Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Funções quadráticas

Estudo do gráfico das funções quadráticas

Fábio Antonio Leão Sousa

Goiânia
2013

FÁBIO ANTONIO LEÃO SOUSA

Funções quadráticas

Estudo do gráfico das funções quadráticas

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
GPT/BC/UFG

Sousa, Fábio Antonio Leão.
S725f Funções quadráticas [manuscrito]: estudo do gráfico das funções quadráticas / Fábio Antonio Leão Sousa. – 2013.
42 f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2013.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.

1. Funções quadráticas. 2. Coeficiente – Variação. 3. Vértice da parábola. I. Título.

CDU:517.5

Fábio Antônio Leão Sousa

Funções Quadráticas - Estudo do gráfico das funções quadráticas

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 28 de fevereiro de 2013, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Campus Goiânia-GO

Profa. Dra. Ivonildes Ribeiro Martins
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Fábio Antonio Leão Sousa

Licenciado em Matemática pela UFG - Universidade Federal de Goiás. Possui especialização em Matemática e Estatística pela UFLA - Universidade Federal de Lavras. Foi professor da UEG - Universidade Estadual de Goiás, Unidade Universitária de Porangatu e da FNG - Faculdade do Norte Goiano. Atualmente é Professor do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia Goiano - Câmpus Iporá.

A minha marida Nádia e aos meus filhos Fábio Junior e Emília pelo amor dispensado a mim.

Agradecimentos

Aos colegas Profmat do polo de Anápolis pelo companherismo, aos professores do curso pelo conhecimento transmitido, ao Professor Mário pela dedicação durante a orientação deste, ao Professor Jesus pela excelente gestão do curso e a CAPES pelo suporte financeiro.

O pensamento lógico pode levar você, de A a B, mas a imaginação te leva a qualquer parte do Universo.

Albert Einsten,

.

Resumo

Sousa, Fábio Antonio Leão. **Funções quadráticas**. Goiânia , 2013. 42p. Dissertação de Mestrado. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

Este trabalho tem como objetivo ampliar os conhecimentos sobre a função quadrática, proporcionando uma nova perspectiva sobre o comportamento de seu gráfico. Inicialmente, apresenta a definição da função quadrática, bem como, os conceitos básicos que envolve a parábola. Em segundo lugar, caracteriza-se a parábola, descrevendo a simetria existente em relação ao eixo vertical que contém o vértice, os intervalos de crescimento e decrescimento da função e o comportamento da curva descrita pelo gráfico. Finalmente, relaciona cada coeficiente da função quadrática ao gráfico dando um caráter geométrico aos coeficientes através da variação de seus valores.

Palavras–chave

Quadrática, Parábola, Coeficiente.

Abstract

Sousa, Fábio Antonio Leão. **Quadratic Functions**. Goiânia , 2013. 42p. MSc. Dissertation. Departamento de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás.

This paper aims to expand the knowledge about the quadratic function providing a new perspective on the behavior of its graph. Initially, presents the definition of Quadratic Function, as well as the basic concepts involving the Parable. Secondly, the Parable is characterized, describing the symmetry existing in relation to the vertical axis which contains the vertex, the intervals of growth and decrease of the function and the behavior of curve described by the graph. Finally, this study relates each coefficient of the quadratic function to the graph, giving a geometric character to the coefficients through the variation of its values.

Keywords

Quadratic, Parable, Coefficient.

Sumário

Lista de Figuras

Introdução

As funções quadráticas aparecem com frequência na resolução de problemas em outras áreas do conhecimento, tais como: física, biologia, química, economia e outras. Porém, a análise de livros didáticos de nível fundamental e médio: [1], [3], [4] e [14], mostra uma abordagem abstrata do conteúdo e com pouca relação ao dia-a-dia.

A parábola surge naturalmente numa variedade de situações, conforme [11, pg.38] ela pode ser obtida a partir do corte de um cone ou do lançamento de um projétil ideal na superfície terrestre. Essas situações parecem não ter ligação nenhuma, porém quando se estuda os conceitos matemáticos envolvidos, percebe-se claramente a essência da matemática.

Muitas vezes, ao estudar funções quadráticas, surge naturalmente a dúvida sobre o esboço do gráfico, o por quê da parábola ter o desenho apresentado em todas as bibliografias do assunto, representando sempre uma curva mais acentuada próximo ao vértice e menos acentuada ao se distanciar dele, e qual o motivo da parábola não apresentar segmentos de retas ou sinuosidades. A parábola poderia muito bem ter outros esboços como segue:

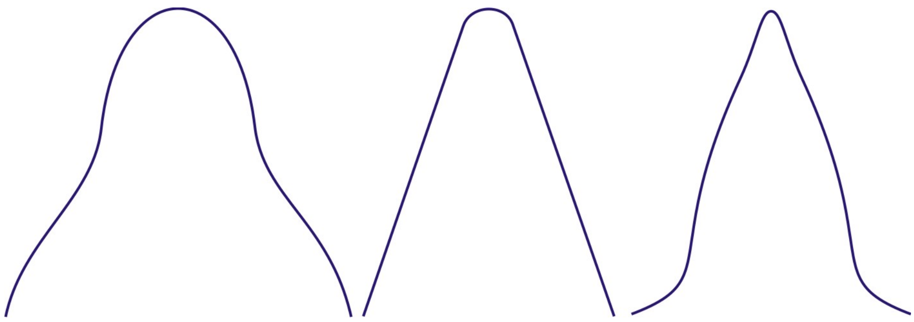

Figura 1: *Possíveis curvas para parábola.*

Nesta perspectiva, este trabalho está dividido em 3 capítulos, e tem por objetivo ampliar os conhecimentos sobre a função quadrática e o seu gráfico, a fim de proporcionar ao professor de matemática do ensino básico um melhor embasamento teórico para o processo de ensino-aprendizagem.

O primeiro capítulo tem por objetivo principal oferecer subsídios teóricos aos capítulos seguintes, para isso, apresenta os conceitos iniciais de funções quadráticas, discute particularidades sobre a parábola, evidenciando suas intersecções com os eixos coordenados e faz um enfoque especial ao vértice, definindo-o como ponto crítico da função.

O segundo capítulo tem por objetivo a caracterização da curva da parábola, para isso, a partir dos subsídios teóricos oferecidos pelo capítulo que o antecede: demonstra a simetria existente em relação ao eixo vertical que contém o vértice da parábola; mostra os intervalos em que a função quadrática é crescente ou decrescente; e caracteriza a curva descrita pela parábola utilizando-se da função tangente.

Finalmente, o último capítulo faz um estudo minucioso sobre cada coeficiente da função quadrática, ou seja, mostra algebricamente o que acontece ao gráfico quando se varia separadamente cada um de seus coeficientes, além de fazer uma breve conclusão do trabalho.

CAPÍTULO 1

Conceitos básicos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos da função quadrática, sua definição e particularidades sobre o gráfico. É importante ressaltar que as parábolas aqui representadas servirão apenas para visualização de resultados demonstrados, pois, no próximo capítulo será caracterizada a curva descrita pela parábola. Portanto, o objetivo principal deste capítulo é determinar as intersecções com os eixos ordenados, bem como mostrar a existência de um ponto notável chamado de vértice.

Segundo [5, pg.138], [8, pg.114] e [10, pg.21], uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c reais e $a \neq 0$, é uma função quadrática ou função do 2º grau.

1.1 Gráfico

Conforme [8, pg.125], o gráfico da função quadrática é uma parábola. Esta parábola poderá ter sua concavidade voltada para cima ou para baixo, isso dependerá do valor do termo a, ou seja, se $a > 0$ a concavidade da parábola será voltada para cima, e se $a < 0$ a concavidade será voltada para baixo [5, pg.140].

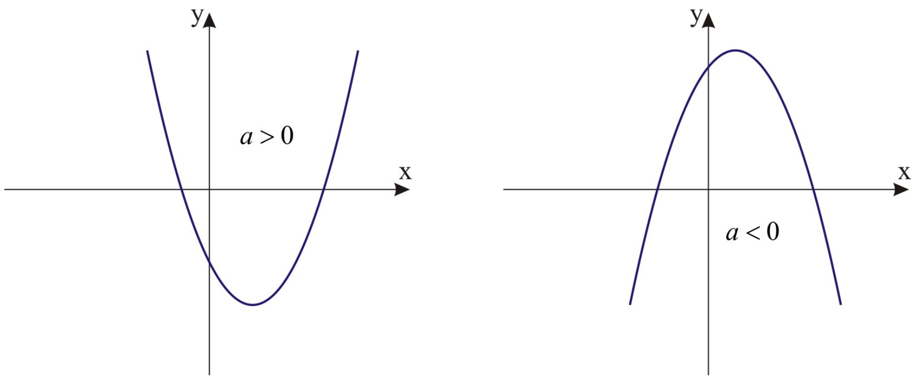

Figura 1.1: *Concavidades da parábola.*

Contudo, [6, pg.195-196] define concavidade e enucia um teorema que mostra a concavidade do gráfico de uma função através da derivada de segunda ordem, ou seja, para uma função f derivável até segunda ordem em um intervalo I, se x_0 pertence a I tal que $f''(x_0) \neq 0$,então:

a) quando $f''(x_0) > 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em x_0;
b) quando $f''(x_0) < 0$, o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em x_0.

