Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Felipe de Oliveira Coutinho

Teoria dos Jogos e a Recuperação Judicial de Empresas

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática (opção profissional).

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Barbosa Pinheiro

Rio de Janeiro
Agosto de 2017

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Felipe de Oliveira Coutinho

Teoria dos Jogos e a Recuperação Judicial de Empresas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Mauro Benayon Menezes
Departamento de Tecnologia e Linguagens - UFRRJ

Profa. Débora Freire Mondaini
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Marcio da Silveira Carvalho
Coordenador setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 30 de Agosto de 2017

Felipe de Oliveira Coutinho

Licenciou-se em Matemática na Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Especialização em Ciências da Educação na Faculdade Paraíso. É Professor da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e Colégio Nossa Senhora do Carmo.

Ficha Catalográfica

Coutinho, Felipe de Oliveira

Teoria dos jogos e a recuperação judicial de empresas / Felipe de Oliveira Coutinho ; orientador: Eduardo Barbosa Pinheiro. – 2017.

63 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Teoria dos jogos. 3. Estratégia. 4. Recuperação judicial. 5. Função social da empresa. I. Pinheiro, Eduardo Barbosa. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

À minha esposa, **Giselle Stefanelli Alves**, sem o incentivo dela, compreensão e carinho hoje eu não estaria aqui.

Aos meus pais por toda educação, carinho e respeito que me foram dados, apesar das dificuldades da vida.

Ao meu orientador **Prof. Dr. Eduardo Barbosa Pinheiro** por toda paciência e atenção, muito das vezes sendo mais amigo do que orientador.

A Capes, PROFMAT e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

Aos meus **colegas do PROFMAT na PUC-Rio** por todo apoio ao longo dessa caminhada.

Aos meus **colegas do PROFMAT de outros pólos**, que ajudaram nos estudos, dúvidas e que apoiaram na hora do desânimo.

A Deus, sem ele nada disso seria realidade.

Resumo

Coutinho, Felipe de Oliveira; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Orientadora). **Teoria dos Jogos e a Recuperação Judicial de Empresas**. Rio de Janeiro, 2017. 63p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

O principal objetivo deste trabalho é utilizar a teoria dos jogos para analisar as estratégias de um plano de recuperação judicial proposto por uma empresa. O princípio que envolve a recuperação está ligado à função social da empresa, que nada mais é do que toda função que ela possui para a sociedade do local onde se encontra. A teoria dos jogos é um ramo da matemática que também é conhecida como ciência da estratégia e, como o próprio nome diz, estuda as situações estratégicas onde os jogadores escolhem diferentes ações na tentativa de obter o melhor retorno possível nas suas escolhas. Para fazer essa análise tomamos o plano de recuperação judicial da empresa Oi S/A e detalhamos as estratégias de pagamento oferecidas por ela. Avaliando assim a melhor estratégia para a empresa e por consequência a melhor estratégia também para os credores envolvidos. Um jogo onde existe uma situação que é considerada ideal para ambas as partes é considerado um jogo que cada pessoa envolvida toma suas decisões para benefício próprio, mas em nossas análises podemos observar que nem sempre na recuperação judicial poderemos avaliar o jogo desta maneira, afinal se um credor optar por este tipo de jogo em um cenário mais racional, o prejuízo financeiro e social acabará sendo maior do que se optar por um jogo onde exista uma cooperação entre os jogadores e que trará um retorno positivo e onde a empresa obterá maiores prazos e condições de pagamento.

Palavras-chave

Teoria dos jogos; estratégia; recuperação judicial; função social da empresa.

Abstract

Coutinho, Felipe de Oliveira; Pinheiro, Eduardo Barbosa (Advisor). **Game Theory and Judicial Recovery of Companies.** Rio de Janeiro, 2017. 63p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

The main objective of this work is to use game theory to analyze the strategies of a judicial recovery plan proposed by a company. The principle that involves recovery is linked to the social function of the company, which is nothing more than any function it has for society in the place where it is. Game theory is a branch of mathematics that is also known as the science of strategy and, as the name implies, studies the strategic situations in which players choose different actions in an attempt to obtain the best possible return on their choices. To do this analysis we take the legal recovery plan of the company Oi S / A and detail the payment strategies offered by it. Evaluating the best strategy for the company and consequently the best strategy also for the creditors involved. A game where there is a situation that is considered ideal for both parties is considered a game that each person involved makes their decisions for their own benefit, but in our analyzes we can observe that not always in judicial recovery we can evaluate the game in this way, a lender opts for this type of game in a more rational scenario, the financial and social loss will be greater than if you opt for a game where there is a cooperation between the players and that will bring a positive return and where the company will obtain longer deadlines and payment conditions.

Keywords

Game theory; strategy; judicial recovery; social function of the company.

Sumário

Lista de tabelas e figuras

1
Introdução

A partir de seus estudos, John Von Neumann, em 1928, obteve um desenvolvimento em teoria dos jogos e provou a Teoria do Minimax, que basicamente diz que sempre existe uma solução racional para conflitos bem definidos entre dois indivíduos com interesses opostos. Ele sistematizou e formulou os principais arcabouços teóricos sobre os quais a teoria dos jogos foi construída. Demonstrou que se todo jogo finito com duas pessoas onde a soma entre o que um perder e o outro ganhar é igual a zero então possui uma solução em estratégias mistas [12] onde ocorre uma distribuição de probabilidades sobre algumas ou até mesmo todas as estratégias possíveis de serem implementadas. Tal demonstração era "pesada" demais. Usava muitos conceitos de Análise funcional e Topologia o que a tornava muito complicada para se acompanhar. Em 1937, utilizando o Teorema do ponto fixo de Brouwer, ele forneceu uma nova demonstração.

Em 1944, Neumann, que era estudioso de várias áreas da ciência, publicou, junto com o economista Oscar Morgenstern, um clássico chamado "*The Theory of Games and Economic Behaviour"*[13] o que fez com que a teoria dos jogos entrasse de vez na Economia e na Matemática Aplicada. Nesta obra os dois falam que o comportamento da economia depende, fundamentalmente, da interação entre os agentes, já que ele afeta diretamente a elaboração de estratégias e tomadas de decisão dos produtores e dos consumidores.

Em 1950, John Forbes Nash Junior, matemático que em 1994 veio a conquistar o Prêmio Nobel de Economia, provou a existência de ao menos um ponto onde os valores de ganho e perda dos jogadores são iguais em jogos de estratégias para múltiplos jogadores, mas para que ocorra o equilíbrio é necessário que os jogadores se comportem racionalmente e não se comuniquem antes do jogo para evitar acordos.

No princípio a teoria de Nash era utilizada somente para jogos em que conhecemos todas as estratégias, entretanto, em trabalhos posteriores Harsanyi e Selten mostraram que era possível utilizar também em jogos onde nem todas as estratégias são conhecidas. E a partir desses estudos a teoria dos jogos passou a ser aplicada em outras áreas de estudos como Economia, Biologia, Ciências Políticas, etc.

Nash não foi o criador da teoria dos jogos, mas a modificou de maneira significativa, já que Neumann a utilizava somente para jogos com dois jogadores. Ele fez seu trabalho valer para jogos com mais de dois jogadores alterando significativamente o cenário econômico mundial.

Toda teoria aplicada à recuperação judicial de empresas, gira em torno da Teoria de Nash, afinal se os credores não tiverem o interesse em um jogo onde os jogadores são instruídos a ter um comportamento de cooperação, transformando-o em uma competição entre grupos e não entre indivíduos, todo processo de recuperação judicial pode se transformar em um processo de falência da empresa gerando assim um prejuízo maior para ambas as partes.

Iremos estruturar essa dissertação em 3 capítulos, onde o primeiro estará restrito às definições que envolvem a Teoria dos Jogos com conceitos, definições e exemplos. Já no segundo capítulo falaremos de como funcionam os procedimentos jurídicos em todo processo de recuperação judicial de uma empresa baseados na LRF (Lei de Falência e Recuperação Judicial). No capítulo três faremos uma análise do comportamento estratégico utilizado pela empresa Oi S/A no processo de recuperação judicial mostrando o comportamento de suas escolhas estratégicas e por que elas foram bem favoráveis tanto para a empresa quanto para o credor que serão os jogadores envolvidos nesse processo.

2
Introdução a Teoria dos Jogos

Falaremos neste capítulo dos conceitos mais básicos da Teoria dos Jogos e as definições mais importantes que serão utilizadas ao longo de todo trabalho.

2.1
Definições básicas

Um jogo basicamente é constituído por jogadores, um conjunto de estratégias que estão disponíveis para esses jogadores, e para cada combinação de estratégia serão definidos pagamentos. Toda Teoria dos Jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos para escolha de decisões que sejam as melhores possíveis dentro de uma condição conflituosa. Os principais elementos do jogo são:

- **Jogador:** são os principais envolvidos, participam ativamente do jogo. Podem ser dois ou mais envolvidos. Representaremos o conjunto finito de jogadores por:

$$G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$$

- **Lances:** são as decisões tomadas pelos jogadores ou o resultado de eventos aleatórios.
- **Ganhos (*payoffs*)**: é o valor recebido ao final dos lances dados no jogo. Podemos comparar ao valor recebido em dinheiro ao final de um jogo de cartas, por exemplo.
- **Estratégia:** é o conjunto de decisões que o jogador pode tomar ao longo do jogo. A estratégia não está associada a apenas um lance, e sim a todo desenrolar do jogo. Existem jogos que é quase impossível descrever toda a estratégia, pois teremos infinitas possibilidades. Um exemplo claro é o jogo de xadrez.

  A estratégia pode ser definida como:

  - Pura: é a que é independente, ou seja, uma estratégia escolhida não interfere nas demais estratégias.

  - Mista: é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de estratégias puras.

Podemos descrever o conjunto de estratégias de cada jogador g_i como sendo o conjunto:

$$S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}.$$

Um vetor

$$\boldsymbol{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$$

onde s_{ij_i} é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$, é denominado um *perfil de estratégias puras*. O conjunto de todos os perfis de estratégias puras será dado pelo produto cartesiano.

$$S = \prod_{i=1}^{n} S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$$

Para cada jogador $g_i \in G$ definimos a *função utilidade* como sendo a função que associa cada perfil de estratégia pura $\boldsymbol{s}$ a um ganho (*payoff*) $u_i(\boldsymbol{s})$ para o jogador g_i. Escrevemos

$$\begin{array}{llll} u_i: & S & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \boldsymbol{s} & \mapsto & u_i(\boldsymbol{s}) \end{array}$$

- **Jogos de soma constante:** são aqueles em que ao final do jogo a soma dos *payoffs* será constante, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

  $$\sum_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{s}) = c, \forall \boldsymbol{s} \in S.$$

  Um exemplo mais conhecido é o Dilema do Prisioneiro, que citaremos mais adiante.

- **Jogos de soma zero (ou nula):** são aqueles em que as somas dos *payoffs* será igual a zero, ou seja,

  $$\sum_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{s}) = 0, \forall \boldsymbol{s} \in S.$$

- **Jogos de informação completa:** são os jogos em que os jogadores têm o conhecimento de todas as estratégias do jogo**.**

2.2
Jogos de somas constantes com dois jogadores

Vamos descrever cada elemento que utilizaremos em nossos jogos a fim de facilitar a interpretação de todos os dados que iremos estudar.

Sejam g_1 e g_2 os jogadores com estratégias

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1m}\} \text{ e } S_2 = \{s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}\}.$$

Para cada $i \in \{1,2,\dots,m\}$ e $j \in \{1,2,\dots,n\}$, sejam

$$a_{ij} = u_1(s_{1i}, s_{2j}) \text{ e } b_{ij} = u_2(s_{1i}, s_{2j})$$

os ganhos dos jogadores g_1 e g_2, respectivamente. Podemos construir uma matriz de *payoffs* associando cada linha a uma estratégia de g_1 e cada coluna a uma estratégia de g_2. Nas entradas dessa matriz colocaremos os ganhos a_{ij} e b_{ij} associados às estratégias s_{1i} (i-ésima linha) e s_{2j} (j-ésima coluna) de g_1 e g_2. Então,

g_2

		s_{21}	s_{22}	$\cdots$	s_{2n}
	s_{11}	(a_{11},b_{11})	(a_{12},b_{12})	$\cdots$	(a_{1n},b_{1n})
g_1	s_{12}	(a_{21},b_{21})	(a_{22},b_{22})	$\cdots$	(a_{2n},b_{2n})
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	s_{1m}	(a_{m1},b_{m1})	(a_{m2},b_{m2})	$\cdots$	(a_{mn},b_{mn})

Tabela 1: Forma geral da matriz de *payoffs*

satisfazendo

$$a_{ij} + b_{ij} = c, \forall i \in \{1,2,\dots,m\} \; e \; \forall j \in \{1,2,\dots,n\},$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Exemplo:

		s_{21}	s_{22}	s_{23}
	s_{11}	(1,5)	(2,-3)	(8,3)
g_1	s_{12}	(2,8)	(1,-5)	(1,7)
	s_{13}	(3,-5)	(1,7)	(3,5)

Tabela 2: Exemplo matriz de *payoffs*

2.3
Dominância em estratégia pura

Iremos discutir frequentemente perfis de estratégia na qual apenas a estratégia de um único jogador $g_i \in G$ irá variar, enquanto que as estratégias de seus oponentes permanecerão fixas. Denotemos por

$$\boldsymbol{s_{-i}} = \left(s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \dots, s_{nj_n}\right) \in S_{-i},$$

onde

$$S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n.$$

Note que o vetor $\boldsymbol{s}_{-i}$ é uma escolha de estratégias puras para todos os jogadores exceto o jogador g_i. Desta maneira poderemos denotar, por conveniência, o seguinte perfil de estratégia

$$\boldsymbol{s} = \left(s_{ij_i}, \boldsymbol{s}_{-i}\right) = \left(s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{(i-1)}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{(i+1)}}, \dots, s_{nj_n}\right).$$

Vamos dizer que uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é *estritamente dominada* pela estratégia $s_{ik_0} \in S_i$ quando

$$u_i(s_{ik_0}, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \boldsymbol{s}_{-i}), \text{ para todo } \boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}.$$

A d*ominância estritamente iterada* é o processo no qual sequencialmente se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas em uma matriz de *payoffs*. Quando fazemos essas eliminações e reduzimos o jogo a um único perfil de estratégias puras, que chamaremos de $\boldsymbol{s}^*$, dizemos que $\boldsymbol{s}^*$é um *equilíbrio de estratégia estritamente dominante*.

