UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

O Ensino de Progressão Geométrica de Segunda Ordem no Ensino Médio

FERNANDO HENRIQUE LOPES

Orientador: Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

São José do Rio Preto - SP

2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

PROFMAT

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

O Ensino de Progressão Geométrica de Segunda Ordem no Ensino Médio

FERNANDO HENRIQUE LOPES

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Presidente Prudente.

Orientador:
Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira

São José do Rio Preto - SP
2017

Lopes, Fernando Henrique.
O Ensino de progressão geométrica de segunda ordem no ensino médio / Fernando Henrique Lopes . -- São José do Rio Preto, 2017
67 f.

Orientador: Suetônio de Almeida Meira
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Números reais. 3. Sequências numéricas. 4. Progressão geométrica de segunda ordem. 5. Prática de ensino. 7. Matemática – Metodologia. 8. Sequências (matemática) I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.
CDU – 517.52

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

FERNANDO HENRIQUE LOPES

O ENSINO DE PROGRESSÃO GEOMÉTRICA DE SEGUNDA ORDEM NO ENSINO MÉDIO

Dissertação aprovada pelo departamento de Matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente da UNESP para obtenção do título de Mestre.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira
UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Profª. Drª. Suellen Ribeiro Pardo Garcia
UTFPR - Toledo

Prof. Dr. José Roberto Nogueira
UNESP - Presidente Prudente

São José do Rio Preto
28 de agosto de 2017

Dedico aos meus pais

Élcio Aparecido Lopes e Sandra Mara Manhozo Batistão Lopes,

e aos meus avós que se foram,

Tereza de Oliveira Lopes e Cândido Manhozo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me abençoa todos os dias com sua honra e glória.

Ao meu irmão Caio e aos meus pais, Élcio e Sandra, que moldaram meu caráter, dando-me toda a liberdade de criar e aprender com eles.

Ao meu amigo Professor Wilhian Ferreira, por me auxiliar com conversas e estudos todas as vezes em que foi preciso.

Ao Cólegio Objetivo, Curso e Colégio Integral e a Unicesumar, todos de Maringá, que me incentivaram e auxiliaram para a conclusão da minha formação.

Ao meu orientador, professor Suetônio Meira pela paciência em conviver com minhas ansiedades e pela condução dessa pesquisa.

Aos professores que conduziram o programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",Campus de Presidente Prudente.

"Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta.
Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje,
mais do que nunca, em rápido desenvolvimento,
proliferando cada vez mais em novos ramos,
que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência."
José Sebastião e Silva.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal apresentar a definição e propriedades de progressões geométricas de 2º grau, geralmente não trabalhadas no estudo de sequências numéricas, que é iniciado no 1º Ano do Ensino Médio. Para isto, é realizado um estudo de casos gerais para sequências e séries de números reais, para posteriormente, exibir aplicações do conceito no Ensino Médio.

Inicialmente é apresentado ao aluno as definições e propriedades de sequências e séries, que requer um estudo mais aprofundado uma vez que é um assunto de maior complexidade para aplicação em turmas de ensino médio. Tais propriedades são utilizadas como ferramentas para o desenvolvimento posterior de progressões aritméticas e geométricas, tanto de 1ª como de 2ª ordem.

Uma vez definidas as progressões, atividades sobre o assunto são aplicadas aos alunos para que os mesmos dissertem sobre suas facilidades e dificuldades encontradas na resolução.

Palavras-chaves: Sequências de Números Reais, Progressões Geométricas de Segunda Ordem, Ensino Médio.

Abstract

The present work has as main objective to present the definition and properties of geometric progressions of 2nd degree, usually not worked in the study of numerical sequences, that is initiated in the 1st Year of High School. For this, a study of general cases for sequences and series of real numbers is carried out, later, to show applications of the concept in High School.

Initially the definitions and properties of sequences and series are presented to the student, which requires a more in-depth study since it is a subject of greater complexity for application in high school classes. These properties are used as tools for the later development of arithmetic and geometric progressions, both 1st and 2nd order.

Once the progressions are defined, activities on the subject are applied to the students so that they tell about their facilities and difficulties found in the resolution.

Keywords: Real Number Sequences, Second Order Geometric Progressions, High School.

Sumário

Introdução

O objetivo principal deste trabalho é apresentar aos alunos de ensino médio uma extensão e, posteriormente, um aprofundamento sobre o conteúdo de sequências que é iniciado no 1º Ano do Ensino Médio, onde é abordado o conteúdo progressões aritméticas e progressões geométricas. A ideia para abordar tal assunto foi obtida através dos questionamentos de alunos em atendimentos individuais feitas em colégios particulares em que trabalho. O interesse e a curiosidade dos alunos em questões que envolviam números triangulares, que resultam em progressões aritméticas de segunda ordem, me interessou a ponto de pesquisar a importância e o uso das progressões geométricas de segunda ordem, que é o foco principal da dissertação.

O Capítulo 1 é reservado para a parte histórica de sequências númericas. É interessante diferenciar as diversas sequências numéricas que são citadas ao longo do capítulo.

No Capítulo 2 é feita uma revisão sobre funções polinomiais, parte essencial para se resolver o termo geral de progressões geométricas.

O Capítulo 3 é devotado ao estudo analítico de sequências e séries. É neste capítulo que se espera uma atenção especial dos alunos para termos que serão trabalhados no ensino superior. A definição de limite de uma função é abordado pela primeira vez e pode ser relacionado posteriormente, no ensino médio, no estudo da função exponencial e na soma de progressões geométricas infinitas.

As definições que servirão de base para o estudo principal estão no Capítulo 4, onde são trabalhadas todas as propriedades das progressões aritméticas e das progressões geométricas.

O Capítulo 5 apresenta a abordagem que queríamos desde o início ao definirmos Progressões Geométricas de Segunda Ordem e suas propriedades, fazendo uma referência também às Progressões Aritméticas de Segunda Ordem.

Para finalizar, o Capítulo 6 descreve os resultados obtidos da aplicação de problemas envolvendo progressões geométricas em três turmas do ensino médio. É interessante relatar que por se tratar de turmas de níveis distintos, cada uma explorou o assunto dado de maneira diferente, alguns alunos com mais dificludade, outros com menos, porém é interessante observar como cada um pôde expor seu ponto de vista sobre o assunto. Os exercícios utilizados na aplicação se encontram no Apêndice A.

Capítulo 1

Um Pouco de História das Sequências e Progressões

As progressões foram estudadas desde povos muito antigos, por exemplo, os babilônicos e os egípicios. Inicialmente, procurou-se estabelecer padrões como o da enchente do Rio Nilo, onde os egípcios de 5000 anos atrás tiveram que observar os períodos em que ocorria a enchente do rio para poderem plantar na época certa e assim garantir seus alimentos. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento.

Eles observaram que o rio subia logo depois que a estrela Sírius se levantava a leste, um pouco antes do Sol. Notando que isso acontecia a cada 365 dias, os egípcios criaram um calendário solar composto de doze meses, de 30 dias cada mês e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys. Os egípcios dividiram ainda os doze meses em três estações de quatro meses cada uma: período de semear, período de crescimento e período da colheita.

Na Mesopotâmia surgiram várias tabletas babilônicas muito interessantes, mas nenhuma delas foi tão extraordinária quanto a tableta Plimpton 322 (1900 a 1600 a.C.). Numa dessas tabletas, a progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$ é somada de forma que a série de quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$ é achada.

A Matemática no Egito antigo nunca alcançou o nível obtido pela Matemática babilônica, talvez porque os egípcios tenham se mantido em semi isolamento, enquanto a babilônia era o centro das rotas de navios, e consequentemente, era um centro de troca de saberes. No entanto, devemos lembrar que os egípcios desenvolveram um papel primordial na preservação de muitos papiros que contribuíram para o nosso conhecimento atual sobre a Matemática.

Em um papiro que data de 1950 a. C. podemos encontrar alguns problemas teóricos a respeito de Progressões Aritméticas e Geométricas. Esse papiro foi encontrado em Kahun. O papiro Rhind (ou Ahmes) data aproximadamente de 1650 a. C. e nada mais é do que um texto matemático na forma de manual prático que Papiro Rhind contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo.

Muitos dos cálculos no Papiro Rhind são evidentemente exercícios para jovens estudantes. Embora uma grande parte deles seja de natureza prática, em algumas ocasiões o escriba parece ter tido em mente enigmas ou recreações matemáticas. O problema 79, por exemplo, cita apenas "sete casas, 49 gatos, 343 ratos, 2041 espigas de trigo, 16807 hectares". É presumível que o escriba estava tratando de um problema bem conhecido, em que uma das sete casas havia sete gatos, cada um deles come sete ratos, cada um dos quais havia comido sete espigas, cada uma delas teria produzido sete medidas de grão. O problema evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de medidas de grãos poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e medidas de grão. Para um estudo mais aprofundado, veja [16].

No Papiro de Rhind também aparece uma progressão geométrica muito interessante formada pelas frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{64}$ do Hekat, (unidade comum do volume usada para medir quantidade de grãos). Os termos dessa sequência são conhecidos como frações dos olhos do deus Hórus.

Segundo [17], se deve a Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética, uma vez que conheciam as progressões aritméticas e geométricas, as harmônicas e musicais, as proporções, os quadrados de uma soma ou de uma diferença. Associando os números à mística e à música, Pitágoras derivou os termos média harmônica e progressão harmônica. Concluiu também que a relação entre a altura dos sons e a largura da corda da lira seria responsável pela existência da harmonia musical. Observaram que os intervalos musicais se colocam de modo que admite expressão através de progressões aritméticas. Também se devem aos pitagóricos a primeira teoria sobre o relacionamento entre a música e a matemática. A importância desses fatos, para Pitágoras, residia em que novos tons relacionados com o original por meio de frações, isto é, estabeleciam-se relações entre os números naturais. Confirma-se, pois, ainda mais a sua teoria de que tudo no Universo estaria relacionado com os números naturais. Um elo entre geometria e matematica é feito ao se considerar os números figurados, originados através dos membros mais antigos da escola pitagórica em aproximadamente 600 a. C..

O grego Euclides de Alexandria também obteve grande êxito na história da matemática, produzindo a obra "Os Elementos". A primeira edição desse trabalho surgiu em 1482 e depois desta data já surgiram mais de mil. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico, afinal, por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.

"Os Elementos" se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros, e é no livro VIII que encontramos as proporções contínuas e Progressões Geométricas relacionadas, de forma que, se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c e d formam uma Progressão Geométrica. O problema 21 do livro IV diz:

"Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado".

Segundo o autor do problema a resposta é $\frac{81}{7}$, $\frac{144}{7}$ e $\frac{256}{7}$. A proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma fórmula para a soma de números em "progressão geométrica", expressa em termos elegantes mas poucos usuais:

"Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrai do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem".

Esse enunciado, é claro, é equivalente à fórmula:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} &= \frac{a_2 - a_1}{a_1} \\
\frac{S_n}{a_1 - a_{n+1}} &= \frac{a_1}{a_1 - a_2} \\
\frac{S_n}{a_1 - a_{n+1}} &= \frac{a_1}{a_1 - a_2} \\
\frac{S_n}{a_1 - a_1.r^n} &= \frac{1}{1 - r}
\end{aligned}
$$

Que por sua vez equivale a:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1.r^n}{1 - r}.$$

Ao leitor interessado em uma abordagem mais aprofundada sobre os treze livros de Euclides, sugerimos a leitura de [15].

Na doutrina de Charles Darwin também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. Num dos quatro itens fundamentais da doutrina de Darwin, encontramos uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das idéias de Thomas Malthus, famoso economista. Diz o item:

"As populações crescem em P.G. ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em P. A.".

Em consequência deste item, Darwin afirmou que devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar-se-iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam selecionados os mais fortes ou os mais aptos (a seleção natural) de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros. A comparação de Malthus entre o crescimento populacional e as reservas alimentares não é mais aceita atualmente, pois, apesar da maior taxa de crescimento populacional, não há uma desproporção tão grande.

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Para analisarmos e descrevermos o comportamento de progressões aritméticas de ordem superior faz-se necessária a revisão de alguns conteúdos que estão diretamente relacionados à resolução de progressões assim caracterizadas. A resolução de sistemas lineares e a caracterização de uma função polinomial são fundamentais para este estudo, além da análise de sequências numéricas pela lei de recorrência, propriedades do termo geral e da soma dos termos de uma progressão aritmética, assuntos que serão abordados no próximo capítulo.

Nesta dissertação, denotará $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais, $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ o conjunto dos números naturais e $\mathbb{N}^* = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$ o conjunto dos números naturais, excluindo o zero.

2.1 Função Polinomial

Para o estudo de progressões aritméticas de ordem superior recorre-se frequentemente ao conceito de função, principalmente pela sua aplicabilidade relacionada a determinação do valor numérico de um polinômio e também para determinar o termo geral que define uma sequência numérica. Nesta seção serão apresentadas definições relacionadas a este conceito e que serão aplicadas posteriormente.

