UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Um Estudo Sobre a Valorização e as Dificuldades do Ensino de Probabilidade na Educação Básica

Júlio Cesar Pires Do Nascimento

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

UM ESTUDO SOBRE A VALORIZAÇÃO E AS DIFICULDADES DO ENSINO DE PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

JÚLIO CESAR PIRES DO NASCIMENTO

Sob a Orientação do Professor

Orlando dos Santos Pereira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção de grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

N244e
Nascimento, Júlio Cesar Pires do, 1977-
Um Estudo Sobre a Valorização e as Dificuldades do Ensino de Probabilidade na Educação Básica / Júlio Cesar Pires do Nascimento. - 2017.
73 f.: il.

Orientador: Orlando dos Santos Pereira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PROFMAT, 2017.

1. Probabilidade. 2. Ensino Fundamental. 3. Ensino Médio. I. Pereira, Orlando dos Santos, 1976-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

JÚLIO CESAR PIRES DO NASCIMENTO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 23/08/2017

Orlando dos Santos Pereira. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ

Ronaldo da Silva Busse. Dr. UNIRIO

Este trabalho é dedicado à minha avó Maria Geralda do Nascimento e à minha tia Odete do Nascimento Silva que, na aleatoriedade da vida, me deixaram grandes lembranças.

Agradecimentos

Aos professores do PROFMAT, sempre muito gentis em transmitir seus conhecimentos.

À CAPES, pela bolsa concedida.

Aos alunos da turma do PROFMAT 2015, grandes amizades que se construíram para a vida.

Ao amigo Marcos Guedes, pelos inúmeros momentos, desde o ingresso no PROFMAT, em que sua ajuda foi bem-vinda e indispensável.

Aos amigos Prof. Anderson Ribeiro de Oliveira e Prof. Rodrigo Alonso da Silva, pelas orientações extraoficiais neste trabalho.

Aos meus pais Paulo Cesar do Nascimento e Rosângela de Fátima Pires do Nascimento, por possibilitarem a mim a experiência da vida.

À minha companheira Viviane Prestes Boa Nova, pela paciência nas horas tensas do desenvolvimento deste trabalho.

"Mil probabilidades não fazem uma certeza."

(provérbio italiano)

RESUMO

NASCIMENTO, Júlio Cesar Pires do. **Um estudo sobre a valorização e as dificuldades do ensino de probabilidade na educação básica.** 2017. 73p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

Este trabalho tem como foco um estudo do conceito de probabilidade aplicado nos ensinos fundamental e médio, embasado em uma pesquisa realizada a partir da análise dos PCN e de outros textos que orientam o ensino de Matemática em âmbito nacional, com o intuito de investigar os motivos da deficiência no ensino de Probabilidade na Educação Básica. O objetivo é apontar caminhos que favoreçam seu ensino e incentivar professores a valorizar e reconhecer a importância deste tema para muitas áreas do conhecimento e para o cotidiano. Apresenta-se aqui uma pesquisa com alunos do ensino médio sobre a presença de temas importantes da Matemática, mostrando que a Probabilidade, em comparação com outros temas, não é estudada de forma satisfatória em grande parte das escolas de origem destes alunos. Destacam-se a importância da atualização do professor e da escola, e a necessidade da utilização de metodologias que privilegiam o aprendizado desta área, além de sugestões de problemas e jogos ao longo do texto.

Palavras-chave: Probabilidade, Ensino Fundamental, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work focuses on a study of the concept of probability applied in primary and secondary education, based on a research carried out from the analysis of PCNs and other texts that guide the teaching of mathematics at the national level, in order to investigate the motives Of the deficiency in the teaching of Probability in Basic Education. The objective is to point out ways that favor their teaching and to encourage teachers to value and recognize the importance of this theme for many areas of knowledge and everyday life. Is seen here a research with high school students about the presence of important Mathematics areas, showing that Probability, compared to other subjects, is not studied satisfactorily in most of the schools of origin of these students. It is important to highlight the importance of updating the teacher and the school, and the need to use methodologies that favor learning in this area, as well as suggestions for problems and games throughout the text.

Keywords: Probability, Elementary School, High School.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

No mundo atual, a habilidade de tomar decisões tornou-se fundamental, pois são muitos os casos onde é preciso decidir-se diante de possibilidades contáveis ou não. *Qual o melhor caminho a se percorrer?*, *Em que número apostar?*, *Será que este medicamento é mesmo eficaz?* ou *Quais as chances de chover hoje?* são algumas das muitas questões que estão presentes no nosso cotidiano. Entretanto, é possível estudar maneiras nas quais haja critérios para estas decisões — não se trata de pretender prever o futuro, mas, sim, de apontar, com razoável confiança, o quanto é provável de algo acontecer.

A Probabilidade é a parte da Matemática que busca por modelos que expressam as chances de ocorrência de um dado acontecimento, em relação a uma determinada experiência, e desde seu surgimento, a partir da análise de jogos de azar, ela teve papel decisivo na construção de teorias que hoje são fundamentais para muitas áreas do saber. O matemático Gerônimo Cardano, ainda no século XVI, acreditava que ao se lançar três dados, as chances da soma de seus pontos ser igual a 9 era a mesma de ser igual a 10, já que a quantidade de possibilidades de se formar esses números com os dados era a mesma. A Probabilidade mostrou que ele estava enganado, é e provável que muitos equívocos como este ainda se sustentariam, não fosse, ao longo dos anos, o desenvolvimento de técnicas para estimar acontecimentos. De fato, é uma área que causa muitos equívocos, por envolver, a principio, a quantificação de impressões subjetivas e o acaso. Ora, exatamente esta habilidade deve ser explorada e potencializada na escola — a transformação do subjetivo em pensamento probabilístico — a partir da reconstrução de situações onde o aleatório é o personagem central.

O reconhecimento da importância da Probabilidade para a sociedade atual levou à sua incorporação ao currículo das escolas brasileiras em meados dos anos 90. Os Parâmetros Curriculares Nacionais, documentos que explicitam as habilidades básicas que se espera que sejam desenvolvidas pelos alunos, a partir da observância da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/96) indicam que os conteúdos de Probabilidade sejam trabalhados a partir de fatos históricos, da resolução de problemas e da utilização de jogos, porém o que se verificou neste trabalho é que, ainda hoje, não são tratados com a merecida importância nas salas de aula. Como referencial teórico deste trabalho foi feita uma pesquisa bibliográfica onde foram analisados livros didáticos de Probabilidade, livros de autores abordando o assunto, jogos e dissertações relevantes para este tema. Junto a isto, foi feita uma pesquisa quantitativa com alunos do Ensino Médio sobre a presença do conteúdo de Probabilidade nos 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental, onde se observa a escassez nos currículos escolares, mostrando uma grande desvalorização da Probabilidade em relação a outros temas da Matemática. Outro ponto percebido, a partir de pesquisa bibliográfica, é que a própria formação acadêmica nem sempre fornece meios suficientes para os professores reconhecerem esta importância e trabalharem com segurança os conteúdos pertinentes à Probabilidade, tornando rasa, ou mesmo inexistente, sua presença nas escolas, em especial no Ensino Fundamental, com algumas poucas e desinteressantes atividades, ficando a cargo da sorte a busca mais aprofundada pelo assunto. Com isso, quando chegam ao Ensino Médio, nossos alunos sentem grandes dificuldades, mesmo nos problemas mais simples, e, não raro, aprendem de forma mecânica, decorando fórmulas e contando com a ajuda do professor, não conseguindo enxergar e transformar as ideias estudadas em subsídio para situações futuras. Desta maneira, os objetivos da Probabilidade, que exige reflexão, raciocínio e interação não são atingidos.

O objetivo deste trabalho é motivar professores a valorizar a Probabilidade na Educação Básica, desde os anos iniciais, portanto, no decorrer do texto, são apresentadas algumas propostas de atividades a serem trabalhadas em sala de aula, contudo ressaltando que são apenas um ponto de partida para aqueles que se sentirem motivados em buscar reduzir as dificuldades do aprendizado probabilístico.

2 BREVE HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Atualmente, a Probabilidade vem se tornando cada vez mais importante para várias áreas científicas. Entre elas figuram: Estatística, Economia, Engenharia, Física, Química, Teoria dos Jogos, Sociologia, Psicologia e Biologia. As aplicações existentes nos dias de hoje já dariam motivos suficientes para a importância do estudo de Probabilidade. Ainda assim, cabe-nos, como educadores mais cuidadosos, apresentar fatos e curiosidades acerca da história de seu surgimento, justificando a sua existência e necessidade.

Não é o intuito deste texto apresentar uma história completa sobre o assunto. Uma pesquisa em livros, dissertações ou artigos dará ao leitor mais curioso uma infinidade de informações sobre nomes, fatos, locais e datas. Portanto, faremos uma breve apresentação de fatos decisivos para a história e o desenvolvimento da Probabilidade.

2.1 AS ORIGENS DA PROBABILIDADE

O momento do surgimento da Probabilidade como ferramenta de investigação do acaso é impreciso.

> Segundo Bayer et al (2005, p. 3): "Ela começou por ser uma ciência empírica e só mais tarde é que se desenvolveu associada à Matemática. É difícil determinar corretamente quando é que se registrou a alteração do empirismo para o formalismo matemático".

Vários textos indicam que a existência de jogos de azar na Idade média, envolvendo cartas e dados, fez com que a nobreza procurasse grandes matemáticos para obter suas opiniões sobre o sucesso nesses jogos. Em seu artigo, Silva (2009) afirma que:

> "O surgimento da probabilidade está fundamentado em relatos históricos relacionados à disseminação dos jogos de azar na Idade Média, o qual era praticado envolvendo apostas. Os italianos Gerônimo Cardano (1501-1576), Galileu Galilei (1564 — 1642), Luca Pacioli (1445 — 1517) e Niccolo Tartaglia (1499 — 1557) foram os matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento das primeiras teorias envolvendo jogos e apostas. Eles deram início aos estudos envolvendo o jogo de dados, trabalhando as ideias do conjunto universo e dos eventos pertencentes a este conjunto."

O matemático italiano Luca Pacioli (1445 — 1517), considerado "o pai da Contabilidade", estudou um problema que veio a se tornar famoso como *Problema dos Pontos*, que se enuncia assim: *"Dois jogadores com habilidades equivalentes apostam igualmente em um jogo que se encerra quando algum deles obtém m pontos. Em determinado momento precisam interromper o jogo, um deles possuindo a pontos, e o outro com b pontos. Como deve ser repartido o valor apostado por eles?".* Este é um problema que gerou equívocos e necessitou de técnicas importantes para ser resolvido. Mais tarde, foi retomado por outros matemáticos e até hoje é um ótimo problema para ser trabalhado no ensino de Probabilidade, em sala de aula.

Figura 1 — Luca Bartolomeo de Pacioli (Sansepolcro, 1445 — Sansepolcro, 19 de junho de 1517)

Fonte: soumaiscont.wordpress.com/2015/04/14/lucca-pacioli-o-pai-da-contabilidade/

A Cardano é atribuído o início dos estudos de Probabilidade, já envolvendo técnicas de Análise Combinatória para contar casos possíveis e casos favoráveis, permitindo o cálculo da chance de ocorrência de eventos. Em 1526 escreveu seu *Manual de Jogos de Azar,* onde estudou os problemas já antes enunciados por Pacioli, além de ter resolvido vários problemas relacionados à combinatória. Sendo assim, é de se imaginar que os jogos dessa natureza são grandes responsáveis pelo início dos estudos probabilísticos, por se tratarem de técnicas que quantificam o acaso.

Ao longo da História, esse interesse fez com que muitos importantes matemáticos como *Christiaan Huygens* (1629 — 1695), *Jacob Bernoulli* (1654 — 1705), *Pierre Simon Laplace* (1749 — 827), *Carl Friedrich Gauss* (1777 — 1855), *Lenis Poisson* (1781 — 1840), *Abraham de Moivre* (1667 — 1754), *Pafnuti*

Tchebycheff (1821 — 1894), *Andrei Andreyevitch Markov* (1856 — 1922) e *Andrei Nikolaevich Kolmogorov* (1903 — 1987) elevassem seus estudos ao ponto de estabelecer novos conceitos e teorias, mas atribui-se o início dos aprofundamentos e formalizações a *Blaise Pascal* (1623 — 1662) e *Pierre de Fermat* (1601 — 1665).

2.2 A PROBABILIDADE DE PASCAL E FERMAT

A teoria das probabilidades obteve avanço teórico mais intenso a partir dos estudos de Pascal e Fermat. Segundo Silva (2009), "eles foram os responsáveis por estabelecer as bases da teoria do cálculo probabilístico e inúmeras hipóteses foram levantadas envolvendo possíveis resultados, marcando o início da teoria das probabilidades como ciência".

Em 1654, Antoine Gombaud, conhecido como Chevalier de Méré, um apaixonado jogador e cavalheiro da nobreza francesa, muito curioso sobre os detalhes dos jogos dos quais participava, procurou e apresentou a Pascal uma versão do *problema dos pontos*, já estudado por Pacioli e Cardano. Pascal demonstrou grande interesse pelo problema de Chevalier e logo decidiu dividi-lo com um amigo, outro famoso matemático, Pierre de Fermat, que precisou estudar formas de lidar com um problema onde incidia o acaso. Pascal e Fermat, por meio de cartas, se comunicaram com o propósito de resolver o problema de Chevalier e, após algumas correspondências, chegaram ambos a um mesmo resultado.

Na seção 4.2.2 (problema 7), o *problema dos pontos* e as respectivas soluções de Pascal e Fermat são apresentadas.

Pascal e Fermat foram pioneiros em enunciar e resolver problemas que não envolviam números, mas, como Cardano, não criaram teoremas nessa área.

Figura 2 — Blaise Pascal (Clermont-Ferrand, 19 de junho de 1623 — Paris, 19 de agosto de 1662)

Fonte: www.apuritansmind.com/puritan-favorites/blaise-pascal-1623-1662

Figura 3 — Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, nascido na primeira década do século XVII — Castres, 12 de janeiro de 1665)

Fonte: institutofermat.com.br/quem/fermat

2.3 A PROBABILIDADE DE LAPLACE (OU PROBABILIDADE CLÁSSICA)

Foi Laplace quem apresentou a primeira definição de probabilidade, apesar desta já ser utilizada anteriormente por outros matemáticos.

> No artigo "Lei de Laplace" é possível ler que: "a primeira definição de probabilidade (definição clássica de probabilidade) foi enunciada pelo matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827) e publicada num tratado, em 1812, designado por "*Théorie analytique des probabilités*" (*Teoria Analítica das Probabilidades*) e que unificou na altura todos os seus trabalhos sobre probabilidades."

Na visão de Laplace, em seu livro original do século XIX, pode-se ler que a teoria das probabilidades "consiste na redução de todos os acontecimentos da mesma espécie a um certo número de casos igualmente prováveis, que são casos que estamos igualmente indecisos sobre a sua existência, e na determinação do número de casos que são favoráveis ao acontecimento do qual procuramos a probabilidade”.

O *conjunto de todos os casos favoráveis* definiu-se como *evento* e o *conjunto de todos os casos possíveis de ocorrer* foi definido como *espaço amostral*. Logo, a probabilidade de um evento A (que aqui chamaremos de P(A)) ocorrer é definida como:

P(A)= número de casos favoráveis / número de casos possíveis

Há que se definir *evento elementar*, como sendo cada um dos elementos do espaço amostral. Para que esta fórmula se configure válida é necessário que o espaço amostral seja finito e que cada um de seus eventos elementares tenha a mesma chance de ocorrer. Num jogo de dados, por exemplo, é muito comum este tipo de raciocínio: cada face tem a mesma chance de cair voltada para cima (1/6).

