



**Luana Miranda Baltazar Titoneli**

**A Observação de Padrões – Modelagem Matemática  
Através de Sequências Numéricas e Objetos Geométricos**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro

Rio de Janeiro  
Setembro de 2017



**Luana Miranda Baltazar Titoneli**

**A Observação de Padrões – Modelagem Matemática  
Através de Sequências Numéricas e Objetos Geométricos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Alessandro Gaio Chimenton**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Profa. Mariana Gesualdi Villapouca**

Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

**Prof. Marcio da Silveira Carvalho**

Coordenador setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 12 de Setembro de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização do autor, do orientador e da universidade.

### **Luana Miranda Baltazar Titoneli**

Graduou-se em Licenciatura em Matemática na FEAP (Fundação Educacional Além Paraíba) em 2008. Faz parte do quadro efetivo de professores da secretaria municipal de educação de Teresópolis, RJ, além de atuar como professora em instituições privadas de ensino em Teresópolis, RJ.

#### Ficha Catalográfica

Titoneli, Luana Miranda Baltazar

A observação de padrões : modelagem matemática através de sequências numéricas e objetos geométricos / Luana Miranda Baltazar Titoneli ; orientador: Eduardo Barbosa Pinheiro. – 2017.

78 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Padrões. 3. Sequências. 4. Ensino-aprendizagem. 5. Educação básica. I. Pinheiro, Eduardo Barbosa. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

## **Agradecimentos**

Acima de tudo, agradeço a Deus que em todo tempo se mostra fiel e Sua bondade dura para sempre.

Ao meu esposo Adílio Titoneli pela compreensão e parceria. Suas palavras de incentivo me ajudaram a continuar todas as vezes que o cansaço me fazia pensar em desistir. Obrigada por acreditar em mim!

Aos meus pais pelo carinho e apoio em todas as vezes que decidi caminhar em direção à realização dos meus sonhos profissionais.

Ao meu orientador, Eduardo Barbosa Pinheiro, por ser um excelente professor, pela ajuda em todas as etapas de realização deste trabalho e pelas palavras de incentivo.

À PUC-Rio por nos proporcionar este tempo de aprendizado através do programa PROFMAT, bem como aos professores que compartilharam conosco seus preciosos conhecimentos.

À CAPES pelo auxílio concedido durante esta etapa de aprendizado.

## Resumo

Titoneli, Luana Miranda Baltazar; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Orientador). **A Observação de Padrões – Modelagem Matemática Através de Sequências Numéricas e Objetos Geométricos**. Rio de Janeiro, 2017, 78p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho é uma análise de padrões que são modelados matematicamente através de conceitos que envolvem as sequências numéricas bem como aspectos geométricos. São consideradas algumas aplicações práticas de conteúdos trabalhados na educação básica, muitas vezes estudados de forma mecânica através de fórmulas que tornam a Matemática enfadonha e até sem sentido para os discentes. O objetivo é mostrar que a Matemática transpõe os limites das salas de aula e que sua beleza pode ser vista em áreas diversas. As ideias e conceitos que envolvem as Progressões Aritméticas e Geométricas, por exemplo, são úteis na resolução de várias situações. A arte musical que está envolta em conhecimentos matemáticos desde os primórdios de seu desenvolvimento. Os estudos desenvolvidos com a sequência de Fibonacci e como está relacionada com a razão áurea e com fenômenos naturais que aparentemente nada teriam em comum. Além disso, a presença tão marcante na natureza das características dos fractais que traçam um padrão de formação para certos elementos naturais. É possível fazer com que o processo ensino-aprendizagem de Matemática torne-se efetivo através da abordagem dos conteúdos de forma prática, o que desperta no aluno o desejo de compreender o que é proposto. Este trabalho é inspirado na frase de Pitágoras: “A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o Universo” e o que pretende-se é mostrar que esta ciência de fato está em toda a parte e que seu aprendizado pode ser significativo e interessante.

## Palavras-chave

Padrões; sequências; ensino-aprendizagem; educação básica.

## Abstract

Titoneli, Luana Miranda Baltazar; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Advisor). **The Pattern Observation – Mathematical Modeling Through Numerical Sequences and Geometric Objects**. Rio de Janeiro, 2017, 78p. Master dissertation – Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontífica Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This work is an analysis of patterns that are modeled mathematically through concepts involving numerical sequences as well as geometric aspects. Some practical applications of content worked in basic education are considered, often mechanically studied through formulas that make Mathematics boring and even meaningless to students. The goal is to show that Mathematics transposes the boundaries of classrooms and that its beauty can be seen in several areas. The ideas and concepts that involve Arithmetic and Geometric Progressions, for example, are useful in solving various situations. The musical art that is shrouded in mathematical knowledge from the beginnings of its development. The studies developed with the Fibonacci sequence and how it is related to the golden ratio and with natural phenomena that apparently would have nothing in common. In addition, the presence so striking in the nature of the characteristics of the fractals that lay out a pattern of formation for certain natural elements. It is possible to make the teaching-learning process of Mathematics become effective by approaching the contents in a practical way, which awakens in the student the desire to understand what is proposed. This work is inspired by the phrase of Pythagoras: "Mathematics is the alphabet with which God wrote the Universe" and what is intended is to show that this science is indeed everywhere and that its learning can be meaningful and interesting.

## Keywords

Patterns; sequences; teaching-learning; basic education.

## Sumário

|        |                                                            |    |
|--------|------------------------------------------------------------|----|
| 1.     | Introdução                                                 | 9  |
| 2.     | Sequências                                                 | 11 |
| 2.1.   | Definições                                                 | 11 |
| 2.2.   | Lei de formação de uma sequência                           | 13 |
| 3.     | Progressões                                                | 15 |
| 3.1.   | Progressão Aritmética                                      | 15 |
| 3.1.1  | Representação gráfica de uma Progressão Aritmética         | 17 |
| 3.1.2. | Soma dos $n$ primeiros termos de uma Progressão Aritmética | 18 |
| 3.1.3. | Progressão aritmética de segunda ordem                     | 19 |
| 3.1.4. | Os números naturais quadrados perfeitos                    | 22 |
| 3.1.5. | Um pouco de história – A <i>Tetraktys</i>                  | 23 |
| 3.2.   | Progressões Geométricas                                    | 24 |
| 3.2.1. | Representação Gráfica de uma P.G.                          | 26 |
| 3.2.2. | Soma dos termos de uma Progressão Geométrica               | 27 |
| 3.3.   | Matemática Financeira e as Progressões                     | 28 |
| 3.3.1. | Regime de Capitalização Simples                            | 29 |
| 3.3.2. | Regime de Capitalização Composta                           | 30 |
| 4.     | Os padrões musicais e a Matemática                         | 32 |
| 4.1.   | Sons e as funções periódicas                               | 32 |
| 4.2.   | Padrões matemáticos nas partituras                         | 35 |
| 4.3.   | A Escala Pitagórica                                        | 36 |
| 4.4.   | A Escala Temperada                                         | 39 |
| 5.     | A sequência de Fibonacci                                   | 42 |
| 5.1.   | Fórmula recursiva da sequência de Fibonacci                | 44 |
| 5.2.   | A Sequência de Fibonacci além do problema dos coelhos      | 45 |
| 5.3.   | Razão Áurea                                                | 47 |
| 5.3.1. | Definição geométrica da extrema e média razão              | 48 |
| 5.3.2. | Determinação da constante $\varphi$ (número de ouro)       | 49 |
| 5.3.3. | Divisão de um segmento em sua razão áurea                  | 50 |
| 5.4.   | A sequência de Fibonacci e a Razão Áurea                   | 52 |
| 5.4.1. | O triângulo áureo                                          | 54 |
| 5.4.2. | O retângulo áureo                                          | 56 |
| 5.5.   | Os padrões dos números de Fibonacci e a natureza           | 58 |
| 6.     | Geometria Fractal                                          | 61 |
| 6.1.   | De monstros matemáticos a aplicações na geometria fractal  | 62 |
| 6.2.   | Características dos Fractais                               | 63 |
| 6.2.1. | Autossimilaridade                                          | 63 |
| 6.2.2. | Complexidade Infinita ou Iteração                          | 65 |
| 6.2.3. | Dimensão                                                   | 67 |
| 6.3.   | Alguns fractais clássicos                                  | 70 |

|        |                                                 |    |
|--------|-------------------------------------------------|----|
| 6.3.1. | Os conjuntos de Julia                           | 70 |
| 6.3.2. | O conjunto de Mandelbrot                        | 71 |
| 6.4.   | Fractais presentes em diversas áreas da ciência | 72 |
| 6.5.   | Geometria fractal e a educação básica           | 73 |
| 7.     | Considerações finais                            | 76 |
| 8.     | Referências bibliográficas                      | 78 |

# 1 INTRODUÇÃO

Você sabe o que são padrões? Provavelmente o que primeiro vem à mente são os padrões estabelecidos para medições de massas, comprimentos, superfícies. Estes são sim tipos de padrões, usados principalmente para o comércio, para organizar as medidas. Mas, a observação de padrões não é voltada apenas para o comércio. Na verdade, é amplamente aplicada a diversas áreas. O psicólogo, por exemplo, observa e estuda os padrões de comportamento. O sociólogo e o antropólogo olham para a sociedade e buscam os padrões estabelecidos ao longo do tempo na formação da cultura. O matemático estabelece equações, relações matemáticas baseadas em padrões percebidos através de observações da própria natureza ou de atividades humanas.

Seja em criações humanas ou na observação de fenômenos naturais a presença de padrões e sequências é muito mais comum do que se imagina. A matemática é definida pelo dicionário online de português como: “ciência que estuda, por método dedutivo, objetos abstratos (números, figuras, funções) e as relações existentes entre eles”. É na observação de certos padrões que se estabelecem muitas dessas relações.

Observando certas sequências é possível equacioná-las e estabelecer relações algébricas entre seus elementos. O crescimento bacteriano, por exemplo, ocorre de forma padronizada visto que implica a divisão celular, levando a um aumento exponencial do número inicial de células. Existe uma relação entre o número inicial de células e o número de células após um período de tempo, uma vez que uma célula dá origem a duas e essas duas vão dividir-se em quatro células e assim sucessivamente. Neste caso a expressão matemática que resume essa relação é  $n_t = 2^n \cdot n_i$ , sendo  $n_i$  o número inicial de bactérias,  $n_t$  é o número de bactérias no instante  $t$  e  $n$  é o número de gerações.

A situação descrita mostra a existência de padrões matemáticos na natureza. O que nos faz compreender a famosa frase atribuída a Galileu Galilei: “A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.” Este trabalho pretende apresentar algumas situações que envolvem sequências e padrões sob a luz da Matemática. Serão consideradas as sequências estudadas no ensino médio (progressões aritméticas e geométricas) e algumas situações que não fazem parte do currículo proposto para a educação básica (sequência de Fibonacci e a geometria fractal), além dos padrões matemáticos que envolvem todo o contexto musical. A ideia é mostrar que estes assuntos podem fazer parte das aulas, isto é, que é possível um aluno da educação básica compreender o que é uma progressão aritmética de segunda ordem, por exemplo, e compreender as ideias por trás dos intrigantes e fantásticos fractais.

Alguns conceitos abordados neste trabalho, como as progressões serão apresentados da maneira que são tratados no cotidiano de turmas do ensino médio. Sempre evitando a transmissão de informações apenas, mas buscando a construção do conhecimento através de questionamentos que estimulam o pensamento o que torna efetivo o processo ensino-aprendizagem.

Este trabalho também tem como objetivo mostrar a presença dos conceitos matemáticos em áreas que a maioria das pessoas não imaginam, como é o caso da música. Como já diziam os pitagóricos: tudo é número. Certamente, se fossem apresentadas a Pitágoras, hoje, questões como: quem somos? De onde viemos? A resposta seria simples: Somos cerca de 7 bilhões de pessoas, temos em média 1,7m de altura, temos 2 olhos, 1 nariz, 1 boca. Um ponto de vista simples e que mostra de forma bem racional que tudo pode ser respondido através do universo da matemática.

O principal objetivo deste trabalho é mostrar algumas aplicações de conceitos matemáticos, que muitas vezes são considerados por estudantes como inúteis, mas que na realidade estão presentes em seu cotidiano.

O segundo capítulo deste trabalho apresenta algumas definições que envolvem as sequências numéricas. No terceiro capítulo encontramos os padrões definidos em progressões aritméticas e geométricas bem como aplicações de conceitos relacionados a elas que envolvem a matemática financeira, além de falar a respeito de progressões aritméticas de segunda ordem.

No quarto capítulo, vamos analisar os padrões musicais e as relações existentes entre eles e os conceitos matemáticos. Veremos que a história da Matemática em alguns momentos se mistura à história por trás da música. Já o capítulo cinco trata da sequência de Fibonacci, sua relação com a razão áurea bem como os padrões encontrados na natureza que estão relacionados a esta sequência. Por fim, no capítulo seis tratamos da geometria fractal apresentando alguns dos conceitos matemáticos sobre os quais é definida além de vermos algumas de suas aplicações no estudo da natureza.

## 2

# SEQUÊNCIAS

Inicialmente vamos pensar na definição do conjunto dos números naturais visto que este trabalho trata em grande parte de *matemática discreta*. A essência da caracterização do conjunto dos números naturais, simbolizado por  $\mathbb{N}$ , reside na palavra *sucessor*. Atualmente, pode-se descrever concisa e precisamente o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, valendo-nos da notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no limiar no século XX.

Intuitivamente, quando  $n, n' \in \square$ , dizer que  $n'$  é o sucessor de  $n$  significa que  $n'$  vem logo depois de  $n$ , não havendo outros números naturais entre  $n$  e  $n'$ . Evidentemente esta explicação apenas substitui “sucessor” por “logo depois”, portanto não é uma definição. O termo primitivo “sucessor” não é definido explicitamente. Seu uso e suas propriedades são regidos por algumas regras, abaixo, enumeradas:

- i) Todo número natural tem um único sucessor;
- ii) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
- iii) Existe um único número natural, chamado *um* e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
- iv) Seja  $X$  um conjunto de números naturais (isto é,  $X \subset \square$ ). Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ . Esta é ideia por trás do *principio da indução finita*.

As afirmações i), ii), iii) e iv) acima são conhecidas como *axiomas de Peano*. Tudo o que se sabe sobre os números naturais pode ser demonstrado como consequência desses axiomas.

Assim:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

é o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais.

### 2.1.

#### Definições

Uma *sequência* diz respeito a um conjunto no qual seus elementos são escritos seguindo certa ordem. Uma sequência numérica é toda organização de números ordenados segundo uma relação pré estabelecida.

Uma sequência de números reais é uma função  $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa a cada número natural  $n$  um número real  $a(n)$ . Cada elemento de uma sequência também é

chamado de *termo da sequência*. Em uma sequência, o termo que ocupa a posição de número  $n$  é indicado pelo símbolo  $a_n$ , isto é:

$a_1$  indica o primeiro termo da sequência;

$a_2$  indica o segundo termo da sequência;

$a_3$  indica o terceiro termo da sequência;

⋮

$a_n$  indica o  $n$ -ésimo termo da sequência;

Escreve-se  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$  ou  $(a_n)_{n \in \square}$  ou simplesmente  $(a_n)$  para indicar a sequência cujo  $n$ -ésimo termo é  $a_n$ .

Chama-se *sequência finita* ou *ênupla* toda aplicação  $a: X \subset \square \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $X$  é subconjunto finito.

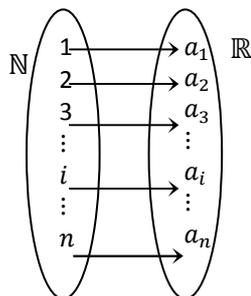


Figura 1 – Representação por diagrama de uma sequência finita

Dessa forma, em toda sequência finita, a cada número natural  $i$ ; ( $1 \leq i \leq n$ ) está associado um número real  $a_i$ .

$$a = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$$

Chama-se *sequência infinita* toda aplicação  $a: \square \rightarrow \square$ .

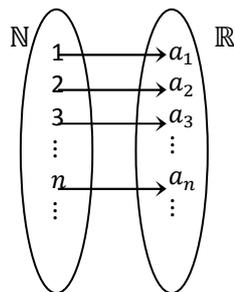


Figura 2 – Representação por diagrama de uma sequência infinita

Em toda sequência infinita, a cada  $n \in \square$  está associado um  $a_n \in \square$ .

$$a = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$$

Exemplo 1)  $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  é a sequência finita dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.

Exemplo 2)  $\{2, 4, 6, 8, \dots, 2i, \dots\}$  é a sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de 2.

Exemplo 3)  $\{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  é a sequência infinita dos números primos positivos.

Uma sequência pode ser:

- *Crescente*: quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o anterior, ou seja,  $a_n > a_{n-1}, \forall n \geq 2$ .
- *Decrescente*: quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o anterior, ou seja,  $a_n < a_{n-1}, \forall n \geq 2$ .
- *Constante*: quando todos os termos são iguais, isto é,  $a_n = a_{n-1}, \forall n \geq 2$

## 2.2.

### Lei de formação de uma sequência

Interessam a este trabalho as sequências em que os termos se sucedem obedecendo certa regra. Um conjunto de informações que determina todos os termos de uma sequência e a ordem em que eles são apresentados é chamado de *lei de formação da sequência*.

A lei de formação pode ser apresentada de três maneiras:

i) Por equação de *recorrência*: são dadas duas regras, uma para identificar o primeiro termo  $a_1$  e outra para calcular cada termo  $a_n$  a partir do antecessor  $a_{n-1}$ .

Exemplo: Escrever a sequência finita  $(a_n)$  cujos termos obedecem à seguinte fórmula de recorrência:  $a_1 = 2$  e  $a_n = a_{n-1} + 3, \forall n \in \{2,3,4,5\}$ .

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 8 + 3 = 11$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 11 + 3 = 14$$

Então,

$$(a_n) = \{5,8,11,14\}.$$

ii) Expressando cada termo em função da sua posição: é dada uma expressão  $a_n$  em função de  $n$ .

Exemplo: escrever a sequência finita  $(b_n)$  cujos termos obedecem à lei  $b_n = 2^n, n \in \{1,2,3,4\}$ .

$$n = 1 \Rightarrow b_1 = 2^1 = 2$$

$$n = 2 \Rightarrow b_2 = 2^2 = 4$$

$$n = 3 \Rightarrow b_3 = 2^3 = 8$$

$$n = 4 \Rightarrow b_4 = 2^4 = 16$$

Então,

$$(b_n) = \{2,4,8,16\}$$

iii) Por propriedade dos termos: é dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

Exemplo: Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita  $(c_n)$  formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.

Temos  $(c_n) = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ .

Note que esta sequência não é dada por equação de recorrência, bem como não se conhece ainda expressão para calcular o  $n$ -ésimo número primo positivo a partir de  $n$ .

### 3

## PROGRESSÕES

Tratamos aqui de sequências numéricas que obedecem certas regras que caracterizam a sucessão dos termos mantendo sempre um padrão de obtenção para qualquer termo  $n$ . Estas regras estão relacionadas à soma de uma constante no caso de uma Progressão Aritmética e ao produto de uma constante nas Progressões Geométricas.

Cada assunto será abordado a partir de uma situação-problema e gradativamente os conceitos são introduzidos de forma que sejam relacionados à situação prática descrita inicialmente. No ensino de Matemática é importante que isto ocorra para que um aluno seja capaz de assimilar o conteúdo trabalhado através de associações de ideias, onde ele perceba uma relação entre o novo conceito apresentado com o que já sabe de forma natural e intuitiva, para que de fato compreenda o assunto e não apenas aprenda fórmulas sem sentido para ele.

### 3.1.

#### Progressão Aritmética

Consideremos a seguinte situação:

Com azulejos quadrados brancos e pretos, todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos:

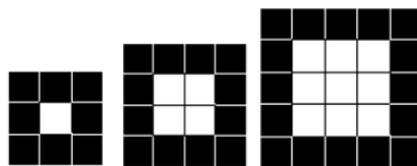


Figura 3 – Mosaicos De Azulejos

A regra para construir esses mosaicos é a seguinte: inicialmente, formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; em seguida, outro quadrado branco, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos, e assim sucessivamente.

Observando a situação, vamos inicialmente pensar no número de azulejos pretos em cada uma das etapas de construção do mosaico.

1ª etapa: 8 azulejos

2ª etapa: 12 azulejos

3ª etapa: 16 azulejos

Note que:

$12 - 8 = 4$  (número de azulejos da segunda etapa menos o número de azulejos da primeira etapa);

$16 - 12 = 4$  (número de azulejos da terceira etapa menos o número de azulejos da segunda etapa).

Observe que a cada etapa são acrescentados 4 azulejos em relação à etapa anterior.

Uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo é obtido pela soma do termo anterior com uma constante real é chamada de *progressão aritmética* (P.A.).

Considerando  $a_n$  como o termo da  $n$ -ésima posição da sequência e  $r$  como a constante real acrescentada termo a termo, temos:

1º termo:  $a_1$

2º termo:  $a_2 = a_1 + r$

3º termo:  $a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

4º termo:  $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$

De modo geral, o termo que ocupa a  $n$ -ésima posição pode ser obtido pela expressão:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

Denominamos:

$a_n$  = termo geral da P.A.

$a_1$  = primeiro termo da P.A.

$n$  =  $n$ -ésima posição ocupada pelo termo,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$

$r$  = razão da P.A.