Definição 2.1.1 *Sejam A e B dois conjuntos não-vazios. Dizemos que uma relação entre os elementos de A e B é uma função se* ***todo*** *elemento de A possuir um único correspondente em B.*

Quando uma função está definida no conjunto A para o conjunto B, podemos representá-la por

$$f : A \to B,$$

e lê-se função f de A em B.

O **domínio** de uma função, representado por $D(f)$, é o conjunto onde a função está definida. O conjunto **imagem** de uma função, representado por $Im(f)$, é o conjunto obtido pelos y correspondentes a cada x do domínio e está diretamente relacionado com a função que relaciona x e y. O **contradomínio** de uma função, representado por $CD(f)$, é o conjunto onde a imagem estará contida. Dessa forma, se a função f é definida por $f : A \to B$, então teremos:

$$D(f) = A, \quad CD(f) = B \quad e \quad Im(f) \subset B.$$

As definições a seguir classificam as funções em injetoras, sobrejetoras e bijetoras.

Definição 2.1.2 *Uma função $f : A \to B$ é **injetora** quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 em A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras, f é injetora quando*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Definição 2.1.3 *Uma função $f : A \to B$ é **sobrejetora** quando para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Em outras palavras, dizemos que $f : A \to B$ é sobrejetora quando o conjunto imagem coincide com o contradomínio B, isto é,*

$$Im(f) = CD(f).$$

Definição 2.1.4 *Uma função $f : A \to B$ é **bijetora** quando é sobrejetora e injetora.*

Definição 2.1.5 *Quanto a monotonicidade, as funções podem ser classificadas em:*

(a) crescentes *quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

(b) estritamente crescentes *quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

(c) decrescentes *quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

(d) estritamente decrescentes *quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

(e) constantes *quando, dados $x_1 \in A$ e $x_2 \in A$, tivermos que:*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

Com o intuito de caracterizar uma função polinomial, vejamos alguns tipos mais comuns de funções.

Exemplo 2.1.6 Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função do 1º grau** ou uma **função afim** se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa-se o elemento $(ax + b) \in \mathbb{R}$, com a $\neq 0$. Simbolicamente, temos a função do 1º grau descrita como

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax + b, \qquad a \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.7 Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função do 2º grau** ou **quadrática** se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa-se o elemento $(ax^2 + bx + c) \in \mathbb{R}$, com a $\neq 0$. Simbolicamente,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0. \end{aligned}$$

Exemplo 2.1.8 Dizemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função potência** se, a cada $x \in \mathbb{R}$, associa-se o elemento $(ax^n) \in \mathbb{R}$, com a $\neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Simbolicamente,

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = ax^n, \qquad a \neq 0, \qquad n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Nesse último exemplo não se considera $n = 0$ pois, neste caso, poderíamos ter uma indeterminação do tipo 0^0, quando fosse determinada a imagem do elemento 0 do domínio. Caso não fosse feita uma restrição no domínio dessa função, excluindo o zero, n poderia ser igual a qualquer número natural e, no caso de n ser igual a zero, a função potência ficaria restrita a uma função constante, $f(x) = a$, qualquer que fosse o elemento do domínio dessa função, inclusive para o zero.

Diante desses exemplos e definições, formalizamos o conceito de uma função polinomial.

Definição 2.1.9 *Um* ***polinômio*** *é uma expressão formal do tipo*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0,$$

onde $(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_{n-1},\ a_n)$ *é uma lista ordenada de números reais e* x *é uma* ***indeterminada****, sendo* x^i *uma abreviatura para* $x.x.\ \ldots .x.x$ *(i fatores). Caso* $a_i = 0$*, para todo* $i = 0, 1,\ \cdots, n$*, então* $p(x) = 0$ *é o polinômio nulo.*

A cada polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$*, faz-se corresponder a* ***função polinomial*** $\bar{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *quando existem números* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ *tais que, para todo* $x \in R$*, tem-se*

$$\bar{p}(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0.$$

Se $a_n \neq 0$*, então* $\bar{p}$ *tem grau* n*. Se* $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$*, então* $\bar{p}$ *não tem grau definido.*

Dessa forma, não há necessidade de fazer distinção entre o polinômio p e a função polinomial $\bar{p}$. Ambos serão representados pelo mesmo símbolo p e serão chamados indiferentemente de polinômio ou de função polinomial.

2.1.1 Função Polinomial Soma

Quando somamos dois polinômios, a soma dos termos semelhantes $a.x^p$ e $b.x^p$ será o monômio $(a + b)\,.x^p$.

Definição 2.1.10 *Dadas as funções polinomiais* $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ *definidas no conjunto dos números reais,* ***a função polinomial soma***

$$\begin{aligned} (p+q) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (p+q)\,(x) = p(x) + q(x), \end{aligned}$$

é definida pelo polinômio em que cada termo é a soma dos termos semelhantes dos polinômios parcelas.

O grau de $(p+q)$ *é tal que:*

(a) $grau\ p > grau\ q \Longrightarrow grau\,(p+q) = grau\ p$;

(b) $grau\ p = grau\ q \Longrightarrow grau\,(p+q) \leq grau\ p$ *ou* $(p+q)$ *não tem grau definido.*

CAPÍTULO 3

Sequências e Séries

No decorrer do Ensino Médio, o estudo sobre sequências numéricas aborda, principalmente, as progressões aritméticas e geométricas, onde os alunos devem observar certos padrões, associando ideias do dia a dia, a fim de tornar o aprendizado mais significativo. No entanto, cabe ao professor, o intermediário entre o conhecimento e o aluno, um estudo mais aprofundado a respeito das sequências numéricas e de suas propriedades a fim de enriquecer ainda mais tal conteúdo em sala de aula.

Este capítulo é devotado a um estudo analítico de sequências e séries de números reais, dando enfoque ao comportamento analítico das progressões aritméticas de ordem superior. Ao leitor interessado em uma abordagem mais aprofundada sobre este assunto, sugerimos a leitura deste tópico, apresentado em [1] e [7].

3.1 Sequências de Números Reais

Definição 3.1.1 *Uma* ***sequência*** *de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *que a cada número natural* n *associa um número real* $x_n = x(n)$*, chamado de* ***n-ésimo*** *termo da sequência. Ou seja,*

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & x_n = x(n). \end{array}$$

Assim, sequência ou sucessão é todo conjunto, com elementos numéricos ou não, apresentados em uma determinada ordem.

Denotamos por $(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots)$, ou por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x_n), a sequência infinita $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.2

(a) A sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = n$, é descrita por:

$$(n) = (0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ \cdots);$$

(b) A sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, é descrita por:

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \cdots\right);$$

(c) A sequência (x_n), cujo termo geral é $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, é descrita por:

$$\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left(-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ \cdots\right),$$

onde $n \in \mathbb{N}^*$.

Algumas sequências não podem ser definidas algebricamente em função de sua posição. Neste caso, utiliza-se uma *Lei de Recorrência* para determinar os termos dessa sequência.

Definição 3.1.3 ***Lei de recorrência*** *é uma regra que permite calcular cada termo de uma sequência dada, a partir do termo anterior, onde necessariamente seja conhecido o primeiro termo da sequência.*

Dessa forma, toda lei de recorrência fornece o primeiro termo x_1 de uma sequência (x_n) e expressa um termo qualquer x_{n+1} em função do seu antecedente x_n. Por exemplo, na sequência definida pela lei de recorrência

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3} \\ x_{n+1} = 2.x_n, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$$

temos que:

- $x_2 = 2.x_1 = 2.\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$;
- $x_3 = 2.x_2 = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$;
- $x_4 = 2.x_3 = 2.\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$;
- $x_5 = 2.x_4 = 2.\frac{8}{3} = \frac{16}{3}$;

e assim sucessivamente, determinando a sequência

$$(x_n) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{8}{3};\ \frac{16}{3};\ \cdots\right).$$

Em algumas aplicações faz-se necessário encontrar a lei de recorrência de uma sequência que forneça seus elementos. Por exemplo, para obter a lei de recorrência que fornece qualquer elemento da seguinte sequência $(1;\ 3;\ 7;\ 15;\ 31;\ 63;\ \ldots)$, podemos analisar os elementos dados e procurar estabelecer uma relação entre os mesmos. Assim, seguindo esse raciocínio, temos:

- $x_1 = 1.$
- $x_2 = 3 = 2.1 + 1 = 2.x_1 + 1;$
- $x_3 = 7 = 2.3 + 1 = 2.x_2 + 1;$
- $x_4 = 15 = 2.7 + 1 = 2.x_3 + 1;$
- $x_5 = 31 = 2.15 + 1 = 2.x_4 + 1;$

Logo, pelo raciocínio acima exposto, segue que

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = 2.x_n + 1, \end{cases}$$

é uma lei de recorrência da sequência numérica dada.

3.1.1 Operações com Sequências

Como as sequências são funções reais, podemos efetuar as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão entre duas sequências, com uma restrição na operação de divisão.

Definição 3.1.4 *Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências dadas.*
(i) *A* ***adição das duas sequências dadas*** *consiste em somar, para cada valor de n, os elementos das sequências (x_n) e (y_n), ou seja,*

$$(x_n) + (y_n) = (w_n),$$

em que $w_n = x_n + y_n$*;*

(ii) *A* ***multiplicação das duas sequências dadas*** *consiste em multiplicar, para cada valor de* n*, os elementos das sequências* (x_n) *e* (y_n)*, ou seja,*

$$(x_n).(y_n) = (p_n),$$

em que $p_n = x_n.y_n$*;*

(iii) *A* ***subtração das duas sequências dadas*** *consiste em subtrair, para cada valor de* n*, os elementos das sequências* (x_n) *e* (y_n)*, ou seja,*

$$(x_n) - (y_n) = (v_n),$$

em que $v_n = x_n - y_n$*;*

(iv) *A* ***divisão das duas sequências dadas*** *consiste em dividir, para cada valor de* n*, os elementos das sequências* (x_n) *e* (y_n)*, desde que* $y_n \neq 0$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*; ou seja,*

$$\frac{(x_n)}{(y_n)} = (q_n),$$

em que $y_n \neq 0$*.*

3.1.2 Sequências Monotônicas

Definição 3.1.5 *Uma sequência* (x_n) *será classificada como:*

(i) crescente *quando* $x_n < x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) não-decrescente *quando* $x_n \leq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) decrescente *quando* $x_n > x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iv) não-crescente *quando* $x_n \geq x_{n+1}$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Toda sequência é **monótona** se for crescente, não-crescente, decrescente ou não decrescente. Caso não seja monótona, a sequência é classificada como **alternante**. Caso uma sequência possua todos os termos idênticos, essa sequência é classificada como **constante**.

Exemplo 3.1.6

(a) A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ é crescente. De fato, escrevendo os elementos dessa sequência como

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \ \dots \ , \frac{n}{2n+1}, \frac{n+1}{2n+3}, \ \dots \ ,$$

percebe-se que os quatro primeiros elementos crescem a medida que o valor de n cresce. Isso nos leva a supor que

$$x_n = \frac{n}{2n+1} < \frac{n+1}{2n+3} = x_{n+1}.$$

Para verificar a veracidade de tal afirmação, multiplicamos os dois membros da desigualdade acima por $(2n+1).(2n+3)$, obtendo as desigualdades equivalentes:

$$n.(2n+3) < (n+1).(2n+1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2n^2+3n < 2n^2+3n+1.$$

Como a última desigualdade é verdadeira para todo valor de n, pois o segundo membro da desigualdade é 1 unidade maior que o primeiro, então $x_n < x_{n+1}$, ou seja, $(x_n) = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)$ é uma sequência crescente.

(b) A sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$, para $n \neq 0$, é decrescente. De fato, escrevendo os elementos dessa sequência como

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \frac{1}{n+1},\ \cdots,$$

percebe-se que os elementos decrescem a medida que o valor de n cresce. Isso nos leva a supor que

$$x_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = x_{n+1}.$$

Para verificar a veracidade de tal afirmação observamos que, como $n+1 > n$, então

$$\frac{1}{n} \quad > \quad \frac{1}{n+1},$$

ou seja,

$$x_n > x_{n+1},$$

para todo $n \neq 0$, mostrando que a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{n}\right)$ é decrescente.

