

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

Hiandra Bárbara Götzinger Montibeller

**DETERMINANTES DE MATRIZES VIA GRAFOS**

Florianópolis

2017



Hiandra Bárbara Götzinger Montibeller

## **DETERMINANTES DE MATRIZES VIA GRAFOS**

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari

Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

Florianópolis

2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,  
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Montibeller, Hiandra Bárbara Götzinger  
Determinantes de matrizes via grafos / Hiandra  
Bárbara Götzinger Montibeller ; orientador, Fernando  
de Lacerda Mortari, 2017.  
55 p.

Dissertação (mestrado profissional) -  
Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de  
Ciências Físicas e Matemáticas, Programa de Pós  
Graduação em Matemática, Florianópolis, 2017.

Inclui referências.

1. Matemática. 2. Determinantes. 3. Permutações.  
4. Grafos. 5. Fórmula de Binet-Cauchy. I. Mortari,  
Fernando de Lacerda. II. Universidade Federal de  
Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em  
Matemática. III. Título.

# DETERMINANTES DE MATRIZES VIA GRAFOS

por

**Hiandra Bárbara Götzinger Montibeller**

Esta dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática.

---

Prof. Dr. Celso Melchiades Doria  
Coordenador do Curso

## **Banca Examinadora**

---

Prof. Dr. Fernando de Lacerda Mortari  
Universidade Federal de Santa Catarina -  
Orientador

---

Prof. Dr. Eliezer Batista  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro  
Universidade Federal de Santa Catarina

---

Profa. Dra. Sonia Elena Palomino Castro  
Universidade Federal de Santa Catarina

**Florianópolis, 21 de agosto de 2017.**



Dedico esse trabalho ao meu amado filho Henrique Lorenzo, que em muitos momentos esteve em meu colo enquanto realizava os estudos necessários para finalizar essa etapa.





## AGRADECIMENTOS

Após chegar ao fim dessa etapa tão importante em minha vida tenho muito a agradecer. Foram muitas noites em claro e muitos fins de semana abdicando de momentos com amigos e familiares para conseguir finalizar os estudos das disciplinas e essa dissertação que é o marco final do curso de mestrado.

Meu muito obrigada à minha família, que sempre me apoia e me conforta, em especial ao meu marido Cleiton, a minha mãe Neusa e a minha madrinha Neide por compreenderem meus momentos de ausência, meus momentos de insegurança e por cuidarem muito bem de nosso pequeno Henrique para que eu pudesse em muitos momentos me dedicar a finalizar as disciplinas e a dissertação desse mestrado.

Agradeço aos colegas da turma Profmat-2015, pelo aprendizado compartilhado e pela persistência para vencermos juntos os obstáculos desse curso.

Meu muito obrigada aos professores do Profmat-UFSC, por se dedicarem a compartilhar conosco um pouco do tanto que conhecem da nossa amada Matemática. E agradeço em especial ao professor Fernando de Lacerda Mortari, porque além de ter sido um ótimo professor de nossa turma, aceitou e teve paciência para me orientar durante a elaboração e correção deste trabalho.

Meus agradecimentos também aos professores que compõem a banca examinadora: Eliezer Batista, Gilles Gonçalves de Castro e Sonia Elena Polomino Castro por aceitarem o convite de ler, fazer considerações e avaliar este trabalho.

E ainda agradeço a CAPES, pela bolsa concedida durante o curso.



## RESUMO

Com o intuito de apresentar a demonstração da propriedade do produto do determinante, também conhecida como fórmula de Binet-Cauchy, de uma maneira acessível a estudantes de licenciatura em matemática e a professores de matemática de Ensino Médio foi realizado o estudo em questão que aborda os conceitos de Permutações, Grafos e o Lema de Gessel-Viennot. Esse Lema possui muitas aplicações sendo uma delas a de ser utilizado para provar a fórmula de Binet-Cauchy.

**Palavras-chave:** Permutações. Grafos. Determinante. Lema de Gessel-Viennot. Fórmula de Binet-Cauchy.



## ABSTRACT

In order to present a proof of the determinant product property, also known as the Binet-Cauchy formula, in an accessible way to undergraduate mathematics students and high school mathematics teachers, a study is conducted on permutations, graphs and the Gessel-Viennot Lemma. This Lemma has many applications and one of them is to prove the Binet-Cauchy formula.

**Keywords:** Permutations. Graphs. Determinant. Lema of Gessel-Viennot. Binet-Cauchy formula.



## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	15
<b>2</b>	<b>PERMUTAÇÕES E DETERMINANTES</b>	17
<b>3</b>	<b>GRAFOS</b>	29
<b>4</b>	<b>LEMA DE GESSEL-VIENNOT</b>	39
4.1	A FÓRMULA DE BINET-CAUCHY	45
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES</b>	53
	<b>REFERÊNCIAS</b>	55





## 1 INTRODUÇÃO

Um conteúdo de grande relevância estudado no Ensino Médio é o assunto Matrizes. Ao trabalharmos matrizes apresentamos também como calcular o seu determinante e listamos as propriedades do determinante, uma dessas propriedades é a que relaciona o produto dos determinantes com o determinante do produto. Neste trabalho chamamos essa propriedade como fórmula de Binet-Cauchy que nos auxilia em cálculos como:

Sejam as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},$$

vamos calcular o  $\det(MN)$ :

Primeiro calculando o produto das matrizes e na sequência o determinante da matriz produto:

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 8 \cdot (-2) & 2 \cdot 5 + 8 \cdot 7 \\ 3 \cdot 4 + 5 \cdot (-2) & 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 66 \\ 2 & 50 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\det(MN) = (-8 \cdot 50) - (2 \cdot 66) = -400 - 132 = -532.$$

Segundo calculando primeiro o determinante de cada matriz e na sequência calculando o produto dos determinantes:

$$\det(M) = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 = 10 - 24 = -14,$$

$$\det(N) = 4 \cdot 7 - (-2) \cdot 5 = 28 + 10 = 38,$$

$$\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N) = -14 \cdot 38 = -532.$$

A segunda maneira de calcular tem validade garantida pela fórmula de Binet-Cauchy, e nesse trabalho buscaremos apresentar uma demonstração acessível para professores de Matemática de ensino médio, como também para alunos de iniciação científica.

Essa propriedade normalmente é utilizada apenas para matriz produto que se origina de matrizes quadradas, no entanto, a fórmula de Binet-Cauchy conforme apresentada nesse texto mostra como usar a informação contida em cada uma das matrizes retangulares para o

obter o determinante da matriz produto quadrada resultante.

Para conseguir compreender a demonstração precisaremos de alguns conceitos prévios, como o que são permutações para podermos definir o cálculo do determinante de uma matriz, conceitos de grafos e sua relação com matrizes caminhos, entre outros. Dessa forma organizamos o trabalho em três capítulos, a saber.

No capítulo a seguir tratamos dos conteúdos Permutações e Determinantes, trazendo as definições de ciclo, transposição, paridade, sinal de uma permutação. Conceitos esses que nos permitirão compreender parte da demonstração do Lema de Gessel-Viennot. Os estudos desse capítulo foram baseados nas obras Álgebra Moderna [DOMINGUES, 2003] e Elementos de Álgebra [GARCIA,2003].

No capítulo intitulado Grafo é apresentada a definição de grafo e algumas de suas propriedades, como também a maneira de relacionar uma matriz a um grafo, e um grafo a uma matriz caminho, relação essa que nos permitirá apresentar e explicar as demonstrações apresentadas depois.

No último capítulo apresentamos o foco do trabalho o Lema de Gessel-Viennot e a fórmula de Binnet-Cauchy, com as devidas demonstrações. Apresentamos ainda nesse capítulo um exemplo de como calcular o determinante de uma matriz produto que não se originou de matrizes quadradas. Nessa parte do texto os referenciais usados como base foram As provas estão n'O LIVRO [AIGNER, 2002] e A course in enumeration [AIGNER, 2007].

## 2 PERMUTAÇÕES E DETERMINANTES

Para cada  $n \in \mathbb{N}^*$ , seja  $I_n$  o conjunto

$$I_n = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 1 \leq x \leq n\} = \{1, \dots, n\}.$$

**Definição 2.1.** *Dado  $n \in \mathbb{N}^*$ , uma permutação sobre  $I_n$  consiste de uma função bijetora*

$$\sigma : I_n \longrightarrow I_n.$$

*O conjunto de todas as permutações sobre  $I_n$  é denotado por  $S_n$ .*

Denotamos a permutação  $\sigma$  sobre  $S_n$  por

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

ou, caso queiramos apresentar os números de 1 a  $n$  em outra ordem, digamos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , por

$$\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \sigma(x_1) & \sigma(x_2) & \dots & \sigma(x_n) \end{pmatrix}.$$

**Exemplo 2.1.** *Para  $n = 6$  temos o conjunto  $I_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , e apresentamos um exemplo de permutação desse conjunto dada por:*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

*Nessa permutação temos as seguintes trocas:  $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 1, \sigma(4) = 6, \sigma(5) = 5, \sigma(6) = 4$ . Percebemos assim que todos os elementos foram relacionados, o que condiz com o fato de ser uma função bijetora.*

**Exemplo 2.2.** *Para  $n = 3$  temos o conjunto  $I_3 = \{1, 2, 3\}$ , e apresentamos todas as permutações de  $S_3$ :*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

A permutação  $\sigma_6$  é um caso particular de permutação, é o caso onde os elementos são mantidos na mesma posição de origem, quando isso ocorre chamamos a permutação de permutação identidade e a denotamos por  $\epsilon$ .

A composição de duas permutações sobre  $I_n$  é uma nova permutação sobre  $I_n$ , logo a operação de composição de funções é uma operação binária sobre  $S_n$ . O conjunto  $S_n$  com a operação de composição satisfaz os três axiomas de grupo, a saber:

- a operação possui a propriedade associativa;
- o conjunto  $S_n$  possui um elemento neutro para esta operação, dado pela função identidade denominada  $\epsilon : I_n \rightarrow I_n$ ;
- para toda permutação  $\sigma$  sobre  $S_n$ , a função inversa  $\sigma^{-1}$  também é bijetora, e portanto também é uma permutação sobre  $S_n$ .

**Definição 2.2.** *Dado  $n \in \mathbb{N}^*$ , dizemos que uma permutação  $\sigma \in S_n$  é um ciclo se existem  $r \in \mathbb{N}^*$  com  $1 \leq r \leq n$  e inteiros distintos  $x_1, x_2, \dots, x_r \in I_n$  de modo que as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *Para qualquer  $i \in \mathbb{N}^*$  com  $1 \leq i \leq r - 1$  tem-se que  $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ ;*
2.  *$\sigma(x_r) = x_1$ ;*
3. *Para qualquer  $x \in I_n \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  tem-se que  $\sigma(x) = x$ .*

*Neste caso, dizemos que  $r$  é o comprimento do ciclo  $\sigma$ , que  $\sigma$  é um  $r$ -ciclo, e denotamos  $\sigma$  por:*

$$\sigma = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_r).$$

*Adicionalmente, o conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$  é chamado de conjunto suporte de  $\sigma$ , e denotado por  $\text{supp}(\sigma)$ .*

**Definição 2.3.** *Se um ciclo  $\sigma$  tiver comprimento  $r = 2$ , então  $\sigma$  será chamado de transposição.*

Tomando  $n = 8$  podemos pensar nos seguintes exemplos de permutações sobre o conjunto  $I_8$ :

**Exemplo 2.3.** Para  $n = 8$  considere a permutação  $\sigma \in S_8$  dada por:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é  $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 3, \dots, \sigma(7) = 8, \sigma(8) = 1$ . De acordo com a definição,  $\sigma$  é um ciclo de comprimento  $r = 8$ , com conjunto suporte  $\text{supp}(\sigma) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  e a notação que denota essa permutação seria

$$\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8).$$

**Exemplo 2.4.** Ainda em  $S_8$ , seja  $\lambda$  dada por:

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Note que  $\lambda(1) = 8, \lambda(8) = 5, \lambda(5) = 4, \lambda(4) = 2, \lambda(2) = 1$ . Além disso, se  $x = 3, 6, 7$  temos  $\lambda(x) = x$ . Pela definição,  $\lambda$  é um ciclo de comprimento 5, com suporte  $\text{supp}(\lambda) = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ , denotado por:

$$\lambda = (1\ 8\ 5\ 4\ 2).$$

**Exemplo 2.5.** Seja  $\phi \in S_8$  definido como:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 6 & 1 & 5 & 3 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Observe que  $\phi(1) = 2, \phi(2) = 6, \phi(6) = 4, \phi(4) = 5, \phi(5) = 3, \phi(3) = 1$ . Porém, para  $x = 7$  e  $x = 8$  temos  $\phi(x) \neq x$ , logo  $\phi$  não satisfaz a definição de ciclo.

