



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MÁRIO RÉGIS REBOUÇAS TORRES

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

FORTALEZA

2017

MÁRIO RÉGIS REBOUÇAS TORRES

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Dissertação submetida à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção em grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos
pelo(a) autor(a)

T646n Torres, Mário Régis Rebouças.

Números algébricos e transcendentales / Mário Régis Rebouças Torres. – 2017.
67 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências,
Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede
Nacional, Fortaleza, 2017. Orientação: Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo.

1. Números Racionais. 2. Números Irracionais. 3. Números Algébricos. 4.
Números Transcendentales. I. Título.

CDD 510

MÁRIO RÉGIS REBOUÇAS TORRES

NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

Dissertação submetida à Coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção em grau de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: ___/___/___

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Frederico Vale Girão
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Tiago Caúla Ribeiro
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre estar ao meu lado e, por sua misericórdia e graça, oferecer-me o dom da vida. Desde o meu nascimento até os dias de hoje, Ele permanece comigo em todos os momentos. Que o seu nome seja honrado, glorificado e louvado em todos os lugares deste mundo.

Ao meu pai Mário Leonardo, que me ensinou que as coisas simples são as mais valiosas.

A minha mãe que sempre esteve e está comigo. Mulher de fibra e valiosa que é o meu exemplo de não desistir e de nunca perder a fé mesmo diante de tamanhas dificuldades. A senhora é a razão do meu viver.

As minhas irmãs Eliomara e Regimara pelo carinho e incentivo em todos os momentos da minha vida.

A Keuly Silva, minha esposa, por estar comigo em todos os momentos e por ter tido compreensão durante esse período do mestrado. Certamente, sem ela, seria muito mais difícil alcançar os objetivos. Obrigado pelo amor e apoio demonstrado.

Aos meus amigos: Marcelo Briseno, Cristiano, Wilkson, Ricardo, Cláudio, Jamires, Diego, João, Edilson, Silvestre e Odécio, que me acompanham durante todo o Profmat e não deixaram que eu desistisse de sonhar. Gratidão é o sentimento que tenho por vocês.

À Universidade Federal do Ceará por permitir que o sonho de me tornar mestre fosse realizado.

Ao meu orientador, o professor Dr. Marcelo Ferreira de Melo, que além de ser um excelente professor é uma pessoa de grande coração, tendo bastante sabedoria e paciência na produção deste trabalho.

Às pessoas que me ajudaram de forma direta ou indireta, durante esses anos, para esta conquista na minha vida.

*"A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo."
Pitágoras*

RESUMO

O presente trabalho trata sobre números algébricos e transcendentés caracterizando-os sob diferentes aspectos. Em particular trazemos algumas demonstrações da irracionalidade do número π e do número de Euler, base do logaritmo natural. Também apresentaremos uma demonstração da transcendência do número e baseada no roteiro de exercícios propostos por D.G. de Figueiredo, além de um pequeno apanhado histórico sobre π , e , números algébricos e transcendentés.

Palavras-chave: Números Racionais. Números Irracionais. Números Algébricos. Números Transcendentés.

ABSTRACT

The present work deals with algebraic and transcendent numbers characterizing them under different aspects. In particular we bring some demonstrations of the irrationality of the number π and the number of Euler, base of the natural logarithm. We will also present a demonstration of the transcendence of the number and based on the script of exercises proposed by D.G. de Figueiredo, in addition to a small historical survey on π , and, algebraic and transcendent numbers.

Keywords: Rational Numbers. Irrational Numbers. Algebraic Numbers. Transcendent Numbers.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	10
2	NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS	13
2.1	Caracterização dos números racionais	13
2.2	Radiciação e irracionalidade.....	16
2.3	Enumerabilidade dos racionais.....	19
2.4	Não enumerabilidade dos irracionais	21
3	ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS	24
3.1	A irracionalidade do número e	24
3.2	Um pouco da história do número π	28
3.3	A irracionalidade do número π	30
4	NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES	35
4.1	Um pouco sobre números algébricos e transcendentess.....	35
4.2	Caracterização dos números algébricos e transcendentess	37
5	ALGUNS NÚMEROS TRANSCENDENTES: e e π	43
5.1	A transcendência do número e	43
5.2	A transcendência do número π	50
6	CONCLUSÃO.....	58
	REFERÊNCIAS	60
	APÊNDICE A - ALGORÍTIMO DA DIVISÃO DE EUCLIDES	61
	APÊNDICE B - TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA	62
	ANEXO A - NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA NA PRÁTICA DA SALA DE AULA	64
	ANEXO B - ATIVIDADES PROPOSTAS	67

1 INTRODUÇÃO

Desde o início dos tempos, do mais remoto resquício do início os seres humanos têm necessitado lidar com quantidade e proporções e por consequência com números. Para povos mais antigos e para alguns ainda hoje os números em questão são tão somente os naturais. De fato, quando se faz necessário tão somente enumerar objetos que possuamos os naturais são mais que suficientes. Cedo ou tarde, todavia, aflora se a necessidade de lidar se com medições, mensurar áreas, calcular o volume de um recipiente ou ainda a distância entre duas cidades, tornando complicado que tais grandezas e medidas restrinjam se somente a valores exatos de unidades. Daí emerge a necessidade das frações e demais números racionais.

As frações eram conhecidas pela civilização egípcia e babilônica que desenvolveram engenhosos meios de fazer seus registros e a efetuar operações com as mesmas. Mas foram os gregos, influenciados por Pitágoras, que fizeram das frações o centro de seu sistema matemático filosófico, tornando as quase que míticas. Os pitagóricos acreditavam que tudo na natureza, da física e da cosmologia até a arte e a arquitetura, poderiam ser descritos por termos de frações (na verdade por meio de números racionais). Tal crença deve ter tido origem no interesse de Pitágoras pelas leis da harmonia musical, onde ele observou que se a música baseava-se em números racionais, certamente o mesmo devesse ocorrer com o universo por completo. Assim os racionais passam a dominar a visão grega do mundo, da mesma forma que o pensamento racional dominou sua filosofia (de fato, a palavra grega para racional é *logos*, da qual deriva o termo moderno, *lógica*).

Obviamente que não foram tão somente argumentos filosóficos que colocaram os números racionais tão no centro da matemática. Uma propriedade que os distingue dos inteiros é que os racionais formam um conjunto *denso* de números.

A palavra *densa* descreve o modo como os racionais distribuem se ao longo da linha dos números. Pegue qualquer segmento de reta e, não importa o quão pequeno ele seja, estará sempre povoado por um número infinito de “pontos racionais”. Assim parece natural concluir, como os gregos fizeram, que toda a linha dos números é povoada por pontos racionais. Mas na matemática o que *parece* ser uma conclusão natural muitas vezes se revela falsa. Um dos momentos cruciais da história da matemática foi a descoberta de que os números racionais, mesmo densos, deixam “buracos” ao longo da linha dos números, ou seja, pontos que não correspondem a nenhum número racional. Tal buracos foram posteriormente chamados de irracionais ou não racionais.

A descoberta desses buracos é atribuída a Pitágoras, embora possa ter sido feita por um de seus discípulos. A descoberta envolveu a diagonal de um quadrado unitário. Chamando o comprimento da diagonal de x , pelo Teorema de Pitágoras teremos $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, de modo que x é a raiz quadrada de 2.

É claro, presumiram que este número era igual a alguma fração e tentaram pertinazmente encontrá-lo. Certo dia, porém, um deles fez a espantosa descoberta de que $\sqrt{2}$ não podia ser igual a uma fração. E assim foi descoberta a existência dos números *irracionais*.

A descoberta de que $\sqrt{2}$ é irracional deixou os pitagóricos num estado de choque, pois lá estava uma quantidade que podia claramente ser medida e até mesmo construída com esquadro e compasso e, no entanto, não se tratava de um número racional. Fíéis ao seu juramento de segredo, os pitagóricos se comprometeram a manter a descoberta somente entre eles.

Entretanto, o conhecimento da descoberta espalhou-se e logo outros números irracionais foram encontrados. Na época em que Euclides escreveu seus *Elementos*, no século III a.C., os números irracionais já tinham deixado de ser novidade. No entanto, uma teoria inteiramente satisfatória dos irracionais, destituída de considerações geométricas, só apareceu em 1872, quando Richard Dedekind (1831-1916) publicou seu famoso ensaio *Continuidade e números irracionais*.

Juntando o conjunto dos números racionais com o dos irracionais obtemos o conjunto maior dos *números reais*.

Outra alternativa de classificarmos os reais é em *algébricos* e *transcendentes*. Dizemos que um número x é algébrico quando satisfaz uma equação polinomial com coeficientes inteiros, ou seja, existem a_0, \dots, a_n para os quais $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$.

A grande maioria dos números que encontramos satisfaz essa condição. Não é difícil perceber que todo número racional é algébrico assim, se um número não satisfizer a equação acima necessariamente deve ser irracional. A recíproca dessa afirmação não é verdadeira pois, por exemplo, a raiz n -ésima de todo número primo é irracional sendo que tal número, no entanto, é algébrico. Quando um número não satisfaz uma equação polinomial com coeficientes inteiros dizemos que ele é um número *transcendental* indicando com isso apenas que esses números transcendem, ou seja, vão além no reino dos números algébricos. A questão que intrigou por muito tempo os matemáticos era a seguinte: existirão números irracionais não algébricos? Essa resposta só foi dada por volta da metade do século XIX.

No terceiro capítulo nosso objetivo será caracterizar os números algébricos bem como demonstrar indiretamente que números não algébricos, ou seja, transcendentos, de fato existem.

No último capítulo demonstraremos a transcendência do número e , base dos logaritmos naturais, seguindo o roteiro dos exercícios propostos pelo professor Djairo Guedes de Figueiredo.

Ao longo de todo este trabalho suporemos estabelecidas a existência e propriedades do conjunto dos números reais.

2 NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS

2.1 Caracterização dos números racionais

Uma fração $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, diz-se irredutível se $\text{m.d.c.}(a, b) = 1$. Os números racionais costumam ser representados por frações ordinárias, representação essa que é única se tomarmos as frações em forma irredutível e com denominadores positivos. Assim, podemos definir números racionais da seguinte forma:

Definição 2.1 Um número real é dito racional se pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$. Simbolicamente $\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{a}{b}, \text{ com } a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^*\}$

Vamos considerar a conversão de frações ordinárias em decimais, com vistas a entender quando a representação decimal resulta ser finita ou periódica.

A conversão de uma fração ordinária em número decimal se faz dividindo o numerador pelo denominador. Assim, podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 2.1 Toda fração irredutível representa um decimal finito ou periódico.

Demonstração: Seja $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível. Pelo algoritmo de Euclides existem a_0 e $r_0 \in \mathbb{Z}$, tais que $a = ba_0 + r_0 \Rightarrow \frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_0}{b}$, com $0 \leq r_0 < b$.

Podemos expandir essa divisão da seguinte forma:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{10} \left(\frac{10r_0}{b} \right) = a_0 + \frac{1}{10} \left(a_1 + \frac{r_1}{b} \right) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{b}, \text{ com } 10r_0 = ba_1 + r_1$$

e $0 \leq r_1 < b$.

Continuando com o mesmo raciocínio teremos,

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2} \left(\frac{10r_1}{b} \right) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10^2} \left(a_2 + \frac{r_2}{b} \right) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{r_2}{b},$$

com $10r_1 = ba_2 + r_2$ e $0 \leq r_2 < b$.

Continuando com o mesmo raciocínio, encontramos r_3, r_4, \dots, r_i , com $0 \leq r_i < b \forall i$.

Acontece que os possíveis restos da divisão de qualquer número por b só pode ser $0, 1, 2, \dots, b-1$.

Diante disso, teremos duas possibilidades:

i) $r_i = 0$ para algum i

Neste caso, a expansão de $\frac{a}{b}$ será:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} \cdot \frac{r_i}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_i}{10^i} = a_0, a_1 a_2 \dots a_i$$

que representará um decimal infinito.

$$\text{ii) } r_i \neq 0 \quad \forall_i$$

Neste caso, como as classes de restos módulo b são finitas, em algum momento teremos um $j > i$ tal que $r_{i+j} = r_i$. Assim, a partir do momento em que isso ocorrer, os algarismos do quociente voltarão a se repetir. Dessa forma, teremos:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_i}{10^i} + \frac{1}{10^i} \cdot \frac{r_i}{b} + \dots + \frac{a_j}{10^j} + \frac{1}{10^j} \cdot \frac{r_j}{b} \quad \text{com } a_{i+1} = a_{j+1},$$

$a_{i+2} = a_{j+2}, \dots$ que resultará em

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_i}{10^i} + \frac{a_{i+1}}{10^{i+1}} + \dots + \frac{a_j}{10^j} = a_0, a_1 a_2 \dots a_i \overline{a_{i+1} a_{i+2} \dots a_j} \quad \text{que}$$

representará um decimal periódico. A barra sobre a sequência de número indica que estes números são repetidos infinitas vezes.

Por esse caso, concluímos também que o período terá no máximo $b - 1$ algarismos. A recíproca dessa proposição também é verdadeira, como veremos agora.

Proposição 2.2 *Todo decimal finito ou periódico é racional.*

Demonstração:

Se x é decimal finito, então $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_r$, com $0 \leq a_i \leq 9$ ($i = 1, 2, \dots, r$) e $a_0 \in \mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10^r , obtemos:

$$10^r x = a_0 a_1 a_2 \dots a_r \Rightarrow x = \frac{a_0 a_1 a_2 \dots a_r}{10^r} \quad \text{que é racional.}$$

Considerando x um número decimal periódico, então $x = a_0, a_1 \dots a_r \overline{b_1 \dots b_s}$, com $0 \leq a_i \leq 9$, $0 \leq b_j \leq 9$, $i = 1, 2, \dots, r$, $j = 1, 2, \dots, s$ e $a_0 \in \mathbb{Z}$. Multiplicando ambos os membros da igualdade por 10^r e por 10^{r+s} respectivamente, obtemos:

$$\alpha: 10^r x = a_0 a_1 a_2 \dots a_r \overline{b_1 \dots b_s}$$

$$\beta: 10^{r+s} x = a_0 a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s \overline{b_1 \dots b_s}.$$

Fazendo $a_0 a_1 \dots a_r = a$, $a_0 a_1 \dots a_r b_1 \dots b_s = b$ e subtraindo α de β , obtemos:

$$10^{r+s} x - 10^r x = b - a \Rightarrow x (10^{r+s} - 10^r) = b - a \Rightarrow x = \frac{b - a}{10^{r+s} - 10^r}, \quad \text{que é racional.}$$

Outra importante característica das frações irredutíveis se refere à decomposição do denominador em fatores primos, como veremos agora.

Proposição 2.3 *Se uma fração irredutível contém somente fatores primos 2 e/ou 5 no denominador, então representará um decimal finito.*

Demonstração:

Seja $x = \frac{a}{b}$ uma fração irredutível com a decomposição do denominador somente em fatores primos 2 e/ou 5. Então $\frac{a}{b}$ será da forma $\frac{a}{2^r \cdot 5^s}$ ($r, s \in \mathbb{Z}$).