A demonstração desta igualdade pode ser feita de forma bem simples através do princípio da indução finita, vejamos:

**Demonstração:** Partindo da hipótese de que  $a_n = a_{n-1} + r$ ;  $n \geq 2$  vamos mostrar que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

(i) para  $n = 1$ , tem-se:  $a_n = a_1 = a_1 + 0r = a_1 + (1 - 1)r = a_1 + (n - 1)r$

(ii) Supondo que  $a_n = a_1 + (n - 1)r$  para algum  $n \geq 1$  vamos determinar o termo subsequente acrescentando em  $a_n$  a constante  $r$ :

$$a_{n+1} = a_n + r = a_1 + (n - 1)r + r = a_1 + (n - 1 + 1)r$$

Portanto:

$$a_{n+1} = a_1 + (n + 1 - 1)r$$

Logo, pelo princípio da indução finita temos que numa P.A.:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, \forall n \in \mathbb{N} \blacksquare$$

Para se obter a razão de uma P.A. basta fazer

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1}$$

Temos que, se  $r = 0$ , todos os termos da progressão são iguais. Neste caso, a P.A. é constante. Neste trabalho estaremos interessados nos casos em que  $r \neq 0$ .

Numa progressão aritmética, para avançar um termo basta somar a razão, para avançar dois termos, basta somar duas vezes a razão, e assim por diante. Assim, por exemplo,  $a_{13} = a_5 + 8r$ , pois ao passar de  $a_5$  para  $a_{13}$ , avançamos 8 termos; bem como  $a_{12} = a_7 + 5r$ , pois avançamos 5 termos ao passar de  $a_7$  para  $a_{12}$ ;  $a_4 = a_{17} - 13r$ , pois retrocedemos 13 termos ao passar de  $a_{17}$  para  $a_4$  e, de modo geral,  $a_n = a_k + (n - k)r, \forall n, k \in \mathbb{N}$ .

Na situação considerada inicialmente, se quisermos saber quantos azulejos pretos seriam necessários na vigésima etapa  $a_{20}$  podemos fazer:

$$a_{20} = 8 + (20 - 1)4 = 84$$

### 3.1.1.

#### Representação gráfica de uma Progressão Aritmética

Considerando a PA  $\{8, 12, 16, \dots\}$ , temos que seu termo geral é dado por  $a_n = 8 + (n - 1) \cdot 4$ , ou seja,  $a_n = 4 + 4n$ . É possível relacionar os termos da sequência com a posição ocupada pelo mesmo, através da tabela:

| Posição do termo $n$ | Termo $a_n$ |
|----------------------|-------------|
| 1                    | 8           |
| 2                    | 12          |
| 3                    | 16          |
| $\vdots$             | $\vdots$    |
| $n$                  | $a_n$       |

Tabela 1 – Termos de uma P.A.

Observando que o termo geral  $a_n = 4 + 4n$  é identificado com a função afim  $f(x) = 4 + 4x$  quando  $x$  assume apenas valores naturais, concluímos que a P.A.  $\{8, 12, 16, \dots\}$  é imagem da função  $f$  com  $x \in \mathbb{N}$ . Os pontos cujas coordenadas são dadas por  $(n, a_n)$  são pontos da reta de equação  $y = 4 + 4x$ . Vejamos esta representação no plano cartesiano:

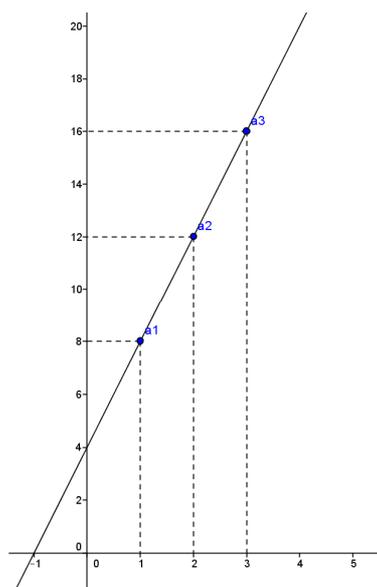


Gráfico 1 – Representação gráfica de uma P.A.

De modo geral, temos:

- A representação gráfica de uma P.A.  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$  é formada pelos pontos  $(n, a_n)$  do plano cartesiano;
- Como o termo geral é  $a_n = a_1 + (n - 1)r$ , a representação gráfica da P.A. é formada por pontos da reta de equação  $y = a_1 + (x - 1)r$ . Note que  $f(x) = a_1 + (x - 1)r$  é uma função afim se  $r \neq 0$ , e é constante se  $r = 0$ .

### 3.1.2.

#### Soma dos $n$ primeiros termos de uma Progressão Aritmética

Conta-se uma história<sup>1</sup> que, no ano de 1785, em uma pequena escola no principado de Braunschweig, na Alemanha, o professor Buttner propôs aos seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um menino de 8 anos aproximou-se da mesa do professor e apresentou o resultado pedido. O professor assombrado, constatou que o resultado estava correto.

Aquele menino viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Carl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por Gauss foi simples. Ele percebeu que:

- A soma do primeiro com o último número é:  $1 + 100 = 101$
- A soma do segundo número com o penúltimo é:  $2 + 99 = 101$
- A soma do terceiro com o antepenúltimo número é:  $3 + 98 = 101$
- E assim por diante, a soma de dois números equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, que é 101.

<sup>1</sup> PAIVA, M., Matemática Paiva-EM, 2010, p. 401.

- Como, no total, são 50 somas iguais a 101, Gauss concluiu que :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = 101 \cdot 50 = 5050$$

Como a sequência dos números naturais de 1 a 100 forma uma P.A. cuja razão é igual a 1, a situação anterior é um exemplo de soma de  $n$  primeiros termos de uma P.A.

A soma  $S_n$  dos  $n$  primeiros termos da P.A.  $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$  é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

**Demonstração:** Sejam  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , os  $n$  primeiros termos uma P.A. de razão  $r$ , podemos escrevê-los nas formas:

$$a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \dots, a_1 + (n - 2)r, a_1 + (n - 1)r \text{ ou}$$

$$a_n - (n - 1)r, a_n - (n - 2)r, \dots, a_n - 2r, a_n - r, a_n$$

Sendo a segunda maneira de escrever a P.A. obtida a partir da seguinte ideia:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_1 = a_n - (n - 1)r$$

$$a_2 = a_1 + r = a_n - (n - 1)r + r = a_n - (n - 2)r$$

⋮

Vamos, inicialmente, escrever duas vezes a soma  $S_n$  de  $n$  termos da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \dots + (a_1 + (n - 2)r) + (a_1 + (n - 1)r) \quad (i)$$

$$S_n = a_n + (a_n - r) + (a_n - 2r) + \dots + (a_n - (n - 2)r) + (a_n - (n - 1)r) \quad (ii)$$

Efetuada a soma (i) + (ii), temos:

$$2 \cdot S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}}$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \blacksquare$$

Aplicando esta relação na situação pedida pelo professor de Gauss, temos:

$$S_{100} = \frac{(1 + 100) \cdot 100}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

Observe que a expressão que representa a soma de  $n$  termos de uma P.A. é um polinômio de grau 2 em  $n$ . Vejamos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \quad (i)$$

Temos que  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r = a_1 + rn - r$  (ii)

Substituindo (ii) em (i):

$$S_n = \frac{(a_1 + a_1 + rn - r) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 - r + rn) \cdot n}{2} = \frac{(2a_1 - r)}{2}n + \frac{r}{2}n^2$$

### 3.1.3

#### Progressão aritmética de segunda ordem

Primeiramente, vamos aqui fixar algumas definições.

Dada uma sequência  $(a_n)$ , define-se operador  $\Delta$ , chamado de *operador diferença*, por  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Note que  $(\Delta a_n)$  forma uma sequência numérica.

A partir desta definição, segue que uma sequência  $(a_n)$  é uma progressão aritmética se, e somente se,  $(\Delta a_n)$  é constante  $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Definimos uma *progressão aritmética de segunda ordem* como sendo uma sequência  $(a_n)$  na qual as diferenças  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$  formam uma progressão aritmética não constante  $(b_n)$  na qual:

$$b_1 = a_2 - a_1, b_2 = a_3 - a_2, \dots, b_n = a_{n+1} - a_n \text{ e } b_n = b_1 + (n-1)r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomemos como exemplo a sequência:

$$(a_n) = \{3, 7, 13, 21, 31, \dots\}$$

Observe que:

$$a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4, a_3 - a_2 = 13 - 7 = 6, a_4 - a_3 = 21 - 13 = 8$$

a sequência obtida a partir das diferenças entre termos sucessivos de  $(a_n)$  a P.A.:

$$(b_n) = \{4, 6, 8, 10, \dots\}$$

**Proposição:** Numa progressão aritmética  $(a_n)$  de segunda ordem, cada termo  $a_n, n \geq 2$  corresponde à soma de  $a_1$  com a soma dos  $n-1$  primeiros termos da progressão aritmética  $(b_n)$  onde  $b_n = \Delta a_n$ .

**Demonstração:** Dada a sequência  $(a_n) = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots\}$ , temos que:

$$b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

E, considerando  $S_m = \frac{(b_1 + b_m) \cdot m}{2}$ , a soma dos  $m$  primeiros termos de  $(b_n)$ , obtemos:

$$a_2 = a_1 + b_1 = a_1 + S_1$$

$$a_3 = a_2 + b_2 = a_1 + b_1 + b_2 = a_1 + S_2$$

$$a_4 = a_3 + b_3 = a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + S_3$$

⋮

$$a_n = a_1 + S_{n-1}, \forall n \geq 2 \blacksquare$$

Segue da proposição anterior que

$$(a_n) = \{a_1, a_1 + S_1, a_1 + S_2, \dots, a_1 + S_{n-1}, \dots\}$$

sendo  $(a_n)$  uma P.A. de segunda ordem.

**Teorema:** Uma sequência  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de ordem 2 se, e somente se, seu termo geral  $a_n$  é expresso por um polinômio de grau 2 em  $n$ .

**Demonstração:** vamos demonstrar o teorema para a P.A. de segunda ordem:

Se  $a_n = \alpha n^2 + \beta n + \gamma, \forall n \in \mathbb{N}$ , com  $\alpha \neq 0$ , então:

$$b_n = \Delta a_n = a_{n+1} - a_n =$$

$$= \alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma) = 2\alpha n + (\alpha + \beta)$$

que é polinômio do primeiro grau em  $n$ .

Sendo assim, na sequência  $(b_n)$  temos:

$$b_{n+1} - b_n = 2\alpha(n+1) + (\alpha + \beta) - (2\alpha n + (\alpha + \beta)) = 2\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja,  $(b_n)$  tem razão igual a  $2\alpha$  logo,  $(b_n)$  é uma progressão aritmética de ordem um não constante.

Por outro lado, se  $(a_n)$  é uma progressão aritmética de segunda ordem, então,  $(b_n)$  com  $b_n = \Delta a_n$ , é uma progressão aritmética com razão  $r \neq 0$ . Logo:

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} &= S_{n-1} = \frac{(b_1 + b_{n-1}) \cdot (n-1)}{2} \\ &= \frac{(b_1 + b_1 + (n-2)r) \cdot (n-1)}{2} = \\ &= \frac{2b_1n + rn^2 - 2rn - 2b_1 - rn + 2r}{2} = \\ &= \frac{r}{2}n^2 + \frac{(2b_1 - 3r)}{2}n + r - b_1 \end{aligned}$$

como  $a_n = a_1 + S_{n-1}$  temos que:

$$a_n = \frac{r}{2}n^2 + \frac{(2b_1 - 3r)}{2}n + r - b_1 + a_1$$

polinômio de segundo grau que determina  $a_n$  ■

Agora, voltemos ao nosso exemplo do mosaico de azulejos pretos e brancos e, observemos o número de azulejos brancos de cada etapa.

1ª etapa: 1 azulejo ( $1 = 1^2$ )

2ª etapa: 4 azulejos ( $4 = 2^2$ )

3ª etapa: 9 azulejos ( $9 = 3^2$ )

4ª etapa: 16 azulejos ( $16 = 4^2$ )

Note que:

$4 - 1 = 3$  (número de azulejos na segunda etapa menos o número na primeira etapa)

$9 - 4 = 5$  (número de azulejos na terceira etapa menos o número na segunda etapa)

$16 - 9 = 7$  (número de azulejos na quarta etapa menos o número na segunda etapa)

Organizando os números que representam a quantidade de azulejos brancos utilizados em cada etapa, temos a sequência:

$$(a_n) = \{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

que é uma progressão aritmética de segunda ordem cuja sequência das diferenças entre cada termo e seu anterior é:

$$(b_n) = (\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = \{3, 5, 7, \dots\}$$

P.A. de primeira ordem, cuja razão é  $b_2 - b_1 = b_3 - b_2 = 2 = r$ .

Podemos determinar a expressão do termo geral  $a_n$ , lembrando que  $a_n = a_1 + S_{n-1}$ , e  $S_{n-1}$  é a soma dos  $n - 1$  termos da de  $(b_n)$

$$a_n = \frac{r}{2}n^2 + \frac{(2b_1 - 3r)}{2}n + r - b_1 + a_1 = \frac{2}{2}n^2 + \frac{(2 \cdot 3 - 3 \cdot 2)}{2}n + 2 - 3 + 1$$

$$a_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}.$$

### 3.1.4.

#### Os números naturais quadrados perfeitos

Os números naturais que representam o produto de dois fatores iguais e inteiros são chamados números quadrados perfeitos. Vejamos algumas características da sequência formada pelos números quadrados perfeitos:

$$1.1 = 1; 2.2 = 4, 3.3 = 9, 4.4 = 16, \dots, n.n = n^2$$

Uma questão interessante a respeito dos números quadrados perfeitos é que o número  $n^2$  pode ser expresso como a soma dos  $n$  primeiros números naturais ímpares.

Observe que a sequência dos números naturais ímpares  $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$  é uma progressão aritmética cuja razão é 2 e o termo geral é dado por

$$a_n = a_1 + (n - 1).r = 1 + (n - 1).2 = 2n - 1$$

Aplicando a expressão que determina a soma de  $n$  termos de uma P.A. temos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n).n}{2} = \frac{(1 + 2n - 1).n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2, n \in \mathbb{N}$$

Por outro lado se organizarmos de forma sequencial os números quadrados perfeitos, temos  $(b_n) = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$  que, como foi apresentado na observação anterior, é uma progressão aritmética de segunda ordem associada à sequência  $(\Delta a_n) = (b_n) = \{3, 5, 7, \dots, 2n + 1, \dots\}$ . Como vimos, cada termo  $b_n$  pode ser representado por:

$$b_n = b_1 + S_{n-1}$$

onde  $S_{n-1}$  é a soma dos  $(n - 1)$  termos de  $(c_n)$ . Assim,

$$b_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2(n - 1) + 1 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$$

Observe que  $1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1$  é a soma dos  $n$  primeiros números naturais ímpares.

Podemos, então escrever

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Tomemos como exemplo o número  $25 = 5^2$ , temos que  $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$  (soma dos 5 primeiros números naturais ímpares).

Usar exemplos como este numa sala de aula da educação básica quando trata-se de progressão aritmética, certamente desperta nos alunos um interesse pelo universo da Matemática.

### 3.1.5.

#### Um pouco de história – A *Tetraktys*

Os pitagóricos tinham uma maneira de representar números por meio de seixos (ou pontos). Para representar os números 1, 2, 3, 4... por exemplo, utilizavam-se de uma coleção de seixos para formar triângulos equiláteros, cujo número de seixos da base de cada um corresponde ao número que representa.

| Número | Representação                | Quantidade de seixos |
|--------|------------------------------|----------------------|
| 1      | ■                            | 1                    |
| 2      | ●<br>● ●                     | 3                    |
| 3      | ●<br>● ●<br>● ● ●            | 6                    |
| 4      | ●<br>● ●<br>● ● ●<br>● ● ● ● | 10                   |
| ⋮      | ⋮                            | ⋮                    |

Tabela 2 – Números naturais representados por seixos

Observe que a sequência determinada pelo número de seixos em cada triângulo é a progressão aritmética de segunda ordem  $(a_n) = \{1, 3, 6, 10, \dots\}$  associada à P.A. de razão igual a 1  $(b_n) = \{2, 3, 4, \dots\}$ . Podemos expressar o número de seixos no  $n$ -ésimo triângulo da seguinte maneira:

$$a_n = a_1 + S_{n-1}$$

sendo  $S_{n-1}$  a soma dos  $n - 1$  termos de  $(b_n)$ , onde  $b_n = n + 1, \forall n \in \mathbb{N}$  e:

$$a_n = a_1 + S_{n-1} = a_1 + \frac{(b_1 + b_{n-1})(n-1)}{2}$$

$$a_n = 1 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} = \frac{2+2n-2+n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Assim, se quisermos saber quantos seixos teria o sétimo triângulo formado conforme a ideia dos pitagóricos fazemos:

$$a_7 = \frac{7(7+1)}{2} = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

Em particular, o triângulo construído para representar o número 4 que utiliza-se de 10 seixos, era chamado de *Tetraktys* (que significa quaternário ou “quatritude”) e os pitagóricos o tomaram como símbolo da perfeição. Pois nele se percebe os quatro primeiros números, já que  $10 = 1 + 2 + 3 + 4$

Conta a história<sup>2</sup> que Pitágoras pede a alguém que conte. Quando a pessoa conta “1, 2, 3, 4”, Pitágoras o interrompe e diz: “Você entende? O que toma por 4 é 10, um

<sup>2</sup> LÍVIO, M., Deus é Matemático?, p. 33.

triângulo perfeito e nosso juramento”. O filósofo neoplatônico Jâmblico (250-325d.c) diz que os juramento dos pitagóricos era:

*“Juro por aquele que descobriu a Tetraktys,  
Nascente de toda a sabedoria,  
Raiz perene da fonte da natureza.”*<sup>3</sup>

Aos olhos dos pitagóricos do século VI, a Tetraktys pareceu delinear toda a natureza do universo. Em geometria, o número 1 representava um ponto, 2 representava uma linha, 3 representava uma superfície e 4 um sólido tetraédrico tridimensional. A *Tetraktys* parecia, portanto representar todas as dimensões percebidas no espaço.

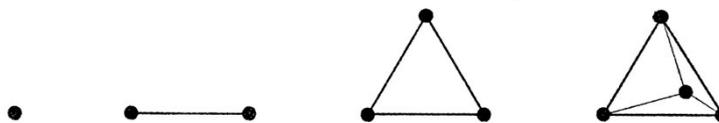


Figura 4 – Representação Geométrica dos Primeiros Quatro Números Naturais

### 3.2.

#### Progressão Geométrica

As bactérias podem crescer individualmente por fissão binária (a célula alonga-se até se dividir em duas) ou no contexto de uma população (as células duplicam o seu tamanho e forma-se um *septum*, que consiste no crescimento da membrana celular e da parede celular até à separação das duas células). Quando uma célula se separa dando origem a duas novas células diz-se que ocorreu uma geração, designando-se por tempo de geração a duração de todo esse processo. Tendo em conta que existe uma relação entre o número inicial de células e o número de células após um período de tempo de crescimento exponencial (uma vez que uma célula dá origem a duas e essas duas vão dividir-se em 4 células e assim sucessivamente), há uma expressão matemática que resume essa relação:  $n_t = 2^n \cdot n_i$ , sendo  $n_i$  o número inicial de bactérias;  $n_t$  é o número de bactérias no tempo final e  $n$  que é o número de gerações.

Esta situação é um exemplo do uso de modelagem matemática para situações naturais. É possível, com isso perceber mais uma aplicação dos conceitos matemáticos na vida prática. Casos como este auxiliam muito o trabalho do professor quando o objetivo é incentivar o interesse dos alunos pelos conteúdos lecionados. Neste caso, podem ser trabalhados dois conteúdos: função exponencial ou progressão geométrica. Vamos aqui focar no estudo das sequências e, portanto abordaremos o exemplo através dos conceitos de progressão geométrica e faremos, ainda, um paralelo entre os dois conteúdos.

<sup>3</sup> LIVIO, M., Deus é Matemático?, p. 34.

Primeiramente, vamos definir o que caracteriza uma sequência como progressão geométrica.

Uma *progressão geométrica* (P.G.) é toda sequência na qual, cada termo a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante  $q$ . O número  $q$  é chamado de *razão* da progressão. Uma representação genérica pode ser:

$$(a_n) = \{a_1, a_1 \cdot q, a_2 \cdot q, a_3 \cdot q, \dots, a_{n-1} \cdot q, \dots\}$$

sendo  $a_1$  o primeiro termo,  $a_2$  o segundo termo,  $a_3$  o terceiro termo, e assim sucessivamente com  $a_n$  sendo o  $n$ -ésimo termo, onde:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando-se lado a lado as equações acima, temos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_2 \cdot q \dots a_{n-2} \cdot q \cdot a_{n-1} \cdot q$$

E, cancelando os termos iguais, obtém-se:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Observe que para avançar um termo em uma progressão geométrica basta multiplicar uma vez pela razão; para avançar dois termos, basta multiplicar duas vezes pela razão, e assim por diante. Portanto podemos obter um termo  $k$  a partir de um termo  $i$ , através da relação:  $a_k = a_i \cdot q^{k-i}$

Uma P.G. pode ser classificada como:

- *Crescente*:  $a_1 > 0$  e  $q > 1$  ou  $a_1 < 0$  e  $0 < q < 1$ .