Uma observação relevante sobre a notação de ciclo é que um mesmo ciclo pode ser descrito de mais de uma forma com os mesmos valores de um conjunto suporte, desde que a sequência entre os elementos seja mantida, por exemplo, o ciclo  $(8\ 5\ 4)$  pode ser representado também  $(5\ 4\ 8)$  ou por  $(4\ 8\ 5)$ .

**Definição 2.4.** Dados  $n \in \mathbb{N}^*$  e ciclos  $\sigma, \lambda \in S_n$ , dizemos que os ciclos  $\sigma$  e  $\lambda$  são disjuntos quando seus suportes são disjuntos, ou seja, quando

$$\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\lambda) = \emptyset.$$

**Exemplo 2.6.** *Sejam  $\sigma = (7\ 8)$  e  $\lambda = (1\ 2\ 6\ 4\ 5\ 3)$  permutações sobre  $I_8$ . Vemos que  $\sigma$  é um 2-ciclo, ou seja, uma transposição, que  $\lambda$  é um 6-ciclo, e que  $\text{supp}(\sigma) = \{7, 8\}$ ,  $\text{supp}(\lambda) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Uma vez que  $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\lambda) = \emptyset$ , temos que  $\sigma$  e  $\lambda$  são ciclos disjuntos.*

O resultado seguinte informa que dois ciclos disjuntos comutam, ou seja, que se realizarmos a composição desses ciclos, independente da ordem, teremos o mesmo resultado final.

**Teorema 2.1.** *Para qualquer  $n \in \mathbb{N}^*$  e para quaisquer  $\sigma, \lambda \in S_n$ , se  $\sigma$  e  $\lambda$  são ciclos disjuntos então*

$$\sigma \circ \lambda = \lambda \circ \sigma.$$

*Demonstração.* Sejam  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $\sigma, \lambda \in S_n$  ciclos disjuntos quaisquer. Provaremos que  $\sigma \circ \lambda = \lambda \circ \sigma$ ; para tanto, é suficiente provar que  $(\sigma \circ \lambda)(x) = (\lambda \circ \sigma)(x)$ , para todo  $x \in I_n$ . Seja  $x \in I_n$  qualquer. Como  $\sigma$  e  $\lambda$  são ciclos disjuntos, temos três casos possíveis:

- Caso  $x \in \text{supp}(\sigma)$ , temos que  $x \notin \text{supp}(\lambda)$ , logo  $\lambda(x) = x$ . Também,  $\sigma(x) \in \text{supp}(\sigma)$ , logo  $\sigma(x) \notin \text{supp}(\lambda)$  e portanto  $\lambda(\sigma(x)) = \sigma(x)$ . Juntando, temos que

$$(\sigma \circ \lambda)(x) = \sigma(\lambda(x)) = \sigma(x) = \lambda(\sigma(x)) = (\lambda \circ \sigma)(x).$$

- Caso  $x \in \text{supp}(\lambda)$ , temos que  $x \notin \text{supp}(\sigma)$ , logo  $\sigma(x) = x$ . Também,  $\lambda(x) \in \text{supp}(\lambda)$ , logo  $\lambda(x) \notin \text{supp}(\sigma)$  e portanto  $\sigma(\lambda(x)) = \lambda(x)$ . Juntando, temos que

$$(\lambda \circ \sigma)(x) = \lambda(\sigma(x)) = \lambda(x) = \sigma(\lambda(x)) = (\sigma \circ \lambda)(x).$$

- Caso  $x \notin \text{supp}(\sigma)$  e  $x \notin \text{supp}(\lambda)$ , por  $x$  não estar em nenhum dos conjuntos suporte, então  $\sigma(x) = x$  e  $\lambda(x) = x$ , dessa forma,

$$(\lambda \circ \sigma)(x) = \lambda(\sigma(x)) = \lambda(x) = x = \sigma(x) = \sigma(\lambda(x)) = (\sigma \circ \lambda)(x).$$

Pelo exposto, pode-se concluir que  $\sigma \circ \lambda = \lambda \circ \sigma$ , como desejado.  $\square$

O próximo teorema diz que sendo  $n \in \mathbb{N}^*$  e se  $\sigma \in S_n$  é tal que  $\sigma \neq \epsilon$ , ou seja, que  $\sigma$  não é a permutação identidade, então  $\sigma$  se descreve como composição de ciclos disjuntos, de modo único a menos da ordem dos fatores da composição.

**Teorema 2.2.** *Para quaisquer  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $\sigma \in S_n$ , se  $\sigma \neq \epsilon$  então existem  $k \in \mathbb{N}^*$  e ciclos  $\sigma_1, \dots, \sigma_k \in S_n$ , disjuntos aos pares, de modo que*

$$\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_k.$$

*Essa decomposição de  $\sigma$  como composição de ciclos disjuntos é única, a menos da ordem dos fatores.*

*Demonstração.* Como  $\sigma$  não é a permutação identidade, ou seja,  $\sigma \neq \epsilon$  então existe elemento  $a \in I_n$  tal que  $\sigma(a) \neq a$ . Seja  $A = \{x \in I_n \mid \sigma(x) \neq x\}$ , logo pelo descrito inicialmente  $A \neq \emptyset$ .

Como  $A \subseteq \mathbb{N}$  e  $A \neq \emptyset$ , pelo Princípio da Boa Ordenação (PBO) existe em  $A$  um menor elemento, o chamamos de  $a_1$ .

Sendo o conjunto  $A_1 = \{\sigma^i(a_1) \mid i \in \mathbb{N}\}$ , perceba que  $A_1 \subseteq I_n$ .

Como  $I_n$  é um conjunto finito, pois possui  $n$  elementos, e  $\mathbb{N}$  é um conjunto infinito, pelo Princípio da Casa dos Pombos existem  $i, j \in \mathbb{N}$  tal que  $\sigma^i(a_1) = \sigma^j(a_1)$ .

Seja  $B_1 = \{i \in \mathbb{N} \mid \exists j \in \mathbb{N} \text{ com } j < i \text{ e } \sigma^i(a_1) = \sigma^j(a_1)\}$ . Como  $B_1$  foi definido temos que  $B_1 \neq \emptyset$  e  $B_1 \subseteq \mathbb{N}$ , dessa forma pelo PBO,  $B_1$  possui um menor elemento, digamos  $i_1$ ; temos que  $i_1 \geq 1$ , pois  $\sigma^{i_1}(a_1) = \sigma^j(a_1)$  para algum  $j \in \mathbb{N}$  com  $j < i_1$ .

Então, temos que os elementos  $\sigma^0(a_1) = a_1, \sigma^1(a_1), \sigma^2(a_1), \dots, \sigma^{i_1-1}(a_1)$  são todos distintos, já que  $i_1$  é o menor elemento de  $B_1$ , pois se não fossem elementos distintos  $i_1$  não seria o menor elemento de  $B_1$ .

Afirmamos que  $\sigma^{i_1}(a_1) = a_1$ .

Para comprovar essa afirmação usamos que  $i_1 \in B_1$ , dessa forma sabemos que existe algum  $j \in \mathbb{N}$  com  $j < i_1$  e  $\sigma^j(a_1) = \sigma^{i_1}(a_1)$ .

Perceba que a permutação  $\sigma^{-j} = \sigma^{-1} \circ \sigma^{-1} \circ \dots \circ \sigma^{-1}$ , é uma composição com  $j$  fatores e que  $\sigma^{-j} \circ \sigma^j = \epsilon$ .

Agora veja que:  $\sigma^0(a_1) = a_1 = \epsilon(a_1) = \sigma^{-j} \circ \sigma^j(a_1) = \sigma^{-j} \circ \sigma^{i_1}(a_1) = \sigma^{i_1-j}(a_1)$ .

Isto nos mostra que  $i_i - j \in \mathbb{N}$  é tal que  $i_i - j \in B_1$ , e como  $i_1$  é o menor elemento desse conjunto, logo  $i_1 \leq i_1 - j \leq i_1$  e portanto  $j = 0$ , comprovando a afirmação que  $\sigma^{i_1}(a_1) = \sigma^0(a_1) = a_1$ .

De acordo com o relatado temos então um ciclo, denominado  $\sigma_1 = (a_1 \sigma^1(a_1) \sigma^2(a_1) \sigma^3(a_1) \dots \sigma^{i_1-1}(a_1))$ , de comprimento  $i_1$ , que possui como conjunto suporte:

$$\text{supp}(\sigma_1) = \{a_1, \sigma^1(a_1), \sigma^2(a_1), \sigma^3(a_1), \dots, \sigma^{i_1-1}(a_1)\}.$$

Seja  $A_2 = I_n \setminus \text{supp}(\sigma_1)$ . Se  $\sigma(b) = b, \forall b \in A_2$ , encerra-se o processo e  $\sigma$  é ciclo  $\sigma_1$  já encontrado. Caso contrário, se existir algum  $b \in A_2$  tal que  $\sigma(b) \neq b$ , temos que  $A_2 \neq \emptyset$  e pelo PBO existe um menor elemento em  $A_2$ , digamos que esse elemento seja  $a_2$ . Agora basta re-

petir o processo realizado com  $a_1$  como descrito anteriormente para o elemento  $a_2$  e encontraremos um outro ciclo,  $\sigma_2$ , que terá como conjunto suporte  $\text{supp}(\sigma_2)$  de comprimento  $i_2$ , onde  $\text{supp}(\sigma_2) = \{\sigma^0(a_2) = a_2, \sigma^1(a_2), \sigma^2(a_2), \sigma^3(a_2), \dots, \sigma^{i_2-1}(a_2)\}$ .

Afirmamos que os ciclos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , respectivamente gerados por  $a_1$ , de suporte  $\text{supp}(\sigma_1)$ , e  $a_2$ , de suporte  $\text{supp}(\sigma_2)$ , são disjuntos, ou seja, que  $\text{supp}(\sigma_1) \cap \text{supp}(\sigma_2) = \emptyset$ .

Suponha por absurdo que existam  $i, j \in \mathbb{N}$  tais que  $\sigma^i(a_1) = \sigma^j(a_2)$ .

Lembre que se um elemento  $c$  pertencer ao conjunto suporte de um ciclo, então  $\sigma(c)$  e  $\sigma^{-1}(c)$  também estão no mesmo conjunto suporte do ciclo.

Ao compor  $\sigma^i$  com  $\sigma^{-j}$ , temos:  $\sigma^{i-j}(a_1) = \sigma^{-j} \circ \sigma^i(a_1) = \sigma^{-j} \circ \sigma^j(a_2) = a_2 \in \text{supp}(\sigma_2)$ . Aqui se percebe o absurdo já que  $\sigma^{i-j}(a_1) \in \text{supp}(\sigma_1)$  e por consequência  $a_2 \in \text{supp}(\sigma_1)$ , o que é absurdo já que  $a_2 \in A_2 = I_n \setminus \text{supp}(\sigma_1)$ . Logo não podemos ter que  $\sigma^i(a_1) = \sigma^j(a_2)$ , e assim comprova-se a afirmação de que os ciclos  $\text{supp}(\sigma_1)$  e  $\text{supp}(\sigma_2)$  são disjuntos.

Continuando o procedimento seja  $A_3 = I_n \setminus \text{supp}(\sigma_1) \cup \text{supp}(\sigma_2)$ . Se  $\sigma(d) = d, \forall d \in A_3$ , encerra-se o processo e  $\sigma$  será composto pelos ciclos  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  já encontrados. Se existir  $d \in A_3$  tal que  $\sigma(d) \neq d$ , repetimos o processo anterior para o menor elemento de  $A_3$ , seja este elemento  $a_3$  e encontraremos um outro ciclo  $\sigma_3$ , de conjunto suporte  $\text{supp}(\sigma_3)$  disjunto de  $\text{supp}(\sigma_1)$  e de  $\text{supp}(\sigma_2)$ .