Se $r = s$, então $\frac{a}{2^r \cdot 5^s} = \frac{a}{10^r}$ e x é decimal finito. Se $r \neq s$, tomemos $n = \min(r, s)$ e $m = \max(r, s)$ e, assim, podemos introduzir fatores 2 e/ou 5 no denominador em número suficiente para torná-lo potência de 10 e, dessa forma, teremos $x = \frac{a}{2^r \cdot 5^s} = \frac{a \cdot q^{|r-s|}}{10^m}$ (com $q = 2$ se $n = r$ ou $q = 5$ se $n = s$) e novamente x é decimal finito.

Outra alternativa de representarmos um número racional é através de frações contínuas. Esse será o objetivo de nossa próxima proposição. Basicamente, para essa representação, utilizamos o algoritmo da divisão de Euclides que, como vimos na Proposição 2.1, após um número finito de passos nos fornecerá resto 1.

Proposição 2.4 *Um número é racional se, e somente se, representa uma fração contínua finita.*

Demonstração:

\Rightarrow Considere o racional $\frac{a}{b}$ irredutível. Pelo algoritmo de Euclides existem a_0 e $r_1 \in \mathbb{Z}$, tais que $a = ba_0 + r_1$, ou seja, $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r_1}{b}$, com $0 \leq r_1 < b$. Se $r_1 = 1$, procedimento encerrado e teremos $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{b}$. Caso contrário, continuamos o procedimento, fazendo:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}}, \text{ com } b = r_1 a_1 + r_2 \text{ e } 0 \leq r_2 < r_1. \text{ Se } r_2 = 1, \text{ procedimento}$$

encerrado e teremos $\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{r_1}}$. Caso contrário, continuamos o procedimento, fazendo:

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}}, \text{ com } r_1 = r_2 a_2 + r_3 \text{ e } 0 \leq r_3 < r_2.$$

Acontece que existem apenas $b - l$ naturais menores que b e como temos $b > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$, teremos necessariamente um $r_n = l$ que finalizará o procedimento e

$$\text{tornará } \frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_{n-3} + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

$$\Leftarrow \text{Por outro lado, dada uma fração contínua finita } a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_{n-3} + \frac{1}{a_{n-2} + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}},$$

podemos estabelecer o processo inverso fazendo

$$b_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_n}, b_{n-1} = a_{n-2} + \frac{1}{b_n}, \dots, b_2 = a_1 + \frac{1}{b_3} \text{ até obtermos o racional } b_1 = a_0 + \frac{1}{b_2}.$$

Convém observar que, nesse processo de divisões sucessivas, somente o primeiro quociente é possivelmente negativo e os demais são todos positivos. Disso concluímos que na fração contínua todos os a_i 's são inteiros positivos, com a possível exceção de a_0 .

Definiremos agora números cuja representação decimal não é nem finita nem periódica. Números como esses são chamados de irracionais. De forma mais precisa podemos estabelecer a seguinte definição:

Definição 2.2 *Todo número decimal que não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ é irracional. Simbolicamente $\mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R}; x \notin \mathbb{Q}\}$.*

A partir dessa definição e das proposições anteriores, podemos concluir que todos os números irracionais são decimais não periódicos e, ainda, sua representação em forma de fração resulta em uma fração contínua infinita.

A seção seguinte tratará da radiciação de inteiros positivos. Basicamente, estabeleceremos quando a raiz n -ésima de um inteiro positivo será racional ou irracional.

2.2 Radiciação e irracionalidade

Proposição 2.5 *Se um número racional $\frac{r}{s}$, na forma irredutível, é raiz de $p(x)$, então r/a_0 e s/a_n .*

Demonstração:

Se o racional $\frac{r}{s}$ é raiz do polinômio $p(x)$ teremos $p\left(\frac{r}{s}\right) = 0$, ou seja, $a_0 + a_1\left(\frac{r}{s}\right) + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \dots + a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n = 0$. Multiplicando ambos os membros por s^n fica: $a_0s^n + a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \dots + a_{n-1}r^{n-1}s + a_nr^n = 0$. Pondo s em evidência na soma dos n termos do primeiro membro e passando para o segundo o último termo, obtemos: $s(a_0s^{n-1} + a_1rs^{n-2} + \dots + a_{n-1}r^{n-1}) = -a_nr^n$.

Isso mostra que s/a_n ou s/r^n . Como r e s são primos entre si, s é primo com r^n . Logo, s/a_n .

Analogamente, pondo r em evidência nos n termos do primeiro membro e passando a_0s^n para o segundo, fica: $r(a_1s^{n-1} + a_2rs^{n-2} + \dots + a_{n-1}r^{n-2}s + a_nr^{n-1}) = -a_0s^n$.

Pelo mesmo raciocínio, concluímos que r/a_0 .

Corolário 2.1 Se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n$, com $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, então as eventuais raízes racionais de $p(x)$ são números inteiros divisores de a_0 .

Demonstração:

Se o número racional $\frac{r}{s}$ é raiz de $p(x)$, então pela Proposição 1.5 $s \mid 1$, ou seja, $s = 1$ ou $s = -1$. Logo $\frac{r}{s} = \pm r$ e, portanto $\in \mathbb{Z}$. Ainda pela Proposição 1.5, $r \mid a_0$ e, portanto, o mesmo acontece com $-r$.

Através da próxima proposição estabeleceremos nosso primeiro importante resultado sobre radiciação. Basicamente estabeleceremos que a raiz n -ésima de um inteiro positivo a é irracional sempre que os expoentes dos fatores na decomposição do radicando a , em fatores primos, forem menores que o índice do radical, mas nem todos nulos.

Proposição 2.6 Se p_1, p_2, \dots, p_r são primos distintos, $r_i < n$ ($n \geq 2, i = 1, 2, \dots, r$) e pelo menos um $r_i \neq 0$, então $\sqrt[n]{p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}}$ é irracional.

Demonstração:

Observamos que então $\sqrt[n]{p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}}$ é raiz do polinômio $p(x) = x^n - (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r})$. Se $p(x)$ possui alguma raiz racional, pelo Corolário 1.1, essa raiz será um inteiro divisor de $p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}$. Por outro lado, todo inteiro positivo q que divide

$p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}$ é da forma $q = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \dots p_r^{s_r}$ em que $0 \leq s_i \leq r_i$ ($i = 1, 2, \dots, r$). Dessa forma teremos:

$$p(q) = (p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \dots p_r^{s_r})^n - (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$(p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \dots p_r^{s_r})^n = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}) \Rightarrow p_1^{n \cdot s_1} \cdot p_2^{n \cdot s_2} \dots p_r^{n \cdot s_r} = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}.$$

Mas como p_1, p_2, \dots, p_r são primos distintos, para que essa igualdade faça sentido, devemos ter $n \cdot s_i = r_i$, ou seja, $s_i = \frac{r_i}{n}$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$. No entanto, $s_i = \frac{r_i}{n}$ somente quando $r_i = s_i = 0$ para todo i , o que contraria a hipótese inicial de que pelo menos um r_i é não divisível por n . Para as demais possibilidades, $s_i = \frac{r_i}{n}$ é um absurdo, pois por hipótese, $r_i < n$ para todo i . Logo $p(x)$ não possui raízes inteiras e, portanto $\sqrt[n]{p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}}$ só pode ser irracional.

Corolário 2.2 *Se p é primo, então $\sqrt[p]{p}$ é irracional.*

Demonstração:

Basta observar que o expoente de p é menor que o índice do radical. Logo, pela Proposição 1.6, $\sqrt[p]{p}$ é irracional.

Mas o que acontece quando pelo menos um expoente dos fatores da decomposição do radicando a é maior ou igual ao índice do radical? Para responder a essa pergunta precisaremos ainda de uma proposição simples, mas de grande importância.

Proposição 2.7 *O produto de um número irracional por um racional diferente de zero é um número irracional.*

Demonstração:

Sejam α irracional e $\frac{a}{b}$ um racional diferente de zero. Se $x = \alpha \frac{a}{b}$ fosse racional, então teríamos $\alpha \frac{x \cdot b}{a}$, o que é um absurdo pois α é irracional. Logo x só pode ser irracional.

Vamos agora ao principal resultado dessa seção que definiremos como um Teorema.

Teorema 2.1 *Se n e a são inteiros positivos, então $\sqrt[n]{a}$ é um número irracional ou inteiro positivo.*

Demonstração:

Decompondo a de forma canônica em fatores primos, obteremos $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ com p_1, p_2, \dots, p_r aparecendo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ vezes respectivamente ($\alpha_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, r$). Além disso, pelo algoritmo de Euclides, podemos expressar cada $\alpha_i = nq_i + r_i$ com $0 \leq r_i < n$. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}} = \sqrt[n]{p_1^{nq_1+r_1} \cdot p_2^{nq_2+r_2} \dots p_r^{nq_r+r_r}} \Rightarrow \\ &= \sqrt[n]{p_1^{nq_1} \cdot p_1^{r_1} \cdot p_2^{nq_2} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{nq_r} \cdot p_r^{r_r}} = \sqrt[n]{(p_1^{nq_1} p_2^{nq_2} \dots p_r^{nq_r})(p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r})} \Rightarrow \\ &= \sqrt[n]{(p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_r^{q_r})^n (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r})} = p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_r^{q_r} \sqrt[n]{(p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r})} \end{aligned}$$

Se $r_i = 0$ para todo $i = 1, 2, \dots, r$, teremos $\sqrt[n]{a}$ igual ao inteiro positivo $p_1^{q_1} p_2^{q_2} \dots p_r^{q_r}$.

Porém, se pelo menos um $r_i \neq 0$, pela Proposição 1.6, $\sqrt[n]{p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_r^{r_r}}$ é um número irracional e teremos pela Proposição 1.7, $\sqrt[n]{a}$ como o produto de um irracional por um racional diferente de zero, que será irracional.

Desse Teorema concluímos que a raiz n -ésima de qualquer inteiro positivo é um inteiro positivo ou um número irracional.

Em nossa próxima seção, nosso objetivo será caracterizar os números racionais sob o ponto de vista de sua enumeração.

2.3 Enumerabilidade dos racionais

Uma característica importante do conjunto dos racionais é que ele é enumerável, ou seja, possui a mesma cardinalidade dos naturais. De forma mais precisa definimos conjunto enumerável da seguinte forma:

Definição 2.3 *Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f: \mathbb{N} \rightarrow X$. No segundo caso, o conjunto X diz-se infinito enumerável.*

Nosso objetivo a partir de agora será demonstrar que os números racionais formam um conjunto infinito enumerável e para isso, precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 2.8 *Se $f: X \rightarrow Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*

Demonstração:

Basta considerar o caso em que existe uma bijeção $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{N}$. Então $\varphi \circ f: X \rightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção de X sobre um subconjunto de \mathbb{N} , o qual é enumerável.

Outra proposição de grande importância será a seguinte:

Proposição 2.9 *Se $f: E \rightarrow F$ e $g: F \rightarrow G$ são injetivas, então $g \circ f$ é injetiva.*

Demonstração:

Sejam x_1 e $x_2 \in E$ tais que $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Então $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ e, como g é injetiva, $f(x_1) = f(x_2)$. Usando-se agora a hipótese de que f é injetiva, conclui-se que $x_1 = x_2$.

Logo, $g \circ f$ é injetora.

Lema 2.1 *O conjunto \mathbb{Z} é enumerável.*

Demonstração:

Consideremos a aplicação $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a) = 2a$, se $a \geq 0$ e $f(a) = -2a - 1$, se $a < 0$. Claramente f é injetiva. De fato, seja a_1 e $a_2 \in \mathbb{Z}$.

Se a_1 e a_2 são positivos, temos que $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow 2a_1 = 2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2$. Porém, se a_1 e a_2 forem números negativos, temos que

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow -2a_1 - 1 = -2a_2 - 1 \Rightarrow -2a_1 = -2a_2 \Rightarrow a_1 = a_2.$$

Se $a_1 \geq 0$ e $a_2 < 0$, então $f(a_1) \neq f(a_2)$. De fato, se for $f(a_1) = f(a_2)$, teremos $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow 2a_1 = -2a_2 - 1$. O que é um absurdo, pois o primeiro membro é um natural par, enquanto o segundo, é um natural ímpar.

Lema 2.2 *Sejam X, Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração:

Como X, Y são enumeráveis, então existem aplicações injetivas $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}$ e $\psi: Y \rightarrow \mathbb{N}$.

Temos que a aplicação $h: X \times Y \rightarrow \mathbb{N}$ definida por $h(x, y) = 2^{\varphi(x)}3^{\psi(y)}$ é injetiva pois a decomposição em fatores primos é única e $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ também o são. Além disso, h fornece uma bijeção de $X \times Y$ sobre o conjunto enumerável $h(X \times Y) \subset \mathbb{N}$.

Vamos agora à demonstração de que o conjunto \mathbb{Q} dos números racionais é enumerável.

Teorema 2.2 *O conjunto dos números racionais é enumerável.*

Demonstração:

Consideremos a aplicação $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ definida por $f(x) = (m, n)$, com $x = \frac{m}{n}$ irredutível. Acontece que f é injetiva pois, se $x = \frac{m}{n}$ e $x_1 = \frac{m_1}{n_1} \in \mathbb{Q}$ e $f(x) = f(x_1)$, então $(m, n) = (m_1, n_1) \Rightarrow m = m_1$ e $n = n_1$.

Da proposição 2.9, temos que a aplicação h composta com f definida por $h \circ f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$ é injetiva. Assim, $h \circ f$ fornece uma bijeção de \mathbb{Q} sobre o conjunto enumerável $(h \circ f)(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{N}$.

Logo, \mathbb{Q} é enumerável.

2.4 Não enumerabilidade dos irracionais

Mostramos pouco atrás que o conjunto dos números racionais é enumerável. Esse resultado poderia nos levar a acreditar que todos os conjuntos infinitos também o são. Mostraremos agora que os irracionais formam um conjunto não enumerável, ou seja, possui cardinalidade diferente dos naturais e estabeleceremos este resultado como uma consequência da não enumerabilidade dos reais. Mas antes, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 2.10 *Uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

Demonstração:

Considere os conjuntos A_1, A_2, A_3, \dots . Como todos eles são enumeráveis, podemos escrevê-los na forma:

$$A_1 = \{a_{11}a_{12}a_{13}a_{14} \dots a_{1n} \dots\}$$

$$A_2 = \{a_{21}a_{22}a_{23}a_{24} \dots a_{2n} \dots\}$$

$$A_3 = \{a_{31}a_{32}a_{33}a_{34} \dots a_{3n} \dots\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A_n = \{a_{n1}a_{n2}a_{n3}a_{n4} \dots a_{nm} \dots\}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

A união $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ está contida na união disjunta $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ destes mesmos conjuntos (pode

ser que algum elemento pertença a vários conjuntos A_i , na união disjunta, este elemento é repetido em cada A_i ao qual ele pertence).