Exemplos:  $\{1, 2, 4, 8, \dots\}$  P.G. crescente de razão  $q = 2$ .

$$\left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots\right\} \text{ P.G. crescente de razão } q = \frac{1}{2}.$$

- *Decrescente*:  $a_1 > 0$  e  $0 < q < 1$  ou  $a_1 < 0$  e  $q > 1$ .

Exemplos:  $\left\{8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$  P.G. decrescente de razão  $q = \frac{1}{2}$ .

$$\{-1, -2, -4, -8 \dots\} \text{ P.G. decrescente de razão } q = -2$$

- *Constante*: neste caso, a razão é 1 ou todos os termos são nulos.

Exemplos:  $\{3, 3, 3, \dots\}$  P.G. constante de razão  $q = 1$

$$\{0, 0, 0, \dots\} \text{ P.G. constante com termos nulos.}$$

- *Alternada*:  $a_1 \neq 0$  e  $q < 0$

Exemplo:  $\{1, -3, 9, -27, \dots\}$  P.G. alternada de razão  $q = -3$

Na situação descrita no início deste capítulo, temos uma relação entre o número de bactérias num dado momento definida por  $n_t = 2^n \cdot n_i$ . Podemos representar este número através da sequência, na qual cada termo representa a quantidade de bactérias e o intervalo de tempo que define a geração é dado pela posição ocupada pelo termo, sendo  $a_1$  o número de bactérias no momento inicial,  $a_2$  o número de bactérias decorrido um intervalo de tempo de geração,  $a_3$  o número de bactérias decorridos dois intervalos de tempo de geração, e assim sucessivamente, então:

$$a_n = \{n_i, n_i \cdot 2, n_i \cdot 2^2, n_i \cdot 2^3, \dots\}$$

Que é uma P.G. crescente onde  $a_1 = n_i$  e  $q = 2$ .

### 3.2.1.

#### Representação gráfica de uma Progressão Geométrica

Vamos representar graficamente uma P.G.  $(a_n)$  pelos pontos  $(n, a_n)$  do plano cartesiano. Tomemos, por exemplo, a P.G.  $\{2, 4, 8, 16, \dots\}$  cujo termo geral é dado por  $a_n = 2 \cdot 2^{n-1}$  ou, simplesmente,  $a_n = 2^n$ . Os pontos no plano cartesiano desta P.G. são dados por  $(n, 2^n)$ , conforme a imagem a seguir:

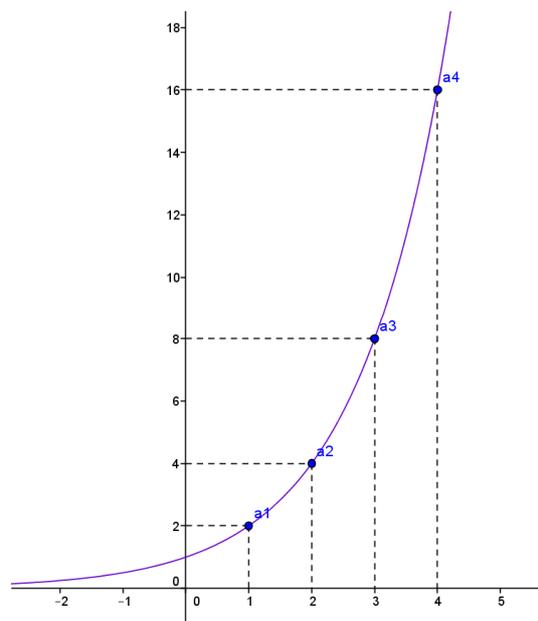


Gráfico 2 – Representação gráfica de uma P.G.

De modo geral, considerando a P.G.  $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$  de razão  $q$ , com  $q > 0$  e  $q \neq 1$ , o termo geral  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  é equivalente a  $a_n = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$ . Portanto a representação gráfica dessa P.G. é formada por pontos do gráfico da função exponencial  $f(x) = \frac{a_1}{q} \cdot q^x$ . Se a razão  $q$  de uma P.G.  $(a_n)$  for negativa não existe função exponencial. Se  $q = 1$  a representação gráfica é uma reta horizontal.

### 3.2.2.

#### Soma dos termos de uma Progressão Geométrica

No século IX, foram escritos na Arábia os primeiros livros sobre o xadrez, cujos autores foram: Al-Razí, Al-Sarajsi e Al-Adlí. Este último, escreveu "O livro do xadrez" onde se narra pela primeira vez, a célebre lenda dos grãos de trigo, que atribuem a invenção do xadrez a alguém chamado Sissa.

Conta a lenda<sup>4</sup> que Sissa inventou este jogo com o objetivo de agradar o rei e combater seu tédio, mostrando-lhe depois que um rei sem seu povo está morto, pois não tem poder nem valor.

O rei fascinado com o jogo, ofereceu a Sissa qualquer coisa que ele quisesse. Sissa decidiu dar ao rei uma lição de humildade, e pediu o seguinte: 2 grãos de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 4 grãos pela segunda, 8 pela terceira, 16 pela quarta, e assim sucessivamente até completar as 64 casas.

Mesmo estranhando que alguém com tanta inteligência pediria algo aparentemente tão simples, o rei ordenou que seus servos realizassem seu desejo. Em pouco tempo, seu vizir lhe indicou que era impossível satisfazer a demanda, pois a quantidade de trigo que Sissa pedira era muitíssimo mais do que todos eles podiam chegar a ter.

Analisando a lenda do inventor do xadrez sob o ponto de vista das sequências e padrões matemáticos, percebemos que se organizarmos a quantidade de grãos de trigo pedidos por Sissa para cada casa do tabuleiro de xadrez, teremos a seguinte progressão geométrica:

$$(a_n) = \{2, 4, 8, 16, \dots, 2^{64}\}$$

na qual,  $a_1 = 2$ ,  $q = 2$  e  $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

A missão dos servos do rei ficou impossível, visto que o número de grãos era muito grande. De fato, para determiná-lo seria preciso efetuar a soma  $2 + 4 + 8 + \dots + 2^{64}$ .

Mas, o que temos nessa situação é a soma de 64 termos de uma progressão geométrica. Vejamos então como podemos proceder para efetuar a soma dos  $n$  primeiros termos de uma Progressão Geométrica:

Considere a PG, com  $q \neq 1$ ,  $\{a_1, a_1 \cdot q, a_1 \cdot q^2, \dots, a_1 \cdot q^{n-1}\}$ .

Efetuando a soma de seus  $n$  primeiros termos que indicamos por  $S_n$ :

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \dots + a_1 \cdot q^{n-1} \quad (i)$$

multiplicando a equação por  $q$ :

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 \dots + a_1 \cdot q^n \quad (ii)$$

e, fazendo  $(i) - (ii)$ , temos:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_1 \cdot q^n$$

<sup>4</sup> TAHAN, M., O homem que calculava, p. 271.

$$(1 - q) \cdot S_n = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

Como  $q \neq 1$ , podemos dividir por  $1 - q$ , o que nos dá:

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Sendo assim, o resultado do problema dos grãos de trigo pode ser calculado através da expressão acima, por:

$$S_{64} = 2 \cdot \frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} = -2 \cdot (1 - 2^{64}) = 36893488147419103230$$

Esse resultado certamente faria o servo do rei desistir de contar os grãos, até porque isso seria impossível, visto que se fosse contado 1 grão de trigo por segundo, seriam necessários 36893488147419103230 segundos, aproximadamente um bilhão de séculos contando esta quantidade de trigo.

Esta é apenas uma lenda, mas é interessante perceber a aplicação de conceitos relacionados à progressão geométrica em situações que podem ser reais.

Nas progressões geométricas em que  $|q| < 1$ , a soma dos  $n$  primeiros termos tem um limite finito quando  $n \rightarrow \infty$ . Como nesse caso  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Normalmente nos livros de ensino médio este limite é indicado por  $S_\infty$  e chamado de *soma de infinitos termos de uma progressão geométrica*.

Um exemplo de soma de infinitos termos pode ser dado pelo cálculo da seguinte soma:

$$0,3 + 0,03 + 0,003 + 0,0003 + \dots$$

Os números  $\{0,3; 0,03; 0,003; 0,0003; \dots\}$  formam uma P.G. infinita cujo primeiro termo é 0,3 e a razão é 0,1. Assim, a soma pode ser obtida por:

$$S_\infty = \frac{0,3}{1 - 0,1} = \frac{1}{3}$$

### 3.3.

#### Matemática financeira e as Progressões

Vamos abordar aqui um assunto que está muito presente no cotidiano: a matemática financeira. Fundamentalmente, trata-se de estudar os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análise de investimentos em geral.

Quando uma pessoa (ou uma instituição, como acontece com os bancos) empresta a outra um valor monetário, durante um certo tempo, essa quantia é chamada de *capital*

(alguns livros chamam de principal) e vamos indicar por  $C$ . O valor que o empréstador cobra pelo uso do dinheiro, ou valor pago pelo que tomou emprestado, é chamado de *juros* e indicamos por  $J$ . A *taxa de juros*, que indicamos por  $i$  é expressa como porcentagem do capital. Ela expressa os juros numa certa unidade de tempo, habitualmente representada da seguinte maneira: ao dia (a.d.), ao mês (a.m.), ao ano (a.a.).

Dessa forma, por exemplo, um capital de R\$5000,00 é emprestado a uma taxa de 1,2% a.m., os juros pagos no mês serão iguais a 1,2% sobre R\$5000,00, que equivale ao produto  $0,012 \cdot 5000$  e, portanto, igual a R\$60,00. De modo geral, os juros no período são iguais ao produto do capital pela taxa, isto é:

$$J = C \cdot i$$

Se o pagamento do empréstimo for feito numa única parcela, ao final do prazo, o valor pago vai corresponder à soma do capital emprestado com os juros, que normalmente chamamos de montante, indicado por  $M$ . No exemplo anterior, ao final de um mês, o montante a ser pago será  $5000+60=R\$5060,00$ . Generalizando, temos:

$$M = C + J$$

Se o capital for aplicado a uma certa taxa por período, por vários intervalos ou por períodos de tempo, o valor do montante pode ser calculado segundo duas convenções de cálculo, chamadas de regimes de capitalização: *capitalização simples* (ou juros simples) e *capitalização composta* (ou juros compostos).

### 3.3.1.

#### Regime de capitalização simples

Conforme este regime, os juros gerados em cada período são sempre os mesmos e são dados pelo produto do capital pela taxa.

Considere um capital  $C$  aplicado a juros simples, a uma taxa  $i$  por período e durante  $n$  períodos de tempo. Os juros iniciais são iguais a  $C \cdot i$  e de acordo com o regime de capitalização em cada um dos períodos, os juros são iguais a  $C \cdot i$ , portanto:

| Período | Juros                                                           |
|---------|-----------------------------------------------------------------|
| 0       | $C$                                                             |
| 1       | $C \cdot i$                                                     |
| 2       | $C \cdot i + C \cdot i = 2C \cdot i$                            |
| 3       | $C \cdot i + C \cdot i + C \cdot i = 3C \cdot i$                |
| ⋮       | ⋮                                                               |
| T       | $C \cdot i + C \cdot i + \dots + C \cdot i = C \cdot i \cdot t$ |

Tabela 3 – Cálculo de Juros por Período de Tempo

O montante ao final de certo período  $t$ , é obtido fazendo-se:

$$\begin{aligned}M_1 &= C \\M_2 &= M_1 + C \cdot i \\M_3 &= M_2 + C \cdot i \\&\vdots \\M_n &= M_{n-1} + C \cdot i\end{aligned}$$

Somando-se lado a lado as equações temos:

$$\begin{aligned}M_1 + M_2 + \dots + M_n &= C + M_1 + M_2 + \dots + M_{n-1} + n \cdot C \cdot i \Rightarrow \\M_n &= C + (n - 1) \cdot C \cdot i\end{aligned}$$

Percebemos que, neste caso o capital evolui de forma linear, como uma progressão aritmética na qual, o primeiro termo é o capital ( $a_1 = C$ ) e a razão corresponde ao juro por período ( $r = C \cdot i$ ).

Este padrão de cálculo não é o regime mais comum nas transações bancárias, mas é bem simples de compreender. Este é um conteúdo trabalhado normalmente no ensino fundamental em turmas de sétimo ou oitavo ano. Os alunos, geralmente entendem bem e resolvem tranquilamente as situações propostas. É importante que seja revisado no ensino médio quando tratamos de progressão aritmética com o objetivo de mostrar uma aplicação deste assunto que não deve estar limitado à sala de aula.

### 3.3.2.

#### Regime de capitalização composta

Nesse regime, os juros do primeiro período correspondem ao produto do capital pela taxa; esses juros são adicionados ao capital, gerando o montante  $M_1$  após 1 período. Os juros do segundo período, são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante  $M_1$ , esses juros são adicionados a  $M_1$ , gerando o montante  $M_2$ , após 2 períodos. Os juros do terceiro período, são obtidos multiplicando-se a taxa pelo montante  $M_2$ , esses juros são adicionados a  $M_2$ , gerando o montante  $M_3$ , após 3 períodos.

Dessa forma, os juros de cada período são iguais ao montante do início do período multiplicado pela taxa, e esses juros são adicionados ao montante do início do período, gerando o montante do final do período. Temos:

$$\begin{aligned}M_1 &= C \\M_2 &= M_1 + M_1 \cdot i = M_1(1 + i) \\M_3 &= M_2 + M_2 \cdot i = M_2(1 + i) \\&\vdots \\M_n &= M_{n-1} + M_{n-1} \cdot i = M_{n-1}(1 + i)\end{aligned}$$

Multiplicando-se lado a lado as equações, vem:

$$M_1 \cdot M_2 \dots M_{n-1} \cdot M_n = C \cdot M_1 \cdot M_2 \dots M_{n-1} (1 + i)^{n-1} \Rightarrow M_n = C \cdot (1 + i)^{n-1}$$

Neste caso, o capital evolui exponencialmente, como uma progressão geométrica, na qual o termo inicial é o capital e a razão é  $q = 1 + i$ .

No Brasil, o regime de juros compostos é o mais utilizado em operações tradicionais tais como cheque especial, crédito direto ao consumidor, desconto de títulos e outras. Este é um conteúdo normalmente trabalhado no ensino médio como uma aplicação prática da progressão geométrica.

## 4

# OS PADRÕES MUSICAIS E A MATEMÁTICA

A música é uma das artes que mais desperta fascínio nas pessoas. Em qualquer lugar do mundo, desde uma tribo escondida no meio da mais longínqua floresta até grandes centros urbanos, existe o envolvimento das pessoas com a música. Em tribos, muitas vezes a música faz parte de rituais nos quais acreditam que através dela estabelecem-se contatos entre humanos e alguma divindade.

A música é reconhecida por muitos pesquisadores como uma espécie de modalidade que desenvolve a mente humana, promove o equilíbrio, proporcionando um estado de bem-estar, facilitando a concentração e o desenvolvimento do raciocínio. Conforme consta na publicação do site Brasil Escola em matéria cujo título é “A importância da música no processo de ensino-aprendizagem”:

Segundo estudos realizados por pesquisadores alemães, pessoas que analisam tons musicais apresentam área do cérebro 25% maior em comparação aos indivíduos que não desenvolvem trabalho com música, bem como aqueles que estudaram as notas musicais e as divisões rítmicas, obtiveram notas 100% maiores que os demais colegas em relação a um determinado conteúdo de matemática.

Independente do estilo musical, ou do propósito por trás do uso da música, para que ela soe de maneira agradável e ordenada seguem-se vários padrões desde a composição até a execução.

Conforme Almir Chediak, em sua obra “Harmonia e Improvisação”, a música é “a arte dos sons, constituída de melodia, ritmo e harmonia.” Detalhadamente, aparecem os conceitos envolvidos: “Melodia é uma sucessão de sons musicais combinados. Ritmo é a duração e acentuação dos sons e das pausas. Harmonia é a combinação de sons simultâneos”.

### 4.1.

#### Sons e as funções periódicas

O som é o efeito audível produzido por movimentos de corpos vibratórios. Para os sons musicais faz-se necessária uma fonte sonora (corpo que produz sons ao vibrar). Nos instrumentos musicais, os corpos vibrantes são corda esticada (violão, piano, guitarra) coluna de ar (saxofone, flauta, trompete) ou uma membrana (tamborim, cuíca). No caso de uma corda de violão ao ser tocada, ela movimenta-se de um lado para outro um determinado número de vezes por segundo emitindo um som. Esse movimento, chama-se vibração que é medida em Hertz – Hz (ciclos por segundo).

Neste início da análise dos elementos envolvidos na música, já é possível perceber a presença de padrões matemáticos. Muitos sons musicais podem ser representados por funções periódicas como funções seno e cosseno, que nestes casos têm período igual a  $2\pi$ . Esse tipo de função é utilizado para modelar matematicamente fenômenos físicos de natureza ondulatória, como oscilações mecânicas ou de corrente em circuitos elétricos, propagação do som ou teoria ondulatória da luz. Vamos aqui observar um exemplo de uma expressão trigonométrica utilizada para representar sons.

Em particular, vamos pensar na função  $g(x) = a\text{sen}(2\pi\omega(x - c))$ , na qual  $a, \omega, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $\omega \neq 0$ . Esta função tem amplitude  $|a|$ , frequência  $\omega$ , período  $\frac{1}{\omega}$  e  $c$  é um ângulo de fase. Isto é, o gráfico de  $g$  oscila tomando todos os valores do intervalo  $[-|a|, |a|]$ , completa um ciclo em cada intervalo de comprimento  $\frac{1}{\omega}$ , (portanto,  $\omega$  ciclos em cada intervalo de comprimento 1) e encontra-se defasado da origem  $|c|$  unidades para a direita, se  $c > 0$ , ou para a esquerda, se  $c < 0$ , em relação à função  $f(x) = a\text{sen}(2\pi\omega x)$ . As mesmas considerações valem tomando  $h(x) = a\text{cos}(2\pi\omega(x - c))$  em vez de  $g(x)$ .

O som se propaga fazendo vibrar as moléculas de ar. A ação da onda sonora faz com que uma determinada molécula de ar oscile com respeito à sua posição de equilíbrio. Em geral isso é verdade nos sons emitidos por instrumentos musicais, mas não para sons classificados como ruídos.

Vamos representar por  $y(t)$  a posição de uma molécula de ar vibrando numa onda sonora no instante de tempo  $t$ . Então,  $y(t)$  deve ser uma função periódica. No entanto, seu gráfico não necessariamente é tão simples quanto o gráfico do seno ou do cosseno. Por exemplo, se  $y(t)$  descreve o deslocamento de uma molécula de ar na onda sonora emitida por um diapasão (instrumento utilizado para afinar outros instrumentos, como o violão por exemplo, a partir do som de uma nota musical específica) que vibra a uma frequência de 320 ciclos por segundo com amplitude de 0,02mm, então:

$$y(t) = 0,02\text{sen}(2\pi(320)t) = 0,02\text{sen}(640\pi t)$$

De modo geral, os sons produzidos por ondas do tipo  $y(t) = a\text{sen}(2\pi\omega t)$  ou  $y(t) = a\text{cos}(2\pi\omega t)$  são denominados tons puros.

No início do século XIX, *Joseph Fourier* mostrou que as curvas periódicas “agradáveis” podem ser muito bem aproximadas por uma soma de funções seno e cosseno. Em particular isso ocorre com o som musical, como na função:

$$\begin{aligned} y(t) = & 22,4\text{sent} + 94,1\text{cost} + 49,8\text{sen}(2t) - 43,6\text{cos}(2t) + 33,7\text{sen}(3t) - \\ & 14,2\text{cos}(3t) + 19,0\text{sen}(4t) - 1,9\text{cos}(4t) + 8,9\text{sen}(5t) - 5,22\text{cos}(5t) - \\ & 8,18\text{sen}(6t) - 1,77\text{cos}(6t) + 6,4\text{sen}(7t) + 3,11\text{sen}(8t) - 8,34\text{cos}(8t) - \\ & 1,28\text{sen}(9t) - 4,1\text{cos}(9t) - 0,71\text{sen}(10t) - 2,17\text{cos}(10t), \end{aligned}$$

que parece estranha, mas, ao observar o seu gráfico, percebe-se tratar de uma função periódica:

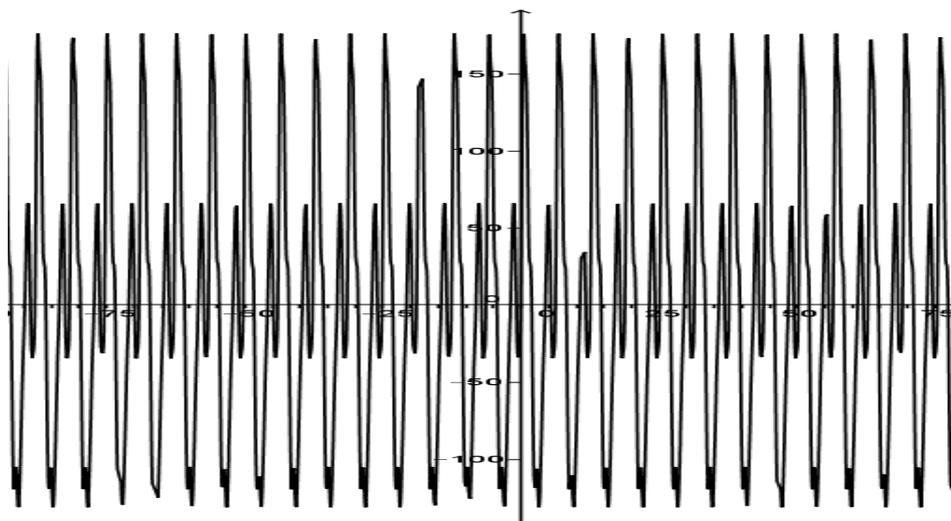


Gráfico 3 – Função de um Som

Numa escala de frequências adequadas a função  $y(t)$ , acima é uma boa aproximação ao deslocamento da onda sonora correspondente ao tom de uma das pipas de um órgão. É interessante observar que os termos da expressão de  $y(t)$  são escritos aos pares, um seno e um cosseno, e que as frequências desses pares são múltiplos inteiros da frequência do primeiro par. Esse é um fato geral que é parte da teoria desenvolvida por Fourier. A aproximação ao som real será mais precisa, adicionando a  $y(t)$  um par da forma  $asen(11t) + bcos(11t)$ , para algumas constantes  $a$  e  $b$ .