Quando relaciona-se o estudo de Probabilidade a Laplace, faz-se referência ao conceito chamado de *Probabilidade clássica* (ou Probabilidade teórica), o qual Cabral e Batanero bem definem como:

> A razão entre o número de resultados favoráveis ao evento que se quer estudar e o número total de resultados possíveis (o qual é denominado de espaço amostral) do experimento aleatório, tomando que cada resultado possível de um determinado Experimento Aleatório seja igualmente provável de ocorrer (CABRAL, 2006; BATANERO, 1999).

Utilizar-se da probabilidade clássica, tanto em situações do cotidiano quanto para fins educacionais sempre será muito útil, desde que o espaço amostral tenha um número finito de elementos, mas em situações onde as possibilidades são infinitas ou indeterminadas, deve-se recorrer a um outro conceito que é visto a seguir.

2.4 A PROBABILIDADE FREQUENTISTA

Uma outra maneira de pensar em Probabilidade é a utilização do *conceito frequentista,* onde os resultados são percebidos por meio de experimentação. Neste conceito, a probabilidade de ocorrência de um acontecimento A de uma experiência aleatória é associada à *frequência relativa*[*] com que esse acontecimento é observado. Por exemplo, ao se dizer que "a chance de um atirador acertar um alvo é igual a 80%" equivale-se a dizer que de 100 tiros observados, ele obtém sucesso em cerca de 80 deles. Este é um caso onde foi utilizado o conceito frequentista.

Agora, em posse deste conceito, como determinar sua relação com o conceito clássico de Laplace? Para obter esta resposta, foi utilizada a *Lei dos Grandes Números*, formulada pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654 — 1705),

---

[*]Frequência relativa é a razão entre o número de vezes que um determinado acontecimento A é observado e o número de vezes que uma experiência relacionada a ele foi realizada.

publicada em 1713, postumamente, no seu tratado *Ars Conjectandi* (*Arte de Conjeturar*).

A Lei dos Grandes Números mostra que uma experiência repetida um grande número de vezes faz com que a frequência relativa de um determinado evento se aproxime de sua probabilidade calculada no conceito clássico.

Como exemplo, podemos pensar em uma roleta contendo 10 números. Ao girá-la por um grande números de vezes, observaremos como resultado o número 4 em aproximadamente 1/10 das vezes, sendo esta sua probabilidade calculada no conceito clássico. E mais: quanto maior for o número de giros, mais próximo de 1/10 será sua frequência relativa.

No trabalho de Busetto (2010, p. 13), temos um exemplo onde o uso do conceito frequentista é mais conveniente:

> Tendo em vista que um medicamento pode trazer a cura ou não para determinados sintomas para o qual é destinado, considerando o conceito clássico de probabilidade, a chance de eficácia é de apenas 50%, fato que faria com que a maioria dos medicamentos perdesse a confiabilidade. No entanto, considerando o conceito frequentista, poderíamos dizer que a cada 100 pessoas que utilizaram este medicamento, aproximadamente 95 foram curadas. Isso quer dizer que a probabilidade deste medicamento apresentar eficácia é de 95% [...]a interpretação pelo conceito frequentista mudaria a interpretação do consumidor, que baseado nesta probabilidade, apresentará maior confiabilidade frente a este medicamento.

Onde conclui que:

> A probabilidade de eficácia de medicamentos é um exemplo explícito de que o estudo da probabilidade é comum na vida cotidiana, mesmo que de forma superficial (BUSETTO, 2010, p. 13).

Enfim, inserir a Probabilidade na Educação Básica é mais do que admitir um novo conteúdo. Trata-se de tornar reconhecida a importância do estudo da incerteza, fazendo uso da Matemática; é mostrar que fenômenos aleatórios estão presentes no dia-a-dia, em várias áreas do conhecimento, e, mesmo não conseguindo prever seus resultados, é possível estimá-los.

3 A IMPORTÂNCIA E OS OBJETIVOS DA PROBABILIDADE NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Como foi visto no capítulo anterior, o estudo da Probabilidade nasceu para atender aos jogos de azar, com o intuito de determinar as incertezas nas jogadas, reduzindo assim os prejuízos dos participantes. Hoje, sabe-se que esses estudos são importantes para muitas áreas do saber, haja visto as pesquisas na genética*, por exemplo.

De acordo com Trompler (1982, apud LOPES et al, 2011, p. 77)

> [...] o ensino de probabilidade em ciclos anteriores à graduação é de fundamental relevância porque representa uma maneira de pensar, desconhecida em outros ramos da matemática, embora subjacente em todas as ciências experimentais. Confronta o estudante com resultados menos absolutos do que este está acostumado, mostra que ele pode conduzir um rigoroso raciocínio mesmo sabendo que está cometendo erros e o ensina a como enfrentar tais erros. Humaniza a matemática pela ligação a problemas do cotidiano, já que relaciona ciências experimentais, naturais, econômicas e sociais de todos os tipos, como ferramentas de trabalho, à matemática.

Nos dias de hoje espera-se que o cidadão seja crítico, pensante e tome decisões mediante análise de possibilidades. Nossa Escola precisa estar atenta a esse fato, desde a Educação Básica, pensando nessa formação, e não apenas em transmitir os curriculares conteúdos, desprendidos de significados.

Em 1998, foram instituídos os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), com a finalidade de alinhar a educação às visões da atuação do cidadão. Hoje, eles servem como referência ao tratar do ensino na Educação Básica, além de tornar acessíveis e organizadas as propostas curriculares utilizadas no Brasil. Neles são indicados como tema relevante os estudos probabilísticos:

> No final da década de 90, os conceitos básicos de Estatística e Probabilidade, antes quase ignorados na Educação Básica, passaram a ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica, tendo sido incorporados oficialmente à estrutura curricular da disciplina de Matemática do Ensino Fundamental e Médio com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1997), no Bloco Tratamento da Informação, que evidencia o ensino de Estatística, probabilidade e Análise Combinatória (CIABOTTI, 2015, p. 1).

---

*Genética é a ciência que estuda a transmissão das características hereditárias ao longo das gerações.

Nos PCN, pode-se ler que o estudo de probabilidade tem por objetivo a compreensão por parte do aluno de que vários fenômenos naturais, sociais ou culturais ocorrem sem que se possa prevê-los, mas ainda sim é possível mensurar suas chances de ocorrência:

> [...] grande parte dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e é possível identificar prováveis resultados desses acontecimentos. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações nas quais o aluno realiza experimentos e observa eventos (Brasil, 1997, p. 56).

Outra justificativa é a de que estudar Probabilidade leva o aluno a aprimorar sua lógica e sua abstração; habilidades necessárias ao ser pensante na sociedade atual. É ferramenta indispensável da Estatística, pois permite estimativas aceitáveis, relacionadas a fenômenos aleatórios.

> O estudo da Probabilidade, a partir da manifestação e/ou ocorrência de ações desencadeadas em função da relação entre as pessoas e o ambiente em que se encontram, permite lançar diferentes olhares sobre o mundo, retirando do ensino desta disciplina a idéia de determinismo e exatidão. É um espaço para a análise e reflexão, considerando variações de resultados obtidos por meio de aferições. É imprescindível a discussão a respeito de possíveis diferenças entre o que se imaginava e o constatado, procurando descobrir o que leva a tal fato, dando os primeiros passos em direção a uma Matemática probabilística (BUSS, 2008, p. 3).

Há poucas décadas a Probabilidade não era assunto comum nas grades curriculares das escolas brasileiras. Mesmo assim, sua importância já vinha sendo notada no âmbito educacional, tanto que Mendoza e Swift (1981, apud MENDES, 2015 p. 1) já afirmavam que "a probabilidade deveria ser ensinada para que todos os indivíduos pudessem dominar conhecimentos básicos desses temas para atuarem na sociedade". A percepção da necessidade desses estudos permanece, como vemos em duas abordagens mais atuais e amplas, e continuam convergindo as ideias sobre seu ensino:

> As propostas curriculares recentes de matemática, em todo mundo, dedicam atenção especial ao assunto, enfatizando que o estudo dos mesmos é imprescindível para que as pessoas possam analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano (MENDES, 2015, p. 1).

> [...] é importante que a Matemática desempenhe, equilibrada e indissociavelmente, seu papel na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento, na agilização do raciocínio dedutivo do aluno, na sua aplicação a problemas, situações da vida cotidiana e atividades do mundo do trabalho e no apoio à construção de conhecimentos (PCN, 1997, p. 25).

Estas habilidades serão decisivas para que nossos alunos tenham base para atuar em muitas ciências, com suas particularidades, onde decisões acerca de acontecimentos devem ser tomadas frequentemente. A Economia, por exemplo, é uma área onde a necessidade de se fazer previsões se tornou tão útil quanto comum, assumindo a Probabilidade como ferramenta indispensável.

3.1 PROBABILIDADE NO ENSINO FUNDAMENTAL

Nesta seção serão apresentadas algumas justificativas para existência do conteúdo de Probabilidade no Ensino Fundamental, embasadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais relativos à esta etapa e também por outros trabalhos voltados para esta finalidade.

Para os PCN (p. 37), a Matemática no Ensino Fundamental deve contemplar alguns objetivos. São eles:

> • identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
> • fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos do ponto de vista do conhecimento e estabelecer o maior número possível de relações entre eles, utilizando para isso o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico); selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
> • resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
> • comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;

> • estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;
> • sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a auto-estima e a perseverança na busca de soluções;
> • interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

De posse do conhecimento desses objetivos, no que se refere aos conteúdos do Ensino Fundamental, pode-se notar que a Probabilidade apresenta-se como um grande complemento, pois

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória (PCN, 1997, p. 35).

Em seu artigo, Mendes (2015, p. 1) também aponta para uma mesma direção, sobre a Probabilidade na Escola, afirmando que

> [...] possibilitar a vivência dessas etapas permite que o aluno adquira domínio de certos procedimentos. É também uma via importante para a tomada de decisões, uma vez que grande parte da organização é feita com base nesses conhecimentos. O estudo (da Probabilidade) irá possibilitar o desenvolvimento de formas particulares de pensamento e raciocínio para resolver determinadas situações-problema.

Nesse sentido, é de se notar que as mudanças na postura do aluno quanto à maturidade no pensamento probabilístico dependerão diretamente das ações do professor, que necessita ampliar seus recursos e reconhecer a importância e as muitas aplicações da Probabilidade, podendo, assim, ministrar uma aula com mais segurança e uma didática muito mais atrativa.

3.1.1 Probabilidade no Terceiro Ciclo

As etapas relativas aos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental coincidem com o final da infância e o início da adolescência; época de questionamentos, onde o aluno começa de fato a se perceber como indivíduo da sociedade. Isto é, no mínimo, um indicativo de que a forma como é conduzida a educação nesta etapa é determinante para o aprendizado. O significado passa a ser tão importante quanto o significante, como podemos ler a seguir:

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (PCN, 1998, p. 63).

No que tange, especificamente, a Probabilidade, a orientação dos PCN quanto aos objetivos é bem clara:

> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão (PCN, 1998, p. 65).

Ao se levar em consideração que o aluno nesta faixa etária está aberto a novidades, desde que considere-as interessantes, nota-se que a maturidade matemática que se espera que o aluno adquira deve ser conquistada com o uso de alguns materiais propícios para se realizar experimentos, como podemos ver a seguir:

> Neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando* com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana (PCN, 1998, p. 70).

Quanto aos procedimentos indicados nos PCN, figuram:

1) A construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.

2) A resolução de problemas de contagem e a indicação das possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão (fração).

---

*Muitos alunos chegam ao Ensino Médio sem o conhecimento mínimo de experimentos realizados com moedas, dados, cartas etc., indicando uma precariedade do conteúdo no Ensino Fundamental, dificultando o trabalho nesta etapa final da Educação Básica (Vide apêndice B).

Quanto aos critérios de avaliação, o professor deve verificar

> [...] se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagrama de árvore, tabelas etc., sem o uso de fórmulas. Verifica, também, se o aluno é capaz de indicar a probabilidade de sucesso de um evento por meio de uma razão, construindo um espaço amostral em situações como o lançamento de dados, moedas etc. (PCN, 1998, p. 77).

3.1.2 Probabilidade no Quarto Ciclo

O Quarto ciclo compreende o 8º e o 9º anos do ensino fundamental. A faixa etária regular para esta fase figura entre 12 e 15 anos de idade, ou seja, a primeira etapa da adolescência. O jovem mostra-se aberto a novas descobertas, porém questões comportamentais dessa época devem ser levadas em consideração como componentes de sua personalidade em formação:

> [...] é preciso que a aprendizagem da Matemática esteja ancorada em contextos sociais que mostrem claramente as relações existentes entre conhecimento matemático e trabalho. [ ] O conhecimento do professor sobre essas questões e sua disponibilidade para compreender que nesse momento os jovens estão numa etapa da vida essencial para constituição de sua identidade e de seu projeto de vida, pode levar à superação de alguns aspectos negativos ligados aos seus comportamentos (PCN, 1998, p. 79).

Dada uma maior maturidade do que no terceiro ciclo, o quarto ciclo é, então, a etapa onde se tem a oportunidade de melhor apresentar a importância da Matemática, dando a ela um significado mais amplo e tornando-a mais presente na realidade do aluno:

> [...] é preciso mostrar aos alunos que a Matemática é parte do saber científico e que tem um papel central na cultura moderna, assim como também para mostrar que algum conhecimento básico da natureza dessa área e uma certa familiaridade com suas idéias-chave são requisitos para ter acesso a outros conhecimentos, em especial à literatura científica e tecnológica (PCN, 1998, p. 80).

Problemas matemáticos ligados ao cotidiano podem despertar o interesse porque fazem parte da vivência real e não abstrata. Devem ser priorizados conteúdos que exijam o uso de técnicas, permitam indagações e estejam presentes em problemas que podem ser discutidos em sala de aula. Conhecer o mundo e como as coisas funcionam tem muito mais peso na vida do aluno do 8º e 9º anos do que o ato de decorar fórmulas para situações específicas.

> A perspectiva de ingresso na juventude, além de expectativas quanto ao futuro, traz para os alunos do quarto ciclo novas experiências e necessidades. [ ] Isso faz com que esses jovens ampliem suas percepções e tornem-se mais independentes e autônomos diante de certas vivências. [ ] Mesmo as atividades de lazer, como organizar comemorações, participar de grupos de música, de esportes etc., exigem planejamento, previsão e capacidade para gerenciar as próprias ações (PCN, 1998, p. 80).

A Probabilidade é um conteúdo que vem sendo desprezado no Ensino Fundamental, em todas as séries. Porém, ainda que de forma superficial, deve constar nos 8º e 9º anos como ferramenta de grande poder intelectual, pois

> [...] tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático (PCN, 1998, p. 86).

Sobre os objetivos do ensino de Probabilidade, a indicação dos PCN é que:

> Neste ciclo, o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a construir um espaço amostral de eventos equiprováveis, utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos (PCN, 1998, p. 82).

Dois procedimentos relativos à Probabilidade no 4º ciclo são:

1) Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.

2) Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

Além da importância intelectual do assunto, ensinar Probabilidade nos terceiro e quarto ciclos é, na pior das hipóteses, uma ampliação de conceitos e técnicas para uso em trabalhos futuros, oferecendo no tempo correto o que deve ser inevitável nos anos seguintes.