Definamos, agora, uma função

$$\phi: \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ (união disjunta)} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$a_{ij} \rightarrow (i, j)$$

É fácil ver que ϕ é injetiva. Finalmente, pelo Lema 1.2, sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

Logo, podemos compor as diversas funções injetivas

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \xrightarrow{f} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{ (união disjunta)} \xrightarrow{\phi} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{h} \mathbb{N}$$

e obtemos uma função injetiva de $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ nos naturais, garantindo, assim a sua enumerabilidade.

Demonstraremos agora a não enumerabilidade dos reais.

Proposição 2.11 *O conjunto \mathbb{R} dos números reais não é enumerável.*

Demonstração:

Para demonstrar esse resultado, usaremos o fato de que o intervalo $(0,1)$ possui a mesma cardinalidade de toda a reta. Observe que alguns números desse intervalo possuem mais de uma representação decimal como por exemplo, $0,7$ e $0,6999\dots$. Para excluir essa possibilidade, adotaremos para cada número sua representação decimal infinita. Assim, por exemplo:

$$0,7 = 0,6999\dots; 0,0343 = 0,342999\dots; \text{ etc.}$$

Suponhamos agora que seja possível estabelecer uma bijeção entre os números do intervalo $(0,1)$ e os naturais. Podemos então supor que os números desse intervalo sejam os elementos de uma sequência infinita, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Assim podemos listá-los da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots a_{1n} \dots \\ x_2 = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots a_{2n} \dots \\ x_3 = 0, a_{31} a_{32} a_{33} \dots a_{3n} \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n = 0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \dots a_{nn} \dots \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \end{array}$$

Nas quais a_{ij} são algarismos de 0 a 9 . No entanto, por mais extensa que seja nossa lista, podemos produzir um número que não pertença a ela através do processo da diagonal de Cantor. Esse processo consiste em construir um número que seja diferente de x_1 na primeira casa decimal, diferente de x_2 na segunda casa decimal, diferente de x_3 na terceira casa, e assim por diante, de sorte que, esse número, não será igual a nenhum dos números da lista acima. Para tanto, definimos $x = 0, a_1 a_2 \dots$ do seguinte modo: $a_1 = 1$ se $a_{11} = 5$ e $a_i = 5$ se $a_{ii} \neq 5$.

Dessa forma, cada x_i será diferente de x ao menos pelo elemento a_{ii} e como esse elemento não está em nossa lista, chegamos a um absurdo, o que nos leva a concluir que o conjunto dos números reais não é enumerável.

Corolário 2.3 *O conjunto dos números irracionais não é enumerável.*

Demonstração:

Os reais são a união dos racionais com os irracionais. Suponha que os irracionais sejam enumeráveis. Pelos resultados anteriores a união dos racionais com os irracionais seria enumerável, absurdo pois os reais são não enumeráveis. Logo os irracionais são não enumeráveis.

3 ALGUNS NÚMEROS IRRACIONAIS

Acabamos de demonstrar a existência do conjunto dos números irracionais, sua não enumerabilidade bem como sua maioria dentre os reais. Devida a sua importância na análise matemática, neste capítulo daremos ênfase a duas constantes: π e e . Demonstraremos também que são irracionais.

3.1 A irracionalidade do número e

A origem de e não é tão clara, ela parece recuar ao século XVI, quando se percebeu que a expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, que aparecia na fórmula dos juros compostos, tendia a um certo limite - cerca de 2,71828 - à medida que n aumenta. Assim e tornou-se o primeiro número a ser *definido* por um processo de limite, $e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ conforme $n \rightarrow \infty$. Durante algum tempo o novo número foi considerado uma curiosidade. O passo crucial para colocá-lo na vanguarda da matemática foi dado com a invenção do cálculo, quando se percebeu que o inverso da função logarítmica - que depois seria denotado como e^x - era igual à sua própria derivada. Isto imediatamente dá ao número e e a função e^x um papel central na análise.

Existem muitas fórmulas envolvendo o número e , dentre as quais:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

Esta série infinita foi descoberta por Newton em 1665, e pode ser obtida da expansão binomial de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, deixando $n \rightarrow \infty$. Ela converge muito rapidamente, devido ao aumento rápido dos valores dos fatoriais nos denominadores. Por exemplo, a soma dos primeiros onze termos (terminados com $\frac{1}{10!}$) é 2,718281801, o que já é uma boa aproximação.

O número e também pode ser representado por uma fração contínua infinita. Esta forma de representação, descrita a seguir, foi descoberta por Euler em 1737.

$$e = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3 + \frac{3}{4 + \frac{4}{5 + \dots}}}}}$$

Euler provou também que todo número racional pode ser escrito como uma fração contínua finita; inversamente, toda fração contínua infinita sempre representa um número

irracional. O número e também pode ser encontrado usando série de Maclaurin (1698-1746), como veremos a seguir.

Seja $f(x) = e^x$. Calculemos diversas derivadas sucessivas de f no ponto $x = 0$:

$$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$$

$$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = 1$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Logo, $f^{(n)}(0) = 1$. Então, a série de Maclaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$ de $f(x) = e^x$ é:

$$e^x = f(0) + \frac{f'(0)x}{1!} + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \text{ Para } x = 1, \text{ temos:}$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Demonstraremos agora uma importante característica desse número. Sua irracionalidade. Inicialmente precisaremos de um resultado simples, mas muito importante na análise matemática expressado pela seguinte proposição.

Proposição 3.1 *Toda sequência monótona limitada é convergente.*

Demonstração:

Sem perda de generalidade, suponhamos x_n monótona não-decrescente e limitada. Podemos escrever $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$. Seja $a = \sup X$ (que existe pelo axioma do supremo). Afirmamos que $a = \lim x_n$. Segue que, dado $\varepsilon > 0$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de X . Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x_{n_0} \leq a$. Assim, $\forall n > n_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n < a + \varepsilon$, portanto, $\lim x_n = a$.

Dessa forma, podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 3.2 *A sequência cujo termo geral é $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$ é convergente.*

Demonstração:

Esta sequência é evidentemente monótona crescente pois $a_{n+1} > a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Resta-nos mostrar que é limitada.

Começando com $n = 3$, teremos:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n > 1 \cdot 2 \cdot 2 \dots 2 = 2^{n-1}, \text{ portanto, } a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Nesta soma, a partir do segundo termo, temos uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Aplicando a fórmula $S = \frac{a_1}{1-q}$, fica: $S = \frac{1}{1-1/2} = 2$. Daí teremos $a_n < 1+2=3$. Logo, a

sequência a_n é limitada superiormente por 3 e, pela Proposição 2.1, é convergente.

Escrevemos $\lim a_n = e$ e mostraremos que a sequência cujo termo geral é

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ converge para o mesmo limite que } a_n.$$

Proposição 3.3 Se $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, então $\lim b_n = e$.

Demonstração:

Pelo teorema binomial temos:

$$b_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Como a expressão dentro de cada parêntese é menor que 1, temos que $b_n \leq a_n$, assim $b_n \leq \lim a_n$. Portanto, a sequência b_n também tem um limite superior. Além disso, b_n é monótona crescente pois $b_{n+1} > b_n$ para todo n . De fato:

$$b_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) >$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

pois o último termo de b_{n+1} é positivo. Acontece que

$$n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{a}{n+1} > 1 - \frac{a}{n} \quad \forall 0 < a < n. \text{ Assim, teremos:}$$

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) > \\
&> 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = b_n.
\end{aligned}$$

Logo, $b_{n+1} > b_n$. Assim, pela Proposição 2.1, b_n também é convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Por outro lado, quando $p < n$, vale:

$$b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{p!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{p-1}{n}\right).$$

Agora vamos deixar n aumentar sem limites enquanto mantemos p fixo. Da desigualdade acima obtemos $b_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{p!} = a_p$. Como esta desigualdade vale para todo $p \in \mathbb{N}$, segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \geq \lim_{p \rightarrow \infty} a_p$. Mas já vimos que $\lim b_n \leq \lim a_n$. Logo, só podemos ter $\lim b_n = \lim a_n = e$.

Nossa prova também mostra que $\lim a_n = e$ encontra-se entre 2 e 3. Na realidade vale $e \cong 2,7182$, com quatro casas decimais exata.

Para finalmente demonstrarmos a irracionalidade de e uma última proposição será necessária.

Proposição 3.4 *Se $q \geq 2$, então o somatório $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, em que*

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(q+1)(q+2)\dots(q+i)}, \text{ não é um inteiro.}$$

Demonstração:

Claramente $S_n > 0$ para todo n . Como $q \geq 2$, temos que:

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

Usando a fórmula para a soma de uma série geométrica infinita, na última desigualdade obtemos: $S = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$. Logo, $0 < S_n < \frac{1}{2}$.

Finalmente;

Teorema 3.1 *e é irracional.*

Demonstração:

Suponhamos que e seja racional e então mostramos que esta suposição leva a uma contradição. Vamos fazer $e = \frac{p}{q}$, em que p e q são inteiros. Já mostramos que $2 < e < 3$, assim e não pode ser um inteiro e conseqüentemente o denominador q deve ser pelo menos 2. Assim:

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \dots$$

Multiplicando ambos os membros por $q!$ fica:

$$\frac{p \cdot q!}{q} = q! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(q-1)!} + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \right)$$

$$p(q-1)(q-2)\dots 2 \cdot 1 = q! + q! + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{(q-1)!} + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \dots + \frac{q!}{n!} + \dots$$

$$p(q-1)(q-2)\dots 2 \cdot 1 = [q! + q! + q(q-1)(q-2)\dots 4 \cdot 3 + q(q-1)(q-2)\dots 5 \cdot 4 + \dots q + 1] + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1)(q+2)\dots(q+n)} + \dots$$

O primeiro membro é obviamente um inteiro pois trata-se de um produto de inteiros. O segundo membro não é um inteiro, pois a expressão dentro dos colchetes também é um inteiro, mas o somatório dos termos remanescentes, pela proposição 2.4, não é. Esse absurdo completa a demonstração.

3.2 Um pouco da história do número π

O número mais famoso da história, π , representa a razão constante entre o perímetro de um círculo e o seu diâmetro. A história do número tem início cerca de 4.000 anos atrás, sendo que a existência de uma relação constante entre “a circunferência e o seu diâmetro” era conhecida por muitas das civilizações antigas.

Muitas civilizações antigas observaram através de medições que a razão entre o perímetro de diferentes círculos e seus respectivos diâmetros era sempre um mesmo valor. No entanto, foram os gregos que conseguiram compreender e explicar a lógica desta relação, que advém das propriedades de figuras semelhantes. Os gregos antigos compreenderam que números como π e $\sqrt{2}$ são diferentes dos números inteiros e dos números racionais utilizados em suas

matemáticas e, mesmo tendo conseguido provar a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o mesmo não ocorreu para π .

Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) conseguiu melhorar a aproximação dada ao número π , aproximando a circunferência por polígonos regulares de 12, 24, 48 e 96 lados e descobrindo as seguintes limitações para $\pi : 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, isto é, $3,14085 < \pi < 3,142857$.

Cerca de dezoito séculos depois de Arquimedes, um matemático francês chamado François Viète (1540-1603), no curso de seu trabalho em trigonometria, encontrou uma fórmula notável envolvendo o número π :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \dots$$

A descoberta desse *produto infinito* em 1593 foi um marco na história da matemática, pois pela primeira vez um processo infinito era escrito explicitamente como uma fórmula matemática. De fato, a característica mais extraordinária na fórmula de Viète, além de sua elegância, são os três pontos no final, indicando que ela continua e continua... *ad infinitum*. Ela mostra que o valor de π pode ser encontrado, pelo menos em princípio, usando-se repetidamente quatro operações da matemática elementar: adição, multiplicação, divisão e a extração da raiz quadrada, todas aplicadas ao número 2.

A fórmula de Viète quebrou uma importante barreira psicológica, já que o mero ato de escrever os três pontos no final sinalizava a aceitação dos processos infinitos na matemática e abria o caminho para seu uso generalizado. O grande matemático Isaac Newton descobriu outro produto infinito envolvendo π influenciado pelo trabalho de outro inglês, John Wallis (1616-1703). Eis o produto infinito de Newton para π :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots$$

E, em 1671, o escocês James Gregory (1638-1675) descobriu a série infinita:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

O que torna essas fórmulas tão notáveis é que o número π , originalmente definido em relação ao círculo, pode ser expresso somente através de inteiros, ainda que através de um processo infinito. Até hoje, essas fórmulas estão entre as mais belas de toda a matemática.

Sabe-se hoje que π é um número irracional, no entanto, essa característica só foi demonstrada em 1761 por Johann Heinrich Lambert (1728-1777).

3.3 A Irrracionalidade do número π

Nosso objetivo agora será demonstrar a irracionalidade de π , para tanto, necessitaremos de algumas propriedades da função $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$. Observe que

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}, \forall x \in (0,1) \text{ e que } f_n(x) = f_n(1-x).$$

Vamos iniciar nossa demonstração supondo que π^2 seja racional, assim, $\pi^2 = \frac{a}{b}$ com a e b primos entre si. Nosso objetivo é chegar a um absurdo, mostrando assim que π^2 não é racional. E que conseqüentemente π não pode ser racional, pois o quadrado de um racional é também um racional.

Para a conclusão da demonstração, vamos precisar da seguinte proposição.

Proposição 3.5 Para um n suficientemente grande e a um número positivo, $\frac{2a^n}{n!} < 1$.

Demonstração:

Sendo $N < n$, notamos que: $\frac{2a^n}{n!} = 2 \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N} \right) \left(\frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{n} \right)$. Fixando N

tal que $\frac{a}{N} < \frac{1}{2}$, cada um dos $n - N$ fatores do segundo parêntese será inferior a $\frac{1}{2}$. Logo:

$$\frac{2a^n}{n!} < 2 \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N} \right) \frac{1}{2^{n-N}} = 2 \left(\frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \dots \cdot \frac{a}{N} \right) \frac{2^N}{2^n} = \frac{2(2a)^N}{N!} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{C}{2^n}, \text{ em que } C \text{ é uma constante}$$

que só depende de N , que já está fixado. Assim, para um n suficientemente grande teremos

$$\frac{2a^n}{n!} < 1.$$

Um importante resultado sobre a função $f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$ é dado pela seguinte proposição.

Proposição 3.6 $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n+j}$.

Demonstração:

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}. \text{ Desenvolvendo } (1-x)^n \text{ fica:}$$

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \left[\binom{n}{0} 1^n (-x)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} (-x)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} (-x)^2 + \dots + \binom{n}{n-1} (-x)^{n-1} + \binom{n}{n} (-x)^n \right]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \left[\binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} (-1)x^{n+1} + \binom{n}{2} (-1)^2 x^{n+2} + \dots + \binom{n}{n-1} (-1)^{n-1} x^{2n-1} + \binom{n}{n} (-1)^n x^{2n} \right],$$

ou seja, $f_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j x^{n+j}$.