## 4.2.

### Padrões matemáticos nas partituras

A notação musical é a representação gráfica de uma música. Existem sete notas naturais:

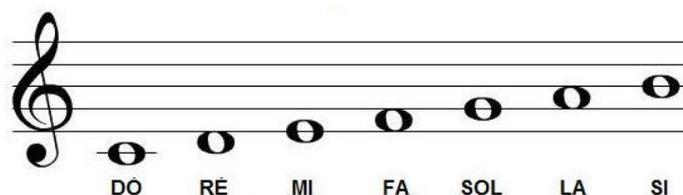


Figura 5 – Representação das Notas Musicais na Pauta

Estas notas podem ser alteradas de forma ascendente ou descendente, tomando, então o lugar de uma de suas notas vizinhas, usando respectivamente, os sinais # (sustenido) e  $b$  (bemol), completando assim a série das doze notas, isto é, sete notas naturais e cinco alteradas. Na verdade, todas as sete notas podem ser alteradas, mas

apenas cinco resultariam em novos sons. O Mi# e Si# têm som de Fá e Dó, respectivamente. Entre uma e outra nota há um intervalo de um semitom.

Nas teclas de um piano é possível visualizar bem essas doze notas, sendo as notas naturais associadas às teclas brancas e as cinco notas alteradas às teclas pretas.

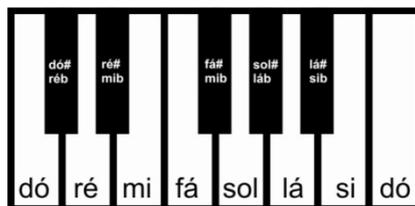


Figura 6 – Notas Musicais nas Teclas de Um Piano

As figuras utilizadas na escrita de uma partitura, que é a representação gráfica da música, mostram o tempo de duração de cada nota. Essas durações são os valores representados pelas figuras gráficas de notação musical.

| Figura | Nome         | Valor do tempo de execução da nota |
|--------|--------------|------------------------------------|
|        | Semibreve    | 1                                  |
|        | Mínima       | $\frac{1}{2}$                      |
|        | Semínima     | $\frac{1}{4}$                      |
|        | Colcheia     | $\frac{1}{8}$                      |
|        | Semicolcheia | $\frac{1}{16}$                     |
|        | Fusa         | $\frac{1}{32}$                     |
|        | Semifusa     | $\frac{1}{64}$                     |

Tabela 4 – Nomes e respectivos valores de tempo de uma nota na partitura

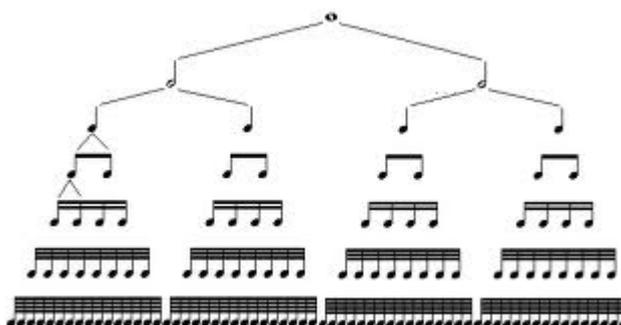


Figura 7 – As Subdivisões dos Valores de Tempo das Notas

É fácil detectar a presença de conceitos matemáticos na organização dessas figuras.

Os valores formam uma Progressão Geométrica de razão  $\frac{1}{2}$ .

$$\left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64} \right\}$$

A associação da música com a matemática não pára por aí. Há diversas situações nas quais ideias associadas à matemática ajudam na execução de uma música. Quando um músico precisa marcar o ritmo de certa composição musical ele o faz como se contasse números.

### 4.3.

#### A Escala Pitagórica

Os sons podem ser considerados a matéria prima da música. Como vimos os sons são resultados de oscilações muito rápidas que ocorrem no ar. Os ouvidos captam esta frequência e enviam ao cérebro a percepção dos diversos sons.

Por exemplo, se alguém emite um som que tem uma determinada frequência de vibração,

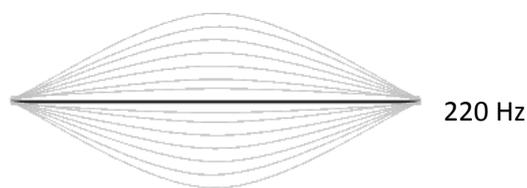


Figura 8 – Vibração de Uma Corda inteira

e uma outra pessoa emite um som que tem aproximadamente uma frequência que corresponde o seu dobro:

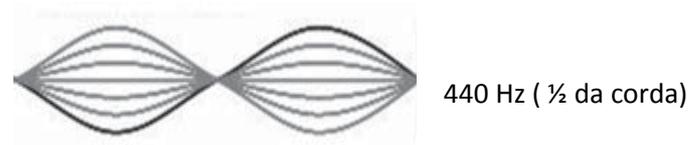


Figura 9 – Vibração De Meia Corda

o ouvido humano interpreta estas frequências sonoras como equivalentes e passa aceitá-las como sons musicais idênticos. Desde a antiguidade os povos utilizaram deste conhecimento para organizar suas criações musicais. Desenvolveu-se o costume de se utilizar os sons que o ouvido reconhecia como equivalentes como limites de uma espécie de unidade sonora que poderia ser dividida, ou melhor fracionada. Este intervalo é o que chamamos de oitava. Nas figuras acima temos como exemplo o número de vibrações correspondente à nota musical Lá<sub>1</sub> (220Hz) e sua oitava Lá<sub>2</sub> (440Hz).

Segundo as palavras do filósofo, cientista, matemático e diplomata alemão Gottfried Wilhelm Leibniz “música é um exercício oculto de aritmética de uma alma inconsciente que lida com números”. O primeiro sinal do casamento entre matemática e música ocorreu por volta do século V a.C., quando o filósofo e matemático grego, Pitágoras, realizou o que viria a ser uma das primeiras experiências matemáticas registradas na história da ciência. Pitágoras construiu um instrumento composto por uma

única corda estendida que poderia ser pressionada em lugares calculados e assim gerava sons que mantinham relações aritméticas. Era o monocórdio.

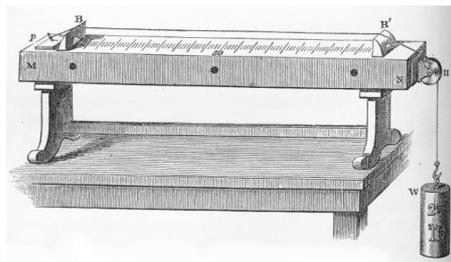


Figura 10 – Monocórdio

Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a  $\frac{3}{4}$  do comprimento da corda em relação a sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a  $\frac{3}{4}$  de seu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. A partir desta experiência, os intervalos passam a denominar-se consonâncias pitagóricas. Assim, se o comprimento original da corda for 12 e se a reduzirmos para 9, ouviremos a quarta, para 8, a quinta, para 6, a oitava.

Os pitagóricos foram os primeiros a elaborar uma escolha de sons adequada ao uso musical e criaram os princípios da teoria musical. Utilizando-se do monocórdio, determinaram as relações matemáticas que fazem parte das consonâncias consideradas mais importantes: o intervalo da oitava (*diapason*), o de quinta (*diapente*) e o de quarta (*diaterason*). Fixando-se uma corda de comprimento  $1m$  e paralelamente a ela fixam-se outras cordas de tamanhos  $\frac{3}{4}m$ ,  $\frac{2}{3}m$  e  $\frac{1}{2}m$ , as razões entre o comprimento da primeira corda e comprimento das outras três cordas serão  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{2}{1}$  que corresponde, respectivamente aos intervalos de quarta, quinta e oitava. A simplicidade dessas frações foi fundamental para o modo que os gregos criaram uma escala de sete notas, muito parecida com a escala que utilizamos hoje, conhecida como escala diatônica de Dó. Que é o correspondente a tocar as teclas brancas de um piano.

Uma forma de se obter a *escala pitagórica*, como ficou conhecida, é a seguinte: suponha que Dó<sub>1</sub> corresponde ao som produzido pelo monocórdio solto. Numa razão de  $\frac{2}{3}$  do comprimento da corda obtém-se a nota Sol<sub>1</sub> correspondente à quinta acima de Dó<sub>1</sub>. A  $\frac{2}{3}$  do Sol<sub>1</sub> encontra-se o Ré<sub>2</sub> que corresponde a  $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$  do comprimento. Refazendo o mesmo processo, obtém-se Lá<sub>2</sub>, Mi<sub>3</sub>, Si<sub>3</sub> que são sons mais agudos que Dó<sub>2</sub>, que corresponde à oitava de Dó<sub>1</sub> e é obtido tomando-se o comprimento de  $\frac{1}{2}$  da corda. Os pitagóricos reduziram estas frequências dobrando o comprimento da corda quando os sons ultrapassassem o Dó<sub>2</sub>. Para obter o comprimento  $L$  da corda correspondente ao som

que está  $n$  oitavas acima do  $Dó_1$  e cujo comprimento da primeira oitava é  $l$  realizamos a seguinte operação, cuja expressão corresponde a uma Progressão Geométrica:

$$L = l \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Com esses procedimentos ainda faltava determinar o comprimento correspondente à nota  $Fá_1$  e para isso basta determinar o comprimento de um som acima do qual  $Dó_2$  é uma quinta, isto é:  $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}l \Rightarrow l = \frac{3}{4}$ .

Esta descrição da obtenção da escala ficou conhecida como *ciclo de quintas ascendentes*, que também pode ser obtido por quartas descendentes. Os pitagóricos, assim, determinaram uma escala heptatônica com a qual estavam bastante satisfeitos já que esta escala era adequada aos padrões estéticos musicais da época. Mas continuando dessa maneira, isto é, multiplicando-se os comprimentos dos sons obtidos por  $\frac{2}{3}$ , iniciando em  $Si_3$  encontram-se os sons que correspondem às notas alteradas  $Fá\#, Dó\#, Sol\#, Ré\#$  e  $Lá\#$ . Os gregos conseguiram, então, uma divisão da oitava em 12 partes. São considerados 12 sons porque depois de se aplicar doze quintas a um som, encontra-se uma nota que está à cerca de sete oitavas acima do som inicial.

Na figura a seguir é possível observar a o ciclo de quintas ascendentes definido pelo pitagóricos deslocando-se no sentido anti-horário. Além disso, se o deslocamento for no sentido horário tem-se o ciclo de quartas descendentes que é equivalente ao primeiro.

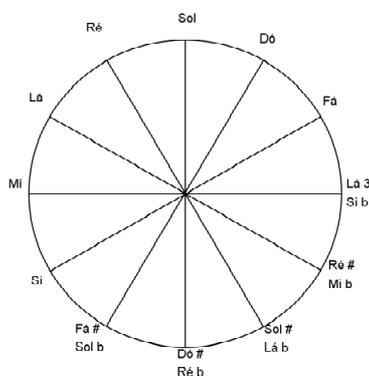


Figura 11 – Ciclo de Quintas/ de Quartas

A escala Pitagórica apresentou um problema em relação ao desenvolvimento e composição musical no que diz respeito à transposições, já que mesmo dividida em 12 partes, estas não são iguais. Vejamos por exemplo o caso do  $Dó_8$  que encontra-se exatamente a 12 quintas de  $Dó_1$  e como o comprimento correspondente ao  $Dó_1$  é 1, o comprimento de  $Dó_8$  é  $L = 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \left(\frac{2}{3}\right)^{12}$ . Além disso o  $Dó_8$  está a 7 oitavas de  $Dó_1$ , portanto seu comprimento também pode ser expresso por  $L = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^7$ . Neste caso, a razão entre estes comprimentos deveria ser 1, mas não é o que acontece. Vejamos:

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{\left(\frac{2}{3}\right)^{12}} = 1,013643264770508 \dots$$

A razão obtida acima é chamada *coma pitagórico* e representa a defasagem entre as 12 quintas e as sete oitavas, isso mostra que as quintas acusticamente perfeitas de Pitágoras não se ajustam às oitavas quaisquer que seja o número de quintas ascendentes que sejam aplicadas a um som original. Explicamos matematicamente este desajuste pela seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \neq \left(\frac{1}{2}\right)^m, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

De fato, pelo Teorema Fundamental da Aritmética temos que:

$$2^p \neq 3^n, \forall p, n \in \mathbb{N}$$

Suponha  $p = n + m, m \in \mathbb{N}$ :

$$2^{n+m} \neq 3^n \Rightarrow 2^n \cdot 2^m \neq 3^n \Rightarrow \frac{2^n}{3^n} \neq \frac{1}{2^m} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \neq \left(\frac{1}{2}\right)^m, \forall n, m \in \mathbb{N}$$

#### 4.4.

#### A Escala Temperada

De forma genérica, *temperar* significa fazer ajustes nos intervalos, desviando-os dos intervalos naturais. A aplicação do sistema de temperamento tem como principal objetivo solucionar o problema de *transposição* e *modulação musical*. Transpor uma música está relacionado à mudança de tonalidades. Por exemplo, se uma determinada música é normalmente tocada na escala de Dó, mas certo cantor deseja cantar em outro tom, como Fá, todas as notas devem ser alteradas adequadamente acompanhando a nova tonalidade. Neste caso, diz-se que houve uma transposição da música da escala de Dó para a escala de Fá.

A escala temperada possibilita a divisão da escala em 12 partes iguais, mas só começou a ser pensada no fim do século XVI pelo matemático flamenco Simon Steven e também pelo príncipe chinês Chou Tsai-Yu. Mas, somente em 1691 esta escala foi fundamentada pelo músico alemão Andreas Werkmeister.

O Sistema Temperado só foi possível devido ao uso de números irracionais. O objetivo do temperamento igual é fazer com que a razão entre as frequências de duas notas consecutivas seja sempre constante. Considere, por exemplo a divisão da oitava perfeita Dó<sub>1</sub> a Dó<sub>2</sub>. O que se pretende é tornar o intervalo de frequências entre duas notas consecutivas um número constante  $q$  que deve ser determinado.



Figura 12 – Ciclo da Escala Temperada

Tomando-se  $a_1$  e  $a_2$  como as frequências, respectivamente de  $Dó_1$  e  $Dó\#$ , pelo sistema temperado teremos:

$$\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 q$$

Assim, entre  $Ré$  e  $Dó\#$ , com frequências  $a_3$  e  $a_2$ , respectivamente temos:

$$\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2 q = a_1 q q = a_1 q^2$$

De igual modo, tomando-se  $Ré\#$  e  $Ré$  ( $a_4, a_3$ ), obtém-se:

$$\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 q = a_1 q^2 q = a_1 q^3$$

De modo geral, temos:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 13$$

Note que,  $n$  varia de 1 a 13 porque temos 12 intervalos, mas 13 notas em uma oitava.

Para  $n = 13$ , tem-se:

$$a_{13} = a_1 q^{12}$$

As frequências  $a_{13}$  e  $a_1$  da igualdade acima correspondem ao intervalo de uma oitava, ou

seja,  $\frac{a_{13}}{a_1} = \frac{2}{1}$ , portanto obtemos:

$$\frac{2}{1} = q^{12} \Rightarrow q = \sqrt[12]{2}$$

O que temos no sistema temperado é uma Progressão Geométrica cuja razão é  $q = \sqrt[12]{2}$  e o primeiro termo corresponde à frequência determinada pela nota chamada *principal* da escala. Na escala de Lá a nota principal que define a escala é o Lá.

Uma representação matemática dessa distribuição de frequências pode ser feita através do uso de coordenadas polares. Esta representação pode-se iniciar por qualquer nota da escala musical e percorrendo-se intervalos iguais, quando se chega ao décimo segundo intervalo a frequência da nota musical será o dobro daquela pela qual foi iniciada.

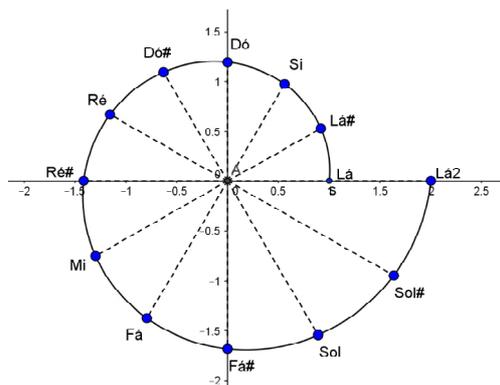


Figura 13 – Espiral Logarítmica Definida Pelas Coordenadas Polares de Uma Escala

Observe que a espiral começa pelo valor 1 e termina no valor 2. Assim os raios vetores que representam as notas musicais têm seus comprimentos representados na sequência por:

| Nota | Comprimento do raio vetor                        |
|------|--------------------------------------------------|
| Lá   | $(\sqrt[12]{2})^0 = 2^0 = 1$                     |
| Lá#  | $(\sqrt[12]{2})^1 = \sqrt[12]{2} = 1,0594631$    |
| Si   | $(\sqrt[12]{2})^2 = \sqrt[6]{2} = 1,1224621$     |
| Dó   | $(\sqrt[12]{2})^3 = \sqrt[4]{2} = 1,1892071$     |
| Dó#  | $(\sqrt[12]{2})^4 = \sqrt[3]{2} = 1,2599211$     |
| Ré   | $(\sqrt[12]{2})^5 = 1,3348399$                   |
| Ré#  | $(\sqrt[12]{2})^6 = \sqrt{2} = 1,4142135$        |
| Mi   | $(\sqrt[12]{2})^7 = 1,4983071$                   |
| Fá   | $(\sqrt[12]{2})^8 = \sqrt[3]{4} = 1,5874011$     |
| Fá#  | $(\sqrt[12]{2})^9 = \sqrt[4]{8} = 1,6817929$     |
| Sol  | $(\sqrt[12]{2})^{10} = \sqrt[6]{32} = 1,7817975$ |
| Sol# | $(\sqrt[12]{2})^{11} = 1,8877487$                |
| Lá   | $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$                        |

Tabela 5 – Variação De Frequências Das Notas De Uma Escala

O uso do sistema temperado se justifica porque com o desenvolvimento do sistema tonal e da composição musical, o uso de modulação ficou frequente e as escalas naturais ficaram com o uso muito restrito. Este sistema atraiu muitos simpatizantes, que buscavam a modulação e que, graças ao novo sistema, finalmente conseguiram realizar maravilhosos trabalhos musicais e escritos. Talvez, o mais célebre de todos tenha sido Johann Sebastian Bach (1685-1750). Este compositor e instrumentista compôs, em 1722 a obra “O Cravo bem Temperado” que compreende 24 tonalidades.

## SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Leonardo Fibonacci nasceu na Itália por volta de 1170, é também conhecido como Leonardo de Pisa ou Leonardo Bigollo. Ele representou um papel importante revivendo conceitos matemáticos antigos e fazendo contribuições significantes a esta ciência.



Figura 14 – Leonardo Fibonacci

“Os nove números indianos são: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Com esses nove números, e com o signo 0... qualquer número pode ser escrito”

Com as palavras acima, Leonardo Fibonacci começou seu primeiro e mais conhecido livro, *Liber abaci* (*Livro do ábaco*), publicado em 1202. Nesta época poucos intelectuais europeus conheciam os numerais indo-arábicos que usamos hoje. Era comum o uso do sistema romano de numeração, nada prático para fins de cálculos. Depois de comparar vários sistemas de numeração utilizados em sua época, Fibonacci concluiu que os numerais indo-arábicos, que incluíam o princípio do valor de lugar, eram muito superiores a todos os outros métodos e dedicou os sete primeiros capítulos de seu livro a explicações sobre a notação indo-arábica e suas aplicações práticas.