Observamos que como  $I_n$  é um conjunto com um número finito de elementos, em algum momento não haverá mais elementos de  $I_n$  para realizarmos o procedimento acima de encontrar ciclos disjuntos. Digamos que após realizarmos todos os procedimentos possíveis sobre  $I_n$  obtivemos os ciclos  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ , associados aos elementos  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Agora é preciso mostrar que as permutações  $\sigma$  e  $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  são iguais. Tome  $x \in I_n$  qualquer, para esse elemento  $x$  temos duas opções:

- $\sigma(x) = x$ : Neste caso temos que  $x$  não pertence a nenhum dos conjuntos suportes  $\text{supp}(\sigma_k)$ , pois se um elemento  $y$  pertence a um dos conjuntos suportes, seja esse conjunto  $\text{supp}(\sigma_i)$ , assim teríamos que  $\sigma_i(y) \neq y$  e como  $\sigma_i(y) = \sigma(y)$  temos que  $\sigma(y) \neq y$ . Dessa forma,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tem-se que  $\sigma_i(x) = x$ . Temos então:

$$\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1(x) = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2(\sigma_1(x)) = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2(x) = \dots = x.$$

Logo  $\sigma$  e  $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  coincidem em todo  $x$  tal que  $x = \sigma(x)$ .

- $\sigma(x) \neq x$ : Neste caso  $x$  pertence ao suporte de um dos  $k$  ciclos,



digamos que pertença a  $\text{supp}(\sigma_j)$ , suporte do ciclo  $\sigma_j$ . Como já foi mostrado que os ciclos são disjuntos, sabemos que se  $x \in \text{supp}(\sigma_j)$ , então  $x \notin \text{supp}(\sigma_l)$  onde  $l \neq j$  e  $l \in \{1, \dots, k\}$ . Assim,  $x$  pertence apenas ao suporte de um ciclo  $\sigma_j$ , de suporte  $\text{supp}(\sigma_j)$ . Então

$$\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_j \circ \dots \circ \sigma_1(x) = \dots = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_j(x)$$

Mas sabemos que  $\sigma_j(x) = \sigma(x)$ , que também só pertence ao conjunto suporte  $\text{supp}(\sigma_j)$ , do ciclo  $\sigma_j$ . Logo temos que  $\sigma_m(\sigma_j(x)) = \sigma_j(x), \forall j < m \leq k$ . Assim,

$$\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_j \circ \dots \circ \sigma_1(x) = \dots = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_j(x) = \sigma_j(x) = \sigma(x).$$

Logo  $\sigma$  e  $\sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  coincidem em  $x \neq \sigma(x)$ .

Assim resta apenas mostrar que essa decomposição de  $\sigma = \sigma_k \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$  é única a não ser pela ordem de apresentação dos  $k$  ciclos.

Suponha que  $\sigma = \sigma_l \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$  e  $\sigma = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \circ \theta_r$  sejam duas decomposições de  $\sigma$  em produto de ciclos disjuntos. Se  $\sigma$  movimentar algum  $x$ , então algum dos  $\sigma_i$  move  $x$  e algum dos  $\theta_j$  também move  $x$ ; como ciclos disjuntos comutam, vamos supor, renomeando se necessário, que  $\sigma_1$  e  $\theta_1$  sejam os ciclos que movam  $x$ , logo  $\forall i \in \mathbb{Z}$  temos que  $\sigma^i(x) = \sigma_1^i(x) = \theta_1^i(x)$ , dessa forma percebemos que os ciclos  $\sigma_1$  e  $\theta_1$  coincidem, e podemos continuar essa ideia para mostrar que ciclos das decomposições de  $\sigma$  coincidem aos pares. □

**Teorema 2.3.** *Toda permutação de  $S_n$ , com  $n \geq 2$ , pode ser decomposta como composição de transposições.*

*Demonstração.* A identidade  $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_r) = (x_1 x_r) \circ (x_1 x_{r-1}) \circ \dots \circ (x_1 x_2)$  é válida para todo ciclo  $\sigma \in S_n$  de comprimento  $r$ . Assim basta utilizar a decomposição em ciclos demonstrada no Teorema 2.2 e aplicar essa igualdade que apresenta como decomposições cada um dos ciclos como transposições. □

**Exemplo 2.7.** *Seja a permutação  $\phi = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 4 & 3 & 5 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ . Essa permutação pelo que estudamos no Teorema 2.2 poderá ser escrita como composição dos ciclos  $\phi_1 = (7 \ 8)$  e  $\phi_2 = (6 \ 4 \ 5 \ 3 \ 1 \ 2)$ . E pelo Teorema 2.3 temos que a permutação  $\phi$  pode ser descrita como um produto de transposições da seguinte maneira:  $\phi = (8 \ 7) \circ (6 \ 2) \circ (6 \ 1) \circ (6 \ 3) \circ (6 \ 5) \circ (6 \ 4)$ .*

**Definição 2.5.** O sinal de uma permutação  $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$  é um número real, que será denotado  $\text{sgn}(\sigma)$ , definido por:

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{i>j} \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j},$$

em que o produtório é sobre todos os pares de índices  $i, j \in I_n$  com  $i > j$ .

**Exemplo 2.8.** Sendo  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ , o cálculo do  $\text{sgn}(\sigma)$  é dado por:

$$\text{sgn}(\sigma) = \frac{2-1}{2-3} \cdot \frac{3-1}{4-3} \cdot \frac{4-1}{1-3} \cdot \frac{3-2}{4-2} \cdot \frac{4-2}{1-2} \cdot \frac{4-3}{1-4} = +1$$

**Teorema 2.4.** O sinal de uma transposição é  $-1$ .

*Demonstração.* Seja  $\sigma$  uma transposição de  $S_n$ , então é possível escrever  $\sigma$  da seguinte maneira:  $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{pmatrix}$ . Sendo  $(a, b)$  um par de índices da primeira linha de  $\sigma$  com  $1 \leq a \leq b \leq n$ , vamos analisar o que acontece com o fator correspondente do produtório de  $\sigma$  para cada escolha possível para  $(a, b)$ :

- (i)  $(a, b) = (1, 2)$ , o fator do produtório de  $\sigma$  é:  $\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{-(x_2 - x_1)} = -1$ .
- (ii)  $a = 1$  e  $b > 2$  teremos que o fator associado será:  $\frac{x_b - x_1}{x_b - x_2}$ .
- (iii)  $a = 2$  e  $b > 2$  teremos que o fator associado será:  $\frac{x_b - x_2}{x_b - x_1}$ .
- (iv)  $a > 2$  e  $b > 3$  assim o fator para cada uma dessas escolhas será:  $\frac{x_b - x_a}{x_b - x_a} = 1$ .

Perceba que para cada escolha de  $b > 2$  os itens (ii) e (iii) aparecem no produtório de  $\sigma$  juntamente, ou seja,  $\frac{x_b - x_1}{x_b - x_2} \cdot \frac{x_b - x_2}{x_b - x_1} = 1$ , com isso o produto desses pares será sempre igual a  $+1$ .

E perceba também que independente dos diversos fatores finitos que possam aparecer conforme exposto no item (iv) todos esses fatores serão iguais a  $+1$ .

Assim os fatores caracterizados nos itens (ii), (iii) e (iv) não interferem no sinal de  $\sigma$ .

Com base no que observamos para cada escolha de índices e nas observações feitas podemos verificar que  $\text{sgn}(\sigma)$  será determinado por  $\frac{x_2 - x_1}{x_1 - x_2} = -1$ .

Portanto o sinal da transposição  $\sigma$  será  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ . □

**Teorema 2.5.** *Se  $\sigma$  e  $\phi \in S_n$ , tem-se que:*

$$\text{sgn}(\sigma \circ \phi) = (\text{sgn}(\sigma)) \cdot (\text{sgn}(\phi)).$$

*Demonstração.* Reordenando convenientemente se necessário podemos escrever  $\sigma$  e  $\phi$  como:  $\sigma = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}$  e  $\phi = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}$ , e analisando os sinais dessas permutações temos que:

$$(\text{sgn}(\sigma)) \cdot (\text{sgn}(\phi)) = \prod_{i>j} \frac{x_i - x_j}{y_i - y_j} \cdot \prod_{i>j} \frac{y_i - y_j}{z_i - z_j} = \prod_{i>j} \frac{x_i - x_j}{z_i - z_j} = \text{sgn}(\sigma \circ \phi).$$

□

**Corolário 2.1.** *Para qualquer  $\sigma \in S_n$ ,  $\text{sgn}(\sigma) = +1$  ou  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ .*

*Demonstração.* Conforme visto no Teorema 2.3 podemos decompor qualquer permutação  $\sigma$  como produto de transposições, ou seja,  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k$ .

Utilizando a generalização do Teorema 2.5 para  $k$  fatores, teremos que:  $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\sigma_1) \cdot \text{sgn}(\sigma_2) \cdot \dots \cdot \text{sgn}(\sigma_k) = (-1) \cdot (-1) \cdot \dots \cdot (-1) = (-1)^k$ , já que pelo Teorema 2.4 sabemos que o sinal de cada transposição é  $-1$ .

Dessa maneira o valor de  $\text{sgn}(\sigma)$  será igual a um produto de  $k$  fatores, onde cada fator é igual a  $-1$ , e com uma simples análise do produto temos que se  $k$  for par então  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k = +1$  e que se  $k$  for ímpar  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k = -1$ . □

**Teorema 2.6.** *Para qualquer  $\sigma \in S_n$ , quaisquer duas de suas decomposições como composição de transposições possuem quantidades de fatores com mesma paridade.*

*Demonstração.* Seja uma permutação  $\sigma \in S_n$  e sejam duas de suas decomposições por transposições dadas por:  $\sigma = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \dots \circ \phi_k$  e  $\sigma = \theta_1 \circ \theta_2 \circ \dots \circ \theta_q$ . Pelo que temos relatado anteriormente sabemos que

$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k = (-1)^q$ , e assim se  $k$  for par teremos que  $(-1)^k = 1$  e que portanto que  $(-1)^q = 1$ , dessa forma resultando que  $q$  também é par. E se  $k$  for ímpar teremos que  $(-1)^k = -1$  e que portanto que  $(-1)^q = -1$ , dessa forma resultando que  $q$  também será ímpar.  $\square$

**Definição 2.6.** Para uma permutação  $\sigma \in S_n$ , dizemos que  $\sigma$  é uma permutação par caso  $\text{sgn}(\sigma) = +1$ , e uma permutação ímpar caso  $\text{sgn}(\sigma) = -1$ .

**Definição 2.7.** Dado  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $M = (m_{ij})_{i,j}$  uma matriz real de ordem  $n$ , o determinante de  $M$  é o número denotado por  $\det M$  e dado por

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)}.$$

Buscando compreender melhor a Definição 2.7 vamos apresentar como seria o cálculo do determinante de matrizes de ordem  $n = 2$  e  $n = 3$ .