Estabeleceremos uma importante consequência dessa proposição no seguinte corolário.

Corolário 3.1 *Seja $f_n^{(m)}(x)$ a m -ésima derivada de $f_n(x)$. Então:*

- i) $f_n^{(m)}(0) = 0$ se $0 \leq m < n$ ou $m > 2n$.
- ii) $f_n^{(m)}(0)$ é um número inteiro se $n \leq m \leq 2n$.

Demonstração:

1ª Parte: $f_n^{(m)}(0) = 0$ se $0 \leq m < n$ ou $m > 2n$.

Basta observar que para $0 \leq m < n$ todos os termos são multiplicados por x e como zero é raiz de $f_n(x)$ com multiplicidade n , $f_n^{(m)}(0) = 0$.

De fato:

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} (1-x)^n$$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!} \left[n \cdot x^{n-1} (1-x)^n + n \cdot x^n (1-x)^{n-1} \right] = \frac{x^{n-1}}{n!} \left[n(1-x)^n - n \cdot x(1-x)^{n-1} \right]$$

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{n!} g_1(x), \text{ sendo } g_1(x) = n(1-x)^n - n \cdot x(1-x)^{n-1}$$

Generalizando:

$$f_n^{(m)}(x) = \frac{x^{n-m}}{n!} g_m(x) \text{ que é tal que } f_n^{(m)}(x) = 0 \text{ para } 0 \leq m < n.$$

Para $m > 2n$, obviamente $f_n^{(m)}(x) = 0$ pois o grau de $f_n(x)$ é $2n$.

2ª Parte:

Desenvolvendo $f_n(x)$, obtemos:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!} \left[c_0 x^n - c_1 x^{n+1} + c_2 x^{n+2} - \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1} x^{2n-1} + (-1)^n c_n x^{2n} \right] \text{ para}$$

convenientes $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$. Assim:

$$\begin{aligned}
f_n^{(n)}(0) &= \frac{n!c_0}{n!} \in \mathbb{Z} \\
f_n^{(n+1)}(0) &= -\frac{(n+1)!c_1}{n!} \in \mathbb{Z} \\
&\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
f_n^{(2n)}(0) &= \frac{(-1)^n(2n)!c_n}{n!} \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Portanto, $f_n^{(m)}(0)$ é um inteiro para $n \leq m \leq 2n$. Utilizando o mesmo raciocínio concluímos que o corolário também vale para $f_n^{(m)}(1)$.

Supondo $\pi^2 = \frac{a}{b}$, definiremos agora a função $H(x)$ da seguinte forma:

Definição 3.1 $H(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \dots + (-1)^{n-1} \pi^2 f_n^{(2n-2)}(x) + (-1)^n f_n^{(2n)}(x) \right]$

Assim, se $\pi^2 = \frac{a}{b}$, podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 3.7 $\frac{d}{dx} [H'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi H(x) \cos \pi x] = \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x.$

Demonstração:

Aplicando a regra do produto, fica:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} [H'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi H(x) \cos \pi x] &= [H''(x) \operatorname{sen} \pi x + \pi H'(x) \cos \pi x - \pi H'(x) \cos \pi x + \pi^2 H(x) \operatorname{sen} \pi x] = \\
&= [H''(x) + \pi^2 H(x)] \operatorname{sen} \pi x.
\end{aligned}$$

Mas $H''(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \dots + (-1)^{n-2} \pi^4 f_n^{(2n-2)}(x) + (-1)^{n-1} \pi^2 f_n^{(2n)}(x) \right]$ e

$\pi^2 H(x) = b^n \left[\pi^{2n+2} f_n(x) - \pi^{2n} f_n^{(2)}(x) + \dots + (-1)^{n-1} \pi^4 f_n^{(2n-2)}(x) + (-1)^n \pi^2 f_n^{(2n)}(x) \right]$, assim, teremos:

$$[H''(x) + \pi^2 H(x)] \operatorname{sen} \pi x = b^n \left[\pi^{2n+2} f_n(x) + \pi^{2n} f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) - \pi^{2n} f_n^{(2)}(x) + \dots
\right.$$

$$\left. \dots + (-1)^{n-1} \pi^2 f_n^{(2n)}(x) + (-1)^n \pi^2 f_n^{(2n)}(x) \right] \operatorname{sen} \pi x = \pi^{2n+2} b^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x = (\pi^2)^n \cdot \pi^2 b^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x.$$

Como supomos inicialmente $\pi^2 = \frac{a}{b}$, vem:

$$\frac{a^n}{b^n} \pi^2 b^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x = \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x.$$

Logo $\frac{d}{dx} [H'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi H(x) \cos \pi x] = \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x.$

Proposição 3.8 $H(0)$ e $H(1)$ são inteiros.

Demonstração:

Nas condições da definição, temos:

$$H(0) = b^n \left[\pi^{2n} f_n(0) - \pi^{2n-2} f_n''(0) + \dots + (-1)^{n-1} \pi^2 f_n^{(2n-2)}(0) + (-1)^n f_n^{(2n)}(0) \right].$$

Acontece que para $m < n$, pelo Corolário 2.1 teremos:

$$f_n(0) = 0, f_n''(0) = 0, \dots, f_n^{(n-1)}(0) = 0 \text{ de onde } H(0) \text{ fica resumida a}$$

$b^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \pi^{2j} f_n^{(2n-2j)}(0)$ para $n \leq 2n - 2j \leq 2n$. Mas ainda pelo corolário 3.1,

$f_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$ para $n \leq m \leq 2n$. Já para o fator $b^n \pi^{2j}$, lembrando que $\pi^2 = \frac{a}{b}$, temos:

$$b^n \pi^{2j} = a^j b^{n-j} \in \mathbb{Z}.$$

Logo $b^n \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \pi^{2j} f_n^{(2n-2j)}(0)$ para $n \leq 2n - 2j \leq 2n$, é inteiro, portanto $H(0)$

$\in \mathbb{Z}$.

Pelo mesmo raciocínio concluímos que $H(1)$ também é inteiro.

Proposição 3.9 Se $\pi^2 = \frac{a}{b}$, então $\int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx = \pi[H(1) + H(0)]$.

Demonstração:

Aplicando o teorema fundamental do cálculo, fica:

$$\int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx = [H'(x) \operatorname{sen} \pi x - \pi H(x) \cos \pi x]_0^1 = [(H'(1) \operatorname{sen} \pi - \pi H(1) \cos \pi) - (H'(0) \operatorname{sen} 0 - \pi H(0) \cos 0)] = [\pi H(1) + \pi H(0)] = \pi[H(1) + H(0)].$$

Finalmente, diante de todas as conclusões anteriores, podemos estabelecer o seguinte Teorema:

Teorema 3.2 π é irracional.

Demonstração:

Como $0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}$ em $(0,1)$, de todas as conclusões temos que:

$$\int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx < \pi^2 a^n \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} \pi x}{n!} dx = \frac{\pi^2 a^n}{n!} \int_0^1 \operatorname{sen} \pi x dx = \frac{\pi^2 a^n}{n!} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2\pi a^n}{n!}, \text{ ou seja,}$$

$$0 < \int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx < \frac{2\pi a^n}{n!}, \text{ como } \int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x) \operatorname{sen} \pi x dx = \pi[H(1) + H(0)], \text{ fica:}$$

$$0 < \pi[H(1) + H(0)] < \frac{2\pi a^n}{n!} \Rightarrow 0 < H(0) + H(1) < \frac{2a^n}{n!} < 1 \Rightarrow 0 < H(0) + H(1) < 1.$$

E isso é um absurdo, pois não existe número inteiro maior que zero e menor que um. Somos assim obrigados a abandonar a hipótese inicial que π^2 é racional e conseqüentemente π .

4 NÚMEROS ALGÉBRICOS E TRANSCENDENTES

4.1 Um pouco sobre números algébricos e transcendententes

Tendo em vista os resultados obtidos no capítulo II, classificamos os números reais em dois conjuntos disjuntos: os racionais e os irracionais. Além dessa classificação, existe uma outra, em números algébricos e transcendententes.

Questões envolvendo a natureza transcendental dos números fascinam os matemáticos desde meados do século XVIII, tornando-se uma área central da teoria dos números. “Às vezes, essas teorias não resolviam um problema original, mas elas passavam a ser ferramentas básicas na investigação de outras questões” (FIGUEIREDO).

Os números algébricos são identificados com certa facilidade: racionais, somas e produtos de raízes de números racionais e a unidade imaginária são exemplos, mas o que tornou esse estudo tão misterioso e desafiador era a incapacidade de exibir exemplos ou algum tipo de classificação para os números transcendententes.

Em 1874, Georg Cantor (1845-1918) provou que o conjunto dos números algébricos é enumerável, o que foi surpreendente: a enumerabilidade deste conjunto implicaria a existência de uma “quantidade” infinitamente maior de transcendententes do que algébricos, muito embora se conhecessem pouquíssimos exemplos. Consoante a Marques (2013), “esta teoria vive um grande paradoxo, se quase todos os números são transcendententes, porque demonstrar a transcendência de um número é, em geral, uma tarefa tão complicada”?

Grandes matemáticos deram suas contribuições a esta linha de pesquisa, como Cantor, Hilbert e Euler, mas o primeiro número a ter sua transcendência demonstrada foi dado em 1851 pelas mãos do francês Joseph Liouville (1809-1882) que passou a ser chamado de constante de Liouville em sua homenagem.

Em 1873 que Charles Hermite (1822-1901) provou que o Número de Euler é transcendente.

Aproximadamente uma década após esta célebre constatação, o alemão Ferdinand von Lindemann (1852-1939) publicou uma bela e “simples” demonstração que Pi era transcendente. Alexander Gelfond, em 1934, e Theodor Schneider, em 1935, resolveram independentemente o famoso 7º problema de Hilbert proposto em 1900 sobre a transcendência de números como "O teorema de Gelfon Schneider (como ficou conhecido), definiu a natureza algébrica da potenciação de números, estabelecendo uma larga classe de números transcendententes.

Definição 4.1 *Se um número real x satisfizer uma equação da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$, com coeficientes inteiros, dizemos que este número é algébrico.*

Sobre a definição acima, duas observações devem ser feitas. Tendo em vista resultados posteriores, sempre que tomarmos um polinômio para o qual um número α é raiz, suporemos o polinômio de menor grau possível para o qual isso ocorre. A outra observação é que, se dividirmos todos os termos da equação pelo coeficiente dominante, teremos x satisfazendo agora uma equação com coeficientes racionais. Assim, uma definição equivalente seria “*Se um número real x satisfizer uma equação da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n = 0$, com coeficientes racionais, dizemos que este número é algébrico*”.

A maioria dos números encontrados na álgebra elementar podem ser imaginados como soluções para equações simples; mais especificamente, são números algébricos. Por exemplo, os números -1 , $2/3$ e $\sqrt{2}$ são soluções, respectivamente, das equações polinomiais $x + 1 = 0$, $3x - 2 = 0$ e $x^2 - 2 = 0$. O número $i = \sqrt{-1}$ também pertence a esse grupo, visto que ele satisfaz a equação $x^2 + 1 = 0$; entretanto, vamos restringir nossa discussão aos números reais.

Até mesmo um número de “aparência” complicada como $\sqrt[3]{(1 - \sqrt{2})}$ pertence a essa classe, já que ele satisfaz a equação $x^6 - 2x^3 - 1 = 0$, como se pode constatar facilmente.

Claramente todo número racional a/b é algébrico, já que ele satisfaz a equação $bx - a = 0$. Assim, se um número não for algébrico, deve ser irracional. A recíproca dessa afirmação, contudo, não é verdadeira; um número irracional pode ser algébrico, como mostra o exemplo de $\sqrt{2}$. Surge agora uma questão importante: existirão números irracionais *não algébricos*? Por volta do início do século XIX os matemáticos começaram a suspeitar que a resposta fosse sim, mas nenhum número desse tipo tinha sido encontrado. Parecia que um número não algébrico, se fosse encontrado, seria uma singularidade.

Foi em 1844 que o matemático francês Joseph Liouville (1809-1882) provou que os números não algébricos de fato existiam. Sua prova, embora não fosse simples, permitiu que ele produzisse vários exemplos de tais números. Um dos exemplos, conhecido como número de Liouville, é $\frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \frac{1}{10^{4!}} + \dots$, cuja expansão decimal é 0,110001000000000000000000100... onde os blocos cada vez maiores de zeros são devidos à presença de $n!$ no expoente do denominador do número de Liouville, o que faz com que os termos diminuam de um modo extremamente rápido. Outro exemplo é 0,12345678910111213..., em que os dígitos são os números naturais em ordem. Um número real não algébrico é chamado de *transcendente*. Não há nada de místico nessa palavra, ela indica apenas que esses números

transcendem, ou seja, vão além no reino dos números algébricos. A seguir definimos de forma mais precisa números transcendentos.

Definição 4.2 *Todo número real que não é raiz de nenhuma equação da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$, com coeficientes inteiros é transcendente.*

Em contraste com os números irracionais, cuja descoberta surgiu de um problema comum na geometria, os números transcendentos foram “criados” especificamente com o propósito de demonstrar que tais números existiam.

Nosso objetivo nesse capítulo será demonstrar algumas características importantes do conjunto dos números algébricos.

4.2 Caracterização dos números algébricos e transcendentos

Proposição 4.1 *O conjunto dos algébricos é denso em \mathbb{R} .*

Demonstração:

Basta observar que o conjunto dos números algébricos contém todos os racionais e, como os racionais são densos em \mathbb{R} , conclui-se trivialmente que os algébricos são densos.

Nosso objetivo agora será demonstrar a enumerabilidade dos números algébricos, para isso, vamos considerar, sem demonstração, o teorema fundamental da álgebra que afirma: *Todo polinômio não constante de grau n , com coeficientes complexos, tem n raízes complexas.*

Precisaremos também da seguinte proposição:

Proposição 4.2 *Uma reunião enumerável de conjuntos finitos é enumerável*

Demonstração:

No capítulo II demonstramos que uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Como todo conjunto finito é enumerável temos, portanto, um caso particular da Proposição 2.10.

Teorema 4.1 *O conjunto dos números algébricos é enumerável.*

Demonstração:

Considere um polinômio com coeficientes inteiros

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$$

Vamos definir altura do polinômio como sendo o número natural

$$h(P) = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + n - 1.$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, para cada polinômio de grau n , teremos no máximo n raízes complexas. Eventualmente todas, algumas ou nenhuma podem ser reais.

Reciprocamente, para cada altura h teremos um número finito de polinômios. Seja $\varphi(h)$ esse número. Assim teremos: $\varphi(1) = 2, \varphi(2) = 8, \dots$.