A função quadrátrica $f(x) = ax^2 + bx + c$ é derivável até segunda ordem em todo seu domínio, pois $f''(x) = 2a$. Observe que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se $f''(x_0) = 2a \neq 0$. Se $a \neq 0$,

- $a > 0$ então $f''(x_0) = 2a > 0$, ou seja, o gráfico tem concavidade voltada para cima;
- $a < 0$ então $f''(x_0) = 2a < 0$, ou seja, o gráfico tem concavidade voltada para baixo.

1.2 Intersecção com o eixo das ordenadas

Sabe-se que o domínio da função quadrática é o conjunto dos números reais, logo o seu gráfico no plano cartesiano obrigatoriamente intersectará o eixo das ordenadas $0y$ no ponto em que $x = 0$. Assim, o ponto de intersecção com o eixo $0y$ será $(0, f(0))$. Efetuando os cálculos tem-se

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$f(0) = c.$$

Desta maneira, o gráfico da função quadrática sempre intersectará o eixo $0y$ no ponto $(0, c)$.

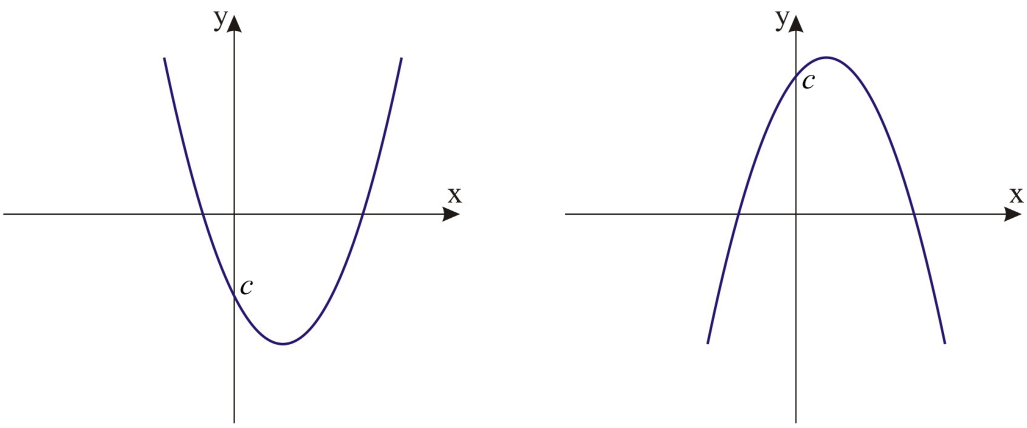

Figura 1.2: *Intersecção com o eixo* $0y$.

Quanto ao significado gráfico dos coeficientes da função quadrática, [10, pg.30] coloca como óbvio o fato do coeficiente c ser o ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas $0y$.

1.3 Intersecção com o eixo das abscissas

Se a função possuir valores para os quais $y = 0$, ou seja, valores que anulam a função, então ela intersectará o eixo das abscissas nestes valores. Logo, os pontos procurados são obtidos através dos zeros da função.

$$f(x) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Sendo $a \neq 0$, resolvendo a equação tem-se

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Este resultado é familiar, e é apresentado no ensino fundamental [14, pg.84-85] para resolução de equações do 2º grau, chamado de Fórmula de Bhaskara. Pode-se observar no resultado encontrado que o valor $b^2 - 4ac$ está dentro de um radical, sendo assim, nem sempre haverá valor real para x, uma vez que se $b^2 - 4ac < 0$ não haverá raiz quadrada real para ele. Conforme [5, pg.141], este resultado é chamado de discriminante, e pode ser representado por Δ (delta). Assim

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Fazendo uma análise dos possíveis valores para o discriminante.

- Se $\Delta > 0$, duas raízes reais distintas, ou seja, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;

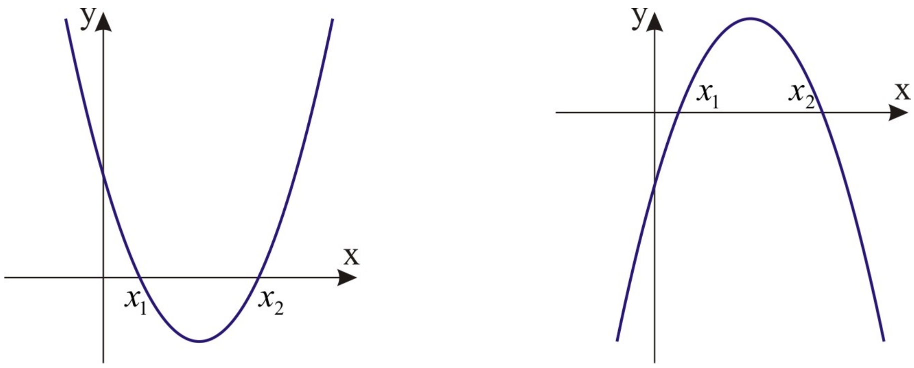

Figura 1.3: *Parábola com duas raízes distintas.*

- Se $\Delta = 0$, duas raízes reais iguais, ou seja, $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$;

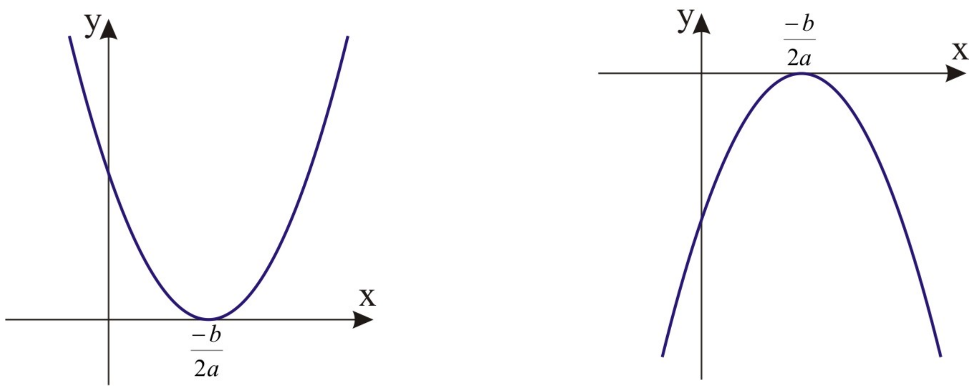

Figura 1.4: *Parábola com duas raizes iguais.*

- Se $\Delta < 0$, não haverá nenhuma raiz real.

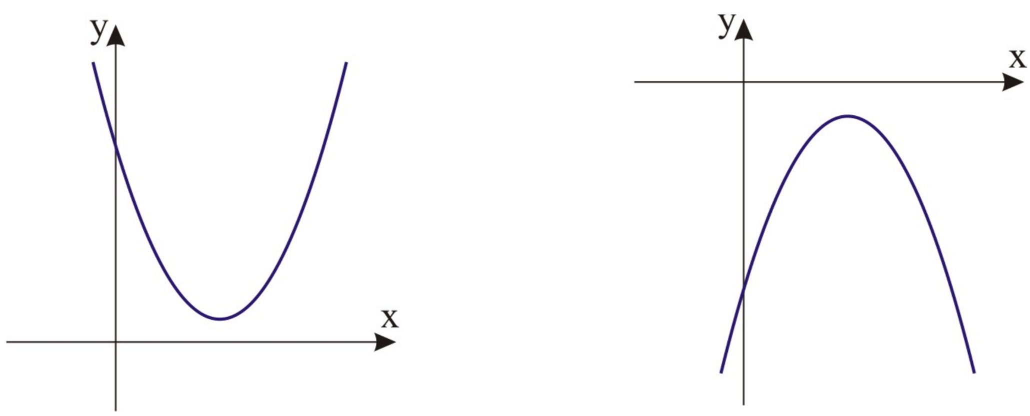

Figura 1.5: *Parábola sem nenhuma raiz real.*

Portanto, o gráfico da função quadrática intersectará o eixo das abscissas em dois pontos, em apenas um ponto, ou ainda, não o intersectará. Isto dependerá do valor do discriminante Δ.