**Exemplo 2.9.** Para uma matriz  $M$  de ordem  $n = 2$ , temos apenas duas possíveis permutações para  $\sigma$ , que são:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Perceba que  $\sigma_1$  é uma permutação par, logo  $\text{sgn}(\sigma_1) = 1$  e que  $\sigma_2$  é uma permutação ímpar, logo  $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$ . Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned} \det M &= \text{sgn}(\sigma_1)m_{1\sigma_1(1)}m_{2\sigma_1(2)} + \text{sgn}(\sigma_2)m_{1\sigma_2(1)}m_{2\sigma_2(2)} \\ &= m_{11}m_{22} - m_{12} m_{21}. \end{aligned}$$

**Exemplo 2.10.** Para a matriz  $M$  de ordem  $n = 3$ , temos seis possíveis permutações para  $\sigma$ , que são:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Perceba que as permutações:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  são permutações pares, logo  $\text{sgn}(\sigma_1) = \text{sgn}(\sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_3) = 1$  e que  $\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  são permutações ímpares, logo  $\text{sgn}(\sigma_4) = \text{sgn}(\sigma_5) = \text{sgn}(\sigma_6) = -1$ . Dessa forma, temos que:

$$\begin{aligned}
\det M &= \operatorname{sgn}(\sigma_1)m_{1\sigma_1(1)}m_{2\sigma_1(2)}m_{3\sigma_1(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_2)m_{1\sigma_2(1)}m_{2\sigma_2(2)}m_{3\sigma_2(3)} + \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\sigma_3)m_{1\sigma_3(1)}m_{2\sigma_3(2)}m_{3\sigma_3(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_4)m_{1\sigma_4(1)}m_{2\sigma_4(2)}m_{3\sigma_4(3)} + \\
&\quad + \operatorname{sgn}(\sigma_5)m_{1\sigma_5(1)}m_{2\sigma_5(2)}m_{3\sigma_5(3)} + \operatorname{sgn}(\sigma_6)m_{1\sigma_6(1)}m_{2\sigma_6(2)}m_{3\sigma_6(3)} \\
&= m_{11}m_{22}m_{33} + m_{12}m_{23}m_{31} + m_{13}m_{21}m_{32} - \\
&\quad - m_{13}m_{22}m_{31} - m_{12}m_{21}m_{33} - m_{11}m_{23}m_{32}.
\end{aligned}$$



### 3 GRAFOS

Os grafos fazem parte da história relativamente recente da Matemática, as ideias sobre esse assunto começam a surgir por volta do século XVIII, e um dos primeiros problemas envolvendo a ideia de grafos é o problema das Pontes de Königsberg, na Rússia, estudado por Leonhard Euler. Já as primeiras aplicações da utilização dos conceitos de grafos surgiram no século XIX nos campos de estudo da eletricidade e da química. [NETTO, 2003].

Atualmente a teoria de grafos auxilia no estudo de diversas áreas, solucionando problemas concretos de redes de computadores, química orgânica, árvores genealógicas, circuitos de transmissão, problemas de cabeamento, entre outros, mas independente das aplicações mencionadas é um conceito bastante utilizado em problemas teóricos matemáticos.

Para o propósito deste trabalho necessitamos compreender o que vem a ser um grafo orientado, ponderado, acíclico e finito.

**Definição 3.1.** *Um grafo orientado consiste de uma quádrupla ordenada  $G = (V, A, o, d)$ , em que:*

- $V$  é um conjunto, cujos elementos são chamados de vértices;
- $A$  é um conjunto, cujos elementos são chamados de arestas;
- $o, d : A \rightarrow V$  são funções.

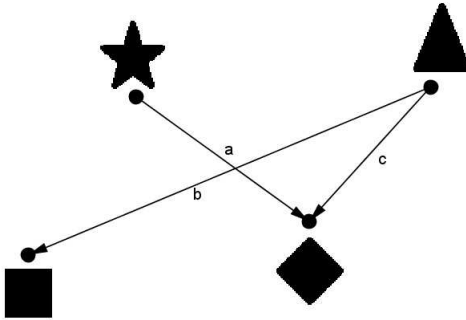
*Para cada aresta  $a \in A$ , dizemos que  $o(a)$  é a origem de  $a$ , e  $d(a)$  é o destino de  $a$ .*

Grafos orientados são normalmente representados por meio de diagramas. Dado um grafo orientado  $G = (V, A, o, d)$ , montamos um diagrama associando cada vértice  $v \in V$  a um ponto distinto do diagrama, e cada aresta  $a \in A$  a uma flecha no diagrama que sai do ponto que representa  $o(a)$ , e chega no ponto que representa  $d(a)$ . Os pontos e flechas do diagrama podem ser indicados pelos símbolos que representam os vértices e arestas do grafo, respectivamente.

**Exemplo 3.1.** *Sejam os conjuntos  $V$  e  $A$  dados por  $V = \{\star, \blacktriangle, \blacksquare, \blacklozenge\}$  e  $A = \{a, b, c\}$  e vamos definir as funções  $o : A \rightarrow V$  e  $d : A \rightarrow V$  como segue:*

$$\begin{array}{ll} o(a) = \star & d(a) = \blacklozenge \\ o(b) = \blacktriangle & d(b) = \blacksquare \\ o(c) = \blacktriangle & d(c) = \blacklozenge \end{array}$$

Figura 1 – Exemplo: Grafo



Fonte: elaborado pela autora.

A representação do grafo orientado  $G = (V, A, o, d)$  por meio de um diagrama de flechas e pontos é apresentada na Figura 1.

Como para o intuito do trabalho só abordaremos grafos orientados, sempre que mencionarmos **grafo**, está subentendido que trata-se de um grafo orientado.

**Definição 3.2.** Um grafo  $G = (V, A, o, d)$  é dito bipartido quando podemos dividir o conjunto de vértices  $V$  em dois subconjuntos  $V_1, V_2$  disjuntos, de modo que para toda aresta  $a \in A$  temos que  $o(a) \in V_1$  e que  $d(a) \in V_2$ .

Perceba que o Exemplo 3.1 é um grafo orientado bipartido, já que podemos descrever o conjunto  $V = \{\star, \blacktriangle, \blacksquare, \blacklozenge\}$  como a união de dois conjuntos disjuntos  $V_1$  e  $V_2$ , onde  $V_1 = \{\star, \blacktriangle\}$  e  $V_2 = \{\blacksquare, \blacklozenge\}$ , assim perceba que  $o(a) = \star \in V_1$ ,  $o(b) = \blacktriangle \in V_1$ ,  $o(c) = \blacktriangle \in V_1$ ,  $d(a) = \blacklozenge \in V_2$ ,  $d(b) = \blacksquare \in V_2$ ,  $d(c) = \blacksquare \in V_2$ , satisfazendo as condições da definição de grafo bipartido.

**Exemplo 3.2.** Considere os conjuntos  $V = \{B, C, D, E, F\}$ , de vértices,  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , de arestas, e sejam  $o : A \rightarrow V$  e  $d : A \rightarrow V$ , as funções definidas por:

$$\begin{array}{ll} o(1) = B & d(1) = E \\ o(2) = B & d(2) = F \\ o(3) = C & d(3) = E \\ o(4) = C & d(4) = F \\ o(5) = D & d(5) = E \end{array}$$



$$o(6) = D \quad d(6) = F$$

Dessa forma o grafo orientado  $G = (V, A, o, d)$  resultante é bipartido. De fato, considere  $V_1 = \{B, C, D\}$  e  $V_2 = \{E, F\}$ , assim a definição é satisfeita: para cada aresta  $a \in A$  tem-se que  $o(a) \in V_1$  e que  $d(a) \in V_2$ .

Grafos bipartidos são representados por diagramas compostos por dois conjuntos de pontos dispostos em linhas, o primeiro conjunto contendo os pontos que representam os vértices de  $V_1$  e o segundo conjunto contendo os pontos que representam os vértices de  $V_2$ , e as flechas que representam as arestas começam nos pontos que representam os vértices pertencentes a  $V_1$  e terminam nos pontos que representam os vértices pertencentes a  $V_2$ .

Para verificar como seria a representação do Exemplo 3.2 observe a Figura 2.

**Definição 3.3.** Um grafo ponderado  $G = (V, A, o, d, w)$  consiste de uma quintupla ordenada em que  $V, A$  são conjuntos, e  $o, d : A \rightarrow V$  e  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$  são funções. A função  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada função peso e para cada aresta  $a \in A$  temos que o número real  $w(a)$  é denominado peso de  $a$ .

Vamos definir uma função  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$  para o grafo do Exemplo 3.1 onde o conjunto de arestas é  $A = \{a, b, c\}$ .

$$\begin{aligned} w : A &\rightarrow \mathbb{R} \\ w(a) &= \pi \\ w(b) &= -5 \\ w(c) &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

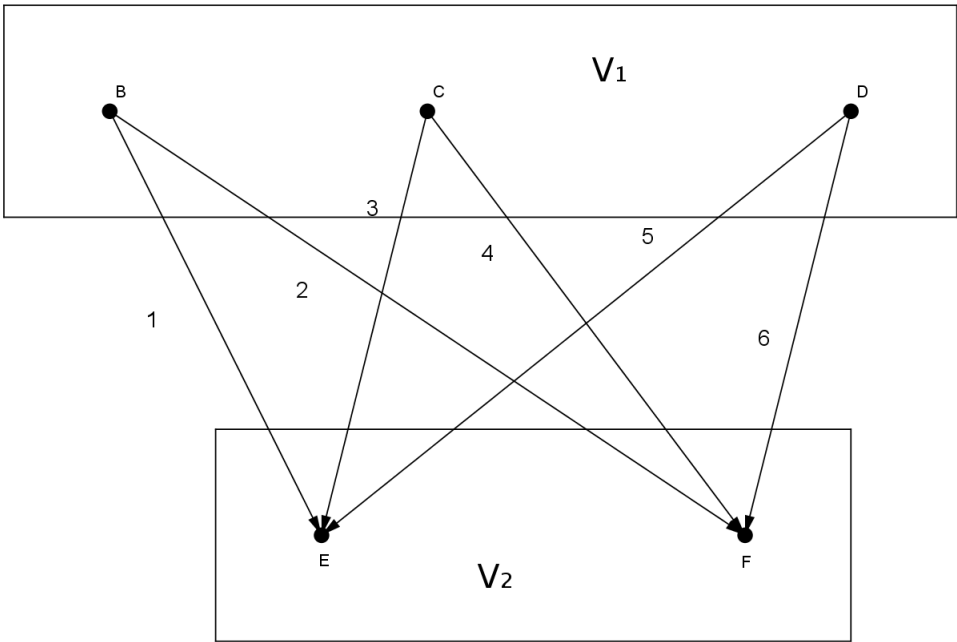
Os grafos ponderados também podem ser representados por diagramas, onde se indica o peso de cada aresta na flecha correspondente no diagrama.

A representação do Exemplo 3.1 com a função peso  $w$  definida acima é apresentada na Figura 3:

É possível associar cada matriz com entradas reais a um grafo bipartido ponderado, como vemos a seguir. A ideia será associar as linhas e colunas da matriz com os vértices do grafo, e as entradas da matriz com os pesos das arestas do grafo. Mais precisamente:

Seja dada uma matriz  $M_{r \times s}$  com  $r$  linhas e  $s$  colunas, definimos o conjunto  $V_1 = \{l_1, l_2, l_3, \dots, l_r\}$ , com  $r$  elementos representando as linhas da matriz  $M$  e o conjunto  $V_2 = \{c_1, c_2, c_3, \dots, c_s\}$ , com  $s$  elementos representando as colunas da matriz  $M$ . O grafo  $G = (V, A, o, d, w)$  que representará a matriz  $M$  terá como conjunto de vértices  $V = V_1 \cup V_2$ ,

Figura 2 – Exemplo: Grafo bipartido



Fonte: elaborado pela autora.

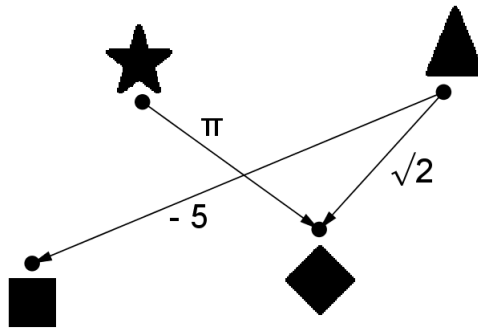
como o conjunto de arestas  $A = V_1 \times V_2$ , a função origem  $o$  será dada por  $o : A \rightarrow V_1$ ;  $o(l_i, c_j) = l_i$ , a função destino  $d$  será dada por:  $d : A \rightarrow V_2$ ;  $d(l_i, c_j) = c_j$  e a função peso  $w$  será  $w : A \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $w(l_i, c_j) = m_{ij}$ , onde  $m_{ij}$  é o elemento da linha  $i$  e da coluna  $j$  da matriz  $M_{r \times s}$ .

**Exemplo 3.3.** Seja  $M_{3 \times 2}$  a matriz  $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ . O grafo associado a matriz  $M$  é representado pelo diagrama dado na Figura 4.