Mais precisamente,

$$\varphi(1) = \# \{p_1(x) = x, p_2(x) = -x\}$$

$$\varphi(2) = \# \{p_1(x) = x + 1, p_2(x) = x - 1, p_3(x) = -x + 1, p_4(x) = -x - 1,$$

$$p_5(x) = x^2, p_6(x) = -x^2, p_7(x) = 2x, p_8(x) = -2x\}$$

e assim por diante.

Temos, portanto, que as raízes de todos os polinômios com uma dada altura formam um conjunto finito e como podemos enumerar todas essas alturas, segue da Proposição 4.2 que o conjunto \mathbb{A} de todos os números algébricos reais é enumerável.

Corolário 4.1 *Existem números transcendentos e estes são não enumeráveis.*

Demonstração:

Como o conjunto \mathbb{R} é não enumerável (Proposição 2.11, Cap. II) e o conjunto \mathbb{A} é enumerável, segue que existe um conjunto $\mathcal{T} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ não enumerável, pois $\mathbb{R} = \mathbb{A} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{A})$.

De fato, se \mathcal{T} fosse enumerável teríamos que \mathbb{R} também o era, contrariando a Proposição 2.11 de que \mathbb{R} é não enumerável.

O objetivo do nosso próximo teorema é demonstrar que os algébricos formam um corpo, para isso, vamos necessitar de alguns resultados da álgebra linear.

Consideraremos, a partir de agora, V como sendo espaço vetorial sobre o corpo dos racionais.

Sejam V um espaço vetorial e $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$.

Consideramos a equação $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$.

Sabemos que essa equação admite pelo menos uma solução: $a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0$, chamada solução trivial.

Definição 4.3

(1) O subconjunto S diz-se *linearmente independente* (LI) se admite apenas a solução trivial.

(2) Se existirem soluções não triviais, isto é, soluções com alguns $a_i \neq 0$, diz-se que o conjunto S é *linearmente dependente* (LD).

Definição 4.4 Um subconjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ é uma base do espaço vetorial V se:

- i) B é LI
- ii) B gera V

A dimensão de um espaço vetorial V é a cardinalidade de qualquer base de V .

Seja V um espaço vetorial tal que $\dim V = n$. Se S é um subespaço de V , então $\dim S \leq n$. No caso de $\dim S = n$, tem-se $S = V$. Assim, podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 4.3 Se V é um espaço vetorial de dimensão n , então qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é linearmente dependente (LD).

Demonstração:

Seja $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial V e $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ um conjunto qualquer de m vetores de V , com $m > n$. Pretende-se mostrar que B' é LD. Para tanto, basta mostrar que existem escalares x_1, x_2, \dots, x_m não todos nulos tais que:

$$x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m = 0 \quad (1)$$

Como B é uma base de V , cada vetor w_i pertencente a B' é uma combinação linear dos vetores de B , isto é, existem números $\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i$, tais que:

$$\begin{aligned} w_1 &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \\ w_2 &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \\ &\vdots \\ w_m &= \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \dots + \delta_n v_n \end{aligned} \quad (2)$$

Substituindo as relações (2) em (1), obtemos

$$\begin{aligned} &x_1 (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) + \\ &x_2 (\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n) + \\ &\vdots \\ &x_m (\delta_1 v_1 + \delta_2 v_2 + \dots + \delta_n v_n) = 0 \end{aligned}$$

Ordenando os termos convenientemente:

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \dots + \delta_1 x_m) v_1 + \\ &(\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \delta_2 x_m) v_2 + \\ &\vdots \\ &(\alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \dots + \delta_n x_m) v_n = 0 \end{aligned}$$

Tendo em vista que v_1, v_2, \dots, v_n são LI, os coeficientes dessa combinação linear são nulos, ou seja:

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \dots + \delta_1 x_m = 0$$

$$\alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \delta_2 x_m = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\alpha_n x_1 + \beta_n x_2 + \dots + \delta_n x_m = 0$$

Esse sistema linear homogêneo possui m variáveis x_1, x_2, \dots, x_m e n equações. Como $m > n$, existem soluções não triviais, isto é, existe $x_i \neq 0$. Logo $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ é LD.

Vamos agora demonstrar que \mathbb{A} forma um corpo.

Teorema 4.2 \mathbb{A} forma um corpo.

Demonstração:

Precisamos demonstrar as seguintes propriedades:

$$(i) \alpha, \beta \in \mathbb{A} \Rightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{A}$$

$$(ii) \alpha, \beta \in \mathbb{A} \Rightarrow \alpha \cdot \beta \in \mathbb{A}$$

$$(iii) \alpha \in \mathbb{A} \Rightarrow -\alpha \in \mathbb{A}$$

$$(iv) \alpha \in \mathbb{A}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{A}$$

Demonstração de (iii):

Se α é algébrico então ele é raiz de uma equação com coeficientes inteiros do tipo $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$.

Portanto $-\alpha$ é raiz da equação $a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} x^{n-1} + (-1)^n a_n x^n = 0$.

Demonstração de (iv):

Se α satisfaz a equação $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n = 0$ e $\alpha \neq 0$, então $\frac{1}{\alpha}$ satisfaz a equação $a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n = 0$.

De fato temos, $a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_n \alpha^n = 0$.

Multiplicando por $\frac{1}{\alpha^n}$ obtemos,

$$a_0 \frac{1}{\alpha^n} + a_1 \frac{1}{\alpha^{n-1}} + a_2 \frac{1}{\alpha^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{\alpha} + a_n = \frac{1}{\alpha^n} (a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \dots + a_{n-1} \alpha^{n-1} + a_n \alpha^n) =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n} \cdot 0 = 0.$$

Para as demonstrações de (i) e (ii) vamos considerar os números algébricos como raízes de polinômios com coeficientes racionais, além disso, suporemos o polinômio de menor grau para o qual isso ocorre.

Demonstração de (i):

Considere os polinômios p_1 e p_2 com coeficientes racionais obtidos a partir da divisão pelo coeficiente do termo de maior grau.

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

$$p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{m-1}x^{m-1} + x^m$$

Sejam α e β algébricos, raízes das equações polinomiais $p_1 = 0$ e $p_2 = 0$, respectivamente assim:

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0 \quad \text{e} \quad (3.10)$$

$$\beta^m + b_{m-1}\beta^{m-1} + \dots + b_2\beta^2 + b_1\beta + b_0 = 0 \quad (3.11)$$

ou seja,

$$\alpha^n = -a_{n-1}\alpha^{n-1} - \dots - a_2\alpha^2 - a_1\alpha - a_0 \quad \text{e} \quad (3.12)$$

$$\beta^m = -b_{m-1}\beta^{m-1} - \dots - b_2\beta^2 - b_1\beta - b_0 \quad (3.13)$$

isto é, α^n está expresso como uma combinação linear de $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$, usando coeficientes racionais e β^m como combinação linear de $1, \beta, \dots, \beta^{m-1}$. Multiplicando (3.10) por α e substituindo-se o α^n obtido na expressão pelo seu valor dado em (3.12), obtemos α^{n+1} expresso ainda como combinação linear de $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$ usando coeficientes racionais. E assim sucessivamente todas as potências α^j para $j \geq n$, são expressas como combinações lineares de $1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}$, usando-se coeficientes racionais.

O mesmo se conclui para β^k , para $k \geq m$ como combinações lineares de $1, \beta, \dots, \beta^{m-1}$.

Nosso objetivo agora será mostrar que $\alpha + \beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau mn com coeficientes racionais, implicando então que $\alpha + \beta$ seja algébrico.

Consideremos os $m \cdot n + 1$ números $1, \alpha + \beta, (\alpha + \beta)^2, \dots, (\alpha + \beta)^{mn}$ e o espaço vetorial sobre \mathbb{Q} gerado pelos elementos $B = \{1, \alpha, \beta, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \dots, \alpha^{n-1}\beta^{m-1}\}$.

Como B é um conjunto de geradores de $m \cdot n$ elementos, então possui uma base com cardinalidade menor ou igual a $m \cdot n$. Então a dimensão deste espaço é menor ou igual a $m \cdot n$, logo, os $m \cdot n + 1$ números acima são L.D. Portanto, existem racionais (r_0, \dots, r_{mn}) nem todos nulos, tais que $r_0 + r_1(\alpha + \beta) + r_2(\alpha + \beta)^2 + \dots + r_{mn}(\alpha + \beta)^{mn} = 0$.

O que mostra que $\alpha + \beta$ satisfaz uma equação polinomial de grau $\leq mn$.

Demonstração de (ii):

Utilizamos o mesmo raciocínio da demonstração de (i). No entanto consideramos agora os $m \cdot n + 1$ números $1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \dots, (\alpha\beta)^{m \cdot n}$.

Seguindo o mesmo argumento de (i), pela Proposição 3.3, os w_i s são os $m \cdot n + 1$ números $1, \alpha\beta, (\alpha\beta)^2, \dots, (\alpha\beta)^{m \cdot n}$ e os v_i s são os $m \cdot n$ números $\alpha^j \beta^k$. Assim, existem $(s_0, s_1, \dots, s_{mn})$ racionais, nem todos nulos, tais que

$$s_0 + s_1(\alpha\beta) + s_2(\alpha\beta)^2 + \dots + s_{mn}(\alpha\beta)^{mn} = 0.$$

O que mostra que $\alpha\beta$ é raiz de uma equação polinomial de grau $\leq m \cdot n$.

5 ALGUNS NÚMEROS TRANSCENDENTES: e e π .

5.1 A transcendência do número e

No capítulo II, demonstramos a irracionalidade do número e bem como o caracterizamos de diferentes formas. Nosso objetivo, nesse capítulo, será demonstrar a transcendência do número e .

Inicialmente vamos considerar um polinômio $F(x)$ definido como a soma de um polinômio $P(x)$ de grau r com suas respectivas derivadas.

Proposição 5.1 *Seja a função $F(x)=P(x)+P'(x)+\dots+P^{(r)}(x)$, em que $P(x)$ é um polinômio de grau r e $P^{(r)}(x)$ representa a derivada de ordem r de $P(x)$. Então, $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x)$.*

Demonstração:

Temos $e^{-x}F(x) = e^{-x}P(x) + e^{-x}P'(x) + \dots + e^{-x}P^{(r)}(x)$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) &= -e^{-x}P(x) + e^{-x}P'(x) - e^{-x}P'(x) + e^{-x}P''(x) - e^{-x}P''(x) \dots \\ &+ e^{-x}P^{(r)}(x) - e^{-x}P^{(r)}(x) + e^{-x}P^{(r+1)}(x), \end{aligned}$$

como $P^{(r+1)}(x) = 0$, pois $P(x)$ tem grau r , temos $\frac{d}{dx}(e^{-x}F(x)) = -e^{-x}P(x)$.

Proposição 5.2 *Temos que, $F(k) - e^k F(0) = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$, para todo $k > 0$, onde θ_k é um número entre 0 e 1.*

Demonstração:

Uma vez que $0 < \theta_k < 1$, vamos aplicar o Teorema do Valor Médio à função $e^{-x}F(x)$.

Temos então:

$$\frac{e^{-k}F(k) - e^{-0}F(0)}{k - 0} = \frac{d}{dx} \left(e^{-k \cdot \theta_k} F(k\theta_k) \right) \Rightarrow$$

$$e^{-k}F(k) - F(0) = -ke^{-k \cdot \theta_k} P(k\theta_k) \Rightarrow$$

$$F(k) - e^k F(0) = -ke^{k(1-\theta_k)} P(k\theta_k),$$

sendo que na segunda linha usamos a proposição 4.1.

Devido à importância dessa expressão para a demonstração, vamos definir a constante do segundo membro como:

Definição 5.1 $\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)}P(k\theta_k)$.

A fim de generalizarmos resultados posteriores, precisaremos de um importante resultado sobre o polinômio $Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j$ que será exposto na seguinte proposição.

Proposição 5.3 *Seja $Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j$ um polinômio com coeficientes inteiros e seja $p < r$ um inteiro primo. Então:*

$$(i) \quad Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \leq r.$$

$$(ii) \quad \frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x), p \leq i, \text{ é um polinômio com coeficientes inteiros divisíveis por } p.$$

Demonstração:

$$\text{Temos que } Q(x) = \sum_{j=0}^r a_j x^j = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r.$$

Então,

$$Q^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2 x + \dots + r a_r x^{r-1}$$

$$Q^{(2)}(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + r(r-1)a_r x^{r-2}$$

$$Q^{(3)}(x) = 6a_3 + 24a_4 x + \dots + r(r-1)(r-2)a_r x^{r-3}$$

$$= \frac{3!}{0!} a_3 + \frac{4!}{1!} a_4 x + \dots + \frac{r!}{(r-3)!} a_r x^{r-3}$$

⋮

⋮

$$\text{Logo, } Q^{(i)}(x) = \frac{i!}{0!} a_1 + \frac{(i+1)!}{1!} a_{i+1} x + \frac{(i+2)!}{2!} a_{i+2} x^2 + \dots + \frac{r!}{(r-1)!} a_r x^{r-1}, \text{ ou seja,}$$

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{j=i}^r \frac{j!}{(j-i)!} a_j x^{j-i}, i \leq r \text{ o que prova a primeira parte.}$$

Quanto a segunda, observemos que os coeficientes de $\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$ serão da forma

$$\frac{j}{(j-i)!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} a_j, \text{ onde } a_j \text{ é inteiro.}$$

Temos $p \leq i$, p fixo e $j = i, \dots, r$.

No primeiro coeficiente, temos $j = i$ e, conseqüentemente,

$$\frac{j!}{0!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p(p-1)!}{(p-1)!} = j(j-1) \dots p.$$

No segundo coeficiente, temos $j = i+1$, portanto,

$$\frac{j!}{1!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p(p-1)!}{(p-1)!} = j(j-1) \dots p.$$

No terceiro coeficiente, temos $j = i+2$, portanto,

$$\frac{j!}{2!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p(p-1)!}{2 \cdot 1(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p}{2}.$$

Observemos que o numerador tem $j - (p - 1) = j - p + 1$ fatores. Como $i + 2 \geq p + 2$, temos $j \geq p + 2$, ou seja, $j - p \geq 2$, o que implica $j - p + 1 \geq 3$. Assim, podemos concluir que o numerador terá pelo menos 3 fatores, logo é divisível por 2 e por p .

No quarto coeficiente, temos $j = i + 3$, portanto,

$$\frac{j!}{3!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p(p-1)!}{3 \cdot 2 \cdot 1(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p}{3!}$$

e, nesse caso, o numerador terá pelo menos 4 fatores, logo é divisível por 6 e por p .

