UNIVERSIDADE FEDERAL DOS VALES DO JEQUITINHONHA E MUCURI

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Raphael Neves de Matos

UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS: A RELAÇÃO ENTRE DÍZIMAS PERIÓDICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Teófilo Otoni

2017

Raphael Neves de Matos

UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS: A RELAÇÃO ENTRE DÍZIMAS PERIÓDICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri, como requisito para obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Me. Ailton Luiz Vieira

Teófilo Otoni

2017

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca/UFVJM
Bibliotecário responsável: Gilson Rodrigues Horta – CRB6 nº 3104

M433c
2017

Matos, Raphael Neves de.
Uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas. / Raphael Neves de Matos. Teófilo Otoni: UFVJM, 2017.
76 f. ; il.

Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2017.

Orientador: Prof. MSc. Ailton Luiz Vieira.

1. Números racionais. 2. Números decimais. 3. Dízimas periódicas. 4. Fração geratriz. 5. Progressão geométrica. I. Título.

CDD: 510

RAPHAEL NEVES DE MATOS

UMA CONTRIBUIÇÃO PARA O ENSINO APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS: A RELAÇÃO ENTRE DÍZIMAS PERIÓDICAS E PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação apresentada ao PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMáTICA EM REDE NACIONAL - STRICTO SENSU, nível de MESTRADO como parte dos requisitos para obtenção do título de MAGiSTER SCIENTIAE EM MATEMÁTICA

Orientador : Prof. Ailton Luiz Vieira

Data da aprovação : 02/08/2017

Elson Leal de Moura

Prof.Dr. ELSON LEAL DE MOURA - UFVJM

Wederson M. A

Prof.Dr. WEDERSON MARCOS ALVES - UFVJM

Silvia Swain Canôas

Prof.ª Dr.ª SILVIA SWAIN CANÔAS - UFVJM

Ailton Luiz Vieira

Prof. AILTON LUIZ VIEIRA - UFVJM

TEÓFILO OTONI

Dedico esse trabalho *à memória* do meu pai: seu exemplo de viver a vida me motiva a prosseguir.

AGRADECIMENTOS

À Deus pelo dom da vida, por me capacitar a cada dia especialmente na construção deste trabalho, por ser presença constante em minha vida.

Ao amigo, professor, mestre e orientador, Ailton Luiz Vieira, pela parceria e companheirismo. As orientações, conversas e reflexão conjunta foram valiosos para concretização deste trabalho.

À minha esposa Cecília e a minha filha Victória pelo apoio e companheirismo, e ainda por terem sido os faróis que me guiaram nessa estrada.

Ao meu Pai (*in memoriam*), que hoje se alegraria mais do que eu com essa conquista. A lembrança do seu olhar de simplicidade me faz enxergar o mundo diferente muitas vezes.

À minha mãe pelo apoio incondicional e incentivo de sempre e por sempre me acompanhar no coração diariamente.

Às minhas irmãs e demais familiares por toda energia positiva canalizada.

Aos colegas de curso que por muitas vezes tornaram mais suave a caminhada.

À todos os professores do Programa PROFMAT que tanto contribuíram para ter chegado até aqui.

À coordenação do Programa PROFMAT por todo profissionalismo dedicado.

Aos colegas da SRE T. Otoni, em especial aos colegas do setor de Inspeção Escolar e à Diretora da SRE T. Otoni Maria Helena Costa Salim pela confiança depositada e por toda compreensão demonstrada durante o período de duração do curso.

Aos colegas de trabalho das faculdades DOCTUM, pelo constante incentivo e torcida pela conclusão bem sucedida.

À todos os profissionais com os quais tive a oportunidade de trabalhar e aos amigos ou conhecidos que sempre me desejaram sucesso nesta empreitada.

À todas as pessoas que fazem parte do meu convívio diário pela paciência e compreensão a mim dispensada, especialmente nestes últimos dois anos.

À todos que torceram e torcem pelo meu sucesso e pela minha felicidade incondicionalmente.

A menos que modifiquemos a nossa maneira de pensar, não seremos capazes de resolver os problemas causados pela forma como nos acostumamos a ver o mundo.

(Albert Einstein)

RESUMO

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais, destacando principalmente a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas. A metodologia utilizada permitiu a análise da abordagem e sequência didática dos tópicos Dízima periódica e Progressão Geométrica Infinita, contemplada nos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático. Nesta abordagem as frações e os números decimais, especialmente os decimais infinitos e periódicos, e por consequência o cálculo de sua fração geratriz, foram objetos de estudo centrais e instigadores dessa pesquisa. Realizou-se um estudo mais detalhado sobre a representação decimal dos números racionais e analisado a compreensão destes números em nível fundamental e médio. Foi ainda proposto uma abordagem das maneiras mais usuais do cálculo da fração geratriz, bem como, explorado a relação entre os decimais infinitos e periódicos e as progressões geométricas. Durante o desenvolvimento deste trabalho, foi possível perceber que há mais de uma abordagem didática dos tópicos de ensino inerentes ao tema central analisado. O reconhecimento de que a parte decimal das dízimas periódicas pode ser expressa como uma soma infinita de parcelas que, a partir de certo ponto, descreve uma progressão geométrica infinita de razão compreendida entre zero e um, é um ponto chave na proposta de intervenção apresentada para a sala de aula. Diante desse quadro, foi verificado a ordem atualmente seguida pelos professores do 1° Ano do Ensino Médio, o que permitiu constatar que os conteúdos Dizimas Periódicas e Progressões Geométricas Infinitas são tratados sem ligação significativa e, diante disso, foi proposta uma alteração na ordem de abordagem desses conteúdos no Ensino Médio. Ao final foram propostas algumas sugestões de atividades resolvidas e outras para serem desenvolvidas em sala de aula.

Palavras chave: Números racionais. Números decimais. Dízimas periódicas. Fração geratriz. Progressão geométrica.

ABSTRACT

The aim of this work was to present a contribution to the teaching of rational numbers, emphasizing mainly the relation between periodic tithe and geometric progression. The methodology used allowed the analysis of the approach and didactic sequence of the topics Periodic Dizima and Infinite Geometric Progression, contemplated in textbooks approved by the National Textbook Program. In this approach fractions and decimal numbers, especially the infinite and periodic decimals, and consequently the calculation of their generative fraction, were central objects and instigators of this research. A more detailed study on the decimal representation of rational numbers was carried out and the understanding of these numbers at the fundamental and medium levels was analyzed. It was also proposed an approach of the most usual ways of calculating the generative fraction, as well as exploring the relationship between infinite and periodic decimals and geometric progressions. During the development of this work, it was possible to perceive that there is more of a didactic approach of the teaching topics inherent to the central theme analyzed. The recognition that the decimal part of the periodic tithe can be expressed as an infinite sum of plots which, from a certain point, describes an infinite geometric progression of ratio between zero and one, is a key point in the proposal of intervention presented for the classroom. In view of this situation, we verified the order currently being followed by teachers of the 1° Year of High School, which allowed to verify that the Periodic Dictionaries and Infinite Geometric Progressions are treated without significant connection and, accordingly, a change was proposed in order to approach these contents in High School. At the end, some suggestions for solved activities and others to be developed in the classroom were proposed.

Keywords: Rational numbers. Decimal numbers. Periodic tithes. Generation fraction. Geometric progression.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta uma análise dos temas Dízimas Periódicas e Progressões Geométricas, bem como a relação entre ambas. Nesta seção será apresentado o contexto e a justificativa da pesquisa, a metodologia aplicada, os objetivos e a estrutura do presente trabalho, itens iniciais que integram os resultados obtidos.

1.1 Contexto da pesquisa

Com a intenção de contribuir para o ensino-aprendizagem dos números racionais, este trabalho apresenta uma análise das abordagens e sequências didáticas propostas pelos autores dos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, afim de colaborar com a proposta do programa, conforme prevê alguns dos objetivos e diretrizes do mesmo, bem como a avaliação pedagógica do programa destacado a seguir:

> Art.2° São objetivos do PNLD:
> I- Aprimorar o processo de ensino e aprendizagem nas escolas públicas de educação básica, com a consequente melhoria da qualidade da educação;
> [· · ·]
> V- apoiar a atualização, a autonomia e o desenvolvimento profissional do professor;
> [· · ·]
> Art. 3° São diretrizes do PNLD:
> [· · ·]
> III- o respeito à autonomia pedagógica das instituições de ensino;
> [· · ·]
> Art.10° A avaliação pedagógica dos materiais didáticos no âmbito do PNLD será coordenada pelo ministério da Educação com base nos seguintes critérios, quando aplicáveis, sem prejuízo de outros que venham se ser previstos em Edital
> [· · ·]
> III- a coerência e a adequação da abordagem teórico-metodológica;
> IV- a coerência e a atualização de conceitos, informações e procedimentos;
> V- a adequação e a pertinência das orientações prestadas ao professor;
> [· · ·]
> VII- a qualidade do texto e a adequação temática; (BRASIL, 2017, p.7).

A escolha dos livros didáticos teve como requisito inicial ter sido aprovado pelo Programa Nacional do Livro de Didático, haja vista que as diretrizes e objetivos do programa asseguram uma análise confiável tendo em vista as previsões legais do mesmo e a criteriosa análise pedagógica por parte de especialistas da área.

Este trabalho tem como principio norteador analisar se as abordagens propostas cumprem a função de oferecer uma sequência didática adequada no tratamento dos tópicos Números Racionais, dízimas periódicas e Progressões Geométricas Infinitas. Para tanto, é importante definir neste ponto o que deve ser compreendido como sequência didática.

> Uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos estudantes. (ZABALA, 2007, p.18)

Então, conforme destacado acima, ressalta-se que, o que foi proposto neste trabalho não se restringe à análise da ordem em que os tópicos são tratados nos livros didáticos, mas analisar se a sequência didática proposta, no que diz respeito à abordagem, ordenação das atividades e objetivos propostos, pode ou não ser aprimorada em algum aspecto que seja significativo para o ensino aprendizagem dos números racionais, enfatizando, inclusive, a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas.

1.2 Justificativa da pesquisa

Números inteiros, números decimais exatos, frações, números com representação decimal infinita e periódica são todos os tipos de números encontrados no conjunto dos números racionais. A necessidade de representar partes ou quantidades não inteiras levou o homem a criação dos números racionais, desde muito tempo, largamente utilizados no dia-a-dia quando ganham vida e significado, além de ser matéria básica destacada nos programas de ensino fundamental, médio e superior do sistema de ensino na atualidade.

> Os homens da idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas, durante a Idade do Bronze, parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para frações. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para as frações unitárias, isto é, com denominador um. O inverso de um número inteiro era indicado colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. Convém ressaltar que as frações (positivas, é claro) surgiram antes dos números negativos, que demoraram a ser aceitos como números (BOYER, 1996, p.9).

A representação decimal dos números racionais pode se apresentar sob duas formas: finita ou infinita. A representação decimal finita é exata e é, facilmente, representada na forma de fração. Já a representação infinita de qualquer número decimal desperta atenção, devido as características e variedade de formas de representação existentes, sendo seu objeto de estudo tanto no Ensino fundamental como no Ensino Médio. Por este motivo foi explorada a representação decimal dos números reais, inclusive, das dízimas periódicas.

Para situar o tema central desse trabalho, uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais: a relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas, no contexto dessa pesquisa, destaca-se alguns dos questionamentos que a fomentaram, e vale destacar que a busca pelas respostas colaborou subsidiariamente para o amadurecimento das ideias que aqui ganharam forma. Dentre outras foram levantadas as questões:

- Como é a proposta para o ensino do tópico dízima Periódica e Progressão Geométrica infinita nos livros didáticos?

- Os livros didáticos estabelecem alguma relação entre eles?

- Existe outra forma de abordagem para dízimas periódicas e progressões geométricas?

- É possível contribuir para o ensino aprendizagem dos números racionais relacionando esses tópicos?

1.3 Metodologia aplicada

Na busca por respostas os questionamentos apresentados, foram analisados dez livros didáticos. A metodologia aplicada foi a pesquisa bibliográfica e análise das abordagens dos livros didáticos. Também foram consultadas outras fontes pertinentes aos questionamentos levantados, como, por exemplo, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino fundamental e Médio, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, o Programa Nacional do Livro Didático e a Proposta Curricular - Currículo Básico Comum do Estado de Minas Gerais e, ainda, pesquisa através de busca eletrônica que proporcionou a análise de muitos trabalhos publicados que versam sobre o assunto.

A pesquisa se fundamentou-se, teoricamente, através do estudo de diversos trabalhos, destacando-se as contribuições:

- Na construção da representação decimal e fracionária dos números racionais: (FIGUEIREDO, 1996; ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014; AVILA, 2006) - Estes autores contribuíram para que as definições e demonstrações apresentadas pudessem ser bem fundamentadas.

- Na análise da abordagem didática dos tópicos destacados no tema central, proposta de intervenção e sequência didática: (DANTE, 2015; GAY, 2014; ANDRINI; VASCONCELOS, 2012; BIANCHINI, 2011; SILVEIRA, 2015; PAIVA, 2009) - Estes autores contribuíram para que a análise e comparação das abordagens didáticas fosse possível e contribuísse para os resultado apresentados.

1.4 Objetivos

A seguir serão apresentados os objetivos do trabalho.

1.4.1 Objetivo Geral

Apresentar uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais, explorando a relação existente entre dízimas periódicas e progressões geométricas.

1.4.2 Objetivos Específicos

- Enfatizar a relação existente entre dízimas periódicas e progressões geométricas.
- Analisar a abordagem proposta nos livros didáticos utilizados atualmente nas escolas públicas.
- Favorecer a compreensão dos estudantes na abordagem dos temas dízimas periódicas e progressões geométricas.
- Explorar as sequências didáticas propostas nos livros didáticos.
- Sugerir atividades e/ou abordagens alternativas para o ensino de dízimas periódicas e progressões geométricas.

1.5 Estrutura e organização do trabalho

Este trabalho foi dividido em seções com a seguinte ordem de estruturação: Introdução - é apresentado o contexto e justificativa de realização da pesquisa, a metodologia aplicada, os objetivos geral e específicos norteadores da pesquisa e por fim o ordenamento e organização do trabalho; A seção 2 trata-se da conceituação dos números racionais, da representação decimal dos números reais e a representação de uma dízima periódica por um número racional pertencente ao intervalo $[0, 1)$ - nesta seção são destacadas as definições e demonstrações necessárias ao entendimento do leitor; Na seção 3, é apresentado o resultado da análise das sequências didáticas propostas pelos livros didáticos, no que se refere aos conteúdos dizimas periódicas e progressões geométricas infinitas, quando são analisados em que anos de escolaridade aparecem esses conteúdos, como é a proposta de ensino para ambos e se os livros didáticos estabelecem relação entre ambas e, ainda, se é possível justificar ao aluno por que a formula para o cálculo da fração geratriz é sempre válida; Na seção 4, é apresentada uma proposta de intervenção, algumas sugestões de atividades resolvidas e propostas para sala de aula; E por fim, a ultima seção contempla as Considerações Finais onde são pontuados os itens mais relevantes de acordo com o que foi possível obter através da pesquisa.

2 CONCEITUAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino de Matemática, (BRASIL, 1998), destacam que o estudo do cálculo com números racionais na forma decimal pode ser facilitado se os alunos forem levados a compreender que as regras do sistema de numeração decimal utilizadas para representar os números naturais, podem ser estendidas para os números racionais na forma decimal. É ressaltado ainda que a localização na reta numérica de números racionais e reconhecimento de que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal, estabelecendo relações entre essas representações, é uma forma de dar mais significado à esses números.

A representação decimal dos números racionais está muito mais contida no dia a dia do aluno, dentre elas: o seu próprio rendimento escolar representado pela média, a calculadora e o sistema monetário, dentre outros. Todos estes números são representados na forma decimal e não na fracionária.

De acordo com Dantas (2005) um Número Racional é uma fração irredutível, da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b são números inteiros e $b \neq 0$. Em notação de conjunto, temos: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}/\ a,\ b \in Z,\ b \neq 0\}$, conjunto dos números racionais. A fração $\frac{a}{b}$ é irredutível se o máximo divisor comum[1] entre a e b, é igual a 1, que é comumente indicado por $mdc(a, b) = 1$.

Definição 2.1 *Um número decimal é representado por uma sequência, chamada decimal, da forma* $x, a_1a_2a_3...$ *onde* $x \in \mathbb{Z}$ *e* $a_i \in \{0, 1, 2, 3...9\}$, $i = 1, 2, 3....$

Ao dividir o numerador a pelo denominador b, da fração $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, esse número fracionário passa a ser expresso por um número decimal. Este número decimal pode ser finito ou não. Vejamos os exemplos:

1) $\frac{1}{2} = 0,5$ finito;

2) $\frac{2}{3} = 0,666...$ infinito.

Definição 2.2 *Uma sequência é uma função natural* $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tal que* $F(n) = a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo:

$$F : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longmapsto F(n) = \frac{1}{n}$$

---

[1] O máximo divisor comum (abreviadamente, mdc) entre dois ou mais números inteiros é o maior número inteiro que é fator de tais números.

Essa função fornece uma sequência de frações cujo numerador é sempre igual a um, e é conhecida como a sequência das frações egípcias[2].

Definição 2.3 *Uma dízima periódica é uma decimal na qual, após um número finito de termos, aparece um bloco de termos (chamado o período) e a partir daí a decimal é constituída pela repetição sucessiva desse bloco, isto é* $x, a_1 a_2 ... a_m \overline{b_1 b_2 ... b_n}$*, onde a barra sobre o bloco* $b_1 b_2 ... b_n$ *indica que ele irá se repetir indefinidamente.*

As dízimas periódicas podem ser classificadas em simples (quando é formada apenas pelo período após a vírgula) ou composta (se possui uma parte que não se repete entre a parte inteira e o período). Exemplos:

a) $0,\overline{6}$ é uma dízima simples.

b) $2,352\overline{45}$ é uma dízima composta em que o bloco 45 se repete indefinidamente;

Ao efetuar a conversão de frações ordinárias em decimais, efetuando simplesmente a divisão do numerador pelo denominador, Avila (2006) destaca que se o denominador da fração irredutível só contiver fatores primos de 10 (2 e/ou 5), a decimal resultante será sempre finita; e é assim porque pode-se introduzir fatores 2 e 5 no denominador em número suficiente para fazer desse denominador uma potência de 10. A partir daí, ele questiona o que acontece se o denominador de uma fração irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5, e toma como exemplo a conversão de $\frac{5}{7}$ em decimal, cujo resultado é $0,\overline{714285}$. Analisando a divisão realizada para obtenção deste resultado, ele observa que na primeira divisão obtém-se resto 1. Depois, nas divisões seguintes, resto 3, 2, 6, 4 e 5 e que no momento em que é obtido o resto 5, que já ocorreu antes. Sabe-se que os algarismos do quociente voltarão a se repetir, resultando no período 714285, concluindo que essa repetição acontecerá certamente, pois os possíveis restos da divisão de qualquer número inteiro por 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6 e que o período terá no máximo seis algarismos.