3.1.3 Sequências Limitadas

Definição 3.1.7 *Uma sequência (x_n) é **limitada superiormente** (respectivamente **limitada inferiormente**), se existe $c > 0$ tal que $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$), para* *todo $n \in \mathbb{N}$. Se existe $c > 0$ tal que $|x_n| < c$, isto é, $-c < x_n < c$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que a sequência (x_n) é* ***limitada****.*

Exemplo 3.1.8
(a) A sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ é limitada superiormente por 1, já que seus elementos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$, são todos menores do que este valor. Na verdade, qualquer número real c, tal que $c \geq 1$, é um limitante superior da sequência dada. Nesse caso, dizemos que 1 é um *limitante superior mínimo* de $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$.
(b) A sequência $(x_n) = \left(\frac{n}{2n+1}\right)$ é limitada inferiormente por 0, já que seus elementos $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \cdots, \frac{n}{2n+1}, \cdots$, são maiores do que zero. Ainda mais, qualquer número real c, tal que $c \leq \frac{1}{3}$, é um limitante inferior da sequência dada, conforme pode ser verificado facilmente analisando os elementos da sequência dada. Nesse caso, dizemos que $\frac{1}{3}$ é um *limitante inferior máximo* de $(x_n) = \left(\frac{n}{2n+1}\right)$.
(c) Ainda analisando a sequência $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ do primeiro item, percebe-se que seus elementos são maiores do que 0, sendo este o limitante inferior máximo. Como essa sequência possui limitantes superior e inferior, então $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ é uma sequência *limitada*. O mesmo ocorre para a sequência $(x_n) = \left(\frac{n}{2n+1}\right)$ do segundo item que, além de possuir um limitante inferior máximo igual a $\frac{1}{3}$, também possui um limitante superior mínimo igual a $\frac{1}{2}$, pois $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{n}} < \frac{1}{2}$. Dessa forma, $(x_n) = \left(\frac{n}{2n+1}\right)$ também é uma sequência limitada.

3.1.4 Subsequências

Definição 3.1.9 *Dada uma sequência (x_n), seja (n_i) uma sequência de números naturais tal que $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$. A composição de (x_n) com (n_i) é uma sequência (x_{n_i}), $i = 0, 1, 2, \ldots$, chamada subsequência de (x_n). Assim, uma subsequência de (x_n) é uma sequência que se obtém desta descartando-se parte de seus termos.*

Denotamos a subsequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}'}$ ou $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou ainda

$$(x_{n_0};\ x_{n_1};\ x_{n_2};\ \cdots;\ x_{n_k};\ \cdots).$$

Exemplo 3.1.10 As sequências $(x_n) = \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)$ e $(y_n) = \left(n^{(-1)^n}\right)$ admitem as seguintes subsequências:

(a) $(x_{2n}) = \left(-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4};\ \cdots;\ -\frac{1}{2n};\ \cdots\right)$;

(b) $(y_{2n-1}) = \left(1;\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{5};\ \cdots;\ \frac{1}{2n-1};\ \cdots\right)$.

3.1.5 Limites de Sequências Reais

Definição 3.1.11 *Sejam (x_n) uma sequência de números reais e L um número real. Dizemos que (x_n) converge para L, ou é convergente, e se escreve*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = L,$$

quando, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, para todo $n > n_0$.

Podemos expressar essa definição na forma:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = L \quad .\equiv. \quad \forall \quad \varepsilon > 0, \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad |x_n - L| < \varepsilon, \quad \forall \quad n \geq n_0.$$

Se uma sequência não é convergente, ela é dita divergente.

Exemplo 3.1.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0.$

De fato, seja $\varepsilon > 0$ um número real positivo qualquer e seja n_0 um número natural tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, o qual existe pois $\mathbb{R}$ é arquimediano [7, p. 59]. Então, $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ e, se $n > n_0$,

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Portanto, $\left(\frac{1}{n}\right)$ é convergente e converge para zero, quando n tende ao infinito.

Exemplo 3.1.13 A sequência $(x_n) = \left(\frac{n^2}{n+3}\right)$ é uma sequência divergente pois*:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+3}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{1+\frac{3}{n}}\right) = \infty,$$

ou seja, não existe o limite dessa sequência quando $n \to \infty$.

A unicidade do limite de uma sequência é verificada pelo Teorema a seguir.

Teorema 3.1.14 *Se existir um número real L tal $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$, então ele é único.*

Demonstração: Seja uma sequência (x_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Vamos supor, por absurdo, que existe um número real M, onde $M \neq L$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = M$. Tomemos $\varepsilon = \dfrac{|L-M|}{2} > 0$. Note que os intervalos $(L-\varepsilon,\quad L+\varepsilon)$ e $(M-\varepsilon,\quad M+\varepsilon)$ são disjuntos pois, caso contrário, existiria um número real x tal que $x \in (L-\varepsilon,\quad L+\varepsilon) \cap (M-\varepsilon,\quad M+\varepsilon)$, que implicaria em $|L-x| < \varepsilon$ e $|M-x| < \varepsilon$, donde concluiríamos que

$$|L-M| \leq |L-x| + |M-x| < 2\varepsilon = |L-M|,$$

o que é um absurdo. Assim, como $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0$, implica que $x_n \in (L-\varepsilon,\quad L+\varepsilon)$ e, portanto, $x_n \notin (M-\varepsilon,\quad M+\varepsilon)$, para todo $n > n_0$. Logo, não pode ocorrer $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = M$, provando que o limite é único.

□

Como consequência da Definição 3.1.11 e do Teorema 3.1.14, que tratam da convergência de sequências e da unicidade do limite, respectivamente, temos os seguintes resultados sobre limites de sequências.

Proposição 3.1.15 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Seja uma sequência (x_n) tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = L$. Tomando $\varepsilon = 1$, vemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (L-1,\quad L+1)$. Consideremos o conjunto finito $F = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0}, L-1, L+1\}$. Sejam c e d o menor e o maior elemento de F, respectivamente. Então todos os termos x_n da sequência estão contidos no intervalo $[c, d]$. Logo, a sequência é limitada.

□

Exemplo 3.1.16 A sequência $(x_n = n) = (0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ \cdots)$ é limitada inferiormente ($x_n \geq 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$) mas não é limitada superiormente. Logo, da Proposição 3.1.15, segue que essa sequência não é convergente, pois não é limitada.

Observação 3.1.17 O fato de uma sequência ser limitada não é suficiente para que a sequência seja convergente. Por exemplo, a sequência $(x_n) = ((-1)^n)$ é limitada inferiormente por -1, é limitada superiormente por 1, mas não é convergente, pois $x_n \to 1$ quando n é par e $x_n \to -1$ quando n é ímpar.

Como consequência da proposição 3.1.15 temos o resultado abaixo.

Proposição 3.1.18 *Toda sequência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma sequência crescente. Como (x_n) também é uma sequência limitada, então o conjunto $S = \{x_n \mid n \geq 1\}$ tem um limitante superior. O Axioma do Completamento nos diz que todo conjunto não-vazio de números que possua um limitante superior também possui um limitante superior mínimo. Dessa forma, consideremos que L seja o limitante superior mínimo do conjunto S. Agora, dado $\varepsilon > 0$, $L - \varepsilon$ não é um limitante superior de S. Portanto, $x_N > L - \varepsilon$, para algum inteiro N. Como a sequência (x_n) é crescente, então $x_n \geq x_N$, para todo $n > N$. Assim, se $n > N$, teremos

$$x_n > L - \varepsilon,$$

que implica em

$$0 \leq x_n - L < \varepsilon,$$

desde que $x_n \leq L$. Assim,

$$|L - x_n| < \varepsilon,$$

qualquer que seja $n > N$. Com este resultado, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = L,$$

provando que a sequência é convergente.

□

De maneira similar (utilizando o limitante inferior máximo) demonstra-se que essa Proposição é válida para sequências decrescentes.

Exemplo 3.1.19 Seja a sequência (x_n) definida com o primeiro termo $x_0 = \sqrt{2}$ e termo geral $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$. Determinando os cinco primeiros termos dessa sequência, obtemos:

- $x_0 = \sqrt{2}$;
- $x_1 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$;
- $x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$;
- $x_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$;
- $x_4 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}$.

Para verificar se essa sequência é limitada, observamos que:

- $x_0 = \sqrt{2} < 2$;
- $x_1 = \sqrt{2 + x_0} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} < \sqrt{2 + 2} = 2$;
- $x_2 = \sqrt{2 + x_1} < \sqrt{2 + 2} = 2$;
- $\ldots,$

assim,

$$x_0 = \sqrt{2} < 2 \quad \text{e} \quad x_{n-1} < 2 \quad \Rightarrow \quad x_n < 2, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma, (x_n) é limitada inferiormente por $\sqrt{2}$ e superiormente por 2, ou seja, (x_n) é uma sequência limitada. Verificando se essa sequência é monótona, temos que:

$$x_0 = \sqrt{2} < \sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{2 + x_0} = x_1,$$

e

$$x_{n-1} < x_n \quad \Rightarrow \quad x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}} < \sqrt{2 + x_n} = x_{n+1}.$$

Portanto, $x_n < x_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, mostrando que (x_n) é uma sequência crescente. Logo, como essa sequência é monótona e limitada, segue da Proposição 3.1.18 que a sequência dada é convergente.

3.2 Séries

Em várias aplicações na matemática, o número π é um número decimal infinito que denota a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Esse número π pode ser escrito:

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ldots$$

Estudos preliminares determinam que todo número decimal infinito pode ser escrito como uma soma infinita. No caso do número π, podemos reescrevê-lo como:

$$\pi = 3+0,1+0,04+0,001+0,0005+0,00009+\cdots = 3+\frac{1}{10}+\frac{4}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{5}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\ldots$$

Quanto mais parcelas adicionarmos à soma acima mais próximos estaremos do valor de π.

Assim, sempre que adicionarmos parcelas a uma sequência infinita (x_n), obtemos uma expressão da forma

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_n + \ldots,$$

a qual é denominada de **série infinita** ou simplesmente **série**, e que é denotada pelo símbolo

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i \quad \text{ou} \quad \sum x_n.$$

Para determinarmos se uma série infinita possui uma soma finita, ou seja, se a série infinita se aproxima de algum número real, consideremos as **somas parciais** definidas por

$$s_1 = x_1,$$

$$s_2 = x_1 + x_2,$$

$$s_3 = x_1 + x_2 + x_3,$$

onde, de maneira geral, teremos

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Estas somas parciais definem uma nova sequência que pode ou não ter um limite. Se $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n)$ existe, então dizemos que esse limite é a soma da série $\sum x_n$.

Definição 3.2.1 *Sejam dadas a série*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \ldots,$$

e a n-ésima soma parcial s_n da mesma série, representada por

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Se a sequência (s_n) é convergente e $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n) = s$, onde s é um número real, então a série $\sum x_n$ é dita convergente e escrevemos

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots = s \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = s.$$

O número real s é chamado de ***soma da série****. Se a sequência (s_n) é divergente, então a série é chamada de divergente.*

No exemplo abaixo iniciamos o passo principal deste trabalho. A definição de série geométrica nos dará a ideia de progressão geométrica que será abordado mais adiante.

Exemplo 3.2.2 Sequências infinitas representadas da forma

$$x + xr + xr^2 + xr^3 + \cdots + xr^{n-1} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(xr^{n-1}\right), \quad x \neq 0,$$

são denominadas de **séries geométricas**, onde cada termo é obtido do termo anterior, multiplicando-o por uma mesma constante real r.

No caso de r ser igual a 1, obteríamos a soma

$$s_n = x + x + x + \cdots + x = \sum_{i=1}^{n} x = nx.$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} (s_n)$ não existe, então a série geométrica é divergente, nesse caso.

No entanto, se considerarmos $r \in (-1; 1)$, teremos:

$$s_n = x + xr + xr^2 + xr^3 + \cdots + xr^{n-1},$$

e, se multiplicarmos ambos os membros dessa igualdade por r, obtemos:

$$rs_n = xr + xr^2 + xr^3 + \cdots + xr^n.$$

Subtraindo membro a membro essa duas últimas equações, obtemos:

$$s_n - rs_n = x - xr^n \quad \Longleftrightarrow \quad s_n(1-r) = x(1-r^n) \quad \Longleftrightarrow \quad s_n = \frac{x\,(1-r^n)}{(1-r)}.$$

Se escolhessemos $x = \dfrac{1}{2}$ e $r = \dfrac{1}{2}$, onde $r \in (-1;1)$, teríamos a sequência $(x_n) = \left(\dfrac{1}{2^n}\right)$, cujas somas parciais são:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}, \\ s_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \\ s_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

onde, de maneira geral, teremos:

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^n},$$

uma série geométrica de razão $r = \dfrac{1}{2}$. Assim, s_n pode ser reescrita como:

$$s_n = \frac{\frac{1}{2}.\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \Longleftrightarrow s_n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) \Longleftrightarrow s_n = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Dessa forma, como

$$\lim_{n\to\infty}(s_n) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1 = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{x}{1-r},$$

então, para $r = \dfrac{1}{2}$, a série geométrica é convergente e sua soma é 1.

Se $r < 1$ ou $r > 1$ então, para $s_n = \dfrac{x\,(1-r^n)}{(1-r)}$, teremos que a sequência é divergente, o que implica que $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n)$ não existe. Dessa forma, se $r < 1$ ou $r > 1$, então a série geométrica é divergente.

Resumidamente, a série geométrica $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(xr^{n-1}\right), \quad x \neq 0:$

(a) é convergente se $|r|<1$ e sua soma é $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(xr^{n-1}\right)=\dfrac{x}{1-r}$;

(b) divergente se $|r| \geq 1$.