1.4 Vértice da parábola

O vértice V da parábola é o ponto em que o gráfico muda sua monotonicidade: de crescente para decrescente ou de decrescente para crescente. É também ponto de mínimo para a função caso $a > 0$, ou ponto de máximo da função caso $a < 0$.

Recomenda-se a consulta de [5, pg.146-247] para a demonstração do vértice como ponto de máximo ou mínimo. Neste momento, é de interesse que o vértice seja definido como ponto crítico da função quadrática.

Conforme [7, pg.99], x_0 é ponto crítico de uma função $f(x)$, se $f'(x_0) = 0$ ou se não existir $f'(x_0)$. Isto significa que a reta tangente a função $f(x)$ no ponto x_0 tem inclinação nula, portanto, ela é horizontal. Assim, x_v será a abscissa do vértice da parábola determinada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ se $f'(x_v) = 0$. Logo,

$$2ax_v + b = 0$$

$$2ax_v = -b$$
$$x_v = \frac{-b}{2a}.$$

A partir do valor da abscissa do vértice é possível determinar a sua ordenada y_v através do cálculo da imagem de x_v. Logo

$$f(x_v) = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$f(x_v) = a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$f(x_v) = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$
$$f(x_v) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}$$
$$f(x_v) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Sendo assim, o vértice da parábola é o ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

Desse modo o vértice é um ponto crítico da função, cuja inclinação da reta tangente neste ponto é nula. Portanto, todos os gráficos apresentados são apenas para visualizar dos resultados apresentados, uma vez que, não se tem ainda uma formalização do comportamento da curva da parábola. Contudo, é possível observar alguns resultados a respeito do vértice.

Para o caso em que $\Delta > 0$, observa-se que a abscissa do vértice é o ponto médio dos pontos de intersecção com o eixo $0x$.

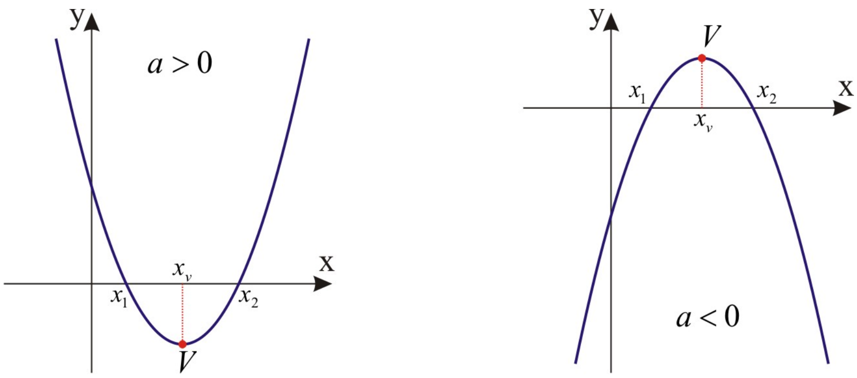

Figura 1.6: *Ponto médio das raízes.*

Ou seja,

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}{2} = \frac{\dfrac{-2b}{2a}}{2} = \frac{-b}{a}\cdot\frac{1}{2} = \frac{-b}{2a} = x_v.$$

No caso em que $\Delta = 0$, o vértice é o próprio ponto de intersecção com o eixo das abscissas, e, como foi demonstrado anteriormente vale $\dfrac{-b}{2a}$.

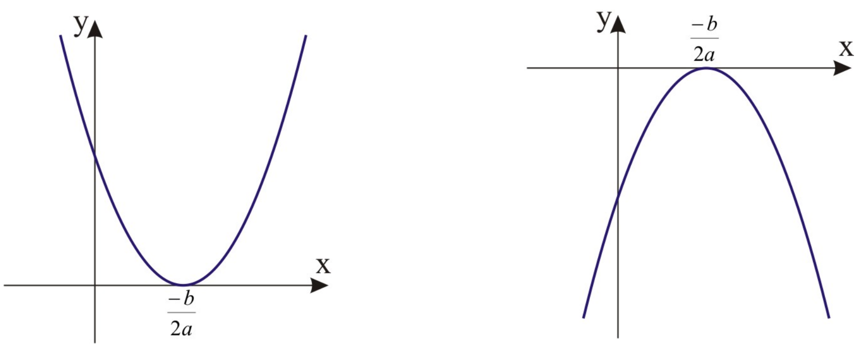

Figura 1.7: *Vértice como única raiz.*

CAPÍTULO 2

Caracterização do gráfico da função quadrática

O objetivo deste capítulo é caracterizar o gráfico da parábola, para isso, será mostrado a simetria existente do mesmo em relação ao eixo vertical que contém o vértice da parábola, bem como a separação do gráfico da função em duas partes: uma crescente e outra decrescente, e finalmente, será caracterizado o comportamento da curva descrita pela parábola. A caracterização da curva mostrará que o gráfico é realmente a curva mostrada nas bibliografias matemáticas.

2.1 Simetria

Sejam x_1 e x_2 pontos equidistantes de x_v, ou seja, o vértice é o ponto médio deles.

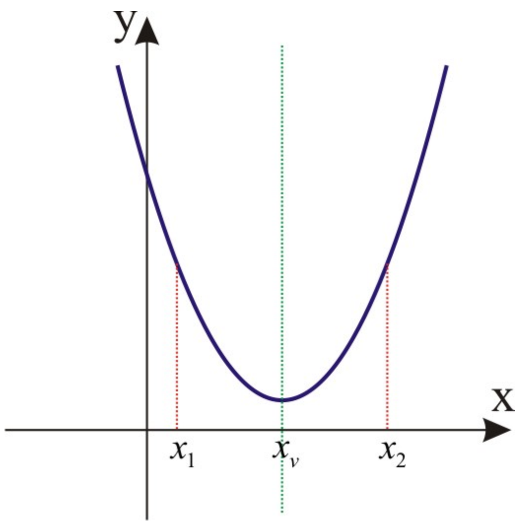

Figura 2.1: *Pontos equidistantes do véritce.*

Assim,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$a(x_1 + x_2) = -b$$

$$a(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2) = -b\cdot(x_1-x_2)$$

$$a(x_1^2-x_2^2) = -bx_1+bx_2$$

$$ax_1^2-ax_2^2 = -bx_1+bx_2$$

$$ax_1^2+bx_1 = ax_2^2+bx_2$$

$$ax_1^2+bx_1+c = ax_2^2+bx_2+c$$

$$f(x_1) = f(x_2).$$

Esse resultado demonstra que quaisquer dois pontos x_1 e x_2 equidistantes do vértice, suas imagens $f(x_1)$ e $f(x_2)$ serão iguais. Logo, há uma simetria em relação ao eixo vertical que intersecta o vértice da parábola.

Outra maneira de constatar a simetria, é tomar um número real $k > 0$ e demostrar que $f(x_v+k) = f(x_v-k)$.

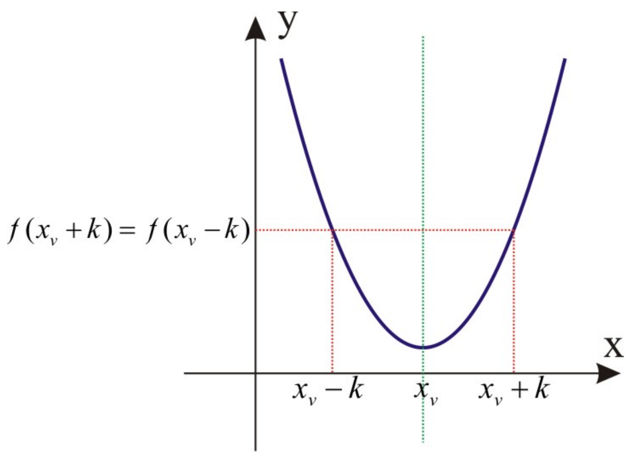

Figura 2.2: *Pontos a uma distância k do vértice.*

Sendo assim, tomando-se o vértice

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

$$2ax_v = -b,$$

multiplicando esta equação por $2k$, obtém-se

$$4ax_vk = -2bk$$

$$2ax_vk+2ax_vk = -bk-bk$$

$$2ax_vk+bk = -2ax_vk-bk$$

somando $ax_v^2 + ak^2$ nos dois membros da igualdade, tem-se

$$ax_v^2 + 2ax_vk + ak^2 + bk = ax_v^2 - 2ax_vk + ak^2 - bk$$

$$a(x_v^2 + 2x_vk + k^2) + bk = a(x_v^2 - 2x_vk + k^2) - bk.$$

Por fim, somando $bx_v + c$ nos dois membros da igualdade, obtém-se

$$a(x_v^2 + 2x_vk + k^2) + bx_v + bk + c = a(x_v^2 - 2x_vk + k^2) + bx_v - bk + c$$

$$a(x_v + k)^2 + b(x_v + k) + c = a(x_v - k)^2 + b(x_v - k) + c$$

$$f(x_v + k) = f(x_v - k).$$

2.2 Monotonicidade da função quadrática

De acordo com [2, pg.199], uma função é crescente em um intervalo dado I se, para quaisquer dois pontos x_1 e x_2 desse intervalo, $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \leq f(x_2)$, e a função é decrescente se, $x_1 < x_2$ então $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Como já foi dito, a função quadrática tem como gráfico uma parábola, e para sua caracterização, é fundamental determinar os intervalos em que ela seja crescente ou decrescente. Para isso, devem ser analisados os casos em que o coeficiente a seja positivo ou que ele seja negativo.