Para Avila (2006), o exemplo anterior permite concluir que toda fração irredutível, quando convertida à forma decimal, resulta numa decimal finita ou periódica, ocorrendo este último caso se o denominador q contiver algum fator primo diferente de 2 e 5.

> Os números racionais $\frac{p}{q}$ que não são frações decimais finitas podem ser desenvolvidos em frações decimais infinitas realizando-se o processo elementar do algoritmo da divisão. Em cada etapa deste processo deve haver um resto não-nulo, porque, de outra forma, a fração decimal seria finita. Todos os restos diferentes que surgem no processo de divisão serão inteiros entre 1 e $q-1$, de

---

[2] Denominação dada pelos Egípcios às frações unitárias, ou seja, com o numerador igual a um, dividido por um número inteiro.

> tal forma que haja no máximo $q - 1$ possibilidades diferentes para os valores dos restos. Isto significa que, no máximo em q divisões algum resto k aparecerá uma segunda vez. Mas então todos os restos subsequentes se repetirão na mesma ordem em que apareceram após o resto k ter surgido pela primeira vez. Isto mostra que a expressão decimal para qualquer número racional é periódica; após algum conjunto finito de dígitos ter aparecido inicialmente, o mesmo dígito ou grupo de dígitos vai se repetir infinitamente (COURANT; ROBBINS, 2000, p.79).

No início da citação acima, o autor destaca que os números racionais $\frac{p}{q}$ cuja representação decimal não é finita pode sempre ser obtida pelo algoritmo da divisão que ao ser sucessivamente aplicado permitirá determinar a parte decimal infinita e periódica. Portanto, pode se entender que, os números racionais tem duas possíveis formas de representação: a decimal, que pode ser finita ou infinita e a fracionária. Aqueles que possuem uma representação decimal infinita e periódica, podem ainda apresentar uma parte decimal não periódica, e, nestes dois últimos casos esses decimais são chamados de dízimas periódicas. Vejamos alguns exemplos:

i) $0,\overline{2}$

ii) $1,2\overline{3}$

iii) $5,\overline{1}$

iv) $28,97\overline{386}$

Vale ressaltar, que os autores (DANTE, 2015; BIANCHINI, 2011; SILVEIRA, 2015; GAY, 2014; ANDRINI; VASCONCELOS, 2012) também fazem o caminho inverso, isto é, dada uma dízima periódica descobrir qual fração a originou, e esta fração é denominada fração geratriz da dízima.

Na seção seguinte, será generalizada a idéia de que qualquer número real está associado a uma decimal, bem como conceituar o cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica.

2.1 Representação decimal dos números reais

O objetivo desta seção é fazer a representação decimal de um número real qualquer. Para isto, enfatiza-se a forma de representação decimal dos números reais no intervalo $[0,1)$, pois, para representar um número real $x \notin [0,1)$ basta fazer uma translação conveniente. Por exemplo: $x_1 = \pi \notin [0,1)$ e $x_2 = 100,1518... \notin [0,1)$. Mas, pode-se fazer as representações de $0,1415...$ e $0,1518... \in [0,1)$ e, a seguir, adicionar 3 ao primeiro e 100 ao segundo, de forma que $x_1 = 3 + 0,1415...$ e $x_2 = 100 + 0,1518...$.

Esta parte decimal infinita denotaremos por $.a_1a_2a_3...$, $a_i \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ e a chamaremos por uma decimal infinita. Note que $.a_1a_2a_3... = 0,a_1a_2a_3... \in [0,1)$ conforme **Definição 2.1** destacada na página 17.

Observe ainda que representar por uma decimal todos os números reais de $[0,1)$ significa estabelecer uma bijeção[3] entre [0,1) e, pelo menos um subconjunto de $\mathbb{D}$, onde $\mathbb{D}$ é o conjunto de todas as decimais.

Para definir a função que representará os decimais pertencentes ao intervalo $[0,1)$ será utilizado o conceito de somatório[4].

$$\begin{aligned} F : \mathbb{D} &\longrightarrow [0,1) \\ .a_1a_2a_3... &\longmapsto F(.a_1a_2a_3...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots \end{aligned}$$

A discriminação das parcelas de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ acima, torna perceptível que a sequência dos termos forma uma Progressão Geométrica.

> **Progressão Geométrica:** É toda sequência numérica em que cada termo a partir do segundo, é igual ao produto do termo precedente (anterior) por uma constante q. O número q é chamado de **razão** da progressão geométrica (PAIVA, 2009, p.228).

Destaca-se desta última definição que quando essa sequência possui infinitos termos e ainda a razão q for tal que $-1 < q < 1$ o limite da soma dos infinitos termos pode ser calculada, é quando se reconhece a sequência como uma série[5] geométrica con-

---

[3] Bijeção de um conjunto A para um conjunto B é uma correspondência biunívoca entre A e B, isto é, a cada elemento de A corresponde sempre um único elemento de B e reciprocamente.

[4] Somatório - é o operador matemático da soma de termos de uma sequência, é denotado pela letra grega sigma ($\sum$), e é definido por $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + ... + x_n$, onde $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência dada, i é chamado de índice do somatório, m denota o m inicial (ou limite inferior) e n o índice final (ou limite superior).

[5] Série ou série infinita é uma expressão que generaliza o conceito de soma para uma sequência de infinitos termos.

vergente. A soma dos n termos de uma progressão geométrica pode ser calculada por $S_n = \dfrac{a_1.(1-q^n)}{1-q}$, onde q é a razão e a_1 o primeiro termo, com $q \neq 1$, como $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1.(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q}$.

> Uma **série infinita** é uma expressão que pode ser escrita na forma $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...$. Os números $u_1, u_2, u_3, ...$ são chamados de **termos** da série. Denotando por S_n a soma dos n primeiros termos da série, até o termo de índice n, inclusive:
>
> $$\begin{aligned} S_1 &= u_1 \\ S_2 &= u_1 + u_2 \\ S_3 &= u_1 + u_2 + u_3 \\ &\vdots \\ S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \end{aligned}$$
>
> O número S_n é chamado de **enésima soma parcial**[6] da série, e a sequência $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada de **sequência das somas parciais**. Quando n cresce, a soma parcial $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ inclui mais e mais termos da série. Assim, se S_n tende a um limite quando $n \to \infty$, é razoável que esse limite seja a soma de todos os termos da série, o que sugere a seguinte definição: Seja S_n a sequência das somas parciais da série $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_k + ...$, se a sequência S_n convergir para um limite S, então diremos que a série **converge** para S e que S é a **soma** da série.
>
> $$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$
>
> Se a sequência das somas parciais divergir, diremos que a série **diverge**. Uma série divergente não tem soma (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p.615,616).

É importante referenciar ainda o teste da comparação entre séries, pois o mesmo será aplicado em sequência.

> **Teste da Comparação de Séries:** Sejam $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_k$ séries de termos não negativos e suponha que $a_1 \leq b_1, a_2 \leq b_2, a_3 \leq b_3, ...a_k \leq b_k...$
>
> (a) Se a "série maior"$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_k$ convergir, então a "série menor"$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k$ também convergirá.
>
> (b) Se a "série menor"$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_k$ divergir, então a "série maior"$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_k$ também divergirá (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p.631).

Então, analisando a expressão $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{9}{10^n} = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{10^2} + \dfrac{9}{10^3} + \cdots$, pode-se verificar

---

[6] Enésima soma parcial quer dizer que são somadas apenas n parcelas, ou quantas for especificado.

que a série converge para 1, veja:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$ converge para 1, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ converge pelo teste da comparação, pois, $\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{10^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observe que F não é injetiva, pois $F(.a_1a_2...a_{j-1}(a_j - 1)99...) = F(.a_1a_2a_3...a_j00...)$, sendo $.a_1a_2...a_{j-1}(a_j - 1)99... \neq .a_1a_2a_3...a_j00...$. De fato,

$$(1)\ \ F(.a_1a_2a_3...a_{j-1}(a_j - 1)999...) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_{j-1}}{10^{j-1}} + \frac{a_j - 1}{10^j} + \frac{9}{10^{j+1}} + \frac{9}{10^{j+2}} + ...$$

$$(2)\ \ F(.a_1a_2a_3...a_{j-1}a_j000...) = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + ... + \frac{a_{j-1}}{10^{j-1}} + \frac{a_j}{10^j} + 0 + 0...$$

Calculando as somas parciais de (1) e (2), tem-se:

$$(1)\ \ S_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_{j-1}}{10^{j-1}} + \frac{a_j - 1}{10^j} + \frac{9}{10^{j+1}} + ... + \frac{9}{10^n}$$

$$(2)\ \ T_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_{j-1}}{10^{j-1}} + \frac{a_j}{10^j} + 0 + 0 + ...$$

Então, $S_n - T_n = -\frac{1}{10^j} + \frac{9}{10^{j+1}} + ... + \frac{9}{10^n}$. Tomando $n = j + k$ para $k \geq 1$ e j suficientemente grande, pode-se aplicar o conceito de limite[7] visto que as séries convergem para um mesmo resultado, dessa forma demonstra-se que $\lim_{n\to\infty}(S_n - T_n) = 0$, veja:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} T_n = S - T = 0 \text{ , o que implica } S = T.$$

Considere agora, $\delta_1 = .a_1a_2a_3...$ e $\delta_2 = .b_1b_2b_3...$, tais que $F(\delta_1) = F(\delta_2)$. Seja j o primeiro índice tal que $a_j \neq b_j$. Sem perda de generalidade, vamos supor que $a_j < b_j$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$ convergem para o mesmo resultado, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$ converge para zero.