3.2 PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO

A LDB/96 - Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional -, que é a legislação que regulamenta o sistema educacional (público ou privado) do Brasil (da educação básica ao ensino superior), e a CNE/98 que é o documento que apresenta propostas de regulamentação da base curricular nacional e de organização do ensino médio são citadas nos PCNEM, pois

> [...] apontam de que forma o aprendizado de Ciências e de Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio. Nessa nova etapa, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (PCNEM, 1999, p. 6).

No capítulo 2, foram apresentados alguns marcos históricos em que houve a integração entre a necessidade cotidiana e o avanço no conhecimento, mostrando que uma coisa está diretamente ligada a outra. Esta ideia deve estar em foco para o professor de Matemática, pois o aluno do Ensino Médio tem, mais que antes, a necessidade de perceber que o que está aprendendo será útil para sua vida; ele aprende mais quando percebe a utilidade do conhecimento e, tendo isto em mente, cabe ao educador considerar o que diz as *Orientações Curriculares Para o Ensino Médio*:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2006, p. 69).

A partir dessas afirmações, pode-se considerar que o foco do processo de ensino de Matemática deve estar voltado para a formação do cidadão, e não de um reprodutor de ideias. Também deve o professor visar, neste processo educacional, "tanto a apresentação de propriedades matemáticas acompanhadas de explicação quanto a de fórmulas acompanhadas de dedução, e que valorize o uso da

Matemática para a resolução de problemas interessantes, aplicados ou teóricos" (BRASIL, 2006, p. 69).

Além disso, um aluno aprende Matemática de forma mais consistente quando chega a um resultado por seu próprio trabalho. A formação necessária ao aluno do Ensino Médio não se faz apenas apresentando-o uma grande quantidade, muitas vezes até excessiva, de informações sem que haja justificativa para tal. Mais que isso, é preciso fazê-lo refletir criticamente sobre a sociedade em que vive. Os objetivos do Ensino Médio, devem "envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos" (PCNEM, 1999, p. 6). O aprendizado deve contribuir para a "interpretação de fatos naturais, a compreensão de procedimentos e equipamentos do cotidiano social e profissional, assim como para a articulação de uma visão do mundo natural e social" (PCNEM, 1999, p. 7).

> No Ensino Médio, quando nas ciências torna-se essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações (PCNEM, 1999, p. 9).

Ao se abordar um tema a ser ensinado, deve ser levado em conta o seu potencial de "permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema" (PCNEM, 1999, p. 43). Em 1997, a Probabilidade passou a fazer parte da Educação Básica, sendo incluída em seu currículo, em âmbito nacional. Esta inclusão ocorreu na tentativa de ampliar a formação do aluno no campo da estimativa. Com alguma noção desses conceitos ele estará apto a fazer interpretações e tomar decisões acerca de vários acontecimentos aleatórios. Uma justificativa dos PCNEM para a inclusão da Probabilidade no Ensino Médio pode ser lida a seguir:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. [ ] Isto mostra como será

> importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas (PCNEM, 1999, p. 44).

As *Orientações Curriculares,* ao se referirem aos blocos de conteúdos a serem praticados no Ensino Médio, também evidenciam sua importância, afirmando que:

> Os conteúdos do bloco *Análise de dados e probabilidade* têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das idéias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico (BRASIL, 2006, p. 78).

A forma com a qual esses conteúdos são apresentados também é de grande relevância, pois inseri-los num contexto prático possibilita um contato mais sólido:

> Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de balas de determinada cor em uma caixa (BRASIL, 2006, p. 78).

Também tratam de maneira muito explícita a necessidade de atenção quanto à interpretação dos elementos do cotidiano, a modelagem do problema e os possíveis equívocos mediante estes estudos:

> Ao estudar probabilidade e chance, os alunos precisam entender conceitos e palavras relacionadas à chance, incerteza e probabilidade, que aparecem na nossa vida diariamente, particularmente na mídia. Outras idéias importantes incluem a compreensão de que a probabilidade é uma medida de incerteza, que os modelos são úteis para simular eventos, para estimar probabilidades, e que algumas vezes nossas intuições são incorretas e podem nos levar a uma conclusão equivocada no que se refere à probabilidade e à chance (p. 79).

Apesar de não haver a ambição de fornecer todas as condições e métodos para o ensino probabilístico, sugerem-se alguns procedimentos necessários para o sucesso desse aprendizado:

> Nas situações e nas experiências aleatórias, os estudantes precisam aprender a descrevê-las em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática. Os alunos necessitam também dominar a linguagem de eventos, levantar hipóteses de eqüiprobabilidade, associar a estatística dos resultados observados e as freqüências dos eventos correspondentes, e utilizar a estatística de tais freqüências para estimar a probabilidade de um evento dado (BRASIL, 2006, p. 80).

O raciocínio probabilístico é uma das formas de manifestar senso crítico e uma das habilidades sugeridas nos PCNEM (p. 12) é a de "compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades". Além disso, pode-se verificar abaixo vários objetivos para a Matemática do Ensino Médio, previstos pelos PCNEM (p. 42), em que a Probabilidade se enquadra adequadamente:

> • compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
> • aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;
> • analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
> • desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
> • utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
> • expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
> • estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
> • reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
> • promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

No que diz respeito às habilidades previstas pelos PCNEM (1999, p. 46) para a Matemática do Ensino Médio, tem-se:

> • Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
> • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
> • Formular hipóteses e prever resultados.
> • Selecionar estratégias de resolução de problemas.
> • Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
> • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
> • Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
> • Discutir idéias e produzir argumentos convincentes.
> • Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
> • Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
> • Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
> • Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Outrossim, deve-se admitir a Probabilidade como um tema fundamental na conquista dessas habilidades. E ainda, segundo o PCN+ (Brasília, 2002, p. 127), ela se insere nos blocos de conteúdos com o intuito de que o aluno tenha a possibilidade de:

> • Reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados.
> • Quantificar e fazer previsões em situações aplicadas a diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolvam o pensamento probabilístico.
> • Identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades.

Portanto, a Probabilidade no Ensino Médio figura-se fundamental ao se pensar na busca pela formação do cidadão, pois através de seus estudos, conceitos e técnicas ela permite raciocinar sobre situações do cotidiano, oferecendo métodos para que se possa compreender os mais diversos contextos envolvendo estimativas. Cabe ao professor de Matemática reconhecer essa necessidade, buscar meios para que seu ensino seja valorizado e viabilizar estratégias compatíveis com a realidade de seus alunos.

4 UMA PESQUISA DA PROBLEMÁTICA NO ENSINO DE PROBABILIDADE

Ensinar Matemática tem sido um dos grandes desafios da educação. Trata-se de uma linguagem de inegável importância e que tem o papel de ferramenta para muitas áreas do conhecimento, mas os resultados obtidos em sala de aula não têm garantido a conexão com essas áreas: "de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita freqüência em relação à sua aprendizagem" (BRASIL, 1997, p. 15).

Muitos alunos, ao se depararem com o fracasso nessa disciplina, no seu desempenho escolar, sentem-se desestimulados; mais ainda quando não enxergam alguma aplicação que lhes convença de que existe ali algum sentido para continuar a estudá-la. Este não é um problema novo, contudo, vem a se agravar com o passar dos anos: cada vez mais a Matemática se torna útil e cada vez menos se consegue transmiti-la aos alunos da educação básica. Isso mostra que, apesar das muitas orientações existentes, pouco se tem feito eficazmente para alterar este quadro:

> A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama (BRASIL, 1997, p. 15).

Culturalmente, muitos equívocos vêm atrapalhando o avanço no desempenho dos educandos fora ou dentro da sala de aula, pois além das impressões culturalmente impostas sobre as dificuldades da Matemática, muitos docentes a apresentam de maneira inadequada, descontextualizada, o que vem a ser mais um componente negativo para os resultados em seu ensino, como pode-se ler a seguir:

> Muitos têm a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade. Tal constatação os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da Matemática em situações na vida futura (PCN, 1998, p. 79).

Pode-se ler nas *Orientações curriculares para o ensino médio* (BRASIL, 2006, p. 80) que "falar de ensino e aprendizagem implica a compreensão de certas relações entre alguém que ensina, alguém que aprende e algo que é o objeto de estudo – no caso, o saber matemático". A relação entre esses três elementos, professor-aluno-saber, é o que determina a qualidade da transmissão do conhecimento.

> É importante uma preocupação consciente e explícita para atender adequadamente todos os alunos de uma classe heterogênea, propondo o trabalho diversificado na sala de aula, o que pressupõe o reconhecimento de que a situação normal em uma sala de aula é a diferença de ritmo, de motivação e de formação, e de que queremos respeitar o direito de todos de acesso ao conhecimento (BRASIL, 2002, p. 120).

Existem duas correntes educacionais a serem analisadas. Uma delas é a que mais encontra-se nas práticas nas escolares: "a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseia-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento por parte do professor" (BRASIL, 2006, p. 80), sendo que, em geral tem se mostrado pouco eficaz para alunos menos interessados e atentos, atingindo apenas aqueles que já possuem dada predisposição a aprendê-la, e que, em raros casos, conseguem por seus próprios meios enxergar suas aplicações. A outra corrente diz respeito a atuação do aluno no processo de aprendizagem, apoiando-se na ideia de que esta tal prática "se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas". Sendo assim, o trabalho em sala de aula é direcionado pelo ritmo do aluno que

> [...] ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático (BRASIL, 2006, p. 80).

Deve-se notar que um dos problemas da primeira corrente está associado ao padrão "definição > exemplos > exercícios", que dificulta aos alunos a conexão entre o conteúdo aprendido e outros contextos onde este conteúdo poderia ser útil. Muitas vezes, a visão que o aluno tem é de que os resultados obtidos são somente úteis para aquele problema ou, no máximo, para um outro muito semelhante.

Na segunda corrente*, primeiro é apresentada uma situação-problema, cabendo ao aluno construir os conhecimentos necessários para resolução e, por fim, a formalização do conceito, "tendo o professor como um mediador e orientador do processo ensino-aprendizagem, responsável pela sistematização do novo conhecimento" (BRASIL, 2006, p. 80). O professor terá papel decisivo nesta forma de aprendizado, pois ele

> [...] promove e media o diálogo educativo; favorece o surgimento de condições para que os alunos assumam o centro da atividade educativa, tornando-se agentes do aprendizado; articula abstrato e concreto, assim como teoria e prática; cuida da contínua adequação da linguagem, com a crescente capacidade do aluno, evitando a fala e os símbolos incompreensíveis, assim como as repetições desnecessárias e desmotivantes (PCNEM, p. 51).

Este é o processo didático sugerido para a prática atual, pois remete à "importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento", em contraponto com o fato de que "ainda hoje nota-se a pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas" (BRASIL, 1997, p. 21) e de que "as idéias dominantes em cada época sobre a educação e a ciência raramente coincidem com a educação efetivamente praticada no sistema escolar, onde as condições escolares são muito distintas das idealizadas" (PCNEM, 2000, p. 47). Neste processo, o conhecimento matemático é dado de forma que "a partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas e as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado no ensino do conhecimento matemático" (BRASIL, 1998, p. 26).

Ainda deve-se levar em conta, num campo mais amplo de atuação, que "a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação" (BRASIL, 1997, p. 26).

> [...] o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (BRASIL, 1997, p. 26).

---

*Trata-se da *corrente construtivista*, cujo pressuposto básico é tomar a aprendizagem como resultado da construção do conhecimento pelo aluno, processo em que se respeitam as idéias dos alunos prévias ao processo de aprendizagem (PCNEM, 2000, p. 48).

Há que se considerar também o compromisso do ensino do conhecimento matemático, pois "dado seu caráter de linguagem e de instrumental universal, os desvios no aprendizado influenciam muito duramente o aprendizado das demais ciências" (PCNEM, 2000, p. 49), o que mostra a necessidade de mudanças educacionais, de maneira eficaz, em grande parte das escolas.

4.1 A ATUALIZAÇÃO DO PROFESSOR E DA ESCOLA

Nesta seção, toma-se como foco que os principais desafios são "a formação adequada de professores, a elaboração de materiais instrucionais apropriados e até mesmo a modificação do posicionamento e da estrutura da própria escola, relativamente ao aprendizado individual e coletivo" (PCNEM, p. 49). O objetivo é apresentar motivos para a atualização do docente, além de apontar mudanças necessárias no ambiente escolar da educação básica. Uma das principais referências é a condição de que "se há algo de realmente importante que o professor possa fazer para seus alunos é ensiná-los a aprender", ou seja, "mostrar a necessidade e a possibilidade do permanente aprendizado e dar testemunho de que este aprendizado é prazeroso" (PCN+, 2002, p. 139).

> Na década de 70, já se propunha uma democratização do conhecimento científico, reconhecendo-se a importância da vivência científica não apenas para eventuais futuros cientistas, mas também para o cidadão comum, paralelamente a um crescimento da parcela da população atendida pela rede escolar. Esse crescimento, especialmente no tocante ao Ensino Médio, não foi acompanhado pela necessária formação docente, resultando assim em acentuada carência de professores qualificados, carência que só tem se agravado até a atualidade (PCNEM, 2000, p. 47).

Segundo o PCN+ (2002, p. 139), "os crônicos e reconhecidos problemas da formação docente", "a não efetivação das novas orientações promulgadas para a formação dos professores" e "a falta da formação profissional contínua ou permanente do professor, paralelamente a seu trabalho escolar" são pontos que merecem atenção. A rotina de trabalho em sala de aula não permite ao professor exercer sua criatividade para elaborar situações didáticas eficazes na sua área de conhecimento e que despertem interesse em seus alunos; além disso, "as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória" (PCN, p. 22), mostrando que há a necessidade de ações a serem promovidas pela Escola, pois de acordo com o PCN+ (p. 140) "há consenso de que a formação é mais eficaz quando inserida na realidade em que o professor atua cotidianamente". Fica claro o objetivo esperado dessas ações: "professores reflexivos e críticos, ou seja, professores com um conhecimento satisfatório das questões relacionadas ao ensino-aprendizagem e em contínuo processo de autoformação" (PCN+, 2002, p. 144).

Devem-se levantar as questões autocríticas, destacando "a importância de o professor saber o que faz em sala de aula e de saber por que faz dessa forma e não de outra (PCN+, 2002, p. 144). A princípio, é necessário notar que há um grande distanciamento entre a prática atual e as ideias sugeridas:

> [...] tanto as propostas curriculares como os inúmeros trabalhos desenvolvidos por grupos de pesquisa ligados a universidades e a outras instituições brasileiras são ainda bastante desconhecidos de parte considerável dos professores que, por sua vez, não têm uma clara visão dos problemas que motivaram as reformas. O que se observa é que idéias ricas e inovadoras não chegam a eles, ou são incorporadas superficialmente ou recebem interpretações inadequadas, sem provocar mudanças desejáveis (PCN, 1997, p. 21).

Inclui-se ainda, a este somatório, as condições de trabalho oferecidas pela escola, que muitas vezes não é minimamente satisfatória. Tudo isso contribui para a não efetivação e o não desenvolvimento de tais ações, ocorrendo adaptações didáticas que, em geral não possibilitam o resultado esperado. Para os PCN (1997, p. 22), "tais problemas acabam sendo responsáveis por muitos equívocos e distorções em relação aos fundamentos norteadores e idéias básicas que aparecem em diferentes propostas".

A seguir, serão apresentadas duas justificativas para as mudanças de postura didática; a primeira delas trata da *forma* de como é apresentado um problema matemático, que muitas das vezes é feita de maneira equivocada:

> [...] a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas; outras vezes a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos (PCN, 1997, p. 22).