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$

Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer, tais que $x_1 < x_2 \leq x_v$, logo

$$\begin{cases} x_1 < \dfrac{-b}{2a} \\ \\ x_2 \leq \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Longrightarrow x_1 + x_2 < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Portanto,

$$x_1 + x_2 < \frac{-b}{a}.$$

Multiplicando por $a > 0$ esta desigualdade, obtém-se

$$a(x_1 + x_2) < -b.$$

Multiplicando esta por $(x_1 - x_2) < 0$, tem-se

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) > -b(x_1 - x_2)$$

$$a(x_1^2 - x_2^2) > -b(x_1 - x_2)$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 > -bx_1 + bx_2$$

$$ax_1^2 + bx_1 > ax_2^2 + bx_2.$$

Por fim, somando c, chega-se a

$$ax_1^2 + bx_1 + c > ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Assim, a função é decrescente no intervalo $]-\infty, x_v]$.
Sejam agora x_3 e x_4 dois pontos quaisquer, tais que $x_v \leq x_3 < x_4$, logo

$$\begin{cases} x_3 \geq \dfrac{-b}{2a} \\ \\ x_4 > \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Longrightarrow x_3 + x_4 > \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}$$

Com procedimentos análogos ao caso anterior, obtém-se

$$ax_3^2 + bx_3 + c < ax_4^2 + bx_4 + c$$

$$f(x_3) < f(x_4).$$

Assim, a função é crescente no intervalo $[x_v, \infty[$.

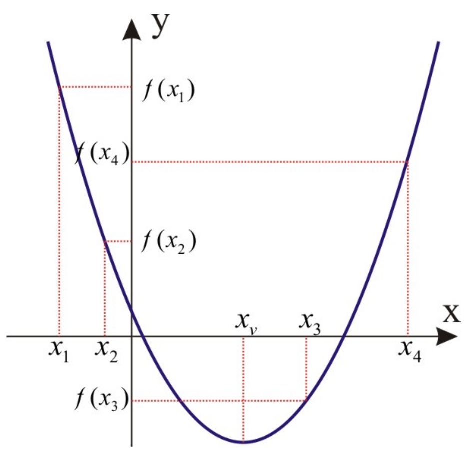

Figura 2.3: *Decrescimento e crescimento da parábola.*

Conclui-se que para $a > 0$, a função quadrática descreve um gráfico simétrico ao eixo vertical que contém o vértice com concavidade voltada para cima. Observa-se ainda que para este caso o vértice é ponto de mínimo da função.

(2) $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a < 0$

Sejam x_1 e x_2 dois pontos quaisquer, tal que $x_1 < x_2 \geq x_v$, logo:

$$\begin{cases} x_1 < \dfrac{-b}{2a} \\ \\ x_2 \geq \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Longrightarrow x_1 + x_2 < \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Portanto,

$$x_1 + x_2 < \frac{-b}{a}.$$

Multiplicando por $a < 0$ esta desigualdade, obtém-se

$$a(x_1 + x_2) > -b.$$

Multiplicando esta por $(x_1 - x_2) < 0$, tem-se

$$a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) < -b(x_1 - x_2)$$

$$a(x_1^2 - x_2^2) < -b(x_1 - x_2)$$

$$ax_1^2 - ax_2^2 < -bx_1 + bx_2$$

$$ax_1^2 + bx_1 < ax_2^2 + bx_2.$$

Por fim, somando c, chega-se a

$$ax_1^2 + bx_1 + c < ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Assim, a função é crescente no intervalo $]-\infty, x_v]$.

Sejam agora x_3 e x_4 dois pontos quaisquer, tais que $x_v \leq x_3 < x_4$, logo

$$\begin{cases} x_3 \geq \dfrac{-b}{2a} \\ \\ x_4 > \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Longrightarrow x_3 + x_4 > \left(\frac{-b}{2a}\right) + \left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-b}{a}.$$

Com procedimentos análogos ao caso anterior, obtém-se

$$ax_3^2 + bx_3 + c > ax_4^2 + bx_4 + c$$

$$f(x_3) > f(x_4).$$

Assim, a função é decrescente no intervalo $[x_v, \infty[$.

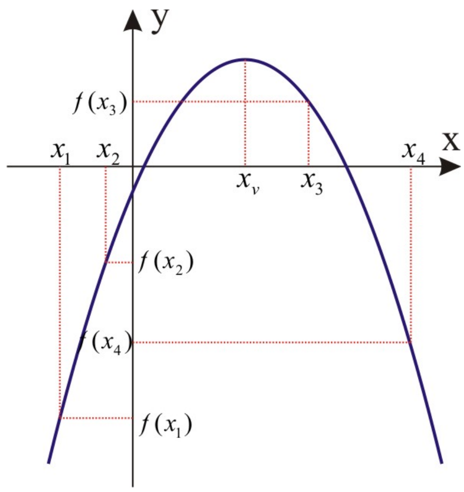

Figura 2.4: *Crescimento e decrescimento da parábola.*

Conclui-se que para $a < 0$, a função quadrática descreve um gráfico simétrico ao eixo vertical que contém o vértice com concavidade voltada para baixo. Observa-se ainda que para este caso o vértice é ponto de máximo da função.

Portanto, para o crescimento e decrescimento da função quadrática tem-se a tabela:

$f(x) = ax^2 + bx + c$	$]-\infty, x_v]$	$[x_v, \infty[$
$a > 0$	decrescente	crescente
$a < 0$	crescente	decrescente

2.3 Caracterização da curva descrita pela parábola

Até aqui foi mostrado que a função quadrática possui como gráfico uma curva chamada parábola, foi demonstrado também a existência de um ponto especial desta curva: o vértice, e a simetria existente em relação ao eixo vertical que o contém. Mostrou-se ainda suas monotonicidades: região de crescimento e decrescimento da função nos intervalos $]-\infty, x_v]$ e $[x_v, \infty[$.

Porém, não pôde ser determinado com exatidão a característica da curva. O esboço que é apresentado em [2], [5], [7], [8], [10], [11], e em bibliografias de nível fundamental e médio como representação gráfica da parábola, sempre é obtido através da marcação de alguns pontos de uma função específica e, posteriormente, a união desses pontos formando uma curva. Porém, o que garante que esta curva tenha realmente o esboço representado a seguir?

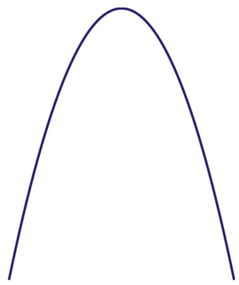

Figura 2.5: *Parábola.*

A caracterização da curva descrita pela parábola será feita através do estudo da variação dos coeficientes angulares em diversos pontos da curva. Conforme [2, pg.121], a derivada $f'(x)$ de uma função aplicada em um ponto x_0 da função retorna o coeficiente angular da reta tangente a função em x_0. E ainda, [15, pg.33-41;72-76] discute sobre a existência da derivada em um ponto x_0 estar condicionada à possibilidade de apoiar uma reta tangente ao gráfico neste ponto, ou seja, o gráfico não pode apresentar uma angulosidade em x_0.

Como já foi citado, a parábola possui uma simetria em relação ao eixo vertical que contém o vértice, portanto, será caracterizado o lado direito de uma parábola com concavidade voltada para cima, ou seja: $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$ no intervalo $[x_v, \infty[$.

Seja a sequência: $(x_v,\ x_v + k,\ x_v + 2k,\ x_v + 3k,\ \cdots,\ x_v + nk,\ \cdots)$, com $k > 0$. Observe que esta sequência é uma progressão aritmética (P.A.) crescente de razão k. Para mais detalhes sobre progressões aritméticas ver [9, pg.1-22]. Ao admitir tal sequência, caminha-se a partir do vértice intervalos constantes a direita com a intensão de observar o que acontece com a curva do gráfico ao longo de cada um desses intervalos.