Exemplo: Vamos considerar um jogo dado pela matriz de *payoffs* abaixo.

		g_2				
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}	s_{25}
g_1	s_{11}	*(4,3)*	*(2,6)*	*(1,4)*	*(0,5)*	*(0,1)*
	s_{12}	*(1,1)*	*(4,3)*	*(2,1)*	*(2,2)*	*(2,0)*
	s_{13}	*(6,0)*	*(2,2)*	*(1,1)*	*(6,1)*	*(6,0)*
	s_{14}	*(8,5)*	*(1,3)*	*(0,2)*	*(3,7)*	*(3,1)*

Tabela 3: Exemplo - Estratégia estritamente dominante

Neste jogo para o jogador g_2, as estratégias s_{21}e s_{25} são estritamente dominadas pelas estratégias s_{24} e s_{23} respectivamente. Assim, podemos eliminar a primeira e a última coluna da matriz.

			g_2	
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{11}	(2,6)	(1,4)	(0,5)
	s_{12}	(4,3)	(2,1)	(2,2)
	s_{13}	(2,2)	(1,1)	(6,1)
	s_{14}	(1,3)	(0,2)	(3,7)

Tabela 4: Exemplo - Estratégia estritamente dominante

Na matriz reduzida as estratégias $s_{11} e\ s_{14}$ para o jogador g_1 são estritamente dominadas pelas estratégias $s_{12} e\ s_{13}$ respectivamente, assim podemos eliminar as linhas 1 e 4 da matriz.

			g_2	
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{12}	(4,3)	(2,1)	(2,2)
	s_{13}	(2,2)	(1,1)	(6,1)

Tabela 5: Exemplo - Estratégia estritamente dominante

E podemos observar que a estratégia s_{23} do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22}, logo podemos eliminar a coluna 2 da matriz.

		g_2	
		s_{22}	s_{24}
g_1	s_{12}	(4,3)	(2,2)
	s_{13}	(2,2)	(6,1)

Tabela 6: Exemplo - Estratégia estritamente dominante

E vemos que a estratégia s_{24} do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} logo eliminaremos a coluna 2 da matriz reduzida.

		g_2
		s_{22}
g_1	s_{12}	(4,3)
	s_{13}	(2,2)

Tabela 7: Exemplo - Estratégia estritamente dominante

Finalmente vemos que a estratégia s_{13} do jogador g_1 é estritamente dominada pela estratégia s_{12}. Temos que (s_{12},s_{22}) é o equilíbrio de estratégias estritamente dominantes do jogo: um jogador escolhe a estratégia s_{12} (g_1) para ganhar 4, enquanto o outro jogador escolhe a estratégia $s_{22}(g_2)$ para ganhar 3.

Dizemos que uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ é *fracamente dominada* pela estratégia $s_{ik_0} \in S_i$ quando

$$u_i\left(s_{ik_0}, \boldsymbol{s}_{-i}\right) \geq u_i(s_{ik}, \boldsymbol{s}_{-i}), \text{para todo } \boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}$$

e, pelo menos para algum $\bar{\boldsymbol{s}}_{-i} \in S_{-i}$,

$$u_i\left(s_{ik_0}, \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}\right) > u_i(s_{ik}, \bar{\boldsymbol{s}}_{-i}).$$

Em outras palavras dizemos que $s_{ik} \in S_i$ é fracamente dominada por $s_{ik_0} \in S_i$ se, independentemente das escolhas dos demais jogadores, o jogador g_i nada perde se trocar a estratégia $s_{ik} \in S_i$ pela estratégia $s_{ik_0} \in S_i$ e, pelo menos para uma escolha dos demais jogadores esta troca dá ao jogador g_i um ganho maior.

O processo no qual, sequencialmente, se elimina as estratégias que são fracamente dominadas é o que chamaremos de *dominância fraca iterada* e quando esse processo de dominância reduz o jogo para um único perfil de estratégias puras $\boldsymbol{s}^*$, dizemos que isso é um *equilíbrio de estratégia fracamente dominante* ou simplesmente denominaremos como *equilíbrio de Nash.*

Exemplo: Um exemplo para a estratégia fracamente dominante é o Jogo das empresas de sabão em pó "Lava Bem". Vamos definir os jogadores e as estratégias do jogo abaixo:

Os jogadores envolvidos serão

$$G = \{g_1 = \text{Produto Biodegradável}\,, g_2 = \text{Publicidade}\},$$

que são os responsáveis pelo lançamento do produto biodegradável e a publicidade da empresa respectivamente.

A estratégia de cada jogador será

$$s_{11} = lançar, s_{12} = não\ lançar, s_{21} = aumentar\ e\ s_{22} = não\ aumentar,$$

vinculadas ao lançamento do produto biodegradável (que estão associados a g_1) e ao aumento dos gastos com a publicidade da empresa (que estão associados a g_2).

Assim o conjunto das estratégias ficará

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}\}\ e\ S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$S = S_1 \times S_2 = \{(s_{11}, s_{21}), (s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (s_{12}, s_{22})\}$$

e sua matriz de *payoffs*

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	*(5,5)*	*(7,3)*
	s_{12}	*(2,4)*	*(2,7)*

Tabela 8: Exemplo - Equilíbrio de Nash

Nesse exemplo caso Lava Bem resolva decida aumentar seus gastos em publicidade, lançar o produto biodegradável proporcionará lucros no valor de 5 milhões de reais, enquanto a decisão de não lançar o produto biodegradável produzirá lucros menores, no valor de 2 milhões de reais.

Mas se a empresa decida não aumentar seus gastos em publicidade, lançar o produto biodegradável produzirá lucros maiores (7 milhões) do que não lançar (2 milhões).

Lançar o produto biodegradável é fracamente dominante em relação a não lançar o produto biodegradável para a empresa e não lançar o produto biodegradável é fracamente dominada pela estratégia de lançar o produto biodegradável.

As *funções utilidade* de g_1 e g_2 serão dadas por:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = 5$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 7$$
$$u_1(s_{12}, s_{21}) = 2$$
$$u_1(s_{12}, s_{22}) = 2$$
$$u_2(s_{11}, s_{21}) = 5$$
$$u_2(s_{11}, s_{22}) = 3$$
$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 4$$
$$u_2(s_{12}, s_{22}) = 7$$

ou melhor representando, teremos:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) \geq u_1(s_{12}, s_{21})$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) \geq u_1(s_{12}, s_{22})$$

ou seja,

$$5 \geq 2$$
$$7 \geq 2$$

Iremos considerar como a *função de melhor resposta do jogador* g_i a aplicação

$$\mathrm{MR}_i : S_{-i} \to 2^{S_i}$$

definida por

$$\mathrm{MR}_i(\boldsymbol{s}_{-i}) = \underset{s_i \in S_i}{\operatorname{argmax}}\{u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})\} = \{s_i^* \in S_i | \forall s_i \in S_i, u_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-i}) \geq u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-i})\},$$

com $\boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}$ (aqui 2^{S_i} representa o conjunto das partes de S_i).

A *função de melhor resposta do jogo* é a aplicação

$$\mathrm{MR}: S \to 2^S$$

definida por

$$\mathrm{MR}(\mathbf{s}) = \big(\mathrm{MR}_1(\mathbf{s}_{-1}), \mathrm{MR}_2(\mathbf{s}_{-2}), \ldots, \mathrm{MR}_\mathrm{n}(\mathbf{s}_{-\mathrm{n}})\big),$$

com $\boldsymbol{s} \in S$.

Agora, vamos citar um dos exemplos mais conhecido onde encontramos o equilíbrio de Nash: o Dilema do Prisioneiro. Que consiste em:

Exemplo: O Dilema do Prisioneiro.

Dois suspeitos, A e B, são presos pela polícia. A polícia tem provas insuficientes para condená-los, mas, separando os prisioneiros, oferece a ambos o mesmo acordo: se um dos prisioneiros, confessando, testemunhar contra o outro e esse outro permanecer em silêncio, o que confessou sai livre enquanto o cúmplice silencioso cumpre 10 anos de sentença. Se ambos ficarem em silêncio, a polícia só pode condená-los a 1 ano de cadeia cada um. Se ambos traírem o comparsa, cada um leva 5 anos de cadeia. Cada prisioneiro faz a sua decisão sem saber que decisão o outro vai tomar, e nenhum tem certeza da decisão do outro.

$$G = \{g_1 = \text{Prisioneiro A}\,, g_2 = \text{Prisioneiro B}\}$$

A estratégia de cada jogador será

$$s_{11} = \text{Silêncio}, s_{12} = \text{Confessar}, s_{21} = \text{Silêncio } e \; s_{22} = \text{Confessar},$$

e o conjunto das estratégias ficará

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}\} \; e \; S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$
$$S = S_1 \times S_2 = \{(s_{11}, s_{21}), (s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (s_{12}, s_{22})\}.$$

As *funções utilidade* de g_1 e g_2 serão dadas por:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = -1$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) = -10$$
$$u_1(s_{12}, s_{21}) = 0$$
$$u_1(s_{12}, s_{22}) = -5$$
$$u_2(s_{11}, s_{21}) = -1$$
$$u_2(s_{11}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{12}, s_{21}) = -10$$
$$u_2(s_{12}, s_{22}) = -5$$

Se observarmos a estratégia s_{12} de g_1 caso g_2 adote a estratégia s_{21}, ele ficará preso 10 anos e o g_1 ficará livre. Caso g_2 adote a estratégia s_{22}, ambos ficariam presos por 5 anos.

Visualmente em forma de tabela teremos:

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(-1,-1)	(-10,0)
	s_{12}	(0,-10)	(-5,-5)

Tabela 9: Exemplo - Dilema do Prisioneiro

As estratégias de cada prisioneiro, neste caso, será a mesma. Ou cada um irá ficar em silêncio, ou cada um irá confessar o crime.

Se observarmos, aplicando a definição prévia teremos que:

$$u_1(s_{12}, s_{22}) = -5 > -10 = u_1(s_{11}, s_{22})$$

Observe que os valores que assumimos nas estratégias são valores negativos, pois estamos associando esse valor ao tempo que ele cada prisioneiro ficará detido.

E a função melhor resposta será dada por:

$$\begin{array}{llll} \text{MR}_1: & 2^{S_2} & \rightarrow & 2^{S_1} \\ & s_{22} & \mapsto & \{s_{12}\} \\ & s_{21} & \mapsto & \{s_{12}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{MR}_2: & 2^{S_1} & \rightarrow & 2^{S_2} \\ & s_{12} & \mapsto & \{s_{22}\} \\ & s_{11} & \mapsto & \{s_{22}\} \end{array}$$

No exemplo do Dilema do prisioneiro, diante das estratégias de cada jogador e da matriz de *payoffs* podemos observar claramente que o equilíbrio de Nash se encontra na estratégia confessar de cada jogador. Observando o jogador g_2, a estratégia s_{22} é dominante em relação a estratégia s_{21}, podemos assim eliminar a coluna s_{21} na matriz de *payoffs.*

		g_2
		s_{22}
g_1	s_{11}	(-10,0)
	s_{12}	(-5,-5)

Tabela 10: Exemplo - Dilema do Prisioneiro

Comparando agora as estratégias de g_1, podemos observar que a estratégia s_{12} é dominante em relação a estratégia s_{11}, logo podemos eliminar a primeira linha da matriz, restando assim à estratégia que melhor representaria a solução do problema, para ambos, ou o equilíbrio de Nash.

		g_2
		s_{22}
g_1	s_{12}	(-5, -5)

Tabela 11: Exemplo - Dilema do Prisioneiro

Fica bem claro de se enxergar que em jogos que os jogadores não conhecem as estratégias dos seus adversários, nem sempre o equilíbrio de Nash é a solução que traria um retorno melhor para ambos, entretanto é a solução que possui melhor resposta quando não se conhece a estratégia do adversário. Se fosse conhecido cada passo do outro adversário certamente os prisioneiros iriam optar por ficar em silêncio e assim ficariam presos somente 1 ano cada, mas é uma decisão muito arriscada quando não se conhece a decisão tomada pelo adversário,afinal ficando em silêncio e o outro confessando, quem ficasse em silêncio poderia ficar preso por 10 anos e o outro livre.

2.4
Estratégias Mistas

Existem jogos em que não existe o equilíbrio de Nash em estratégias puras. Uma solução para esse tipo de situação é considerar o jogo escolhendo uma distribuição de probabilidade sobre suas estratégias puras.

Assim podemos fazer com que uma *estratégia mista* $\boldsymbol{p}_i$ para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador, isto é $\boldsymbol{p}_i$ é um elemento do conjunto

$$\Delta_{\mathrm{m_i}} = \left\{(x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} | x_1 \geq 0, \dots, x_{m_i} \geq 0 \ e \ \textstyle\sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1\right\}.$$

assim se $\boldsymbol{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$, então

$$p_{i1} \geq 0, p_{i2} \geq 0, \dots, p_{im_i} \geq 0 \ \ e \ \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$$

Note que cada $\Delta_{\mathrm{m_i}}$ é um conjunto compacto e convexo. Nas figuras 1 e 2 temos os desenhos de Δ_2 e Δ_3, respectivamente. Os pontos extremos (vértices) de $\Delta_{\mathrm{m_i}}$, isto é, os pontos da forma

$$e_1 = (1,0, \dots,0,0), e_2 = (0,1,0, \dots,0,0), \dots, e_{m_i} = (0,0, \dots,0,1)$$

dão respectivamente, probabilidade 1 às estratégias puras $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}$. Desta maneira podemos considerar a distribuição de probabilidade e_k como a estratégia mista que representa a estratégia pura s_{ik} do jogador g_i.

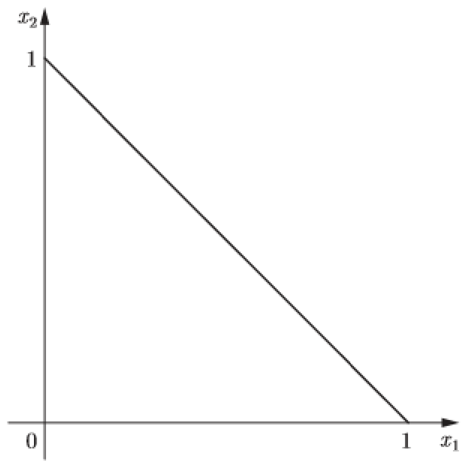

Figura 1: $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathrm{R}^2 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_1 + x_2 = 1\}$

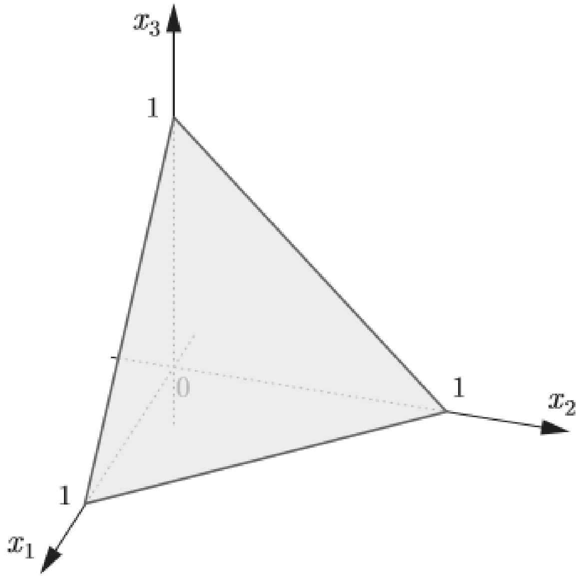

Figura 2: $\Delta_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{R}^3 | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$ e $x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

O espaço de todos os perfis de estratégia é o produto cartesiano

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \ldots \times \Delta_{m_n},$$

denominado *espaço de estratégias mistas*. Como produto cartesiano de conjuntos compactos e convexos é compacto e convexo, vemos que Δ é compacto e convexo.