Generalizando, teremos para $j = i + k, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{j!}{k!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p(p-1)!}{k!(p-1)!} = \frac{j(j-1) \dots p}{k!},$$

sendo que o numerador tem pelo menos $k + 1$ fatores, ou seja,

$$j - p + 1 \geq k + 1 \Rightarrow$$

$$j - k + 1 \geq p + 1.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{j!}{k!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} &= \frac{j(j-1) \dots (j-k+1)(j-k) \dots p}{k!} \\ &= \frac{j(j-1) \dots (j-k+1)}{k!} \cdot \frac{(j-k)!}{(j-k)!} (j-k) \dots p \\ &= \frac{j!}{k!(j-k)!} (j-k) \dots p \\ &= \binom{j}{k} (j-k) \dots p, \end{aligned}$$

sendo $\binom{j}{k}$ um número binomial, o que implica $\binom{j}{k} \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\binom{j}{k}(j-k) \dots p \in \mathbb{Z}$ e,

portanto, $\frac{j!}{k!} \cdot \frac{1}{(p-1)!} \in \mathbb{Z}$ e é divisível por p . Dessa forma, os coeficientes de $\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$ são

todos inteiros divisíveis por p .

Definiremos agora o polinômio $P(x)$, da proposição 4.1, como sendo

Definição 5.2
$$P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p \dots (n-x)^p.$$

Diante dessa definição, podemos estabelecer importantes propriedades expressadas na seguinte proposição e nos corolários que seguem.

Proposição 5.4 O polinômio $P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p \dots (n-x)^p$, sendo p um número primo tal

que $p > n \in \mathbb{Z}^*$ e $p > c_0$, pode ser escrito na forma

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \dots + \frac{b_{np}}{(p-1)!} x^{np+p-1}, \text{ sendo } b_1, \dots, b_{np} \text{ constantes.}$$

Demonstração:

$$\text{Temos: } P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p \dots (n-x)^p.$$

Façamos $H(x) = (1-x)(2-x)\dots(n-x)$ e observamos que $H(x)$ é da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + n!$, sendo a_1, \dots, a_n constantes e conseqüentemente, teremos

$$[H(x)]^p = b_{np} x^{np} + b_{n-1} x^{np-1} + \dots + b_1 x + (n!)^p, \text{ sendo } b_1, \dots, b_{np} \text{ constantes.}$$

Voltando a $P(x)$, temos,

$$P(x) = \frac{x^{p-1}}{(p-1)!} [H(x)]^p \Rightarrow$$

$$P(x) = \frac{b_{np}}{(p-1)!} x^{np+p-1} + \dots + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \frac{(n!)^p}{(p-1)!}$$

ou seja,

$$P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \dots + \frac{b_{np}}{(p-1)!} x^{np+p-1}, \text{ sendo } b_1, \dots, b_{np} \text{ constantes.}$$

Corolário 5.1 Nas condições da Proposição 4.4, temos $P^{(i)}(k) = 0; k = 1, \dots, n; \text{ sendo } i < p$.

Demonstração:

Basta observar que $1, \dots, n$ são raízes de multiplicidade p do polinômio P . Como o grau de P é maior que p (Proposição 4.4), temos que $1, \dots, n$ são raízes das derivadas de ordens menores que p .

$$\text{De fato: } P(x) = (k-x)^p g(x),$$

$$\text{sendo } g(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^p \dots (k-1-x)^p (k+1-x)^p \dots (n-x)^p.$$

$$\begin{aligned} \text{Logo: } P'(x) &= -p(k-x)^{p-1} g(x) + (k-x)^p g'(x) \\ &= (k-x)^{p-1} (-p g(x) + (k-x) g'(x)) \\ &= (k-x)^{p-1} g_1(x), \end{aligned}$$

$$\text{sendo } g_1(x) = -p g(x) + (k-x) g'(x).$$

Generalizando, teremos: $P^{(i)}(x) = (k-x)^{p-i} g_i(x)$, que é tal que

$$P^{(i)}(k) = 0; k = 1, \dots, n; \text{ sendo } i < p.$$

Corolário 5.2 Nas condições da Proposição 4.4, $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e $P^{(i)}(0) = 0, i < p-1$.

Demonstração:

$$1^{\text{a}} \text{ Parte: } P^{(p-1)}(0) = (n!)^p.$$

$$\text{De } P(x) = \frac{(n!)^p}{(p-1)!} x^{p-1} + \frac{b_1}{(p-1)!} x^p + \dots, \text{ temos } P^{(p-1)}(x) = (n!)^p + b_1 p x + \dots \text{ e,}$$

assim, o único termo que não é fatorado por x é $(n!)^p$. Daí, ao aplicarmos $x = 0$, esse é o único termo que não se anulará.

$$2^{\text{a}} \text{ Parte: } P^{(i)}(0) = 0, i < p-1.$$

Nesse caso, qualquer $i < p-1$ será menor que o menor expoente de x em P , o que fará com que todos os termos do polinômio $P^{(i)}(x)$ estejam fatorados por x e, conseqüentemente, se tornem nulos ao aplicarmos $x = 0$.

A partir de agora vamos supor que e seja algébrico, ou seja, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros e de menor grau possível (tomaremos também $c_0 > 0$). Assim,

$$c_n e^n + c_{n-1} e^{n-1} + \dots + c_1 e + c_0 = 0. \quad (5.1)$$

Nosso objetivo agora é chegar a alguma contradição com essa hipótese.

Proposição 5.5 Se e é algébrico, satisfazendo à equação (5.1), então

$$c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) = c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n.$$

Demonstração:

Da Proposição 4.2, temos:

$$F(1) = -e^{(1-\theta_1)} P(\theta_1) + eF(0) = \varepsilon_1 + eF(0)$$

$$F(2) = -2e^{2(1-\theta_2)} P(2\theta_2) + e^2 F(0) = \varepsilon_2 + e^2 F(0)$$

⋮

⋮

$$F(n) = -ne^{n(1-\theta_n)} P(n\theta_n) + e^n F(0) = \varepsilon_n + e^n F(0).$$

Então,

$$\begin{aligned} c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) &= c_0 F(0) + c_1 \varepsilon_1 + c_1 e F(0) + \dots + c_n \varepsilon_n + c_n e^n F(0) \\ &= c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) = c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n, \end{aligned} \quad (5.2)$$

Devido à hipótese assumida acima que e satisfaz (5.1).

Nosso objetivo agora será demonstrar que para um determinado polinômio $P(x)$ o lado esquerdo dessa igualdade é um inteiro não divisível por um primo p enquanto o lado direito pode se tornar menor que 1, em valor absoluto, para um primo p suficientemente grande. O que nos dará um absurdo.

Proposição 5.6 *Seja $F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(np+p-1)}(x)$, conforme definido na Proposição 4.1, então $F(k)$, para $k=1, \dots, n$, é um inteiro divisível por p e $F(0)$ é um inteiro não divisível por p . O polinômio $P(x)$ é o da definição 5.2.*

Demonstração:

Vamos considerar os seguintes fatos:

1. $P(k) = 0, k = 1, \dots, n$ pois $P(x) = \frac{1}{(p-1)!} x^{p-1}(1-x)^p \dots (n-x)^p$.

2. Do Corolário 4.1, temos que $P^{(i)}(k) = 0; i < p$.

3. Todo $P^{(i)}(x)$ pode ser escrito na forma $\frac{1}{(p-1)!} Q^{(i)}(x)$, sendo $Q^{(i)}(x)$ definido de

acordo com a Proposição 4.3 (para ver isso, basta derivar P na forma não fatorada, conforme Proposição 4.4. Daí, $P^{(i)}(k)$, para $i \geq p$ é um inteiro divisível por p .

Portanto, $F(k)$ fica resumida ao somatório dos $P^{(i)}(k)$, onde $i \geq p$, os quais são inteiros e divisíveis por p .

Para $F(0)$ consideramos também que:

4. $P(0) = 0$.

5. Do Corolário 4.2, temos que $P^{(p-1)}(0) = (n!)^p$ e $P^{(i)}(0) = 0, i < p - 1$.

6. $(n!)^p$ não é divisível por p pois p é primo e $p > n \Rightarrow n$ não é divisível por $p \Rightarrow n!$ não é divisível por $p \Rightarrow (n!)^p$ também não é divisível por p .

Portanto, $F(0)$ é um somatório de números inteiros, em que um dos termos que $(P^{(p-1)}(0) = (n!)^p)$ não é divisível por p e os demais são divisível por p . Logo $F(0)$ é um inteiro não divisível por p .

Considerando a igualdade 4.2 da Proposição 4.5, podemos estabelecer o seguinte corolário.

Corolário 5.3 O número $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$ é um número não divisível por p , sendo $0 < c_0 < p$.

Demonstração:

Como $p > c_0$, então c_0 não é divisível por p , e da Proposição 5.6, temos que $F(0)$ também não é divisível por p . Portanto, $c_0F(0)$ não é divisível por p , pois p é primo.

Se supusermos que p divide $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$, então p dividirá todos os termos do somatório, o que não é verdade, pois $c_0F(0)$ não é divisível por p . Logo, p não divide $c_0F(0) + c_1F(1) + \dots + c_nF(n)$.

Para as duas próximas proposições, utilizaremos a constante da definição 5.1.

Proposição 5.7 Para $k \leq n$ inteiro positivo, $|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$. Sendo ε_k da Definição 5.1, calculado para o polinômio $P(x)$ da Proposição 5.5.

Demonstração:

$$\varepsilon_k = -ke^{k(1-\theta_k)} \frac{1}{(p-1)!} (k\theta_k)^{p-1} (1-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p,$$

sendo $0 < \theta_k < 1$ e $k \leq n$. Daí,

$$|\varepsilon_k|(p-1)! = |ke^{k(1-\theta_k)} k^{p-1} \theta_k^{p-1} (1-k\theta_k)^p \dots (n-k\theta_k)^p|.$$

Com $0 < \theta_k < 1 \Rightarrow j - k\theta_k < j; j = 1, \dots, n$. Então,

$$|\varepsilon_k|(p-1)! < |k^p e^{k(1-\theta_k)} (\theta_k)^{p-1} 1^p 2^p \dots n^p|$$

ainda de $0 < \theta_k < 1 \Rightarrow k(1-\theta_k) < k$. Daí

$$|\varepsilon_k|(p-1)! < |k^p e^k (\theta_k)^{p-1} (n!)^p|$$

e mais uma vez, de $0 < \theta_k < 1$,

$$|\varepsilon_k|(p-1)! < |k^p e^k (1)^{p-1} (n!)^p|.$$

Assim, $|\varepsilon_k| < \frac{|k^p e^k (n!)^p|}{(p-1)!}$. Como $k \leq n$, então $|\varepsilon_k| < \frac{n^p e^n (n!)^p}{(p-1)!}$.

Portanto, $|\varepsilon_k| \leq \frac{n^p e^n (n!)^p}{(p-1)!}$.

Proposição 5.8 Existe p primo tal que $|c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n| < 1$, sendo $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ da Proposição anterior.

Demonstração:

Temos $|c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n| \leq |c_1\varepsilon_1| + \dots + |c_n\varepsilon_n| = |c_1||\varepsilon_1| + \dots + |c_n||\varepsilon_n|$.

Como $|\varepsilon_k| \leq \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!}$, então

$$|c_1\varepsilon_1 + \dots + c_n\varepsilon_n| < (|c_1| + \dots + |c_n|) \frac{e^n n^p (n!)^p}{(p-1)!} = \frac{Cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!},$$

sendo $C = |c_1| + \dots + |c_n|$.

Vamos mostrar que existe p primo, suficientemente grande, tal que $\frac{cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!} < 1$.

Para isso, vamos fazer $x_p = \frac{cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!}$ e mostrar que essa sequência converge para 0.

$$\text{Tomemos } \left(\frac{x_{p+1}}{x_p} \right) = \frac{cn^{p+1} e^n (n!)^{p+1}}{[(p+1)-1]!} \cdot \frac{(p-1)!}{cn^p e^n (n!)^p} = \frac{cn^p n e^n (n!)^p (n!) (p-1)!}{p(p-1)! cn^p e^n (n!)^p} = \frac{n! \cdot n}{p}.$$

Logo $\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{p+1}}{x_p} \right) = \frac{n! \cdot n}{p} = 0$. Portanto, a série $\sum_{p \geq n} x_p$ converge, ou seja, a

sequência do termo geral x_p converge para 0. Assim, para um primo p suficientemente grande,

$$\text{teremos } x_p = \frac{cn^p e^n (n!)^p}{(p-1)!} < 1 \implies |c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n| < 1.$$

Teorema 5.1 *e é transcendente.*

Demonstração:

Consideremos os seguintes resultados:

- (1) Da Proposição 5.5, temos $c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n) = c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n$.
- (2) Do Corolário 5.3, temos que $c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n)$ é um inteiro não divisível por p .
- (3) Da Proposição 5.8, temos que para algum primo p , $|c_1 \varepsilon_1 + \dots + c_n \varepsilon_n| < 1$.

Chegamos, assim, a uma contradição! Por (1), $|c_0 F(0) + c_1 F(1) + \dots + c_n F(n)|$ é um inteiro menor que um, ou seja, zero. Por (2), temos que esse inteiro não é divisível por p . Logo, não pode ser zero!

Essa contradição surgiu do fato de termos admitido que e fosse algébrico, ou seja, que poderia ser raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Logo, e não é algébrico, sendo, portanto, transcendente.

5.2 A TRANSCENDÊNCIA DO NÚMERO π

Para mostrar a transcendência de π precisamos de determinados resultados sobre Análise Complexa.

O primeiro trata-se do Teorema da Desigualdade do Valor Médio, para isso exploramos o Teorema do Valor Médio para números reais, a saber, seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$. Suponha que a derivada $f'(x)$ existe para todo x no intervalo aberto (a, b) . Então existe λ com $0 < \lambda < 1$ tal que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \lambda(b - a)).$$

Para obter um teorema de valor médio para funções complexas, utilizaremos algo sobre funções de duas variáveis. Representamos por \mathbb{C} o conjunto dos números complexos, isto é, números da forma $z = x + iy$, onde $x, y \in \mathbb{R}$. Uma função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tem derivada no ponto z se o limite abaixo existe

$$f'(z) = \lim_{z_0 \rightarrow 0} \frac{f(z+z_0) - f(z)}{z_0} \quad (5.1)$$

Onde $z_0 \in \mathbb{C}$, e $f'(z)$ é chamada a derivada de f no ponto z . Se uma função f tiver derivadas em todos os pontos de \mathbb{C} , então dizemos que ela é analítica em \mathbb{C} . Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ as partes real e imaginária de $f(z)$, isto é,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \text{ em que } z = x + iy. \quad (5.2)$$

Suponhamos que $f(z)$ seja analítica em \mathbb{C} e calculemos a derivada (5.1) usando valores reais para $z_0, z_0 = h$

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}$$

ou seja

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y). \quad (5.3)$$

(u_x representa a derivada de $u(x, y)$ com relação a primeira variável, e u_y com relação a segunda).

A seguir calculemos a derivada (5.1) usando valores imaginários puros para $z_0, z_0 = ik$:

$$f'(z) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{ik} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{v(x, y+k) - v(x, y)}{ik}$$

ou seja

$$f'(z) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y). \quad (5.4)$$

Identificando (5.3) e (5.4) obtemos as equações de *Cauchy-Riemann*

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y),$$

para qualquer $z = x + iy$ em \mathbb{C} .