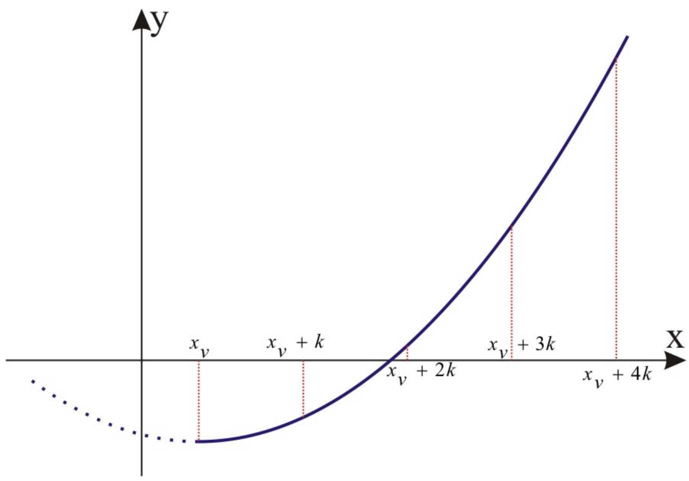

Figura 2.6: *Abscissas em P.A.*

Para $f(x) = ax^2 + bx + c$ tem-se $f'(x) = 2ax + b$, logo o coeficiente angular da reta tangente à parábola no vértice é $f'(x_v) = 2ax_v + b = 0$.

Determinando os coeficientes angulares das retas tangentes a cada ponto da sequência anterior, tem-se

$$f'(x_v) = 2ax_v + b = 0$$

$$f'(x_v + k) = 2a(x_v + k) + b = 2ax_v + 2ak + b = 2ak$$

$$f'(x_v + 2k) = 2a(x_v + 2k) + b = 2ax_v + 4ak + b = 4ak$$

$$f'(x_v + 3k) = 2a(x_v + 3k) + b = 2ax_v + 6ak + b = 6ak$$

$$\vdots$$

$$f'(x_v + nk) = 2a(x_v + nk) + b = 2ax_v + 2nak + b = 2nak$$

$$\vdots$$

A sequência $(0, 2ak, 4ak, 6ak, \cdots, 2nak, \cdots)$ dos coeficientes angulares também é uma progressão aritmética crescente cuja razão vale $2ak$.

Conforme [8, pg.91], se a reta r é o gráfico de uma função $g(x) = mx + n$, então o coeficiente m é chamado de inclinação da reta r, e é a tangente do ângulo α formado entre a reta e o eixo das abscissas, assim $\text{tg}\alpha = m$.

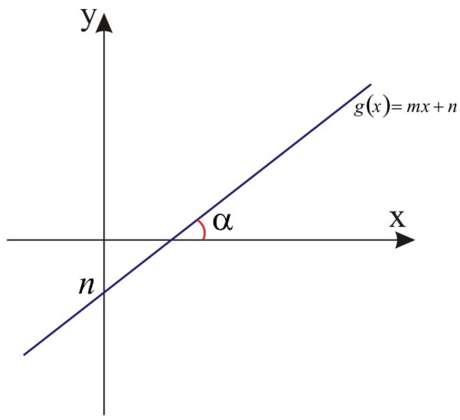

Figura 2.7: *Reta com inclinação* α.

A partir da sequência dos coeficientes angulares pode-se obter uma outra sequência $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n, \cdots)$, com $\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, composta pelos ângulos de inclinação de cada reta tangente aos pontos escolhidos, ou seja:

$$\text{tg}\theta_0 = 0$$
$$\text{tg}\theta_1 = 2ak$$
$$\text{tg}\theta_2 = 4ak$$
$$\text{tg}\theta_3 = 6ak$$
$$\vdots$$
$$\text{tg}\theta_n = 2nak$$
$$\vdots$$

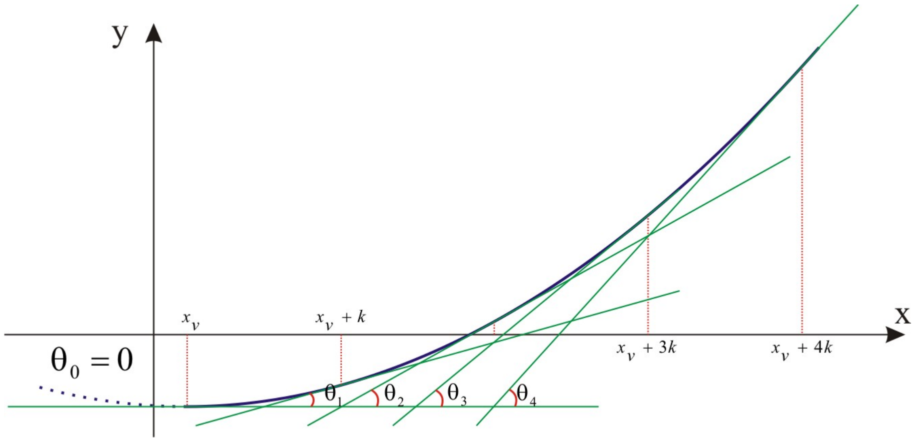

Figura 2.8: *Inclinações das retas tangentes à parábola.*

A sequência $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \cdots, \theta_n, \cdots)$ não é uma progressão aritmética, e é justamente esta sequência que caracteriza a parábola.

Observe que para qualquer progressão aritmética crescente $(0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$, os ângulos $\alpha_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ cujas tangentes resultam a progressão, formam uma sequência $(0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n, \cdots)$ crescente com $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$, pois, no intervalo aberto $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a função tangente é crescente e sua imagem é todo conjunto $\mathbb{R}$.

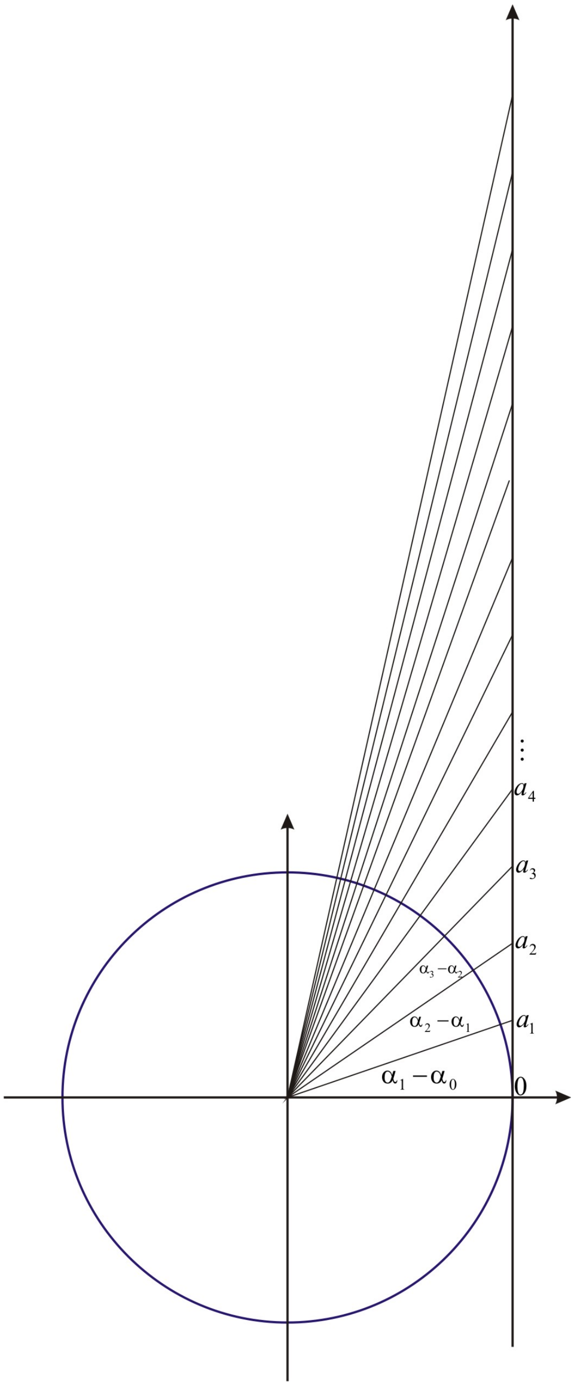

Figura 2.9: *Ângulos cujas tangentes formam uma P.A.*

Observa-se ainda que

$$\alpha_1 - \alpha_0 > \alpha_2 - \alpha_1 > \alpha_3 - \alpha_2 > \cdots > \alpha_n - \alpha_{n-1} > \cdots$$

Ou seja, a variação entre um ângulo e seu sucessor será cada vez menor, com

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n - \alpha_{n-1} = 0$$

Não é objetivo deste trabalho a demonstração detalhada dos resultados apresentados sobre a sequência dos ângulos cujas tangentes resultam uma progressão aritmética. Mas, tais resultados podem ser observados intuitivamente. Para maiores detalhes sobre a função tangente, recomenda-se a leitura de [12].