Muitos foram os problemas abordados e solucionados no *Liber abaci* por Leonardo Fibonacci. Um deles é o famoso problema dos coelhos, que muito provavelmente originou-se do papiro de Rhind, que dá origem à famosa sequência de Fibonacci:

*“Um homem pôs um par (casal) de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro de todos os lados. Quantos pares (casais) de coelhos podem ser gerados a partir desse par em 12 períodos, se em todo período cada par gera um novo par (casal) de filhotes que se tornam adultos e férteis a partir do segundo período de vida?”*

Uma solução para este problema é dada a seguir:

- No primeiro período, tem-se 1 par de filhotes de coelhos;
- No segundo período, tem-se o mesmo par de coelhos, mas neste momento adultos, portanto fértil;
- No terceiro período, tem-se 1 par inicial mais 1 par de filhotes, portanto 2 pares de coelhos;

• No quarto período, tem-se 1 par inicial, 1 par (primeiro par gerado) adulto fértil mais 1 par de filhotes (segundo par gerado pelo primeiro casal), portanto 3 pares de coelhos;

• No quinto período, tem-se os 3 pares de coelhos do quarto período mais 2 pares de filhotes (sendo 1 gerado pelo par inicial e 1 gerado pelo primeiro par gerado), portanto são 5 pares de coelhos;

• No sexto período tem-se os 5 pares de coelhos do quinto período, mais 3 pares de filhotes (1 par gerado pelo par inicial, 1 par gerado pelo par gerado no terceiro período e 1 par gerado pelo par do quarto período), portanto são 8 pares de coelhos;

Seguindo essa ideia tem-se o esquema a seguir:

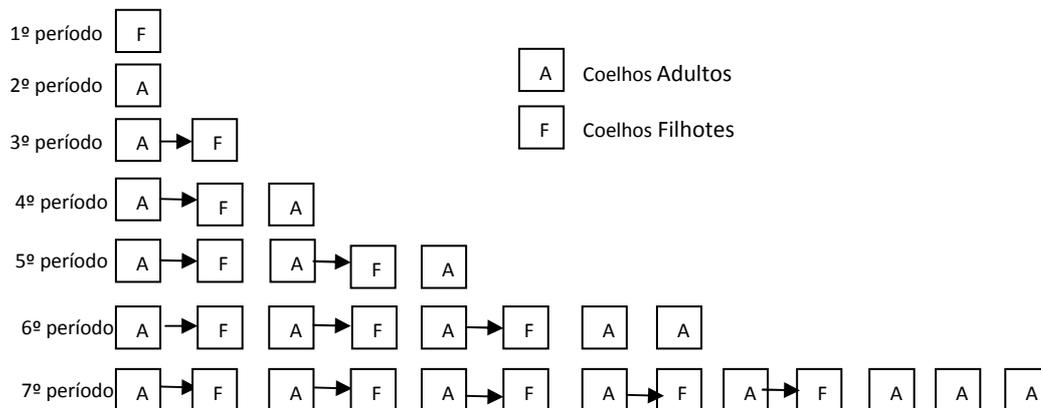


Figura 15 – Esquema da Reprodução dos Coelhos

Continuando nessa mesma linha raciocínio, é possível concluir que a partir do terceiro período, a quantidade de casais é dada pela soma das quantidades de casais dos dois períodos anteriores. Dessa forma, obtemos uma sequência, onde os dois primeiros termos valem 1, os demais termos são gerados pela soma dos dois termos anteriores, formando a sequência onde a posição dos termos representa os períodos e os termos representam a quantidade de casais de coelhos:

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots\}$$

A sequência acima na qual cada termo a partir do terceiro é obtido através da soma de dois termos anteriores, foi apropriadamente chamada de Sequência de Fibonacci no século XIX pelo matemático francês Édouard Lucas (1842-1891).

Sequências de números nas quais as relações entre termos sucessivos pode ser expressa por uma fórmula matemática são conhecidas como recursivas. A propriedade geral de que cada termo na sequência é igual à soma dos dois anteriores é expressa matematicamente como:

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

na qual  $f_n$  representa o n-ésimo termo da sequência.

## 5.1.

### Fórmula recursiva da sequência de Fibonacci

Para não ficarmos apenas na citação da expressão “Sequência Recursiva” abordaremos aqui rapidamente alguns conceitos relacionados à recorrências. As definições e teoremas citados aqui, são baseadas no livro Matemática Discreta, de Augusto César Morgado e Paulo Cezar Pinto Carvalho, da coleção Profmat, da SBM.[1]

Muitas sequências são definidas recursivamente, isto é, por recorrência. Isso significa que é possível defini-las através de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es).

Por exemplo, a sequência  $(a_n)$  dos números naturais ímpares  $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$  pode ser definida por  $a_{n+1} = a_n + 2, n \geq 1$ , com  $a_1 = 1$ .

Mas, uma recorrência, por si só, não define a sequência. No caso citado acima, a recorrência  $a_{n+1} = a_n + 2$ , é satisfeita não apenas pela sequência de número naturais ímpares, mas todas as progressões aritméticas de razão 2. Para que a sequência fique perfeitamente determinada é necessário também o conhecimento de alguns de seus termos.

Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea com coeficientes constantes é da forma  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , com  $q \neq 0$ .

A cada recorrência da forma acima, associaremos uma equação do segundo grau,  $r^2 + pr + q = 0$ , chamada *equação característica*. Como  $q \neq 0$  temos que zero não é solução da equação.

**Teorema:** Se as soluções de  $r^2 + pr + q = 0$  são  $r_1$  e  $r_2$ , então  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  é solução da recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , quaisquer que sejam os valores das constantes  $C_1$  e  $C_2$ .

**Demonstração:** Substituindo  $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$  na recorrência  $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ , obtemos:

$$\begin{aligned} C_1 r_1^{n+2} + C_2 r_2^{n+2} + p C_1 r_1^{n+1} + p C_2 r_2^{n+1} + q C_1 r_1^n + q C_2 r_2^n &= \\ = C_1 r_1^n (r_1^2 + p r_1 + q) + C_2 r_2^n (r_2^2 + p r_2 + q) &= \\ = C_1 r_1^n 0 + C_2 r_2^n 0 = 0 \blacksquare \end{aligned}$$

A partir desta linha de raciocínio, vamos encontrar uma fórmula que determine um número de Fibonacci  $f_n$  definido por  $\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$  conhecendo-se  $n$ .

Note que a equação  $f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0$  que define um número de Fibonacci é uma recorrência linear de segunda ordem cuja a equação característica é  $r^2 - r - 1 = 0$ , cujas soluções são obtidas através da resolução da equação de segundo grau. Portanto:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ e } r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Sendo assim, segue do teorema acima que:

$$f_n = C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

e, para determinar  $C_1$  e  $C_2$ , podemos usar  $f_1 = f_2 = 1$  obtendo assim o sistema:

$$\begin{cases} C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^1 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \\ C_1 \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^2 + C_2 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos  $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Daí, para se determinar um termo de ordem  $n$  da sequência de Fibonacci pode-se usar a seguinte relação:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Que corresponde a:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Em meados do século XIX, o matemático francês Jacques Phillippe Marie Binet (1786-1856) redescobriu esta fórmula que já era conhecida no século XVIII pelo matemático suíço, Leonard Euler (1707-1783), e pelo também, matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). Mas esta relação que determina qualquer termo  $f_n$  da sequência de Fibonacci a partir de  $n$  é conhecida como *fórmula de Binet*.

## 5.2.

### A Sequência de Fibonacci além do problema dos coelhos

O que realmente faz com que a sequência de Fibonacci seja tão importante para a matemática é o fato de não estar apenas relacionada à solução do problema dos coelhos, mas por estar presente em uma variedade inacreditável de fenômenos aparentemente sem relação.

**Situação 1)** Observando, por exemplo, o fenômeno da ótica dos raios de luz. Suponha dispormos de duas placas de vidro ligeiramente distintas, cujas propriedades de refração da luz, ou índices de refração sejam diferentes, colocadas face a face. Se as placas forem expostas à luz, os raios podem se refletir internamente em quatro superfícies antes de emergir. Mais especificamente, eles podem passar diretamente sem se refletir em nada ou podem ter uma reflexão interna, duas reflexões internas, três reflexões internas, e assim por diante – potencialmente um número infinito de reflexões internas antes de emergir. Todos estes, são caminhos permitidos pelas leis da ótica. Veja na ilustração a seguir o número de raios que emergem desse sistema de duas placas.

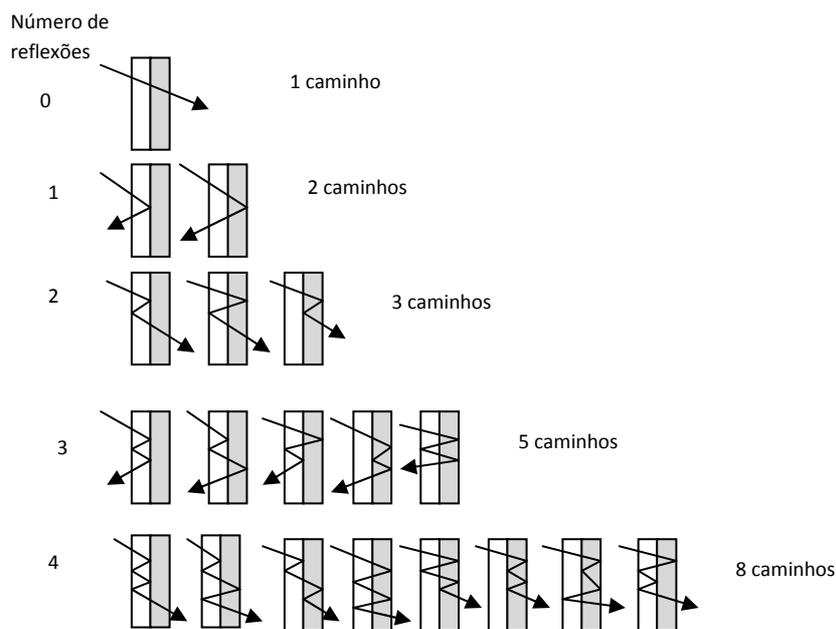


Figura 16 – Fenômeno da Reflexão

Se continuarmos aumentando o número de reflexões o número de caminhos encontrados pelos raios de luz formam seguem a sequência (1, 2, 3, 5, 8, ...) que uma sequência de Fibonacci.

**Situação 2)** Agora, considerando um caso completamente diferente. Tomemos o problema: uma pessoa está subindo uma escada. O número máximo de degraus que ela consegue subir de uma vez é dois, isto é, ela pode subir um ou dois degraus de cada vez. Se existem  $n$  degraus na escada, de quantas maneiras diferentes ela pode subir? Vejamos:

- se existe apenas 1 degrau ( $n = 1$ ), há apenas uma maneira de subir;
- se existem 2 degraus ( $n = 2$ ), há 2 maneiras de subir (1 degrau de cada vez ou os 2 degraus de uma vez);
- se existem 3 degraus ( $n = 3$ ), há 3 maneiras de subir (1 degrau de cada vez, 1 degrau + 2 degraus ou 2 degraus + 1 degrau)
- se existem 4 degraus ( $n = 4$ ), há 5 maneiras de subir (1 degrau de cada vez, 1 degrau + 2 degraus + 1 degrau, 1 degrau + 1 degrau + 2 degraus, 2 degraus + 1 degrau + 1 degrau ou 2 degraus de cada vez)

Continuando na mesma linha de raciocínio, observa-se, por recorrência que o número de maneiras diferentes de subir segue a sequência (1, 2, 3, 5, ...) que é uma sequência de Fibonacci.

**Situação 3)** O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números relacionados entre si. Esses números são resultados do desenvolvimento de números binomiais. O triângulo aritmético é conhecido há muito tempo (a descoberta inicial é creditada ao matemático persa Omar Khayyám), mas foi nomeado “triângulo de Pascal”

devido aos estudos feitos e relações descobertas pelo filósofo e matemático francês Blaise Pascal (1623-1662).

|   |   |    |    |     |     |    |    |   |   |
|---|---|----|----|-----|-----|----|----|---|---|
| 1 |   |    |    |     |     |    |    |   |   |
| 1 | 1 |    |    |     |     |    |    |   |   |
| 1 | 2 | 1  |    |     |     |    |    |   |   |
| 1 | 3 | 3  | 1  |     |     |    |    |   |   |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1   |     |    |    |   |   |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5   | 1   |    |    |   |   |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15  | 6   | 1  |    |   |   |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35  | 21  | 7  | 1  |   |   |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70  | 56  | 28 | 8  | 1 |   |
| 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 |

Figura 17 – Triângulo de Pascal

Cada linha do triângulo possui um número a mais que a anterior, de modo que toda linha  $n$  possui  $n + 1$  elementos. Todas as linhas começam e terminam com o número 1. A partir da segunda linha, notamos que cada elemento  $x$ , com exceção do primeiro e do último, é igual à soma de dois elementos consecutivos da linha anterior, a saber: o elemento imediatamente acima de  $x$  e o anterior a este.

O que queremos observar aqui é que neste triângulo a soma das diagonais forma a sequência de Fibonacci.

|   |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
|   | 1 | 1  | 2  | 3  | 5  | 8  | 13 | 21 | 34 | ... |
| 1 |   |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 1 | 1 |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 1 | 2 | 1  |    |    |    |    |    |    |    |     |
| 1 | 3 | 3  | 1  |    |    |    |    |    |    |     |
| 1 | 4 | 6  | 4  | 1  |    |    |    |    |    |     |
| 1 | 5 | 10 | 10 | 5  | 1  |    |    |    |    |     |
| 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6  | 1  |    |    |    |     |
| 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7  | 1  |    |    |     |
| 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8  | 1  |    |     |

Figura 18 – Soma dos Termos da Diagonal do Triângulo de Pascal

O fenômeno ótico, o problema dos degraus e a soma dos elementos da diagonal dos números do triângulo de Pascal são apenas alguns dos inúmeros exemplos encontrados tanto na natureza quanto em situações matemáticas e problematizadas que se relacionam com a sequência de Fibonacci e que nada têm em comum com o problema dos coelhos.

Matematicamente há ainda algo interessante a respeito dessa sequência que é sua relação com o número de ouro, ou a razão áurea. Este é o assunto a ser tratado a seguir.

### 5.3.

#### Razão Áurea

No dia a dia, usamos a palavra “proporção” para a relação comparativa entre partes de coisas com respeito a tamanho e quantidade, ou quando queremos descrever uma relação harmoniosa entre diferentes partes. Na matemática, o termo “proporção” é usado para descrever uma igualdade entre razões. Quatro números racionais  $a, b, c$  e  $d$ , diferentes de zero, nesta ordem, formam uma proporção quando:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , onde lê-se:  $a$  está

para  $b$  assim como  $c$  está para  $d$ . A propriedade fundamental das proporções garante que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Neste caso,  $a$  e  $d$  são os extremos e  $b$  e  $c$  são os meios. Sendo assim:  $a.d = b.c$ . A Razão Áurea nos fornece uma interessante mistura entre essas duas acepções, já que embora seja matematicamente definida, considera-se que revela qualidades agradavelmente harmoniosas.

### 5.3.1.

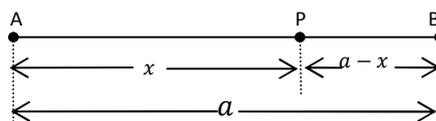
#### Definição geométrica da extrema e média razão

A primeira definição clara do que mais tarde ficou conhecido como *Razão Áurea* foi dada por volta de 300 a.C. pelo fundador da geometria como sistema dedutivo formalizado, Euclides de Alexandria. Ele definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua *extrema e média razão*. Nas palavras de Euclides extraídas do livro VI de Os Elementos: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor segmento”.

Define-se que um ponto  $P$  divide um segmento  $\overline{AB}$  na razão áurea (em uma medida de extrema e média razão) se:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$$

Sejam  $a, x \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$  e  $x > 0$ . Considerando  $\overline{AB} = a$  e  $\overline{AP} = x$ , temos que  $\overline{PB} = a - x$  e obtemos o número que corresponde à proporção:



Conforme a definição de Euclides, temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \Rightarrow x^2 = a^2 - ax \Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0$$

Resolvendo a equação na incógnita  $x$ , vem:

$$x' = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = \frac{-a(1 + \sqrt{5})}{2}$$

$$x'' = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

Como  $x' < 0$ , não vamos considerar este valor, visto que  $x$  é a medida de um segmento de reta. Neste caso, tem-se que

$$\overline{PB} = a - x = a - \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} = \frac{a(3 - \sqrt{5})}{2}$$

### 5.3.2.

#### Determinação da constante $\varphi$ (número de ouro)

A partir da construção feita anteriormente consideremos a constante de proporcionalidade igual a  $\varphi$ :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} = \varphi \quad (i)$$

Portanto, podemos escrever:

$$\varphi = \frac{a}{x} = \frac{a+x-x}{x} = \frac{a-x}{x} + 1 \quad (ii)$$

Por (i) temos que  $\varphi = \frac{x}{a-x} \Rightarrow \frac{1}{\varphi} = \frac{a-x}{x}$ , portanto em (ii) podemos escrever  $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$ , logo temos a equação que define o valor de  $\varphi$ :

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Resolvendo, a equação encontram-se as soluções  $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  e  $\varphi'' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Por se tratar de uma razão entre medidas de segmentos, tem-se que  $\varphi > 0$ , logo temos que:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948482045868343656\dots$$

Este valor corresponde a aproximadamente 1,618.

Voltando ao desenho inicial, vimos que  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{AP} = x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$  e  $\overline{PB} = a - x = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$ . Podemos perceber que, de fato, efetuando as razões  $\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}$  e  $\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}}$  temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{e} \quad \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}}{\frac{a(3-\sqrt{5})}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Dois propriedades interessantes de  $\varphi$  são obtidas a partir da própria equação que o define.

Para calcular o quadrado de  $\varphi$  basta somar 1 unidade a ele mesmo. De fato, se  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ , então  $\varphi^2 = \varphi + 1$ .

Seu inverso é obtido, subtraindo-se 1 unidade dele mesmo. Vejamos: dividindo a equação que define  $\varphi$ , pelo próprio  $\varphi$  temos:  $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 : (\varphi) \Rightarrow \varphi - 1 - \frac{1}{\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ .

Este número, indicado pela letra grega  $\varphi$  (Fi), que representa a medida da extrema e média razão, é também chamado por muitos como “Número de Ouro”, “Razão Áurea” e “Seção Áurea”. Luca Pacioli (1445-1517), matemático italiano, escreveu, por volta de 1509, o livro chamado *Divina Proportione* (Divina Proporção) no qual tratava da extrema e média razão relacionando-a a diversas ilustrações como o Homem Vitruviano de Leonardo da Vinci.

Há duas expressões matemáticas que à primeira vista parecem impossíveis de serem calculadas sem que se tenha um conhecimento razoável de Cálculo. Mas, veremos que com um pouco de criatividade e depois de conhecer o número de ouro, um aluno da educação básica é capaz de resolver tranquilamente essas expressões.

**Exemplo 1)** Determinar o valor da expressão  $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$ , supondo

que representa um número real.

Solução: suponha que  $x$  é o valor que procuramos. Dessa forma:

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}} \text{ e } x > 0$$

Elevando-se ao quadrado os dois lados dessa equação temos:

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

Note que, como a segunda expressão do lado direito da equação continua indefinidamente, é, na verdade, igual ao  $x$  inicial. Portanto, obtemos a equação quadrática  $x^2 = 1 + x$  que é a mesma que define o valor de  $\varphi$ . Logo, nossa expressão infinita é de fato igual a  $\varphi$ .

**Exemplo 2)** Determinar o valor da expressão  $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$

Solução: este é um caso especial de fração conhecida como fração contínua, muito usada em Teoria dos Números. Como no caso anterior, vamos considerar que  $x$  é o valor que procuramos. Assim:

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} \text{ e } x > 0$$

Note que, como a fração é contínua se estende indefinidamente, o denominador do segundo termo do lado direito da equação, é, de fato, o próprio  $x$ . Portanto, podemos escrever a equação como  $x = 1 + \frac{1}{x}$ . Multiplicando-se a equação por  $x$ , temos:  $x^2 = x + 1$ , que novamente é a equação que define o  $\varphi$ . Portanto o resultado da expressão é  $\varphi$ .

### 5.3.3.

#### Divisão de um segmento em sua razão áurea

Utilizando régua e compasso é possível efetuar a construção de um segmento dividido em sua média e extrema e razão. Vejamos:

1º passo: Seja dado um segmento  $\overline{AB}$  qualquer, obtém-se seu ponto médio, colocando a ponta seca do compasso sobre uma das extremidades com uma abertura pouco maior que a metade do segmento, traça-se um arco de circunferência acima e um abaixo de  $\overline{AB}$ . Depois, com a ponta seca sobre a outra extremidade e mesma abertura traçam-se outros dois arcos de circunferência que intersectem os primeiros. O segmento que une os pontos de intersecção destes arcos cruza  $\overline{AB}$  em seu ponto médio.

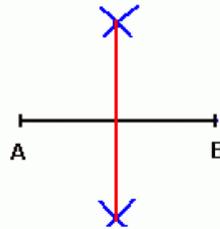


Figura 19 – Primeiro Passo da Divisão de um Segmento em Média e Extrema Razão

2º passo: Traça-se uma perpendicular a  $\overline{AB}$ , que contem B. E sobre ela, o segmento  $\overline{BC}$  com medida correspondente à metade de  $\overline{AB}$ . Para isso, coloca-se a ponta seca do compasso sobre B, com abertura de comprimento igual à distância entre B e o ponto médio, traça-se um arco, cuja intersecção com a perpendicular é o ponto C. Desta forma,  $\overline{BM} \equiv \overline{BC}$

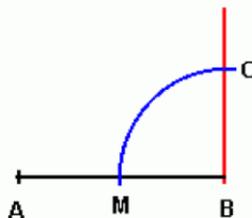


Figura 20 – Segundo Passo da Divisão de um Segmento em Média e Extrema Razão

3º passo: unindo os ponto A e C tem-se o triângulo ABC, reto em B.



