra, etc., que coloca a vida em perigo. Se a população atingir um tamanho suficientemente grande, sua própria sobrevivência pode ser ameaçada. Uma espécie que atingiu um grande crescimento pode sofrer um declínio posterior devido à superpopulação.

Os modelos lineares não consideram a dependência da densidade. Em vez disso, eles se baseiam no pressuposto de que as mesmas características de crescimento sempre se aplicam à população, independentemente do tamanho. Como resultado, modelos lineares como $p_{n+1} = rp_n$ sempre produzem um dos dois tipos de comportamento: crescimento exponencial para $r > 1$ ou decaimento exponencial para zero (que é a extinção da espécie), para $0 < r < 1$. Mas, exceto para bactérias e populações de vírus, isso raramente é o tipo de crescimento populacional que vemos no mundo natural. As equações não-lineares, por outro lado, são bem sucedidas para modelos em que a densidade influencia sensivelmente, bem como analisar seus efeitos. Consequentemente, os comportamentos qualitativos de suas soluções são muito mais variados e refletem de maneira mais realista a verdadeira dinâmica populacional. Uma maneira de construir um modelo que incorpora a dependência da densidade é modificar o modelo linear $p_{n+1} = rp_n$ substituindo a taxa de crescimento constante r por uma taxa de crescimento que é uma função decrescente do tamanho da população p_n. O modelo então se torna

$$p_{n+1} = R(p_n)p_n$$

onde $R(p_n)$ representa esta nova função de taxa de crescimento. Uma função decrescente é apropriada aqui, uma vez que a taxa de crescimento deve diminuir à medida que a população se torna maior, devido ao correspondente aumento de densidade. A escolha apropriada da função R depende das características específicas da população estudada.

Talvez o tipo mais simples de função de taxa de crescimento decrescente seja linear, como

$$R(p_n) = r\left(1 - \frac{p_n}{C}\right)$$

onde r é uma constante, também chamada de taxa de crescimento, e C é uma constante que representa a capacidade de carga, ou seja, a maior população que o ambiente pode sustentar. Substituindo esta função na equação (4.4), obtemos nosso próximo exemplo:

Exemplo 4.3 (Crescimento Populacional: Modelo Logístico)**.** A equação não linear

$$p_{n+1} = rp_n\left(1 - \frac{p_n}{C}\right)$$

onde $r > 0$ e $C > 0$ é chamada de equação logística. Este modelo logístico de crescimento populacional foi proposto em 1938 por Pierre François Verhulst Boyer (1974) e posteriormente recebeu muita atenção como exemplo da teoria do caos. Essa sistema possui dois pontos fixos, que são $p = 0$ e $p = C$. Em outras palavras, as sequências constantes $p_n = 0$ e $p_n = C$ são soluções da equação de recorrência.

Denotando $f(x) = rx(1 - x/C) = rx - rx^2/C$, temos que $f'(x) = r - 2rx/C$. Para $p = 0$, temos que $|f'(0)| = r$ e por consequência do Teorema 3.2, se $0 < r < 1$, então $p = 0$ é assintoticamente estável e se $r > 1$, $p = 0$ é instável. No caso do ponto $p = C$, temos que $|f'(C)| = |r - 2rC/C| = |r - 2r| = r$. Novamente usando o teorema de estabilidade citado, temos que $p = C$ é instável se $r > 1$ e assintoticamente estável para $0 < r < 1$. Para exemplificar algumas dessas situações, vamos considerar primeiramente $C = 100$ e $r = 0,5$. Temos o seguinte gráfico:

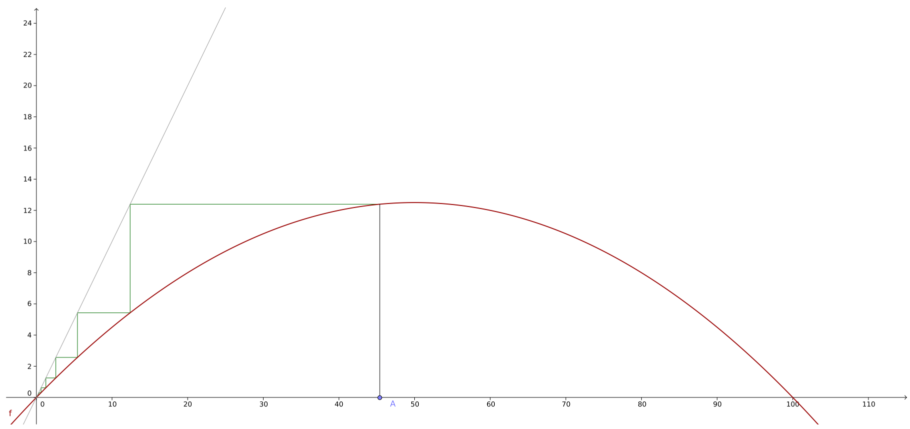


Figura 4.2: $C = 100$ e $r = 0,5$

Podemos notar que a solução com valor inicial $p_0 = 45$ converge para zero, e assim 0 é um ponto atrator.

Agora vamos tomar $C = 100$ e $r = 2$. Com o valor inicial em $p_0 = 20$, obtemos:

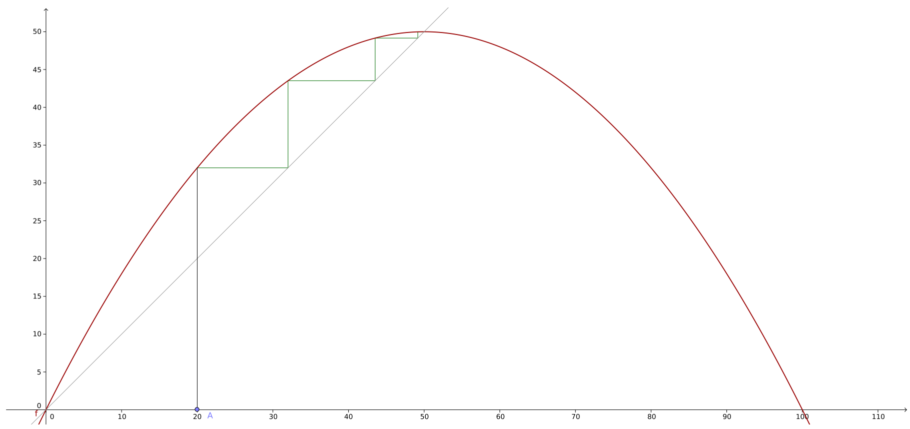


Figura 4.3: $C = 100$ e $r = 2$

Aqui vemos que a solução converge para C, que é um ponto atrator também.

Exemplo 4.4 (Juros Simples)**.** Tomaremos este exemplo de Marotto Marotto (2006). No instante de tempo t_0 depositamos uma quantia principal M_0, numa entidade bancária que a cada mês paga um juros mensal referente à P_0. Assim o incremento mensal I pode ser descrito pela equação

$$I = rM_0 \tag{4.4}$$

onde r é a taxa de juros aplicada pela entidade bancária. Este incremento será a quantia que o juros irá aumentar em nosso montante. Desta maneira, o montante do primeiro mês será:

$$M_1 = M_0 + I$$

Se durante o próximo mês não houver alterações na aplicação, então outra parcela de $I = rM_0$ será depositada na conta e o montante do segundo mês será:

$$M_2 = M_1 + I$$

podemos notar sem muito esforço que o montante para o mês $n+1$ será dado por

$$M_{n+1} = M_n + I \tag{4.5}$$

Já que I não se altera por se tratar de juros simples. Através da equação (4.5) podemos encontrar M_n sabendo os $n-1$ valores anteriores. Seria de nosso interesse uma equação que nos levasse diretamente ao montante desejado no mês $n + 1$. Assim utilizando a equação (2.7), onde $h(k) = I$, obtemos:

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} I$$

ou

$$M_n = M_0 + (n-1)I \tag{4.6}$$

Assim substituindo (4.4) em (4.6), obtemos:

$$M_n = M_0 + (n-1)rM_0$$

ou

$$M_n = [1 + r(n-1)]M_0 \tag{4.7}$$

Para entendermos a evolução deste sistema, basta notarmos que a equação (4.7) nos da um modelo linear, ou seja, de crescimento constante. A cada iteração da equação é somada a mesma quantia ao montante anterior.