Utilizar-se de um problema matemático sempre após a apresentação de um conceito trará a impressão de que o problema é sempre o fim de uma situação didática, e desta forma não ocorrerá o efeito desejado, que é a autonomia do aluno para aplicar os conhecimentos obtidos a partir da resolução de um problema inicial em uma outra situação-problema, *a posteriori*. Segundo a resolução CNE/98, deve-se "orientar o aprendizado para uma maior contextualização, uma efetiva interdisciplinaridade e uma formação humana mais ampla, não só técnica, já recomendando uma maior relação entre teoria e prática no próprio processo de aprendizado" (PCNEM, p. 48). É necessário observar que "conteúdos são veículo para o desenvolvimento de idéias fundamentais e devem ser selecionados levando em conta sua potencialidade quer para instrumentação para a vida, quer para o desenvolvimento do raciocínio" (PCN, 1997, p. 22).

A segunda justificativa trata da *ordem* dos conteúdos, muitas vezes engessada em planejamentos estáticos, como se sempre houvesse uma hierarquia entre eles: "é uma organização, dominada pela idéia de pré-requisito, cujo único critério é a definição da estrutura lógica da Matemática, que desconsidera em parte as possibilidades de aprendizagem dos alunos" (PCN, 1997, p. 22). Ao se trabalhar dessa forma, sugere-se a ideia de uma fila de conteúdos que, uma vez aprendidos, servirão futuramente apenas como instrumento para o novo aprendizado, e "quando acontece de serem retomados (geralmente num mesmo nível de aprofundamento, apoiando-se nos mesmos recursos), é apenas com a perspectiva de utilizá-los como ferramentas para a aprendizagem de novas noções" (PCN, 1998, p. 22).

É importante a percepção de que um mesmo conteúdo pode e deve ser lembrado, ensinado e utilizado em vários momentos e contextos. Aliás, é a possibilidade de vê-lo em vários contextos que trará cada vez mais segurança para utilizá-lo futuramente, consolidando seu aprendizado. Numa aula de Probabilidade, por exemplo, pode-se tentar imaginar a frustração de um aluno ao, mediante uma dúvida, ouvir de seu professor que ele "já deveria saber *tudo* sobre frações". Ora, é provável que nem mesmo este professor saiba *tudo* o que julga, no sentido amplo da palavra. O fato é que ali tem-se a oportunidade de ampliar a utilização de um conceito aprendido anteriormente e, ainda, de perceber que esta atitude será muitas vezes recorrente.

Ideias sobre mudanças de postura do professor devem ser relevantes para toda a Educação Básica, pois existem muitas deficiências que se acumulam desde os primeiros anos de escolaridade. Para os PCNEM (p. 49) "essas deficiências se agravam na escola média, época caracterizada pelo ritmo vertiginoso de mudanças econômicas e culturais, aceleradas por uma revolução científico-tecnológica mal acompanhada pelo desenvolvimento na educação".

O objetivo não é "depositar a esperança desse acompanhamento simplesmente numa exigência maior sobre a cultura científica do professor que, afinal, não deve ser pensado como detentor de todo o saber da ciência contemporânea" PCNEM (p. 49):

> [...] é preciso superar a visão enciclopédica do currículo, que é um obstáculo à verdadeira atualização do ensino, porque estabelece uma ordem tão artificial quanto arbitrária, em que pré-requisitos fechados proíbem o aprendizado de aspectos modernos antes de se completar o aprendizado clássico e em que os aspectos “aplicados” ou tecnológicos só teriam lugar após a ciência “pura” ter sido extensivamente dominada. Tal visão dificulta tanto a organização dos conteúdos escolares quanto a formação dos professores (PCNEM, p. 49).

Existe, sim, a necessidade de atualização professor, mas a própria escola também precisa mudar, oferecendo atitudes científicas modernas aos seus alunos. Professores e alunos são agentes da construção do conhecimento, e isso deve ser posto em prática, deixando-se de pensar no aluno como um receptor passivo de conteúdos. Segundo os PCNEM (p. 49), a Matemática precisa "desenvolver atitudes e valores, através de atividades dos educandos, como discussões, leituras, observações, experimentações e projetos, uma nova postura metodológica difícil de implementar, pois exige a alteração de hábitos de ensino há muito consolidados".

O que se pode acrescentar é que o aprendizado da Matemática deve ser tratado como algo prazeroso pois "quando a escola promove uma condição de aprendizado em que há entusiasmo nos fazeres, paixão nos desafios, cooperação entre os partícipes, ética nos procedimentos", simultaneamente promove "as condições para a formação dos valores humanos fundamentais, que são centrais entre os objetivos da educação" (PCNEM, p. 55).

4.1.1 Atualização para o Ensino de Probabilidade

No capítulo 3, foram apresentadas justificativas para o ensino da Probabilidade, entre elas o fato de que está presente no cotidiano, e considera-se que ela promove a compreensão de grande parte dos acontecimentos aleatórios, dando a possibilidade de identificar resultados possíveis nesses acontecimentos. Os

PCN (1997, p. 21) destacam "a importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos, incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos". O acaso e a incerteza são manifestações analisadas intuitivamente, sendo papel da escola e do professor promover situações que permitam a consolidação dessas idéias, através da realização de experimentos e da observância de eventos relativos a eles.

Entre professores de Matemática, ainda existe muita insegurança quando se trata do ensino de Probabilidade. Muitos, durante a graduação, não obtiveram contato suficiente com este tema, nem sequer orientações sobre seu ensino e sua importância para o aluno da Educação Básica, mesmo sendo uma indicação dos PCN. Deste modo, é visto nas escolas como assunto secundário, apresentado superficialmente; em geral, apenas ideias básicas são levadas ao aluno, propiciando um aprendizado aquém das expectativas.

Uma ideia a se pensar é a de que poucos planejamentos escolares privilegiam este conteúdo no Ensino Fundamental desde os 3º e 4º ciclos, fazendo com que os alunos cheguem ao Ensino Médio sem qualquer conhecimento prévio sobre o assunto. Quando estes são estudados, as fórmulas são apresentadas sem demonstração, deixando a impressão de que podem ser compreendidas apenas por grandes gênios; elas são utilizadas considerando-se somente a finalidade de resolução de alguns poucos e repetitivos exercícios, sem contexto adequado, envolvendo processos mecânicos, insuficientes para maiores formalizações, ainda reforçando a falsa ideia de superficialidade do assunto.

Para este trabalho, foi feita uma pesquisa com 698 alunos do Colégio Estadual Presidente Rodrigues Alves, situado na cidade de Paracambi/RJ, entre março e maio de 2017. Esta é uma unidade escolar que oferece o Ensino Médio, em 23 turmas, nas modalidades Curso Regular e Curso Normal, em três turnos. Na primeira parte da pesquisa foi feito um levantamento sobre a origem destes alunos e descobriu-se que são oriundos de 102 escolas de Ensino Fundamental, situadas em 25 cidades de 7 estados brasileiros, conforme apêndice A.

Na segunda parte da pesquisa, os alunos foram perguntados sobre a oferta de 5 temas nestas escolas. São eles: i) *Equação do 2º grau*, ii) *Teorema de Pitágoras*, iii) *Probabilidade*, iv) *Área e Perímetro de Figuras Planas* e v) *Razão e Proporção.* A todos os alunos foram feitas referências sobre cada um dos temas, para situá-los antes de responder, evitando prejuízo na pesquisa pelo possível desconhecimento em relação à nomenclatura do tema (ver apêndice B). A tabela a seguir mostra o quantitativo de alunos que afirmam ter estudado cada um dos temas mencionados.

Tabela 1 – Quantidade e percentual de alunos nos temas pesquisados

Temas estudados pelos alunos no ensino fundamental	Quantidade de alunos que estudaram o tema no ensino fundamental	Percentual aproximado de alunos que estudaram o tema no ensino fundamental
Equação do 2º grau	631	90%
Teorema de Pitágoras	663	95%
Probabilidade	**64**	**9%**
Área e Perímetro	648	93%
Razão e Proporção	559	80%

Observe que a tabela acima mostra que apenas 9% dos alunos da pesquisa afirmam ter estudado Probabilidade em algum momento do ensino fundamental. Ao se assumir os números apresentados como uma medida de relevância dos temas, ocorre a falsa impressão de que, em relação à Probabilidade, os demais temas são consideravelmente mais importantes para o conhecimento e a formação do alunos, levando-os ao ensino médio sem as noções básicas e, consequentemente, tornando o ensino muito mais trabalhoso e ineficaz.

Para complementar a investigação, também foram analisados 44 planejamentos anuais do ensino fundamental de escolas das seguintes cidades: Itamaraju/BA, Águas lindas/GO, Belo Horizonte/MG, Paracambi/RJ, Brasília/DF, Santos/SP, São Paulo/SP, Vila Velha/ES, Vitória/ES, Florianópolis/SC e Palmas/TO, disponibilizados na internet, e o que se verificou foi a presença deste conteúdo em apenas 9 desses planejamentos (ver apêndice D), sugerindo que a Probabilidade ainda não é tratada com a devida importância nas escolas brasileiras, dada sua ausência nos planejamentos escolares, o que vem a prejudicar o aprendizado nesta área. De acordo com Corbalán (2002, apud LOPES et al, 2008, p. 78) "os conteúdos de probabilidade são de grande dificuldade para alunos do Ensino Médio, por motivos intrínsecos e porque, em geral, ainda não estudaram probabilidade até essa idade", e complementa que "deveria ser feito um grande esforço para apresentar esses temas de forma lúdica".

Sendo assim, a simples inclusão nos planejamentos não garantirá sua efetiva compreensão, pois o aprendizado de Probabilidade demanda um processo de construção de conhecimento lento e gradativo, com a utilização de tabelas, gráficos, situações-problemas, jogos, experimentos etc. Para dissolver a problemática de seu ensino, é preciso que o professor compreenda a necessidade da utilização desses métodos em sala de aula. Também a permanente utilização dos conceitos *clássico* (seção 2.3) e *frequentista* (seção 2.4) de Probabilidade, onde cada um deles não traz em si elementos suficientes para todas as situações, contudo, na educação básica, são perspectivas que precisam interagir para a ampliação do conhecimento. Assim, deve-se promover atividades envolvendo experimentos com contagem de amostras (ou a análise destas, caso já tenham sido informadas) onde a frequência relativa, em seguida, pode ser confrontada com a ideia do conceito clássico, por meio de cálculo, permitindo ao aluno uma experiência mais ampla na utilização da Probabilidade. Observe um problema relacionando estes conceitos:

Problema 1) *Vamos supor um experimento em que jogamos um percevejo, usado para afixar painéis de aviso, sobre uma superfície lisa. Qual a probabilidade dele cair apontado para cima?*

Uma solução: Primeiro é necessário entender que, neste caso, não podemos recorrer para propriedades de simetria*, pois no caso do percevejo elas não existem (ou não são provadas). A idéia é aproximar a probabilidade pela *estimativa* da probabilidade de ocorrência do evento, ou seja, jogar o percevejo várias vezes, mantendo-se as mesmas condições (mesmo percevejo, mesmo

*Em Probabilidade, o conceito de *simetria* está relacionado com o caso onde todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrência, o que não se pode afirmar no lançamento de um percevejo.

“jogador”, mesma superfície, etc.). Assim, a estimativa da probabilidade será pela frequência relativa da amostra:

$$\text{Frequência relativa} = \frac{\text{número de vezes em que o percevejo caiu apontado para cima}}{\text{número de realizações do experimento}}$$

É importante destacar para o aluno que a relação do conceito frequentista com o conceito clássico ocorre quando, de posse do número de casos favoráveis e do número de realizações do experimento, pode-se estimar a frequência relativa por meio de uma razão, e que quanto maior for o número de realizações do experimento, melhor será esta estimativa. Se o percevejo cair com a ponta para cima em aproximadamente 70% dos lançamentos, este é o *comportamento esperado* do evento. Portanto, sua probabilidade tende a ser de 0,7 (ou 70%).

Também é preciso atentar que a variedade de temas que podem ser abordados em problemas de Probabilidade é algo que exige do aluno uma capacidade de conhecimento sobre os mesmos, o que torna-se uma dificuldade à parte em seu aprendizado. Em contrapartida, é também uma maneira interessante de se revisitar tais temas, sejam eles matemáticos ou não. Os exemplos abaixo mostram isso:

Problema 2) (FUVEST-SP) *"Escolhido ao acaso, um elemento do conjunto dos divisores positivos de 60, determine a probabilidade de que ele seja primo".*

Uma solução: Os divisores de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60. Entre eles os primos 2, 3 e 5.

Logo, P = $\frac{3}{12}$ = $\frac{1}{4}$ = 0,25 = 25% é a probabilidade de que o número sorteado seja primo.

Problema 3) *"Um casal heterozigoto para o albinismo deseja saber qual a probabilidade deles terem um filho albino e do sexo masculino?"*

Uma solução: Um casal heterozigoto[1] (Aa x Aa) pode ter filhos *AA, Aa, aA* ou *aa* em igual chance de 1/4, sendo que somente nos casos *aa* serão albinos[2], por se tratar de caráter recessivo[3], e a probabilidade de nascer um filho do sexo masculino é 1/2.

Eis o diagrama de possibilidades:

$$\text{AA}\begin{cases}\nearrow \text{Masculino}\\ \searrow \text{Feminino}\end{cases}$$

$$\text{Aa}\begin{cases}\nearrow \text{Masculino}\\ \searrow \text{Feminino}\end{cases}$$

$$\text{aA}\begin{cases}\nearrow \text{Masculino}\\ \searrow \text{Feminino}\end{cases}$$

$$\text{aa}\begin{cases}\nearrow \text{Masculino}\\ \searrow \text{Feminino}\end{cases}$$

Logo, P = $\frac{1}{4}$ x $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{8}$ = 0,125 = 12,5% é a probabilidade de nascer um filho albino do sexo masculino. Outra forma de se pensar é que temos apenas 1 possibilidade para albino masculino, em 8 resultados possíveis.

No problema 2, fica clara a necessidade de conhecimento sobre divisores e números primos, já antecipada no próprio enunciado, mostrando ser um problema interessante por dar uso a esses conceitos matemáticos. Já no problema 3, a probabilidade atua como ferramenta para a Biologia, utilizando, além do conceito de produto de probabilidades (que deve ser construído a partir de um diagrama de possibilidades), conceitos de Genética.

---

[1]Em genética, os seres homozigotos possuem pares de genes alelos idênticos, enquanto que os heterozigotos caracterizam os indivíduos que possuem dois genes alelos distintos.
[2]Pessoa que sofre de albinismo, distúrbio congênito caracterizado pela ausência completa ou parcial de pigmento na pele.
[3]Caráter recessivo é um traço que se expressa somente quando duas cópias do gene responsável pela característica estão presentes.

Não se ambiciona aqui em mostrar todos as medidas necessárias ao sucesso no ensino de Probabilidade, mas, sim, a oferecer um ponto de partida para que se elimine a ideia de mecanicidade que ainda permeia está área. Em Probabilidade deve-se promover o raciocínio, em detrimento da memorização de fórmulas. Também deve ocorrer a realização experimentos para relacionar os conceitos clássico e frequentista, com uso de materiais que propiciem esses experimentos. Assim, é importante ao professor, em seu processo didático, utilizar-se de problemas que privilegiam recorrer a vários temas e conceitos, destacando aos alunos a relação desses problemas com o cotidiano, e pensá-los positivamente como forma de enriquecer suas aulas.