Logo, tem-se uma sequência infinita crescente com primeiro termo igual a zero, limitada superiormente por $\frac{\pi}{2}$ e com variação entre os termos cada vez menor. É justamente isso que caracteriza a curva descrita pelo gráfico da parábola, ou seja, observa-se que próximo ao vértice a curva é mais acentuada e ao se distanciar dele a curva fica cada vez menos acentuada, aproximando-se de uma reta vertical.

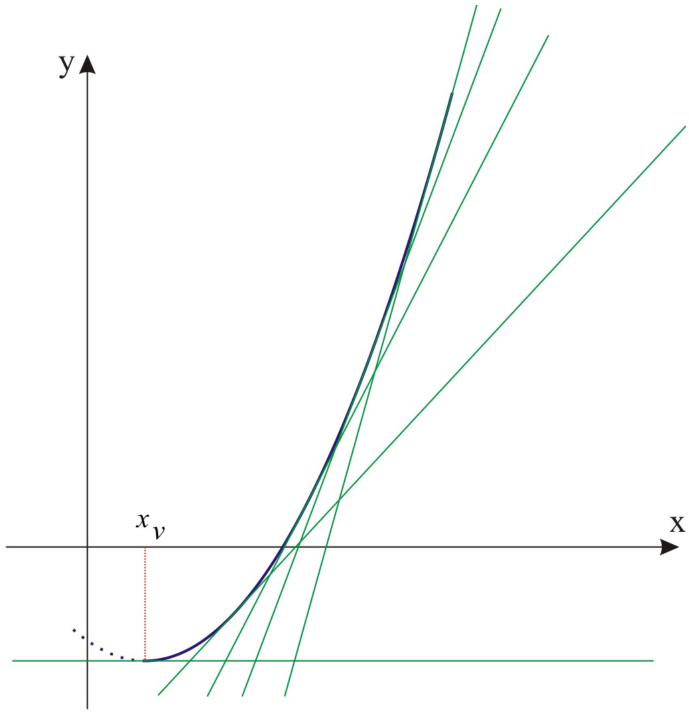

Figura 2.10: *Curva descrita pela parábola.*

Como já foi mostrado a simetria existente na parábola, todos os resultados valem para o lado esquerdo do vértice. Para a parábola com concavidade para baixo os cálculos são análogos, porém considerando-se a progressão aritmética $(0, 2ak, 4ak, 6ak, \cdots, 2nak, \cdots)$ decrescente, uma vez que a razão $2ak$ será negativa.

Pode-se afirmar que a partir de qualquer progressão aritmética é possível construir uma função quadrática com uma parábola como gráfico, cujo vértice seja igual ao primeiro termo da P.A.

Com esta caracterização, a partir de agora serão considerados os esboços apresentados como gráficos da função quadrática, ou seja, a parábola.

CAPÍTULO 3

Variação dos coeficientes

Com base na caracterização feita para curva da função quadrática, pode-se dizer que há uma bijeção entre o conjunto de todas as parábolas determinadas a partir de progressões aritméticas e o conjunto de todas as funções do 2° grau, ou seja, para cada função existe uma e única parábola, e para cada parábola existe uma e única função. Este trabalho não tem como objetivo demostrar esta bijeção, portanto, fica aceito apenas pela intuição a sua veracidade. Para mais detalhes sobre bijeção, recomenda-se a leitura de [13, pg.222-226].

Ao considerar a bijeção existente entre as parábolas e as funções quadráticas, pode-se questionar qual seria a função $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ correspondente a uma parábola obtida a partir de um deslocamento qualquer dos pontos de uma outra parábola cuja função $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja conhecida.

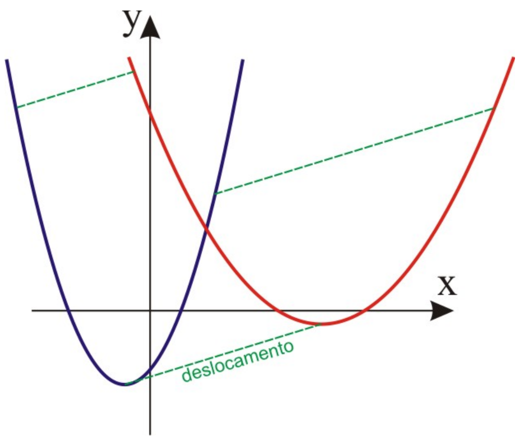

Figura 3.1: *Deslocamento de uma parábola.*

Para isso, deve-se verificar o que acontece aos coeficientes a, b e c da função. Neste capítulo verificará-se o que acontece à parábola ao variar um dos coeficientes da função, ou seja, que tipo de deslocamento sofrerá o gráfico desta função.

Para verificar o que acontece ao gráfico, é necessário fazer um estudo algébrico sobre o deslocamento de alguns pontos específico. Assim, serão sempre verificados os deslocamentos sofridos pelo vértice e pelo ponto de intersecção com o eixo das ordenadas, e caso necessário, o deslocamento de um ponto qualquer da função.

3.1 Variação do coeficiente a

Sejam a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R} - \{-a\}$. Então, ao variar o coeficiente a em k unidades tem-se $f_1(x) = a_1x^2 + bx + c$, com $a_1 = a + k$.

Existem dois casos distintos para observação do movimento da parábola ao se variar o coeficiente a, considere inicialmente o caso em que $b \neq 0$.

Como o coeficiente c não varia, as duas funções: $f(x)$ e $f_1(x)$, intersectam o eixo das ordenadas no mesmo ponto, ou seja, no ponto $(0, c)$.

Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $V\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a}\right)$, determinado-se a abscissa do vértice V_1 da função $f_1(x)$, tem-se

$$x_{v_1} = \frac{-b}{2a_1}$$

$$x_{v_1} = \frac{-b}{2(a+k)}$$

$$x_{v_1} = \frac{-b}{2a+2k}.$$

A ordenada de V_1 é

$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a_1}$$

$$y_{v_1} = \frac{-(b^2 - 4a_1c)}{4a_1}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4(a+k)c}{4(a+k)}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4ac + 4kc}{4a+4k}.$$

Assim, tem-se o vértice $V_1\left(\dfrac{-b}{2a+2k}, \dfrac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k}\right)$ para $f_1(x)$. Observe que não é possível notar diretamente qual deslocamento sofre o vértice, porém, tanto a abscissa quanto a ordenada dependem do valor de k. Como estamos considerando os coeficientes a, b e c constantes e o valor de k como uma variação do coeficiente a, logo k é um parâmetro para x_{v_1} e y_{v_1}, ou seja, eles estão em função de k.

$$\begin{cases} x_{v_1} = \dfrac{-b}{2a+2k} \\ \\ y_{v_1} = \dfrac{-b^2+4ac+4kc}{4a+4k} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro k obtém-se y_{v_1} em função de x_{v_1}. Então, isolando k na primeira equação, tem-se

$$2ax_{v_1} + 2kx_{v_1} = -b$$

$$2kx_{v_1} = -b - 2ax_{v_1}$$

$$k = \frac{-b - 2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}.$$

Substituindo este valor na segunda equação, obtém-se

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4ac + 4\left(\dfrac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)c}{4a + 4\left(\dfrac{-b-2ax_{v_1}}{2x_{v_1}}\right)}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4ac + \dfrac{-4bc - 8acx_{v_1}}{2x_{v_1}}}{4a + \dfrac{-4b - 8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}}$$

$$y_{v_1} = \frac{\dfrac{-2b^2x_{v_1} + 8acx_{v_1} - 4bc - 8acx_{v_1}}{2x_{v_1}}}{\dfrac{8ax_{v_1} - 4b - 8ax_{v_1}}{2x_{v_1}}}$$

$$y_{v_1} = \frac{-2b^2x_{v_1} + 8acx_{v_1} - 4bc - 8acx_{v_1}}{8ax_{v_1} - 4b - 8ax_{v_1}}$$

$$y_{v_1} = \frac{-2b^2x_{v_1} - 4bc}{-4b}$$

$$y_{v_1} = \frac{-2b^2x_{v_1}}{-4b} + \frac{-4bc}{-4b}$$

$$y_{v_1} = \frac{bx_{v_1}}{2} + c$$

$$f_v(x) = \frac{bx}{2} + c.$$

Observe que $f_v(x)$ é uma função do 1º grau cujo gráfico é uma reta que intersecta o eixo $0y$ no ponto $(0,c)$. Ou seja, no mesmo ponto que intersecta a parábola de $f(x)$. Logo, ao variar o coeficiente a da função $f(x)$ em k unidades, o vértice desloca-se sobre uma reta.