Para o modelo de Juros simples temos a equação

$$M_n = [1 + r(n-1)]M_1,$$

Tomando os valores iniciais de $M_1 = 1000$ e $r = 0,5\%$, que é o rendimento médio das cadernetas de Poupança, esta equação se torna

$$M_n = [1 + 0,005(n-1)]1000,$$

ou ainda,

$$M_n = 5n + 995, \tag{4.8}$$

A equação acima depende apenas do mês em que queremos saber o montante atual aplicado. Podemos ver na figura a seguir que o gráfico da função $f(x) = 5x + 995$ não intercepta o da função $f(x) = x$ para valores de $x > 0$, valores para os quais podemos fazer uma aplicação.

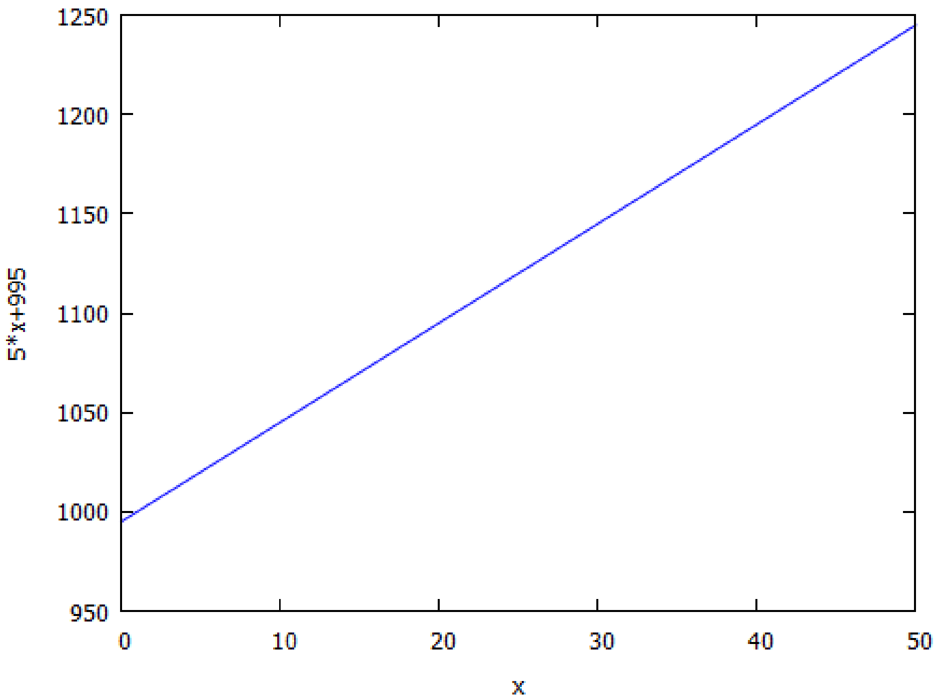


Figura 4.4: Gráfico da função $f(x) = 5x + 995$

Iterando $x_0 = 1000$ na equação (4.8) obtemos:

$$
\begin{aligned}
M_1 &= 1000 \\
f(1) &= 1000 \\
f^2(1) &= 5995 \\
f^3(1) &= 30960 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Como podemos notar na Figura 4.4 as retas $y = x$ e $f(x) = 5x + 995$ não se cruzam para $x > 0$, podemos assim afirmar que este modelo não possui pontos fixos e após algumas iterações de $x_1 = 1000$ na equação podemos constatar que a mesma é instável, com os valores de M_n aumentando rapidamente ao realizarmos uma nova iteração. Em outros termos:

$$\lim_{n\to\infty} f^n(1) = \infty.$$

Como $M_n = [1+0,005(n-1)]1000$, não possui pontos fixos, não podemos aplicar os teoremas 3.2 e 3.3.

Exemplo 4.5 (Juros Compostos)**.** Apesar do modelo anterior ter o seu papel na Economia, o modelo mais encontrado no comércio e nas movimentações financeiras é o modelo de juros compostos. Neste modelo, o juros mensal não é fixado pelo Montante inicial M_0 como no modelo anterior. Teremos agora juros compostos, e isso significa que a cada mês o juros adquirido será adicionado ao Montante Principal M_n e o juros será calculado sobre este Montante M_{n+1} no próximo mês. Este modelo é muito utilizado pois a longo prazo este faz com que o investimento cresça mais rapidamente.