Um vetor $\mathbf{p} \in \Delta$ é denominado um *perfil de estratégias mistas*. Como no caso de estratégias puras, usaremos a notação $\mathbf{p}_{-i}$ para representar estratégias mistas de todos os jogadores, excluindo a do jogador g_i e Δ_{-i} o espaço das estratégias mistas de todos os jogadores excluindo a do jogador g_i, ou seja,

$$\mathbf{p}_{-i} = (\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_{i-1}, \boldsymbol{p}_{i+1}, \ldots, \boldsymbol{p}_n) \in \Delta_{-i},$$

e

$$\Delta_{-i} = \Delta_{m_1} \times \ldots \times \Delta_{m_{i-1}} \times \Delta_{m_{i+1}} \times \ldots \times \Delta_{m_n}.$$

Desta maneira escrevemos

$$(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{p}_{-i})$$

para representar $\mathbf{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_\mathrm{n})$. Como estratégia pura s_{ik} pode ser identificada como distribuição de probabilidades que dá peso 1 a s_{ik} e peso 0 às demais estratégias do jogador g_i usaremos

$$(s_{ik}, \mathbf{p}_{-i})$$

como uma notação alternativa para o perfil de estratégias mistas $(e_k, \mathbf{p}_{-i})$. Do mesmo modo usaremos

$$(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{s}_{-i})$$

para indicar o *perfil de estratégias mistas* onde o jogador g_i escolhe a distribuição de probabilidade $\boldsymbol{p}_i$ e os demais jogadores escolhem distribuições que dão peso 1 às estratégias puras em $\mathbf{s}_{-i}$.

Cada perfil de estratégias mistas $\mathbf{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_\mathrm{n}) \in \Delta$ determina um *payoff* esperado (utilidade esperada), que é uma média dos *payoffs* ponderada pelas distribuições de probabilidades $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_\mathrm{n}$. Mais precisamente, se

$$\mathbf{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \dots, \boldsymbol{p}_\mathrm{n}) = \big(\underbrace{p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1\mathrm{m}}}_{\boldsymbol{p}_1}, \underbrace{p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2\mathrm{m}}}_{\boldsymbol{p}_2}, \dots, \underbrace{p_{\mathrm{n}1}, p_{\mathrm{n}2}, \dots, p_{\mathrm{nm_n}}}_{\boldsymbol{p}_n}\big)$$

então

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_n=1}^{m_n} p_{1j_1}.p_{2j_2} \dots p_{nj_n}.u_i\big(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}\big).$$

Observe que a *função utilidade* u_i está sendo utilizada tanto para estratégias puras quanto para estratégias mistas.

Exemplo: Comparar Moedas

Esse exemplo consiste em dois jogadores exibirem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar sua moeda para o segundo. Podemos representar esse jogo pela matriz de *payoffs* descrita a seguir.

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(+1,-1)	(-1,+1)
	s_{12}	(-1,+1)	(+1,-1)

Tabela 12: Exemplo - Comparar Moedas

Suponhamos que o jogador g_1 escolhe a seguinte distribuição de probabilidade $\boldsymbol{p}_1 = \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right)$ e g_2 escolhe a seguinte distribuição de probabilidade $\boldsymbol{p}_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}\right)$ (que nada mais será do que cada jogador eleger as probabilidades que eles têm de escolher cada estratégia), então teremos os *payoffs* esperados associados aos perfis de estratégias mistas

$$\mathbf{p} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{7}{8}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{5}{6}\right)$$

são dados por:

$$\begin{aligned} u_1(\boldsymbol{p}) &= \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} p_{1j_1}.p_{2j_2}.u_1(s_{1j_1}, s_{2j_2}) \\ &= p_{11}.p_{21}.u_1.(s_{11}, s_{21}) + p_{11}.p_{22}.u_1.(s_{11}, s_{22}) \\ &+ p_{12}.p_{21}.u_1.(s_{12}, s_{21}) + p_{12}.p_{22}.u_1.(s_{12}, s_{22}) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot (+1) + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot (-1) + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot (+1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

analogamente teremos,

$$\begin{aligned} u_2(\boldsymbol{p}) &= \sum_{j_1=1}^{2} \sum_{j_2=1}^{2} p_{1j_1}.p_{2j_2}.u_2(s_{1j_1}, s_{2j_2}) \\ &= p_{11}.p_{21}.u_2.(s_{11}, s_{21}) + p_{11}.p_{22}.u_2.(s_{11}, s_{22}) \\ &+ p_{12}.p_{21}.u_2.(s_{12}, s_{21}) + p_{12}.p_{22}.u_2.(s_{12}, s_{22}) \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot (-1) + \frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot (+1) + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{6} \cdot (+1) + \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot (-1) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Daí concluiremos que o *payoff* obtido pelo jogador g_1 será maior que o obtido pelo jogador g_2, adotando as distribuições de probabilidades propostas por eles respectivamente.

2.4.1
Dominância em estratégias mistas

Podemos estender todos os critérios básicos de estratégias puras para estratégias mistas. Vejamos agora algumas definições que nos farão compreender melhor.

Dizemos que uma estratégia mista $\boldsymbol{p}_i \in \Delta_{m_i}$ do jogador $g_i \in G$ é *estritamente dominada* pela estratégia $\overline{\boldsymbol{p}}_i \in \Delta_{m_i}$ quando, independentemente das escolhas de distribuições de probabilidade dos demais jogadores, o jogador g_i tem um ganho maior escolhendo $\overline{\boldsymbol{p}}_i$ do que $\boldsymbol{p}_i$, isto é, quando

$$u_i(\overline{\boldsymbol{p}}_i, \mathbf{p}_{-i}) > u_i(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{p}_{-i}), \text{ para todo } \mathbf{p}_{-i} \in \Delta_{-i}.$$

Como os *payoffs* $u_i(\overline{\boldsymbol{p}}_i, \mathbf{p}_{-\mathrm{i}})$ e $u_i(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{p}_{-\mathrm{i}})$ são, respectivamente, combinações convexas dos *payoffs* $u_i(\overline{\boldsymbol{p}}_i, \boldsymbol{s}_{-\mathrm{i}})$ e $u_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{s}_{-\mathrm{i}})$, segue que a condição acima é equivalente a

$$u_i(\overline{\boldsymbol{p}}_i, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{s}_{-i})$$

para todos perfis de estratégias puras $\boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}$.

Exemplo: Tome a matriz de *payoffs* de um determinado jogo

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
	s_{11}	(7,2)	(0,0)
g_1	s_{12}	(0,0)	(7,2)
	s_{13}	(3,1)	(3,1)

Tabela 13: Exemplo - Dominância em estratégias mistas

A estratégia mista $\boldsymbol{p}_1 = (0{,}0{,}1) \in \Delta_3$ do jogador g_1 será estritamente dominada pela estratégia mista $\overline{\boldsymbol{p}}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \in \Delta_3$ pois,

$$u_1(\overline{\boldsymbol{p}}_1, \boldsymbol{p}_2) = u_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, p_{21}, p_{22}\right) = \frac{7}{2} \cdot p_{21} + \frac{7}{2} \cdot p_{22} = \frac{7}{2},$$

$$u_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = u_1(0, 0{,}1; p_{21}, p_{22}) = 3 \cdot p_{21} + 3 \cdot p_{22} = 3 \text{ e}$$

$$u_1(\overline{\boldsymbol{p}}_1, \boldsymbol{p}_2) > u_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2)$$

Vale ressaltar que como estamos trabalhando com probabilidade, a soma de todas as probabilidades sempre será igual a 1, logo $p_{21} + p_{22} = 1$.

A *dominância estrita e iterada* em estratégias mistas poderá ser definida tomando

$$S_i^{(0)} = S_i \; e \; \Delta_{m_i}^{(0)} = \Delta_{m_i}$$

e, recursivamente,

$$S_i^{(k)} = \left\{ s \in S_i^{(k-1)} \middle| \nexists\, \boldsymbol{p}_i \in \Delta_{m_i}^{(k-1)};\ \forall\, \boldsymbol{s}_{-i} \in S_{-i}^{(k-1)}, u_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{s}_{-i}) > u_i(s, \boldsymbol{s}_{-i}) \right\}$$

e

$$\Delta_{m_i}^{(k)} = \left\{ \boldsymbol{p}_i = (p_{i1}, \dots p_{im_i}) \in \Delta_{m_i} \mid \forall\, j = 1, \dots, m_i, s_{ij} \in S_i^{(k)} \Rightarrow p_{ij} > 0 \right\}$$

A interseção

$$S_i^\infty = \bigcap_{k=0}^{\infty} S_i^{(k)}$$

é o conjunto de estratégias puras que sobrevivem a remoção iterada de estratégias estritamente dominadas e

$$\Delta_{m_i}^\infty = \left\{\boldsymbol{p}_i \in \Delta_{m_i} | \nexists\ \overline{\boldsymbol{p}}_i \in \Delta_{m_i}\ ;\ \forall\ s_{-i} \in S_{-i}^\infty, u_i\left(\overline{\boldsymbol{p}}_i, \boldsymbol{s}_{-i}\right) > u_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{s}_{-i})\right\}$$

é o conjunto de todas estratégias mistas do jogador g_i que sobreviveram à técnica de *dominância estrita iterada.*

Se no processo de dominância estrita iterada o conjunto

$$S^\infty = S_1^\infty \times \ldots \times S_n^\infty$$

é unitário, isto é, se

$$S^\infty = \{\boldsymbol{s}^*\},$$

então dizemos que $\boldsymbol{s}^*$ é um *equilíbrio de estratégia estritamente dominante.*

Em estratégias mistas vamos dizer que o perfil

$$\mathbf{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*, \ldots, \boldsymbol{p}_n^*) \in \Delta$$

é um equilíbrio de Nash quando

$$u_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}_i^*, \mathbf{p}_{-\boldsymbol{i}}^*) \geq u_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{p}, \mathbf{p}_{-i}^*) \text{ para todo } \boldsymbol{p} \in \Delta_{m_i},$$

isto é, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem.

Exemplo: Analisando o exemplo do Dilema do Prisioneiro através de estratégias mistas, iremos obter o mesmo equilíbrio de Nash encontrado anteriormente. De fato, temos que

$$\mathbf{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*) = (1,0,1,0)$$

e calculando obtemos

$$u_1(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}_2^*) = u_1(p, 1-p, 1,0) = 5p - 10 \leq -5 = u_1(1,0,1,0) = u_1(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*)$$

para todo $\boldsymbol{p} = (p, 1-p) \in \Delta_2$ e

$$u_2(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{q}) = u_2(1,0, q, 1-q) = 5q - 10 \leq -5 = u_2(1,0,1,0) = u_2(\boldsymbol{p}_1^*, \boldsymbol{p}_2^*)$$

para todo $\boldsymbol{q} = (q, 1-q) \in \Delta_2$.

Observamos então que o equilíbrio das estratégias mistas será

$$\mathbf{p}^* = \boldsymbol{s}^* = (confessar, confessar).$$

A função de melhor resposta do jogador g_i é a aplicação

$$\mathrm{MR}_i: \Delta(S_{-i}) \to 2^{\Delta(S_i)}$$

$$\mathrm{MR}_i(\mathbf{p}_{-i}) = \underset{s_i \in S_i}{\operatorname{argmax}}\{u_i(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{p}_{-\mathrm{i}})\} = \{s_i^* \in S_i | \forall s_i \in S_i, u_i(s_i^*, \boldsymbol{s}_{-\boldsymbol{i}}) \geq u_i(s_i, \boldsymbol{s}_{-\boldsymbol{i}})\},$$

definida por

$$\mathrm{MR}_i(\mathbf{p}_{-i}) = \underset{s_i \in S_i}{\operatorname{argmax}}\{u_i(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{p}_{-\mathrm{i}})\}\text{, isto é,}$$

$$\mathrm{MR}_i(\mathbf{p}_{-i}) = \{\boldsymbol{p}_i^* \in \Delta(S_i) |\ \forall \boldsymbol{p}_i \in \Delta(S_i), u_i(\boldsymbol{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}) \geq u_i(\boldsymbol{p}_i, \mathbf{p}_{-i})\}$$

com $\mathbf{p}_{-i} \in \Delta(S_i)$ a função de melhor resposta do jogo é a aplicação

$$\mathrm{MR}: \Delta \to 2^{\Delta}$$

definida por

$$\mathrm{MR}(\mathbf{p}) = \left(\mathrm{MR}_1(\mathbf{p}_{-1}), \mathrm{MR}_2(\mathbf{p}_{-2}), \dots, \mathrm{MR}_n(\mathbf{p}_{-n})\right)$$

com $\mathbf{p} \in \Delta$.

A proposição a seguir é uma consequência direta do equilíbrio de Nash e da função melhor resposta acima já descritos.

Proposição: $\mathbf{p}^* = (\boldsymbol{p}_1^*, \dots, \boldsymbol{p}_i^*, \dots, \boldsymbol{p}_n^*) \in \Delta$ é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas se, e somente se, $\boldsymbol{p}_i^* \in \mathrm{MR}_i(\boldsymbol{p}_{-i}^*)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, isto é, $\mathbf{p}^* \in \mathrm{MR}(\mathbf{p}^*)$.

Exemplo: Considere o jogo "Batalha dos Sexos", onde um homem e a sua mulher desejam sair para passear. O homem prefere assistir a um jogo de futebol enquanto que sua mulher prefere ir ao cinema. Se eles forem juntos para o futebol, então o homem tem satisfação maior do que a mulher. Por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, então a mulher tem satisfação maior do que o homem. Finalmente, se eles saírem sozinhos, então ambos ficarão igualmente insatisfeitos. Modelando isso como jogo estratégico, teremos:

$$G = \{g_1 = homem, g_2 = mulher\}$$

$$S_1 = \{s_{11} = futebol, s_{12} = cinema\}\ e\ S_2 = \{s_{21} = futebol, s_{22} = cinema\}$$

$$S = \{(s_{11}, s_{21}), (s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (s_{12}, s_{22})\}$$

E as funções utilidades de cada um deles será $u_1: S \to \mathbb{R}$ e $u_2 : S \to \mathbb{R}$ descritas na matriz de *payoffs* a seguir

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(10,5)	(0,0)
	s_{12}	(0,0)	(5,10)

Tabela 14: Exemplo-Batalha dos sexos

Suponha agora que a mulher escolha a estratégia mista $\boldsymbol{p}_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, vamos analisar qual seria a melhor resposta que o homem teria para dar à mulher.