A figura a seguir apresenta os gráficos de $f(x)$ e $f_v(x)$, bem como, os gráficos de duas funções $f_n(x)$ para valores distintos de k.

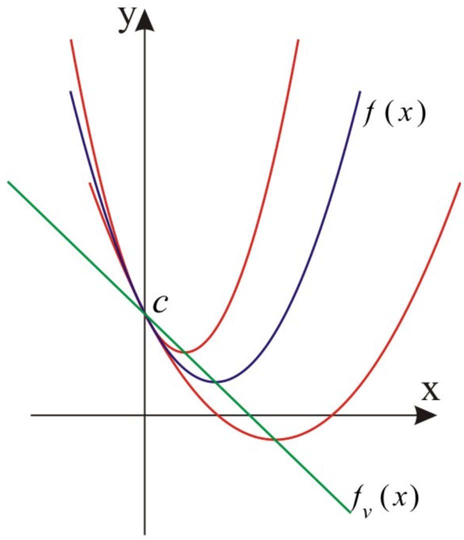

Figura 3.2: *Movimento da parábola ao longo de uma reta.*

Observe que ao deslocar o vértice de $f(x)$ sobre a reta $f_v(x)$, para que seu gráfico continue intersectando o eixo $0y$ no ponto $(0,c)$, a parábola sofre uma alteração em sua abertura. Portanto, quanto mais próximo da origem estiver o valor do x_{v_1}, mais fechada será a concavidade da parábola.

Fazendo uma relação da abertura da parábola com o valor de k, tem-se

$$x_{v_1} = \frac{-b}{2a+2k}.$$

Ou seja, o valor de $|x_{v_1}|$ é inversamente proporcional ao valor de $|a+k|$. Logo, quanto mais próximo de $-a$ for o valor de k, menor será o valor de $|a+k|$, e consequentemente, maior será o valor de $|x_{v_1}|$.

Sendo assim, a abertura da parábola está diretamente ligada ao módulo do coeficiente de x^2, quanto maior ele for, mais fechada será a parábola.

Observe agora que

$$\begin{cases} k < -a \Longrightarrow k+a = a_1 < 0 \\ \\ k > -a \Longrightarrow k+a = a_1 > 0. \end{cases}$$

Ou seja, a variação do coeficiente a_1 pode mudar a concavidade da parábola, logo para b negativo, tem-se

$$b < 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 < 0 \Longrightarrow x_{v_1} = \dfrac{-b}{2a_1} < 0 \\ \\ a_1 > 0 \Longrightarrow x_{v_1} = \dfrac{-b}{2a_1} > 0. \end{cases}$$

Visto que $b < 0$, $a_1 < 0 \longrightarrow x_{v_1} < 0$ e além disso, o gráfico deve intersectar o ponto $(0,c)$ sobre o eixo 0y, as parábolas cujos vértices estão à esquerda do plano terão concavidades voltadas para baixo. De maneira análoga, para $b < 0$, $a_1 > 0 \longrightarrow x_{v_1} > 0$, as parábolas cujos vértices estão à direita do plano terão concavidades voltadas para cima.

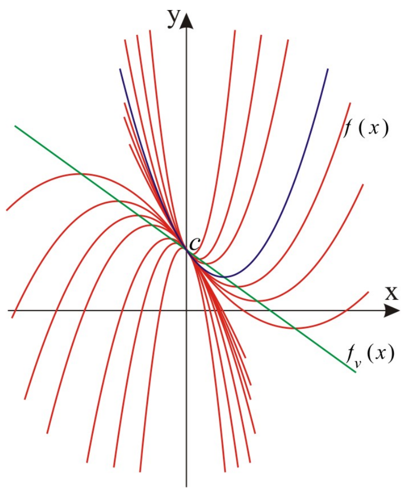

Figura 3.3: *Parábolas para $b < 0$.*

Para b positivo, tem-se

$$b > 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 < 0 \Longrightarrow x_{v_1} = \dfrac{-b}{2a_1} > 0 \\ \\ a_1 > 0 \Longrightarrow x_{v_1} = \dfrac{-b}{2a_1} < 0. \end{cases}$$

Visto que $b > 0$, $a_1 < 0 \longrightarrow x_{v_1} > 0$ e além disso, o gráfico deve intersectar o ponto $(0,c)$ sobre o eixo 0y, as parábolas cujos vértices estã à direita do plano terão concavidades voltadas para baixo. De maneira análoga, para $b > 0$, $a_1 > 0 \longrightarrow x_{v_1} < 0$, as parábolas cujos vértices estão à esquerda do plano terão concavidades voltadas para cima.

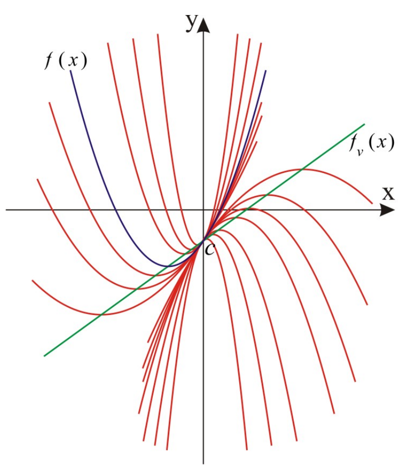

Figura 3.4: *Parábolas para $b > 0$.*

Logo, ao atribuir valores para k, tem-se várias parábolas $f_n(x) = (a+k)x^2 + bx + c$ intersectando o eixo das ordenadas no ponto $(0,c)$, com vértices sobre a reta $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$ e cujas concavidades mudam de sentido conforme o lado direito ou esquerdo do eixo $0y$.

Considere agora a função $f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + c$ para o caso em que $b = 0$. Logo, o gráfico tem como vértice o ponto $V(0,c)$, ou seja, o vértice coincide com o ponto de intersecção ao eixo das ordenadas. A função $f_1(x) = (a+k)x^2 + c$ também tem vértice no ponto $(0,c)$, sendo assim, todas as parábolas terão o vértice em um único ponto, diferenciando-se apenas por suas aberturas.

Considerando a reta $f_v(x) = \frac{bx}{2} + c$, para $b = 0$, tem-se $f_v(x) = c$. Ou seja, não haverá variação dos vértices das várias funções $f_n(x)$, pois todos $x_{v_n} = 0$.

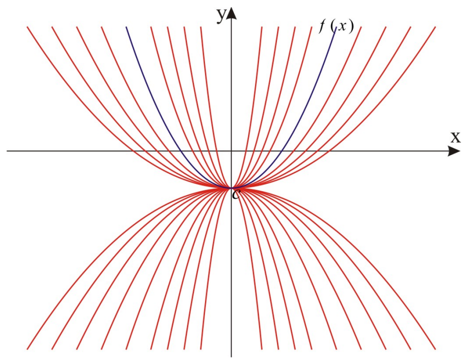

Figura 3.5: *Movimento abre e fecha da parábola.*

Logo, ao atribuir valores para k, tem-se várias parábolas $f_n(x) = (a+k)x^2 + c$ com concavidades para cima ou para baixo, todas com vértice no ponto $(0,c)$ e com aberturas inversamente proporcionais a $|a+k|$. De uma outra maneira, [8, 125-135] mostra a relação existente entre a abertura da parábola e o coeficiente a.

3.2 Variação do coeficiente b

Sejam a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Ao variar o coeficiente b em k unidades tem-se $f_1(x) = ax^2 + b_1x + c$, com $b_1 = b + k$.

Como o coeficiente c não varia, as duas funções $f(x)$ e $f_1(x)$, intersectam o eixo das abscissas no mesmo ponto, ou seja, no ponto $(0,c)$.

Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$. Determinado-se a abscissa do vértice V_1 da função $f_1(x)$, tem-se

$$x_{v_1} = \frac{-b_1}{2a}$$

$$x_{v_1} = \frac{-b-k}{2a}$$
$$x_{v_1} = \frac{-b}{2a} + \frac{-k}{2a}$$
$$x_{v_1} = x_v - \frac{k}{2a}.$$

A ordenada de V_1 é

$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a}$$
$$y_{v_1} = \frac{-(b_1^2 - 4ac)}{4a}$$
$$y_{v_1} = \frac{-(b+k)^2 + 4ac}{4a}$$
$$y_{v_1} = \frac{-b^2 - 2bk - k^2 + 4ac}{4a}$$
$$y_{v_1} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} + \frac{-2bk - k^2}{4a}$$
$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{k^2 + 2bk}{4a}$$
$$y_{v_1} = y_v - \frac{k^2 + 2bk}{4a}.$$

Assim, tem-se o vértice $V_1\left(x_v - \frac{k}{2a}, y_v - \frac{k^2+2bk}{4a}\right)$ para $f_1(x)$. Não é possível verificar diretamente qual deslocamento sofre o vértice. Porém, tanto a abscissa quanto a ordenada dependem do valor de k. Como estamos considerando os coeficientes a, b e c constantes e o valor de k como uma variação do coeficiente b, logo k é um parâmetro para x_{v_1} e y_{v_1}, ou seja, eles estão em função de k.

$$\begin{cases} x_{v_1} = x_v - \dfrac{k}{2a} \\ \\ y_{v_1} = y_v - \dfrac{k^2 + 2bk}{4a} \end{cases}$$

Eliminando o parâmetro k obtem-se y_{v_1} em função de x_{v_1}. Então, isolando k na primeira equação tem-se

$$2ax_{v_1} = 2ax_v - k$$
$$k = 2ax_v - 2ax_{v_1}$$
$$k = 2a\left(\frac{-b}{2a}\right) - 2ax_{v_1}$$

$$k = -b - 2ax_{v_1}.$$

Substituindo na segunda equação, tem-se

$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a} - \frac{(-b-2ax_{v_1})^2 + 2b(-b-2ax_{v_1})}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac-(b^2+4abx_{v_1}+4a^2x_{v_1}^2)-2b(-b-2ax_{v_1})}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2+4ac-b^2-4abx_{v_1}-4a^2x_{v_1}^2+2b^2+4abx_{v_1}}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{4ac-4a^2x_{v_1}^2}{4a}$$

$$y_{v_1} = -ax_{v_1}^2 + c$$

$$f_v(x) = -ax^2 + c.$$

Observe que $f_v(x)$ é uma função quadrática cuja parabola é semelhante a de $f(x)$, porém com concavidade inversa. Observe ainda que o vértice de $f_v(x)$ é o ponto $(0,c)$, isto é, o ponto de intersecção com o eixo das ordenadas.

A figura a seguir apresenta os gráficos de $f(x)$ e $f_v(x)$, bem como, os gráficos de várias funções $f_n(x)$ para valores diversos de k, ou seja, a figura apresenta o movimento parabólico de uma função quadrática cujo coeficiente a é positivo.

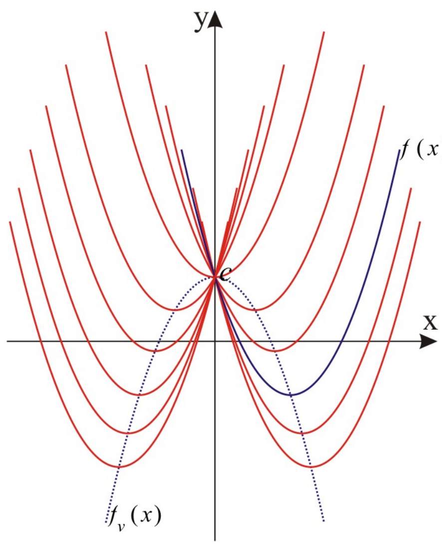

Figura 3.6: *Movimento parabólico de uma parábola.*

Assim, diz-se que ao variar o coeficiente b de uma função quadrática, seu gráfico descreve um movimento parabólico de concavidade inversa e cujo eixo de simetria coincide com o eixo $0y$.

3.3 Variação do coeficiente c

Sejam a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $k \in \mathbb{R}$. Então, ao variar o coeficiente c em k unidades tem-se $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$, com $c_1 = c + k$.

Sabe-se que a função $f(x)$ tem vértice no ponto $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$, observa-se então que a função $f_1(x) = ax^2 + bx + c_1$ tem a mesma abscissa x_{v_1} do vértice, pois ela não depende do coeficiente c. Logo, sua ordenada é

$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-(b^2 - 4ac_1)}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4a(c+k)}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-b^2 + 4ac + 4ak}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} + \frac{4ak}{4a}$$

$$y_{v_1} = \frac{-\Delta}{4a} + k$$

$$y_{v_1} = y_v + k.$$

Desse modo o vértice V da função $f(x)$ sofre um deslocamento de $|k|$ unidades no sentido vertical, pois $V_1\,(x_v, y_v + k)$.

Como já foi visto, o coeficiente c é o ponto onde a parábola intersecta o eixo das ordenadas. Portanto, ao variar o coeficiente c de uma função quadrática, muda-se o ponto em que o gráfico intersecta o eixo $0y$. Logo, o ponto em que $f_1(x)$ intersecta o eixo das ordenadas é $|k|$ unidades verticais distante do ponto onde $f(x)$ intersecta o mesmo eixo.

Seja agora um ponto (x_0, y_0) de $f(x)$, onde $y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c$. Determinando a imagem de x_0 para $f_1(x)$, tem-se

$$f_1(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c_1$$

$$f_1(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c + k$$

$$f_1(x_0) = f(x_0) + k$$

$$f_1(x_0) = y_0 + k.$$

Ou seja, um ponto qualquer sofre também um deslocamento de $|k|$ unidades verticais.

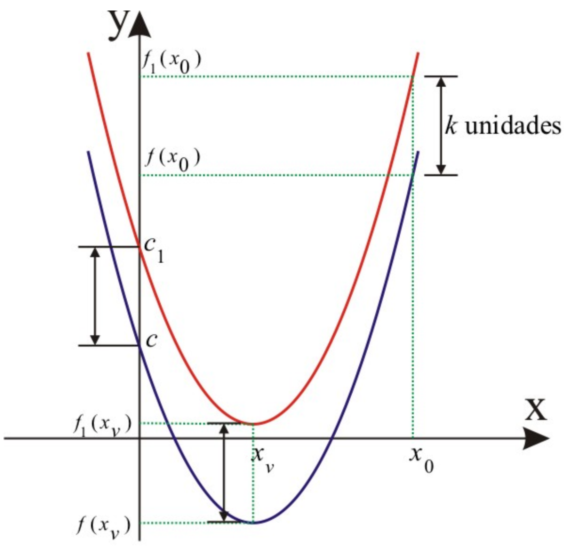

Figura 3.7: *Movimento vertical da parábola.*

É importante observar que a parábola sofre um movimento vertical quando se varia o coeficiente c, este movimento pode ser para cima ou para baixo, ou seja, se $k > 0$ a parábola deslocará para cima, e se $k < 0$ ela deslocará para baixo.

Considerações finais

A curiosidade e a imaginação serviram de inspiração para o desenvolvimento deste trabalho, pois, a partir de dúvidas sobre o gráfico da função quadrática, bem como, dos pensamentos sobre as transformações possíveis para a parábola, foram feitos estudos minuciosos sobre o assunto.

Além das pesquisas bibliográficas realizadas, a experiência no ensino da matemática serviu de base para o desenvolvimento dos conceitos necessários para a caracterizaração da parábola e para o estudo do comportamento do gráfico ao variar os coeficientes da função.

É importante ressaltar que a abordagem utilizada foi voltada a professores e estudantes de matemática, e oferece subsídios para que ampliem seus conhecimentos sobre o assunto.

Sendo assim, conclui-se que este trabalho alcançou os objetivos propostos, e deve servir como material de pesquisa tanto para professores do ensino básico como para estudantes de matemática.

Referências Bibliográficas

[1] DANTE, L. R. **Matemática, série novo ensino médio**. Editora ática, São Paulo, 2005.

[2] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limites, derivação, integração**. Pearson, São Paulo, 2011.

[3] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; JUNIOR, J. R. G. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. FTD, São Paulo, 2002.

[4] IEZZI,G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D. M.; PÉRIGO, R. **Matemática: volume único**. Atual, São Paulo, 2002.

[5] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar, 1: conjuntos, funções**. Atual, São Paulo, 2004.

[6] IEZZI, G.; MURAKAMI, C; MACHADO, N. J. **Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral**. Atual, São Paulo, 2005.

[7] LANG, S. **Cálculo - volume 1**. Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro, 1971.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio - volume 1**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[9] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio - volume 2**. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[10] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **Temas e problemas**. SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[11] MOISE, E. E. **Cálculo, um curso universitário - volume 1**. Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1970.

[12] MOYER, R. E.; AYRES JR, F. **Teoria e problemas de trigonometria**. Bookman, Porto Alegre, 2003.

[13] REIS, G. L.; SILVA, V. V. **Geometria analítica**. LTC, Rio de Janeiro, 2012.

[14] RIBEIRO, J. S. **Projeto radix: matemática, 9º ano**. Scipione, São Paulo, 2009.

[15] ROGÉRIO, M. U.; SILVA, H. C.; BADAN, A. A. F. A. **Cálculo diferencial e integral: funções de uma variável**. Editora da UFG, Goiânia, 1994.