Figura 21 – Terceiro Passo da Divisão de um Segmento em Média e Extrema Razão

4º passo: com a ponta seca do compasso em C e abertura igual ao comprimento de  $\overline{CB}$  traça-se o arco de circunferência e marca-se o ponto E de intersecção deste arco com  $\overline{AC}$ .

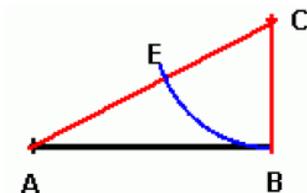


Figura 22 – Quarto Passo da Divisão de um Segmento em Média e Extrema Razão

5º passo: com a ponta seca em A e abertura correspondente ao comprimento de  $\overline{AE}$ , faz-se o arco de circunferência marcando o ponto D sobre  $\overline{AB}$ . Este ponto D, divide  $\overline{AB}$  em sua extrema e média razão.

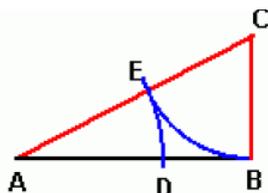


Figura 23 – Quinto Passo da Divisão de um Segmento em Média e Extrema Razão

Esta construção é validada a partir do seguinte argumento:

Seja  $a \in \mathbb{R}$  e  $a > 0$ , considerando  $\overline{AB} = a$ , por construção temos que  $\overline{BC} = \frac{a}{2}$ .

Como ABC é um triângulo retângulo, pelo teorema de Pitágoras temos que:

$$(\overline{AC})^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Também por construção temos que  $\overline{CE} = \frac{a}{2}$ , portanto

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{CE} = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2}$$

Logo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi$$

## 5.4.

### A sequência de Fibonacci e a Razão Áurea

Como talvez já se tenha percebido através do que foi apresentado até aqui, existe uma relação entre a sequência de Fibonacci e o número de ouro. Mas, vejamos detalhadamente algumas dessas relações.

Vimos que a sequência de Fibonacci pode ser escrita de forma recursiva por  $\begin{cases} f_1 = f_2 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$ . Considerando  $n$  suficientemente grande e tomando para cada  $n$ , a equação  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ , divide-se ambos os lados da igualdade por  $f_{n+1}$  tem-se:

$$\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = 1 + \frac{f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_n}{f_{n-1}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Como vimos no segundo exemplo do t3pico 5.3.2. (Determina33o da constante  $\varphi$ ) a fra33o cont3nua obtida acima converge para o valor de  $\varphi$ . Percebemos, portanto que o quociente entre um termo da sequ3ncia de Fibonacci e o termo imediatamente anterior, converge para o valor do n3mero de ouro. Vejamos:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{1}{1} = 1, \quad \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2} = 1,5, \quad \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3} = 1,\bar{6}, \quad \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5} = 1,6 \\ \frac{a_7}{a_6} &= \frac{13}{8} = 1,625, \quad \frac{a_8}{a_7} = \frac{21}{13} = 1,615384, \quad \frac{a_9}{a_8} = \frac{34}{21} = 1,619047 \\ \frac{a_{10}}{a_9} &= \frac{55}{34} = 1,617647 \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \varphi \end{aligned}$$

Note que se tomarmos os primeiros n3meros da sequ3ncia essa raz3o 3 um pouco diferente, mas 3 medida que se avança nos n3meros o valor da raz3o se aproxima muito de  $\varphi$ . 3 claro que n3o chegaremos com precis3o o valor de  $\varphi$  at3 porque o que estamos efetuando s3o divis3es entre n3meros inteiros o que resulta em um n3mero racional enquanto  $\varphi$  3 um n3mero irracional. O que vemos nessas sucessivas raz3es 3 uma aproxima33o.

Al3m disso, como vimos anteriormente, a f3rmula recursiva que permite que se encontre o valor de qualquer n3mero de Fibonacci,  $f_n$ , se seu lugar  $n$  na sequ3ncia for conhecido 3 a f3rmula de Binet. E esta, se apoia inteiramente na raz3o 3urea.

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Em princ3pio, esta f3rmula parece um tanto complicada por relacionar c3lculos com express3es irracionais, mas sabe-se que conduz aos n3meros de Fibonacci, que s3o n3meros inteiros. Note que a primeira express3o entre par3nteses 3  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi$  e que a segunda 3  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$ .

Mais um fato interessante que relaciona o n3mero de ouro 3 sequ3ncia de Fibonacci ocorre quando efetuam-se as pot3ncias de  $\varphi$ . Para isso, vamos utilizar da propriedade  $\varphi^2 = 1 + \varphi$ . Vejamos:

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= 1 + \varphi \\ \varphi^3 &= \varphi^2 \cdot \varphi = (1 + \varphi)\varphi = \varphi + \varphi^2 = \varphi + 1 + \varphi = 1 + 2\varphi \\ \varphi^4 &= \varphi^3 \cdot \varphi = (1 + 2\varphi)\varphi = \varphi + 2\varphi^2 = \varphi + 2(1 + \varphi) = 2 + 3\varphi \\ \varphi^5 &= \varphi^4 \cdot \varphi = (2 + 3\varphi)\varphi = 2\varphi + 3\varphi^2 = 2\varphi + 3(1 + \varphi) = 3 + 5\varphi \\ \varphi^6 &= \varphi^5 \cdot \varphi = (3 + 5\varphi)\varphi = 3\varphi + 5\varphi^2 = 3\varphi + 5(1 + \varphi) = 5 + 8\varphi \\ \varphi^7 &= \varphi^6 \cdot \varphi = (5 + 8\varphi)\varphi = 5\varphi + 8\varphi^2 = 5\varphi + 8(1 + \varphi) = 8 + 13\varphi \\ &\vdots \\ \varphi^n &= f_{n-1} + f_n \varphi, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \end{aligned}$$

O que nos leva 3 seguinte proposi33o:

**Proposição:** Para qualquer número natural  $n$ ,  $n \geq 2$ , vale a igualdade

$$\varphi^n = f_{n-1} + f_n \varphi,$$

onde  $f_i, i \in \mathbb{N}$  são os números de Fibonacci.

**Demonstração:** Usando a indução matemática sobre  $n$  temos:

(i) Para  $n = 2$ , observamos que:

$\varphi^2 = 1 + \varphi = f_1 + f_2 \varphi$ , sendo portanto verdadeira a igualdade.

(ii) Supondo que  $\varphi^n = f_{n-1} + f_n \varphi$  é válido para  $n = k$ , verifiquemos se também tem validade para  $n = k + 1$ . Como:

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k \varphi$$

segue, pela hipótese de indução:

$$\begin{aligned} \varphi^{k+1} &= (f_{k-1} + f_k \varphi) \varphi = \varphi f_{k-1} + \varphi^2 f_k = \varphi f_{k-1} + (1 + \varphi) f_k = \varphi f_{k-1} + f_k + \varphi f_k = \\ &= f_k + (f_{k-1} + f_k) \varphi = f_k + f_{k+1} \varphi \blacksquare \end{aligned}$$

### 5.4.1.

#### O triângulo áureo

Um triângulo é classificado como isósceles, quando possui dois lados congruentes e, conseqüentemente, dois ângulos congruentes.

Num triângulo isósceles cujo ângulo do vértice oposto à base tem medida  $36^\circ$ , a bissetriz interna de um dos ângulos da base divide o lado oposto em média e extrema razão.

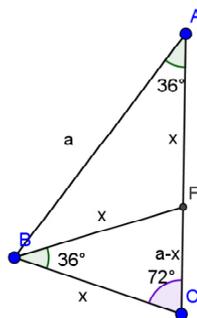


Figura 24 – Triângulo Áureo

**Demonstração:** No triângulo acima, temos que  $\overline{BF}$  é bissetriz de  $\widehat{ABC}$ , então:

$$\overline{AB} = \overline{AC} = a \text{ (ABC é isósceles de base BC)}$$

$$\overline{BC} = \overline{BF} = \overline{AF} = x \text{ (FBC e ABF são isósceles)}$$

$$\overline{FC} = \overline{AC} - \overline{AF} = a - x$$

Como os triângulos ABC e BCF são semelhantes, temos que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x} \Rightarrow x^2 = a^2 - ax \Rightarrow a^2 - ax - x^2 = 0$$

Resolvendo a equação na incógnita  $a$ , temos:

$$a' = \frac{x(1 + \sqrt{5})}{2}$$

$$a'' = \frac{x(1 - \sqrt{5})}{2}$$

Como  $a'' < 0$  não é considerado visto que  $a$  refere-se à medida do lado do triângulo.

Portanto:

$$\frac{a}{x} = \frac{\frac{x(1+\sqrt{5})}{2}}{x} = \frac{(1 + \sqrt{5})}{2} = \varphi \blacksquare$$

Este triângulo é chamado de *triângulo áureo*. Seguindo-se o mesmo procedimento no triângulo menor, depois sobre o outro triângulo que será obtido, e assim sucessivamente podemos construir vários triângulos semelhantes ao primeiro. Portanto, todos são triângulos áureos.

A partir deste triângulo, é possível construir outras figuras geométricas, como o decágono regular e o pentágono regular.

Com centro do compasso em A traça-se a circunferência de raio AB. Visto que o ângulo central é de  $36^\circ$ , ao longo da circunferência marcam-se os pontos D, E, F, G, H, I, J e L, com o auxílio de um compasso, de forma que  $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \dots = \overline{LB}$ . Com estes segmentos temos o decágono regular.

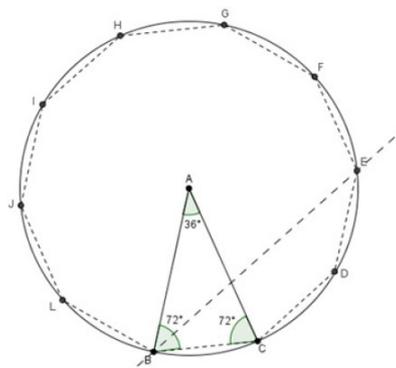


Figura 25 – Decágono Regular

Da mesma maneira, podemos também construir um pentágono. A partir do ponto B, tomando os pontos de modo intercalado, construímos os segmentos  $\overline{BD} = \overline{DF} = \overline{FH} = \overline{HJ} = \overline{JB}$ , obtendo assim, o pentágono regular.

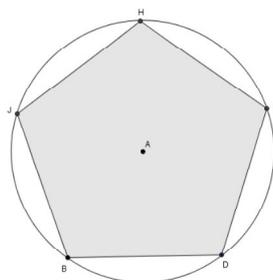


Figura 26 – Pentágono Regular

O pentágono regular era, para os pitagóricos, uma figura importantíssima, visto que suas diagonais dão origem ao pentagrama, símbolo da escola fundada por eles.

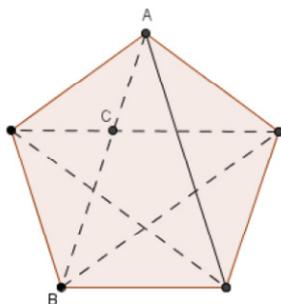


Figura 27 – Pentagrama

Observe que cada diagonal é cortada por outra (como ocorre no ponto C da figura acima) de forma que os segmentos formados estão em média e extrema razão. A demonstração é parecida com a que fizemos anteriormente no triângulo áureo. Veja ainda que as interseções entre as diagonais formam os vértices de outro pentágono regular, podendo, portanto serem formados novos pentagramas em seu interior.

#### 5.4.2.

#### O retângulo áureo

O retângulo cuja construção é feita considerando-se que as medidas do comprimento e da largura estão na razão áurea é chamado *Retângulo Áureo*.

A construção deste retângulo pode ser feita a partir da construção de um quadrado  $ABCD$  de lado  $a$ . Tomando-se o ponto médio  $M$  do lado  $\overline{AD}$  e unindo-o ao vértice  $C$ , temos que o segmento  $\overline{MC}$ , pelo Teorema de Pitágoras tem medida igual a  $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ . Traçando-se o arco de centro em  $M$  e raio  $\overline{MC}$  e marcando-se seu ponto ( $E$ ) de interseção com a reta que contém  $\overline{AD}$ , teremos o lado maior do retângulo ( $\overline{AE}$ ), cuja medida corresponde a  $\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$ .

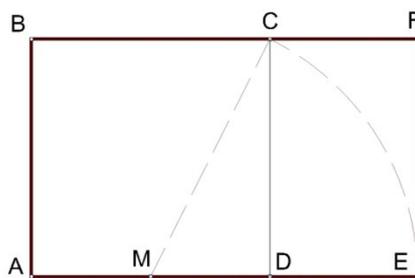


Figura 28 – Retângulo Áureo

De fato:

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}}{a} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = \varphi$$

É interessante observar que o retângulo  $CDEF$ , da figura também é um retângulo áureo. Vejamos:

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE} - \overline{AD}} = \frac{a}{\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} - a} = \frac{a}{\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$$

A construção de retângulos a partir de um retângulo áureo adicionando-se quadrados resulta em novos retângulos áureos, veja:

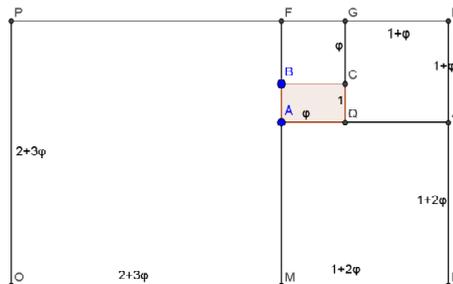


Figura 29 – Sequência de Retângulos Áureos

Observe que de fato, os retângulos  $ADGF$ ,  $AFHJ$ ,  $FHLM$  e  $HLOP$  são retângulos áureos. Basta efetuarmos as razões entre comprimento de largura de cada um deles.

$$ADGF \frac{1+\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{\varphi} = \varphi, AFHJ \frac{1+2\varphi}{1+\varphi} = \frac{\varphi^3}{\varphi^2} = \varphi, FHLM \frac{2+3\varphi}{1+2\varphi} = \frac{\varphi^4}{\varphi^3} = \varphi$$

Note que as medidas dos lados dos retângulos obtidos vão aumentando conforme as potências de  $\varphi$  que, como vimos, estão relacionadas à sequência de Fibonacci. Observe ainda, que todos os retângulos obtidos são semelhantes, o que ficou bem claro visto que a razão de semelhança entre lados correspondentes do maior para o menor é igual a  $\varphi$ .

É muito comum encontrarmos o desenho da espiral logarítmica, feito a partir dessa construção de sucessivos retângulos áureos e quadrados como o desenho anterior.

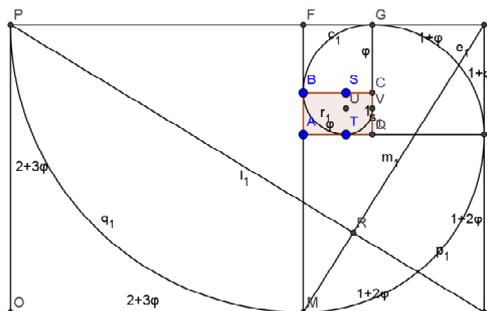


Figura 30 – Espiral Logarítmica Construída a Partir do Retângulo Áureo

A espiral logarítmica também pode ser obtida através do triângulo áureo, que como vimos anteriormente, bissectando-se um ângulo da base obtém-se um triângulo áureo menor. Continuando este processo infinitamente gera-se uma série de triângulos. Ligando os vértices de um triângulo áureo progressivamente, obteremos uma espiral logarítmica.

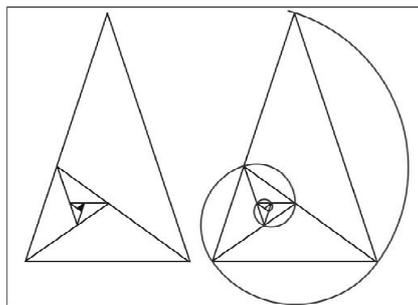


Figura 31 – Espiral Logarítmica Construída a Partir do Triângulo Áureo

## 5.5.

### Os padrões dos números de Fibonacci e a natureza

As folhas ao longo dos galhos de uma planta ou os talos ao longo de um galho tendem a crescer em posições que otimizariam sua exposição ao sol, à chuva e ao ar. À medida que um talo vertical cresce, ele produz folhas em pontos com espaçamento bem regular. No entanto, as folhas não crescem diretamente uma sobre a outra, pois isso iria impedir que as folhas inferiores recebessem a umidade e a luz do sol de que necessitam. Em vez disso, a passagem de uma folha para a seguinte (ou de um talo para o seguinte ao longo de um ramo) é caracterizada por espaçamentos em espiral em torno do ramo. Arranjos semelhantes de unidades que se repetem podem ser encontrados nas camadas de uma pinha ou nas sementes de um girassol. Esse fenômeno é chamado *phyllotaxis* (em grego, significa arranjo de folhas), termo usado pelo naturalista suíço Charles Bonnet em 1754.

Por exemplo, nas tília americanas, as folhas aparecem geralmente em dois lados opostos o que é conhecido como razão filotáxica  $1/2$ . Em outras plantas como a aveleira, a amoreira e a faia, a passagem de uma folha para a seguinte envolve um terço de uma volta (razão filotáxica  $1/3$ ). De modo semelhante, a macieira, o carvalho e o damasqueiro têm folhas a cada  $2/5$  de uma volta, e a pereira e o salgueiro-chorão têm folhas a cada  $3/8$  de uma volta. Note que essas frações são razões de membros alternados da sequência de Fibonacci.

O livro *Razão Áurea*, no capítulo intitulado “Filho de boa natureza”, no qual são consideradas diversas situações da natureza onde é possível perceber a presença de números da sequência de Fibonacci bem como sua relação com o número de ouro, nos traz a seguinte consideração:

O fato de que as folhas das plantas seguem certos padrões foi observado pela primeira vez na antiguidade por Teofrasto (372 a.C.-287 a.C.) em *Investigação sobre plantas*. Ele comenta: “aquelas que têm folhas planas as têm em séries regulares”. O estudo na filotaxia não foi muito além dessas observações até o século XV, quando Leonardo da Vinci (1452-1519) acrescentou um elemento quantitativo à descrição de arranjos de folhas, ao notar que estas se distribuíam em padrões espirais com ciclos de cinco (correspondendo a um ângulo de  $\frac{2}{5}$  por volta). A primeira pessoa a descobrir, mesmo que intuitivamente, a relação entre a

filotaxia e os números de Fibonacci foi o astrônomo Joannes Kepler. Escreveu Kepler: “É na similaridade dessa série autodeterminada (referindo-se à propriedade recursiva da sequência de Fibonacci) que a faculdade da propagação, na minha opinião, é formada. E assim, numa flor, a autêntica bandeira dessa faculdade é exibida, o pentágono.” (LIVIO, p. 129)

Ainda falando a respeito da filotaxia e as diversas descobertas desta área da botânica onde a matemática encontra-se tão presente Mario Livio acrescenta:

A história da filotaxia verdadeiramente matemática (em vez de puramente descritiva) começa no século XIX com os trabalhos do botânico Karl Friedric Schimper (publicado em 1830), de seu amigo Alexander Braun (publicado em 1835) e do cristalógrafo Auguste Bravais e seu irmão, o botânico Louis (publicado em 1837). Estes pesquisadores descobriram a regra geral de que os quocientes filotáticos poderiam ser expressos por razões de termos da sequência de Fibonacci (como 2/5 e 3/8) e também notaram a aparição de número de Fibonacci consecutivos nos *parastichies* de pinhas e abacaxis. (LIVIO, p. 121)



Figura 32 – Pinha e Abacaxi – Presença de Números de Fibonacci

O crescimento das plantas ocorre na ponta do caule (chamada meristema) que tem formato tipicamente cônico. As folhas que estão mais abaixo tendem a se localizar radialmente mais afastadas do centro do tronco quando visto de cima. O botânico Arthur Herbert Church, no livro *On the Relation of Phyllotaxis to Mechanical Laws* (sobre a relação entre a filotaxia e as leis da mecânica), foi o primeiro a enfatizar a importância desse tipo de representação para a compreensão da filotaxia. A quantidade importante que caracteriza a localização das folhas é o ângulo entre as linhas que ligam o centro do caule às folhas sucessivas. Uma das descobertas dos irmãos Bravais em 1837 foi que novas folhas avançam praticamente no mesmo ângulo em volta do círculo (conhecido como ângulo de divergência) que em geral é próximo de 137,5 graus. O interessante é que este ângulo tem uma relação com a razão áurea. O ângulo que divide uma volta completa na razão áurea é  $\frac{360^\circ}{\varphi}$  que é aproximadamente 222,5 graus. Como este valor corresponde a mais da metade de um círculo (180 graus), é comum subtrair 222,5 de 360, o que resulta em um ângulo observado de 137,5 graus (às vezes chamado de *Ângulo Áureo*).



Figura 33 – Organização em Espiral das Folhas de Um Cacto Aloe polyphylla

Em 1907, o matemático alemão Gerrit van Iterson mostrou que, se considerarmos pontos consecutivos separados por 137,5 graus em espirais firmemente enroladas, nossa vista iria perceber uma família de espirais girando no sentido horário e uma no anti-horário. Os números de espirais nas duas famílias tendem a ser números consecutivos de Fibonacci.