Observamos que

$$\begin{aligned} u_1(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) &= u_1(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22}) \\ &= p_{11}.p_{21}.u_{homem}(s_{11}, s_{21}) + p_{11}.p_{22}.u_{homem}(s_{11}, s_{22}) \\ &+ p_{12}.p_{21}.u_{homem}(s_{12}, s_{21}) + p_{12}.p_{22}.u_{homem}(s_{12}, s_{22}) \\ &= 10.p_{11}.p_{21} + 5.p_{12}.p_{22} \end{aligned}$$

Portanto, temos que $u_{homem}\left(p_{11}, p_{12}; \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 5.p_{11} + \frac{5}{2} \cdot p_{12}$

Logo teremos que

$$\mathrm{MR_{homem}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \underset{(\mathrm{p}_{11}, \mathrm{p}_{12}) \in \Delta_2}{\operatorname{argmax}} \left(5.p_{11} + \frac{5}{2} \cdot p_{12}\right)$$

apresentará a melhor resposta do homem à estratégia da mulher, resolvendo o seguinte problema de otimização:

Maximizar sujeito a

$$5.p_{11} + \frac{5}{2} \cdot p_{12}$$

$$p_{11} + p_{12} = 1,$$

$$p_{11} \geq 0,$$

$$p_{12} \geq 0,$$

no qual teremos a solução $(p_{11}^*, p_{12}^*) = (1,0)$ sendo assim temos

$$\mathrm{MR}_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \{(1,0)\}.$$

Podemos escrever as estratégias mistas de maneira mais simples, quando possuímos apenas dois jogadores

$$\Delta_2 = \{(p, 1-p) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq p \leq 1\}$$

ou seja, podemos identificar cada elemento de Δ_2 com um numero real que pertence ao intervalo [0,1]. Assim poderemos reescrever as funções de melhor resposta, fazendo com que elas dependam somente de um número real. Por exemplo, se o homem optar pela estratégia mista $(p, 1-p) \in \Delta_2$, qual será a melhor resposta da mulher a essa estratégia? Escrevendo as estratégias mistas da mulher na forma $(q, 1-q) \in \Delta_2$ teremos,

$$\begin{aligned} u_{mulher}(p, 1-p; q, 1-q) &= 15pq + 10 - 10q - 10p \\ &= 5(3p-2)q + 10(1-p) \end{aligned}$$

por consequência temos

$$\mathrm{MR}_{\mathrm{mulher}}(p, 1-p) = \underset{(\mathrm{q},1-\mathrm{q})\in\Delta_2}{\operatorname{argmax}} \big(5(3p-2)q + 10(1-p)\big)$$

$$\mathrm{MR}_{\mathrm{mulher}}(p, 1-p) = \underset{\mathrm{q}\,\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}(5(3p-2)q + 10(1-p)).$$

Dada a escolha do homem $p \in [0,1]$ a mulher deseja encontrar valores $q \in [0,1]$ que venham a maximizar os valores da sua utilidade

$$u_2 = 5(3p-2)q + 10(1-p).$$

Se $p \in \left[0, \frac{2}{3}\right)$ então $3p - 2 < 0$, assim para maximizar sua utilidade a mulher deverá escolher $q = 0$. Se $p = \frac{2}{3}$, então $3p - 2 = 0$, daí a utilidade da mulher será $u_{mulher} = 10(1-p)$ e não dependerá do valor de q, podendo a mulher escolher qualquer valor de q dentro do intervalo que vai de 0 a 1. Se $p \in \left(\frac{2}{3}, 1\right]$ então $3p - 2 > 0$, logo a mulher deverá escolher $q = 1$ para maximizar a sua utilidade. Assim mostramos que,

$$\mathrm{MR}_2(p, 1-p) = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } p \in \left[0, \dfrac{2}{3}\right) \\ [0,1], & \text{se } p = \dfrac{2}{3} \\ \{1\}, & \text{se } p \in \left(\dfrac{2}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Podemos representar essa situação melhor com a figura 3 a seguir

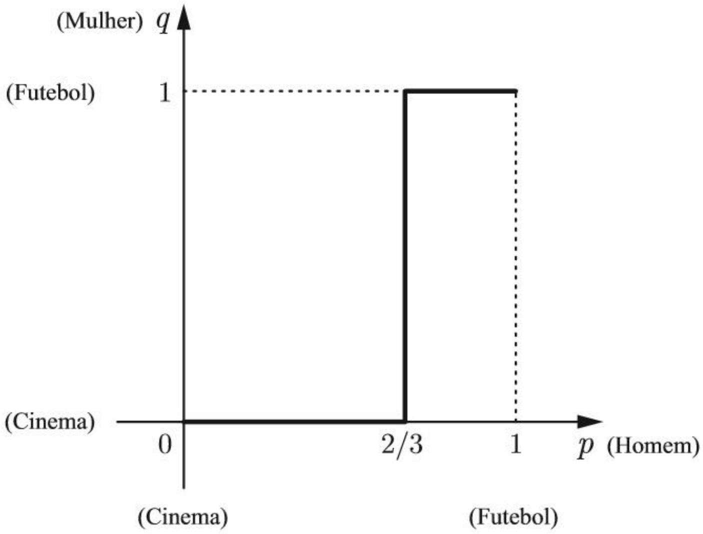

Figura 3: Representação gráfica da função de melhor resposta da mulher no jogo da batalha dos sexos

Da mesma maneira, se a mulher escolher a estratégia mista $(q, 1-q) \in \Delta_2$, então

$$u_1(p, 1-p, q, 1-q) = 15pq + 5 - 5q - 5p = 5(3q-1)p + 5(1-q)$$

de maneira que

$$\begin{aligned} \mathrm{MR_{homem}(q)} &= \underset{(\mathrm{p},1-\mathrm{p})\in\Delta_2}{\operatorname{argmax}} \left(5(3q-1)p + 5(1-q)\right) \\ &= \underset{\mathrm{p}\,\in[0,1]}{\operatorname{argmax}}\left(5(3q-1)p + 5(1-q)\right), \end{aligned}$$

Dada a escolha da mulher $q \in [0,1]$ o homem deseja encontrar valores $p \in [0,1]$ que venham a maximizar os valores da sua utilidade

$$u_{homem} = 5(3q-1)p + 5(1-q).$$

Se $q \in \left[0, \frac{1}{3}\right)$ então $3q - 1 < 0$, assim para maximizar sua utilidade o homem deverá escolher $p = 0$. Se $q = \frac{1}{3}$, então $3p - 1 = 0$, daí a utilidade do homem será $u_{homem} = 5(1-q)$ e não dependerá do valor de p, podendo o homem escolher qualquer valor de p dentro do intervalo que vai de 0 a 1. Se $q \in \left(\frac{1}{3}, 1\right]$ então $3p - 1 > 0$, logo o homem deverá escolher $p = 1$ para maximizar a sua utilidade. Assim mostramos que,

$$\mathrm{MR_{homem}(q)} = \begin{cases} \{0\}, & \text{se } q \in \left[0, \dfrac{1}{3}\right) \\ [0,1], & \text{se } \ q = \dfrac{1}{3} \\ \{1\}, & \text{se } \ q \in \left(\dfrac{1}{3}, 1\right] \end{cases}$$

Podemos representar essa situação melhor com a figura 4 a seguir

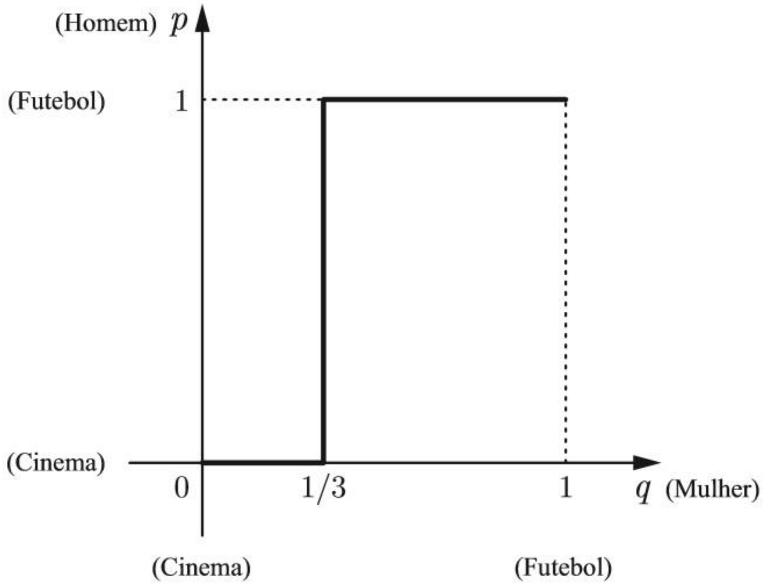

Figura 4: Representação gráfica da função de melhor resposta do homem no jogo da batalha dos sexos

Pela Proposição anterior segue que um perfil de estratégias mistas

$$(p^*, 1 - p^*, q^*, 1 - q^*)$$

é um equilíbrio de Nash se, e somente se, $q^* \in \mathrm{MR}_{\mathrm{mulher}}(p^*)$ e $p^* \in \mathrm{MR}_{\mathrm{homem}}(q^*)$. Assim os valores de p^* e q^* que geram o equilíbrio de Nash, são os pontos de interseção entre as representações gráficas de melhor resposta do homem e da mulher. Representando ambas em um mesmo eixo de coordenadas, teremos o gráfico representado na figura 5.

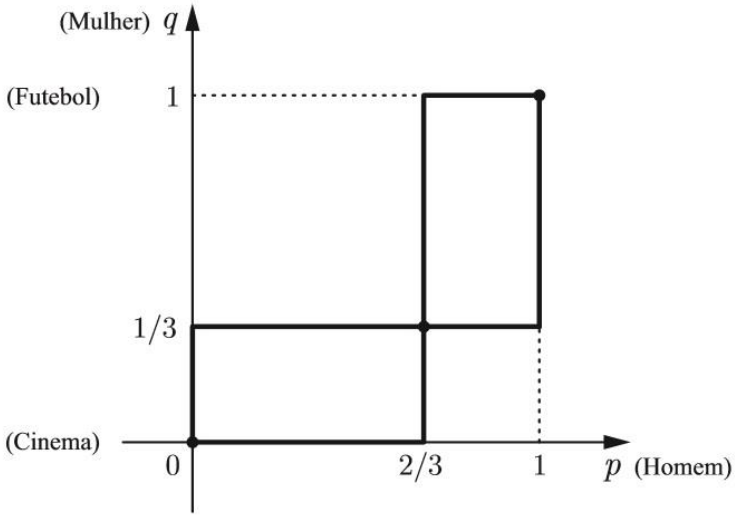

Figura 5: Cálculo dos equilíbrios de Nash utilizando as duas representações gráficas

Assim poderemos observar que o jogo possui somente 3 equilíbrios de Nash em estratégias mistas:

$$(0,1,0,1), \quad \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right) \text{ e } (1,0,1,0),$$

onde

$$(p^*, q^*) \in \left\{(0,0), \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right), (1,1)\right\}$$

são os únicos pontos de interseção das duas representações gráficas.

2.5
Teorema do Minimax

Em um jogo com duas pessoas e de soma zero existe uma estratégia mista ótima para cada jogador e que a utilizando obteriam os mesmos resultados esperados e que esses seriam os melhores ganhos que cada jogador poderia esperar se seu adversário jogasse racionalmente.

É natural que cada jogador escolha a estratégia que irá maximizar seus ganhos mínimos ou, de maneira equivalente, que minimize os ganhos máximos do jogador adversário. O par de estratégias em que cada jogador maximiza seus *payoffs* será a solução do jogo.

Exemplo: Vamos considerar um jogo onde os jogadores g_1 e g_2 possuem as estratégias descritas na matriz de *payoffs* abaixo:

		g_2		
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
	s_{11}	*(3,-3)*	*(5,-5)*	*(-3,3)*
g_1	s_{12}	*(2,-2)*	*(-3,3)*	*(-4,4)*
	s_{13}	*(1,-1)*	*(2,-2)*	*(0,0)*

Tabela 15: Exemplo-Teorema Minimax

Pelo teorema do Minimax, o jogador g_2 selecionará os valores máximos de g_1 de cada coluna e dentre esses valores optará pelo menor deles, que será chamado de *Minimax*.. Já o jogador g_1 selecionará os valores mínimos dele mesmo e dentre esses valores, optará pelo maior deles, que será chamado de *Maxmin.* Como podemos ver claramente na matriz de *payoffs* a seguir:

		g_2			
		s_{22}	s_{23}	s_{24}	Mínimo das linhas
	s_{11}	*(3,-3)*	*(5,-5)*	*(-3,3)*	*-5*
g_1	s_{12}	*(2,-2)*	*(-3,3)*	*(-4,4)*	*-3*
	s_{13}	*(1,-1)*	*(2,-2)*	*(0,0)*	*0*
	Maximo das colunas	*3*	*5*	*0*	

Tabela 16: Exemplo-Teorema Minimax

Podemos observar claramente que o *minimax* do jogador g_2 terá *payoff* igual a 0 e *maxmin* do jogador g_1 terá *payoff* igual a 0, como destacado na matriz acima. Quando o *minimax* é igual ao *maxmin* possuímos o que chamamos de *ponto de sela*. Pode ocorrer do jogo não apresentar o *ponto de sela* o que faz com que a resolução do jogo por este tipo de análise seja um tanto quanto complicada.

Em outro jogo vamos analisar a situação em que a soma seja não nula. Vamos considerar um jogo onde as estratégias dos jogadores g_1 e g_2 são descritas segundo a matriz de *payoffs* a seguir:

		g_2	
		s_{22}	s_{23}
g_1	s_{11}	*(5,2)*	*(2,2)*
	s_{12}	*(4,5)*	*(3,3)*

Tabela 17: Exemplo-Teorema Minimax

Tomando os valores máximos de cada coluna e os valores mínimos de cada linha teremos:

		g_2		
		s_{22}	s_{23}	Mínimos das linhas
g_1	s_{11}	*(5,2)*	*(2,2)*	*2*
	s_{12}	*(4,5)*	*(3,3)*	*3*
	Máximos das colunas	*5*	*3*	

Tabela 18: Exemplo-Teorema Minimax

Teremos que o *minimax* do jogador g_2 terá *payoff* igual a 3 e o *maxmin* do jogador g_1 terá o *payoff* igual a 3 também, sendo esse o *ponto de sela*, entretanto é bem claro que somando os *payoffs* não teremos um valor nulo, logo esse jogo não é de soma zero. Outro ponto interessante para se observar é que o resultado (4,5) é melhor que o resultado encontrado, fazendo com que tenhamos nossas restrições para utilizar esse método para esse tipo de situação, somente que se tenha a certeza de que o adversário irá lhe provocar um dano máximo.