4.2 A REALIDADE, O CONTEXTO, A INTERPRETAÇÃO E A COMUNICAÇÃO EM MATEMÁTICA

4.2.1 A Realidade do Aluno

A escola atual, em sua grande parte, ainda desconsidera um fator que é provavelmente um dos mais importantes: o conhecimento prévio do aluno. Os PCN (1997, p. 29) afirmam que "tem-se buscado, sem sucesso, uma aprendizagem em Matemática pelo caminho da reprodução de procedimentos e da acumulação de informações" e que "nem mesmo a exploração de materiais didáticos tem contribuído para uma aprendizagem mais eficaz, por ser realizada em contextos pouco significativos e de forma muitas vezes artificial".

A Educação tem se mostrado distante do mundo real do aluno, na forma como são ministradas as aulas, e mais especialmente no que se refere ao aprendizado da Matemática, onde pouco do que vêem é de fato aproveitado para suas vidas. Para os PCN (1997, p. 29) é importante "não subestimar a capacidade dos alunos, reconhecendo que resolvem problemas, mesmo que razoavelmente complexos, lançando mão de seus conhecimentos sobre o assunto e buscando estabelecer relações entre o já conhecido e o novo. A sua realidade é vivida na prática, as suas experiências e impressões são subjetivas e a sua interação com o mundo é permanente; o que deve-se notar é que tanto na escola quanto fora dela o jovem está submetido a regras, com a diferença de que a escola nem sempre transmite com clareza os seus objetivos, o que implica num distanciamento entre educação e prática do dia-a-dia. Faz-se necessário que se reveja os procedimentos realizados, considerando a realidade de seus alunos, de forma a integrar o que se aprende ao que já foi aprendido, pois segundo os PCN (1997, p. 22)

> [...] na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer da atividade prática, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para o tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal.

O reconhecimento dessa realidade equivale a oportunidade de promover o verdadeiro ensino, confrontando a experiência já adquirida com o novo saber matemático, pois "apesar de seu caráter abstrato, seus conceitos e resultados têm origem no mundo real e encontram muitas aplicações em outras ciências e em inúmeros aspectos práticos da vida diária" (PCN, 1997, p. 29). Mesmo sem formalizações, os alunos trazem visões que devem ser consideradas, como pode-se ler a seguir:

> Os alunos chegam à escola já trazendo conceitos próprios para as coisas que observam e modelos elaborados autonomamente para explicar sua realidade vivida, inclusive para os fatos de interesse científico. É importante levar em conta tais conhecimentos, no processo pedagógico, porque o efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há uma confrontação verdadeira de visões e opiniões (PCNEM, p. 52).

Pode-se admitir que essas visões e opiniões foram construídas em algum contexto prático, para alguma finalidade, ora devem ser assim compreendidas pela escola:

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam uma inteligência essencialmente prática, que permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões e, portanto, desenvolver uma ampla capacidade para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (PCN, 1997, p. 29).

Assim, o sucesso do aprendizado escolar do aluno é resultado de todo o trabalho feito pela escola, incluindo a observância de condições prévias, inerentes e peculiares a cada ser humano, devendo a atividade matemática ser pensada como uma extensão da visão cotidiana do aluno.

4.2.2 A Importância da Contextualização

O que foi visto até o momento reforça a ideia da necessidade de contextualizar atividades. O PCN+ (p. 126) ressalta a importância de utilizar a "contextualização sócio-cultural como forma de aproximar o aluno da realidade e fazê-lo vivenciar situações próximas que lhe permitam reconhecer a diversidade que o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nesta realidade". Comete-se um erro ao se acreditar que a simples obtenção de uma resposta correta leva o aluno a consolidar o aprendizado. Deve-se atentar a que "o conhecimento matemático é fruto de um processo de que fazem parte a imaginação, os contra-exemplos, as conjecturas, as críticas, os erros e os acertos", mas na prática isso não é observado, pois o conteúdo é dado "de forma descontextualizada, atemporal e geral, porque é preocupação do matemático comunicar resultados e não o processo pelo qual os produziu" (PCN, 1997, p. 24), fato que se apresenta como forte indício de fracasso escolar.

A Matemática é uma disciplina peculiar por ser uma linguagem própria, utilizada em quase todas as áreas de conhecimento científico e no dia-a-dia das pessoas. Exatamente essa peculiaridade pode ser uma aliada do ensino, pois é onde se destaca sua importância instrumental. Ocorre que a escola não tem conseguido transmitir aos seus alunos o conhecimento necessário para atuar nessas áreas e no próprio desenvolvimento da Matemática como ciência. A contextualização tem o intuito de reduzir a distância entre o conteúdo escolar e o cotidiano, utilizando-se de situações que envolvam outras áreas como suporte à criação de novas habilidades e do raciocínio matemático, mas a maneira como é apresentada na escola vem dificultando a noção dos alunos sobre sua importância:

> [...] aulas limitadas à exposição de conteúdos, em sua maioria sem nenhuma referência à história de sua construção são predominantes na sala de aula. E para fixação de conteúdos, os alunos são sujeitos a uma bateria de exercícios repetitivos, restritos à aplicação de fórmulas imediatas em várias questões com quase sempre os mesmos enunciados. Deste modo, a abstração, que é uma virtude do conhecimento matemático, tende a distanciar-se cada vez mais do aluno (MARTINS, 2008).

A contextualização tem a função de estruturar o raciocínio do aluno, permitindo a ele desenvolver habilidades fundamentais à formação matemática. Segundo Busetto (2010, p. 11), isto o capacita a "compreender e interpretar situações, para se aprimorar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, concluir, posicionar-se e tomar decisões". Também, de acordo com as *Orientações para o ensino médio* (2006, p. 83)

> É na dinâmica de contextualização / descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas. A contextualização não pode ser feita de maneira ingênua, visto que ela será fundamental para as aprendizagens a serem realizadas – o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de "ilustrar" o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola.

Na utilização da resolução de problemas como forma de contextualização, uma questão importante trata dos problemas *fechados* e *abertos* e da *situação-problema*. No problema fechado "já de antemão o aluno identifica o conteúdo a ser utilizado, sem que haja maiores provocações quanto à construção de conhecimento e quanto à utilização de raciocínio matemático" (BRASIL, 2006, p. 83), ofuscando a real aprendizagem e tornando o processo mecânico. "Os problemas fechados incluem, em frases curtas ou em pequenos parágrafos, todos os dados necessários para a sua única solução" (SOARES, p. 1).

Observe um exemplo de problema fechado aplicado após a apresentação da definição clássica de probabilidade:

Problema 4) *"No lançamento de um dado não viciado, com seis faces numeradas de 1 a 6, qual é a probabilidade de obtermos um número maior que 4?"*

Solução: Dado o espaço amostral S = {1,2,3,4,5,6}, com n(S) = 6 e o evento E = {obter um número maior que 4} = {5, 6}, com n(E) = 2, a probabilidade de ocorrência de E é:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

O objetivo do problema acima é o cálculo da probabilidade a partir da definição clássica; não houve a necessidade da nenhum raciocínio, além da aplicação de uma fórmula sobre os dados informados. É importante dizer que não se trata da reprovação deste tipo de problema, mas, sim, de uma crítica à exclusividade de seu uso, anulando, assim, a possibilidade de construção de novos conceitos.

A partir da visão construtivista, sugere-se, então, o uso do *problema aberto*, que "apresenta frases ou parágrafos mais longos, contém por vezes dados suplementares, permite vários modos de resolução e até diferentes soluções" (SOARES, p. 1) e da *situação-problema**, onde "o aluno deve, realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testar essas hipóteses e validar seus resultados" (BRASIL, 2006, p. 84). Dessa forma, ocorre a discussão e a interação, onde a relação professor-aluno e aluno-aluno promovem o conhecimento matemático. E, segundo as Orientações curriculares:

> O conhecimento passa a ser entendido como uma importante ferramenta para resolver problemas, e não mais como algo que deve ser memorizado para ser aplicado em momentos de "provas escritas" (BRASIL, 2006, p. 84).

A seguir, um exemplo de problema aberto que pode ser aplicado após o ensino de *união e intersecção de eventos* e *eventos complementares*:

Problema 5) (PUC-RIO 2008) *"No jogo de Lipa sorteia-se um número entre 1 e 600 (cada número possui a mesma probabilidade). A regra do jogo é: se o número sorteado for múltiplo de 6 então o jogador ganha uma bola branca e se o número sorteado for múltiplo de 10 então o jogador ganha uma bola preta. Qual a probabilidade de o jogador não ganhar nenhuma bola?"*

Uma solução: De 1 a 600 existem 100 múltiplos de 6 e 60 múltiplos de 10. Destes, há 20 números que são múltiplos de ambos. Logo, para se ganhar uma bola, temos a seguinte quantidade de casos: 100 + 60 - 20 = 140, (logo, 460 casos onde não se ganha nenhuma bola). Portanto, considerando o evento E equivalente a não se ganhar nenhuma bola, sua probabilidade é dada por:

$$P(E) = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

---

*Enquanto o "problema aberto" visa a levar o aluno a certa postura em relação ao conhecimento matemático, a situação-problema leva o aluno à construção de um novo conhecimento matemático. Podemos caracterizar uma situação-problema como uma situação geradora de um problema cujo conceito, necessário à sua resolução, é aquele que queremos que o aluno construa.

No problema acima, a resolução depende de uma análise mais complexa, pois necessita do conteúdo de probabilidade propriamente dito além de permitir revisitar o conhecimento sobre *múltiplos,* tornando o problema mais rico.

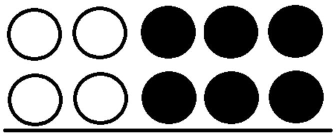
Trabalhar com a situação-problema também é uma estratégia bastante interessante, pois, diferentemente do problema aberto, onde o intuito é identificar e utilizar de conceitos já aprendidos, o objetivo é a construção de um novo conhecimento.

> Se por um lado a idéia de situação-problema pode parecer paradoxal, *pois como o aluno pode resolver um problema se ele não aprendeu o conteúdo necessário à sua resolução?*, por outro lado, a história da construção do conhecimento matemático mostra-nos que esse mesmo conhecimento foi construído a partir de problemas a serem resolvidos (BRASIL, 2006, p. 84).

Exemplo de situação-problema:

Problema 6) *"Uma professora de Matemática, no intuito de ensinar aos alunos sobre probabilidade, colocou dentro de uma urna 4 bolas brancas e 6 bolas pretas. Logo em seguida realizou a seguinte pergunta: Qual a chance de retirarmos da urna uma bola da cor branca?"*

Figura 4 — Representação de uma urna com 4 bolas brancas e 6 bolas pretas



Uma solução: A situação esperada aqui é que algum dos alunos diga que *a chance de alguma pessoa retirar da urna uma bola da cor branca é de 4 em 10*, argumentando que *no total temos 10 bolas, 4 brancas e 6 pretas e, como queremos retirar somente uma bola, a chance é de 4 bolas num total de 10*. A professora poderá concluir, dizendo que *a probabilidade de 4 em 10 é correspondente a 40% (quarenta por cento)*, pois:

$$\frac{4}{10} = \frac{4:2}{10:2} = \frac{2}{5} = 0{,}40 = 40\%$$

Nesta situação, não houve necessidade de apresentação prévia dos conceitos de probabilidade e porcentagem; ao contrário, exatamente, eles foram construídos a partir do problema, mostrando que a resolução de um problema pode ser um ponto de partida ao invés de um objetivo.

Ainda, ao se falar em contexto é importante lembrar que não se refere somente ao dia-a-dia do aluno. Há outras formas de dar significados a um conteúdo e "esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos", ou corre-se o risco de perder pontos de vista interessantes "por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata" (PCN, 1998, p. 23). Um caso particular do *problema dos pontos* (ou *problema da divisão de apostas*) é um exemplo onde pode-se fazer uso da história da Matemática:

Problema 7) *"Dois jogadores jogam uma série de partidas justas* [*] *até que um deles obtenha 6 vitórias. Por motivos exteriores ao jogo, este é interrompido quando um dos jogadores somava 5 vitórias e o outro 3 vitórias. Como devemos dividir, de forma justa, o montante apostado por ambos os jogadores?"*

De acordo com Tenreiro (2004), por volta de 1652, este problema é colocado a Pascal (1623-1662) pelo Chevalier de Méré, um homem de letras e filósofo marcante na corte de Luís XIV. No verão de 1654, ele é o principal motivo duma troca de sete cartas entre Pascal e Fermat (1601-1665), até chegarem, de maneiras diferentes, à uma mesma resposta. Em 1494, o problema já tinha sido discutido por Pacioli (1445-1517), que propõe 5/8 do prêmio ao jogador com 5 vitórias e 3/8 ao jogador com 3 vitórias. Para ele o problema da divisão das apostas é um problema sobre proporções, mas para Pascal e Fermat reduz-se a um problema de probabilidades de vitória de cada jogador. Abaixo, as soluções análogas às apresentadas por Pascal e Fermat:

---

[*] Ambos os jogadores têm a mesma chance de vitória em cada partida.

Solução de Pascal: Vamos supor os jogadores A e B com 5 e 3 vitórias, respectivamente. Portanto, já ocorreram 8 partidas e este jogo terá, no máximo, 3 partidas antes de seu término.

Jogador A	V	V	V	V	V	
Jogador B	V	V	V			

Visto que ganhar ou perder uma partida têm a mesma chance de ocorrência (1/2), pode-se analisar as chances de vitória nas etapas a seguir do ponto de vista do jogador A, já que a vitória numa partida é complementar à derrota nessa mesma partida.

PARTIDA 9

O jogador A ganha a próxima partida (1/2) e vence o jogo, ou o jogo segue para a partida 10, com 4 vitórias para o jogador B.

Jogador A	V	V	V	V	V	
Jogador B	V	V	V	V		

PARTIDA 10

O jogador A ganha a próxima partida (1/2 x 1/2)* e vence o jogo, ou o jogo segue para a partida 11, agora com 5 vitórias para o jogador B.

Jogador A	V	V	V	V	V	
Jogador B	V	V	V	V	V	

PARTIDA 11

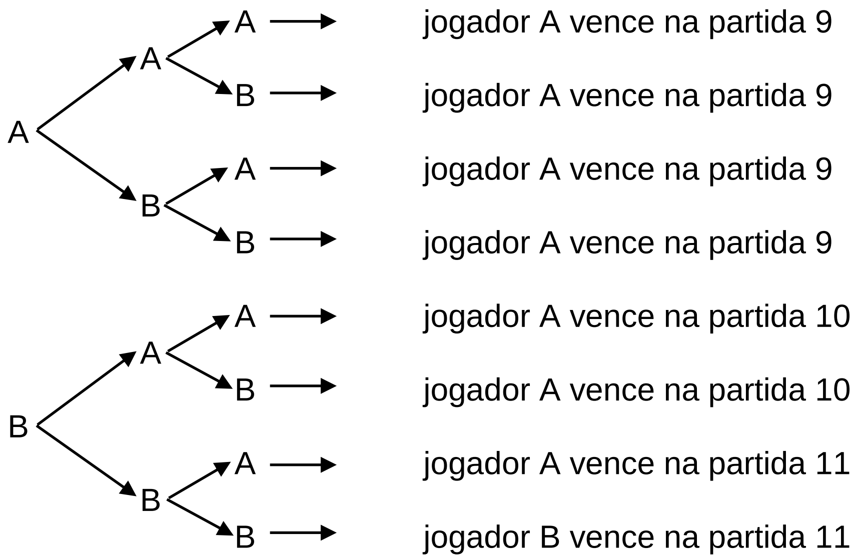
O jogador A ganha esta partida (1/2 x 1/2 x 1/2) e vence o jogo, ou o jogador B vence o jogo. Em ambos os casos, o jogo termina e a probabilidade de

*Aqui pode ser o momento de se construir o conceito de produto de probabilidades, caso ainda não tenha ocorrido.

vitória do jogador A será dada pela soma das probabilidades em cada em cada etapa:

P (jogador A vencer) = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$, portanto, devendo o jogador A ficar com 7/8 do prêmio, enquanto ao jogador B cabe 1/8 do prêmio.