É possível, a partir de um ponto no diagrama de um grafo, percorrer arestas no sentido das flechas, criando caminhos sobre o diagrama. Isto dá origem ao conceito de *caminho sobre um grafo*, como veremos na definição a seguir:

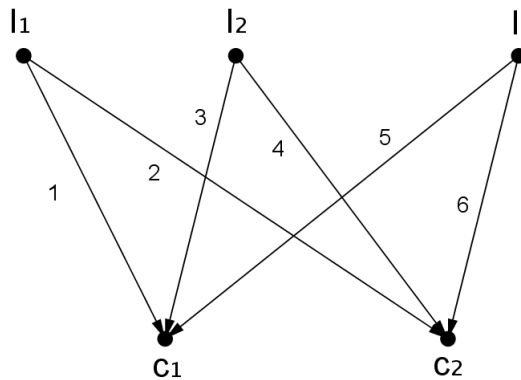
**Definição 3.4.** Seja  $G = (A, V, o, d)$  um grafo. Um caminho de com-

Figura 3 – Exemplo: Grafo ponderado



Fonte: elaborado pela autora.

Figura 4 – Exemplo: Grafo relacionado com matriz



Fonte: elaborado pela autora.

primento  $n \in \mathbb{N}^*$  em  $G$  é uma sequência  $a_1 a_2 \dots a_n$  de  $n$  arestas tais que o destino de cada aresta é a origem da próxima aresta, ou seja, que  $d(a_i) = o(a_{i+1})$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

E ainda se o grafo  $G$  é ponderado com função peso  $w$  e  $a_1 a_2 \dots a_n$

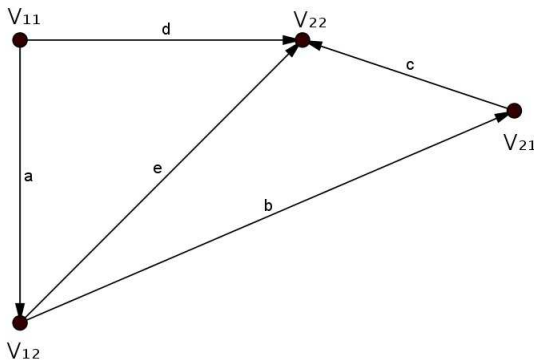
é um caminho em  $G$ , definimos o peso deste caminho como o número denotado por  $w(a_1a_2 \dots a_n)$  e dado por

$$w(a_1a_2 \dots a_n) = w(a_1) \cdot w(a_2) \cdot \dots \cdot w(a_n).$$

**Exemplo 3.4.** Seja  $G = (V, A, o, d)$  um grafo bipartido, com conjunto de vértices  $V$  particionado em subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$ . Como  $V_1$  contém as origens de todas as arestas de  $G$ ,  $V_2$  contém os destinos de todas as arestas de  $G$  e  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , vemos que é impossível que um vértice de  $G$  seja ao mesmo tempo origem e destino de arestas. Deste modo, em grafos bipartidos os únicos caminhos admissíveis são os de comprimento  $n = 1$ , ou seja, todos os caminhos de  $G$  são compostos por apenas uma aresta cada. Para ver um exemplo que apresenta essa ocorrência basta observar a Figura 2 que ilustra o Exemplo 3.2 de grafo bipartido, onde verificamos que um mesmo vértice não pode ser ao mesmo tempo término de uma aresta e origem da aresta seguinte. Neste exemplo então existem apenas os caminhos: 1; 2; 3; 4; 5 e 6 todos de comprimento  $n = 1$ .

**Exemplo 3.5.** Para o grafo representado pelo diagrama presente na Figura 5 podemos escrever diversos caminhos, como por exemplo o caminho  $abc$  de comprimento  $n = 3$ , ou o caminho  $ae$  de comprimento  $n = 2$ , ou o caminho  $ab$  de comprimento  $n = 2$ , ou ainda o caminho  $a$  de comprimento  $n = 1$ .

Figura 5 – Exemplo: Grafo e caminhos



Fonte: elaborado pela autora.

**Definição 3.5.** Dados  $G = (V, A, o, d, w)$  um grafo ponderado,  $n \in \mathbb{N}^*$  e dois conjuntos de  $n$  vértices de  $G$  cada, digamos  $B = \{B_1, \dots, B_n\}$  e  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ , a matriz caminho de  $B$  para  $C$  é a matriz  $n \times n$ , digamos  $M = (m_{ij})_{i,j}$  em que para cada  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , tem-se que:

$$m_{ij} = \sum_{P: B_i \rightarrow C_j} w(P),$$

ou seja, cada elemento  $m_{ij}$  será determinado pela soma dos pesos de todos os caminhos possíveis que ligam  $B_i$  a  $C_j$ .

**Exemplo 3.6.** Para ilustrar a definição de matriz caminho vamos utilizar o grafo presente na Figura 5 e vamos atribuir os seguintes pesos às arestas:  $w(a) = 1, w(b) = 2, w(c) = -3, w(d) = 3, w(e) = -2$ ; definiremos também os conjuntos  $V_1 = \{V_{11}, V_{12}\}$  e  $V_2 = \{V_{21}, V_{22}\}$ . Assim a matriz caminho  $M$  associada a  $V_1$  e  $V_2$  será uma matriz  $2 \times 2$ , pois há dois vértices em cada um dos conjuntos  $V_1$  e  $V_2$ :

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Para determinarmos cada  $m_{ij}$  é preciso listarmos todos os caminhos possíveis do grafo que conectam os vértices de  $V_1$  para  $V_2$ . Segue a lista:

- De  $V_{11}$  para  $V_{21}$ :  $ab$
- De  $V_{11}$  para  $V_{22}$ :  $ae, abc, d$
- De  $V_{12}$  para  $V_{21}$ :  $b$
- De  $V_{12}$  para  $V_{22}$ :  $e, bc$ .

Vamos determinar o peso de cada um dos caminhos:

$$w(ab) = w(a) \cdot w(b) = 1 \cdot 2 = 2,$$

$$w(ae) = w(a) \cdot w(e) = 1 \cdot (-2) = -2,$$

$$w(abc) = w(a) \cdot w(b) \cdot w(c) = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6,$$

$$w(d) = 3$$

$$w(b) = 2,$$

$$w(e) = -2,$$

$$w(bc) = w(b) \cdot w(c) = 2 \cdot (-3) = -6.$$

E para então definir a matriz para cada  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $m_{ij}$  é definido como a soma dos pesos dos caminhos do grafo que conectam  $V_{1i}$  até  $V_{2j}$ :

$$m_{ij} = \sum_{P: V_{1i} \rightarrow V_{2j}} w(P).$$

Dessa forma temos que:

$$m_{11} = \sum_{P:V_{11} \rightarrow V_{21}} w(P) = w(ab) = 2,$$

$$m_{12} = \sum_{P:V_{11} \rightarrow V_{22}} w(P) = w(ae) + w(abc) + w(d) = -2 + (-6) + 3 = -5,$$

$$m_{21} = \sum_{P:V_{12} \rightarrow V_{21}} w(P) = w(b) = 2,$$

$$m_{22} = \sum_{P:V_{12} \rightarrow V_{22}} w(P) = w(e) + w(bc) = -2 + (-6) = -8.$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

**Definição 3.6.** Dados  $G = (V, A, o, d)$  um grafo,  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $B, C \subseteq V$  com  $n$  vértices cada, digamos  $B = \{B_1, \dots, B_n\}$  e  $C = \{C_1, \dots, C_n\}$ , um sistema de caminhos de  $B$  para  $C$  consiste de uma permutação  $\sigma \in S_n$  e de  $n$  caminhos,  $P_1, P_2, \dots, P_n$  no grafo, de modo que para qualquer  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem se que  $o(P_i) = B_i$  e  $d(P_i) = C_{\sigma(i)}$ . Denotamos este sistema de caminhos por

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_n).$$

O sinal de  $P$  é o número denotado por  $\text{sgn}(P)$  e dado por

$$\text{sgn}(P) = \text{sgn}(\sigma).$$

Se adicionalmente os conjuntos de vértices percorridos por cada um dos caminhos  $P_1, P_2, \dots, P_n$  forem disjuntos aos pares, dizemos que o sistema de caminhos é de vértices disjuntos.

Finalmente, se o grafo  $G$  é ponderado com função peso  $w$ , definimos o peso do sistema de caminhos como o número denotado por  $w(P)$  e dado por

$$w(P) = \prod_{i=1}^n w(P_i).$$

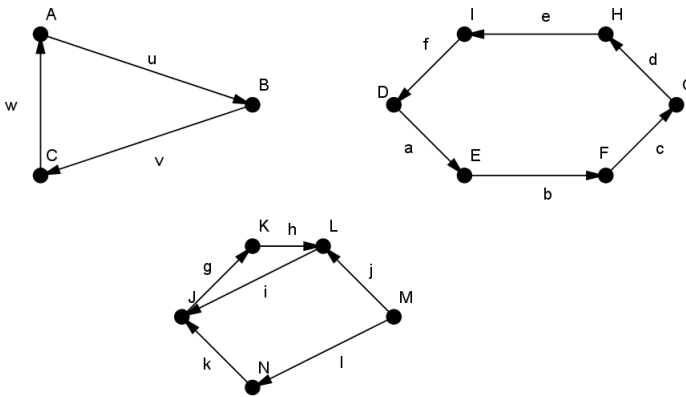
**Definição 3.7.** Dados  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $P = a_1 a_2 \dots a_n$  um caminho de com-

primeto  $n$  sobre um grafo  $G$ , dizemos que o caminho  $P$  é fechado se  $d(a_n) = o(a_1)$ .

Se o grafo  $G$  não possui caminhos fechados, dizemos que o grafo  $G$  é acíclico.

**Exemplo 3.7.** Podemos visualizar na Figura 6 exemplos de grafos que possuem caminhos fechados. Na parte superior da Figura 6 os dois grafos possuem caminhos fechados que percorrem todas as arestas do grafo, são os caminhos  $uvw$  e  $abcdef$ . No grafo inferior da Figura 6 há o caminho fechado  $ghi$  que não percorre todas as arestas do grafo e podemos verificar que as arestas restantes não formam outro caminho fechado.

Figura 6 – Exemplo: Grafos com caminhos fechados

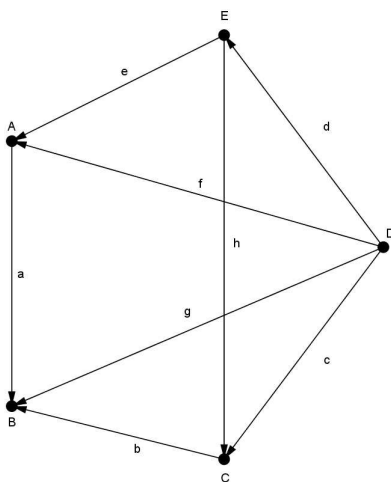


Fonte: elaborado pela autora.

**Exemplo 3.8.** Temos um exemplo de grafo acíclico na Figura 7, onde não é possível identificar nenhum caminho fechado.

Perceba que os grafos representados na Figura 1 e na Figura 4 são também exemplos de grafos acíclicos. Além disso, grafos que representam matrizes serão sempre grafos acíclicos já que um mesmo vértice não é ao mesmo tempo término de uma aresta e início da aresta seguinte, assim a representação de matrizes será por meio de grafos que não possuem caminhos fechados, pois no caso da representação das matrizes trabalhamos com grafos bipartidos.

Figura 7 – Exemplo: Grafo acíclico



Fonte: elaborado pela autora.



#### 4 LEMA DE GESSEL-VIENNOT

Nesse capítulo será abordado o foco principal de estudo desse trabalho, o Lema de Gessel-Viennot, que estabelece uma conexão entre os sistemas de caminhos e determinantes. Este lema possui uma versão similar obtida anteriormente por Bent Lindstrom, mas seu significado combinatório foi abordado por Ira Gessel e Gerard Viennot em 1985, tornando-se um clássico da enumeração combinatória. [AIGNER, 2002] e [AIGNER, 2007].

**Teorema 4.1** (Lema de Gessel-Viennot). *Sejam  $G = (V, A, o, d, w)$  um grafo orientado, ponderado, acíclico e finito,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B, C \subseteq V$  conjunto com  $n$  vértices de  $G$  cada, e  $M$  a matriz caminho de  $B$  para  $C$ . Então, tem-se que*

$$\det(M) = \sum_P \operatorname{sgn}(P)w(P),$$

em que  $P$  percorre todos os sistemas de caminhos de vértices disjuntos de  $B$  para  $C$ .