3
Recuperação Judicial de Empresas

O processo judicial de recuperação de empresas é feito com base na Lei 11.101/2005 que foi sancionada em 9 de fevereiro de 2005.

Toda empresa que está em situação complicada financeiramente pode optar por entrar em um processo de recuperação extrajudicial, recuperação judicial ou falência baseados na lei supracitada para efetuar todos os procedimentos cabíveis.

Algumas perguntas se evidenciam, principalmente no âmbito jurídico, do por que uma empresa deve entrar em um processo de recuperação judicial e não declarar falência de imediato? De fato existe um interesse social em uma recuperação judicial. O contexto é bem simples de ser analisado e observado em um olhar lógico matemático.

Uma empresa no Brasil, hoje, para decretar sua falência deve passar pelos mesmos procedimentos da recuperação judicial (observamos, inclusive, que a lei que trata desses casos é a mesma) e o primeiro passo é observar se ela se encontra em situação difícil ou em uma situação de insolvência (segundo dicionário, insolvência seria: *estado do devedor que não é comerciante e se encontra sem recursos, financeiros ou patrimoniais, para saldar as obrigações contraídas; inadimplência)* e verificar se a sua recuperação judicial é possível ou é inviável, para, após, optar pela falência da empresa ou pela sua recuperação, seja judicial ou extrajudicial.

Para tanto, deve ser observados os seguintes passos:

1- Avaliação da situação econômica da empresa

- Situação de insolvência: quando a empresa se encontra sem recursos, sem a possibilidade de saldar as obrigações que possui.
- Situação econômica difícil: quando a empresa possui dificuldades financeiras e econômicas já observadas com o não cumprimento de suas obrigações.

Esse primeiro passo deve ser muito bem observado e avaliado, afinal uma empresa que está na situação de insolvência deve optar pelo processo de falência já que não conseguirá cumprir todo processo da recuperação judicial.

2- Quem poderá pedir a falência?

Segundo a lei em seu artigo 97 podem requerer a falência:

I – o próprio devedor, na forma do disposto nos arts. 105 a 107 desta Lei;

II – o cônjuge sobrevivente, qualquer herdeiro do devedor ou o inventariante;

III – o cotista ou o acionista do devedor na forma da lei ou do ato constitutivo da sociedade;

IV – qualquer credor.

3 – Entrar com o pedido judicial:

O “*último passo*” é a entrada com a petição inicial apresentando toda documentação para o pedido de falência.

Mas por que falar da falência antes de falar do tema principal do trabalho que é a recuperação judicial? O ponto chave do pedido da recuperação judicial, como já foi comentado anteriormente, se chama *Interesse Social*.

Segundo Keppen Neto em seu artigo:

> *“A função social da empresa é de fato, neste estudo pelo via deste artigo, um dos objetivos visto na recuperação judicial. Sabemos que a função social da empresa tem um significado muito grande na sociedade brasileira contemporânea, assim fixando a ideia de que a empresa não satisfaz só na questão do interesse individual, ou seja, do lucro. Com isso, a lei nº 11.101 de 2005, o legislador teve, ao aplicar esta lei, o objetivo do interesse social, que é a manutenção da empresa ou princípio da preservação da empresa. Na falência esta do legislador com a preservação da empresa, é previstas nos artigos 95, que autoriza o devedor a pleitear sua recuperação judicial como meio de defesa, de forma incidental, dentro do prazo legal para contestação de pedido de falência apresentado por determinado credor, e no artigo 140, que indicam a preferência legal pela venda do conjunto de estabelecimentos do falido, pelos estabelecimentos singularmente considerados ou, pelo menos, de blocos de bens aptos à utilização produtiva, ambos os artigos da lei falimentar. O princípio da função social é fundamentado juridicamente na Constituição Federativa do Brasil, em seu Artigo 5º, inciso XXIII que enfatiza que “a propriedade atenderá a sua função social” e ainda em seu Artigo 182, § 2º que prevê que “a propriedade urbana cumpre*

> *sua função social quando atende às exigências fundamentais de ordenação da cidade expressas no plano diretor". Portanto, notando que a em nossa maior normativa jurídica e em lei de falência, nos mostra que há um objetivo que, mesmo com a empresa se direcionando a sua falência, são fixados métodos, instrumentos para que a quebra da empresa não sobreponha ao princípio da preservação da empresa e o interesse coletivo, pois a de saber que, com sua quebra, todos sairiam perdendo."*

O conceito de função social da empresa é bastante abstrato. Com isso a doutrina procurou delimitar o conteúdo de tal expressão com base nos valores gerais estabelecidos dentro dos conceitos jurídicos no Brasil. Daí a Constituição Federal, em seu artigo 170, contribuiu prevendo medidas objetivas na construção de deveres característicos à função social.

> *Art. 170. A ordem econômica, fundada na valorização do trabalho humano e na livre iniciativa, tem por fim assegurar a todos existência digna, conforme os ditames da justiça social, observados os seguintes princípios:*
> *I - soberania nacional;*
> *II - propriedade privada;*
> *III - função social da propriedade;*
> *IV - livre concorrência;*
> *V - defesa do consumidor;*
> *VI - defesa do meio ambiente, inclusive mediante tratamento diferenciado conforme o impacto ambiental dos produtos e serviços e de seus processos de elaboração e prestação*
> *VII - redução das desigualdades regionais e sociais;*
> *VIII - busca do pleno emprego;*
> *IX - tratamento favorecido para as empresas de pequeno porte constituídas sob as leis brasileiras e que tenham sua sede e administração no País.*
> *Parágrafo único. É assegurado a todos o livre exercício de qualquer atividade econômica, independentemente de autorização de órgãos públicos, salvo nos casos previstos em lei.*

É de suma importância lembrar que a função social de uma empresa não abrange somente suas atividades econômicas empresariais ou atividades que são exclusivas a empresa, mas compreende também a uma série de deveres, podendo ser eles positivos e negativos impostos ao empresário com a finalidade de atender aos interesses gerais da sociedade.

Uma empresa que entre com o pedido de falência, e tenha esse pedido acatado pela justiça, acaba criando uma espécie de *"instabilidade social"* tendo em vista que, nesse processo, todos os envolvidos saem perdendo.

3.1
O processo de recuperação judicial

Observado o interesse social na recuperação judicial, deve-se analisar de que forma ocorrem os trâmites legais para se iniciar o procedimento? O primeiro passo é requerer o pedido de recuperação judicial e, segundo a lei, quem deve requerer é:

> *“o devedor que, no momento do pedido, exerça regularmente suas atividades há mais de 2 (dois) anos e que atenda aos seguintes requisitos, cumulativamente:*
> *I – não ser falido e, se o foi, estejam declaradas extintas, por sentença transitada em julgado, as responsabilidades daí decorrentes;*
> *II – não ter, há menos de 5 (cinco) anos, obtido concessão de recuperação judicial;*
> *III - não ter, há menos de 5 (cinco) anos, obtido concessão de recuperação judicial com base no plano especial de que trata a Seção V deste Capítulo*
> *IV – não ter sido condenado ou não ter, como administrador ou sócio controlador, pessoa condenada por qualquer dos crimes previstos nesta Lei.*
> *§ 1º A recuperação judicial também poderá ser requerida pelo cônjuge sobrevivente, herdeiros do devedor, inventariante ou sócio remanescente.*
> *§ 2º Tratando-se de exercício de atividade rural por pessoa jurídica, admite-se a comprovação do prazo estabelecido no caput deste artigo por meio da Declaração de Informações Econômico-fiscais da Pessoa Jurídica - DIPJ que tenha sido entregue tempestivamente.”*

É feita uma petição inicial onde deve se conter os seguintes dados expostos na lei:

> *“I – a exposição das causas concretas da situação patrimonial do devedor e das razões da crise econômico-financeira;*
> *II – as demonstrações contábeis relativas aos 3 (três) últimos exercícios sociais e as levantadas especialmente para instruir o pedido, confeccionadas com estrita observância da legislação societária aplicável e compostas obrigatoriamente de:*
> *a) balanço patrimonial;*
> *b) demonstração de resultados acumulados;*
> *c) demonstração do resultado desde o último exercício social;*
> *d) relatório gerencial de fluxo de caixa e de sua projeção;*
> *III – a relação nominal completa dos credores, inclusive aqueles por obrigação de fazer ou de dar, com a indicação do endereço de cada um, a natureza, a classificação e o valor atualizado do crédito, discriminando sua origem, o regime dos*

respectivos vencimentos e a indicação dos registros contábeis de cada transação pendente;
IV – a relação integral dos empregados, em que constem as respectivas funções, salários, indenizações e outras parcelas a que têm direito, com o correspondente mês de competência, e a discriminação dos valores pendentes de pagamento;
V – certidão de regularidade do devedor no Registro Público de Empresas, o ato constitutivo atualizado e as atas de nomeação dos atuais administradores;
VI – a relação dos bens particulares dos sócios controladores e dos administradores do devedor;
VII – os extratos atualizados das contas bancárias do devedor e de suas eventuais aplicações financeiras de qualquer modalidade, inclusive em fundos de investimento ou em bolsas de valores, emitidos pelas respectivas instituições financeiras;
VIII – certidões dos cartórios de protestos situados na comarca do domicílio ou sede do devedor e naquelas onde possui filial;
IX – a relação, subscrita pelo devedor, de todas as ações judiciais em que este figure como parte, inclusive as de natureza trabalhista, com a estimativa dos respectivos valores demandados.
§ 1º Os documentos de escrituração contábil e demais relatórios auxiliares, na forma e no suporte previstos em lei, permanecerão à disposição do juízo, do administrador judicial e, mediante autorização judicial, de qualquer interessado.
*§ 2º Com relação à exigência prevista no inciso II do **caput** deste artigo, as microempresas e empresas de pequeno porte poderão apresentar livros e escrituração contábil simplificados nos termos da legislação específica.*
§ 3º O juiz poderá determinar o depósito em cartório dos documentos a que se referem os §§ 1º e 2º deste artigo ou de cópia destes.”

Sendo toda documentação apresentada corretamente o juiz deferirá o processo e no mesmo ato irá, segundo a lei em seu artigo 51:

“I – nomeará o administrador judicial, observado o disposto no art. 21 desta Lei;
II – determinará a dispensa da apresentação de certidões negativas para que o devedor exerça suas atividades, exceto para contratação com o Poder Público ou para recebimento de benefícios ou incentivos fiscais ou creditícios, observando o disposto no art. 69 desta Lei;
III – ordenará a suspensão de todas as ações ou execuções contra o devedor, na forma do art. 6º desta Lei, permanecendo os respectivos autos no juízo onde se processam, ressalvadas as ações previstas nos §§ 1º, 2º e 7º do art. 6º desta Lei e as relativas a créditos excetuados na forma dos §§ 3º e 4º do art. 49 desta Lei;
IV – determinará ao devedor a apresentação de contas demonstrativas mensais enquanto perdurar a recuperação judicial, sob pena de destituição de seus administradores;

> *V – ordenará a intimação do Ministério Público e a comunicação por carta às Fazendas Públicas Federal e de todos os Estados e Municípios em que o devedor tiver estabelecimento.*
>
> *§ 1º O juiz ordenará a expedição de edital, para publicação no órgão oficial, que conterá:*
>
> *I – o resumo do pedido do devedor e da decisão que defere o processamento da recuperação judicial;*
>
> *II – a relação nominal de credores, em que se discrimine o valor atualizado e a classificação de cada crédito;*
>
> *III – a advertência acerca dos prazos para habilitação dos créditos, na forma do art. 7º, § 1º, desta Lei, e para que os credores apresentem objeção ao plano de recuperação judicial apresentado pelo devedor nos termos do art. 55 desta Lei.*
>
> *§ 2º Deferido o processamento da recuperação judicial, os credores poderão, a qualquer tempo, requerer a convocação de assembléia-geral para a constituição do Comitê de Credores ou substituição de seus membros, observado o disposto no § 2º do art. 36 desta Lei.*
>
> *§ 3º No caso do inciso III do* ***caput*** *deste artigo, caberá ao devedor comunicar a suspensão aos juízos competentes.*
>
> *§ 4º O devedor não poderá desistir do pedido de recuperação judicial após o deferimento de seu processamento, salvo se obtiver aprovação da desistência na assembléia-geral de credores."*

Após isso, o devedor deverá apresentar o Plano de Recuperação Judicial no prazo de 60 dias, improrrogável, após o deferimento do processo, sob pena de convolação de falência, que nada mais é que a mudança de todo processo de recuperação judicial para o processo de abertura de falência.

O Plano de Recuperação Judicial deverá conter, segundo a lei:

> *"I – discriminação pormenorizada dos meios de recuperação a ser empregados, conforme o art. 50 desta Lei, e seu resumo;*
>
> *II – demonstração de sua viabilidade econômica; e*
>
> *III – laudo econômico-financeiro e de avaliação dos bens e ativos do devedor, subscrito por profissional legalmente habilitado ou empresa especializada*."

O juiz irá ordenar a publicação do edital que contenha o aviso aos credores sobre o recebimento do Plano de Recuperação Judicial, para que os mesmos possam se manifestar, dentro do prazo, sobre eventuais discordâncias respeitando o o prazo máximo de 30 dias para se manifestarem.

Sendo cumpridas todas as exigências da lei, a recuperação judicial será considerada concluída quando a empresa quitar todo plano de recuperação judicial. Se por algum motivo o plano não for cumprido ou honrado, a falência da mesa será decretada e todos os seus bens serão reunidos para honrar os compromissos com os credores.

Logo, dentro de todo processo, uma das etapas mais importantes e determinantes é o cumprimento do plano de recuperação.

Dentro do plano de recuperação é que está, de fato, todo conceito que nos interessa no que diz respeito à teoria dos jogos. É disso que passaremos a tratar daqui por diante.

4
Teoria dos Jogos na Recuperação Judicial

Dentro do plano de recuperação judicial, teremos como jogadores os credores da empresa no processo de recuperação judicial, que dependendo do tamanho da empresa, pode ser uma lista gigantesca, claro alguns com importâncias a receber maiores que outros. Podemos inclusive citar como exemplo a empresa Oi S/A que entrou em processo de recuperação judicial em 2016 e possui uma lista de aproximadamente 55.092 credores o que nos dá uma quantidade de jogadores elevada. E por outro lado, o empresário, dono da empresa, que é responsável por manter a empresa em funcionamento em meio a todo o processo de recuperação.