Desta maneira, utilizando a equação (4.7) com $n = 1$ e juros mensais, obtemos:

$$M_1 = [1 + r]M_0$$

depois de um mês. Assim, no próximo mês M_1 se torna o montante a ser utilizado para o cálculo dos juros e obtemos:

$$M_2 = [1 + r]M_1$$

E, da mesma forma, temos

$M_3 = [1 + r]M_2$, $M_4 = [1 + r]M_3$, $M_5 = [1 + r]M_4$, ...

O que nos leva à equação iterativa

$$M_{n+1} = (1 + r)M_n$$

.

Assim, a equação

$$M_{n+1} = (1 + r)M_n \tag{4.9}$$

modela o crescimento de um investimento com uma taxa r por mês. M_0 é o Montante Inicial aplicado, enquanto os demais M_n com n =1, 2, 3, 4, 5, ... são os montantes no mês n.

Tomemos a equação (4.9). Esta equação é uma equação de recorrência linear de primeira ordem homogênea e, assim, sua solução terá a forma de

$$x_n = \left[\prod_{k=1}^{n-1} g(k)\right] x_1.$$

De acordo com o que vimos na seção (2.1.2), temos o termo $g(k) = 1 + r$, e assim

$$\prod_{k=1}^{n-1} g(k) = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + r) = (1 + r)^n.$$

Portanto,

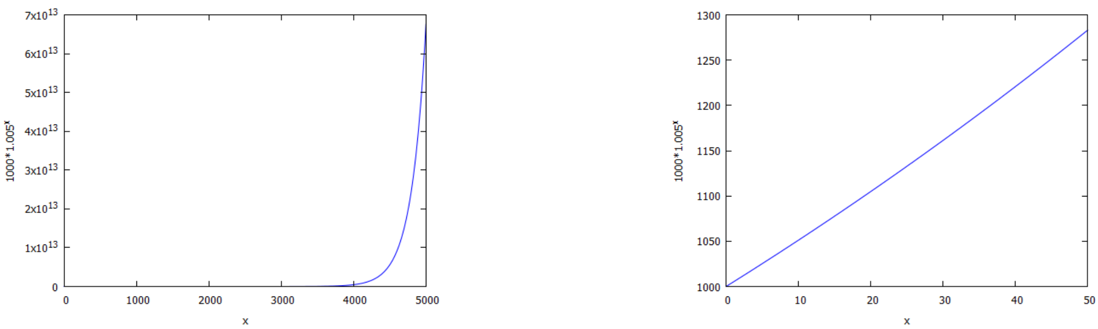
$$M_{n+1} = M_0(1 + r)^n.$$

Tomando agora parâmetros iniciais de acordo com esse modelo, com $M_0 = 1000$ e $r = 0,5\%$, obteremos a equação:

$$M_{n+1} = 1000(1 + 0,005)^n,$$

ou ainda

$$M_{n+1} = 1000(1,005)^n \tag{4.10}$$



(a) Comportamento geral da equação 4.10.

(b) Próximo ao ponto $(0, 1000)$.

Figura 4.5: Variação da função $M_{n+1} = 1000(1,005)^n$.

Analisando o gráfico da função $f(x) = 1000(1,005)^x$, notamos rapidamente que esta também não possui pontos fixos, aumentando exponencialmente de acordo com o aumento de n.

Exemplo 4.6 (Drogas na corrente sanguínea)**.** Digoxina é uma droga utilizada no tratamento de doenças cardíacas. Os médicos devem prescrever uma quantidade deste remédio para seus pacientes de forma que esta esteja acima da quantidade eficaz e abaixo da quantidade segura para o paciente ingerir. Desta forma, com uma dose inicial de $0,5$mg de digoxina, a Tabela 4.1 a seguir mostra a quantidade da droga ainda presente na corrente sanguínea com o passar do tempo:

Tabela 4.1: As alterações Δa_n de digoxina na corrente sanguínea de um paciente.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	0,5	0,345	0,238	0,164	0,113	0,078	0,054	0,037	0,026
Δa_n	-0,155	-0,107	-0,074	-0,051	-0,035	-0,024	-0,017	-0,011	

onde Δa_n representa a diferença na quantidade de digoxina de uma amostra para sua anterior imediata, isto é, $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$.