*Demonstração.* Para iniciar vamos considerar a descrição do determinante por meio de permutações:

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \dots m_{n\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)}.$$

Vamos fixar um  $\sigma \in S_n$  e consideremos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)} &= \operatorname{sgn}(\sigma) \left[ \sum_{P_1: B_1 \rightarrow C_{\sigma(1)}} w(P_1) \right] \dots \left[ \sum_{P_n: B_n \rightarrow C_{\sigma(n)}} w(P_n) \right] = \\ &= \sum_{P_1: B_1 \rightarrow C_{\sigma(1)}} \dots \sum_{P_n: B_n \rightarrow C_{\sigma(n)}} \operatorname{sgn}(\sigma) w(P_1) \dots w(P_n). \end{aligned}$$

Agora note que para cada  $P_1, \dots, P_n$  fixados, o conjunto  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$  é um sistema de caminhos de  $B$  para  $C$  associado a permutação  $\sigma$ , já que  $P_1: B_1 \rightarrow C_{\sigma(1)}, \dots, P_n: B_n \rightarrow C_{\sigma(n)}$ .

Note também que:  $w(P) = w(P_1) \dots w(P_n)$  e que  $\operatorname{sgn}(P) = \operatorname{sgn}(\sigma)$ , assim concluímos que  $\operatorname{sgn}(\sigma)w(P_1) \dots w(P_n) = \operatorname{sgn}(P) \cdot w(P)$ .

Por outro lado, todo sistema de caminhos  $P$  de  $B$  para  $C$  é tal

que  $\text{sgn}(P)w(P)$  aparece como um termo da soma anterior, concluindo então que

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i\sigma(i)} = \sum_P \text{sgn}(P)w(P),$$

que é a soma sobre todos os sistemas de caminhos de  $B$  para  $C$ .

Perceba que nem todos os caminhos percorridos por  $P$  são de vértices disjuntos, assim para chegarmos ao resultado do lema o que precisamos é provar que

$$\sum_{P \in N} \text{sgn}(P)w(P) = 0,$$

em que  $N$  é o conjunto dos sistemas de caminhos de  $B$  para  $C$  que não são de vértices disjuntos.

Afirmamos que dado um sistema de caminhos  $Q$  de  $B$  para  $C$  que não é de vértices disjuntos, existe um sistema de caminhos  $R$  de  $B$  para  $C$  que não é de vértices disjuntos, com  $Q \neq R$ , tal que  $w(Q) = w(R)$  e  $\text{sgn}(Q) = -\text{sgn}(R)$ .

Seja  $Q$  um sistema de caminhos qualquer de  $B$  para  $C$  que não seja de vértices disjuntos, associado digamos a uma permutação  $\sigma \in S_n$ .

Para chegarmos a esta conclusão partimos do seguinte, o sistema de caminhos  $Q$  de  $B$  para  $C$  terá ao menos um par de caminhos que irão se intersectar, já que não é de vértices disjuntos, digamos que o vértice comum entre dois caminhos de  $Q$ , digamos  $Q_i, Q_j$ , seja o vértice  $X$ , digamos também que  $Q_i$  é o caminho que conecta  $B_i$  a  $C_{\sigma(i)}$  e que  $Q_j$  é o caminho que conecta  $B_j$  a  $C_{\sigma(j)}$ .

Agora o sistema de caminhos  $R$  será composto pelos caminhos do sistema de caminhos  $Q$  com exceção dos caminhos  $Q_i, Q_j$  que serão substituídos pelos caminhos  $R_i, R_j$ , onde o caminho  $R_i$  inicia no vértice  $B_i$  seguindo o mesmo caminho de  $Q_i$  até chegar no vértice  $X$  e então segue pelo caminho  $Q_j$  até o vértice  $C_{\sigma(j)}$  e  $R_j$  inicia em  $B_j$  seguindo o mesmo caminho de  $Q_j$  até chegar no vértice  $X$  e então segue pelo caminho  $Q_i$  até o vértice  $C_{\sigma(i)}$ .

Perceba que os caminhos  $Q_i, Q_j$  e  $R_i, R_j$  se intersectam no vértice  $X$  e que ambos os caminhos percorrem as mesmas arestas, assim temos que tanto o peso do sistema de caminhos  $Q$  quanto o peso do sistema de caminhos  $R$  são iguais,  $w(Q) = w(R)$ .

E perceba também que há uma transposição nesses caminhos que foram alterados, dessa forma eles terão sinais diferentes, pois, por

construção, o sistema de caminhos  $R$  está associado à permutação  $(ij) \circ \sigma$ , e assim

$$\text{sgn}(R) = \text{sgn}((ij) \circ \sigma) = \text{sgn}((ij)) \cdot \text{sgn}(\sigma) = -1 \cdot \text{sgn}(\sigma) = -\text{sgn}(Q),$$

como desejado.

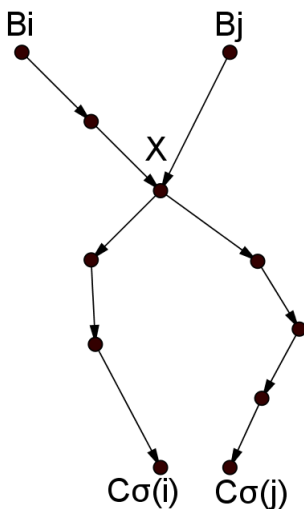
Como  $\text{sgn}(Q)w(Q)$  e  $\text{sgn}(R)w(R)$  são termos de

$$\sum_P \text{sgn}(P)w(P)$$

percebemos que esses termos do somatório se anulam, mais precisamente, que os termos dessa soma quando forem de sistemas de caminhos de vértices que não são disjuntos se anulam aos pares, restando assim no somatório para o cálculo do determinante apenas os sistemas de caminhos de vértices disjuntos como queríamos demonstrar.

A Figura 8 ilustra uma situação relatada para o vértice comum  $X$ .

Figura 8 – Parte de um grafo com vértice comum

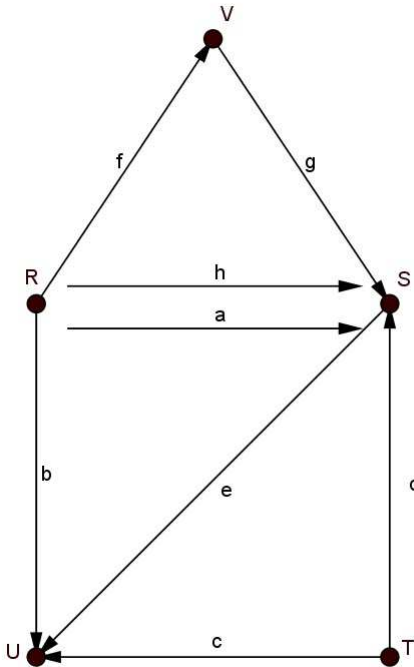


Fonte: elaborado pela autora.

□

**Exemplo 4.1.** Considere o grafo orientado, ponderado, acíclico e finito de acordo com a Figura 9, com os seguintes pesos atribuídos às arestas:  $w(a) = -4$ ,  $w(b) = -2$ ,  $w(c) = 1$ ,  $w(d) = -1$ ,  $w(e) = 2$ ,  $w(f) = 1$ ,  $w(g) = 3$  e  $w(h) = -3$ .

Figura 9 – Grafo orientado, ponderado, acíclico e finito



Fonte: elaborado pela autora.

Sejam  $B$  e  $C$  conjuntos ordenados com dois vértices cada, dados por:  $B = \{B_1, B_2\} = \{R, V\}$  e  $C = \{C_1, C_2\} = \{U, S\}$ . A partir desses dados podemos construir a matriz caminho de  $B$  para  $C$ , que será uma matriz  $M_{2 \times 2}$ , pois temos dois vértices em cada conjunto.

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}.$$

Para determinar o termo  $m_{ij}$  da matriz caminho  $M$  primeiro precisamos identificar todos os caminhos do grafo que conectam o vértice

lice  $B_i$  ao vértice  $C_j$ . De acordo com o grafo da Figura 9 temos a seguinte lista de caminhos que conectam cada par de vértices dos conjuntos  $B$  e  $C$ :

- De  $B_1 = R$  para  $C_1 = U$  temos:  $b, he, ae, fge$ .
- De  $B_1 = R$  para  $C_2 = S$  temos:  $h, a, fg$ .
- De  $B_2 = V$  para  $C_1 = U$  temos:  $ge$ .
- De  $B_2 = V$  para  $C_2 = S$  temos:  $g$ .

Os pesos atribuídos a cada um desses caminhos são:

- $w(b) = -2$ ;
- $w(he) = w(h) \cdot w(e) = (-3) \cdot 2 = -6$ ;
- $w(ae) = w(a) \cdot w(e) = (-4) \cdot 2 = -8$ ;
- $w(fge) = w(f) \cdot w(g) \cdot w(e) = 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$ ;
- $w(h) = -3$ ;
- $w(a) = -4$ ;
- $w(fg) = w(f) \cdot w(g) = 1 \cdot 3 = 3$ ;
- $w(ge) = w(g) \cdot w(e) = 3 \cdot 2 = 6$ ;
- $w(g) = 3$ .

Lembramos que para cada  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $m_{ij}$  é determinado pela soma dos pesos dos caminhos do grafo que conectam  $B_i$  para  $C_j$ :

$$m_{ij} = \sum_{P: B_i \rightarrow C_j} w(P)$$

Logo,

$$m_{11} = \sum_{P: B_1 \rightarrow C_1} w(P) = \sum_{P: R \rightarrow U} = -2 + (-6) + (-8) + 6 = -10,$$

$$m_{12} = \sum_{P: B_1 \rightarrow C_2} w(P) = \sum_{P: R \rightarrow S} = -3 + (-4) + 3 = -4,$$

$$m_{21} = \sum_{P: B_2 \rightarrow C_1} w(P) = \sum_{P: V \rightarrow U} = 6,$$

$$m_{22} = \sum_{P: B_2 \rightarrow C_2} w(P) = \sum_{P: V \rightarrow S} = 3.$$

Assim encontramos a matriz  $M$  e podemos calcular seu determinante:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

E verificando quais são as permutações  $\sigma \in S_2$ , nesse caso temos:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Assim temos que  $\text{sgn } \sigma_1 = +1$  e que  $\text{sgn } \sigma_2 = -1$ . Portanto,

$$\det M = -10 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) \cdot 6 = -30 - (-24) = -6.$$

Agora usaremos o lema para calcular esse determinante. Para isso é preciso determinar quem são todos os sistemas de caminhos de vértices disjuntos que conectam  $B$  e  $C$ .

Para cada permutação  $\sigma$ , temos vários sistemas de caminhos de  $B$  para  $C$ ; cada um deles consistirá de dois caminhos, um que conecta  $B_1$  com  $C_{\sigma(1)}$  e outro que conecta  $B_2$  com  $C_{\sigma(2)}$ .

Para  $\sigma_1$  precisamos de caminhos que conectem  $B_1 = R$  a  $C_1 = U$  e  $B_2 = V$  a  $C_2 = S$ . Os sistemas de caminhos de  $B$  para  $C$  relativos à  $\sigma_1$  são:

$$P_1 = (b, g); P_2 = (he, g); P_3 = (ae, g); P_4 = (fge, g).$$

Similarmente para  $\sigma_2$  teremos os caminhos que conectam  $B_1 = R$  a  $C_2 = S$  e  $B_2 = V$  a  $C_1 = U$ . Os sistemas de caminhos de  $B$  para  $C$  relativos à  $\sigma_2$  são:

$$P_5 = (h, ge); P_6 = (a, ge); P_7 = (fg, ge).$$

O peso de cada um desses sistemas de caminhos é igual ao produto dos pesos dos caminhos do sistema, ou seja, será o produto dos pesos das arestas desses caminhos. Assim:

$$\begin{aligned} w(P_1) &= w(b) \cdot w(g) = -2 \cdot 3 = -6; \\ w(P_2) &= w(he) \cdot w(g) = -6 \cdot 3 = -18; \\ w(P_3) &= w(ae) \cdot w(g) = -8 \cdot 3 = -24; \\ w(P_4) &= w(fge) \cdot w(g) = 6 \cdot 3 = 18; \\ w(P_5) &= w(h) \cdot w(ge) = -3 \cdot 6 = -18; \\ w(P_6) &= w(a) \cdot w(ge) = -4 \cdot 6 = -24; \\ w(P_7) &= w(fg) \cdot w(ge) = 3 \cdot 6 = 18. \end{aligned}$$

O lema diz que

$$\det M = \sum_P \text{sgn}(P)w(P)$$

onde  $P$  percorre os sistemas de caminhos de vértices disjuntos, aqui  $\text{sgn}(P)$  é o sinal da permutação associada ao sistema de caminhos  $P$ .