O plano de recuperação poderá ou não ser aprovado pelos seus credores, e isso dependerá das estratégias que os jogadores possuem para dar continuidade ou não ao andamento de todo o processo. Se um dos jogadores envolvidos, e isso ocorre principalmente por parte do credor, sentir-se prejudicado de certa maneira, ele pode não concordar com o plano de recuperação e isso fará com que seja convocada uma assembléia com a finalidade de se deliberar sobre o plano apresentado.

Sempre que ocorrer uma rejeição por parte dos credores ocorrerá uma nova assembléia, ou melhor, uma nova rodada de negociações.

O objetivo principal para o empresário é buscar melhores condições de pagamentos para sua dívida, no que diz respeito a prazos e descontos para quitar os seus débitos. Já para o credor, o principal objetivo é buscar sempre as melhores condições para recebimento dos seus créditos.

Vale ressaltar que se o plano de recuperação for rejeitado pelos credores, a empresa entra em processo de falência, o que faz com que cada credor receba conforme a sua habilitação no quadro de credores, isso se houver recursos que sejam suficientes para efetuar todos os pagamentos necessários, e ao final, a empresa encerrará todas as suas atividades de forma permanente.

Nesta situação, fica claro que se os jogadores optarem por um jogo não cooperativo, o prejuízo financeiro e social para os credores e região onde se encontra e empresa, serão bem maiores do que se eles optarem por um jogo cooperativo de soma maior que zero, tendo em vista que essa será a condição onde o empresário obterá maiores prazos e condições para continuar com sua atividade empresarial e buscando recuperar a situação econômica da sua empresa e quitar seus débitos com os credores da melhor maneira possível para ambas as partes.

Para ocorrer a recuperação judicial deverá ocorrer um consenso firmado entre os credores e a empresa que se encontra em recuperação, de maneira que aqueles venham a receber os valores que lhe são devidos. Isso só ocorre se os credores estiverem dispostos a negociarem com o empresário os prazos, os valores e as formas de pagamentos diferenciadas para que todas as partes envolvidas sejam beneficiadas.

De fato, a sociedade como um todo acaba participando e sofrendo as conseqüências desse “jogo”, tendo em vista que os reflexos decorrentes da possível falência de uma determinada empresa irá gerar um impacto na economia local onde ela se encontra.

Por isso que podemos considerar esse jogo como sendo um jogo cooperativo, primeiro no que se diz respeito a determinação legal e também pela utilização da parte racional dos jogadores nas tomadas de decisões. Afinal, o resultado de toda negociação resultará não somente no recebimento de créditos por parte do credor, mas também pela manutenção e garantia de novos créditos no futuro tendo em vista que a empresa, se recuperando, manterá suas atividades.

O objetivo da empresa é manter-se ativa pagando todas as suas dívidas existentes com um menor valor possível para assim liquidar todo seu passivo (dívidas existentes) e ter a possibilidade de se manter no mercado e ainda aumentar seu faturamento e preferencialmente visando lucros maiores.

Os credores terão como principal objetivo majorar o valor a receber com a finalidade de quitar o débito. Este valor deve estar entre o valor mínimo que cubram as despesas do credor e o valor devido acrescido das correções necessárias, evitando assim o prejuízo que poderia ocorrer com o não pagamento da dívida.

Com todos esses apontamentos poderíamos encarar a recuperação judicial como um jogo cooperativo, onde cada parte envolvida abre mão de um pouco do que deveriam ganhar em benefício dos outros, assim todos sairiam ganhando, inclusive a sociedade que aparentemente não participa diretamente de todo processo, mas é principal envolvida nas consequências de um possível fechamento da empresa.

Ao longo desse capítulo vamos analisar os dados do plano de recuperação judicial da empresa de telefonia Oi S/A, o qual foi aprovado e encontra-se atualmente em andamento.

4.1
Recuperação Judicial do grupo Oi S/A

Em 2016 a empresa entrou com pedido de para recuperação na justiça. Na época, a dívida da empresa superava os 64,5 bilhões de reais divididos em aproximadamente 55.092 credores.

Podemos ver que o “jogo” para a recuperação judicial nesse caso apresenta inúmeros jogadores e se encaixa perfeitamente em jogos com várias estratégias.

Vamos escolher, para uma análise mais detalhada, somente um jogador “adversário” correspondente a cada grupo de credor da empresa Oi. De fato devemos ficar atentos que esse jogo sempre irá buscar a melhor solução, ou melhor, a soma zero ou mais próxima de zero possível, o que faz com que nem sempre as estratégias apresentadas pela recuperanda sejam aceitas em reunião prévia, podendo ser apresentadas novas estratégias para os credores.

Na lista de credores publicada pelo grupo Oi, temos 4075 credores trabalhistas, o que significa dizer que são dividas trabalhistas, 1 credor com garantia real que é o BNDES, 1927 microempresas credoras e 49090 credores quirográficos (que não possuem preferência em recebimento).

Segundo a estratégia apresentado pela recuperanda, ou melhor, a estratégia definida por ela a forma de pagamento das dívidas está dividido por tipo de dívida, que são elas: trabalhistas, crédito com garantia real, créditos classe III e créditos Micro Empresa e Empresa de Pequeno Porte. Vamos chamar esses grupos respectivamente por A, B, C e D e descrever de maneira sucinta essas estratégias de pagamento de cada tipo de dívida.

1. Grupo A

São aquelas que são geradas a partir de contratos de trabalho.

Judicialmente essas dívidas possuem “preferência” de pagamento. Logo a recuperanda coloca essas dívidas trabalhistas como prioridade de pagamento da seguinte maneira: após homologação do plano de recuperação em 5 parcelas iguais e sucessivas durante 180 dias sendo a primeira parcela no 20º dia útil após homologação e as demais parcelas serão pagas nos meses subseqüentes na mesma data.

2. Grupo B

São créditos onde o devedor, ou alguém em seu nome, coloca o seu patrimônio como garantia para assegurar o cumprimento da obrigação acordada.

Na forma de pagamento oferecida para este grupo, a recuperanda se propõe em pagar a quantia devida em 10 parcelas semestrais e sucessivas cada uma correspondente a 10% do valor da dívida, sendo a primeira parcela paga somente 126 meses após a homologação do plano de recuperação. Existem critérios para pagamento de juros e correção monetária propostos pela Oi, mas vamos desconsiderar esses valores em nossos estudos a fim de fazer uma interpretação mais coesa de todos os dados

3. Grupo C

São os créditos destinados aos credores quirografários.

A forma de pagamento oferecida pela recuperanda a essa classe é a que possui mais detalhes, tendo em vista também essa ser a maior categoria de pagamento (abrange 49090 credores). Sendo assim vale ressaltar os pontos mais importantes para não nos perdemos em detalhes que podem não ser úteis.

Basicamente a recuperanda oferece aos seus credores, independente da quantia que lhes são devidas, um pagamento imediato de R$ 1.000,00. Caso o credor não aceite ele pode optar em receber o valor integral que tem direito só que em um prazo de 14 anos parcelado semestralmente com primeira parcela do valor principal paga a partir do 7º ano após a homologação do plano, para todos os valores que completarem o montante total de R$ 9.336.470.321,65, se por acaso esse valor já estiver sido ultrapassado o valor pode ser realocado em moeda estrangeira para todos os valores até que se atinja um limite máximo de USD

1.872.540.394,72 (dólares americanos) e também será pago de maneira idêntica à descrita anteriormente. Se também o credor não se enquadrar nessa forma de pagamento, ela cairá na forma geral de pagamento que visa a quitação desta dívida num prazo de 19 anos, com carência de 10 anos e mais 9 parcelas, uma por ano.

4. Grupo D

A forma de pagamento oferecida pela recuperanda a esse grupo é um pouco parecido com a do grupo C, apresentando somente alguns detalhes que a diferenciam. Sendo assim a forma de pagamento oferecida visa pagar em parcela única os valores até R$ 1.000,00 podendo os credores optarem por essa forma de pagamento mesmo possuindo valores superiores, desde que se abstenham de receber a diferença. Caso contrário serão pagos segundo forma geral de pagamento que visa a quitação desta dívida num prazo de 19 anos, com carência de 10 anos e mais 9 parcelas, uma por ano.

Se por acaso algum credor desse grupo for um parceiro, que é visto pela recuperanda como os fornecedores, para que eles mantenham a boa relação com a empresa é oferecido o pagamento em parcela única de até R$ 150.000,00 e o saldo restante será pago em duas parcelas anuais iguais e sucessivas. Caso o fornecedor parceiro opte por não continuar prestando os serviços para a recuperanda ele poderá optar por receber da mesma forma que já foi apresentada no grupo C.

4.2
Análise estratégica dos casos

Após descrevermos todos os critérios e regras oferecidas pela empresa Oi, o que nós podemos chamar de estratégia, podemos observar o quão detalhista e minucioso é esse plano de recuperação elaborado. A recuperanda busca amarrar da melhor maneira possível todas as condições para evitar que algum dos credores possa vir a recusar alguma cláusula o que tornaria todo o processo de recuperação da empresa demorado, tendo em vista que toda estratégia deverá ser reformulada. Lembrando que essa recuperação judicial envolve mais de 55 mil credores, que estamos chamando de jogadores.

Vamos analisar matematicamente cada estratégia elaborada para um credor de cada grupo.

4.2.1
Grupo A

Na relação de credores, o primeiro credor deste grupo possui uma dívida com a empresa de R$ 327,64. Segundo a estratégia oferecida pela empresa recuperanda, e pelos créditos trabalhistas também serem prioridade, esse valor seria pago em 180 dias, sendo a primeira parcela em 20 dias após a homologação do acordo e as demais mensalmente totalizando ao final o montante completo da dívida.

Fazendo um esquema teríamos a seguinte situação.

Vamos considerar o prazo de pagamento de 180 dias como o período para quitação desta dívida. Assim o jogo terá:

$$G = \{g_1, g_2\}$$

onde, $g_1 = Oi$ e $g_2 = credor$, com estratégias

$$S_1 = \{pagar\}\ e\ S_2 = \{aceitar, não\ aceitar\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \{(pagar, aceitar), (\ pagar, não\ aceitar)\}$$

Então teremos cada função utilidade

$$u_1(pagar, aceitar) = 327{,}64$$

$$u_1(pagar, não\ aceitar) = \ 0$$

$$u_2(pagar, aceitar) = -327{,}64$$

$$u_2(pagar, não\ aceitar) = \ 0$$

Representando através da matriz de *payoffs* teremos:

		g_2	
		Aceitar	Não aceitar
g_1	Pagar	(- 327,64 , 327,64)	(0,0)

Tabela 19: Matriz de *payoffs*

Também podemos observar melhor a situação que está representada na matriz de *payoffs* através da *árvore de possibilidades*.

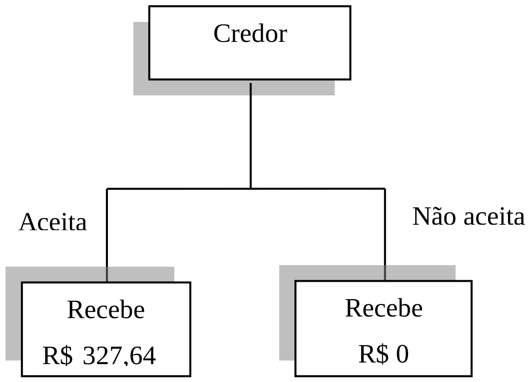

Figura 6: Árvore de possibilidades

Observe que pela matriz de *payoffs* e pela *árvore de possibilidades* temos um jogo de soma de zero, pois o valor que é pago pela empresa Oi, é o mesmo que será recebido pelo credor. A estratégia para essa modalidade (que é a dívida trabalhista) é única, então independente do valor, todos os credores que aceitarem o plano de recuperação judicial irão receber o valor discriminado e no prazo estipulado pela recuperanda.

4.2.2
Grupo B

Existe somente um credor nessa modalidade, que é o BNDES, e montante devido é de R$ 3.326.951.525,30, em 5 de Setembro de 2016. Normalmente dívidas com instituições financeiras são mais fáceis de negociar podendo se chegar a um prazo mais longo. A proposta da recuperanda é de quitação dessa dívida e o pagamento do valor principal em 10 parcelas semestrais, a primeira sendo paga 20º dia útil do 126º mês após a homologação do plano de recuperação judicial, ou seja, a primeira parcela só será paga daqui a 10 anos e 6 meses e as demais a cada 6 meses, o que daria um prazo de 15 anos para quitação da dívida. Os juros serão pagos a partir de 7 anos da homologação do plano de recuperação, logo os juros acumulados nos 7 primeiros anos seriam incorporados ao valor principal, e os juros a partir daí seriam pagos juntos com o valor principal semestralmente.

Em uma breve análise dos fatos, vemos que é mais uma situação de soma zero, afinal a recuperanda se propõe a quitar toda sua dívida com o credor de maneira integral com juros, somente em um prazo mais estendido não perdendo assim o que foi colocado como garantia do negócio.

4.2.3
Grupo C

Esses são os créditos que possuem maior quantidade de variáveis para se analisar e ver qual seria de soma zero. A estratégia da recuperanda define que todos os credores que possuírem um valor menor ou igual a R$ 1.000,00 irão receber em parcela única no 20º dia após a homologação do plano, aos que possuem um valor superior a esse podem optar por receber o valor de R$ 1.000,00, desde que recebam esse valor como quitação de suas dívidas. Caso contrário o credor poderá optar por receber o valor de sua dívida optando por outras duas formas de pagamento que podem ser mais demoradas e desvantajosas dependendo da situação da empresa. Logo, se tomarmos como exemplo uma empresa que possui um crédito a receber no valor de R$ 1.430,71, por exemplo, ela deve pensar se vale a pena receber esse crédito de maneira mais longa por uma diferença de R$ 470,71.

Vamos fazer a principio uma análise para o recebimento da primeira parcela, e depois vamos fazer para o montante total.

Relembrando que a recuperanda oferece aos seus credores, independente da quantia que lhes são devidas, um pagamento imediato de R$ 1.000,00. Caso o credor não aceite ele pode optar em receber o valor integral que tem direito só que em um prazo de 14 anos parcelado semestralmente com primeira parcela do valor principal paga a partir do 7º ano após a homologação do plano, para todos os valores que completarem o montante total de R$ 9.336.470.321,65, se por acaso esse valor já estiver sido ultrapassado o valor pode ser realocado em moeda estrangeira para todos os valores até que se atinja um limite máximo de USD 1.872.540.394,72 (dólares americanos) e também será pago de maneira idêntica à descrita anteriormente. Se também o credor não se enquadrar nessa forma de pagamento, ela cairá na forma geral de pagamento que visa a quitação desta dívida num prazo de 19 anos, com carência de 10 anos e mais 9 parcelas, uma por ano.