Solução de Fermat: Através de um árvore, escrevem-se todas as possibilidades para as três partidas finais:



Dessa forma, Fermat concluiu que há 7 possibilidades em 8 de o jogador A vencer, cabendo-lhe 7/8 do prêmio, e 1/8 do prêmio ao jogador B.

Com a devida condução do professor, este problema permite, além de sua importância histórica, o confronto de diferentes resoluções e a dissolução do equívoco cometido por Pacioli sobre a divisão dos prêmios.

4.2.3 A Dificuldade na Interpretação e na Comunicação em Matemática

Ler e escrever nos dias de hoje não garantem ao cidadão ser considerado alfabetizado; para tal há a necessidade de interpretar, dar significado à leitura e obter conclusões a partir do compreendido. Isso vai além do conhecimento da língua materna. Grande parte dos problemas de aprendizado em Matemática diz respeito à má interpretação dos enunciados e à compreensão do problema em questão. Uma visão semântica pode ser observada a seguir:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos (PCN, 1997, p. 19).

Em Probabilidade, a dificuldade de muitos problemas incide na interpretação do enunciado, onde constam palavras e objetos de pouco uso dos alunos, tornando o problema incompreensível. Um exemplo disso é visto abaixo:

Problema 8) *"Sabemos que um baralho é composto de 52 cartas, onde temos a representação de quatro naipes: copas, ouro, paus e espadas. Dessa forma, cada naipe é representado por 13 cartas. Determine a probabilidade de escolhermos ao acaso e sucessivamente, três cartas de um mesmo naipe sem reposição."*

Figura 5 — Cartas de baralho (8, 9 e 10 de copas)

Deve-se atentar que o de baralho, ao contrário do que se possa acreditar, não é tão comum aos alunos, cabendo um cuidado especial em apresentá-lo, detalhar suas cartas e quantidades.

Na pesquisa realizada para este trabalho, dos 698 participantes, 535 (aproximadamente 76%) afirmaram não saber distinguir nem agrupar por características as cartas de um baralho comum tornando, nestes casos, impraticável a resolução do problema acima. É notável a existência de muitos problemas interessantes utilizando baralhos, logo deixá-los de lado por qualquer motivo não parece ser uma boa estratégia. As palavras *acaso*, *sucessivamente*, *naipe** e

*Cada um dos quatro grupos fundamentais em que se divide um baralho comum.

reposição carecem também de uma atenção especial, quanto ao significado; e com essas questões devidamente esclarecidas aos alunos, pode-se prosseguir:

Uma solução: Sorteia-se a primeira carta entre 52 possíveis e observa-se o naipe. Como o experimento é realizado sem reposição, restam 12 cartas de mesmo naipe, num total de 51 possíveis, sendo 12/51 a probabilidade da segunda carta ter o mesmo naipe da primeira. Da mesma forma, a probabilidade da terceira carta ter o naipe igual ao das anteriores é 11/50. Logo, a probabilidade é dada pelo produto:

$$\frac{12}{51} \times \frac{11}{50} = \frac{4}{17} \times \frac{11}{50} = \frac{2}{17} \times \frac{11}{25} = \frac{22}{425} \cong 0,0517 \cong 5,17\%$$

Cabe ressaltar que o cálculo acima, sem o uso de calculadora, privilegia a revisão de *simplificação de frações*, *números decimais* e *porcentagem*, o que pode e deve ser valorizado pelo professor.

Sendo assim, não se deve atribuir o insucesso do aprendizado apenas à falta de competência sobre o conteúdo em questão; para que se tenha condição mínima de resolver problemas matemáticos há alguns pré-requisitos indispensáveis:

> [...] é necessário dominar códigos e nomenclaturas da linguagem matemática, compreender e interpretar desenhos e gráficos e relacioná-los à linguagem discursiva. Além disso, o aluno precisa analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, tomar decisões, argumentar, se expressar e fazer registros. (PCN+, 2002, p. 112)

A partir do significado que se percebe em cada objeto contido no texto, com suas palavras, símbolos e imagens, ocorre a compreensão sobre o que está escrito, resultando na comunicação com o autor. Do leitor, espera-se, inclusive, a capacidade de correlação do texto com leituras anteriores, percebendo convergências e divergências entre estes, donde presume-se a influência do conhecimento prévio na qualidade da compreensão. Sobre os textos de Matemática, devemos ressaltar suas peculiaridades:

> [...] muitas vezes a linguagem matemática apresenta uma organização da escrita diferente da utilizada nos textos convencionais, exigindo um processo particular de leitura. Daí vem a necessidade de que os alunos aprendam a ler matemática e a ler para aprender matemática, pois para interpretar um texto matemático, o leitor precisa familiarizar-se com a linguagem e com os símbolos próprios dessa disciplina, encontrando sentido no que lê,

> compreendendo o significado das formas escritas que são próprias do texto matemático, percebendo como ele se articula e expressa conhecimentos (DINIZ e SMOLE apud BUSS, 2009, p. 5).

Também é necessário levar em consideração que "a linguagem matemática não é a responsável imediata pelo pensamento matemático, pois antes estes conceitos são mediados pela linguagem natural", que possibilita esta construção (Rossi, 1993, p. 57 apud BUSS, 2009, p. 5), fazendo com que a linguagem materna e a linguagem matemática juntas viabilizem o conhecimento, de maneira inevitavelmente interligada.

A comunicação em Matemática deve constar como objetivo educacional e objeto de atenção dos educadores. Segundo o PCN+ (2002, p. 129) é necessário "enfatizar a importância da comunicação em Matemática, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão". Alunos que não têm a oportunidade de se expressar, privam-se de uma grande ferramenta de aprendizado; nesse caso, o que se observa é que a falta de interação *aluno-aluno* impossibilita a troca de métodos e estratégias, algo de grande valia para a educação matemática. Para os PCN (1997, p. 31) há muitas vantagens no trabalho coletivo dos alunos, como:

> • perceber que além de buscar a solução para uma situação proposta devem cooperar para resolvê-la e chegar a um consenso;
> • saber explicitar o próprio pensamento e tentar compreender o pensamento do outro;
> • discutir as dúvidas, assumir que as soluções dos outros fazem sentido e persistir na tentativa de construir suas próprias idéias;
> • incorporar soluções alternativas, reestruturar e ampliar a compreensão acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, desse modo, aprender.

Os PCNEM (p. 48) ressaltam que "a construção de conhecimento científico envolve valores humanos, relaciona-se com a tecnologia e, mais em geral, com toda a vida em sociedade", e indicam a necessidade de um redirecionamento na educação, fazendo uso "do diálogo e da interação social na produção coletiva".

> A predominância do silêncio, no sentido de ausência de comunicação, ainda é comum nas aulas de Matemática. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a linguagem usada para ensinar Matemática são alguns dos fatores que tornam a comunicação pouco frequente ou quase inexistente. (SMOLE E DINIZ, 2001, apud CIABOTTI, p. 2).

No PCN+ (2002, p. 130) consta que essa interação pode ser realizada utilizando como instrumento "o trabalho de grupo ou duplas, quando os alunos, além de aprenderem uns com os outros, precisam organizar o que sabem para se fazerem entender e, para isso, usam a linguagem que está sendo aprendida". Apresentar várias formas textuais também é relevante, pois "o contato repetido com as diferentes idéias, em diferentes contextos" possibilita a busca de meios de se comunicar em cada uma delas:

> Gráficos, tabelas, esquemas, desenhos, fórmulas, textos jornalísticos, manuais técnicos, rótulos de embalagens, mapas são, na escola e fora dela, as diferentes linguagens e representações que o aluno deve compreender para argumentar e se posicionar frente a novas informações (BRASIL, 2002, p. 130).

É importante que a escola incentive o hábito de se comunicar, promovendo a exposição de ideias e pensamentos, pois "a aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta" (BRASIL, 2002, p. 120). Para o PCN+ (p. 130), pensamento e comunicação devem caminhar juntos, porque "alunos que não falam sobre matemática e não têm a oportunidade de produzir seus próprios textos nessa linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nessa área".

4.3 ALTERNATIVAS ÀS AULAS EXPOSITIVAS

A realidade das salas de aula ainda distancia-se daquela que poderia proporcionar avanços significantes na educação, no que diz respeito à atratividade e participação e resultados dos alunos. Sobre as aulas expositivas, afirmam o PCNEM (p. 53) que "é comum que sejam o único meio utilizado, ao mesmo tempo em que deixam a idéia de que correspondem a uma técnica pedagógica sempre cansativa e desinteressante", quando deveria ser um momento de debate a favor da elaboração do conhecimento. A aula expositiva tradicional mostra-se ineficaz pois, segundo os PCN (1997, p. 30) "a reprodução correta poderia ser apenas uma simples indicação de que o aluno aprendeu a reproduzir mas não apreendeu o conteúdo". Logo, o professor assume nova função: "fornece as informações necessárias, que o aluno não tem condições de obter sozinho, faz explanações, oferece materiais, textos etc". Também atua como mediador "ao promover a confrontação das propostas dos alunos, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar" (PCN, 1997, p. 30). Por isso, na construção de sua prática, é importante conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula.

Aqui será reproduzida uma situação-problema sugerida pelos PCN (p. 137) para os 3º e 4º ciclos do ensino fundamental, com o objetivo de investigar e ampliar a noção de probabilidade:

Problema 9) *"Em 10 lançamentos de uma moeda deu 9 vezes cara, ou seja, 90% dos lançamentos. A partir dessa afirmação é possível explorar as seguintes situações: se a moeda for lançada mais 10 vezes, é provável que essa porcentagem se repita? e se o número de lançamentos for 1.000? ou 10.000? Qual é a porcentagem que deve dar em cada caso? As respostas dos alunos evidenciam sua intuição a respeito de algumas idéias envolvidas na probabilidade e favorecem um trabalho de familiarização com esse assunto. É importante que eles descubram, pela experimentação, que as chances de cada resultado ser igual a 50%. Deve-se à simetria da moeda e sua homogeneidade (moeda honesta).*

Com esse trabalho espera-se que o aluno também perceba que ele poderia ter lançado uma moeda 15 vezes obtendo nesses lançamentos 15 caras. Mas, mesmo que isso tivesse acontecido (o que é bem difícil) no 16º lançamento, a chance de obter cara continua sendo a mesma de obter coroa e que a disparidade entre os resultados de cara e de coroa tendem a diminuir conforme se amplia o número de experimentos."

A atividade acima é um exemplo de que não se precisa trabalhar de forma engessada, contando apenas com quadro e caneta. Pode-se promover um debate, onde o processo pode e deve ser tanto investigativo, quando diz respeito à avaliar o aluno, quanto participativo, quando promove a interação e comunicação.

Também, a utilização de jogos, como alternativa às aulas expositivas, é uma ótima estratégia para iniciar o ensino de Probabilidade. De acordo com Lopes et al (2011, p. 88), começar com jogos desperta o interesse, pois os alunos gostam de competir, ficando mais fácil questionar problemas que os envolvem. Também é notável que "os jogos podem ser atividades excelentes para a introdução de conceitos do campo da Probabilidade" (CABRAL, 2006, apud CIABOTTI), pois "divertem a humanidade desde a formação das primeiras civilizações, por colocarem as pessoas em situações nas quais vencer ou perder dependem das escolhas feitas" e "se tornou uma ferramenta para o desenvolvimento das pessoas, mas só despertou interesse após muito tempo, com o surgimento da teoria da probabilidade" (ALMEIDA, 2006, apud BUSS, p. 12).

Na visão de Rubió e Freitas (2005, apud BUSS, p. 12), o caráter lúdico, a estimulação da atividade mental, a interação e a cooperação são contribuintes do desenvolvimento do pensamento lógico, que tem sido deixado de lado com a tendência à supervalorização do pensamento algorítmico.

Os PCN (p. 35) apontam que "os jogos são fonte de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema", e concluem dizendo que "é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver".

A seguir, algumas atividades que podem ser facilmente aplicadas em sala de aula.

JOGO 1 (aplicável do 6º ano em diante) – Jogo do Par ou Ímpar do Produto*

O professor deve organizar os alunos da classe em duplas. Em cada dupla, cada um escolhe entre "par" ou "ímpar", como no jogo tradicional, porém o resultado é obtido pelo produto desses dois números. O professor estabelece o número de rodadas (15, por exemplo). Os alunos jogam e anotam quem ganhou em cada rodada. Ao final, verifica-se, em cada dupla, se o vencedor foi quem escolheu par ou ímpar.

Após este momento, pode-se levantar questionamentos:

a) Há uma estratégia para vencer o jogo? (A resposta esperada é "não".)

b) A chance de vitória é igual para ambos? (A princípio, a resposta intuitiva, apesar de equivocada é "não").

c) Quem tem mais chance de ganhar o jogo?

*Atividade adaptada do site www.pluricom.com.br/clientes/escola-santi/2014/09/jogos-e-brincadeiras-ensinam-conceitos-da-probabilidade

A ideia é que, após uma discussão, eles concluam que não era 50% de chance para cada um, como pensavam antes, pois o jogador que escolhe "par" tem 75% de chance, contra 25% daqueles que escolheram "ímpar", pois das 4 possibilidades de ocorrência, a única que fornece produto ímpar é exatamente a escolha de dois números ímpares, como pode-se ver na tabela abaixo:

Tabela 2 – Paridade dos produtos dos números

x	par	ímpar
par	par	par
ímpar	par	ímpar

Além disso, pode-se mostrar aos alunos que o jogador que concorre com "par" poderia manipular a vitória, escolhendo sempre um número par.

JOGO 2 (aplicável do 8º ano em diante) – O Jogo do Máximo*

Dois dados são lançados, o primeiro jogador vence se a maior face obtida for 1, 2, 3 ou 4, e o segundo jogador, caso seja 5 ou 6. O Professor organiza a classe em duplas para realizar o jogo, estabelece o número de partidas (20, por exemplo), orientando-os para que anotem, em cada partida se o vencedor foi o primeiro ou o segundo jogador. As questões aqui são as seguintes:

a) As chances de vitória são iguais para os dois jogadores? (A resposta intuitiva é "não".)

b) Qual jogador tem mais chance de vencer? (A resposta pode depender da análise da frequência de vitória de cada jogador).

c) Como calcular a chance de vitória de cada jogador?

Para os três questionamentos, é necessária a análise do espaço amostral para este experimento:

*Atividade adaptada do site www.mais.mat.br/wiki/Explorando_o_jogo_do_m%C3%A1ximo

Tabela 3 – Espaço amostral para o lançamento do dois dados

	1	2	3	4	5	6
1	***(1;1)***	***(1;2)***	***(1;3)***	***(1;4)***	(1;5)	(1;6)
2	***(2;1)***	***(2;2)***	***(2;3)***	***(2;4)***	(2;5)	(2;6)
2	***(3;1)***	***(3;2)***	***(3;3)***	***(3;4)***	(3;5)	(3;6)
4	***(4;1)***	***(4;2)***	***(4;3)***	***(4;4)***	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(5;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(5;6)
6	(6;1)	(6;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

E a análise dos eventos E_1 = {(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4)} e E_2 = {(1;5), (1;6), (2;5), (2;6), (3;5), (3;6), (4;5), (4;6), (5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)}.