*Perceba que o sistema de caminhos de vértices disjuntos é apenas  $P_1$ . Deste modo,*

$$\det M = \sum_P \operatorname{sgn}(P)w(P) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)w(P_1) = -6.$$

#### 4.1 A FÓRMULA DE BINET-CAUCHY

O teorema de Binet, devido ao matemático francês Jacques Philippe Marie Binet, diz que o determinante de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos seus determinantes. No entanto neste tópico vamos aprimorar esse enunciado no teorema que segue onde se apresenta a fórmula para o cálculo do determinante de matrizes quadradas que são descritas como o produto de duas matrizes não quadradas. A fórmula de Binet-Cauchy mostra como usar a informação contida em cada uma das matrizes retangulares para obter o determinante da matriz quadrada dada pelo produto das duas.

**Teorema 4.2** (Fórmula de Binet-Cauchy). *Sejam  $r, s \in \mathbb{N}^*$  com  $r \leq s$ ,  $P$  uma matriz  $r \times s$  e  $Q$  uma matriz  $s \times r$ , ambas com entradas reais. Então, tem-se que*

$$\det(PQ) = \sum_Z (\det(P_Z))(\det(Q_Z)), \quad (4.1)$$

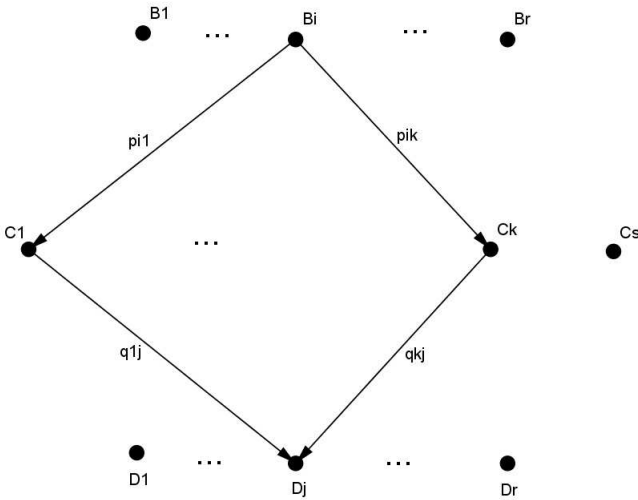
*em que  $Z$  percorre todos os subconjuntos com  $r$  elementos de  $\{1, \dots, s\}$ ,  $P_Z$  é a submatriz  $r \times r$  de  $P$  formada com as colunas indicadas por  $Z$ , em ordem crescente, e  $Q_Z$  é a submatriz  $r \times r$  de  $Q$ , formada com as linhas indicadas por  $Z$ , em ordem crescente.*

*Demonstração.* A ideia da demonstração do teorema da propriedade estendida do determinante do produto de matrizes é a utilização do lema de Gessel-Viennot, onde deveremos relacionar as matrizes  $P$  e  $Q$  com um grafo concatenado como presente na Figura 10, assim, supomos que o grafo bipartido em  $B$  e  $C$  corresponde a  $P$  e o grafo bipartido em  $C$  e  $D$  corresponde a  $Q$ , e ainda considere o grafo relacionado em sequência conforme a Figura 10 e observe que a entrada  $i, j$  da matriz caminho  $M$  de  $B$  para  $D$  é precisamente

$$m_{ij} = \sum_k p_{ik}q_{kj}.$$

Dessa forma temos que  $M = PQ$ . E uma vez que os sistemas de caminhos de vértices disjuntos de  $B$  para  $D$  no grafo relacionado em sequência conforme indicado correspondem a pares de sistemas de  $B$  para  $Z$ , e respectivamente de  $Z$  para  $D$ , o resultado do teorema segue imediatamente do Lema de Gessel-Viennot, levando em conta que  $\text{sgn}(\sigma\tau) = \text{sgn}(\sigma)\text{sgn}(\tau)$ .

Figura 10 – Grafo relacionado ao produto de matrizes



Fonte: elaborado pela autora.

□

**Exemplo 4.2.** Sejam as matrizes  $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$  e  $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ .

Vamos calcular  $\det(PQ)$  por grafos de acordo com o enunciado do Lema 4.1.

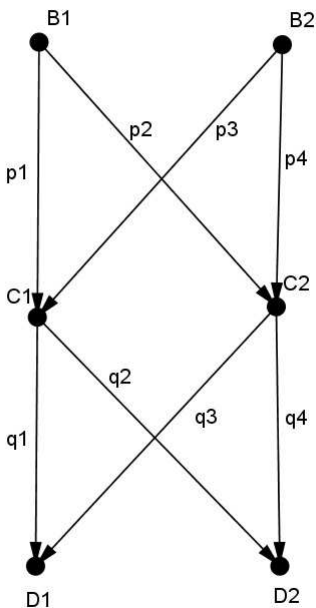
Para isso vamos construir o grafo concatenado para as matrizes  $P$  e  $Q$  conforme Figura 11, onde a matriz caminho  $M$  de  $B = \{B_1, B_2\}$  até  $D = \{D_1, D_2\}$  equivale a matriz produto  $PQ$ .

Determinamos os caminhos de  $B$  para  $D$ :

- De  $B_1$  para  $D_1$ :  $(p_1q_1); (p_2q_3)$ ;
- De  $B_1$  para  $D_2$ :  $(p_1q_2); (p_2q_4)$ ;
- De  $B_2$  para  $D_1$ :  $(p_3q_1); (p_4q_3)$ ;



Figura 11 – Exemplo grafo relacionado ao produto das matrizes PQ



Fonte: elaborado pela autora.

- De  $B_2$  para  $D_2$ :  $(p_3q_2); (p_4q_4)$ .  
*Determinando o peso de cada caminho:*
    - $w(p_1q_1) = w(p_1) \cdot w(q_1) = 2 \cdot (-1) = -2$ ;
    - $w(p_2q_3) = w(p_2) \cdot w(q_3) = (-1) \cdot 5 = -5$ ;
    - $w(p_1q_2) = w(p_1) \cdot w(q_2) = 2 \cdot 3 = 6$ ;
    - $w(p_2q_4) = w(p_2) \cdot w(q_4) = (-1) \cdot (-2) = 2$ ;
    - $w(p_3q_1) = w(p_3) \cdot w(q_1) = (-3) \cdot (-1) = 3$ ;
    - $w(p_4q_3) = w(p_4) \cdot w(q_3) = 4 \cdot 5 = 20$ ;
    - $w(p_3q_2) = w(p_3) \cdot w(q_2) = (-3) \cdot 3 = -9$ ;
    - $w(p_4q_4) = w(p_4) \cdot w(q_4) = 4 \cdot (-2) = -8$ .
- As permutações para  $n = 2$  são:*

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , onde temos  $\text{sgn}(\sigma_1) = 1$  e  $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$ .

Os sistemas de caminhos, com seus respectivos pesos, resultantes de  $\sigma_1$  são:

$$P_1 = \{(p_1q_1)(p_3q_2)\}, w(P_1) = w(p_1q_1) \cdot w(p_3q_2) = (-2) \cdot (-9) \\ = +18$$

$$P_2 = \{(p_1q_1)(p_4q_4)\}, w(P_2) = w(p_1q_1) \cdot w(p_4q_4) = (-2) \cdot (-8) \\ = +16$$

$$P_3 = \{(p_2q_3)(p_3q_2)\}, w(P_3) = w(p_2q_3) \cdot w(p_3q_2) = (-5) \cdot (-9) \\ = +45$$

$$P_4 = \{(p_2q_3)(p_4q_4)\}, w(P_4) = w(p_2q_3) \cdot w(p_4q_4) = (-5) \cdot (-8) \\ = +40.$$

Os sistemas de caminhos, com seus respectivos pesos, resultantes de  $\sigma_2$  são:

$$P_5 = \{(p_1q_2)(p_3q_1)\}, w(P_5) = w(p_1q_2) \cdot w(p_3q_1) = 6 \cdot 3 = 18;$$

$$P_6 = \{(p_1q_2)(p_4q_3)\}, w(P_6) = w(p_1q_2) \cdot w(p_4q_3) = 6 \cdot 20 = 120;$$

$$P_7 = \{(p_2q_4)(p_3q_1)\}, w(P_7) = w(p_2q_4) \cdot w(p_3q_1) = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$P_8 = \{(p_2q_4)(p_4q_3)\}, w(P_8) = w(p_2q_4) \cdot w(p_4q_3) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Pelo Lema de Gessel-Viennot temos que:

$$\det M = w(P_1) + w(P_2) + w(P_3) + w(P_4) - w(P_5) - w(P_6) - w(P_7) - w(P_8) \\ = 18 + 16 + 45 + 40 - 18 - 120 - 6 - 40 \\ = -65.$$

Determinando os elementos da matriz caminho  $M$  de  $B$  para  $D$ :

- $m_{11} = w(p_1q_1) + w(p_2q_3) = -2 + (-5) = -7$ ;
- $m_{12} = w(p_1q_2) + w(p_2q_4) = 6 + 2 = 8$ ;
- $m_{21} = w(p_3q_1) + w(p_4q_3) = 2 + 20 = 23$ ;
- $m_{22} = w(p_3q_2) + w(p_4q_4) = -9 + (-8) = -17$ .

Assim podemos verificar que a matriz caminho é  $M = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 23 & -17 \end{pmatrix}$ ,

e seu determinante é:  $\det(M) = 119 - 184 = -65$ .

Ou ainda podemos calcular diretamente que  $\det(P) = 8 - (+3) = 5$  e  $\det(Q) = 2 - (+15) = -13$  então  $\det(PQ) = 5 \cdot (-13) = -65$ .

O que é interessante verificar no Teorema 4.2 é a extensão da Fórmula de Binet do cálculo do produto do determinante de matrizes quadradas, o que ocorre é que podemos estender a fórmula para matrizes quadradas que não se originam de matrizes quadradas, desde que satisfaçam a condição de que número de linhas da primeira matriz a se multiplicar seja menor ou igual ao número de colunas da segunda.

Para visualizar essa extensão vamos analisar o exemplo na sequência:

**Exemplo 4.3.** Sejam as matrizes  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  e  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ .

Vamos calcular  $\det(PQ)$  por grafos de acordo com o enunciado do Lema 4.1.

Para isso vamos construir o grafo concatenado para as matrizes  $P$  e  $Q$  conforme Figura 12, onde a parte do grafo de  $B$  para  $C$  equivale à matriz  $P$  e a parte do grafo de  $C$  para  $D$  equivale à matriz  $Q$ , assim o grafo total da matriz caminho  $M$  de  $B = \{B_1, B_2\}$  para  $D = \{D_1, D_2\}$  equivale à matriz produto  $PQ$ .

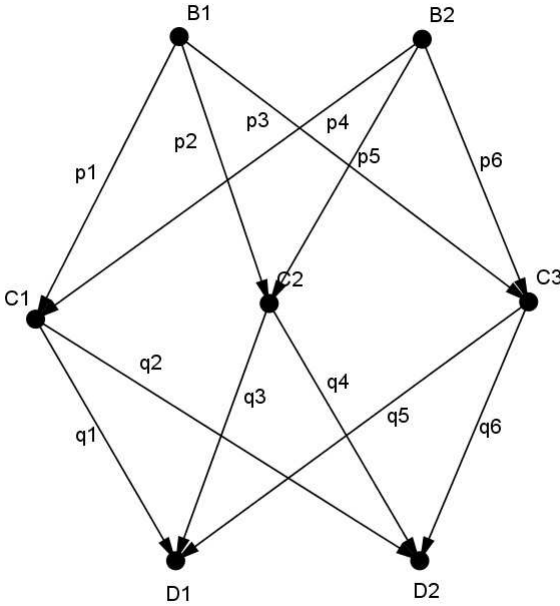
Determinamos os caminhos de  $B$  para  $D$ :

- De  $B_1$  para  $D_1$ :  $(p_1q_1)$ ;  $(p_2q_3)$ ;  $(p_3q_5)$ ;
- De  $B_1$  para  $D_2$ :  $(p_1q_2)$ ;  $(p_2q_4)$ ;  $(p_3q_6)$ ;
- De  $B_2$  para  $D_1$ :  $(p_4q_1)$ ;  $(p_5q_3)$ ;  $(p_6q_5)$ ;
- De  $B_2$  para  $D_2$ :  $(p_4q_2)$ ;  $(p_5q_4)$ ;  $(p_6q_6)$ .