Sejam H_n a soma parcial gerada por $\sum_{n=j}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ e L_n a soma parcial gerada por $\sum_{n=j}^{\infty} \frac{b_n}{10^n}$, ou seja,

$$H_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + ... + \frac{a_j}{10^j} + \frac{a_{j+1}}{10^{j+1}} + ... + \frac{a_m}{10^n}$$

---

[7] O conceito de limite é usado para descrever o comportamento de uma função à medida que o seu argumento se aproxima de um determinado valor, assim como o comportamento de uma sequência de números reais, à medida que o índice (da sequência) vai crescendo, tendendo para infinito.

$$L_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + ... + \frac{b_j}{10^j} + \frac{b_{j+1}}{10^{j+1}} + ... + \frac{b_m}{10^n}$$

Calculando $H_n - L_n$, tem-se:

$$H_n - L_n = \left(\frac{a_j}{10^j} - \frac{b_j}{10^j}\right) + \sum_{n=j+1}^{m} \frac{a_n - b_n}{10^n}$$

Conforme já foi expresso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$ converge para zero, então, pode-se concluir que

$$0 = \sum_{n=j}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} = \frac{a_j - b_j}{10^j} + \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n}$$

e, assim,

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} = \frac{b_j - a_j}{10^j}$$

.

Logo,

$$\frac{1}{10^j} \leq \frac{b_j - a_j}{10^j} = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{a_n - b_n}{10^n} \leq \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^j}$$

Descrevendo $\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^{j+1}} + \frac{9}{10^{j+2}} + ...$ por se tratar de um série geométrica de razão $\frac{1}{10}$ pode ser calculada fazendo $\frac{a_1}{1-q}$ definido acima de forma que

$$\sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{\frac{9}{10^{j+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10^{j+1}}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10^j}$$

Então, $b_j = a_j + 1$ e $a_n - b_n = 9$, para todo $n \geq j+1$, ou seja, $a_n = 9$ e $b_n = 0$, para todo $n \geq j+1$.

A argumentação acima prova o seguinte Lema:

Lema 2.1 *$F(\alpha) = F(\beta)$ se, e somente se, $\alpha = .a_1a_2a_3...a_{j-1}(a_j - 1)999...$ e $\beta = .a_1a_2a_3...a_{j-1}a_j000...$*

Seja $\mathbb{D}^*$ o subconjunto de $\mathbb{D}$ excluindo-se os decimais da forma $.a_1a_2...a_{j-1}(a_j - 1)999....$ de acordo com o Lema 2.1 acima $F : \mathbb{D}^* \to [0,1)$ é injetiva.

Deseja-se provar agora que $F : \mathbb{D}^* \longrightarrow [0,1)$ é sobrejetiva.

Demonstração 2.1 *Tomando $c \in [0,1)$. Deseja-se mostrar que existe $x \in \mathbb{D}^*$ tal que $F(x) = c$*

Considerando a função

$$\begin{aligned} F : \mathbb{D}^* &\longrightarrow [0,1) \\ .a_1a_2a_3... &\longmapsto F(.a_1a_2a_3...) \quad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \end{aligned}$$

Tomando $c \in [0,1)$ *e considerando a decomposição desse intervalo em intervalos disjuntos conforme destacado abaixo:*

$$[0,1) = \bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{j}{10}, \frac{j+1}{10}\right)$$

Esta notação demonstra que um intervalo pode ser decomposto numa junção de subintervalos que unidos formam o intervalo maior que foi decomposto. Desde que $c \in [0,1)$, *e considerando que c pertence à apenas um dos subintervalos acima. Pode-se dizer que* $c \in I_1 = \left[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1+1}{10}\right)$.

Dessa forma, fazendo a decomposição análoga para I_1 *tem-se:*

$$I_1 = \bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{a_1}{10} + \frac{j}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{j+1}{10^2}\right).$$

Novamente, c *está em um único destes,* $c \in I_2 = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2}\right)$, *por exemplo, decompondo*

$$I_2 = \bigcup_{j=0}^{9} \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{j}{10^3}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{j+1}{10^2}\right),$$

novamente pode-se considerar que $c \in I_3 = \left[\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3}, \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3+1}{10^3}\right)$ *e assim sucessivamente. Observe que* $I_1 \supset I_2 \supset ... \supset I_n \supset ...$ *e* $c \in \bigcap_{N=0}^{\infty} I_n$. *Considere o intervalo* $[a_n, b_n]$ *sendo* $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$. *Nota-se que* $a_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_i}{10^i}$ *e* $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$. *Sendo* (a_n) *a sequência dos extremos inferiores dos* I_n, *e* (b_n) *a sequência dos extremos superiores dos* I_n. *Como* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ *visto que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{10^n} = 0$, *pelo Teorema dos Intervalos encaixados*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n}$$

degenera em um único ponto. Aqui, $\overline{I_n}$ *representa o intervalo fechado* $[a_n, b_n]$.

> ***Teorema dos Intervalos Encaixados:*** *Seja* $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ *uma sequência decrescente de intervalos limitados e fechados* $I_n = [a_n, b_n]$. *A intersecção* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ *não é vazia. Isto é, existe pelo menos um número real* x *tal que* $x \in I_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Mais precisamente, temos* $\cap I_n = [a, b]$, *onde* $a = Supremo\ de\ a_n$ *e* $b = Infimo\ de\ b_n$.
>
> ***Demonstração:***
> *Para* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$, *temos* $I_{n+1} \subset I_n$, *o que significa* $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. *Podemos então escrever:*
>
> $$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$
>
> *Chamando de* A *o conjunto dos* a_n *e* B *o conjunto dos* b_n. A *é limitado:* a_1 *é uma cota inferior e cada* b_n *é uma cota superior de* A. *Por motivo semelhante,* B *é também limitado. Sejam* $a = Supremo\ de\ A$ *e* $b = Infimo\ de\ B$. *Como cada* b_n *é cota superior de* A, *temos* $a \leq b_n$ *para cada* n. *Assim,* a *é cota inferior de* B *e, portanto,* $a \leq b$. *Podemos então escrever:*
>
> $$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a \leq b \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$
>
> *Concluímos que* a *e* b *(podendo ser* $a = b$*!) pertencem a todos os* I_n, *donde* $[a, b] \subset I_n$ *para cada* n. *Logo* $[a, b] \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. *Mas ainda, nenhum* $x < a$ *pode pertencer a todos os intervalos* I_n. *Com efeito, sendo* $x < a = Supremo\ de\ A$, *existe algum* $a_n \in A$ *tal que* $x < a_n$, *ou seja,* $x \notin I_n$. *Do mesmo modo,* $y > b \Rightarrow y > b_m$ *para algum* m, *donde* $\notin I_m$. *Concluímos então que* $\cap I_n = [a, b]$ *(LIMA, 2014, pp.85–86).*

Como $c \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} I_n$ *e indicando* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \alpha$, *segue que* α *é a extremidade inferior de* I_n *e* $\alpha = c$. *Note ainda que* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = c$, *ou seja,*

$$c = F(.a_1a_2a_3...) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

o que implica que F *é sobrejetora. O que encerra a prova do Teorema a seguir:*

Teorema 2.1 *Existe uma correspondência biunívoca entre* $\mathbb{D}^*$ *e o intervalo* $[0, 1)$ *dos números reais.*

Pelo **Teorema 2.1**, podemos associar a cada decimal do conjunto $\mathbb{D}^*$ um único número do intervalo $[0, 1)$. Em particular, a cada racional do intervalo $[0, 1)$[8] está associada uma única decimal de $\mathbb{D}^*$. Na próxima seção, serão apresentados quais tipos de elementos do conjunto $\mathbb{D}^*$ que estão associados aos racionais contidos em $[0, 1)$.

---

[8] Todos os outros números decimais que pertencem a $\mathbb{Q} \cap [0, 1)$ podem ser representados a partir de uma simples translação após representar os decimais que pertencem a $[0, 1)$, conforme já exemplificado no início dessa seção

2.1.1 *Representação de uma dízima periódica por um número racional pertencente ao intervalo* $[0, 1)$

As dízimas periódicas representam números racionais que podem ser escritos tanto na forma decimal quanto na forma fracionária. Sua representação decimal pode ser visualizada e decomposta como uma soma de parcelas que decrescem a uma razão multiplicativa. A sequência dessas parcelas identifica-se como Progressão Geométrica, que a partir deste ponto será identificada por PG, e a soma das parcelas dessa sequência define uma Série Geométrica convergente.

> **Séries Geométricas:** Em muitas séries importantes, cada termo é obtido multiplicando-se o termo precedente por alguma constante fixada. Assim se o termo inicial da série for **a** e cada termo for obtido multiplicando-se o termo precedente por r, então a série terá a forma $\sum_{k=0}^{\infty} a.r^k = a + a.r + a.r^2 + a.r^3 + ... + a.r^k + ..., (a \neq 0)$. Tais séries são chamadas de **séries geométricas**, e o número r é chamado de **razão** da série. Uma série geométrica $\sum_{k=0}^{\infty} a.r^k = a + a.r + a.r^2 + ... + a.r^k + ...(a \neq 0)$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$. Se a série convergir, então a soma da série é $\sum_{k=0}^{\infty} a.r^k = \frac{a}{1-r}$ (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p.617).

Considerando a dízima periódica $0,235\overline{74}$. Note que pode-se reescreve-la como:

$$0,23574... = \frac{235}{10^3} + \frac{74}{10^5} + \frac{74}{10^7} + \frac{74}{10^9} + ...,$$

onde se reconhece que, a partir da segunda parcela, as demais vão aparecendo de forma que a parcela seguinte é igual a anterior multiplicada sempre por um mesmo valor. A soma destes termos vem a ser uma Série Geométrica.