Assim, as estratégias de pagamento oferecidas pela recuperanda são: aceitando a estratégia s_{11}, o credor receberá parcela única de R\$ 1.000,00, se optar pela estratégia s_{12} receberá primeira parcela de R\$ 613,02 e optando pela estratégia s_{13} receberá R\$ 163,41.

$$s_{21} = \text{aceitar}$$
$$s_{22} = \text{não aceitar}$$
$$s_{11} = \text{pagar R\$ 1.000,00}$$
$$s_{12} = \text{pagar R\$ 105,05}$$
$$s_{13} = \text{pagar R\$ 163,41}$$

Estamos descrevendo na matriz de *payoffs* os valores referentes à primeira parcela de recebimento para cada estratégia apresentada pela Oi. Logo,

$$G = \{g_1, g_2\}$$

onde, $g_1 = Oi$ e $g_2 = credor$, com estratégias,

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}\} \text{ e } S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \left\{\begin{matrix}(s_{11}, s_{21}), (s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (s_{12}, s_{22}), \\ (s_{13}, s_{21}), (s_{13}, s_{22})\end{matrix}\right\}.$$

Então teremos cada função utilidade

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = -1.000$$
$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 0$$
$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -105{,}05$$
$$u_1(s_{12}, s_{22}) = 0$$
$$u_1(s_{13}, s_{21}) = -163{,}41$$
$$u_1(s_{13}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{11}, s_{21}) = 1.000$$
$$u_2(s_{11}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 105{,}05$$
$$u_2(s_{12}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{13}, s_{21}) = 163{,}41$$
$$u_2(s_{13}, s_{22}) = 0.$$

Daí a sua matriz de *payoffs* para pagamento da primeira parcela ficará como descrito a seguir:

			g_2	
			s_{21}	s_{22}
		s_{11}	(- 1.000, 1.000)	(0,0)
	g_1	s_{12}	(- 105,05 , 105,05)	(0,0)
		s_{13}	(- 163,41 , 163,41)	(0,0)

Tabela 20: Matriz de *payoffs*

Tomando os mesmos jogadores e mudando somente as estratégias de g_1 para

$$s_{11} = \text{pagar R\$ } 1.000{,}00$$

$$s_{12} = \text{pagar R\$ } 1.470{,}71$$

$$s_{13} = \text{pagar R\$ } 1.470{,}71,$$

das já descritas, ou seja, adotando agora o pagamento total do que é devido, teremos a descrição de cada função utilidade a seguir:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = -1.000$$

$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 0$$

$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -1.470{,}71$$

$$u_1(s_{12}, s_{22}) = 0$$

$$u_1(s_{13}, s_{21}) = -1.470{,}71$$

$$u_1(s_{13}, s_{22}) = 0$$

$$u_2(s_{11}, s_{21}) = 1.000$$

$$u_2(s_{11}, s_{22}) = 0$$

$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 1.470{,}71$$

$$u_2(s_{12}, s_{22}) = 0$$

$$u_2(s_{13}, s_{21}) = 1.470{,}71$$

$$u_2(s_{13}, s_{22}) = 0.$$

O que nos daria a seguinte matriz de *payoffs*,

			g_2	
			s_{21}	s_{22}
		s_{11}	(- 1.000, 1.000)	(0,0)
	g_1	s_{12}	(- 1.470,71 , 1.470,71)	(0,0)
		s_{13}	(- 1.470,71 , 1.470,71)	(0,0)

Tabela 21: Matriz de *payoffs*

Podemos avaliar um pouco melhor a situação através do fluxograma, lembrando que o que está proposto acima são as estratégias para primeira parcela e para o pagamento total da dívida respectivamente, já o fluxograma dá somente a visão geral do pagamento total da dívida.

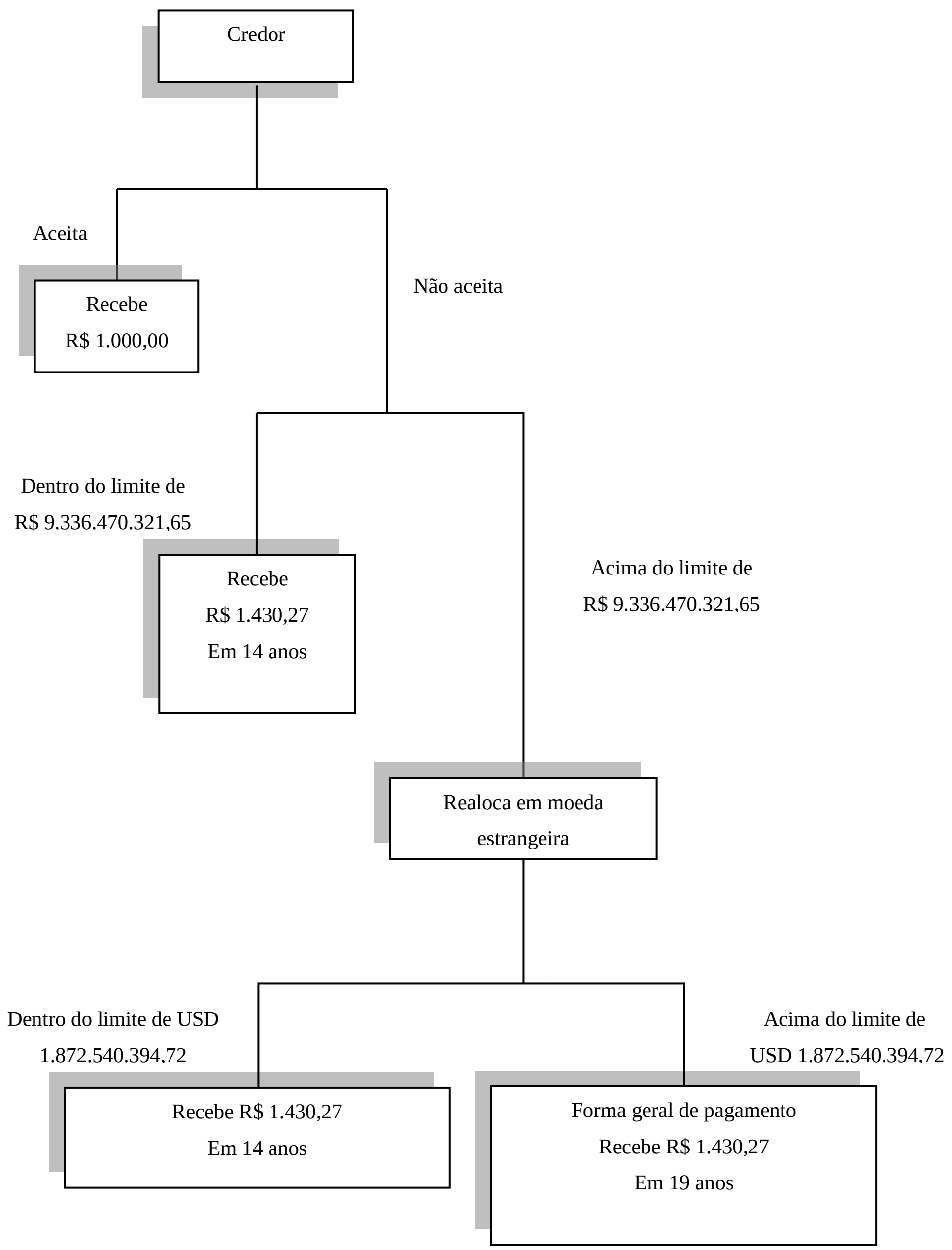

Figura 7: Árvore de possibilidades

Observando a matrizes de *payoffs* e o fluxograma, temos um caso um pouco mais complexo a ser analisado. De fato, se o credor não aceitar a proposta de receber o valor de R$ 1.000,00 ele até poderá optar por outra forma de recebimento, porém em um período muito mais demorado e de forma parcelada. Na primeira matriz de *payoffs* mostramos o esquema de como seria paga a primeira parcela, mas vale ressaltar que os prazos para pagamento das demais parcelas, no caso dele não aceitar o pagamento único e imediato dos R$ 1.000,00, será a cada 6 meses e isso fará com que ele receba todo valor que lhe é devido em um prazo que pode chegar até a 19 anos. O credor em questão deve avaliar se a estratégia oferecida pela recuperanda é boa ou ruim para ele.

Não podemos nos esquecer que a Oi baseia toda sua estratégia em cima das “regras do jogo” que é a LFR (Lei de Falência e Recuperação Judicial), daí todas as estratégias apresentadas são baseadas na prerrogativa de que o plano de recuperação judicial somente não será aceito totalmente se for recusado por maioria simples de pelo menos uma das categorias, assim, como os créditos do grupo C são os que possuem maior quantidade de credores, a estratégia deve se basear no que é melhor para grande maioria desta classe para que não exista uma recusa que supere metade dos credores mais um.

Quando o valor que o credor possui pra receber for próximo aos R$ 1.000,00 oferecidos pela recuperanda, é mais válido receber essa quantia de maneira imediata do que esperar um tempo, que pode ser muito superior, para recebimento, mesmo que esses valores sejam corrigidos e sofram acréscimos de juros. Assim, na situação de receber a primeira parcela [tabela 20], podemos observar claramente o equilíbrio de Nash será a escolha das estratégias s_{13} e s_{21}, pois as estratégias s_{22} será estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias s_{11} e s_{12} serão fracamente dominadas pela estratégia s_{13}.

Avaliando a matriz de *payoffs* onde trabalhamos com os valores totais de pagamento [tabela 21], o equilíbrio de Nash será a escolha das estratégias s_{11} e s_{21}, pois as estratégias s_{22} será estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias s_{12} e s_{13} serão fracamente dominadas pela estratégia s_{11}.

De fato teremos equilíbrios de Nash diferentes para cada matriz de *payoff* analisada, tendo em vista que em cada uma delas estaremos avaliando situações diferentes, ou seja, uma analisando apenas a primeira parcela de pagamento e a outra avaliando o pagamento do montante total. Logo analisando de maneira geral, para todo quadro de credores da Oi, dependendo do valor a receber vale considerar uma ou outra matriz.

Em um breve levantamento dos valores devidos aos credores desta classe, podemos observar que os valores são muito próximos da proposta de quitação da dívida, os R$ 1.000,00 o que faz com que grande maioria dos credores opte em receber tal quantia fazendo com que exista grande aceitação por parte desta classe de credores.

4.2.4
Grupo D

Os credores que forem parceiros, ou seja, que continuarem a prestar serviços para a recuperanda, possuem privilégios quanto ao recebimento, e isso é destacado no plano de recuperação judicial. Esse privilégio visa à continuidade dos serviços prestados por essas empresas junto a recuperanda. De fato, uma empresa que possui um valor de R$ 576.473,92 para receber, por se tratar de uma empresa parceira, receberá uma primeira parcela de R$ 150.000,00 e o restante devido em mais duas parcelas iguais e anuais, caso opte por continuar a prestar os serviços para a recuperanda. Se o credor optar por não manter mais esse vínculo de parceria ele poderá optar por receber o que lhe é devido da mesma forma que se apresenta no Grupo C.

Relembrando forma de pagamento oferecida pela recuperanda a esse grupo é parecido com a do grupo C, apresentando somente alguns detalhes que a diferenciam. Sendo assim a forma de pagamento oferecida visa pagar em parcela única os valores até R$ 1.000,00 podendo os credores optarem por essa forma de pagamento mesmo possuindo valores superiores, desde que se abstenham de receber a diferença. Caso contrário serão pagos segundo forma geral de pagamento que visa a quitação desta dívida num prazo de 19 anos, com carência de 10 anos e mais 9 parcelas, uma por ano.

Se por acaso algum credor desse grupo for um parceiro, que é visto pela recuperanda como os fornecedores, para que eles mantenham a boa relação com a empresa é oferecido o pagamento em parcela única de até R$ 150.000,00 e o saldo restante será pago em duas parcelas anuais iguais e sucessivas. Caso o fornecedor parceiro opte por não continuar prestando os serviços para a recuperanda ele poderá optar por receber da mesma forma que já foi apresentada no grupo C.

Equiparando o tempo de recebimento nas quatro possibilidades oferecidas pela recuperanda, isto é, aceitando a estratégia s_{11} o credor receber em sua primeira parcela R$ 150.000,00, se optar peça estratégia s_{12} receberá um montante de R$ 1.000,00, optando pela estratégia s_{13} receberá R$ 41.176,70 e optando pela estratégia s_{14} ele receberá um montante de R$ 64.052,66.

$$s_{21} = \text{aceitar}$$

$$s_{22} = \text{não aceitar}$$

$$s_{11} = \text{pagar R\$ 150.000,00}$$

$$s_{12} = \text{pagar R\$ 1.000,00}$$

$$s_{13} = \text{pagar R\$ 41.176,70}$$

$$s_{14} = \text{pagar R\$ 64.052,66}$$

Estamos descrevendo na matriz de *payoffs* os valores referentes à primeira parcela de recebimento para cada estratégia apresentada por g_1.

$$G = \{g_1, g_2\}$$

onde, $g_1 = Oi$ e $g_2 = credor$

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, s_{14}\}\ e\ S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \begin{Bmatrix} (s_{11}, s_{21}), (\ s_{11}, s_{22}), (s_{12}, s_{21}), (\ s_{12}, s_{22}), \\ (s_{13}, s_{21}), (\ s_{13}, s_{22}), (s_{14}, s_{21}), (\ s_{14}, s_{22}) \end{Bmatrix}$$

Assim teremos cada função utilidade

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = -150.000,00$$

$$u_1(s_{11}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -1.000,00$$

$$u_1(s_{12}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_1(s_{13}, s_{21}) = -41.176,70$$

$$u_1(s_{13}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_1(s_{14}, s_{21}) = -64.052,66$$

$$u_1(s_{14}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_2(s_{11}, s_{21}) = 150.000,00$$

$$u_2(s_{11}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 1.000,00$$

$$u_2(s_{12}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_2(s_{13}, s_{21}) = 41.176{,}70$$

$$u_2(s_{13}, s_{22}) = 0$$

$$u_2(s_{14}, s_{21}) = 64.052{,}66$$

$$u_2(s_{14}, s_{22}) = 0.$$

Daí a sua matriz de *payoffs* para pagamento da primeira parcela ficará como descrito a seguir:

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(- 150.000,00 , 150.000,00)	(0,0)
	s_{12}	(- 1.000 , 1.000,00)	(0,0)
	s_{13}	(- 41.176,70 , 41.176,70)	(0,0)
	s_{14}	(- 64.052,66 , 64.052,66)	(0,0)

Tabela 22: Matriz de *payoffs*

Tomando os mesmos jogadores e mudando somente as estratégias de g_1 para

$$s_{11} = \text{pagar R\$ } 576.473{,}92$$

$$s_{12} = \text{pagar R\$ } 1.000{,}00$$

$$s_{13} = \text{pagar R\$ } 576.473{,}92$$

$$s_{14} = \text{pagar R\$ } 576.473{,}92$$

das já descritas, ou seja, adotando agora o pagamento total do que é devido, teremos a descrição de cada função utilidade a seguir:

$$u_1(s_{11}, s_{21}) = -576.473{,}92$$

$$u_1(s_{11}, s_{22}) = 0$$

$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -1.000{,}00$$

$$u_1(s_{12}, s_{22}) = 0$$

$$u_1(s_{13}, s_{21}) = -576.473{,}92$$

$$u_1(s_{13}, s_{22}) = 0$$

$$u_1(s_{14}, s_{21}) = -576.473{,}92$$

$$u_1(s_{14}, s_{22}) = 0$$

$$u_2(s_{11}, s_{21}) = 576.473{,}92$$

$$u_2(s_{11}, s_{22}) = 0$$

$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 1.000{,}00$$

$$u_2(s_{12}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{13}, s_{21}) = 576.473{,}92$$
$$u_2(s_{13}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{14}, s_{21}) = 576.473{,}92$$
$$u_2(s_{14}, s_{22}) = 0.$$

Observe que os valores das funções utilidades $u_1(s_{11}, s_{21})$, $u_1(s_{13}, s_{21})$ *e* $u_1(s_{14}, s_{21})$ são iguais, entretanto representam formas diferentes de pagamento em relação ao prazo, o mesmo acontece com as funções utilidades $u_2(s_{11}, s_{21})$, $u_2(s_{13}, s_{21})$ e $u_2(s_{14}, s_{21})$.