Determinando o peso de cada caminho:

- $w(p_1q_1) = w(p_1) \cdot w(q_1) = 1 \cdot 1 = 1$ ;
- $w(p_2q_3) = w(p_2) \cdot w(q_3) = 2 \cdot 3 = 6$ ;
- $w(p_3q_5) = w(p_3) \cdot w(q_5) = 3 \cdot 5 = 15$ ;
- $w(p_1q_2) = w(p_1) \cdot w(q_2) = 1 \cdot 2 = 2$ ;
- $w(p_2q_4) = w(p_2) \cdot w(q_4) = 2 \cdot 4 = 8$ ;
- $w(p_3q_6) = w(p_3) \cdot w(q_6) = 3 \cdot 6 = 18$ ;
- $w(p_4q_1) = w(p_4) \cdot w(q_1) = 4 \cdot 1 = 4$ ;
- $w(p_5q_3) = w(p_5) \cdot w(q_3) = 5 \cdot 3 = 15$ ;

Figura 12 – Exemplo grafo relacionado ao produto das matrizes PQ



Fonte: elaborado pela autora.

- $w(p_6q_5) = w(p_6) \cdot w(q_5) = 6 \cdot 5 = 30$ ;
- $w(p_4q_2) = w(p_4) \cdot w(q_2) = 4 \cdot 2 = 8$ ;
- $w(p_5q_4) = w(p_5) \cdot w(q_4) = 5 \cdot 4 = 20$ ;
- $w(p_6q_6) = w(p_6) \cdot w(q_6) = 6 \cdot 6 = 36$ .

As permutações para  $n = 2$  são:  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  e  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,

onde temos  $\text{sgn}(\sigma_1) = 1$ , por ser permutação par e  $\text{sgn}(\sigma_2) = -1$ , por ser permutação ímpar.

Os sistemas de caminhos, com seus respectivos pesos, resultantes de  $\sigma_1$  são:

- $P_1 = \{(p_1q_1)(p_4q_2)\}$ ,  $w(P_1) = w(p_1q_1) \cdot w(p_4q_2) = 1 \cdot 8 = 8$ ;
- $P_2 = \{(p_1q_1)(p_5q_4)\}$ ,  $w(P_2) = w(p_1q_1) \cdot w(p_5q_4) = 1 \cdot 20 = 20$ ;
- $P_3 = \{(p_1q_1)(p_6q_6)\}$ ,  $w(P_3) = w(p_1q_1) \cdot w(p_6q_6) = 1 \cdot 36 = 36$ ;

- $P_4 = \{(p_2q_3)(p_4q_2)\}$ ,  $w(P_4) = w(p_2q_3) \cdot w(p_4q_2) = 6 \cdot 8 = 48$ ;
- $P_5 = \{(p_2q_3)(p_5q_4)\}$ ,  $w(P_5) = w(p_2q_3) \cdot w(p_5q_4) = 6 \cdot 20 = 120$ ;
- $P_6 = \{(p_2q_3)(p_6q_6)\}$ ,  $w(P_6) = w(p_2q_3) \cdot w(p_6q_6) = 6 \cdot 36 = 216$ ;
- $P_7 = \{(p_3q_5)(p_4q_2)\}$ ,  $w(P_7) = w(p_3q_5) \cdot w(p_4q_2) = 15 \cdot 8 = 120$ ;
- $P_8 = \{(p_3q_5)(p_5q_4)\}$ ,  $w(P_8) = w(p_3q_5) \cdot w(p_5q_4) = 15 \cdot 20 = 300$ ;
- $P_9 = \{(p_3q_5)(p_6q_6)\}$ ,  $w(P_9) = w(p_3q_5) \cdot w(p_6q_6) = 15 \cdot 36 = 540$ ;

*Os sistemas de caminhos, com seus respectivos pesos, resultantes de  $\sigma_2$  são:*

- $P_{10} = \{(p_1q_2)(p_4q_1)\}$ ,  $w(P_{10}) = w(p_1q_2) \cdot w(p_4q_1) = 2 \cdot 4 = 8$ ;
- $P_{11} = \{(p_1q_2)(p_5q_3)\}$ ,  $w(P_{11}) = w(p_1q_2) \cdot w(p_5q_3) = 2 \cdot 15 = 30$ ;
- $P_{12} = \{(p_1q_2)(p_6q_5)\}$ ,  $w(P_{12}) = w(p_1q_2) \cdot w(p_6q_5) = 2 \cdot 30 = 60$ ;
- $P_{13} = \{(p_2q_4)(p_4q_1)\}$ ,  $w(P_{13}) = w(p_2q_4) \cdot w(p_4q_1) = 8 \cdot 4 = 32$ ;
- $P_{14} = \{(p_2q_4)(p_5q_3)\}$ ,  $w(P_{14}) = w(p_2q_4) \cdot w(p_5q_3) = 8 \cdot 15 = 120$ ;
- $P_{15} = \{(p_2q_4)(p_6q_5)\}$ ,  $w(P_{15}) = w(p_2q_4) \cdot w(p_6q_5) = 8 \cdot 30 = 240$ ;
- $P_{16} = \{(p_3q_6)(p_4q_1)\}$ ,  $w(P_{16}) = w(p_3q_6) \cdot w(p_4q_1) = 18 \cdot 4 = 72$ ;
- $P_{17} = \{(p_3q_6)(p_5q_3)\}$ ,  $w(P_{17}) = w(p_3q_6) \cdot w(p_5q_3) = 18 \cdot 15 = 270$ ;
- $P_{18} = \{(p_3q_6)(p_6q_5)\}$ ,  $w(P_{18}) = w(p_3q_6) \cdot w(p_6q_5) = 18 \cdot 30 = 540$ .

*Pelo Lema de Gessel-Viennot temos que:*

$$\begin{aligned}
 \det(M) &= w(P_1) + w(P_2) + \dots + w(P_8) + w(P_9) \\
 &\quad - (w(P_{10}) + w(P_{11}) + \dots + w(P_{17}) + w(P_{18})) \\
 &= 8 + 20 + 36 + 48 + 120 + 216 + 120 + 300 + 540 \\
 &\quad - (8 + 30 + 60 + 32 + 120 + 240 + 72 + 270 + 540) \\
 &= 1408 - 1372 \\
 &= 36.
 \end{aligned}$$

*Vamos agora identificar os elementos da matriz caminho  $M$  de  $B$  para  $D$  e calcular seu determinante diretamente:*

- $m_{11} = w(p_1q_1) + w(p_2q_3) + w(p_3q_5) = 1 + 6 + 15 = 22$ ;
- $m_{12} = w(p_1q_2) + w(p_2q_4) + w(p_3q_6) = 2 + 8 + 18 = 28$ ;
- $m_{21} = w(p_4q_1) + w(p_5q_3) + w(p_6q_5) = 4 + 15 + 30 = 49$ ;
- $m_{22} = w(p_4q_2) + w(p_5q_4) + w(p_6q_6) = 8 + 20 + 36 = 64$ .

*Assim podemos verificar que a matriz caminho  $M$  é  $M = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$ , e seu determinante é:  $\det M = 1408 - 1372 = 36$ .*

Outra maneira de calcular o determinante dessa matriz produto é pelo enunciado do Teorema 4.2 onde as matrizes associadas a  $P$  e a  $Q$  com seus respectivos determinantes serão descritas a seguir:

As matrizes auxiliares criadas a partir das colunas de  $P$  são:

$$P_{Z_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad P_{Z_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad P_{Z_{23}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Os determinantes dessas matrizes são:

$$\det(P_{Z_{12}}) = -3; \quad \det(P_{Z_{13}}) = -6; \quad \det(P_{Z_{23}}) = -3.$$

As matrizes auxiliares criadas a partir das linhas de  $Q$  são:

$$Q_{Z_{12}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad Q_{Z_{13}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad Q_{Z_{23}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Os determinantes dessas matrizes são:

$$\det(Q_{Z_{12}}) = -2; \quad \det(Q_{Z_{13}}) = -4; \quad \det(Q_{Z_{23}}) = -2.$$

Agora de acordo com a Equação 4.1 enunciada no Teorema 4.2 temos que:

$$\begin{aligned} \det(PQ) &= \sum_Z (\det(P_Z)) \cdot (\det(Q_Z)) \\ &= \det(P_{Z_{12}}) \cdot \det(Q_{Z_{12}}) + \det(P_{Z_{13}}) \cdot \det(Q_{Z_{13}}) + \det(P_{Z_{23}}) \cdot \det(Q_{Z_{23}}) \\ &= (-3) \cdot (-2) + (-6) \cdot (-4) + (-3) \cdot (-2) \\ &= 6 + 24 + 6 \\ &= 36. \end{aligned}$$

## 5 CONSIDERAÇÕES

Com esse trabalho buscou-se apresentar uma demonstração acessível da fórmula de Binet-Cauchy, para isso foi necessário um estudo inicial sobre permutações e grafos.

O conteúdo permutações é um conteúdo curricular da grade do Ensino Médio, mas que nessa fase do ensino normalmente não é abordada com o rigor teórico e suas propriedades como vista nesse trabalho, no entanto, após a realização desse trabalho acho importante que ao ensinarmos esse conteúdo no Ensino Médio não o vejamos apenas como um conceito para cálculo de anagramas, mas que ao menos deixemos claro o significado teórico do que é uma permutação em matemática, e até em turmas mais aplicadas, ou com alunos que participam de programa de iniciação científica buscar trabalhar também algumas propriedades das permutações relatadas no primeiro capítulo desse trabalho.

Outra questão que vejo ter relevância para as aulas no Ensino Médio é explicar a relação entre permutações e determinante, ou seja, procurar apresentar aos alunos de Ensino Médio a definição de determinante por meio de permutações, pois muitas vezes a fórmula do determinante de matrizes é apresentada simplesmente de maneira expositiva e não explicada sua origem em certos livros didáticos.

Um conteúdo do qual já ouvia falar desde a graduação, mas no entanto não o tinha estudado em nenhuma disciplina e que me chamou a atenção pelas diversas aplicações práticas e teóricas que acabei me deparando ao realizar esse trabalho foi o conceito de grafo. Por ser um conceito relativamente recente em relação aos demais conteúdos das grades curriculares dos cursos de Matemática, normalmente não é abordado como conteúdo disciplinar, no entanto sua ideia e conceitos básicos poderiam até ser já inseridos para o estudo de algumas situações problemas específicas no Ensino Médio.

Após o estudo preliminar sobre os conceitos teóricos necessários sobre permutações e grafos foi possível compreender o Lema de Gessel-Viennot que permite apresentarmos a demonstração de Binet-Cauchy como vista no último capítulo. O Lema de Gessel-Viennot apresenta como é realizado o cálculo do determinante de uma matriz caminho associada a um grafo orientado, ponderado, acíclico e finito. E sua demonstração é sutil e elegante utilizando as propriedades de permutações e grafos apresentadas nos primeiros capítulos.

Ainda no último capítulo são apresentados alguns exemplos de como é possível calcular determinantes aplicando o lema, a fórmula de

Binet-Cauchy e faz-se a comparação com o cálculo de determinante convencional.

Algo relevante que conseguimos com a prova do Teorema apresentado nesse trabalho para o cálculo do determinante do produto de matrizes é a expansão da propriedade para o caso do produto de matrizes não quadradas que geram matrizes quadradas.

Como continuação de estudos poderia se pensar em relatar outras aplicações do Lema de Gessel-Viennot, como sua aplicação ao coeficiente binomial ou para provar a equivalência dos polinômios de Schur. [AIGNER, 2002] e [AIGNER, 2007].



## REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin. A course in enumeration. Springer Science e Business Media, 2007.

AIGNER, Martin; ZIEGLER, Günter M. As provas estão n' O LIVRO. Edgard Blücher, 2002.

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. Álgebra moderna. Atual, 2003.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. Elementos de álgebra. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2003.

NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura. Grafos: teoria, modelos, algoritmos. Edgard Blücher, 2003.