Exemplo 3.2.3 Vamos mostrar que a série

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

conhecida como **série harmônica**, é divergente. Para tanto, é conveniente usarmos as somas parciais $s_2,\ s_4,\ s_8,\ s_{16},\ s_{32},\ \cdots$ e mostrar que estas tornam-se cada vez maiores quando n cresce. Assim:

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1+\frac{1}{2},\\
s_4 &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2},\\
s_8 &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\
&> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2},\\
s_{16} &= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)\\
&+ \left(\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{4}{2},
\end{aligned}$$

e, utilizando o mesmo raciocínio, obtemos $s_{32}>1+\dfrac{5}{2}$ e $s_{64}>1+\dfrac{6}{2}$ e, de modo geral, temos

$$s_{2^n}>1+\frac{n}{2}.$$

Isso mostra que $\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2^n})=\infty$, ou seja, não existe, provando que (s_{2^n}) é divergente e, consequentemente, que a série harmônica também é divergente.

A seguir, relacionamos a convergência de séries e sequências, cujo termo geral é x_n.

Teorema 3.2.4 *Se a série* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_n$ *é convergente, então* $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

Demonstração: Seja $s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$. Então $x_n = s_n - s_{n-1}$. Por hipótese, temos que $\sum_{i=1}^{\infty} x_n$ é convergente. Então (s_n) é convergente. Seja $\lim_{n\to\infty} (s_n) = s$. Como $n - 1 \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow \infty$, então teremos que $\lim_{n\to\infty} (s_{n-1}) = s$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} (s_n) - \lim_{n\to\infty} (s_{n-1}) = s - s = 0.$$

$\square$

Exemplo 3.2.5 No exemplo 3.2.2 vimos que a série $\sum_{i=1}^{\infty} (x_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$ é convergente. Calculando $\lim_{n\to\infty} (x_n)$, obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0,$$

justificando o Teorema 3.2.4 .

Observação 3.2.6 Pela contrapositiva do Teorema 3.2.4, se

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} (x_n) \text{ não existe},$$

então a série $\sum_{i=1}^{\infty} (x_n)$ é divergente. Essa implicação é chamada de ***Teste para Divergência de Séries***.

Exemplo 3.2.7 Dada a sequência $(x_n) = \left(\frac{n^2}{5n^2 + 4}\right)$, temos que:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{5n^2 + 4}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5 + \frac{4}{n^2}}\right) = \frac{1}{5} \neq 0,$$

mostrando que a série $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{5n^2 + 4}\right)$ é divergente.

O Teorema 3.2.4 não é suficiente para concluirmos que uma sequência (x_n) é divergente pelo fato de $\lim_{n\to\infty} (x_n) = 0$. Caso $\lim_{n\to\infty} (x_n) = 0$, então a série pode ser divergente ou convergente. Como foi visto no Exemplo 3.2.3, a série $\sum x_n$, em que $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$, é divergente e, no entanto, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Capítulo 4

Progressões de 1ª Ordem

4.1 Progressão Aritmética

Definição 4.1.1 *Denomina-se Progressão Arimética (P.A.) uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com uma constante. A essa constante damos o nome de razão da P.A. e será denotada por* r*. Tal sequência pode ser classificada como finita ou infinita.*

Notação de uma progressão aritmética: $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$, em que:

- a_1 é o primeiro termo;
- n é o número de termos ($n \in \mathbb{N}^*$);
- r é a razão da progressão aritmética.

Exemplo 4.1.2 A sequência $(-2,\ 1,\ 4,\ 7,\ \cdots)$ é uma progressão aritmética infinita onde $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$. Assim, pela definição acima temos que $a_2 = a_1 + r \Rightarrow 1 = -2 + r$, ou seja, $r = 3$.

Propriedades 4.1.3 *Uma progressão aritmética pode ser classifica através do valor que é atribuido à constante* r*. Temos:*
a) Se $r > 0$*, a progressão aritmética é dita crescente.*
b) Se $r = 0$*, a progressão aritmética é dita constante.*
c) Se $r < 0$*, a progressão aritmética é dita decrescente.*

Exemplo 4.1.4
a) $(3,\ 6,\ 9,\ 12)$ é uma progressão aritmética em que $a_1 = 3$, finita (possui 4 termos, ou seja, $n = 4$) e crescente $r = 6 - 3 = 3$.

b) $(23,\ 19,\ 15,\ 11,\ \cdots)$ é uma progressão aritmética em que $a_1 = 23$, infinita e decrescente $r = 19 - 23 = -4$.

c) $(26,\ 26,\ 26,\ 26,\ \cdots)$ é uma progressão aritmética em que $a_1 = 26$, infinita e constante $r = 26 - 26 = 0$.

O fato de uma progressão aritmética ser classificada como infinita nos traz vários problemas em relação à obtenção de termos que estão localizados distantes dos primeiros. Por exemplo, como obter o termo de posição 102 na sequência $(-1,\ 3,\ 7,\ \cdots)$?

A questão anterior pode ser resolvida se levarmos em consideração a definição citada anteriormente. Observe:

- $a_2 - a_1 = r \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1 + r;$
- $a_3 - a_2 = r \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2 + r \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1 + r + r \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1 + 2r;$
- $a_4 - a_3 = r \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3 + r \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + 2r + r \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1 + 3r;$
- $a_5 - a_4 = r \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_4 + r \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_1 + 3r + r \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_1 + 4r;$

e assim sucessivamente.

Logo, das igualdades acima, termos:

$$a_n = a_1 + (n-1).r, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposição 4.1.5 *Dada uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1, o n-ésimo termo dessa sequência será dado por*

$$a_n = a_1 + (n-1).r, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

A igualdade acima é denominada termo geral de uma P.A.

Demonstração: Vamos mostrar essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita.

Tomando $n = 1$, a sentença é válida, pois $a_1 = a_1 + (1-1).r = a_1 + 0.r = a_1$. Suponha que a sentença seja válida para n, ou seja, é verdadeira a igualdade $a_n = a_1 + (n-1).r$, e, assim, provaremos a validade da mesma sentença para $n+1$, ou seja, $a_{n+1} = a_1 + ((n+1) - 1)\,.r$. Logo,

$$a_{n+1} = a_n + r.$$

De fato, como $a_n = a_1 + (n-1).r$, então:

$$a_{n+1} = a_1 + (n-1).r + r \iff a_{n+1} = a_1 + nr - r + r \iff a_{n+1} = a_1 + nr$$

$$\iff a_{n+1} = a_1 + (n+1-1)\,r \iff a_{n+1} = a_1 + ((n+1)-1)\,r.$$

Assim, como a sentença é válida para $n+1$, vale a sentença do termo geral da progressão aritmética, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$\square$

Exemplo 4.1.6 Assim, seguindo o mesmo princípio, podemos encontrar o termo 102 da sequência $(-1,\ 3,\ 7,\ \cdots)$ já citada. Uma vez que $a_1 = -1$ e $r = 3-(-1) = 4$ temos:

$$a_{102} = a_1 + (102-1).4 = -1 + 101.(4) = 403.$$

Na resolução de certos problemas sobre progressões aritméticas, algumas representações especiais se fazem necessárias para facilitar tal resolução. São elas:

(1) Em uma progressão aritmética de 3 termos temos que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ pode ser reescrita como $(x-r,\ x,\ x+r)$, onde x é o termo central e r é a razão da progressão aritmética.

(2) Em uma progressão aritmética de 4 termos temos que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ pode ser reescrita como $(x-3a,\ x-a,\ x+a,\ x+3a)$, onde $r = 2^a$ é a razão da progressão aritmética.

(3) Em uma progressão aritmética de 5 termos temos que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ pode ser reescrita como $(x-2r,\ x-r,\ x,\ x+r,\ x+2r)$, onde x é o termo central e r é a razão da progressão aritmética.

Seja abaixo uma importante propriedade envolvendo três elementos de uma progressão aritmética.

Propriedades 4.1.7 *Seja $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\cdots)$ uma progressão aritmética. Temos que para $n \geq 2$ qualquer elemento pode ser escrito como a média aritmética de seu sucessor com seu antecessor. Logo:*

$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}.$$

Exemplo 4.1.8 Suponha que estamos interessados em obter o perímetro de um triângulo de lados $x+1$, $2x$ e x^2-5, considerando que esses lados formem uma progressão aritmética. Assim, utilizando a propriedade anterior:

$$2x = \frac{x+1+x^2-5}{2} \quad \rightarrow \quad 4x = x^2+x-4 \quad \rightarrow \quad x^2-3x-4=0.$$

Logo, resolvendo a equação quadrática acima obtemos $x=-1$ ou $x=4$. Como de acordo com o enunciado x está associado ao lado de uma triângulo, o valor $x=-1$ não pode ser considerado. Assim, $x=4$ e portanto $(4+1)+(2.4)+(4^2-5)=24$ cm é o perímetro do triângulo.

Propriedades 4.1.9 *Em toda progressão aritmética os termos equidistantes (opostos), ou seja, que estão a uma mesma distância do termo central, têm a mesma soma.*

(i) Considerando uma progressão aritmética com um número par de termos:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8) \quad \rightarrow \quad a_1+a_8=a_2+a_7=a_3+a_6=a_4+a_5.$$

(ii) Considerando uma progressão aritmética com um número ímpar de termos:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7) \quad \rightarrow \quad a_1+a_7=a_2+a_6=a_3+a_5=2.a_4.$$

Complementando o estudo de progressões aritméticas, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.1.10 *Sendo* $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots, a_n)$ *uma progressão aritmética, então a soma dos seus* n *primeiros termos, denotada por* S_n*, é dada por:*

$$S_n = \left(\frac{a_1+a_n}{2}\right).n.$$

Demonstração: Seja dada uma progressão aritmética qualquer. Indicando a soma dos n primeiros termos por S_n, obtém-se:

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n \quad .$$

Escrevendo essa soma de trás para frente, obtém-se:

$$S_n = a_n+a_{n-1}+\cdots+a_3+a_2+a_1 \quad .$$

Somando-se membro a membro essas duas equações, obtemos:

$$\begin{aligned}
2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\
2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_1 + r + a_n - r) + \cdots + (a_n - r + a_1 + r) + (a_1 + a_n) \\
2S_n &= \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n\ parcelas} \\
2S_n &= (a_1 + a_n)\,.n \\
S_n &= \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n,
\end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

□

Observação 4.1.11 Karl Gauss (1777 - 1855), matemático alemão, começou a demonstrar sua genialidade desde criança ao ser a primeira pessoa a apresentar a soma de termos de uma progressão aritmética, sem contar termo a termo.

A história conta que quando criança, sua turma recebeu uma punição de um professor por fazer bagunça durante a aula. Tal punição consistia em somar todos os números naturais de 1 a 100. Enquanto os demais alunos se concentravam em somar termo a termo, Gauss teve a ideia de agrupar alguns termos e verificar que os mesmos possuíam soma contante. Vejamos:

$$\begin{aligned}
1 + 100 &= 101 \\
2 + 99 &= 101 \\
3 + 98 &= 101 \\
&\vdots \\
50 + 51 &= 101
\end{aligned}$$

Assim, Gauss observou que quando agrupados, dois a dois, os termos equidistantes dessa progressão aritmética sempre somavam 101. Logo, obteve a parcela 101 somada 50 vezes e concluiu que a soma pedida pelo professor era igual a $101\ .\ 50\ =\ 5050$.

Observe que a soma feita por Gauss, $1 + 2 + 3 + ... + 100$, é um caso particular da soma dos termos de uma progressão aritmética finita. Logo, concluimos que para achar a soma dos termos de uma PA, basta somar o primeiro termo com o último e multiplicar pela metade da quantidade de termos da progressão aritmética.

Exemplo 4.1.12 Um atleta corre sempre 400 metros a mais que no dia anterior. Ao final de 11 dias, ele percorre um total de 35200 metros. Qual foi o número de metros que ele correu no último dia?

Do enunciado temos que $S_{11} = 35200$ e $r = 400$. Utilizando o termo geral da progressão aritmética:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1).r \\ a_{11} &= a_1 + (11-1).400 \\ a_{11} &= a_1 + 4000 \end{aligned}$$

Substituindo o resultado obtido na soma dos termos da progressão aritmética:

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right).n \\ S_{11} &= \left(\frac{a_1 + a_{11}}{2}\right).11 \\ 35200 &= \left(\frac{a_1 + a_1 + 4000}{2}\right).11 \\ 2a_1 + 4000 &= 6400 \\ a_1 &= 1200 \end{aligned}$$

Portanto: $a_{11} = 1200 + 4000 = 5200$ metros.