O que nos daria a seguinte matriz de *payoffs*

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(- 576.473,92 , 576.473,92)	(0,0)
	s_{12}	(- 1.000 , 1.000,00)	(0,0)
	s_{13}	(- 576.473,92 , 576.473,92)	(0,0)
	s_{14}	(- 576.473,92 , 576.473,92)	(0,0)

Tabela 23: Matriz de *payoffs*

Sem sombra de dúvidas ao avaliarmos a matriz de *payoffs* referente ao pagamento da primeira parcela [tabela 22] somente, podemos observar claramente que o equilíbrio de Nash será a escolha das estratégias s_{12} e s_{21}, pois a estratégia s_{22} será estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias s_{11}, s_{13} e s_{14} serão fracamente dominadas pela estratégia s_{12}.

Avaliando a matriz de *payoffs* onde trabalhamos com os valores totais de pagamento [tabela 23], o equilíbrio de Nash será a escolha das estratégias s_{12} e s_{21}, pois a estratégia s_{22} será estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias s_{11}, s_{13} e s_{14} serão fracamente dominadas pela estratégia s_{12}.

Comparando as duas situações, ou seja, pagamento da primeira parcela e pagamento total, é evidente que o equilíbrio de Nash é igual em ambas, o que nesse caso nos traz a possibilidade de estar trabalhando com qualquer uma das matrizes de *payoffs*.

Se analisarmos a situação de um credor pertencente ao grupo D que não seja um parceiro da recuperanda, a situação pode mudar um pouco de figura, tendo em vista que a estratégia s_{11} descrita anteriormente, não estará disponível para esse credor, sendo assim, aproveitando toda estratégia já descrita anteriormente, e tomando um credor que possua uma dívida, por exemplo, de R$ 113.013,91 e que não seja um parceiro da recuperanda e equiparando o tempo de recebimento nas três possibilidades oferecidas pela recuperanda, isto é, aceitando a estratégia s_{12} receberá um montante de R$ 1.000,00, optando pela estratégia s_{13} receberá R$ 8.072,42 e optando pela estratégia s_{14} ele receberá um montante de R$ 12.557,10.

$$s_{21} = \text{aceitar}$$

$$s_{22} = \text{não aceitar}$$

$$s_{12} = \text{pagar R\$ 1.000,00}$$

$$s_{13} = \text{pagar R\$ 8.072,42}$$

$$s_{14} = \text{pagar R\$ 12.157,10.}$$

Descrevendo na matriz de *payoffs* os valores referentes à primeira parcela de recebimento para cada estratégia apresentada por g_1.

$$G = \{g_1, g_2\}$$

onde, $g_1 = Oi$ e $g_2 = credor$

$$S_1 = \{s_{12}, s_{13}, s_{14}\}\ e\ S_2 = \{s_{21}, s_{22}\}$$

$$S = S_1 \times S_2 = \begin{Bmatrix} (s_{12}, s_{21}), (\ s_{12}, s_{22}), (s_{13}, s_{21}\ ), (\ s_{13} s_{22},), \\ (s_{14}, s_{21}\ ), (\ s_{14}, s_{22}) \end{Bmatrix}$$

Assim teremos cada função utilidade

$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -1.000{,}00$$

$$u_1(s_{12}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_1(s_{13}, s_{21}) = -8.072{,}42$$

$$u_1(s_{13}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_1(s_{14}, s_{21}) = -12.157{,}10$$

$$u_1(s_{14}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 1.000{,}00$$

$$u_2(s_{12}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_2(s_{13}, s_{21}) = 8.072{,}42$$

$$u_2(s_{13}, s_{22}) = \ 0$$

$$u_2(s_{14}, s_{21}) = 12.157{,}10$$

$$u_2(s_{14}, s_{22}) = \ 0.$$

O que nos daria a seguinte matriz de *payoffs*

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
	s_{12}	(- 1.000 , 1.000,00)	(0,0)
g_1	s_{13}	(- 8.072,42 , 8.072,42)	(0,0)
	s_{14}	(- 12.157,10 , 12.157,10)	(0,0)

Tabela 24: Matriz de *payoffs*

Tomando os mesmos jogadores e mudando somente as estratégias de g_1 para

$$s_{12} = \text{pagar R\$ 1.000,00}$$
$$s_{13} = \text{pagar R\$ 113.013,91}$$
$$s_{14} = \text{pagar R\$ 113.013,91}$$

das já descritas, ou seja, adotando agora o pagamento total do que é devido, teremos a descrição de cada função utilidade a seguir:

$$u_1(s_{12}, s_{21}) = -1.000{,}00$$
$$u_1(s_{12}, s_{22}) = 0$$
$$u_1(s_{13}, s_{21}) = -113.013{,}91$$
$$u_1(s_{13}, s_{22}) = 0$$
$$u_1(s_{14}, s_{21}) = -113.013{,}91$$
$$u_1(s_{14}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{12}, s_{21}) = 1.000{,}00$$
$$u_2(s_{12}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{13}, s_{21}) = 113.013{,}91$$
$$u_2(s_{13}, s_{22}) = 0$$
$$u_2(s_{14}, s_{21}) = 113.013{,}91$$
$$u_2(s_{14}, s_{22}) = 0.$$

Observe que os valores das funções utilidades, $u_1(s_{13}, s_{21})\ e\ u_1(s_{14}, s_{21})$ são iguais, entretanto representam formas diferentes de pagamento em relação ao prazo, o mesmo acontece com as funções utilidades, $u_2(s_{13}, s_{21})$ e $u_2(s_{14}, s_{21})$.

O que nos daria a seguinte matriz de *payoffs*

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
	s_{12}	(- 1.000 , 1.000,00)	(0,0)
g_1	s_{13}	(- 113.013,91 , 113.013,91)	(0,0)
	s_{14}	(-113.013,91 , 113.013,91)	(0,0)

Tabela 25: Matriz de *payoffs*

Ao avaliarmos a matriz de *payoffs*, referente ao pagamento da primeira parcela [tabela 24] somente, podemos observar claramente o equilíbrio de Nash será a escolha das estratégias s_{12} e s_{21}, pois as estratégias s_{22} será estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias s_{13} e s_{14} serão fracamente dominadas pela estratégia s_{12}.

Em relação à matriz de *payoffs* onde trabalhamos com os valores totais de pagamento [tabela 25], o equilíbrio de Nash fica claro, na escolha das estratégias s_{12} e s_{21} também, pois a estratégia s_{22} será estritamente dominada pela estratégia s_{21} e as estratégias s_{13} e s_{14} serão fracamente dominadas pela estratégia s_{12}.

Avaliando as duas situações, ou seja, pagamento da primeira parcela e pagamento total, é evidente que o equilíbrio de Nash é igual em ambas, o que nesse caso nos traz a possibilidade de estar trabalhando com qualquer uma das matrizes de *payoffs*.

De fato, existe um beneficiamento na estratégia da recuperanda para os seus parceiros, afinal existe um interesse contínuo tendo em vista que esses parceiros continuarão a fornecer os serviços para a recuperanda. Os credores que não se enquadram na situação de parceiro irão receber também, porém de uma forma menos privilegiada que um fornecedor parceiro.

5
Conclusão

Diante de todo estudo feito, podemos concluir que a análise econômica do Direito, concretizada através da Teoria dos Jogos é algo de suma importância para a solução de problemas que envolvem aprovação ou não de planos de recuperação judicial por parte de credores.

A análise feita pelos jogadores, além de avaliar os créditos a serem recebidos, deve também observar a possibilidade de recebimento e o prazo em que esse montante será pago.

A aprovação de um plano de recuperação judicial engloba fatores que ultrapassam os créditos dos jogadores, afinal é algo que pode impactar diretamente na sócio-economia do país.

A aprovação dos planos de recuperação judicial trará, em geral, mais benefícios aos jogadores que a falência, tendo em vista a não previsão de recebimento do crédito, e o prazo de duração do mesmo, tornando assim a opção de reabilitação da empresa a melhor opção feita pelos credores.

Podemos perceber claramente que o jogo nem sempre se trata de um jogo cooperativo, apesar de possuir todas as características para que isso ocorra dentro de um mesmo grupo de credores. Porém, se tratando de classes diferentes, já não se pode pensar tanto em um jogo cooperativo. É claro e evidente a forma diferenciada que à recuperanda trata todos seus credores e principalmente como é “deixada de lado” o grupo C, com as piores estratégias de pagamento oferecidas. Afinal, em caso de não aceitação do plano de recuperação judicial e eventual falência da empresa, essa classe legalmente é a que está em último na preferência de recebimento de seus créditos o que faz com que estrategicamente tenha as “piores” propostas para recebimento. Isso acaba se tornando um ponto muito favorável à recuperanda, pois faz com que essa classe acabe aceitando o plano para não correr o risco, no caso de falência, de não vir a receber seus créditos.

O recebimento dos créditos, os prazos para pagamento também são parte fundamentais da estratégia, afinal o que seria mais interessante para a empresa? Receber em um prazo mais rápido uma determinada quantia, talvez até mesmo inferior ao que ele teria pra receber de fato, ou receber todo valor que lhe é devido, inclusive com a correção monetária e os juros correntes pelo período, mas em um período que pode chegar até mesmo a 19 anos? É preciso colocar as situações na "mesa" e avaliar, uma dívida para se receber em longo prazo pode ser algo muito inviável e dependendo pode até mesmo complicar a vida financeira do credor.

As estratégias, quando tratamos de um jogo não cooperativo, se assemelham ao "Dilema do Prisioneiro", não temos como saber qual será a decisão tomada pelo nosso oponente, só temos que analisar o que seria melhor para termos um jogo que possua o valor mais próximo da soma zero possível e neste caso o que mais se aproximaria disso seria o credor receber o valor mais próximo do que lhe é devido e a recuperanda obter as melhores formas de poder quitar essa dívida ou ainda gastar o menor valor possível para quitá-la.

Apesar de não parecer, a teoria dos jogos está presente a nossa volta, cada decisão a ser tomada na hora de fazer um trajeto para ir para o trabalho, as possíveis respostas para um questionário de uma prova, ou até mesmo o simples fato de negociar o desconto em uma loja é um jogo estratégico. Atualmente estamos presenciando em nosso país a "Operação Lava Jato" que está trazendo a tona vários escândalos de corrupção, muitos deles descobertos com a ajuda da "delação premiada" que visa dar benefícios às pessoas que colaborarem com a justiça. O comportamento dos delatores está ligado diretamente à teoria dos jogos, pois eles visam os maiores benefícios para eles em troca dos depoimentos, com as provas, que ajudam a desmascarar mais pessoas que estejam envolvidas.

A análise do plano de recuperação da empresa Oi nos mostra que algumas decisões que parecem ser evidentes, e simples de serem tomadas, nem sempre possuem essas características. O simples fato de escolher uma estratégia pode se tornar algo complicado levando em considerações variáveis como a forma de pagamento. É preciso avaliar cada item detalhadamente e chegar a um consenso do que será a opção ideal para ambas as partes. Nesse jogo, qualquer "movimento" errado pode, não só prejudicar os jogadores envolvidos, como pode também todos que estão ao redor dos jogadores envolvidos. Um fechamento de uma empresa de grande porte com certeza afetará fortemente toda economia do local, podendo alterar de maneira significativa toda sociedade também.

Referências

1 BORTOLOSSI, H.;GARBUGIO, G.;SARTINI, B. Uma introdução à Teoria Econômica dos Jogos. IMPA, 2017.

2 FIANI, R. Teoria dos Jogos, 4ª edição, Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

3 BERNI, D. A. Teoria dos Jogos: jogos de estratégia, estratégia decisória, teoria da decisão. Rio de Janeiro: Reichmann & Affonso, 2004.

4 CARVALHO, J. A. M. Introdução à Teoria dos Jogos no Direito. Revista de Direito Constitucional e Internacional, v. 15, n. 59, p. 213-234, abr./jun. 2007.

5 PATROCÍNIO, D.M. Análise econômica da recuperação judicial de empresas: princípios, jogos, falhas e custos. Belo Horizonte, 2012.

6 RAMOS, A.L.S.C. Legislação Empresarial para concursos. Editora JusPODIVM, 2016.

7 BRASIL. Lei n. 11.101 de 2005. Regula a recuperação judicial, a extrajudicial e a falência do empresário e da sociedade empresária. Diário Oficial da União, Brasília, 9 fevereiro 2005.

8 RIO DE JANEIRO. Processo de Recuperação Judicial n. 0203711.65.2016.8.19.0001 ajuizado por Oi S/A e Outras, Juízo da 7ª Vara Empresarial da Comarca do Rio de Janeiro, Juiz de Direito Fernando Viana, Rio de Janeiro, Diário da Justiça, j. 05 de Setembro de 2016. Disponível em: <http://www.tjrj.jus.br>

9 FIGUEIREDO, R.: A modelagem do Conflito e a Teoria dos Jogos: fundamentos econômicos e desdobramentos filosóficos.Tese de doutorado. 319p, IEI/UFRJ, 1993.

10 PACHECO, J. S. A Nova Lei de Falências e de Recuperação de Empresas – Lei nº 11.101/2005. Forense. 2006.

11 NASAR, S. Uma Mente Brilhante. Trad. Sergio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2002

12 J. von Neumann. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. Mathematische Annalen, vol. 100, pp. 295-320. Traduzido por S. Bargmann: *On the Theory of Games of Stategy em Contributions to the Theory of Games*, vol. 4, pp. 13-42, A. W. Tucker e R. D. Luce (editores), Princeton University Press, 1959.

13 J. von Neumann e O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.