A fração geratriz que origina a dízima $.235\overline{74}$ pode ser calculada por:

$$0,23574... = \frac{235}{10^3} + \frac{74}{10^3}.\frac{1}{10^2 - 1}$$

$$0,235\overline{74} = \frac{23574 - 235}{99000}$$

$$0,235\overline{74} = \frac{23339}{99000}$$

O que acaba de ser feito para a dízima periódica $0,235\overline{74}$ é válido em geral.

Teorema 2.2 *Toda dízima periódica* $.a_1a_2...a_m\overline{b_1...b_n}$[9] *é um número racional que pode ser representado na forma:*

$$\frac{a_1...a_mb_1...b_n - a_1...a_m}{9...90...0} \tag{1}$$

Prova 2.1 *No número decimal* $.a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n$*,* $b_1b_2...b_n$ *é o período. Esse número pode ser expresso através da soma:*

$$S = \frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^m.10^n} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^m.10^{2n}} + ... + \frac{b_1b_2...b_n}{10^m.10^{n^2}} + ...$$
$$S = \frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^m}\left(\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + ... + \frac{1}{10^{n^2}} + ...\right)$$

A expressão $\frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + ... + \frac{1}{10^{n^2}} + ...$ *é uma progressão geométrica infinita de razão* $\frac{1}{10^n}$ *cuja soma,* S_1 *será calculada a seguir:*

$$S_1 = \frac{\frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{1}{10^n - 1}$$

Então a soma S *pode ser indicada por* $S = \frac{a_1a_2...a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2...b_n}{10^m} \cdot \frac{1}{10^n - 1}$*, que efetuando os cálculos necessários, têm-se:*

$$S = \frac{a_1a_2...a_m(10^n - 1) + b_1b_2...b_n}{10^m(10^n - 1)}$$

Nesta última expressão ao resolver $a_1a_2...a_m(10^n - 1)$ *como* 10^n *é uma potência de* 10 *com* n *zeros, o produto* $(a_1a_2...a_m) \cdot (10^n)$ *pode ser expresso por* $a_1a_2a_3...a_m0...0$*, então:*

$$S = \frac{a_1a_2a_3...a_m0...0 + b_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{10^m(10^n - 1)}$$

E agora explicita-se que a expressão $10^m(10^n - 1)$ *é equivalente ao número formado por* n *noves, resultado de* $10^n - 1$ *e* m *zeros resultado de* 10^m*, ou seja* $10^m(10^n - 1) = 999...9000...0$*, sendo a quantidade de noves igual a* n *e a quantidade de zeros igual a* m*, e dessa forma,*

$$S = \frac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{999...9000...0}$$

---

[9] Nesta notação m representa a quantidade de algarismos a_i com $i \in \{1, 2, 3, ...9\}$ e de maneira análoga n representa a quantidade de algarismos b_i com $i \in \{1, 2, 3, ...9\}$ também.

S é chamada de fração geratriz.

■

Note que, a quantidade de algarismos iguais a 9 no denominador de S é igual ao tamanho n do período da dízima. E a quantidade de zeros do denominador de S é igual à quantidade m de algarismos entre a vírgula e o período da dízima.

Foi provado neste último Teorema que toda dizima periódica $.a_1a_2...a_m.\overline{b_1b_2...b_n}$ está associada a um número $x \in [0,1)$ tal que $x \in \mathbb{Q}$, isto é, $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$. Neste ponto surge uma pergunta natural: todo número $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ é fração geratriz de alguma dízima periódica? É fácil verificar que a resposta é não, pois basta tomar como exemplo o número $x = \dfrac{1}{2} \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ cuja representação decimal é $0,5$ que é um número finito e não periódico. A negativa a perguntar anterior induz a uma segunda pergunta: seria possível determinar qual número $x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$ é fração geratriz de uma dízima periódica? A resposta agora é sim e será expressa nos corolários do **Teorema 2.2**, os quais serão tratados a seguir.

Corolário 2.1 *Toda dízima periódica simples é igual a uma fração irredutível*[10] *cujo denominador não é divisível nem por 2 nem por 5.*

Prova 2.2 *referente ao* ***Corolário 2.1***

Fazendo $m = 0$, eliminando toda parte da forma $a_1a_2...a_m$ na fração $\dfrac{a_1a_2...a_mb_1b_2...b_n - a_1a_2...a_m}{999...9000...0}$, do ***Teorema 2.2****, desta seção tem-se:*

$$...\overline{b_1b_2...b_n} = \frac{b_1b_2...b_n}{10^n - 1}$$

Note que 2 não divide $10^n - 1$, pois $10^n - 1 = 999...9$ é um número que termina em 9 e, 2 não divide 9. Pelo mesmo motivo 5 não divide $10^n - 1$, portanto ao simplificar $\dfrac{b_1b_2...b_n}{10^n - 1}$ obtém-se uma fração cujo denominador é primo com 5 e com 2.

■

---

[10] Uma fração é chamada de Fração Irredutível quando não é possível simplificar, ou seja, não existe nenhum número que divida o numerador e o denominador ao mesmo tempo.

Corolário 2.2 *Uma dízima periódica composta com m termos na parte não-periódica é igual a uma fração irredutível cujo denominador é divisível por* 2^m *ou* 5^m*, mas não por potências mais elevadas de 2 ou 5.*

Prova 2.3 *referente ao* ***Corolário 2.2***

Pelo ***Teorema 2.2*** *tem-se*

$$.a_1a_2...a_m\overline{b_1...b_n} = \frac{a_1...a_mb_1...b_n - a_1...a_m}{9...90...0} = \frac{a_1...a_mb_1...b_n - a_1...a_m}{(10^n-1).10^m} = \frac{p}{q},$$

com $\frac{p}{q} \in [0,1)$.

Note que $(10^n - 1)$ *não é divisível nem por* 2 *nem por* 5. *Logo, potências mais elevadas que* 2^m *e* 5^m *não dividem* $(10^n - 1)$.

Se $mdc(p,q) = 1$ *nada há a fazer, isto é,* $\frac{p}{q}$ *é irredutível e* 5^m *ou* 2^m *dividem* q.

Se $mdc(p,q) = d$, $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, *então é possível simplificar* $\frac{p}{q}$ *e obter* $\frac{p_1}{q_1}$, *dessa forma* $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ *e* $mdc(p_1,q_1) = 1$.

Afirmação: 2 *e* 5 *não dividem p simultaneamente.*

De fato, suponha que $2|p$[11] *e* $5|p$. *Dessa forma isso implicaria em* $10|p$, *pois um número que é divisível por* 2 *e por* 5 *é divisível por* 10. *Assim, p terminaria em zero, e isso acarreta que, na expressão* $a_1...a_mb_1...b_n - a_1...a_m$, $a_m = b_n$ *e ainda* a_m *faria parte do período. Logo uma contradição com o fato de a dízima periódica considerada inicialmente ter essa estrutura* $.a_1a_2...a_m\overline{b_1b_2...b_n}$. *Portanto, ao simplificar* $\frac{p}{q}$ *não será possível encontrar potências de* 10 *em comum, ou melhor, o fator* $10^m = 2^m.5^m$ *de* q *garante que* $2^m|q$ *ou* $5^m|q$.

■

Corolário 2.3 *Uma fração irredutível* $\frac{p}{q} \in [0,1)$, *cujo denominador q não seja divisível nem por 2 nem por 5, é igual a uma dízima periódica simples.*

Prova 2.4 *referente ao* ***Corolário 2.3***

Por hipótese, $mdc(q,10) = 1$, *i.e., o máximo divisor comum de q e* 10 *é 1, ou ainda, q e 10 são primos entre si. Os possíveis restos das divisões inteiras das potências positivas de 10 por q são em número (no máximo) de q. Logo, existem* $n_1 > n_2$ *tais que ao se efetuar a divisão de* 10^{n_1} *e* 10^{n_2} *por q obtém-se o mesmo resto, assim:*

---

[11] O Símbolo | quer dizer “divide”.

$$10^{n_1} = a_1.q + r \tag{2}$$

$$10^{n_2} = a_2.q + r, \tag{3}$$

onde a_1*,* a_2 *e* r *são inteiros não-negativos. Por um lado, fazendo* $10^{n_1} - 10^{n_2} = 10^{n_2} \cdot (10^n–1)$*, com* $n = n_1–n_2$*. Por outro lado, segue-se de (2) e (3) que*

$$10^{n_1} - 10^{n_2} = (a_1–a_2).q$$

Portanto, como $10^{n_1} - 10^{n_2} = 10^{n_2}.(10^n–1)$ q *deve dividir* $10^n–1$*, uma vez que* $mdc(q, 10^{n_2}) = 1$*. Isto é, existe* $b \in N$ *tal que*

$$10^n–1 = b.q \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{b}{10^n - 1}$$

A expressão $\dfrac{b}{10^n - 1}$ *é o resultado da soma:* $\dfrac{b}{10^n} + \dfrac{b}{10^{2n}} + \dfrac{b}{10^{3n}} + ...$ *Dessa forma,*

$$\frac{1}{q} = \frac{b}{10^n - 1} = \frac{b}{10^n} + \frac{b}{10^{2n}} + \frac{b}{10^{3n}} + ...,$$

multiplicando a primeira e a ultima igualdade por p, tem-se:

$$\frac{p}{q} = \frac{b.p}{10^n} + \frac{b.p}{10^{2n}} + \frac{b.p}{10^{3n}} + ... = \frac{b.p}{10^n - 1} = \frac{b.p}{99...9}$$

Portanto, demonstra-se que $\dfrac{p}{q}$ *é uma dízima periódica simples cujo período tem n termos e é constituído dos algarismos do número b.p acrescidos por zero à esquerda, se necessário, para completar os n dígitos.*