Uma exibição dessas espirais cruzadas é dado pelo arranjo dos flósculos nos girassóis. A quantidade dessas espirais em geral depende do tamanho do girassol. O mais comum é que existam 34 espirais em um sentido e 55 no outro, mas com quocientes de números de espirais de  $89/55$  ou  $144/89$  já foram vistos. Todos estes são razões de números de Fibonacci consecutivos.



Figura 34 – Espirais Observadas no Girassol

A contagem e o arranjo de pétalas de algumas flores também apresentam números de Fibonacci e ligações com a Razão Áurea. A maioria de margaridas do campo, por exemplo, tem 13, 21 ou 34 pétalas. Além disso, há flores cuja forma é muito próxima de um pentágono regular, que também está, como visto anteriormente, relacionado ao número de ouro.



Figura 35 – Flor de Calabaza e Flor Campanilla China

Muitas são, ainda as conjecturas a respeito da presença da razão áurea em construções, obras de arte, bem como da espiral logarítmica visualizada no universo, ou na concha do caramujo náutilus. Mas, algumas delas estão, na realidade, mais relacionadas à simetrias e fractais por este motivo não foram tratadas neste trabalho.

## GEOMETRIA FRACTAL

A geometria euclidiana apresenta os fundamentos sobre os quais são construídos muitos dos conceitos matemáticos estudados e aplicados em diversas situações. Quando vemos construções humanas com as mais variadas formas arquitetônicas, todas podem ser representadas e estudadas por suas características geométricas a partir dos postulados descritos nos livros *Os Elementos*, de Euclides. Vale lembrar que foram escritos no século III a.C. e que até hoje, os conceitos abordados têm muitas aplicações nas mais diversas áreas, desde construções simples até o desenvolvimento tecnológico que vivemos em nossa era.

Conta-se uma história que Euclides, enquanto caminhava pela praia, notou que a areia vista como um todo parecia uma superfície contínua e uniforme, mesmo que fosse composta por pequenas partes visíveis. Desde esta situação, ele tentava provar que todas as formas da natureza poderiam ser reduzidas a formas geométricas simples, sendo possível portanto, estudá-las matematicamente sem grandes dificuldades. De fato, isso é válido para diversas situações, como por exemplo, a elipse representando uma boa aproximação para a trajetória descrita pelos planetas que orbitam o sol, bem como o comportamento dos elétrons de átomo. Também mostra-se eficiente o uso de uma esfera para representação próxima ao formato do planeta Terra.

Galileu Galilei, no século XVII, disse que a matemática era linguagem da natureza e o seu alfabeto eram círculos, triângulos e demais figuras geométricas euclidianas. Entretanto, se analisarmos com frieza, muitas formas naturais não podem ser reduzidas a conceitos e formas geométricas simples.

Nuvens, árvores ou uma couve-flor não podem ser representadas tão simplesmente através de círculos, segmentos de retas ou triângulos. Em 1975, o matemático polonês, naturalizado americano Benoit Mandelbrot escreveu em seu livro *Geometry of the Nature*, a seguinte frase: “nuvens não são esferas, montanhas não são cones, os litorais não são círculos, a casca das árvores não é lisa e tampouco a luz viaja em linha reta”.

Por muitos anos, o estudo e análise de objetos que fugissem dos padrões da geometria euclidiana não era muito comum. No final do século XIX e início do século XX, alguns matemáticos criaram objetos que ficaram conhecidos como “monstros matemáticos”, como por exemplo, a curva de Peano, o triângulo de Sierpinski, a curva de Von Koch, o conjunto de Julia, o conjunto de Cantor, e vários outros. Estes objetos são, hoje, conhecidos como *Fractais*, e estudados pela *Geometria Fractal*.

## 6.1.

### De monstros matemáticos a aplicações na Geometria Fractal

A história do surgimento da geometria fractal está diretamente relacionada à história de seu criador, o matemático Benoit Mandelbrot. Ele, que sempre teve uma visão aguçada da geometria, não estava muito satisfeito com as abordagens algébricas que estavam sendo feitas com a geometria na primeira metade do século XX, promovida, principalmente por Bourbaki na França, onde Mandelbrot morava. Ele então muda-se para os Estados Unidos em 1948 para trabalhar no instituto de pesquisa James Watson da IBM.

Ao longo de seus estudos, lidou com várias questões que, em princípio, nada tinham em comum ou em nada se referia à geometria, como era o caso da análise das enchentes do rio Nilo, as cotações da bolsa de valores e outros. Um dos problemas mais conhecidos que Mandelbrot tentou solucionar começa com a pergunta “Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?”. Conta-se que a sua resposta dizia respeito à possível variação de valores obtidos conforme a escala de medição utilizada. Por exemplo, se a base de medição for o metro as saliências menores que este valor não serão aferidas.

Um outro problema estudado por Mandelbrot, já dentro da IBM, foram os erros de transmissão de dados. Um ruído aparecia quando, através de linhas telefônicas, tentava-se enviar informações de um computador a outro. Os engenheiros especializados no assunto tentavam eliminar os ruídos, enquanto Mandelbrot percebeu que eram inevitáveis e, portanto, decidiu estudá-los. Concluiu que os erros no som chegavam em blocos, que por sua vez ao serem ampliados revelavam outros blocos menores em sua estrutura intercalada pelos dados da transmissão. Desta forma, os erros foram tratados semelhantemente ao conjunto de Cantor. Conseguiu com isso, fazer com que a comunicação ficasse mais viável já que programou os computadores de forma que os receptores conseguissem diferenciar as informações transmitidas dos ruídos indesejáveis.

Mas do que se trata o *conjunto de Cantor*? Desenvolvido pelo matemático russo George Cantor (1845-1918), que ficou conhecido por elaborar uma teoria dos conjuntos, o conjunto (ou como também é conhecido, poeira) de Cantor é um subconjunto infinito de pontos no intervalo unitário  $[0,1]$ . Consideremos como figura inicial, o intervalo fechado  $I_0 = [0,1]$ , dividindo-o em três partes iguais e desprezando-se o terço central, ficamos com a união disjunta de dois intervalos fechados  $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$  de comprimento  $\frac{1}{3}$  cada. Aplicando este processo aos intervalos  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  e  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , isto é, dividindo-se cada um deles em três partes iguais e desprezando-se o terço central, obtém-se  $I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$  com 4 intervalos congruentes de comprimento  $\frac{1}{9}$  cada. Continuando

o processo para cada intervalo obtido, tem-se 8 intervalos de comprimento igual a  $\frac{1}{27}$ . Repetindo-se iterativamente este processo obtém-se  $I_n$  que será constituído pela união disjunta de  $2^n$  intervalos iguais de comprimento igual a  $\frac{1}{3^n}$ .

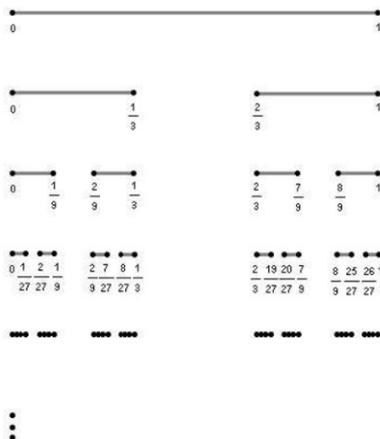


Figura 36 – Conjunto de Cantor

A partir desta situação, Mandelbrot dedicou-se a estudar estas figuras vistas até então, como monstros matemáticos. Reuniu muitos de seus trabalhos e os direcionou para o que atualmente se conhece como *Geometria Fractal*. Fractal é uma palavra que vem do latim *fractus* cujo significado é *quebrado, fracionado, fragmentado*. O termo parece ilustrar bem as irregularidades provenientes das figuras fractais, além disso, remete à ideia de partição ordenada através das escalas.

## 6.2.

### Características dos Fractais

A definição de Fractal é um problema ainda em aberto na matemática, mas nas palavras de Mandelbrot, isso não é um problema: “Será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objeto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que o tal formalismo seria prematuro, adotei (...) um método baseado numa caracterização aberta e intuitiva, onde os avanços se efetuam por retoques sucessivos.”

De forma objetiva, um fractal é definido por três características, que são autossimilaridade, complexidade infinita ou iteração e a dimensão.

#### 6.2.1.

##### Autossimilaridade

Esta é a característica fundamental dos fractais. Tomando-se uma parte da figura e fazendo-se algumas ampliações, ela se parece com a figura toda. Significa que os padrões

característicos da figura, são encontrados igualmente (ou semelhante) em qualquer parte dela, com escalas diferentes.

Existem dois tipos de autossimilaridade: *a exata e a estatística*.

Na *autossimilaridade exata*, as partes são cópias exatas do todo apenas vistas em escalas diferentes. Este caso só existe em figuras geradas por processos matemáticos em que o conjunto total é formado por pequenas réplicas perfeitas delas mesmas, ou seja é formado por um processo iterativo, como é o caso do triângulo e do tapete de Sierpinski e do floco de Koch. Vejamos:

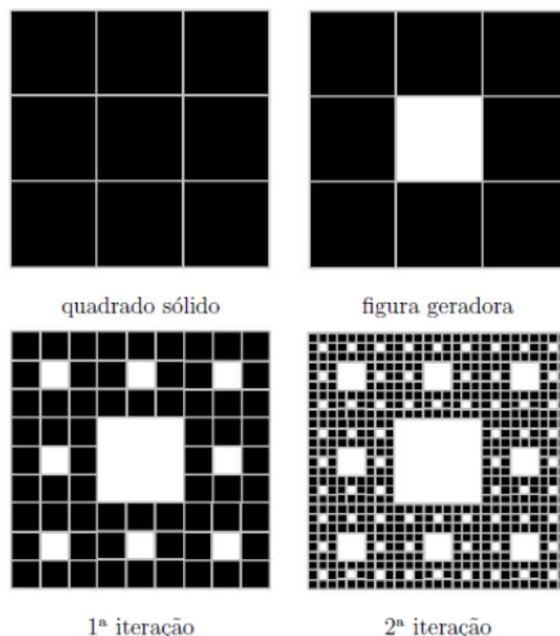


Figura 37 – Sequência de Construção do Tapete de Sierpinski

Observe que a figura geradora do tapete de Sierpinski lembra o exemplo que trabalhamos analisando Progressões Aritméticas. Porém o processo de construção do tapete difere da sequência de azulejos brancos e pretos já que, neste caso, não são acrescentados novos quadrados iguais a uma razão aritmética. O que ocorre aqui é uma subdivisão dos quadrados pretos o que nos leva a uma progressão geométrica.

Por exemplo, para determinar a quantidade de quadrados pretos em determinada etapa ( $n$ ) da construção do tapete podemos trabalhar com conceitos relacionados à P.G. visto que na figura inicial temos 1 quadrado preto. Na segunda figura (figura geradora) temos 8, na terceira são 64, isto é temos a P.G.  $(a_n)$  na qual  $a_1 = 1$  e  $q = 8$ , portanto seu termo geral é dado por  $a_n = 1 \cdot 8^{n-1} = 8^{n-1}$ . Já para determinar a quantidade de quadrados brancos temos a recorrência 
$$\begin{cases} b_{n+1} = 8b_n + 1 \\ b_1 = 0 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

A iteração é o processo de repetir consecutivamente o mesmo procedimento diversas vezes. No caso do tapete de Sierpinski temos um quadrado inicial que foi dividido em 9 quadrados iguais, do qual retira-se o quadrado central obtendo-se a figura

geradora. A primeira iteração ocorre quando se divide em 9 quadradinhos cada quadrado preenchido da figura geradora e retira-se o quadradinho central. A segunda iteração consiste em fazer o mesmo processo em cada novo quadradinho preenchido obtido na primeira iteração. Este processo vai sendo repetido (iterado) obtendo-se uma figura limite, a qual chamamos de tapete de Sierpinski.

Na *autossimilaridade estatística* o objeto ampliado várias vezes não será igual ao inicial, será apenas semelhante. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas (em média) que são preservadas.

O que existe nas figuras da natureza é uma autossimilaridade aproximada em diferentes escalas, isto é, autossimilaridade existe em média. Vejamos alguns exemplos naturais:



Figura 38 – Autossimilaridade Observada em Uma Folha

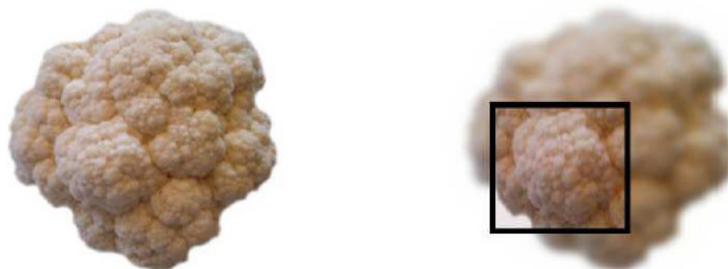


Figura 39 – Couve-flor e Réplica Observada Numa Porção da Mesma

No caso, por exemplo, da folha da planta acima, podemos descrevê-la como sendo um ramo principal e os ramos que partem dele. Mas, se olharmos para um desses ramos menores, podemos descrevê-lo da mesma forma, ou seja, ramos ainda menores que partem do anterior. Neste caso, não é possível prosseguir indefinidamente como foi descrito no tapete de Sierpinski. Porém, é possível usar dos fractais como modelos para formas da natureza.

## 6.2.2.

### Complexidade Infinita ou Iteração

Esta característica dos fractais está relacionada ao processo recursivo de construção dos fractais. Isto é, a repetição contínua de um procedimento resultando em uma estrutura complexa.

Quando tratamos de processos iterativos em Geometria Fractal, as iterações são classificadas em dois tipos: *geométrica* e *algébrica*.

Na *iteração geométrica* uma regra é aplicada em uma figura geométrica ou em alguma parte específica dela. Normalmente, a regra propõe um fracionamento da figura e nessas fragmentações a regra é aplicada indefinidamente. Um exemplo disso, é o fractal chamado de Floco de Neve de Koch.

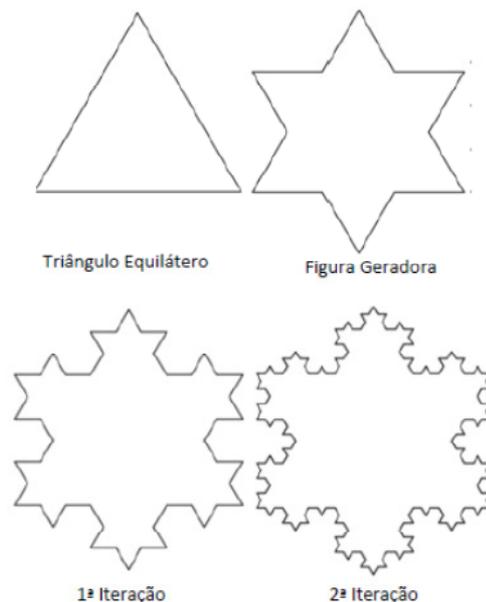


Figura 40 – Sequência da Construção do Floco de Neve de Koch

No caso acima, tem-se inicialmente um triângulo equilátero. Cada lado deste triângulo é dividido em três partes iguais e retira-se o terço do meio. Sobre a parte central constrói-se um triângulo equilátero sem a base cuja medida do lado corresponde a  $\frac{1}{3}$  do lado do triângulo original, obtendo-se a figura geradora. A primeira iteração ocorre quando se efetua este procedimento sobre cada segmento da figura geradora. E assim sucessivamente sobre as novas figuras obtidas gerando a figura limite conhecida como floco de neve de Koch.

Com a ajuda de computadores as iterações geométricas simples podem ser aplicadas milhares de vezes em diferentes escalas para produzir os chamados *forjamentos* fractais que são modelos, gerados por computador, de plantas, montanhas, linhas litorâneas e tudo que manifeste uma semelhança com formas reais vistas na natureza.

Na *iteração algébrica* a rotina, isto é, o processo de repetir a regra de construção do fractal, ocorre utilizando-se uma equação algébrica como unidade processadora, atribuindo-se um valor inicial para  $x_0$  e encontrando-se um valor para  $x_1$ . Em seguida usa-se o valor de  $x_1$  no lugar de  $x_0$  e obtém-se  $x_2$ . A partir daí essa rotina continua encontrando-se  $x_3$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  e assim sucessivamente.

Uma aplicação bem prática para esta forma de iteração é seu uso na Biologia no modelo de Verhulst para o crescimento populacional. Este modelo toma a equação  $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$  para prever a quantidade de indivíduos de uma espécie em períodos de um ano. Nesta equação qual  $r$  é uma constante ajustável que representa os fatores que interferem no crescimento da população. A iteração ocorre tomando-se valores entre 0 e 1 para  $x_n$  e fixando-se o valor de  $r$ , considerando que zero é a extinção e 1 representa a população máxima.

Fixando-se o parâmetro  $r$ , após algumas iterações, o valor de  $x_n$  converge para um número. Porém, aumentando-se o valor de  $r$  a iteração bifurca, ou seja, tende a se estabilizar em dois valores distintos. Outra bifurcação ocorre ao se aumentar um pouco mais o valor de  $r$ .

Dessa maneira, conforme o parâmetro  $r$  é aumentado, o número de pontos em que a rotina se estabiliza também tende a dobrar formando novas bifurcações. São tantas que rapidamente elas tendem para o infinito e tornam-se caóticas. Fazendo o gráfico parâmetro  $r$  versus população, são observadas pequenas “janelas de ordem” que se assemelham a todo o gráfico num padrão de autossimilaridade.

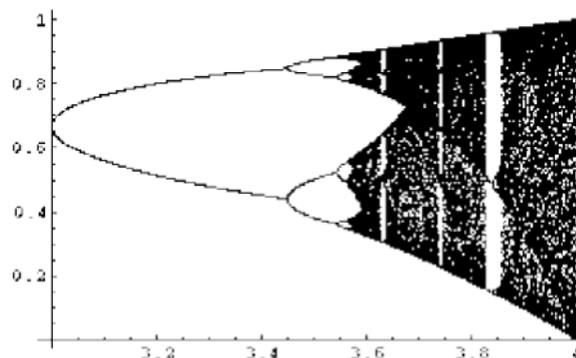


Figura 41 - parâmetro  $r$  versus população

### 6.2.3.

#### Dimensão

Na geometria euclidiana a dimensão está relacionada ao espaço no qual o objeto está inserido e indica como medir o objeto. Dessa forma, um ponto tem dimensão zero, uma reta tem dimensão 1, uma figura plana tem dimensão 2 e o espaço em que vivemos tem dimensão 3.

Já na Geometria Fractal, a dimensão está associada à aspereza, espessura, densidade, textura do objeto. É expressa, em geral, por um valor não inteiro e esta relacionada com sua estrutura, seu comportamento e seu grau de irregularidade. Aqui, a dimensão é considerada a partir de conceitos topológicos. Na Topologia, linhas retas podem ser manipuladas em curvas, círculos em triângulos, uma folha plana de papel é equivalente a outra folha amarrotada.

Se considerarmos um segmento de reta podemos dividi-lo em 2 partes iguais que são autossemelhantes, de igual modo, podemos dividir um quadrado em 4 ( $2^2$ ) outros quadrados autossemelhantes assim como também podemos dividir um cubo em 8 ( $2^3$ ) cubos menores idênticos de forma que cada um deles seja semelhante ao maior. Se iniciarmos dividindo o segmento de reta em 3 partes iguais, cada parte é autossemelhante ao segmento inicial, neste caso o quadrado seria dividido em 9 ( $3^2$ ) partes iguais e o cubo em 27 ( $3^3$ ) partes. Observando o expoente das subdivisões, vemos que ele representa a dimensão euclidiana da forma que esta sendo estudada.

Chamando de  $m$  o número de cópias de si mesmo e  $n$  o valor que cada cópia precisa ser ampliada para voltar a ter o tamanho original, pode-se obter a seguinte expressão para calcular a dimensão  $d$ :

$$m = n^d$$

Aplicando logaritmo nos dois lados da equação, temos:

$$\log m = \log n^d$$

$$\log m = d \log n$$

$$d = \frac{\log m}{\log n}$$

Assim, através desta relação, um segmento de reta que foi dividido em duas partes iguais (duas cópias de si mesmo) e que precisa ser ampliado duas vezes para voltar ao tamanho original tem dimensão dada por  $d = \frac{\log 2}{\log 2} = 1$ . Aplicando a mesma ideia para o quadrado dividido em 4 partes e para o cubo dividido em 8 partes temos:

$$d_{\text{quadrado}} = \frac{\log 4}{\log 2} = 2 \text{ e } d_{\text{cubo}} = \frac{\log 8}{\log 2} = 3$$

Agora, aplicando esta expressão para fractais, por exemplo na curva de Koch, onde divide-se uma linha em três partes iguais, despreza-se a parte central e sobre esta parte constrói-se um triângulo equilátero sem a base obtendo assim a figura:

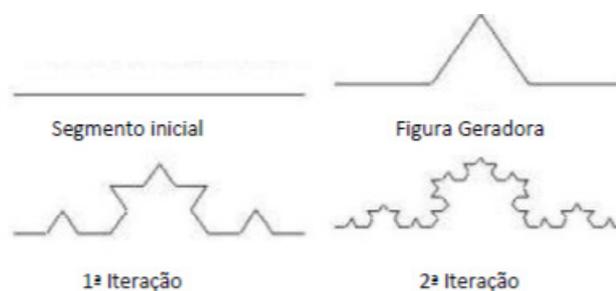


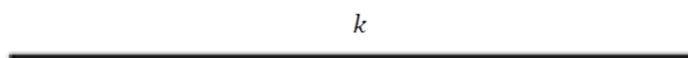
Figura 42 – Construção Geométrica da Curva de Koch

Neste caso, observe que a figura geradora possui 4 ( $m = 4$ ) partes iguais e cada parte deve ser ampliada 3 ( $n = 3$ ) vezes para ao tamanho original, portanto  $d_{\text{Koch}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26 \dots$ . Neste caso, vemos que a curva é mais que uma linha (dimensão 1), mas

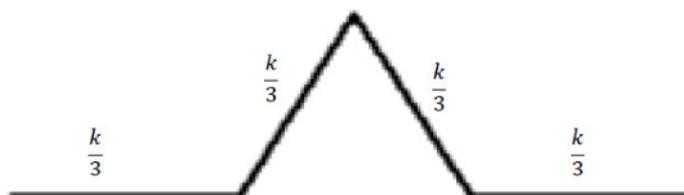
não chega a preencher uma porção do plano (dimensão 2). De igual forma, a dimensão da poeira de Cantor é obtida fazendo-se  $\frac{\log 2}{\log 3} = 0,63 \dots$  que é mais que um ponto (dimensão 0) e menos que uma linha (dimensão 1).