4.2 Progressão Geométrica

Definição 4.2.1 *Denomina-se Progressão Geométrica (P.G.) uma sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é dado pelo produto do anterior por uma constante, chamada de razão da P.G., que será denotada por q. Tal sequência pode ser classificada como finita ou infinita.*

Notação de uma progressão geométrica: $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots)$, em que:

- a_1 é o primeiro termo;
- n é o número de termos ($n \in \mathbb{N}^*$);

- q é a razão da progressão geométrica.

Exemplo 4.2.2 A sequência $(64,\ 32,\ 16,\ 8,\ \cdots)$ é uma progressão geométrica infinita onde $a_1 = 64$ e $a_2 = 32$. Assim, pela definição acima temos que $a_2 = a_1.q \Rightarrow 32 = 64.q$, ou seja, $q = \dfrac{1}{2}$.

Propriedades 4.2.3 *Uma progressão geométrica pode ser classifica através do valor que é atribuido à constante r e ao seu primeiro termo a_1. Temos:*

a) A progressão geométrica é dita crescente quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$.

b) A progressão geométrica é dita constante quando todos os seus termos forem iguais e não nulos. Nesse caso, $q = 1$.

c) A progressão geométrica é dita decrescente quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $a_1 < 0$ e $q > 1$.

d) A progressão geométrica é dita oscilante se cada termo tiver o sinal contrário ao do termo anterior. Nesse caso, $q < 0$.

Exemplo 4.2.4

a) $(2,\ 6,\ 18,\ 54)$ é uma progressão geométrica finita crescente, em que $a_1 = 2$ e $q = \dfrac{6}{2} = 3$.

b) $(-40,\ -20,\ -10,\ \cdots)$ é uma progressão geométrica infinita crescente, em que $a_1 = -40$ e $q = \dfrac{-20}{-40} = \dfrac{1}{2}$.

c) $(256,\ 64,\ 16,\ \cdots)$ é uma progressão geométrica infinita decrescente, em que $a_1 = 256$ e $q = \dfrac{64}{256} = \dfrac{1}{4}$.

d) $(-2,\ -10,\ -50,\ \cdots)$ é uma progressão geométrica infinita decrescente, em que $a_1 = -2$ e $q = \dfrac{-10}{-2} = 5$.

e) $(4,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4,\ \cdots)$ é uma progressão geométrica infinita constante, em que $a_1 = 4$ e $q = \dfrac{4}{4} = 1$.

f) $\left(6,\ -3,\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{-3}{4},\ \cdots\right)$ é uma progressão geométrica infinita oscilante, em que $a_1 = 6$ e $q = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2}$.

Assim como nas progressões aritméticas, temos métodos para encontrar termos em qualquer posição de uma progressão geométrica. Veja:

- $\dfrac{a_2}{a_1} = q \quad \Rightarrow \quad a_2 = a_1.q;$

- $\dfrac{a_3}{a_2} = q \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_2.q \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1.q.q \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_1.q^2;$
- $\dfrac{a_4}{a_3} = q \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_3.q \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1.q^2.q \quad \Rightarrow \quad a_4 = a_1.q^3;$
- $\dfrac{a_5}{a_4} = q \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_4.q \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_1.q^3.q \quad \Rightarrow \quad a_5 = a_1.q^4;$

e assim sucessivamente.

Logo, das igualdades acima, termos:

$$a_n = a_1.q^{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Proposição 4.2.5 *Dada uma progressão geométrica de razão q e primeiro termo a_1, o n-ésimo termo dessa sequência será dado por*

$$a_n = a_1.q^{n-1}, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

A igualdade acima é denominada termo geral de uma P.G.

Demonstração: Vamos mostrar essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita.

Para $n = 1$ a sentença é verdadeira, pois $a_1 = a_1.q^{1-1} = a_1.q^0 = a_1$. Em seguida, por hipótese, afirmamos a validade da sentença para n, ou seja, vale $a_n = a_1.q^{n-1}$, e provaremos a validade da mesma sentença para $n+1$, ou seja, vale $a_{n+1} = a_1.q^{((n+1)-1)}$. Assim

$$a_{n+1} = a_n.q.$$

De fato, como $a_n = a_1.q^{n-1}$, então:

$$a_{n+1} = a_1.q^{n-1}.q \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = a_1.q^{n-1+1} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} = a_1.q^{((n+1)-1)}.$$

Dessa forma, vale a sentença do termo geral da progressão geométrica, para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

$\square$

Exemplo 4.2.6 Dada a progressão geométrica $(2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots)$, podemos encontrar o termo na posição 9 sabendo que $a_1 = 2$ e $q = \dfrac{4}{2} = 2$ temos:

$$a_9 = a_1.q^{9-1} = 2\ .\ 2^8 = 2\ .\ 256 = 512.$$

Na resolução de certos problemas sobre progressões geométricas, algumas representações especiais se fazem necessárias para facilitar tal resolução. São elas:

(1) Em uma progressão geométrica de 3 termos temos que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ pode ser reescrita como $\left(\dfrac{x}{q},\ x,\ x.q\right)$, onde x é o termo central e q é a razão da progressão geométrica.

(2) Em uma progressão geométrica de 4 termos temos que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$ pode ser reescrita como $(x,\ x.q,\ x.q^2,\ x.q^3)$, onde q é a razão da progressão geométrica.

(3) Em uma progressão geométrica de 5 termos temos que a sequência $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5)$ pode ser reescrita como $\left(\dfrac{x}{q^2},\ \dfrac{x}{q},\ x,\ x.q,\ x.q^2\right)$, onde x é o termo central e q é a razão da progressão geométrica.

Veja abaixo uma importante propriedade envolvendo três elementos de uma progressão geométrica.

Propriedades 4.2.7 *Seja $(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ a_{n+1},\cdots)$ uma progressão geométrica. Temos que para $n \geq 2$, qualquer elemento da sequência é igual à média geométrica de seu sucessor com seu antecessor. Logo:*

$$(a_n)^2 = a_{n-1}\ .\ a_{n+1}.$$

Exemplo 4.2.8 Vamos determinar qual o valor de x que torna a sequência $(8x,\ 5x-3,\ x+3,\ x)$ uma progressão geométrica de termos positivos. Assim, escolhendo três termos consecutivos e utilizando a propriedade anterior:

$$(x+3)^2 = x.(5x-3) \quad \rightarrow \quad x^2+6x+9 = 5x^2-3x \quad \rightarrow \quad 4x^2-9x-9=0.$$

Logo, resolvendo a equação quadrática acima obtemos $x = \dfrac{-3}{4}$ ou $x = 3$. Como de acordo com o enunciado a sequência possui termos positivos, $x = \dfrac{-3}{4}$ é descartado. Assim, $x = 3$ e portanto a progressão geométrica é $(24,\ 12,\ 6,\ 3)$.

Propriedades 4.2.9 *Em toda progressão geométrica os termos equidistantes (opostos), ou seja, que estão a uma mesma distância do termo central, têm o mesmo produto.*

(i) Considerando uma progressão geométrica com um número par de termos:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8) \quad \rightarrow \quad a_1.a_8 = a_2.a_7 = a_3.a_6 = a_4.a_5.$$

(ii) Considerando uma progressão geométrica com um número ímpar de termos:

$$(a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7) \quad \rightarrow \quad a_1.a_7 = a_2.a_6 = a_3.a_5 = (a_4)^2.$$

Complementando o estudo de progressões geométricas, temos o seguinte teorema.

Teorema 4.2.10 *Se* $(a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n)$ *é uma progressão geométrica finita, com* $q \neq 1$, *então a soma dos seus* n *primeiros termos, denotada por* S_n, *é*

$$S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q} \quad .$$

Demonstração: Seja dada uma progressão geométrica $(a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n)$. Primeiramente, indicando a soma dos n primeiros termos por S_n, obtém-se:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Multiplicando ambos os membros de S_n por q, obtemos:

$$\begin{aligned} & q.S_n = a_1.q + a_2.q + a_3.q + \cdots + a_{n-1}.q + a_n.q \\ \Longleftrightarrow\ & q.S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n.q. \end{aligned}$$

Efetuando a subtração $S_n - q.S_n$, obtemos:

$$\begin{aligned} & S_n - q.S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n - (a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n + a_n.q) \\ \Longleftrightarrow\ & S_n - q.S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n - a_2 - a_3 - a_4 - \cdots - a_n - a_n.q \\ \Longleftrightarrow\ & S_n - q.S_n = a_1 - a_n.q. \end{aligned}$$

Como $a_n = a_1.q^{n-1}$, então

$$\begin{aligned} & S_n - q.S_n = a_1 - \left(a_1.q^{n-1}\right).q \\ \Longleftrightarrow\ & S_n - q.S_n = a_1 - a_1.q^n \\ \Longleftrightarrow\ & S_n.(1-q) = a_1.(1-q^n). \end{aligned}$$

Como $q \neq 1$, então

$$S_n = a_1.\frac{1-q^n}{1-q},$$

concluindo a demonstração.

$\square$

Exemplo 4.2.11 Para encontrarmos a soma dos seis primeiros termos da progressão geométrica $(3;\ 6;\ 12;\cdots)$, sabemos que o primeiro termo a_1 é igual a 3, que a razão é igual a 2, pela progressão geométrica dada, e que n vale 6. Assim, substituindo esses valores na fórmula da soma dos termos da progressão geométrica dada, obtemos:

$$S_6 = 3.\frac{1-2^6}{1-2} = 3.\frac{1-64}{-1} = 3.63 = 189.$$

Logo, a soma dos seis primeiros termos da progressão geométrica dada será igual a 189.

Como consequência do Teorema 4.2.10, obtemos o Corolário a seguir.

Corolário 4.2.12 *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita (a_n), com $q \neq 1$, é*

$$S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1}.$$

Demonstração: Dada uma progressão geométrica (a_n), já vimos que

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Assim,

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} \iff S_n = \frac{a_1 - a_1.q^n}{1-q} \iff S_n = \frac{a_1.q^n - a_1}{q-1}$$
$$\iff S_n = \frac{a_1.q^{n-1+1} - a_1}{q-1} \iff S_n = \frac{a_1.q^{n-1}.q - a_1}{q-1} \iff S_n = \frac{a_n.q - a_1}{q-1},$$

completando a demonstração do corolário.

$\square$

Observação 4.2.13 No Teorema 4.2.10 e no Corolário 4.2.12, consideramos a razão da progressão geométrica $q \neq 1$. Caso tivéssemos $q = 1$, então a progressão geométrica possuiria todos os seus termos iguais a x_1, por exemplo, tais que a soma dos n primeiros termos dessa progressão geométrica seria igual a soma de n parcelas iguais a a_1, ou seja,

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \ \cdots\ + a_1}_{n\ parcelas} = na_1.$$

Para descobrirmos a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, devemos inicialmente apresentar dois teoremas fundamentais.

Teorema 4.2.14 *Se $h > -1$, então*

$$(1+h)^n \geq 1 + n.h,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Vamos mostrar essa igualdade usando o Princípio da Indução Finita. Para $n = 0$ a sentença é válida, pois

$$(1+h)^0 \geq 1 + 0.h \Rightarrow 1 \geq 1.$$

Agora, vamos supor que a sentença seja verdadeira para algum $n = k \in \mathbb{N}$, isto é, vale $(1+h)^k \geq 1 + k.h$, e mostraremos que ela é verdadeira para $n = k+1$. Com efeito, se $(1+h)^k \geq 1 + k.h$, multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por $(1+h)$, que é positivo, obtemos

$$\begin{aligned} (1+h)^k . (1+h) &\geq (1+k.h) . (1+h) = 1 + kh + h + kh^2 \\ &= 1 + (k+1) .h + kh^2 \geq 1 + (k+1) .h, \end{aligned}$$

provando o teorema.

□

Teorema 4.2.15 *Se $|q| < 1$, então*

$$\lim_{n \to \infty} (q^n) = 0.$$

Demonstração: Se $q = 0$, escolhido $\varepsilon > 0$, teremos que

$$|q^n - 0| = 0 \Longrightarrow |q^n - 0| < \varepsilon,$$

para todo $n > 0$. Logo, $\lim\limits_{n \to \infty} (q^n) = 0$, se $q = 0$. Se $q \neq 0$, escolhido $\varepsilon > 0$, e fazendo $h = \dfrac{1}{|q|} - 1$, teremos h positivo e, com o resultado do Teorema 4.2.14, obtemos

$$|q^n - 0| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+n.h} < \frac{1}{n.h} < \varepsilon,$$

se $n > \dfrac{1}{\varepsilon.h}$. Logo, $\lim\limits_{n \to \infty} (q^n) = 0$, se $|q| < 1$ e $q \neq 0$, provando o teorema.

□

Podemos formalizar a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita.

Teorema 4.2.16 *Se* $(a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_n)$ *é uma progressão geométrica infinita, com razão* q *tal que* $-1 < q < 1$*, então a soma* S_n *infinita dessa progressão geométrica será dada por*

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Demonstração: Para provar este teorema, vamos mostrar que a sequência das somas parciais da progressão geométrica,

$$(s_1;\ s_2;\ s_3;\ \cdots;\ s_n;\ \cdots) = (s_n)$$

converge para $\dfrac{a_1}{1-q}$.