■

Corolário 2.4 *Uma fração irredutível* $\dfrac{p}{q} \in [0, 1)$*, cujo denominador seja divisível por uma potência de 2 ou 5 (Sejam* 2^{m_1} *e* 5^{m_2}*, e seja* $m = max(m_1, m_2) > 0$*), é uma dízima periódica com m termos na parte não-periódica.*

Prova 2.5 *referente ao* ***Corolário 2.4***

Tem-se, por hipótese, que $q = 2^{m_1} \cdot 5^{m_2} \cdot b$*, onde* $mdc(b, 10) = 1$*. Logo,*

$$10^m \cdot \frac{p}{q} = a + \frac{p_1}{q_1} \tag{4}$$

onde $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\frac{p_1}{q_1} \in [0,1)$, *com* $mdc(q_1, 10) = 1$. *Aplicando-se o* ***Corolário 2.3*** *à fração* $\frac{p_1}{q_1}$, *temos:*

$$10^m \cdot \frac{p}{q} = a + \frac{p_1}{q_1} = a + \frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^n - 1},$$

Então:

$$10^m \cdot \frac{p}{q} = a + \frac{b_1 b_2 ... b_n}{10^n - 1} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{a}{10^m} + \frac{b_1 b_2 ... b_n}{(10^n - 1).10^m} = \frac{a.(10^n - 1) + b_1 b_2 ... b_n}{(10^n - 1).10^m}.$$

O resultado final obtido para $\frac{p}{q}$ *pode ser expresso como:*

$$\frac{a.(99...9) + b_1 b_2 ... b_n}{99...900...0} = \frac{a_1 a_2 ... a_m b_1 b_2 ... b_n - a_1 a_2 ... a_m}{99...900...0} = .a_1 a_2 ... a_m \overline{b_1 b_2 ... b_n}$$

■

A partir dos teoremas e corolários demonstrados nesta secção, ao se ensinar o cálculo da fração geratriz no ensino básico, é importante destacar para o estudante como reconhecer se o número é ou não racional, isto é, se possui representação decimal finita ou infinita e periódica. Caso seja infinita e não periódica deve ser comumente destacado que não se trata de números racionais e sim irracionais. Pode-se argumentar que a união desses dois conjuntos forma um conjunto maior, que é denominado de Conjunto dos Números Reais.

A título de ilustração apresentamos os exemplos destacados a seguir.

> a) a decimal .101001000100001..., onde o número de zeros entre os números $1's$ vai aumentando gradativamente é reconhecidamente um número irracional.
>
> b) a decimal .11101010001010..., onde o termo de ordem n é 1 se n for primo, e zero em caso contrário. De fato, a decimal não termina, pois a sucessão dos números primos é infinita. Além disso, essa decimal não pode ser uma dízima periódica, porque isso implicaria que existissem m e p inteiros positivos tais que m e $m+kp$, para todo $k \in \mathbb{N}$, fossem números primos. Mas isso não é possível, bastando tomar $k = m$ (FIGUEIREDO, 1996, p.45).

Como pode-se perceber nos exemplos acima, a ideia da existência de números irracionais pode ser introduzida a alunos da Educação Básica. No desenvolvimento desta seção, foi possível perceber a estreita relação entre dízimas periódicas e progressões geométricas. Na próxima seção, serão tratadas dúvidas e questionamentos que surgiram no desenvolvimento das discussões propostas neste trabalho.

3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA PROPOSTA PELOS LIVROS AO CONTEÚDOS DÍZIMA PERIÓDICA E PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Nesta seção são apresentados os resultado da consulta aos livros didáticos (DANTE, 2015; GAY, 2014; ANDRINI; VASCONCELOS, 2012; BIANCHINI, 2011; SILVEIRA, 2015; PAIVA, 2009) na busca de respostas para alguns questionamentos descritos a seguir:

1) Em quais anos de escolaridade da educação básica aparecem os conteúdos Dízima Periódica e Progressão Geométrica?

2) Como é a proposta para o ensino do tópico Dízima Periódica, inclusive, o cálculo da fração geratriz?

3) Como é a proposta para o ensino do tópico Progressão Geométrica infinita?

4) Os livros Didáticos estabelecem alguma relação entre Dízima Periódica e Progressão Geométrica?

5) Da forma como aparece nos livros é possível justificar ao aluno porque a "fórmula"para o cálculo da fração geratriz é válida?

Passaremos agora ao tratamento individual de cada questionamento.

3.1 Em quais anos de escolaridade da educação básica aparecem os conteúdos Dízima Periódica e Progressão Geométrica?

Na busca por essa resposta, foi consultada a Proposta Curricular - Matemática - Ensinos Fundamental e Médio onde foram definidos conteúdos básicos comuns (CBC) para os anos finais do ensino fundamental e para o ensino médio no Estado de Minas Gerais.

> Os CBCs não esgotam todos os conteúdos a serem abordados na escola, mas expressam os aspectos fundamentais de cada disciplina, que não podem deixar de ser ensinados e que o aluno não pode deixar de aprender. Ao mesmo tempo, estão indicadas as habilidades e competências que ele não pode deixar de adquirir e desenvolver. No ensino médio, foram estruturados em dois níveis para permitir uma primeira abordagem mais geral e semiquantitativa no primeiro ano, e um tratamento mais quantitativo e aprofundado no segundo ano (MINAS GERAIS, 2005, p.9).

Então, foi possível constatar que na Educação Básica, um dos tópicos trabalhados dentro do programa de ensino do componente curricular *Matemática* é o cálculo da fração geratriz que originou o número decimal, objeto de estudo no 8° Ano do Ensino

Fundamental e no 1° Ano do Ensino Médio. A progressão geométrica é integrante do programa de ensino do 1° Ano do Ensino Médio com proposta de aprofundamento no 2° Ano deste nível de ensino conforme previsto no CBC - Currículo Básico Comum, porém atualmente ele não é abordado nos livros didáticos do 2° Ano do Ensino Médio.

3.2 Como é a proposta para o ensino do tópico Dízima Periódica, inclusive, o cálculo da fração geratriz?

Analisando a abordagem de (DANTE, 2015), (SILVEIRA, 2015), (BIANCHINI, 2011), (GAY, 2014), (ANDRINI; VASCONCELOS, 2012) autores de livros de matemática para o Ensino fundamental, especificamente no 8° Ano, pode-se verificar a abordagem de cada autor para o ensino dos números racionais e as dízimas periódicas. A partir dessa analise, foi possível constatar que a introdução aos números racionais de maneira geral é feita primeiro abordando-se a localização de números na reta numérica. É importante destacar, que a densidade do conjunto dos números racionais é bem explorada pelos autores, o que pode ser observado na Figura 1.

Conforme descreve Dante (2015), entre dois números naturais, ou inteiros, nem sempre há outro número natural ou inteiro. Já entre dois números racionais, podemos encontrar muitos outros números racionais. Por exemplo, entre 0 e 1, existem $\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $\frac{3}{4} = 0,75$, $\frac{3}{5} = 0,6$, etc. Do mesmo modo entre 0 e -1, existem $-\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $-\frac{3}{4} = -0,75$, $-\frac{3}{5} = -0,6$. Logo, pode-se escrever: "Entre dois números racionais diferentes sempre existe outro número racional". Essa é a propriedade da densidade dos números racionais, por isso, diz-se que o conjunto dos números racionais é denso[12] no conjunto dos reais, o que é provado a seguir.

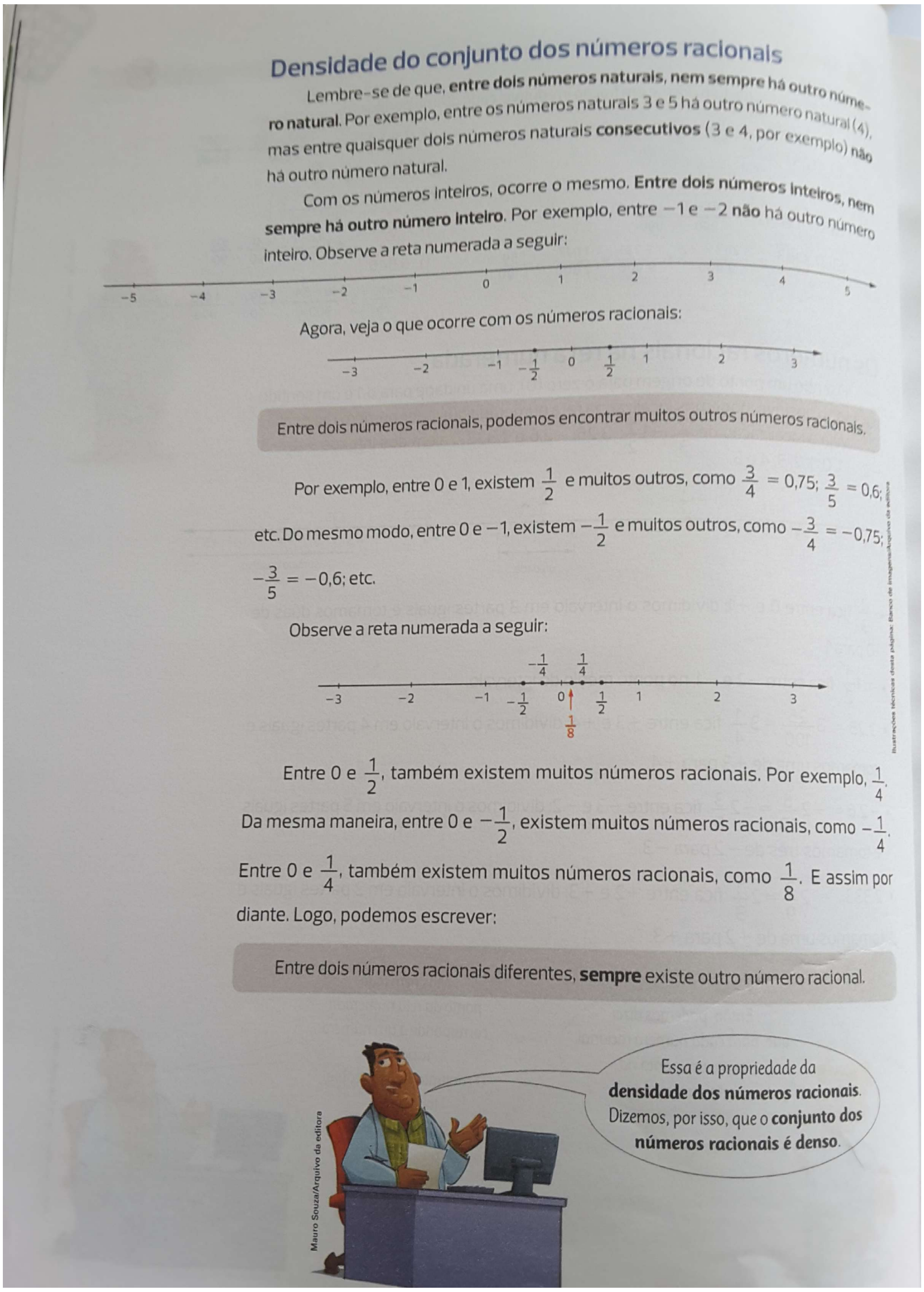
> Um subconjunto A de R é denso em R se para quaisquer a, $b \in R$ com $a < b$ existe $x \in A$ tal que $a < x < b$. O conjunto Q é denso em R. Demonstração. Sejam $a < b$ números reais. Então $b—a > 0$ e podemos usar a propriedade arquimediana[13] dos números reais para $b—a$ e 1 para garantir a existência de um número natural q de modo que $q.(b—a) > 1$. Isso nos diz que o intervalo cujos extremos são os pontos $q.a$ e $q.b$ possui comprimento maior do que 1 e assim existe um inteiro p com $q.a < p < q.b$. Daí $a < \frac{p}{q} < b$ e o número racional procurado é $\frac{p}{q}$ (CORRêA, 2016, p.18).