Dentre as 36 possibilidades, apenas 16 favorecem o jogador 1, o que pode parecer contraintuitivo para os alunos, já que, aparentemente, concorrem com 4 números, contra 2 números do oponente. Logo, as respostas corretas às questões são:

a) As chances de vitória não são iguais para os dois jogadores (o professor poderá reforçar a análise dos *eventos*, e concluir que E_1 e E_2 não possuem o mesmo número de elementos).

b) O segundo jogador tem mais chances de vencer (pois E_2 possui mais elementos).

c) A chance de vitória é calculada pela probabilidade frequentista, da seguinte forma:

1º jogador: $P_1 = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

2º jogador: $P_2 = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

JOGO 3 (aplicável no ensino médio) — O Jogo dos Três Dados*

Um problema estudado por Cardano (1501-1576) no *Livro Sobre Jogos de Azar* (escrito em 1526 e publicado em 1663) e por Galileu Galilei, por volta de 1620, em *Considerações Sobre o Jogo dos Dados*, que narrava uma consulta que lhe foi feita por alguns apostadores, que consideravam que existia um paradoxo num jogo de três dados. Os jogadores achavam que, no lançamento de três dados com faces numeradas de 1 a 6, obter soma 9 ou 10 deveria ocorrer com a mesma frequência, já que, segundo eles, existiam seis opções para que os dados somassem 9 e, também, seis opções para que a soma fosse igual a 10.

Combinações com soma igual a 9:

(1, 2, 6), (1, 3 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)

Combinações com soma igual a 10:

(1, 3, 6), (1, 4 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)

O paradoxo surgia quando, na prática, verificavam que a soma 10 ocorria mais vezes do que a soma 9, mesmo que o jogo se repetisse muitas vezes ou muitos dias seguidos. Diante do mistério, procuraram Galilei, que, ao analisar a situação, concluiu que os resultados esperados não eram igualmente prováveis, logo a definição clássica de probabilidade não poderia ser usada a partir da simples contagem das combinações listadas, e a Lei dos Grandes Números de Bernoulli não poderia mesmo gerar, através da experiência, o resultado esperado por eles, pois o resultado da soma igual a 10 podia ser obtido de 27 modos distintos, e o da soma 9 só podia ser obtido de 25 maneiras distintas. Era um problema de arranjo!

Veja a seguir, a contagem correta dos casos onde os dados somam 9 ou 10 pontos.

* Adaptado do livro *O Andar do Bêbado*, de Leonard Mlodinow.

Arranjos com soma igual a 9:

(1, 2, 6), (1, 6, 2), (2, 1, 6), (2, 6, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1)
(1, 3, 5), (1, 5, 3), (3, 1, 5), (3, 5, 1), (5, 1, 3), (5, 3, 1)
(1, 4, 4), (4, 1, 4), (4, 4, 1)
(2, 2, 5), (2, 5, 2), (5, 2, 2)
(2, 3, 4), (2, 4, 3), (3, 4, 2), (3, 2, 4), (4, 2, 3), (4, 3, 2)
(3, 3, 3)

Arranjos com soma igual a 10:

(1, 3, 6), (1, 6, 3), (3, 1, 6), (3, 6, 1), (6, 1, 3), (6, 3, 1)
(1, 4, 5), (1, 5, 4), (4, 1, 5), (4, 5, 1), (5, 1, 4), (5, 4, 1)
(2, 2, 6), (2, 6, 2), (6, 2, 2)
(2, 3, 5), (2, 5, 3), (3, 2, 5), (3, 5, 2), (5, 2, 3), (5, 3, 2)
(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2)
(3, 3, 4), (3, 4, 3), (4, 3, 3)

O espaço amostral é constituído de $6^3 = 216$ elementos, sendo que a probabilidade de vitória apostando na soma 9 é 25/216, e apostando na soma 10 é 27/216, portanto esta última a mais vantajosa.

O Jogo dos Três Dados na Sala de Aula

Atividade elaborada para ser aplicada em turmas de Ensino Médio, durante a construção dos conceitos de *combinação* e *arranjo*. O professor deve promover na turma o jogo dos três dados, porém sendo estes de cores diferentes (branco, azul e verde, por exemplo), para melhor percepção dos alunos, ressaltando que uma mesma combinação obtida em dados de cores diferentes resulta em um novo arranjo. Como são muitos os arranjos obtidos, pode ser um tanto difícil para que os alunos percebam, na prática, a sutil diferença entre as frequências de ocorrência das somas 9 e 10, logo é necessário que eles construam duas tabelas, com estes arranjos:

Tabela 4 – Arranjos com soma igual a 9

Dado 1 (branco)	Dado 2 (azul)	Dado 3 (verde)	Arranjo	Dado 1 (branco)	Dado 2 (azul)	Dado 3 (verde)	Arranjo
1	2	6	**(1, 2, 6)**	4	1	4	**(4, 1, 4)**
1	6	2	**(1, 6, 2)**	4	4	1	**(4, 4, 1)**
2	1	6	**(2, 1, 6)**	2	2	5	**(2, 2, 5)**
2	6	1	**(2, 6, 1)**	2	5	2	**(2, 5, 2)**
6	1	2	**(6, 1, 2)**	5	2	2	**(5, 2, 2)**
6	2	1	**(6, 2, 1)**	2	3	4	**(2, 3, 4)**
1	3	5	**(1, 3, 5)**	2	4	3	**(2, 4, 3)**
1	5	3	**(1, 5, 3)**	3	2	4	**(3, 2, 4)**
3	1	5	**(3, 1, 5)**	3	4	2	**(3, 4, 2)**
3	5	1	**(3, 5, 1)**	4	2	3	**(4, 2, 3)**
5	1	3	**(5, 1, 3)**	4	3	2	**(4, 3, 2)**
5	3	1	**(5, 3, 1)**	3	3	3	**(3, 3, 3)**
1	4	4	**(1, 4, 4)**				

Tabela 5 – Arranjos com soma igual a 10

Dado 1 (branco)	Dado 2 (azul)	Dado 3 (verde)	Arranjo	Dado 1 (branco)	Dado 2 (azul)	Dado 3 (verde)	Arranjo
1	2	6	**(1, 3, 6)**	6	2	2	**(6, 2, 2)**
1	6	2	**(1, 6, 3)**	2	3	5	**(2, 3, 5)**
2	1	6	**(3, 1, 6)**	2	5	3	**(2, 5, 3)**
2	6	1	**(3, 6, 1)**	3	2	5	**(3, 2, 5)**
6	1	2	**(6, 1, 3)**	3	5	2	**(3, 5, 2)**
6	2	1	**(6, 3, 1)**	5	2	3	**(5, 2, 3)**
1	3	5	**(1, 4, 5)**	5	3	2	**(5, 3, 2)**
1	5	3	**(1, 5, 4)**	2	4	4	**(2, 4, 4)**
3	1	5	**(4, 1, 5)**	4	2	4	**(4, 2, 4)**
3	5	1	**(4, 5, 1)**	4	4	2	**(4, 4, 2)**
5	1	3	**(5, 1, 4)**	3	3	4	**(3, 3, 4)**
5	3	1	**(5, 4, 1)**	3	4	3	**(3, 4, 3)**
2	2	6	**(2, 2, 6)**	4	3	3	**(4, 3, 3)**
2	6	2	**(2, 6, 2)**				

Com a contagem de casos favoráveis, em cada tabela, o professor poderá concluir junto à turma o favoritismo na aposta pela soma igual a 10.

Atividades envolvendo jogos também podem ser utilizadas como recurso didático, favorecendo o ampliação do conhecimento. Veja a seguir um problema adaptado do artigo de Eduardo Wagner, disponível na Coleção Explorando o Ensino vol. 3 (BRASIL, 2004, p. 166), que pode ser utilizado no 4º ciclo do ensino fundamental, momento no qual estudam o cálculo da *área do círculo*.

Problema 10) *Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central.*

Figura 6 — Alvo de dardos

Como obviamente não se pode contar casos favoráveis e possíveis, e como para o atirador cego não há pontos privilegiados do alvo, a probabilidade de acertar o disco central deve ser a razão entre as áreas do disco e do alvo.

Área do disco de 10 cm de raio = $\pi 10^2 = 100\pi$

Área do alvo de 50 cm de raio = $\pi 50^2 = 2500\pi$

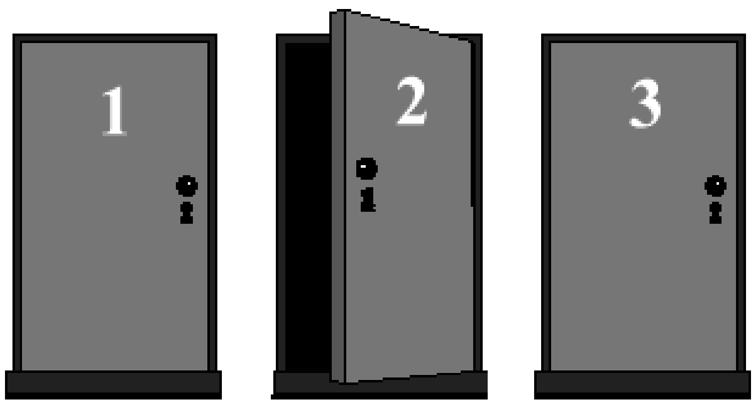
P = $\frac{100\pi}{2500\pi} = \frac{1}{25}$ = 0,04 = 4% é a probabilidade de atingir o disco central.

Esse é um exemplo do que se chama **probabilidade geométrica**. Nesta, se tivermos uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será igual a razão entre as áreas das região B e A.

O Problema de Monty Hall* (ou paradoxo de Monty Hall)

O problema de Monty Hall surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado Let's Make a Deal, exibido na década de 1970. Monty Hall (o apresentador) apresenta 3 portas ao concorrente, sabendo que atrás de apenas uma delas existe um prêmio. Na primeira etapa, o concorrente escolhe uma porta (que ainda não é aberta). Em seguida, Monty abre uma das outras duas portas que o concorrente não escolheu, sabendo que o prêmio não se encontra nela. Agora, com duas portas apenas para escolher, o concorrente tem que se decidir se permanece com a porta que escolheu no início do jogo e abre-a, ou se muda para a outra porta, que ainda está fechada, para abri-la. Qual é a estratégia mais lógica: ficar com a porta escolhida inicialmente ou mudar de porta? Ou será indiferente a troca, em relação às chances de ganhar?

Figura 7 — Três portas do Jogo de Monty Hall



*Adaptado do livro *Matemática Discreta - Uma Introdução*, de Edward R. Scheinerman.

Realmente não é assim tão indiferente mudar ou ficar na mesma porta. No início, quando se escolheu uma das portas, havia 1/3 de probabilidade de ganhar o prêmio. Não existe razão nenhuma para essa probabilidade mudar após o Monty Hall ter aberto uma das portas que não era premiada. As duas portas não escolhidas tinham em conjunto 2/3 de probabilidade de ocultarem o prêmio, e quando uma dessa portas é aberta (por não ter prêmio), a outra (que continua fechada) passa a ter 2/3 de chance de ser a porta premiada. A confusão é feita seguindo o raciocínio que parece mais lógico: "quando o apresentador revela uma das portas não-premiadas, o concorrente tem à frente um novo dilema, com apenas duas portas, e as chances do prêmio estar em qualquer uma delas passaria a ser de 1/2. O apresentador teria ajudado o concorrente, já que as chances para acertar subiram de 1/3 para 1/2, logo não faria diferença trocar ou não de porta". No entanto, esta análise intuitiva é errada, pois a porta que o apresentador abre depende da porta que o concorrente escolheu inicialmente. O apresentador sabe desde o começo onde está o prêmio e assim ele nunca abrirá uma porta premiada. A resposta correta e contraintuitiva é que é vantajoso trocar de porta, pois a probabilidade de acertar passa de 1/3 para 2/3. Se o concorrente errou ao escolher uma porta (e as chances disso são de 2/3), o prêmio está numa das outras portas que ele não escolheu. Ao abrir uma delas, o apresentador está lhe dizendo onde está o prêmio, pois ele só pode estar na porta que você não escolheu e não foi aberta. Sendo assim, toda vez que o concorrente tiver escolhido inicialmente uma porta errada, ao trocar de porta irá com certeza ganhar. Como as chances de que tenha errado em sua escolha inicial são de 2/3, se trocar suas chances de ganhar serão de 2/3, sendo vantajosa a troca de porta.

Uma Proposta Para o Problema de Monty Hall no Ensino Médio

Mesmo as argumentações acima apresentadas podem não ser suficientes para o convencimento da vantagem da troca de portas. Sendo assim, a proposta é a seguinte: promover, em sala de aula o mesmo jogo, com as mesmas regras, porém, agora, contando uma tabela numerada de 1 a 100, representando as portas.

Figura 8 — Tabela numerada de 1 a 100 para adaptação do problema de Monty Hall

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
51	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
61	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**	**68**	**69**	**70**
71	**72**	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**	**78**	**79**	**80**
81	**82**	**83**	**84**	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**	**90**
91	**92**	**93**	**94**	**95**	**96**	**97**	**98**	**99**	**100**

O apresentador (professor), sem que os alunos vejam, anota um número entre 1 e 100, guarda-o em seu bolso e pede para que um aluno escolha um número, na tentativa de adivinhar o número secreto do professor (como forma motivação, pode-se oferecer um bombom, em caso de vitória). Antes de revelar o número secreto, o professor elimina 98 dos 99 números não escolhidos pelo aluno, com o cuidado de não eliminar o número igual ao que está guardado no bolso. Em seguida, oferece a oportunidade do aluno trocar o número que escolheu inicialmente por aquele que sobrou da eliminação. Deve-se repetir o processo e, em apenas algumas partidas, os alunos começarão a perceber que a troca é muito vantajosa. Este é o momento onde o professor deve questionar sobre o motivo pelo qual isto acontece, e espera-se que respondam que a chance de ter escolhido um número errado é *muito maior* que a de ter escolhido o correto.

A objetivo não é elaborar uma fórmula, mas promover o raciocínio que remova a intuição equivocada diante desta situação-problema. No caso de 100 números, a chance de escolher o número errado é de 99/100, e mesmo com o professor tendo eliminado 98 números, esta probabilidade continua sendo 99/100, justificando a vantagem da troca, porém, neste caso, de forma bem mais convincente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foi feito um estudo de caso sobre a inclusão do conceito de Probabilidade na Educação Básica; neste sentido, realizou-se uma pesquisa que mostrou que ainda hoje são poucas as escolas que o apresentam em seus planejamentos do ensino fundamental. Ao se considerar os aprendizados de temas como *Equação do 2º grau* e *Razão e Proporção*, por exemplo, como insatisfatórios, mesmo estando estes presentes com muito maior frequência nos currículos, pode-se sugerir que o distanciamento dos alunos com a Probabilidade no ensino fundamental é um dos motivos das grandes dificuldades enfrentadas pelos alunos no ensino médio.

Por sua importância na prática cotidiana e pelo reconhecimento como ferramenta de raciocínio na escola, hoje existem formas atrativas de se trabalhar o tema, mas faz-se necessário que o professor reconheça a sua importância para a formação do aluno, buscando atualizar-se no conhecimento de fatos históricos que motivaram seu estudo, na busca por métodos que promovam o ensino baseado em situações reais e na pesquisa por atividades que possam despertar esse interesse. Além disso, seguindo as orientações dos PCN quanto ao construtivismo, é possível que o aluno, por si só, construa os conceitos necessários para resolver problemas, mas para isso é necessária a escolha de estratégias que promovam este interesse. Mesmo sem poder apontar qual o melhor caminho para se trabalhar, é plausível admitir que uma estratégia errada pode afastar o aluno, donde é importante que as atividades tenham como objetivo o raciocínio, sejam providas de significado e não sirvam apenas como objeto para a aplicação de fórmulas.