Como mostra o gráfico a seguir, podemos notar que a variação Δa_n durante um intervalo de tempo é aproximadamente proporcional à quantidade a_n de digoxina presente na corrente sanguínea no início do intervalo.

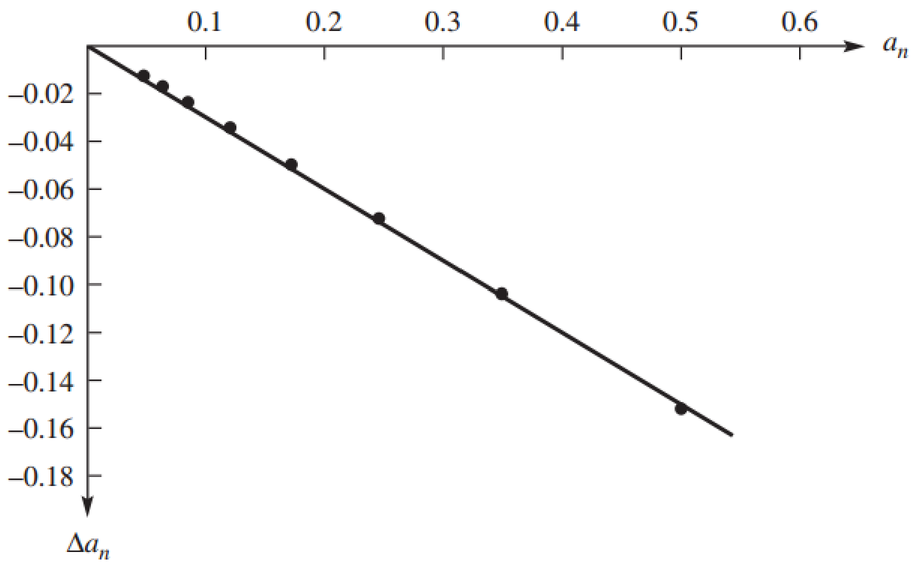


Figura 4.6: O gráfico de Δa_n por a_n sugere uma linha reta que passa pela origem.

A inclinação da reta no gráfico anterior é dada por $k \approx -0,107/0,345 \approx -0,310$. Como o gráfico da Figura (4.6) exprime a variação de Δa_n como uma função linear de a_n com inclinação $-0,31$, temos:

$$\Delta a_n = -0,31 a_n$$

Assim, temos:

$$\Delta a_n = -0,31 a_n$$

$$a_{n+1} - a_n = -0,31a_n$$

$$a_{n+1} = 0,69a_n \tag{4.11}$$

Com a equação (4.11) conhecemos a quantidade de digoxina na corrente sanguínea do paciente, levando em conta a quantidade inicial que foi $a_0 = 0,5mg$.

O modelo da digoxina na corrente sanguínea é análogo ao de juros compostos. Sua equação é $a_{n+1} = 0,69a_n$ para uma quantidade inicial de $a_0 = 0,5mg$ de digoxina. Aplicando o Teorema 2.1, obteremos:

$$a_{n+1} = 0,5(0,69)^n$$

Exemplo 4.7 (Coelhos de Fibonacci)**.** Encontramos em Boyer Boyer (1974) um problema proposto por Leonardo de Pisa, também conhecido como Leonardo Fibonacci: Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Este é o problema que deu origem à equação descrita no capítulo 2 dos coelhos de Fibonacci, no qual encontramos a equação:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \tag{4.12}$$

Com os termos $F_0 = F_1 = 1$, podemos construir a sequência $(1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$ onde cada termo, à excessão dois dois primeiros, é a soma dos dois anteriores imediatos. Segundo Boyer (1974) quando tomados dois termos desta sequência, o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n}$ é a razão da secção áurea, $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, muito utilizada em diversas áreas do conhecimento filotaxia e crescimento orgânico.

Da seção 2.2, temos que a equação característica de (4.12) é $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Assim, o termo geral deste sistema é dado por

$$F_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{4.13}$$

onde C_1 e C_2 são duas constantes quaisquer. Tomando a condição inicial de que $F_0 =$

$F_1 = 1$, obtemos:

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}} \tag{4.14}$$

Substituindo (4.14) em (4.13), obtemos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \tag{4.15}$$

para n meses. Podemos verificar com a equação 4.15 que conforme n aumenta, cresce também a quantidade de casais.