Escolhendo $s = \dfrac{a_1\,(1-q^n)}{1-q}$, obtemos

$$s - \frac{a_1}{1-q} = a_1.\frac{1-q^n}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q}.q^n,$$

e, calculando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} s - \frac{a_1}{1-q} \;=\; \lim_{n\to\infty} -\frac{a_1}{1-q}.q^n \;=\; \lim_{n\to\infty} -\frac{a_1}{1-q} \,.\, \lim_{n\to\infty} q^n,$$

onde, lembrando que a_1 e q são constantes reais e $\lim\limits_{n\to\infty} (q^n) = 0$, pelo Teorema 4.2.14, teremos

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{a_1}{1-q} \,.\, \lim_{n\to\infty} q^n \;= -\frac{a_1}{1-q}.0 = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} s - \frac{a_1}{1-q} \;=\; 0.$$

Dessa forma, concluímos que

$$S_n = \lim_{n\to\infty} s = \frac{a_1}{1-q}.$$

$\square$

Observação 4.2.17

(a) No Teorema 4.2.16, se $a_1 = 0$, então a progressão geométrica será por $(0;\ 0;\ 0;\ \cdots)$ e sua soma será zero, qualquer que seja o valor de q;

(b) Ainda no Teorema 4.2.16, se $q < -1$ ou $q > 1$, a sequência de somas parciais não convergiriam, pois se tratariam de séries geométricas, que não convergem nesse caso, como foi visto no Exemplo 3.2.2, na seção sobre séries, deste capítulo.

Exemplo 4.2.18 A soma dos termos da progressão geométrica infinita $\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \cdots\right)$, onde $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$, será dada por:

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Capítulo 5

Progressões de 2ª Ordem

5.1 Progressões de Segunda Ordem

Para que fiquem claras as definições e propriedades sobre Progressões Geométricas de 2ª Ordem que veremos posteriormente, vejamos abaixo algumas propriedades sobre Progressões Aritméticas de 2ª Ordem.

5.1.1 Progressões Aritméticas de Segunda Ordem

Definição 5.1.1 *Seja dada a sequência $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n,\ \cdots)$. Define-se o* ***operador*** Δ *(ou* ***operador diferença****) como sendo a diferença entre cada termo x_{n+1} e o seu antecedente x_n, denotado por*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n.$$

Entendemos por operador a aplicação que associa um número real a uma sequência.

Proposição 5.1.2 *Uma sequência de números reais (x_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, (Δx_n) é uma sequência constante.*

Demonstração: Se a sequência de números reais $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \ldots;\ x_n;\ \cdots)$ é uma progressão aritmética, então a diferença entre cada termo x_{n+1} e o seu antecedente x_n é sempre igual a uma constante r, chamada de razão da progressão aritmética. Logo, $(\Delta x_n) = (r;\ r;\ r;\ \cdots;\ r;\ \cdots)$ é uma sequência constante.

Em contrapartida, se na sequência de números reais $(x_n) = (x_1;\ x_2;\ x_3;\ \cdots;\ x_n;\ \cdots)$ obtivermos que $(\Delta x_n) = (x_{n+1} - x_n) = (r;\ r;\ r;\ \cdots;\ r;\ \cdots)$, ou seja, obtivermos uma sequência constante, onde r é uma constante real, então, por definição, (x_n) é uma progressão aritmética.

$\square$

Definição 5.1.3 *Uma* ***progressão aritmética de segunda ordem*** *é uma sequência de números reais* (x_n), *na qual as diferenças* $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, *entre cada termo e o termo anterior, formam uma progressão aritmética* ***não-estacionária*** *(razão* $r \neq 0$*).*

Exemplo 5.1.4 Seja dada a sequência $(x_n) = (-8;\ -6;\ -2;\ 4;\ 12;\ 22;\ 34;\ \cdots)$. Essa sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem porque a sequência das diferenças entre cada termo e seu anterior, $(y_n) = (\Delta x_n) = (x_{n+1} - x_n) = (2;\ 4;\ 6;\ 8; \cdots)$ é uma progressão aritmética (com razão $r = 2$) não-estacionária.

A partir da definição vista, temos o Teorema a seguir.

Teorema 5.1.5 *Uma sequência de números reais* (x_n) *é uma* ***progressão aritmética de segunda ordem*** *se, e somente se, seu termo geral é dado por um polinômio do segundo grau, na variável* n.

Demonstração: Se a sequência dada (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem, então a sequência de números reais dada por

$$(y_n) = (\Delta x_n) = (x_2 - x_1; x_3 - x_2; x_4 - x_3; \cdots; x_n - x_{n-1}; \cdots) = (y_1; y_2; y_3; \cdots; y_n; \cdots)$$

é uma progressão aritmética não-estacionária. Assim, $(y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$ é a soma dos $n-1$ primeiros termos da progressão aritmética (y_n) e que será denotada por um polinômio do segundo grau, na variável n. Se simplesmente somarmos todos os termos da sequência (y_n), teremos:

$$\begin{aligned} & y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + x_4 - x_3 + \cdots + x_n - x_{n-1} \\ \Longleftrightarrow\ & y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1} = x_n - x_1 \\ & \qquad\qquad \Longleftrightarrow x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1}). \end{aligned}$$

Como $x_n = x_1 + (y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{n-1})$, então o termo geral da sequência (x_n) também será expresso por um polinômio do segundo grau, na variável n.

Em contrapartida, se o termo geral da sequência numérica (x_n) for expresso por $x_n = an^2 + bn + c$, onde a, b e c são constantes reais, então seu operador Δ

será:

$$
\begin{aligned}
& \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \\
\Longleftrightarrow\ & \Delta x_n = a\,(n+1)^2 + b\,(n+1) + c - \left(an^2 + bn + c\right) \\
\Longleftrightarrow\ & \Delta x_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c \\
\Longleftrightarrow\ & \Delta x_n = 2an + (a+b)\,.
\end{aligned}
$$

Generalizando, Δx_n é expresso por um polinômio do primeiro grau, na variável n. Logo, Δx_n é uma progressão aritmética não-estacionária e, por definição, (x_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

□

5.1.2 Progressões Geométricas de Segunda Ordem

Definição 5.1.6 ***(Operador Quociente)*** *Denotemos por ∇ o operador quociente em sucessões: $\nabla b_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Ou seja, ∇ é resultado do quociente entre um termo sucessor pelo termo antecessor em uma progressão.*

Da definição anterior podemos concluir que uma sucessão $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ é uma progressão geométrica somente se $\nabla b_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ é constante.

Definição 5.1.7 *Uma sucessão $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ na qual a sucessão dos quocientes $(\nabla b_n) = \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ é uma progressão geométrica de primeira ordem, designa-se por **Progressão Geométrica de Segunda Ordem**.*

Exemplo 5.1.8 *Considere a sequência $(5, 15, 315, 46305, ...)$. Essa sequência é uma progressão geométrica de segunda ordem pois a sequência dos quocientes entre cada termo e seu antecessor, $(\nabla b_n) = \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \left(\dfrac{15}{5}, \dfrac{315}{15}, \dfrac{46305}{315}, ...\right) = (3, 21, 147, \cdots)$ é uma progressão geométrica com razão $q = 7$.*

Generalizando a definição anterior podemos dizer que uma **progressão geométrica de ordem** k, com $k \geq 2$, é uma sucessão na qual os quocientes entre cada termo e o termo anterior formam uma progressão geométrica de ordem $k-1$.

Vamos determinar abaixo, uma lei de termo geral para progressões geométricas de 2ª ordem.

Proposição 5.1.9 *Seja* $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ *uma progressão geométrica de primeira ordem e* $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ *uma progressão geométrica de segunda ordem. Definimos como termo geral da progressão geométrica de segunda ordem, a equação:*

$$a_n = a_1\ .\ b_1^{\binom{n-1}{1}}.q^{\binom{n-1}{2}}$$

onde $q_1 = b_1$ *e* $q_2 = q$ *é a razão da progressão de primeira ordem.*

Demonstração: Considere as sequências $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ e $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ descritas acima. Pela definição de progressão geométrica de segunda ordem temos:

- $b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} \ \Rightarrow\ a_2 = a_1.b_1 \ \Rightarrow\ a_2 = (a_1)^1.(b_1)^1.q^0;$
- $b_2 = \dfrac{a_3}{a_2} \ \Rightarrow\ a_3 = a_2.b_2 \ \Rightarrow\ a_3 = [(a_1)^1.(b_1)^1.q^0].[b_1.q] \ \Rightarrow\ a_3 = (a_1)^1.(b_1)^2.q^1;$
- $b_3 = \dfrac{a_4}{a_3} \ \Rightarrow\ a_4 = a_3.b_3 \ \Rightarrow\ a_4 = [(a_1)^1.(b_1)^2.q^1].[b_1.q^2] \ \Rightarrow\ a_4 = (a_1)^1.(b_1)^3.q^3;$
- $b_4 = \dfrac{a_5}{a_4} \ \Rightarrow\ a_5 = a_4.b_4 \ \Rightarrow\ a_5 = [(a_1)^1.(b_1)^3.q^3].[b_1.q^3] \ \Rightarrow\ a_5 = (a_1)^1.(b_1)^4.q^6.$

Prosseguindo com os cálculos, percebemos que as potências de b_1 seguem a ordem $1, 2, 3, 4, \cdots, \dbinom{n-1}{1}$ e as potências de q seguem a ordem $0, 1, 3, 6, \cdots, \dbinom{n-1}{2}$. Levando em conta que para $0 \leq m < p$ temos $\binom{m}{p} = 0$, concluímos que:

$$a_n = a_1.b_1^{\binom{n-1}{1}}.q^{\binom{n-1}{2}}.$$

$\square$

Exemplo 5.1.10 *Sabendo que a sequência* $(1, 2, 3, \cdots)$ *é uma progressão geométrica de segunda ordem, vamos determinar seu quinto termo. Calculando o quocientes entre cada termo e seu antecessor temos a sequência* $(\nabla b_n) = \left(\dfrac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \left(\dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{2}, ...\right)$ *que é uma progressão geométrica com razão* $q = \dfrac{3}{4}$. *Sendo assim, vamos calcular o seu quinto termo utilizando a proposição acima para* $n = 5$*:*

$$a_5 = a_1\ .\ b_1^{\binom{5-1}{1}}\ .\ q^{\binom{5-1}{2}} = 1\ .\ 2^{\binom{4}{1}}\ .\ \left(\frac{3}{4}\right)^{\binom{4}{2}} = 2^4\ .\ \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 16\ .\ \frac{729}{4096} = \frac{729}{256}.$$

Em seguida, apresentam-se alguns resultados que permitem relacionar as progressões geométricas com as progressões aritméticas.

Teorema 5.1.11 $(b_1,\ b_2,\ \cdots, b_n)$ *é uma progressão geométrica de termos positivos se e somente se* $(a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n)$*, definida por* $a_n = \log b_n$*, é uma progressão aritmética.*

Demonstração: Seja (b_n) uma progressão aritmética de termos positivos. Então, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, onde $q \neq 1$ é constante (razão da progressão geométrica).

Para que (a_n), definida por $a_n = \log b_n$ seja uma progressão aritmética a diferença $a_{n+1} - a_n$ terá que ser constante. Vejamos, para $q \neq 0$

$$a_{n+1} - a_n = \log(b_{n+1}) - \log(b_n) = \log\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \log q$$

que é constante. Logo (a_n) é uma progressão aritmética de razão $\log q$.

Se $a_n = \log(b_n)$ é uma progressão arimética, então

$$\log(b_{n+1}) - \log(b_n) = r \ \leftrightarrow\ \log\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = r \ \leftrightarrow\ \frac{b_{n+1}}{b_n} = e^r$$

isto é, (b_n) é uma progressão geométrica de razão $q = e^r$.

$\square$

Teorema 5.1.12 g_n *é uma progressão geométrica de segunda ordem se e só se* $\log g_n$ *é uma progressão aritmética de segunda ordem.*

Demonstração: Seja (g_n) uma progressão geométrica de segunda ordem. Então h_n, definida por $h_n = \frac{g_{n+1}}{g_n}$ é uma progressão geométrica de razão $r \neq 1$, ou seja, $h_n = h_1.r^{n-1}$ (por definição). Portanto:

$$\begin{aligned}
g_{n+1} &= h_1\ .\ g_n\ .\ r^{n-1}\\
&= (h_1)^2\ .\ r^{n-2}\ .\ r^{n-1}\ .\ g_{n-1}\\
&= \cdots\\
&= (h_1)^n\ .\ r^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}\ .\ g_{n-1}\\
&= (h_1)^n\ .\ r^{\frac{n.(n-1)}{2}}\ .\ g_1
\end{aligned}$$

de onde,

$$g_n = (h_1)^{n-1} \; . \; r^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} \; . \; g_1.$$

Assim,

$$\log g_n = \log g_1 + (n-1). \log h_1 + \frac{1}{2}.(n-1).(n-2). \log r,$$

que é um polinômio de grau 2 em n, e pelo Teorema 5.1.5, é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Suponhamos agora que $(\log g_n)$ é uma progressão arimética de segunda ordem, ou seja, pelo teorema 5.1.5, $\log g_n = an^2 + bn + c$, com $a \neq 0$.