Resumindo-se: se f for analítica em \mathbb{C} , então as equações de *Cauchy-Riemann* valem em qualquer ponto de \mathbb{C} . Se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ for uma função analítica em \mathbb{C} e se z_2 e z_1 forem números complexos, *não é verdade*, em geral, que exista $\lambda, 0 < \lambda < 1$, tal que

$$f(z_2) - f(z_1) = (z_2 - z_1) f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1)). \quad (5.5)$$

Como podemos ver através de um contra-exemplo. Seja $P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)$ cujas raízes são $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$; aplicando (4.5) aos pares de pontos (z_1, z_2) , (z_2, z_3) , (z_3, z_4) , (z_4, z_1) , concluímos que $P'(z)$ teria 4 raízes distintas. Isso, porém, contraria o teorema fundamental da álgebra que diz que um polinômio de grau 3 tem exatamente 3 raízes complexas. Portanto, temos de abrir mão da igualdade no teorema do valor médio, e assim teremos:

Teorema 5.2 *Seja $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica e sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Então:*

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq 2|z_2 - z_1| \sup\{|f'(z_1 + \lambda(z_2 - z_1))| : 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (5.6)$$

onde $|z|$ representa o módulo de complexo $z = x + iy$, isto é, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Demonstração:

Primeiramente, demonstraremos que

$$|f(z_0) - f(0)| \leq 2|z_0| \sup\{|f'(\lambda z_0)| : 0 \leq \lambda \leq 1\} \quad (5.7)$$

Isso feito, (4.6) segue-se facilmente pela aplicação de (4.7) à função $g(z) = f(z + z_1)$ e ao ponto $z_0 = z_2 - z_1$. Sejam u e v as partes real e imaginária de $f(z)$. Dado $z_0 = x_0 + iy_0$, defina as funções $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pelas expressões

$$\phi(\lambda) = u(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

$$\psi(\lambda) = v(\lambda x_0, \lambda y_0)$$

Aplicando o teorema do valor médio às funções reais ϕ e ψ obtemos

$$\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\lambda_1), 0 < \lambda_1 < 1, \quad (5.8)$$

$$\psi(1) - \psi(0) = \psi'(\lambda_2), 0 < \lambda_2 < 1 \quad (5.9)$$

Para calcular as derivadas de ϕ e ψ , usamos o teorema de derivação das funções compostas e obtemos de (5.8) e (5.9)

$$u(x_0, y_0) - u(0, 0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0,$$

$$v(x_0, y_0) - v(0, 0) = v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0,$$

e daí

$$f(z_0) - f(0) = u_x(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)x_0 + u_y(\lambda_1 x_0, \lambda_1 y_0)y_0 + i\{v_x(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)x_0 + v_y(\lambda_2 x_0, \lambda_2 y_0)y_0\}. \quad (5.10)$$

Agora usaremos a desigualdade

$$|z| \leq |x| + |y|,$$

da qual segue o módulo de um número complexo $z = x + iy$ é menor ou igual que a soma dos valores absolutos de sua parte real e imaginária, bem como a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*

$$|a_1b_1 + a_2b_2| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

onde a_1, a_2, b_1, b_2 são números reais quaisquer. Utilizando essas duas desigualdades em (5.10) obtemos

$$|f(z_0) - f(0)| \leq \sqrt{u_x^2(\lambda_1x_0, \lambda_1y_0) + u_y^2(\lambda_1x_0, \lambda_1y_0)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \\ + \sqrt{v_x^2(\lambda_2x_0, \lambda_2y_0) + v_y^2(\lambda_2x_0, \lambda_2y_0)} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \quad (5.11)$$

Em virtude de (5.4) e (5.5) e das equações de *Cauchy-Riemann*, os radicais em (5.11), envolvendo u e v são precisamente o módulo de f' calculado em certos pontos, isto é,

$$|f(z_0) - f(0)| \leq |f'(\lambda_1z_0)| |z_0| + |f'(\lambda_2z_0)| |z_0|,$$

de onde segue (5.7) imediatamente. E, assim, o teorema 5.2 fica demonstrado.

Agora sim, estamos preparados para demonstrar a transcendência de π . Para tanto, suponhamos por absurdo que π seja um número algébrico.

Logo, $i\pi$ onde $i = \sqrt{-1}$ seria também algébrico como um produto de dois números algébricos. Então $i\pi$ seria raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$P_I(x) = 0. \quad (5.12)$$

Representemos as raízes de (4.12) por $\alpha_1 = i\pi, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Como $e^{i\pi} = -1$, segue que

$$\prod_{j=1}^n (1 + e^{\alpha_j}) = 0. \quad (5.13)$$

Se desenvolvermos o produto indicado em (5.13), obteremos uma expressão da forma: 1 + somatório de exponenciais cujos expoentes são:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \quad (5.14)$$

$$\alpha_i + \alpha_j, \text{ para todos } i < j \quad (5.15)$$

$$\alpha_i + \alpha_j + \alpha_k, \text{ para todos } i < j < k \quad (5.16)$$

⋮

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (5.17)$$

Observemos que o número de termos em (4.14) é n , em (4.15) é $\binom{n}{2}$, em (5.16) é $\binom{n}{3}$, ..., em (4.17) é $\binom{n}{n} = 1$, em que $\binom{n}{m}$ são os coeficientes binomiais, isto é, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ para $0 \leq m \leq n$.

Agora, do fato de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ satisfazerem uma equação polinomial de grau n com coeficientes inteiros, segue-se que:

(a) os números em (5.15) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{2}$ com coeficientes inteiros

$$P_2(x) = 0; \quad (5.18)$$

(b) os números em (5.16) satisfazem uma equação polinomial de grau $\binom{n}{3}$ com coeficientes inteiros

$$P_3(x) = 0,$$

e assim sucessivamente.

Logo os números em (5.14) ... (5.17) satisfazem a equação polinomial

$$P_1(x) \dots P_n(x) = 0 \quad (5.19)$$

com coeficientes inteiros e cujo grau é $n + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n - 1$. Como alguns dos números em (5.14) ... (5.17) podem se anular, podemos supor que m deles sejam diferentes de zero e representemo-los por β_1, \dots, β_m . Logo, simplificando de (4.19) os fatores da forma x^q , para $q > 0$, caso haja, (e haverá se $2^n - 1 > m$), obtemos que β_1, \dots, β_m são raízes de uma equação na forma

$$R(x) \equiv cx^m + c_{m-1}x^{m-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0, \quad (5.20)$$

com coeficientes inteiros.

A seguir, efetuamos o produto de (5.13) e obtemos

$$k + e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_m} = 0. \quad (5.21)$$

Considere o polinômio

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} x^{p-1} (R(x))^p, \quad (5.22)$$

onde $s = mp - 1$ e p é um número primo a ser escolhido posteriormente. O grau de P é $r = s + p$.

Seja agora

$$F(x) = P(x) + P'(x) + \dots + P^{(s+p)}(x). \quad (5.23)$$

Segue da proposição 5.1 que

$$\frac{d}{dx} (e^{-x} F(x)) = -e^{-x} P(x). \quad (5.24)$$

Aplicando o Teorema 5.2 à função $f(z) = e^{-z} F(z)$, temos

$$|e^{-\beta_j} F(\beta_j) - F(0)| \leq 2 |\beta_j| \sup \{ |e^{-\lambda \beta_j} P(\lambda \beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1 \}, \quad (5.25)$$

para $j = 1, \dots, m$. Fazendo

$$\varepsilon_j = 2 |\beta_j| \sup \{ |e^{(1-\lambda)\beta_j} P(\lambda \beta_j)| : 0 \leq \lambda \leq 1 \}, \quad (5.26)$$

obtemos de (5.25) que

$$|F(\beta_j) - e^{\beta_j} F(0)| \leq \varepsilon_j. \quad (5.27)$$

Usando (5.21) e a expressão (5.27) para $j = 1, \dots, m$ obtemos

$$|kF(0) + \sum_{j=1}^m F(\beta_j)| \leq \sum_{j=1}^m \varepsilon_j. \quad (5.28)$$

Mostraremos, agora, que o lado esquerdo de (4.28) é um inteiro não nulo, e que o lado direito, para p conveniente, é menor que 1.

Devemos, então, calcular as várias derivadas de $P(x)$ nos pontos $0, \beta_1, \dots, \beta_m$. O polinômio $P(x)$ definido em (5.22) é da forma

$$P(x) = \frac{c^s}{(p-1)!} \{c_0^p x^{p-1} + bx^p + \dots\}.$$

Logo,

$$P^{(i)}(0) = 0, \text{ para } i < p - 1, \text{ e } P^{(p-1)}(0) = c^s c_0^p. \quad (5.29)$$

Por outro lado, segue-se diretamente de (5.22) que

$$P^{(i)}(\beta_j) = 0, i < p, j = 1, \dots, m, \quad (5.30)$$

uma vez que nas derivadas $P^{(i)}(x)$, para $i < p$, a expressão $R(x)$ é fator comum, e $R(\beta_j) = 0$.

Para as derivadas de ordem $i \geq p$, e de (5.22), concluímos que os coeficientes de

$$P^{(i)}(x), i \geq p, \quad (5.31)$$

são inteiros divisíveis por pc^s .

Logo, de (5.29) e (5.31) obtemos

$$F(0) = c^s c_0^p + pc^s k_0, \quad (5.32)$$

onde k_0 é um inteiro, cujo valor não importa para os nossos propósitos. Para os demais $F(\beta_j)$ observamos que

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i \geq p} P^{(i)}(\beta_j) = \sum_{i \geq p} \sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j). \quad (5.33)$$

Agora, na expressão

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) \quad (5.34)$$

para cada i fixado, com $p \leq i \leq s + p$. Por (5.31) o polinômio $P^{(i)}$ tem coeficientes inteiros divisíveis por pc^s . Além disso, como P tem grau $s + p$, segue-se que $P^{(i)}$ tem grau $s + p - i \leq s$, pois $p \leq i$. Logo, a expressão (4.34) pode ser escrita como

$$\sum_{j=1}^m P^{(i)}(\beta_j) = pc^s Q(\beta_1, \dots, \beta_m), \quad (5.35)$$

onde $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio nos β_i 's de grau menor ou igual a s , com coeficientes inteiros. Veja ainda que $Q(\beta_1, \dots, \beta_m)$ é um polinômio simétrico nos β_i 's com coeficientes inteiros. Logo, existe um polinômio $G(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ de grau menor ou igual a s com coeficientes inteiros e onde $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ são polinômios simétricos elementares em β_1, \dots, β_m , tal que

$$Q(\beta_1, \dots, \beta_m) = G(\sigma_1, \dots, \sigma_m). \quad (5.36)$$

Por outro lado, temos

$$\sigma_1 = c^{-1}c_{m-1}, \sigma_2 = c^{-1}c_{m-2}, \dots, \sigma_m = c^{-1}c_0. \quad (5.37)$$

Logo, de (5.35) e (5.37) segue que a expressão (5.34) é um inteiro divisível por p . Voltando a (5.33) concluímos que

$$\sum_{j=1}^m F(\beta_j) = pK_1, \quad (5.38)$$

onde K_1 é um inteiro cujo valor é irrelevante para nossos propósitos. A seguir, usando (5.32) e (5.38) obtemos que o lado esquerdo de (5.28) é um inteiro da forma

$$|kc^s c_0^p + pK|, \quad (5.39)$$

onde $K = k_0 c^s + K_1$. Agora escolhemos um número primo p de modo que ele seja maior que k , c e c_0 . Portanto, o inteiro (5.39) não é divisível por p , e, conseqüentemente, é um inteiro não nulo.

Para concluir a demonstração, necessitamos fazer a estimativa do termo do lado direito de (5.28). Seja

$$M = \max(|\beta_1|, \dots, |\beta_m|).$$

Logo,

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} \sup\{|\lambda\beta_j|^{p-1} |R(\lambda\beta_j)|^p : 0 \leq \lambda \leq 1\}, \quad (5.40)$$

onde usamos $0 \leq \lambda \leq 1$. Seja a seguir

$$N = \max\{|R(z)| : |z| < m\},$$

a qual usada em (5.40) fornece

$$\varepsilon_j \leq 2Me^M \frac{|c|^s}{(p-1)!} M^{p-1} N^p.$$

Como o fatorial domina qualquer exponencial, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A^n}{n!} = 0,$$

para qualquer $A > 0$, segue que, para p suficientemente grande, podemos fazer $\varepsilon_j < \frac{1}{m+1}$.

Logo,

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j \leq \frac{m}{m+1} < 1. \quad (5.41)$$

A expressão (5.41) juntamente com o fato que o lado esquerdo de (5.28) é inteiro não nulo resulta em um absurdo. Logo, π é transcendente.

Com este último resultado cumprimos o objetivo deste trabalho.

6 CONCLUSÃO

Para propósitos de medições nós não precisamos dos números irracionais, pois sempre poderemos aproximar o número irracional através de uma série de *aproximações racionais*, cuja precisão pode ser tão boa quanto desejarmos. É o aspecto *teórico* dos números irracionais que os tornam tão importantes para a matemática: eles são necessários para preencher os “buracos” deixados na linha dos números pela existência de pontos não racionais; e fazem do conjunto de números reais um sistema completo, um *continuum numérico*. O primeiro número transcendente só foi exibido em 1844 por Joseph Liouville embora a teoria dos números transcendentos tenha nascido na Grécia antiga com os três famosos problemas gregos de construção com régua e compasso: a quadratura de um círculo, a trisseção de um ângulo e a duplicação de um cubo. O estudo desses problemas recai na construção (com régua sem escala e compasso) de um segmento com certa medida que não é “construtível” a partir de um segmento dado como unidade. Temos aí a teoria dos *Números Construtíveis* que, hoje sabemos, são todos números algébricos.

No congresso internacional de Matemática, realizado em Paris, em 1900, um dos maiores matemáticos da época, David Hilbert (1892-1943), desafiou a comunidade matemática com uma lista de vinte e três problemas não resolvidos, cuja solução ele considerava da maior importância. O sétimo problema da lista de Hilbert era provar ou negar a hipótese de que, para qualquer número algébrico *diferente de zero* e para qualquer número algébrico irracional b , a expressão a^b é sempre transcendente. Como exemplo específico ele deu o número $2^{\sqrt{2}}$. Hilbert previu que esse problema levaria mais tempo para ser resolvido que o Último Teorema de Fermat, mas foi excessivamente pessimista. Em 1930 o matemático russo Alexandr Osipavich Gelfond (1906-1968) provou a sua transcendência. A hipótese geral de Hilbert, em relação a a^b , foi demonstrada em 1934 por Gelfond e também, independentemente, por T. Schneider na Alemanha.

Não é fácil provar que um número é transcendente: é preciso provar que o número *não* preenche certas exigências. Entre os números cuja condição ainda não foi estabelecida, temos π^e , π^π e e^e .