É interessante observar que tanto para se efetuar as iterações como para se definir a dimensão de um fractal, utilizam-se conceitos relacionados às progressões geométricas.

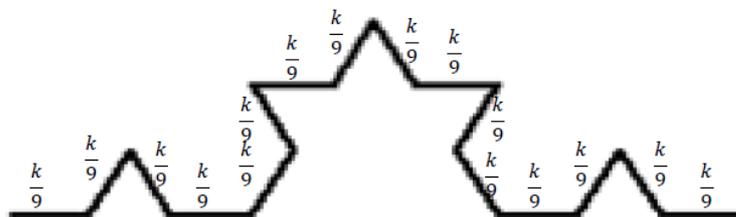
Voltemos à curva de Koch. Se quisermos calcular o comprimento de uma das figuras formadas na  $n$ -ésima iteração a partir de um segmento com  $k$  unidades de comprimento, podemos considerar a situação da seguinte maneira:



O comprimento inicial é  $a_1 = k$



Na segunda figura o comprimento é  $a_2 = 4 \cdot \frac{k}{3} = k \cdot \frac{4}{3} = k \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1 = a_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{2-1}$



Na terceira figura o comprimento é  $a_3 = 16 \cdot \frac{k}{9} = k \cdot \frac{16}{9} = k \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 = a_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3-1}$

Observe que a sequência formada pelos números que expressam os comprimentos das figuras é uma progressão geométrica na qual o primeiro termo é  $k$  e a razão é  $\frac{4}{3}$ .

A mesma linha de raciocínio pode ser aplicada para a poeira de Cantor, o Floco de Neve de Koch, o tapete de Sierpinski e outros fractais. Inclusive em situações da natureza que de alguma maneira sejam modeladas matematicamente através da Geometria Fractal.

Quando considera-se parte do floco de neve ou a curva de Koch, tem-se uma curva que pode ser útil, por exemplo, para responder a pergunta inicial apresentada a Mandelbrot “Quanto mede o litoral da Grã-Bretanha?”, pois uma construção desse tipo apresenta certa semelhança com o contorno de um litoral. Mas, segundo o próprio Mandelbrot a pergunta não está bem formulada, pois deveria ser “Qual a dimensão fractal do litoral da Grã-Bretanha?”.

### 6.3.

#### Alguns fractais clássicos

Neste trabalho já foram apresentados algumas das construções fractais mais clássicas, como a poeira de Cantor, a curva e o floco de neve de Koch e o tapete de Sierpinski. São figuras que até o início do século XX eram consideradas monstros da matemática, visto sua complexidade mediante os conceitos da Geometria Euclidiana. Vejamos a seguir um breve resumo e algumas imagens de dois conjuntos de fractais de grande importância:

#### 6.3.1.

#### Os conjuntos de Julia

Os fractais conhecidos como conjuntos de Julia, surgiram a partir de vários estudos sobre os processos iterativos e foram apresentados em 1918 por Gaston Julia e Pierre Fatou, dois matemáticos franceses, sendo que Fatou recebeu também o posto de astrônomo no Observatório de Paris.

É importante lembrar que os estudos feitos por estes matemáticos não contavam com o auxílio de programas computacionais o que certamente os levaria a um desenvolvimento mais completo dos processos de iteração.

Os estudos estão baseados em analisar o comportamento de funções iterativas no universo dos números complexos. Considerando a função  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , na qual  $c$  é um ponto fixo do plano complexo. Para cada ponto  $z_0$  a função é iterada gerando uma sequência numérica com números complexos (órbita de  $z_0$ ).

$$z_0 \rightarrow z_1 = z_0^2 + c \rightarrow z_2 = z_1^2 + c \rightarrow \dots$$

Neste caso, se a órbita de  $z_0$  tende para um círculo em torno da origem, então  $z_0$  é um ponto de algum conjunto de Julia e diz-se que  $z_0$  é *ponto prisioneiro* e o conjunto de todos estes pontos forma o conjunto prisioneiro de  $c$ . Porém se a órbita tende para o infinito,  $z_0$  não pertence ao conjunto de Julia e diz-se que  $z_0$  é *ponto de escape* e o conjunto de todos estes pontos forma o conjunto de escape de  $c$ .

Esses dois conjuntos se complementam e preenchem partes do plano Argand-Gauss. Dessa forma, a fronteira do conjunto de escape é também a fronteira do conjunto prisioneiro e é nesta fronteira que encontra-se o conjunto de Julia associado ao parâmetro  $c$ . O valor do ponto  $c$  determina a formação dos conjuntos de Julia, sempre associando a um conjunto em particular.

Por exemplo, para  $c = 0$  obtemos o círculo unitário. Vejamos a seguir alguns conjuntos de Julia associados aos respectivos valores de  $c$ .

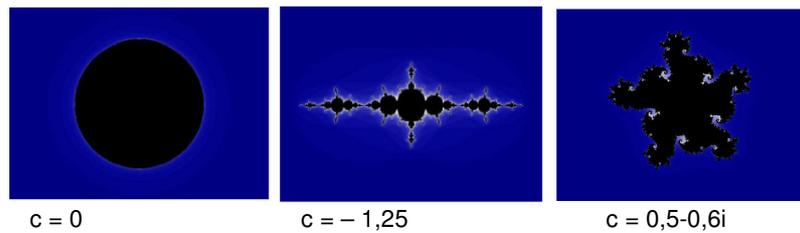


Figura 43 – Conjuntos de Julia

### 6.3.2.

#### O conjunto de Mandelbrot

Em 1974, Mandelbrot com a ajuda de recursos computacionais tentou generalizar os conjuntos de Julia e percebeu que era possível criar uma imagem no plano complexo que os catalogava.

A sua construção está baseada também na função  $z_{n+1} = z_n^2 + c$ , onde  $z_0 = 0$ ,  $z_n (n \in \mathbb{N})$  e  $c$  são números complexos. O conjunto de todos os números complexos  $c$  tais que  $z_n$  não tende ao infinito define, portanto o conjunto de Mandelbrot. Iterando a função para cada ponto  $c$  do plano complexo obtém-se a sequência:

$$c \rightarrow c^2 + c \rightarrow (c^2 + c)^2 + c \rightarrow \dots$$

Tomando-se alguns valores para  $c$  verifica-se dois tipos de sequências: *limitadas* permanecendo dentro de um círculo no qual a distância à origem mantém-se finita, que ocorrem por exemplo, quando  $c = 0$  onde tem-se um ponto de convergência ou quando  $c = -1$  e neste caso tem-se uma sequência periódica. Mas, para certos valores de  $c$ , a função é *ilimitada* afastando-se cada vez mais da origem.

Os conjuntos formados pelas sequências limitadas e ilimitadas preenchem o plano complexo e delimitam o conjunto de Mandelbrot, que pode ser observado na figura a seguir.

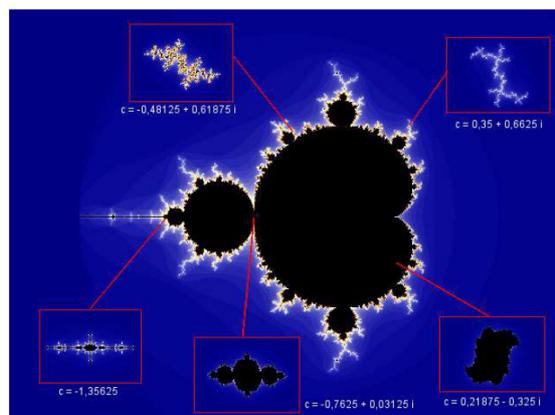


Figura 44 – O conjunto de Mandelbrot como Um Catálogo dos Conjuntos de Julia

Neste caso, a cor preta é usada para representar o conjunto de sequências limitadas, ou seja, nas quais a sucessão de cada valor de  $c$  permanece limitada. E as outras cores

referem-se aos valores de  $c$  nos quais as sequências são ilimitadas. No conjunto de Mandelbrot pode-se observar a presença dos conjuntos de Julia, obtidos conforme variam-se os valores de  $c$ .

#### 6.4.

#### Fractais presentes em diversas áreas da ciência

Podemos perceber que muitas são as aplicações do estudo de fractais. E não pára nas situações já citados neste trabalho. Em diversas áreas da ciência a Geometria Fractal se faz presente.

Analisando-se, por exemplo, o trajeto percorrido pelo sangue humano no corpo. Para que o sangue saia do coração percorra todos os órgãos e retorne ao coração no tempo adequado é a disposição, o arranjo e as respectivas formas/espessuras dos vasos sanguíneos que permitem o funcionamento adequado do sistema circulatório.



Figura 45 – Ampliação da Estrutura de Vasos Sanguíneos

A disposição dos galhos da copa de uma árvore, que muito influencia na distribuição de nutrientes essenciais pelo vegetal, onde é possível perceber que a partir do tronco os galhos se distribuem e a partir de cada um deles partem novos galhos menores, e a partir destes últimos saem ramos menores. Aproximando-se e ampliando-se cada um desses ramos vemos a semelhança ao tronco original.



Figura 46 – Imagem de Uma Árvore Onde Observa-se a Distribuição dos Galhos

Todos estes exemplos tirados da natureza apresentam uma das principais características dos fractais, a autossimilaridade, portanto é possível estudá-los sob à luz da Geometria Fractal.

## 6.5.

### Geometria fractal e a educação básica

Como vimos até aqui, são muitas as aplicações da Geometria Fractal. Seu uso permite aproximações muito eficientes para diversas medidas relacionadas à natureza, em várias delas muito mais adequadas do que as reduções de formas naturais às formas da Geometria Euclidiana.

Vale ressaltar que o objetivo do presente trabalho não é de maneira alguma opor-se aos conceitos e fundamentos da geometria clássica. Pelo contrário, o conhecimento geométrico enriquece a aprendizagem e desenvolve habilidades de raciocínio e resolução de problemas, sejam matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. Como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) no bloco *espaço e forma* enfatizam:

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, porque por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1997, p.56)

Na verdade, a Geometria Fractal pode complementar os conhecimentos obtidos através da Euclidiana. Em sala de aula, é preciso lançar mão de todas ferramentas possíveis para incentivar a criatividade e desenvolver o raciocínio interpretativo dos alunos, de forma que não apenas decorem fórmulas, mas que sejam capazes de resolver situações e problemas práticos.

A apresentação dos fractais em sala de aula pode ocorrer de diversas maneiras. Por exemplo, através da apresentação de suas características por meio de recursos tecnológicos, fazendo uso de *software* específico na criação de novos fractais ou mesmo na construção de alguns dos exemplos clássicos, bem como, mostrar as aplicações nas áreas da ciência com um trabalho de interdisciplinaridade.

É possível, no ensino fundamental quando são ensinados os fundamentos da Geometria Euclidiana, mostrar, ao menos como curiosidade, que existe a Geometria Fractal. E, mesmo que seu estudo e desenvolvimento sejam recentes, tendo em vista toda a história por trás da maioria dos conteúdos de Matemática trabalhados na escola, os fractais estão presentes em diversas situações naturais.

E não apenas relacionado diretamente à Geometria como outros conteúdos como as Progressões Geométricas, trabalhadas no Ensino Médio. É comum encontramos problemas propostos em provas de vestibulares de universidades brasileiras, que utilizam-se da construção de Fractais e que buscam no estudante mais do que apenas

conhecimento de fórmulas, mas criatividade e capacidade interpretativa ao se deparar com estas situações.

Vejamos a seguir uma questão proposta no ano de 2002 no vestibular da Universidade do Estado de Londrina, no Paraná:

(UEL-PR) A figura construída segundo a sequência a seguir é denominada Esponja de Sierpinski ou Esponja de Menger. Representa um fractal gerado a partir de um cubo. Partindo-se do cubo inicial, obtemos outros cubos menores, com arestas iguais a  $\frac{1}{3}$  da aresta deste. O cubo central e os cubos do centro de cada face são removidos. O procedimento se repete em cada um dos cubos menores restantes. O processo é iterado infinitas vezes, gerando a Esponja. Supondo que a medida da aresta inicial seja igual a 1m, e considerando uma face do cubo original, qual é a área remanescente dessa face, em metro quadrado, na figura 30?

a)  $\left(\frac{8}{9}\right)^{30}$

b)  $\left(\frac{8}{9}\right)^{29}$

c)  $\left(\frac{9}{8}\right)^{30}$

d)  $\left(\frac{20}{27}\right)^{19}$

e)  $\left(\frac{27}{20}\right)^{19}$

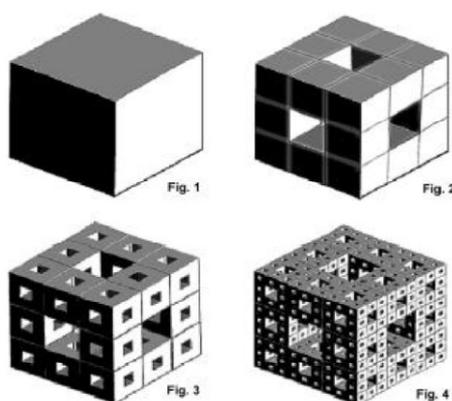


Figura 47 – Sequência de Figuras que Formam a Esponja de Sierpinski

Uma proposta de resolução da questão:

Temos que a área de uma das faces da figura 1, cuja aresta é 1m é:  $1m^2$

Na figura 2, percebemos que da área inicial foi retirado um quadrado com lado correspondendo a  $\frac{1}{3}m$  e cuja área é  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ . Logo, a área de uma face da figura 2 é dada por  $1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ .

Na figura 3, temos que da área obtida no passo anterior são retirados 8 quadrados de lados correspondendo a  $\frac{1}{9}m$  cuja área é  $\left(\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{1}{81}$ . Portanto, a área de uma face pode ser dada por  $\frac{8}{9} - 8 \cdot \frac{1}{81} = \frac{64}{81}$

Como o próprio enunciado da questão diz, esse procedimento será iterado infinitas vezes, ou seja, tem-se um padrão na sequência de cálculos que buscam a área de uma face da esponja. Observe que os números obtidos até a figura 3 formam a P.G. =  $\left\{1, \frac{8}{9}, \frac{64}{81}, \dots\right\}$ , cujo

primeiro termo é  $a_1 = 1$  e razão é  $q = \frac{8}{9}$ . Portanto, através da expressão que determina o termo geral de uma P.G. temos:

$$a_{30} = 1 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{30-1} = \left(\frac{8}{9}\right)^{29}$$

Portanto, a resposta correta é o item b.

Como vemos neste exemplo, os conceitos relacionados à Progressão Geométrica foram utilizados para resolver um problema que envolve a construção de um fractal.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como foi possível perceber através deste trabalho, a Matemática é totalmente envolvida em padrões. Observar e estudar os padrões presentes em diversas situações é, na verdade, desenvolver o conhecimento matemático. Seja por meio de expressões que relacionam grandezas com suas fórmulas ou como vimos, os conceitos matemáticos permeando a música e a natureza de várias maneiras.

Dentro do universo dos números e da História da Matemática podemos perceber a presença das progressões aritméticas em diversas situações. Vimos que é possível apresentar os conceitos relacionados a P.A., inclusive de segunda ordem, através de exemplos simples nos quais a observação dos padrões nos permite chegar à expressões que representam uma sequência.

No trabalho do professor é importante sempre propiciar para os alunos uma forma de construir os conceitos e não apenas recebê-los sem que façam sentido algum para o aprendiz. Exemplos comuns e concretos como os que foram apresentados aqui, facilitam a compreensão. Além disso, os alunos sempre se interessam por curiosidades a respeito dos números como o fato de um quadrado perfeito ser soma de números ímpares ou a história relacionada à *Tetraktys*.

Conforme a Teoria Construtivista de Jean Piaget<sup>5</sup> (1896-1980) o conhecimento não deve ser tratado como algo predeterminado desde o nascimento (inatismo) tampouco como resultado do simples registro de informações e percepções (empirismo). Na verdade, resulta das ações e interações do sujeito com o ambiente. O conhecimento é construído a medida que o indivíduo relaciona o que já sabe com o novo que se apresenta.

Em toda a história da humanidade, o homem busca resolver problemas práticos desde simplesmente dividir a terra entre integrantes de um grupo ou desvendar como ocorre o crescimento de uma bactéria para assim, encontrar uma forma de livrar-se dos malefícios causados por ela.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ao tratar da resolução de problemas apresenta, entre outras considerações a seguinte ideia:

O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las.(...) o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num

---

<sup>5</sup> Jean Piaget foi um biólogo, psicólogo e epistemológico suíço e é considerado um dos grandes pensadores de século XX oferecendo grandes contribuições à pedagogia através de teorias a respeito de aprendizagem, como é o caso da Teoria Construtivista.

campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. (BRASIL, 199, p. 32)

O que nos faz perceber que um dos principais objetivos da Matemática, através da resolução de problemas, é desenvolver o raciocínio lógico a partir de questões que proponham desafios, onde o aluno utilize de seus conhecimentos prévios em busca de soluções, acarretando com isso a construção do conhecimento de forma efetiva.

Através do universo musical, algo tão comum para as pessoas em qualquer lugar do mundo, pode-se perceber como os conceitos matemáticos vão muito além da sala de aula. Mostrar ao aluno as diversas aplicações do que ele estuda, gera interesse em compreender o que lhe é proposto.

Trabalhar a Sequência de Fibonacci bem como a Razão Áurea quando se apresenta os números irracionais a uma turma é uma possibilidade de envolver os alunos no conteúdo sem que este seja apenas um conjunto de regras que, de fato são necessárias, mas que no momento na cabeça do aprendiz parecem sem sentido. Vimos que os padrões e relações que envolvem estes assuntos são muito interessantes. Através do conhecimento dos números de Fibonacci, é possível perceber como a Matemática encontra-se presente em situações que muitas pessoas nem imaginam.

Enfim, ensinar Matemática é um desafio, mas ao mesmo tempo é muito bom ouvir de um aluno que aprendeu a gostar dessa disciplina quando descobriu que ela tem aplicações práticas e passou a fazer sentido quando lhe foi ensinado mais do que o currículo básico propõe. Um estudante pode, e até deve, questionar o porquê de estudar certo conteúdo, e o professor precisa responder com argumentos claros os objetivos do que ensina. Como já disse o educador Paulo Freire, no livro *Pedagogia da Autonomia*: “Ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção.”

## 8.

### Referências bibliográficas

- [1] Morgado, Augusto César; Carvalho, Paulo Cezar Pinto. **Matemática discreta**. SBM, 2014.
- [2] Livio, Mário. **Deus é matemático?** Editora Record, 2015.
- [3] Livio, Mário. **Razão Áurea, a história de Fi**. Editora Record, 2011.
- [4] Lima, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. SBM, 2014.
- [5] Paiva, Manoel. **Matemática EM**. editora moderna, 2010
- [6] Iezzi, Gelson. **Matemática EM**. editora Atual, 2015
- [7] Iezzi, Gelson; Hazzan, Samuel; Degenszajn, David. **Fundamentos da matemática Elementar**. Editora Atual, 2013.
- [8] Nunes, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78 f. Tese (Mestrado), Mestrado em ensino da Matemática, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, 2006.
- [9] Netto, Luiz da Silva. **Dimensionamento das distâncias entre os trastes nos instrumentos musicais**. 2002. Tese (Mestrado) Faculdade de Filosofia Ciências e Letras Santo André, Santo André, 2002.
- [10] Chediak, Almir. **Harmonia & Improvisação**. Lumiar Editora, 18ª Edição, Copyright 1986.
- [11] Souza, R. L. **Os Aspectos Físicos e Matemáticos da Música**. 2008. 61 f. Monografia (Graduação) Licenciatura em Matemática, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.
- [12] BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, 1997, 88 p.
- [13] Dicionário Online de Português. Disponível em:  
<<https://www.dicio.com.br/matematica>> Acesso em: 22 abr. 2017.
- [14] TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. Editora Record, 2004.
- [15] Brasil Escola. Disponível em: <<http://educador.brasilecola.uol.com.br/sugestoes-pais-professores/a-importancia-musica-no-processo-ensinoaprendizagem.htm>> Acesso em: 30 abr. 2017.