Exemplo 4.8 (Controle de Estoque)**.** Um problema enfrentado por empresas é manter em estoque suas mercadorias e matéria prima para manufatura. Há grandes riscos em manter um estoque muito grande ou não o possuir. Estes riscos devem ser enfrentados diariamente para que a empresa possa prosperar. Se chamarmos de x_n o nível de estoque de uma empresa, este irá variar por dois fatores: a taxa de consumo $c(x_n)$ e a taxa de reposição $r(x_n)$. Podemos exprimir esta variação pela seguinte equação recorrente:

$$x_{n+1} = x_n - c(x_n) + r(x_n) \tag{4.16}$$

como os valores de c e r são percentuais de x_n e se considerarmos que estes valores são constantes, podemos escrever a equação (4.16) da seguinte forma:

$$x_{n+1} = (1 - c + r)x_n \tag{4.17}$$

Vamos considerar três casos diferentes a respeito da equação 4.17:

i) Com $c = r$ teremos um estoque constante, ou seja, a cada intervalo regular de tempo o estoque irá baixar de $c(x_n)$ e irá ser reposto de $r(x_n)$. Ambos são iguais e $x_{n+1} = x_0$.

   Se a empresa possuir em estoque $x_0 = 25$ unidades de certo produto, a equação que descreve sua variação será dada por

$$x_{n+1} = 25, \ \ para \ \ n = 0, 1, 2, 3, ...$$

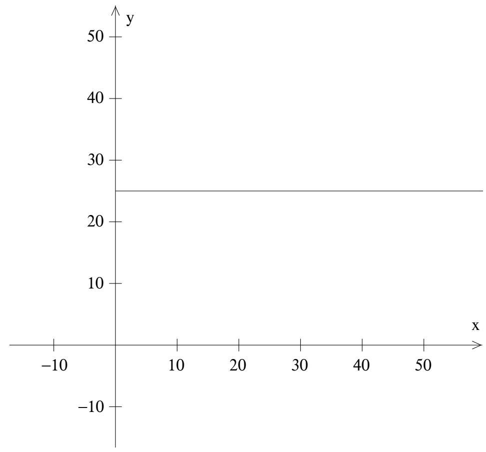


Figura 4.7: Estoque constante.

ii) No caso em que $c < r$ teremos um estoque crescente, ou seja, a cada intervalo regular de tempo o estoque irá baixar de $c(x_n)$ e irá ser reposto de $r(x_n)$, levando $x_{n+1} > x_n$. Digamos que $c = 0,2$ e $r = 0,25$. Substituindo estes valores na equação (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - 0,2 + 0,25)x_n \\ x_{n+1} &= 1,05x_n \end{aligned}$$

Aplicando o Teorema 2.1 a $x_{n+1} = 1,05x_n$ obtemos:

$$x_n = (1,05)^n x_0 \tag{4.18}$$

Tomando a equação 4.18 e $x_0 = 25$, obtemos

$$x_n = 25 \times (1,05)^n$$

iii) No caso em que $c > r$ teremos um estoque decrescente, ou seja, a cada intervalo regular de tempo o estoque irá baixar de $c(x_n)$ e irá ser reposto de $r(x_n)$, levando $x_{n+1} < x_n$. Digamos que $c = 0,25$ e $r = 0,2$. Substituindo estes valores na equação (4.17), obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1 - 0,25 + 0,2)x_n \\ x_{n+1} &= 0,95x_n \end{aligned}$$

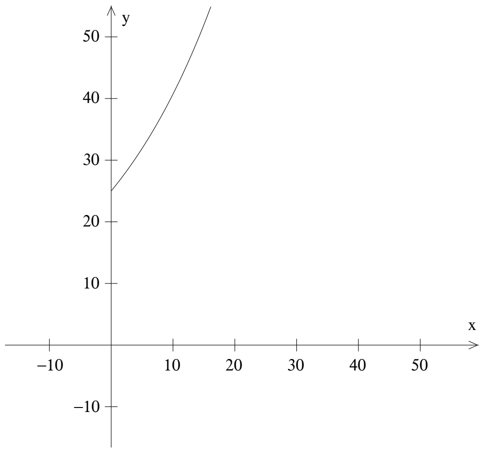


Figura 4.8: Estoque crescente.