---

[12] Intuitivamente falando dizer que Q é denso em R significa que os números racionais estão espalhados por toda a reta real.

[13] Na álgebra abstrata, a propriedade arquimediana é uma propriedade possuída por alguns grupos, corpos e outras estruturas algébricas. Intuitivamente falando, a propriedade arquimediana nos diz que um conjunto não possui números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos. O corpo dos números reais é um exemplo de corpo com a propriedade arquimediana.

Figura1 – Densidade do conjunto dos números racionais



Densidade do conjunto dos números racionais

Lembre-se de que, **entre dois números naturais, nem sempre há outro número natural**. Por exemplo, entre os números naturais 3 e 5 há outro número natural (4), mas entre quaisquer dois números naturais **consecutivos** (3 e 4, por exemplo) **não** há outro número natural.

Com os números inteiros, ocorre o mesmo. **Entre dois números inteiros, nem sempre há outro número inteiro**. Por exemplo, entre −1 e −2 **não** há outro número inteiro. Observe a reta numerada a seguir:

Agora, veja o que ocorre com os números racionais:

Entre dois números racionais, podemos encontrar muitos outros números racionais.

Por exemplo, entre 0 e 1, existem $\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $\frac{3}{4} = 0{,}75$; $\frac{3}{5} = 0{,}6$; etc. Do mesmo modo, entre 0 e −1, existem $-\frac{1}{2}$ e muitos outros, como $-\frac{3}{4} = -0{,}75$; $-\frac{3}{5} = -0{,}6$; etc.

Observe a reta numerada a seguir:

Ilustrações técnicas desta página: Banco de imagens/Arquivo da editora

Entre 0 e $\frac{1}{2}$, também existem muitos números racionais. Por exemplo, $\frac{1}{4}$. Da mesma maneira, entre 0 e $-\frac{1}{2}$, existem muitos números racionais, como $-\frac{1}{4}$. Entre 0 e $\frac{1}{4}$, também existem muitos números racionais, como $\frac{1}{8}$. E assim por diante. Logo, podemos escrever:

Entre dois números racionais diferentes, **sempre** existe outro número racional.

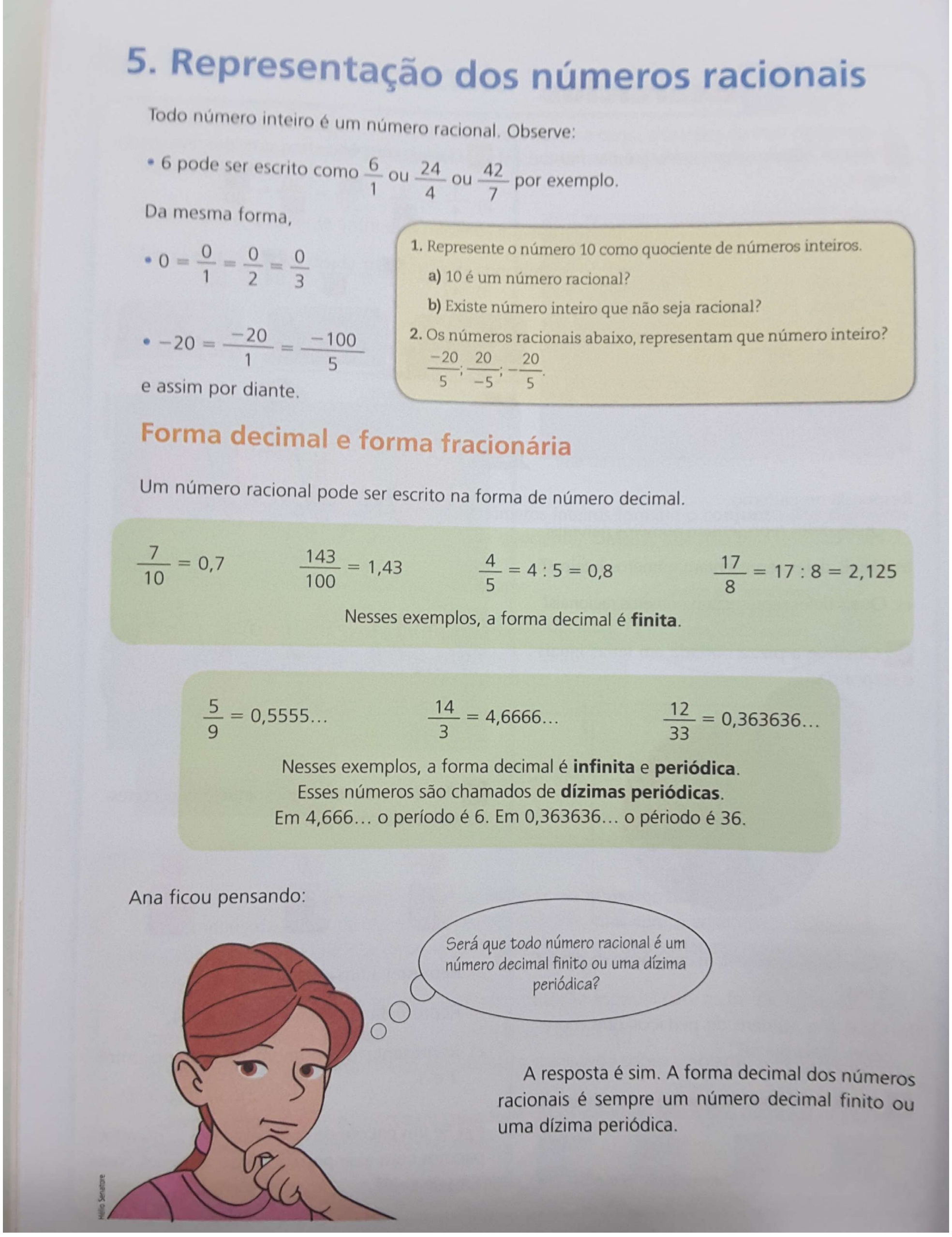
Essa é a propriedade da **densidade dos números racionais**. Dizemos, por isso, que o **conjunto dos números racionais é denso**.

Mauro Souza/Arquivo da editora

Fonte: (DANTE, 2015, p.24)

Na Figura 2, Gay (2014) ilustra como é explorada a representação ou localização de diversos números na reta numérica. Nesta etapa, os autores exploram os conceitos de forma decimal e forma fracionária, apresentando exemplos de números, frações, que possuem representação decimal finita e outros infinita e periódica. Gay (2014), especifica que quando a representação decimal de uma fração resulta em um decimal infinito e periódico há duas distinções: quando o período aparece logo após a vírgula, a dízima é chamada simples e quando há partes não periódicas e periódicas após a virgula, a dízima é chamada composta.

Figura2 – Representação de Números Racionais



5. Representação dos números racionais

Todo número inteiro é um número racional. Observe:

- 6 pode ser escrito como $\frac{6}{1}$ ou $\frac{24}{4}$ ou $\frac{42}{7}$ por exemplo.

Da mesma forma,

- $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3}$
- $-20 = \frac{-20}{1} = \frac{-100}{5}$

e assim por diante.

1. Represente o número 10 como quociente de números inteiros.

a) 10 é um número racional?

b) Existe número inteiro que não seja racional?

2. Os números racionais abaixo, representam que número inteiro?

$\frac{-20}{5}; \frac{20}{-5}; -\frac{20}{5}.$

Forma decimal e forma fracionária

Um número racional pode ser escrito na forma de número decimal.

$\frac{7}{10} = 0{,}7$ $\frac{143}{100} = 1{,}43$ $\frac{4}{5} = 4 : 5 = 0{,}8$ $\frac{17}{8} = 17 : 8 = 2{,}125$

Nesses exemplos, a forma decimal é **finita**.