A descoberta dos números transcendentos não provocou o mesmo choque intelectual que os números irracionais tinham causado, dois mil e quinhentos anos antes, mas suas consequências foram igualmente significativas. Ela mostrou que, por trás da aparente simplicidade do sistema de números reais, ocultam-se muitas sutilezas que não podem ser

notadas simplesmente olhando-se a expansão decimal de um número. Mas a maior surpresa ainda estava por vir. Em 1874 o matemático alemão Georg Cantor (1845-1918) fez a espantosa descoberta de que existem mais números irracionais do que racionais, e mais números transcendentais do que algébricos. Em outras palavras, longe de serem excentricidade, a maioria dos números reais é irracional e, entre os números irracionais, a maioria é transcendente!

E isso nos leva a campos mais elevados de abstração. Se nos concentrarmos em apenas calcular os valores de π^e e π^π , descobriremos que eles são surpreendentemente próximos: 22.459157... e 23.140692..., respectivamente. É claro que π e e não estão demasiado separados numericamente. Pense nisso: entre a infinidade de números reais, aqueles que são mais importantes para a matemática – 0, 1, $\sqrt{2}$, e e π – estão localizados dentro de menos de quatro unidades na linha numérica. Uma coincidência extraordinária? Ou um mero detalhe de um projeto maior?

REFERÊNCIAS

- ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. Análise Matemática para Licenciatura, São Paulo: Edgard Blucher, 2006.
- LIMA, Elon Lages. Análise Real vol 1, Rio de Janeiro: IMPA, 2008.
- MAOR, Eli. *e*: a História de um Número; tradução de Jorge Luiz Calife – 4º ed,–Rio de Janeiro: Record, 2008.
- FIGUEIREDO D.G.. Números Irracionais e Transcendentes, Rio de Janeiro: Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Coleção Fundamentos da Matemática elementar, 1985.
- CANTOR, Georg. Caracterização dos Números Reais; tradução de Denise Silva Vilela. Revista da Sociedade Brasileira da História da Ciência, nº 10, pg.85-94, 1993.
- DOMINGUES, Hygino H.. Álgebra Moderna: São Paulo: Atual, 2003.
- SANTOS, José Plínio de Oliveira. Introdução à Teoria dos Números, Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- STEINBRUCH, Alfredo. Álgebra Linear, São Paulo: Makron Books, 1987.
- OLIVEIRA, Anselmo A de A.(2004) Famat em Revista nº 03, setembro de 2004<www.famat.ufu.br/revista/revistaset2004/index.htm> Acessado em 20 de junho de 2017.
- SINGH, Simon. O Último Teorema de Fermat; tradução de Jorge Luiz Calife, Rio de Janeiro.
- SPIVAK, M. Calculos, 3ª Edição: Editora Publish or Perish, 1994.

APÊNDICE A - ALGORÍTIMO DA DIVISÃO DE EUCLIDES

Dados dois inteiros a e b , $b \neq 0$ existe um único par de inteiros q e r tais que $a = qb + r$ com $0 \leq r < b$.

Há duas possibilidades:

(i) b é múltiplo de a e, portanto, $b = aq$ para um conveniente inteiro q .

(ii) b está situado entre dois múltiplos consecutivos de a , isto é, existe um inteiro q tal que $aq < b < a(q + 1)$. Daí, $0 < b - aq < a$. Então, fazendo $b - aq = r$, obtemos $b = aq + r$, em que $0 < r < a$.

Juntando as duas possibilidades, podemos garantir o seguinte: dados dois números inteiro, a e b , com $a > 0$, então sempre se pode encontrar dois inteiros q e r tais que $b = aq + r$, em que $0 \leq r < a$.

Evidentemente, $r = 0$ corresponde ao caso em que b é múltiplo de a .

Vamos imaginar por outro lado, que se pudesse determinar outro par de inteiros, q_1 e r_1 , tais que $b = aq_1 + r_1$, com $0 \leq r_1 < a$. Então $aq + r = aq_1 + r_1$ e, portanto, $a(a - q_1) = r_1 - r$. Suponhamos que $r \neq r_1$ digamos $r > r_1$. Daí, o segundo membro da última igualdade seria estritamente negativo e, como $a > 0$, então $q - q_1$ também seria estritamente negativo e, portanto, $q_1 - q > 0$, ou seja, $q_1 - q \geq 1$. Mas de $a(q - q_1) = r_1 - r$ segue que: $r = r_1 + a(q_1 - q)$.

Levando-se em conta que $a > 0$, $r_1 \geq 0$ e $q_1 - q \geq 1$, da última igualdade seguiria que $r \geq a$, o que é absurdo.

Da mesma forma, prova-se que a desigualdade $r_1 > r$ também é impossível. De onde $r = r_1$ e, conseqüentemente, $q = q_1$.

APÊNDICE B - TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo inteiro maior do que 1 pode ser representado de maneira única (a menos de ordem) como um produto de fatores primos.

Sendo n um inteiro maior que 1, se n é primo não há nada a ser demonstrado, suponhamos pois, n composto. Seja $p_1 (p_1 > 1)$ o menor dos divisores positivos de n . Afirmamos que p_1 é primo. Isto é verdade, pois, caso contrário existiria p , $1 < p < p_1$ com $p|n$, contradizendo a escolha de p_1 . Logo, $n = p_1 n_1$.

Se n_1 for primo a prova está completa. Caso contrário, tomamos p_2 como o menor fator de n_1 . Pelo argumento anterior, p_2 é primo e temos que $n = p_1 p_2 n_2$.

Repetindo este procedimento, obtemos uma sequência decrescente de inteiros positivos n_1, n_2, \dots, n_r . Como todos eles são inteiros maiores do que 1, este procedimento deve terminar. Como os primos na sequência p_1, p_2, \dots, p_k não são, necessariamente distintos, n terá em geral, a forma:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}.$$

Para mostrarmos a unicidade usamos indução em n . Para $n = 2$ a afirmação é verdadeira. Assumimos, então, que ela se verifica para todos os inteiros maiores do que 1 e menores do que n . Vamos provar que ela também é verdadeira para n . Se n é primo, não há nada a prova. Vamos supor, então, que n seja composto e que tenha duas fatorações, isto é,

$$n = p_1 p_2 \dots p_s = q_1 q_2 \dots q_r.$$

Vamos provar que $r = s$ e que cada p_i é igual a algum q_j . Como p_1 divide o produto $q_1, q_2 \dots q_r$ ele divide pelo menos um dos fatores q_j . Sem perda de generalidade podemos supor que $p_1 | q_1$. Como são ambos primos, isto implica $p_1 = q_1$. Logo $n | p_1 p_2 \dots p_s = q_2 \dots q_r$. Como $1 < n | p_1 < n$, a hipótese de indução nos diz que as duas fatorações são idênticas, isto é $s = r$ e, a menos de ordem, as fatorações $p_1 p_2 \dots p_s$ e $q_1 q_2 \dots q_s$ são iguais.

Verifique que o número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é um número algébrico.

Demonstração:

$$\text{Suponha que } x^2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}. \text{ Então } x - \sqrt{2} = \sqrt{3}.$$

Elevando ao quadrado ambos os membros, temos: $x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}$.

Novamente elevando ao quadrado, temos: $x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 \Rightarrow -x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Logo, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ e, portanto, um número algébrico.

Mostre que o número complexo $z = 2 - i$ é um número algébrico.

Demonstração:

Devemos encontrar uma equação polinomial com coeficientes inteiros tal que $2 - i$ seja uma de suas raízes. Usando o Teorema 12, seção 4.5, temos que, se $2 - i$ é raiz da suposta equação, então seu conjugado $2 + i$ também será. Aplicando agora o Teorema 11, seção 4.3, podemos obter uma equação de 2º grau tal que da forma

$$(x - (2 - i))(x + (2 + i)) = 0,$$

em que $2 - i$ e $2 + i$ sejam raízes. Assim, desenvolvendo o primeiro membro da equação, temos a equação do 2º grau $x^2 - 4x + 5 = 0$ com raízes $2 - i$ e $2 + i$. Logo, $2 - i$ é um número algébrico.

ANEXO A - NÚMEROS RACIONAIS E IRRACIONAIS: UMA PROPOSTA DIDÁTICA NA PRÁTICA DA SALA DE AULA

Uma proposta didática na prática de uma aula no Ensino Médio seria o estudo dos Conjuntos Numéricos com ênfase na abordagem dos Números Racionais e Irracionais. Primeiramente vamos definir os Números Racionais.

Definimos Números Racionais todos aqueles que podem ser escritos como frações nas quais o numerador e o denominador são números inteiros e o denominador é diferente de zero. Representamos o conjunto dos Números Racionais pelo símbolo \mathbb{Q} .

Exemplos:

1. Os números inteiros: $3 = \frac{3}{1}$;

2. Os decimais exatos: $0,2 = \frac{2}{10}$;

3. Os decimais periódicos: $0,333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Nos decimais periódicos, ou dízimas periódicas, chama-se *período* o algarismo ou grupo de algarismos que se repete infinitamente, e *geratriz* de uma dízima periódica a fração equivalente a ela.

Em uma dízima periódica simples, o período começa no primeiro algarismo após a vírgula.

Exemplo: Determinar a geratriz da dízima periódica $0,313131... .$ Seja $x = 0,313131... .$ Como há dois algarismos no período, multiplicamos ambos os membros da igualdade por 100. Assim:

$$100x = 31,313131... \Rightarrow 100x - x = 31,313131... - 0,313131... \Rightarrow 99x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{99}.$$

Na dízima periódica composta, há um ou mais algarismos depois da vírgula que não fazem parte do período.

Exemplo: Determinar a geratriz da dízima periódica $0,5282828... .$ Novamente, seja $x = 0,5282828... .$ Primeiramente multiplicamos os dois membros da igualdade por 10, pois há apenas 1 algarismo antes do período. Assim obtemos $10x = 5,282828... .$

Em seguida, multiplicamos x por 1000 resultando em $1000x = 528,282828... .$ Dessa forma:

$$1000x - 10x = 528,282828... - 5,282828... \Rightarrow 990x = 523 \Rightarrow x = \frac{523}{990}.$$

Neste momento podem ser sugeridos alguns exercícios nos quais os alunos devem determinar a geratriz de algumas dízimas periódicas.

Exercício. Determine a geratriz da dízima periódica 1,23333... ,

Resolução, Considere $x = 1,23333... .$ Multiplique x por 10 e por 100 obtendo, respectivamente, $10x = 12,3333... e 100x = 123,3333... .$ Agora basta subtrair

$$100x - 10x = 123,3333... - 12,3333... \Rightarrow 90x = 111 \Rightarrow x = \frac{111}{90}.$$

Resposta: $1,23333... = \frac{111}{90}.$

Há números decimais que não são exatos e nem periódicos. Tais números decimais são impossíveis de se escrever na forma fracionária e, por isso, não são racionais, Esses números são chamados de *Números Irracionais*.

A história da origem dos Números Irracionais está no mundo grego clássico, no momento em que os pitagóricos resolveram calcular a medida da diagonal d de um quadrado de lado igual a 1. Ao utilizarem o Teorema de Pitágoras, encontraram:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d^2 = 2,$$

e se questionaram: qual o número racional que elevado ao quadrado resulta 2? Após algumas tentativas perceberam que d possuía medida entre 1,414 e 1,415, pois $1,414^2 = 1,999396$ e $1,415^2 = 2,002225$. Mesmo tentando novas aproximações com mais casas decimais não foi possível determinar nenhum racional. Assim dizemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Exercício. Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional.

Resolução. De fato, supomos $\sqrt{2}$ racional, então este pode ser escrito como $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$ e a, b irredutíveis, ou seja, primos entre si. Então temos: $\sqrt{2} = \frac{a}{b} \Rightarrow 2 = \frac{a^2}{b^2}$, $\Rightarrow a^2 = 2b^2$. Como a^2 é par, então a é par (pois se a fosse ímpar, então $a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ então a^2 seria ímpar). Assim, sendo a par, então $a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 \Rightarrow 2b^2 = 4k^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2$ é par, daí b é par. Contradição pois a e b são primos entre si.

De modo geral, as raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos são números irracionais, como, por exemplo, $\sqrt{3} = 1,7320508... .$

Existem outros irracionais importantes como $\pi = 3,14159265358... ($ razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro) e o número $e = 2,7182818... ($ base do logaritmo natural). O número π e o número e também são denominados números *transcendentes* pois não são solução de nenhuma equação polinomial de coeficientes inteiros não nulos.

Observação:

i) Dados α irracional e r racional não nulo, então: $\alpha + r$; $\alpha \cdot r$; $\frac{\alpha}{r}$ e $\frac{r}{\alpha}$ são todos números irracionais.

Exemplos:

$\sqrt{2} + 1$; $3\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{3}{\sqrt{5}}$ são números irracionais.

ii) A soma, subtração, multiplicação ou divisão de dois irracionais pode resultar em um racional ou irracional.

Exemplos:

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$; $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ e $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ são números irracionais.

$(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$; $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = 6$; $\sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$ e $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 3$ são números racionais.

Exercício. O número $x = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}}$ é racional.

a) Usando propriedades das potências, calcule x .

b) Prove que existem dois números irracionais α e β tais que α^β é racional.

Resolução.

a) $x = \left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$.

b) Sabemos que $\sqrt{2}$ é irracional e que $\left[(\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \right]^{\sqrt{2}}$ é racional (por a). Ora $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional ou irracional. Se $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ é racional, então existem dois irracionais α e β tais que α^β é racional ($\alpha = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ e $\beta = \sqrt{2}$).

A aula deve ser encerrada levando os alunos a refletir sobre o conjunto dos *Números Reais* (representado por \mathbb{R}) que é formado pela união dos números racionais com os números irracionais.

ANEXO B - ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste último capítulo, traremos atividades que podem ser desenvolvidas com alunos do Ensino Médio a respeito de alguns temas tratados no trabalho.

Apesar do cunho estritamente matemático da maioria (apenas a última é dada como aplicação de equações polinomiais), consideramos como atividades interessantes e curiosas, como o processo de determinação da geratriz de uma dízima periódica e a verificação de um número algébrico. Desta forma, as atividades propostas buscam aguçar a curiosidade e desenvolver o raciocínio lógico das demonstrações aos alunos deste nível.

Atividade 1. *Determine a fração geratriz da dízima periódica 1,133333...*

Resolução. Considere $x = 1,133333\dots$. Temos:

$$10x = 11,33333\dots \quad (1)$$

$$100x = 113,33333\dots \quad (2)$$

Subtraindo (1) de (2), temos:

$$90x = 102 \Rightarrow x = \frac{102}{90} = \frac{51}{45} = 1,133333\dots$$

Atividade 2. *Verifique que o número $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é um número algébrico.*

Demonstração. Suponha que $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Então $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

Elevando ao quadrado ambos os membros, temos:

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3 \Rightarrow x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}.$$

Novamente elevando ao quadrado, temos:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 1 = 0.$$

Logo, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ é raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ e, portanto, um número algébrico.