Foram apresentados argumentos e exemplos para a utilização de jogos no ensino da Probabilidade, por entender que eles contêm caráter lúdico e permitem adequadamente a aproximação com objetivos do tema. A atuação do professor, que aproxima o conteúdo escolar da realidade, é de fundamental importância para que haja, em vez de um acúmulo de processos mecânicos, a formação real do pensamento probabilístico em seus alunos. Revisitar temas já estudados, inserindo-os novamente nos problemas de Probabilidade, além de necessário, é tão fundamental quanto as metodologias aplicadas, para que não haja o risco de um ensino parcial e limitado. Isso não significa que seja preciso rever todos os temas matemáticos ou não, mas que o professor tenha em mente que esta retrospectiva é útil tanto para a Probabilidade quanto para o ensino, de forma geral.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, M. C. **Didáctica de la probabilidad y estadística**. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, 1999.

BAYER, A.; ECHEVESTE, S.; BITTENCOURT, H. R.; ROCHA, J. **Probabilidade na escola**, 2005. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/265449108_PROBABILIDADE_NA_ESCOLA>. Acesso em: 15 nov. 2016.

BRASIL, Ministério da Educação Básica, Secretaria da Educação Básica. **Coleção explorando o ensino, vol. 3, matemática, ensino médio**. Brasília, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais (PCN+): ciências da natureza e matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - lei nº 9394/96, de 20 de dezembro de 1996**. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio, volume 2**. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BUSETTO, D. T. **Propostas ao estudo de probabilidade no ensino médio**. Dissertação. Erechim, 2010. Disponível em: <http://www.uricer.edu.br/cursos/arq_trabalhos_usuario/1260.pdf>. Acesso em: 13 nov. 2016.

BUSS L. M. **Dificuldade na leitura e interpretação de problemas relativos ao cálculo de probabilidades e estatística**. 2009. Disponível em: <www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/831-4.pdf>. Acesso em: 29 out. 2016.

CABRAL, M. A. **A utilização de jogos no ensino de matemática**. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, Brasil, 2006.

CIABOTTI V. **A utilização de livros paradidáticos para o ensino de probabilidade no ensino fundamental**. UFTM, 2015. Disponível em: <www.uniube.br/eventos/epeduc/2015/completos/10.pdf>. Acesso em: 29 out. 2016.

Lei de laplace. Artigos de apoio Infopédia. Porto: Porto Editora, 2003-2017. Disponível em: <www.infopedia.pt/$lei-de-laplace>. Acesso em: 23 mar. 2017.

LOPES, C. E. **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. Caderno CEDES, v. 28, p. 78. Campinas, 2008.

LOPES, C. E.; MEIRELLES E. **O desenvolvimento da probabilidade e da estatística.** Artigo. Campinas/SP: FE/UNICAMP, 2005.

LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; REZENDE, J. C. **Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio**. Zetetiké – FE/Unicamp – v. 19, n. 36, p. 78, jul/dez 2011.

MARTINS, A. H. **A importância da matemática**. Minas Gerais: Educação e Informação, 2008. Disponível em: <www.jomar.pro.br/portal/modules/smartsection/item.php?itemid=183>. Acesso em: 15 dez. 2016.

MENDES, M. **Uma reflexão sobre o ensino do eixo tratamento da informação**. 2015. Disponível em: <mathema.com.br/reflexoes/uma-reflexao-sobre-o-ensino-do-eixo-tratamento-da-informacao-2/>. Acesso em: 29 out. 2016.

SCHEINERMAN, E. R. **Matemática discreta - uma introdução**. 1 ed. Brasil: Cengage Learning, 2003.

SILVA M. N. P. **História da probabilidade**. Brasil Escola, 2009. Disponível em: <brasilescola.uol.com.br/matematica/historia-probabilidade.htm>. Acesso em: 10 nov. 2016.

TENREIRO-VIEIRA, C. **Formação em pensamento crítico de professores de ciências: impacte nas práticas de sala de aula e no nível de pensamento crítico dos alunos**. Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias, Vol. 3, n. 3, 228-256, 2004.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BARROSO, J. M. **Conexões com a matemática, vol. 2**. São Paulo: Moderna, 2010

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática**. São Paulo: IME-USP, 2004.

BRASIL. **Lei de diretrizes e bases da educação nacional**: nº 9394/96. Senado Federal. Brasília: 1996.

CALLIARI, L. R. **Matemática aplicada na educação profissional.** Curitiba: Base editora Ltda, 2010.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista**. 151p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil, 1994.

DANTE, L. R. **Matemática contexto e aplicações**. 3 ed. São Paulo: Ática, 2010.

GERALDI, João Wanderley. **Prática de leitura na escola**. In: GERALDI, João Wanderley (org.). **O texto na sala de aula**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2005.

GRANDO, R. C. **Concepções quanto ao uso de jogos no ensino de matemática**. Revista de Educação Matemática, São Paulo: SBEM-SP, v. 10, n. 12, p. 43-50, 2007.

LOPES, C. E. **A estatística e a probabilidade na educação básica e a formação dos educadores matemáticos**. Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: <https://sistemas.riopomba.ifsudestemg.edu.br/dmafe/subsistemas/professor/material/2081973108_CELI%20ESPASANDIN%20LOPES.pdf>. Acesso em: 15 dez. 2015.

MOURA, M. O. **A séria busca no jogo: do lúdico na matemática**. Educação Matemática em Revista – SBEM, São Paulo, n. 3, p. 17-24, 2. sem. 1994.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação, Superintendência da Educação. **Diretrizes curriculares de matemática para o ensino médio**. Versão preliminar. Curitiba: SEED, 2006.

POLYA, G. A. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

SILVA, Claudio Xavier da; BARRETO FILHO, Benigno. **Coleção matemática aula por aula, livro do professor**: i**nstruções e orientações teórico-metodológicas**. 2. ed. renov. São Paulo: FTD, 2005.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco; DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira. **Matemática: ensino médio: livro do professor: manual do professor com orientações didáticas**. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A – (Lista das escolas de origem dos alunos pesquisados)

C. E. Nazira Salomão	Angra dos Reis/RJ
E. M. Raul Pompeia	Angra dos Reis/RJ
E. M. Vereador Moysés Ramalho	Araruama/RJ
Colégio Lapis de Cor	Barra do Piraí/RJ
C. E. Nilo Peçanha	Barra do Piraí/RJ
Etec Prof. José Sant'Ana de Castro	Cruzeiro/SP
E. E. Profª Hilda Rocha Pinto	Cruzeiro/SP
Escola Húnika	Curitiba/SC
Colegio Municipal Carlos Gramatico	Eng. Paulo de Frontin/RJ
Escola Estadual Municipalizada Antônio Maurício	Eng. Paulo de Frontin/RJ
Ciep 289 Cecílio Barbosa da Paixão	Eng. Paulo de Frontin/RJ
C.E. João Kopke	Eng. Paulo de Frontin/RJ
Centro Educacional Carvalho Braga	Japeri/RJ
Centro Educacional Triunfo Agape	Japeri/RJ
Ciep 401 Lucimar de Souza Santos	Japeri/RJ
Educandário Senhor do Bonfim	Japeri/RJ
Colégio Cenecista Profª Lina Monte Mor	Japeri/RJ
E. M. João XXIII	Japeri/RJ
E. M. Ary Schiavo	Japeri/RJ
E. M. Bernardino de Melo	Japeri/RJ
E. M. Pastor Aristides Arruda	Japeri/RJ
Centro de Ensino Nova Opção	Japeri/RJ
E. M. Profª Celia Sobreira	Japeri/RJ
C. E. Armando Dias	Japeri/RJ
C. E. Barão do Rio Branco	Japeri/RJ
Ciep 206 Cyrene Moraes Costa	Japeri/RJ
C. E. João Santos Souto	Japeri/RJ
C. E. Almirante Tamandaré	Japeri/RJ
Ciep 288 Prof. Ruy Gonçalves Ramos	Mendes/RJ
E. M. Presidente Castelo Branco	Mesquita/RJ
Ciep 100 São Francisco De Assis	Mesquita/RJ
E. M. Carmem de Luca Andreiolo	Miguel Pereira/RJ
E. M. Margarida Fernandes Sabino	Nilópolis/RJ
ABEU	Nova Iguaçu/RJ
E. M. de Jaceruba	Nova Iguaçu/RJ
Escola Santo Antonio da Prata	Nova Iguaçu/RJ
C. E. Natividade Patrício Antunes	Nova Iguaçu/RJ
Colégio Curso Tamandaré	Nova Iguaçu/RJ
E. E. Monsenhor João Musch	Nova Iguaçu/RJ
Conjunto Educacional Soares de Almeida	Nova Iguaçu/RJ
E. M. Prof. Márcio Caulino Soares	Nova Iguaçu/RJ
Escola Estadual Francisca Lisboa Peralta	Osasco/SP
Ciep 152 Garrincha Alegria do Povo	Paracambi/RJ
Ciep 385 Pastor Augustinho Valério de Souza	Paracambi/RJ
Colégio Cenecista Paracambi	Paracambi/RJ
E. M. Boa Esperança	Paracambi/RJ
E. M. Hélio Ferreira da Silva	Paracambi/RJ
E. M. Hortência Phirro do Valle	Paracambi/RJ
E. M. Ponte Coberta	Paracambi/RJ
E. M. Prefeito Nicola Salzano	Paracambi/RJ

E. M. Profª Odete Teixeira da Silva	Paracambi/RJ
E. M. Terra de Educar	Paracambi/RJ
Instituto de Educação Aquarela	Paracambi/RJ
Jardim Escola Modelo	Paracambi/RJ
E. M. Doutor Carlos Nabuco	Paracambi/RJ
C. E. Afonsina Masilo Teixeira Campos	Piraí/RJ
Colégio Municipal Doutor Aurelino Gonçalves Barbosa	Piraí/RJ
Colégio Militar de Porto Alegre	Porto Alegre/RS
Centro Educacional Manuel Pereira	Queimados/RJ
C. E. São Cristóvão	Queimados/RJ
IEGA - Instituto de Educação Geraldo de Almeida	Queimados/RJ
Colégio Militar do Recife	Recife/PE
E. M. Maria Teixeira de Paula	Rio das Ostras/RJ
Colégio Santa Mônica	Rio de Janeiro/RJ
E. M. Comandante Arnaldo Varella	Rio de Janeiro/RJ
E. M. Presidente Nereu Ramos	Rio de Janeiro/RJ
E. M. Francisco Palheta	Rio de Janeiro/RJ
E. M. Adalgisa Nery	Rio de Janeiro/RJ
E. M. Professor Albert Einstein	Rio de Janeiro/RJ
E. M. Joaquina Cassimira da Conceição	São Bentinho/PB
Centro Educacional Colúmbia 2000	São João de Meriti/RJ
C. E. Doutor Oscar Pimenta Soares	São João de Meriti/RJ
Caic Paulo Dacorso Filho	Seropédica/RJ
Centro Educacional Alfredo Prado	Seropédica/RJ
Colégio Bahiense	Seropédica/RJ
Colégio Fernando Costa	Seropédica/RJ
Colégio Interactivo GPI	Seropédica/RJ
E. M. Bananal	Seropédica/RJ
E. M. Gilson Silva	Seropédica/RJ
E. M. Prof Paulo de Assis Ribeiro	Seropédica/RJ
E. M. Promotor de Justiça Dr. André Luiz M.de M.Peres	Seropédica/RJ
E. M. Valtair Gabi	Seropédica/RJ
Escola Encanto de Seropédica	Seropédica/RJ
E. M. Professor Roberto Lyra	Seropédica/RJ
Instituto Figueira de Educação	Seropédica/RJ
Ciep 156 Doutor Alberto Sabin	Seropédica/RJ
E. M. Atílio Grégio	Seropédica/RJ
E. M. Olavo Bilac	Seropédica/RJ
Centro Educacional União de Seropédica	Seropédica/RJ
E. M. Pastor Gerson Ferreira Costa	Seropédica/RJ
E. M. Prof Lígia Rosa Goncalves Ferreira	Seropédica/RJ
E. M. Panaro Figueira	Seropédica/RJ
E. M. Vera Lúcia Pereira Leite	Seropédica/RJ
C. E. Alvarina de Carvalho Janotti	Seropédica/RJ
C. E. Alice de Souza Bruno	Seropédica/RJ
E. M. Eulália de Figueiredo	Seropédica/RJ
E. M. Prefeito Abeilard Goulart de Souza	Seropédica/RJ
CIEP 155 Maria Joaquina de Oliveira	Seropédica/RJ
Escola do IZ	Seropédica/RJ
C. E. Vital Brasil	Vera Cruz Do Oeste/PR
E. M. Geraldo Batista Chaves	Vera Cruz Do Oeste/PR
E. M. Profª Marizinha Félix Teixeira	Volta Redonda/RJ

APÊNDICE B – (Tabela do quantitativo de alunos por tema e por turma com valores percentuais aproximados)

A – alunos que afirmam ter conhecimento do baralho

B – alunos que afirmam ter estudado Equação do 2º Grau

C – alunos que afirmam ter estudado Teorema de Pitágoras

D – alunos que afirmam ter estudado Probabilidade

E – alunos que afirmam ter estudado Área e Perímetro

F – alunos que afirmam ter estudado Razão e Proporção

turma	alunos	A	% A	B	% B	C	% C	D	% D	E	% E	F	% F
1001	40	08	20	31	77	39	97	03	7	37	92	35	87
1002	38	07	18	33	87	38	100	03	8	35	92	30	79
1003	36	09	25	32	89	36	100	02	6	34	94	30	83
1004	35	06	17	31	89	34	97	04	11	34	97	32	91
1005	36	08	22	32	89	35	97	02	6	35	97	31	86
1006	37	07	19	35	95	36	97	06	16	34	92	31	84
1007	23	07	30	22	96	21	91	01	4	21	91	17	74
1008	39	05	13	36	92	37	95	04	10	38	97	32	82
2001	35	06	17	33	94	34	97	03	9	35	100	28	80
2002	26	06	23	24	92	24	92	05	19	25	96	23	88
2003	29	07	24	26	90	27	93	04	14	27	93	23	79
2004	28	05	18	24	86	26	93	02	7	28	100	21	75
2005	18	03	17	17	94	16	89	02	11	16	89	13	72
2006	14	07	50	14	100	12	86	00	0	12	86	10	71
3001	35	08	23	33	94	33	94	01	3	33	94	27	77
3002	38	05	13	36	95	35	92	02	5	37	97	30	79
3003	38	06	16	35	92	37	97	04	11	35	92	27	71
3004	25	09	36	23	92	25	100	02	8	24	96	22	88
3005	17	03	18	16	94	15	88	00	0	15	88	12	71
1001cn	45	09	20	42	93	41	91	06	13	40	89	35	78
2001cn	23	03	13	20	87	20	87	05	22	16	70	17	74
2002cn	23	05	22	20	87	23	100	02	9	20	87	18	78
3001cn	20	06	30	16	80	19	95	01	5	17	85	15	75
	698	**145**	**21**	**631**	**90**	**663**	**95**	**64**	**9**	**648**	**93**	**559**	**80**