Aplicando o teorema 2.1 a $x_{n+1} = 0,95x_n$ obtemos:

$$x_n = (0,95)^n x_0 \tag{4.19}$$

Tomando a equação 4.19 e $x_0 = 25$, obtemos

$$x_n = 25 \times (0,95)^n$$

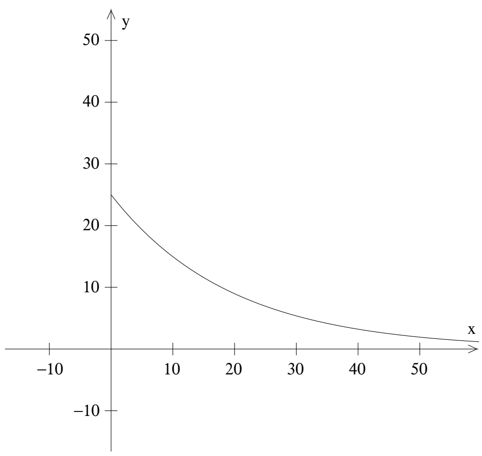


Figura 4.9: Estoque decrescente.

As Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 são exemplos dos três casos descritos acima.

Conclusão

Elaboramos assim, um texto introdutório sobre Sistemas Dinâmicos Discretos. Este texto pode ser utilizado nos primeiros períodos dos cursos de graduação de modo a alavancar o interesse nos estudantes pela modelagem e pelos sistemas dinâmicos. Construímos um referencial teórico básico para o entendimento do assunto e que é de fácil acesso a estes estudantes. Há também o texto de Adriano Mendes Pacheco Pacheco (2013), também egresso do PROFMAT - UFMT Cuiabá que foi concebido com maestria para ser um texto introdutório à modelagem e equações de recorrência. A partir daqui, cabe aos estudantes decidir qual caminho trilhar, seja ele pela modelagem de sistemas discretos, ou de sistemas contínuos mais elaborados.

Ressaltamos que os modelos apresentados neste trabalho, a exceção do modelo de crescimento logístico, são lineares, de modo a possuírem uma solução explícita, o que não ocorre de maneira geral no estudo de sistemas dinâmicos contínuos com equações não lineares. Acreditamos que o próximo passo deva ser o estudo dessas equações não lineares. São nestas equações que as teorias dos sistemas dinâmicos se mostram efetivamente relevantes. Ao estudarmos sistemas não lineares e contínuos podemos nos deparar com equações diferenciais que não possuem solução - a maior parte delas não possui uma solução explícita - nos levando assim a um estudo qualitativo destas equações. Com a modelagem destes sistemas abrangendo diversos campos das ciências, as teorias dos sistemas dinâmicos se tornam ainda mais relevantes para a continuação das pesquisas, principalmente os sistemas não lineares.

Referências Bibliográficas

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino–aprendizagem com modelagem matemática.* Ed. Contexto, S.Paulo.

Bean, D. W. (2001). O que é modelagem matemática? *Educação Matemática em Revista*, 9:49.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática.* Ed. Edgard Blucher, S.Paulo.

Diniz, G. L. (1995). Equações de diferenças e sistemas com aplicações biológicas. In Macau, E. E. N., editor, *Notas em Matemática Aplicada - SBMAC*, página 62. SBMAC, 1st edição.

Elaydi, S. N. (2005). An introduction to difference equations. In *Undergraduate Texts in Mathematics.* Springer.

Giordano, F., Fox, W. P., e Horton, S. (2013). *A first course in mathematical modeling.* Nelson Education.

Holmgren, R. (1994). *A first course in discrete dynamical systems.* Springer Science & Business Media.

Marotto, F. R. (2006). *Introduction to mathematical modeling using discrete dynamical systems.* Thomson Brooks/Cole.

Morgado, A. C. e Carvalho, P. C. P. (2013). Matemática discreta. *Rio de Janeiro: SBM.*

Pacheco, A. M. (2013). Modelagem matemática no ensino de equações de recorrencia. Dissertação de Mestrado, ICET–UFMT, Cuiabá.

Villate, J. E. (2011). Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem prática com maxima. Disponível em http://www.villate.org/doc/sistemasdinamicos/sistdinam-1_2.pdf. Acesso em: 19/set/2017.