Assim, $g_n = e^{an^2+b^n+c}$. Provemos que g_n é uma progressão geométrica de segunda ordem.

$$\nabla g_n = \frac{e^{a(n+1)^2+b(n+1)+c}}{e^{an^2+bn+c}} = \frac{e^{an^2+2an+a+bn+b+c}}{e^{an2+bn+c}} = e^{2an+a+b}.$$

$$\nabla^2 g_n = \frac{\nabla g_{n+1}}{\nabla g_n} = \frac{e^{2a(n+1)+a+b}}{e^{2an+a+b}} = e^{2a},$$

que é constante, provando-se que (g_n) é uma progressão geométrica de segunda ordem.

□

Corolário 5.1.13 *Se* (a_n) *é uma progressão aritmética de segunda ordem então* $(b_n) = (c.r^{a_n})$ *é uma progressão geométrica de segunda ordem, para qualquer constante* $c > 0$ *e razão* r*.*

Demonstração: Seja (a_n) uma progressão arimética de segunda ordem e consideremos a sucessão $(b_n) = (c.r^{a_n})$. Aplicando o logaritmmo obtemos que, $\log b_n = a_n. \log r + \log c$. Por hipótese (a_n) é uma progressão arimética de segunda ordem, logo $(a_n \log r + \log c)$ é também uma progressão aritmética de segunda ordem. Basta observar que o termo geral de (a_n) é da forma $a_n = a_1.n^2 + a_2.n + c$, logo $\log b_n = ((a_1.n^2 + a_2.n + c) \log r + \log c)$ que é um polinômio de 2º grau. Pelo teorema 5.1.5, (b_n) é uma progressão geométrica de segunda ordem.

□

Capítulo 6

Aplicações

Este trabalho teve como objetivo mostrar como uma progressão geométrica de segunda ordem pode ser trabalhada no Ensino Médio, através de sua definição e de seu termo geral.

A aplicação de exercícios que envolvem progressões geométricas de segunda ordem parecem difíceis de se resolver a primeira vista. Os alunos que recentemente tiveram o primeiro contato com progressões naturalmente irão apresentar maiores dificuldades. Os exercícios propostos no Capítulo 6 foram aplicados, com abordagens distintas, para alguns alunos do Ensino Médio de um Colégio Particular de Maringá. Foi descrito abaixo o comportamento da turma em relação ao conteúdo abordado.

1ª Série:

Para os alunos da 1ª série, o trabalho com sequências e progressões é bem recente. É neste ano que o termo PA e PG é abordado e já cobrado de forma significativa em processos de avaliações seriadas. No dia 28 de novembro de 2016 reuni um grupo com 7 alunos do 1º ano e ministrei uma aula de revisão sobre PA e PG, dando mais importância à parte de PG: sua definição, suas principais propriedades envolvendo seus termos, obtenção termo geral e soma dos termos (finita e infinita).

Após esta breve aula, selecionei alguns exercícios sobre PG e deixei que desenvolvessem para avaliar o pensamento de cada um. Como esperado ao chegarem nos exercícios sobre PG de 2ª Ordem, tiveram muita dificuldade em observar que mesmo tendo uma sequência onde os seus termos possuíam uma "regra" multiplicativa, não se tratava de uma PG que tinham acabado de desenvolver.

Assim, defini para eles o que era uma PG de 2ª Ordem, resolvi os exercícios e os desafiei a resolverem os exercícios propostos, semelhantes ao que tinha acabado de fazer. Novamente, sentiram muita dificuldade em manipular os cálculos que resultavam em valores muito altos.

Vale ressaltar que para que esses alunos conseguissem calcular o termo geral de uma PG do 2º grau, foram fornecidos valores dos números binomiais pedidos, uma vez que só trabalharão com este conteúdo no 2º ano do ensino médio.

2ª Série:

No dia 29 de novembro de 2016 foi formado um grupo de 10 alunos do 2º ano e a abordagem feita neste grupo foi um pouco diferente. Pedi que eles me dessem uma "aula" sobre progressões geométricas: me informassem o que se lembravam do ano anterior, quando viram tal conteúdo, e suas aplicações. O resultado foi até inesperado uma vez que alguns alunos lembraram sobre aplicações de PG e a compararam com função exponencial, dissertando até sobre a ideia de limite quando perguntadas sobre soma infinita.

Sobre as questões de PG de 2ª Ordem, conseguiram determinar se uma sequência é PG de 2ª Ordem observando a multiplicação de seus termos por constantes, porém, também apresentaram dificuldades em obter um termo distante dos demais fornecidos.

3ª Série:

No dia 30 de novembro de 2016, 6 alunos do 3º ano se interessaram sobre o assunto e me procuraram para desenvolvermos alguns exercícios. Também mudei a abordagem com esses alunos. Por se tratarem de alunos que possuíam um ritmo constante de estudo por conta dos vestibulares próximos, simplesmente disponibilizei os exercícios propostos e aguardei que me questionassem.

Os resultados foram semelhantes aos da turma do 2º ano: a maioria dos alunos teve dificuldades em obter um termo muito distante dos conhecidos. A informação importante deste grupo é a de que um dos alunos, que havia voltado de intercambio recentemente (estava na Austrália) já havia tido uma noção de progressões de ordem superior e assim, pode compartilhar com o resto da turma, o que acabou facilitando os cálculos seguintes.

Ensino Superior:

Após as aplicações no Ensino Médio, resolvi fazer uma aplicação dos mesmos exercícios aos alunos do curso de Engenharia de Software, no Ensino Superior. Como eles já dominam o assunto de funções e sequências recursivas, utilizadas nas aulas de programação, achei que teriam um pouco mais de facilidade para desenvolver o conteúdo.

Porém, os resultados foram semelhantes aos alunos do ensino médio, uma vez que o assunto em questão também não tinha sido visto antes.

Considerações Finais e Conclusão

Como foi relatado ao longo do trabalho, esta dissertação teve como objetivo principal observar como um aluno de ensino médio se comportaria ao ser apresentado a um novo assunto que normalmente não é trabalhado em sua grade curricular, porém, pode ser tratado como uma extensão de progressões geométricas, este sim, assunto trabalhado desde o 1º Ano do Ensino Médio.

É interessante notar como os alunos de séries diferentes possuem ideias completamente distintas em relações ao mesmo assunto. Com as aplicações apresentadas no Apêndice A consegui visualizar quais as principais facilidades e dificuldades apresentadas e quais os caminhos que tomavam para tentar solucionar suas dificuldades.

Na turma de 1º Ano, é natural que os alunos apresentem uma dificuldade maior e se assustem com o assunto de progressões, justamente por ser o primeiro contato com o assunto. Na resolução de exercícios, alguns alunos quiseram resolver questões simplesmente contando os termos, até perceberem que não era a melhor maneira. Me surpreendi com o fato de conseguirem enxergar como uma progressão geométrica poderia ser representada através de uma lei de formação de uma função exponencial, o que facilitou o entendimento dos outros alunos.

Já no trabalho com progressões de 2ª ordem, percebi uma dificuldade bem maior pelo fato de envolver números binomiais no desenvolvimento do termo geral. De maneira geral, achei a aplicação bem positiva, uma vez que alunos de 1º Ano do Ensino Médio já estão sendo preparados para processos de avaliações seriadas aplicadas ao final do ano.

Por se tratarem de alunos mais maduros, as turma de 2º e 3º Anos sentiram menos dificuldade no desenvolvimento dos cálculos apresentados. Percebi que questões sobre progressões de 1º grau não seria problema e focamos no desenvolvimento de questões de progressões de 2º grau. Após estudarmos as definições, conseguiram desenvolver bem os problemas e pudemos tirar algumas conclusões.

De modo geral, senti um interesse muito bom dos alunos, foram muito receptivos a um assunto novo, que nem é trabalhado durante o ensino médio. Alguns alunos de 3º ano até se propuseram procurar questões, principalmente em provas de vestibulares, que envolvessem o assunto para trabalharmos posteriormente.

Outro ponto positivo na apresentação do conteúdo foi ver o interesse de alunos que inicialmente não fariam parte dos grupos formados para a atividade. Uma vez que o assunto que seria trabalhado, mesmos sendo desconhecido, é apresentado como um aprofundamento do que já foi visto em sala, chamou a atenção de vários alunos, até de turmas pré vestibular, que vieram até mim e pediram para participar como ouvintes.

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G. S. S., *Análise Matemática para Licenciatura – 3ª edição rev. e ampl. –*. São Paulo. Blucher. 2008.

[2] Ávila, G. S. S., *Cálculo das Funções de Uma Variável - Volume 2 - 7ª edição.* Rio de Janeiro. LTC. 2012.

[3] Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1.* Rio de Janeiro. SBM. 2006.

[4] Carvalho, P. C. P., Lima, E. L., Morgado, A. C., Wagner, E., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2.* Rio de Janeiro. SBM. 2006.

[5] Dolce, O., Guelli, C. A., Iezzi, G., *Álgebra IV.* São Paulo. Moderna. 1978.

[6] Domenico, L. C. de, *Matemática 3 em 1 - Curso Completo do 2º Grau.* São Paulo. Editora IBEP.

[7] Lima, Elon Lajes, *Curso de Análise - Volume 1.* Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1992.

[8] Filho, A. B., Gentil, N, Greco, A. C., Greco, S. E., Santos, C. A. M., *Matemática para o 2º Grau (Reformulado) - Volume 1.* São Paulo. Editora Ática. 1996.

[9] Franzin, N. A., Miranda, I. T. P., Paiva, M. B. F., Raymundo, P. J., *Matemática - O Saber Quantitativo.* Maringá. CLICHETEC. 2007.

[10] Hazzan, S., Iezzi, G., *Fundamentos da Matemática Elementar - Sequências, Matrizes, Determinantes, Sistemas - Volume 4.* São Paulo. Atual. 1977.

[11] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2 - 3ª edição.* Trad. sob a direção de Cyro de Carvalho Patarra. São Paulo. HARBRA. 1994.

[12] Morgado, A. C., Wagner, E., Zani, S. C.., *Progressões e Matemática Financeira (Coleção do Professor de Matemática)*. Rio de Janeiro. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq. 1993.

[13] Muraro, A. M., *Minimanual de Pesquisa Matemática*. Uberlândia. Claranto. 2004.

[14] Swokovski, E., *Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2*. Trad. sob a direção de Alfredo Alves de Faria. São Paulo. Makron B

[15] Euclides, *Os Elementos*. Trad. sob a direção de Irineu Bicudo. São Paulo. Editora Unesp. 2009.

[16] Lima, V. S. de, *Progressões Aritméticas e Geométricas: História, Conceitos e Aplicações*. Disponível em: `http://www.objetivomaringa.com.br/site/_assets/materiais/94_historiadaspa.pdf`. Acesso em 01/02/2017.

[17] Costa, M. C., Carvalho, S., *Padrões Numéricos e Sequências*. São Paulo. Moderna. 1997.

[18] Escada, F. A. L., *Teoria de Ramsey em Progressões e Recorrências de Ordem Superior. Planificação de subunidade relativa ao Tema III - Sucessões Reais*. Portugal. Universidade da Beira Interior. 2012.

Apêndice A

Exercícios Resolvidos e Propostos

A.1 Exercícios Resolvidos

1) (*FEI*) Numa progressão geométrica crescente, o segundo termo é igual a $\sqrt{2}$ e o quinto termo é o quádruplo do primeiro. O valor do décimo primeiro termo dessa progressão é igual a:

a) $4\sqrt{2}$.

b) $8\sqrt{2}$.

c) 16.

d) $16\sqrt{2}$.

e) 32.

Solução:

Do enunciado sabemos que $a_5 = 4.a_1$. Pela fórmula do termo geral de uma progressão geométrica, temos que $a_5 = a_1.q^4$. Logo:

$$a_5 = 4.a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1.q^4 = 4.a_1 \quad \Rightarrow \quad q^4 = 4 \quad \Rightarrow \quad q = \pm\sqrt{2}.$$

Como se trata de uma progressão geométrica crescente, conclui-se que $q = \sqrt{2}$. Logo, para determinar o décimo primeiro termo:

$$a_{11} = a_2.q^9 = \sqrt{2}.\left(\sqrt{2}\right)^9 = \left(\sqrt{2}\right)^{10} = 2^5 = 32.$$

Portanto a alternativa correta é a letra **(e)**.

$\square$

2) (*Unesp*) Em uma determinada região de floresta na qual, a princípio, não havia nenhum desmatamento, registrou-se, no período de um ano, uma área desmatada de 3 km^2, e a partir daí, durante um determinado período, a quantidade de área desmatada a cada ano cresceu em progressão geométrica de razão 2. Assim, no segundo ano, a área total desmatada era de $3+2.3 = 9\ km^2$. Se a área total desmatada nessa região atingiu 381 km^2 nos n anos em que ocorreram desmatamentos, determine o valor de n.

Solução:

De acordo com o os dados do enunciado temos uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 3 e razão 2, ou seja, $(3,\ 6,\ 12, \cdots,\ a_n)$. Precisamos determinar quantos termos dessa progressão devem ser somados de forma que a soma desses n termos resulte em $S_n = 381$. Logo, utilizando a fórmula da soma dos n termos da P.G.:

$$
\begin{aligned}
S_n = a_1.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \quad & \Rightarrow \quad 381 = 3.\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{381}{3} = \frac{1-2^n}{-1} \\
& \Rightarrow \quad 127 = \frac{1-2^n}{-1} \quad \Rightarrow \quad 127 = 2^n - 1 \quad \Rightarrow \quad 2^n = 128 \\
& \Rightarrow \quad n = 7.
\end{aligned}
$$

Portanto, são necessários 7 anos para que o desmatamento seja de 381 km^2.

□

3) (*SEPEB*) Uma empresa resolveu divulgar um evento pela internet. Para isso, enviou uma mensagem por e-mail para 2 pessoas, as quais deveriam retransmiti-la a outras 2 pessoas no dia seguinte, e assim por diante. Suponha que este processo tenha sido seguido à risca pelas pessoas, sempre enviando a mensagem para outras 2 pessoas no dia seguinte. Em uma semana, o número total de pessoas que terá recebido esta mensagem será de:

Obs.: Supor que cada e-mail seja enviado e recebido no mesmo dia.

(a) 14.

(b) 49.

(c) 126.

(d) 254.

(e) 508.

Solução:

A situação proposta no exercício nos informa sobre uma progressão geométrica com 7 termos (uma semana), de primeiro termo 2 e razão 2, ou seja, $(2,\ 4,\ 8, \cdots,\ a_7)$. Para se determinar o número total de pessoas que terá recebido esta mensagem, basta utilizar a fórmula da soma dos n termos da P.G.:

$$S_n = a_1.\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 2.\left(\frac{1-2^7}{1-2}\right) = 2.\left(\frac{1-128}{-1}\right) = 2.\left(\frac{-127}{-1}\right) = 254.$$

Logo, 254 pessoas receberão o e-mail ao final de uma semana (alternativa **(d)**).

$\square$

4) (*FGV*) O conjunto solução da equação $x^2 - x - \frac{x}{3} - \frac{x}{9} - \frac{x}{27} - \cdots = -\frac{1}{2}$ é:

(a) $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$.

(b) $\{1, 4\}$.

(c) $\{1, -4\}$.

(d) $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.

(e) $\{1, 2\}$.

Solução:

Observe que a equação descrita no enunciado do exercício, não nos mostra de imediato uma progressão geométrica. Porém, colocando o fator x em evidência, reescrevemos o lado esquerdo da equação da seguinte forma:

$$x^2 - x - \frac{x}{3} - \frac{x}{9} - \frac{x}{27} - \cdots = x^2 - x.\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots\right)$$

Assim, fica claro a presença da sequência $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \cdots\right)$, que é uma progressão geométrica infinita de primeiro termo 1 e razão $\frac{1}{3}$. Determinando o valor da sua soma infinita temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Logo, a equação fornecida no enunciado pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} x^2 - x - \frac{x}{3} - \frac{x}{9} - \frac{x}{27} - ... = -\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad x^2 - \frac{3}{2}x = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula resolutiva para equação de segundo grau:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.2.1}}{2\ .\ 2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 1.$$

Então, a alternativa **(a)** é a correta.

□

5) Verifique se as sequências dadas são progressoes geométricas de segunda ordem.

(a) $(-4,\ -8,\ -48,\ -864, \cdots)$.

(b) $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 18,\ -864, \cdots\right)$.

(c) $(1,\ 6,\ 16,\ 31, \cdots)$

Solução:

Vamos relembrar o que é uma progressão geométrica de segunda ordem.

Progressão Geométrica de Segunda Ordem:

Uma sucessão $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ na qual a sucessão dos quocientes $(\nabla b_n) = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right)$ é uma progressão geométrica de primeira ordem, designa-se por progressão geométrica de segunda ordem.

Calculando a sucessão dos quocientes em cada item, temos:

(a) $(-4,\ -8,\ -48,\ -864, \cdots)$

$$(\nabla b_n) = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \left(\frac{-8}{-4},\ \frac{-48}{-8},\ \frac{-864}{-48}, \cdots\right) = (2,\ 6,\ 18, \cdots).$$

Note que a sequência $(2,\ 6,\ 18, \cdots)$ é uma progressão geométrica crescente, com $a_1 = 2$ e $q = 3$. Logo, a sequência $(-4,\ -8,\ -48,\ -864, \cdots)$ é uma progressão geométrica de segunda ordem.

(b) $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 18,\ -864, \cdots\right)$

$$(\nabla b_n) = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \left(\frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}},\ \frac{18}{-\frac{3}{2}},\ \frac{-864}{18}, \cdots\right) = (-3,\ -12,\ -48, \cdots).$$

Note que a sequência $(-3,\ -18,\ -48, \cdots)$ é uma progressão geométrica decrescente, com $a_1 = -3$ e $q = 4$. Logo, a sequência $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 18,\ -864, \cdots\right)$ é uma progressão geométrica de segunda ordem.

(c) $(1,\ 6,\ 16,\ 31, \cdots)$

$$(\nabla b_n) = \left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \left(\frac{6}{1},\ \frac{16}{6},\ \frac{31}{16}, \cdots\right) = \left(6,\ \frac{8}{3},\ \frac{31}{16}, \cdots\right).$$

Note que a sequência $\left(6,\ \frac{8}{3},\ \frac{31}{16}, \cdots\right)$ não é uma progressão geométrica. Logo, a sequência $(1,\ 6,\ 16,\ 31, \cdots)$ não é uma progressão geométrica de segunda ordem.

□

Observação A.1.1 *Embora a sequência apresentada na alternativa (c) da questão 5 não seja uma progressão geométrica de segunda ordem, ela possui uma característica interessante: trata-se de uma progressão aritmética de segunda ordem. De fato:*

$$\Delta a_n = (a_{n+1} - a_n) = (6 - 1,\ 16 - 6,\ 31 - 16, \cdots) = (5,\ 10,\ 15, \cdots).$$

Como a sequência $(5,\ 10,\ 15, \cdots)$ *é uma progressão aritmética, temos que a sequência* $(1,\ 6,\ 16,\ 31, ...)$ *é uma progressão arimética de segunda ordem.*

6) Considerando que as sequências baixo são progressões geométricas de segunda ordem, determine o valor de seu $5^{\underline{o}}$ termo.

(a) $(-1,\ 3,\ -5, \cdots)$

(b) $(6,\ 5,\ 4, \cdots)$

Solução:

Observe que o enunciado do exercício nos afirma que as sequências acima são progressões geométricas de segunda ordem. Assim, podemos fazer o mesmo processo da questão anterior para obtermos uma progressão geométrica de primeira ordem. Com essas duas progressões, nos lembramos da proposição abaixo.

Termo Geral de uma Progessão Geométrica de Segunda Ordem:

Seja $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$ uma progressão geométrica de primeira ordem e $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ uma progressão geométrica de segunda ordem, ou seja, a razão entre seus termos consecutivos formam a sequência $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$. Definimos como termo geral da progressão geométrica de segunda ordem, a equação:

$$a_n = a_1 \ . \ b_1^{\binom{n-1}{1}} . q^{\binom{n-1}{2}}$$

onde $q_1 = b_1$ e $q_2 = q$ é a razão da progressão de primeira ordem.

a) Como a sequência $(-1,\ 3,\ -5, \cdots)$ é uma progressão geométrica de segunda ordem, temos que a sequência $\left(\dfrac{3}{-1}, \dfrac{-5}{3}, \cdots\right) = \left(-3, \dfrac{-5}{3}, \cdots\right)$ é uma progressão geométrica de primeira ordem. Assim: $b_1 = -3$, $q = \dfrac{5}{9}$ e $a_1 = -1$. Para $n = 5$ temos:

$$\begin{aligned}
a_5 = (-1)\,.\,(-3)^{\binom{5-1}{1}}\,.\left(\frac{5}{9}\right)^{\binom{5-1}{2}} &= (-1)\,.\,(-3)^{\binom{4}{1}}\,.\left(\frac{5}{9}\right)^{\binom{4}{2}} \\
&= (-1)\,.\,(-3)^4\,.\left(\frac{5}{9}\right)^6 \\
&= (-1)\,.\,81.\ \left(\frac{15625}{531441}\right) \\
&= -\frac{15625}{6561} \\
&\approx -2,3814.
\end{aligned}$$

b) De modo análogo, como a sequência $(6,\ 5,\ 4, \cdots)$ é uma progressão geométrica de segunda ordem, temos que a sequência $\left(\dfrac{5}{6}, \dfrac{4}{5}, \cdots\right)$ é uma progressão geométrica de primeira ordem. Assim: $b_1 = \dfrac{5}{6}$, $q = \dfrac{24}{25}$ e $a_1 = 6$. Para $n = 5$ temos:

$$\begin{aligned}
a_5 = 6\ .\left(\frac{5}{6}\right)^{\binom{5-1}{1}}.\left(\frac{24}{25}\right)^{\binom{5-1}{2}} &= 6\ .\left(\frac{5}{6}\right)^{\binom{4}{1}}.\left(\frac{24}{25}\right)^{\binom{4}{2}} \\
&= 6\ .\left(\frac{5}{6}\right)^4.\left(\frac{24}{25}\right)^6 \\
&= 6\ .\frac{625}{1296}.\ \left(\frac{191102976}{244140625}\right) \\
&= \frac{884736}{390625} \\
&= 2,2649.
\end{aligned}$$

$\square$

A.2 Exercícios Propostos

1) (*FUVEST*) Com os 13 dados de uma amostra dispostos numa sequência em ordem crescente, verificou-se que os seus termos formam uma progressão geométrica tal que a soma do terceiro e do nono termos é igual a 54, enquanto que o quarto e o décimo termos têm soma igual a $54\sqrt{2}$. A medida dessa amostra é igual a:

(a) 36.

(b) 30.

(c) 28.

(d) 24.

(e) 20.

2) (*FEI*) Considere a progressão geométrica $(1,\ 3,\ 9,\ 27, \cdots)$. Se sua soma é 3280, então ela apresenta:

(a) 9 termos.

(b) 8 termos.

(c) 7 termos.

(d) 6 termos.

(e) 5 termos.

3) (*F. Carlos Chagas*) Os frutos de uma árvore atacados por uma moléstia foram apodrecendo dia após dia, segundo os termos de uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão 3, isto é, no $1^{\underline{o}}$ dia apodreceu 1 , no $2^{\underline{o}}$ dia 3 outros, no $3^{\underline{o}}$ dia 9 outros e assim sucessivamente. Se, no $7^{\underline{o}}$ dia apodreceram os últimos frutos, o número de frutos atacados pela moléstia foi:

(a) 363

(b) 8364

(c) 729

(d) 1092

(e) 1093

4) (*U. E. Feira de Santana*) Determine o valor de x que é solução da equação $x + \dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{9} + \dfrac{x}{27} + \cdots = 60.$

(a) 15

(b) 40

(c) 120

(d) 600

(e) 2400

5) Verifique se as sequências dadas são progressoes geométricas de segunda ordem. Em caso afirmativo, encontre o $6^{\underline{o}}$ termo de cada sequência.

(a) $\left(1,\ 5,\ \dfrac{75}{2},\ \dfrac{3375}{8}, \cdots\right).$

(b) $\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{128}{3},\ -\dfrac{4096}{3}, \cdots\right).$

(c) $\left(-4,\ \dfrac{-11}{3},\ -3,\ -2, \cdots\right)$

(d) $\left(2,\ 8,\ -\dfrac{32}{3},\ -\dfrac{128}{27}, \cdots\right).$

A.3 Gabarito dos Exercícios Propostos

1) Alternativa **(d)**

2) Alternativa **(b)**

3) Alternativa **(e)**

4) Alternativa **(b)**

5) a) É uma progressão geométrica de segunda ordem. $a_6 = 5^5 \ . \left(\dfrac{3}{2}\right)^{10}.$

b) É uma progressão geométrica de segunda ordem. $a_6 = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \ . \ 8^5 \ . \ 2^{10}.$

c) Não é uma progressão geométrica de segunda ordem.

d) É uma progressão geométrica de segunda ordem. $a_6 = 2048 \ . \left(-\dfrac{1}{3}\right)^{10}.$

unesp
UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 26 / 09 / 2017

Fernando Henrique Lopes

Assinatura do autor