$\frac{5}{9} = 0{,}5555...$ $\frac{14}{3} = 4{,}6666...$ $\frac{12}{33} = 0{,}363636...$

Nesses exemplos, a forma decimal é **infinita** e **periódica**.
Esses números são chamados de **dízimas periódicas**.
Em 4,666... o período é 6. Em 0,363636... o périodo é 36.

Ana ficou pensando:

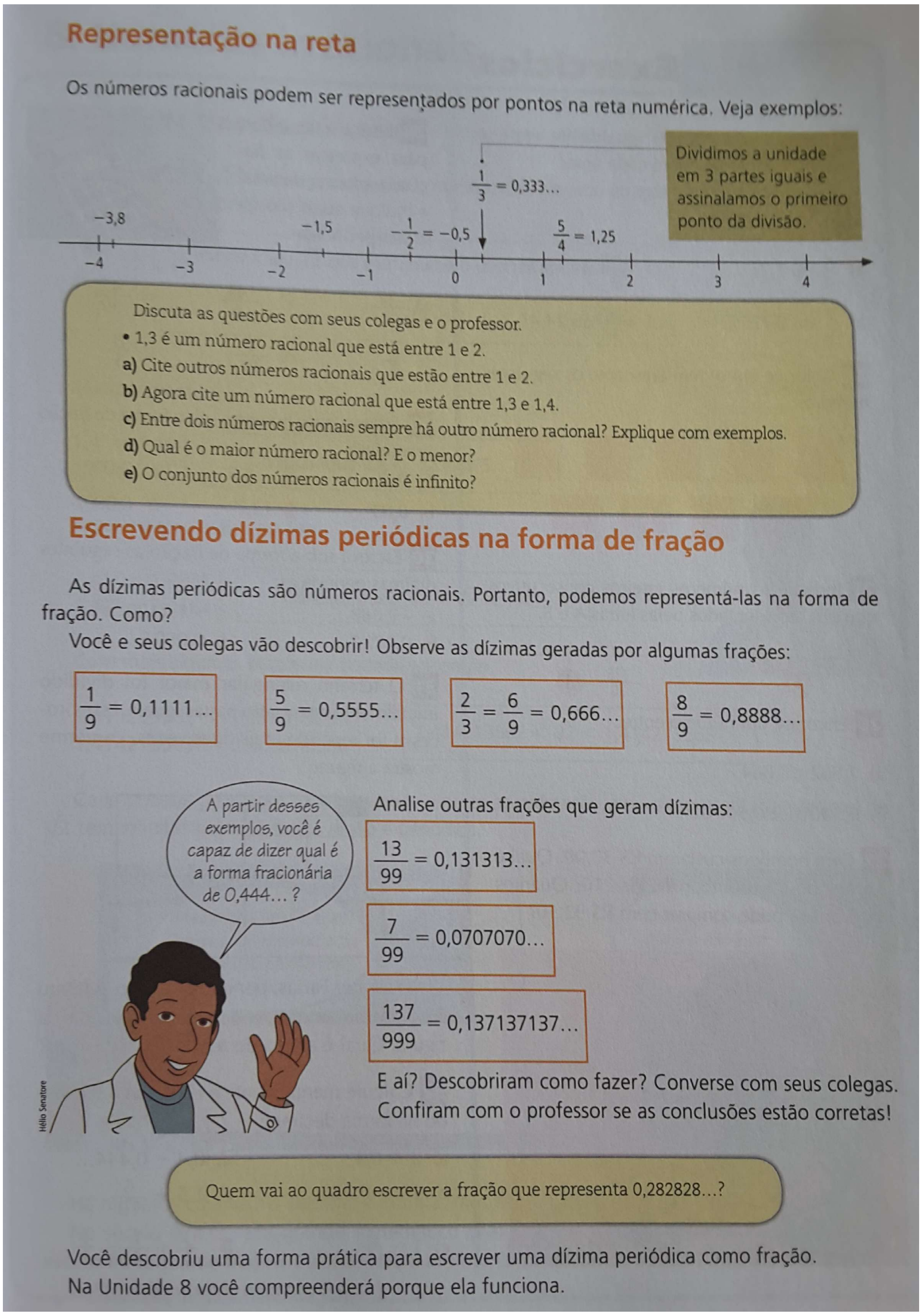
Será que todo número racional é um número decimal finito ou uma dízima periódica?

A resposta é sim. A forma decimal dos números racionais é sempre um número decimal finito ou uma dízima periódica.

Fonte: (GAY, 2014, p.16)

Na Figura 3, pode-se visualizar a abordagem da representação de números racionais de Gay (2014) e relacionar com a abordagem de Andrini e Vasconcelos (2012), que destaca que a forma decimal dos números racionais é sempre um número decimal finito ou uma dízima periódica. Após enfatizar que todo número que pode ser expresso na forma de fração é racional, é aberto um tópico para explorar os números racionais e as dízimas periódicas.

Figura3 – Representação na reta numérica



Representação na reta

Os números racionais podem ser representados por pontos na reta numérica. Veja exemplos:

Dividimos a unidade em 3 partes iguais e assinalamos o primeiro ponto da divisão.

Discuta as questões com seus colegas e o professor.

- 1,3 é um número racional que está entre 1 e 2.

a) Cite outros números racionais que estão entre 1 e 2.
b) Agora cite um número racional que está entre 1,3 e 1,4.
c) Entre dois números racionais sempre há outro número racional? Explique com exemplos.
d) Qual é o maior número racional? E o menor?
e) O conjunto dos números racionais é infinito?

Escrevendo dízimas periódicas na forma de fração

As dízimas periódicas são números racionais. Portanto, podemos representá-las na forma de fração. Como?

Você e seus colegas vão descobrir! Observe as dízimas geradas por algumas frações:

$\frac{1}{9} = 0,1111...$ $\frac{5}{9} = 0,5555...$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = 0,666...$ $\frac{8}{9} = 0,8888...$

A partir desses exemplos, você é capaz de dizer qual é a forma fracionária de 0,444... ?

Analise outras frações que geram dízimas:

$\frac{13}{99} = 0,131313...$

$\frac{7}{99} = 0,0707070...$

$\frac{137}{999} = 0,137137137...$

E aí? Descobriram como fazer? Converse com seus colegas. Confiram com o professor se as conclusões estão corretas!

Hélio Senatore

Quem vai ao quadro escrever a fração que representa 0,282828...?

Você descobriu uma forma prática para escrever uma dízima periódica como fração. Na Unidade 8 você compreenderá porque ela funciona.

Fonte: (GAY, 2014, p.17)

Continuando a análise, Dante (2015) destaca que toda dízima periódica indica um número racional, pois pode ser transformado em fração e que essa fração é chamada de fração geratriz, pois ela gera, dá origem à dízima.

Em Bianchini (2011), é destacado que as representações indicam que $0,3636...$ e $2,1333...$ apresentam infinitas casas decimais e periódicas. No número $0,3636...$ as reticências indicam que 36, chamado de período, continua se repetindo para sempre.

$2,1333...$ é uma representação decimal periódica de período 3 e reforça que a representação decimal periódica recebe o nome de dízima periódica.

A próxima fase explorada pelos autores é a obtenção da fração geratriz, para tanto, contaremos com a colaboração de Silveira (2015) que, assim como diversos autores, apresenta o cálculo da fração geratriz de forma equacionada, explorando três exemplos conforme segue:
Exemplo 1: Encontrar a fração geratriz da dízima $0,777....$ Para isso indica a dízima periódica $0,777...$ por x.

$$x = 0,777... \tag{5}$$

Multiplica os dois membros dessa igualdade por 10 para obter outro número na forma decimal com o mesmo período.

$$10x = 7,777... \tag{6}$$

Fazendo, membro a membro, (6) - (5), eliminando a parte que se repete.

$$\begin{aligned} 9x &= 7 \\ x &= \frac{7}{9} \end{aligned}$$

Portanto, $\frac{7}{9}$ é a fração geratriz equivalente à (5)
Exemplo 2: Encontrar a fração geratriz da dízima $4,151515...$ Indica a dízima periódica $4,151515...$ por x.

$$x = 4,151515... \tag{7}$$

Multiplica os dois membros dessa igualdade por 100 para obter outro número na forma decimal com o mesmo período.

$$100x = 415,151515... \tag{8}$$

Fazendo, membro a membro, (8) - (7), eliminando a parte que se repete

$$\begin{aligned} 99x &= 411 \\ x &= \frac{411}{99} \end{aligned}$$

Portanto $\frac{411}{99}$ é a fração geratriz equivalente à (7)

Exemplo 3: Encontrar a fração geratriz da dízima $0,04777...$ Novamente, indica a dízima periódica $0,04777...$ por x

$$x = 0,04777... \tag{9}$$

Multiplica os dois membros dessa igualdade por 100 para obter uma dízima periódica simples

$$100x = 4,777... \tag{10}$$

Multiplica os dois membros da igualdade (10) por 10 para obter outro número da forma decimal com o mesmo período.

$$1000x = 47,777... \tag{11}$$

Fazendo membro a membro, (11) - (10), eliminando a parte que se repete

$$\begin{aligned} 900x &= 43 \\ x &= \frac{43}{900} \end{aligned}$$

Portanto $\frac{43}{900}$ é a fração geratriz equivalente à (9)

Essa forma de encontrar a fração geratriz procurada é o método mais explorado por todos os autores, mas há ainda aqueles que exploram o que Dante (2015) denomina de Processo Prático, e que Lima (2013) explicita: A geratriz de uma dízima periódica simples é uma fração cujo numerador é o período e cujo denominador é o número formado por tantos noves quantos são os algarismos do período. Por exemplo

$$0,521521521... = \frac{521}{999}$$

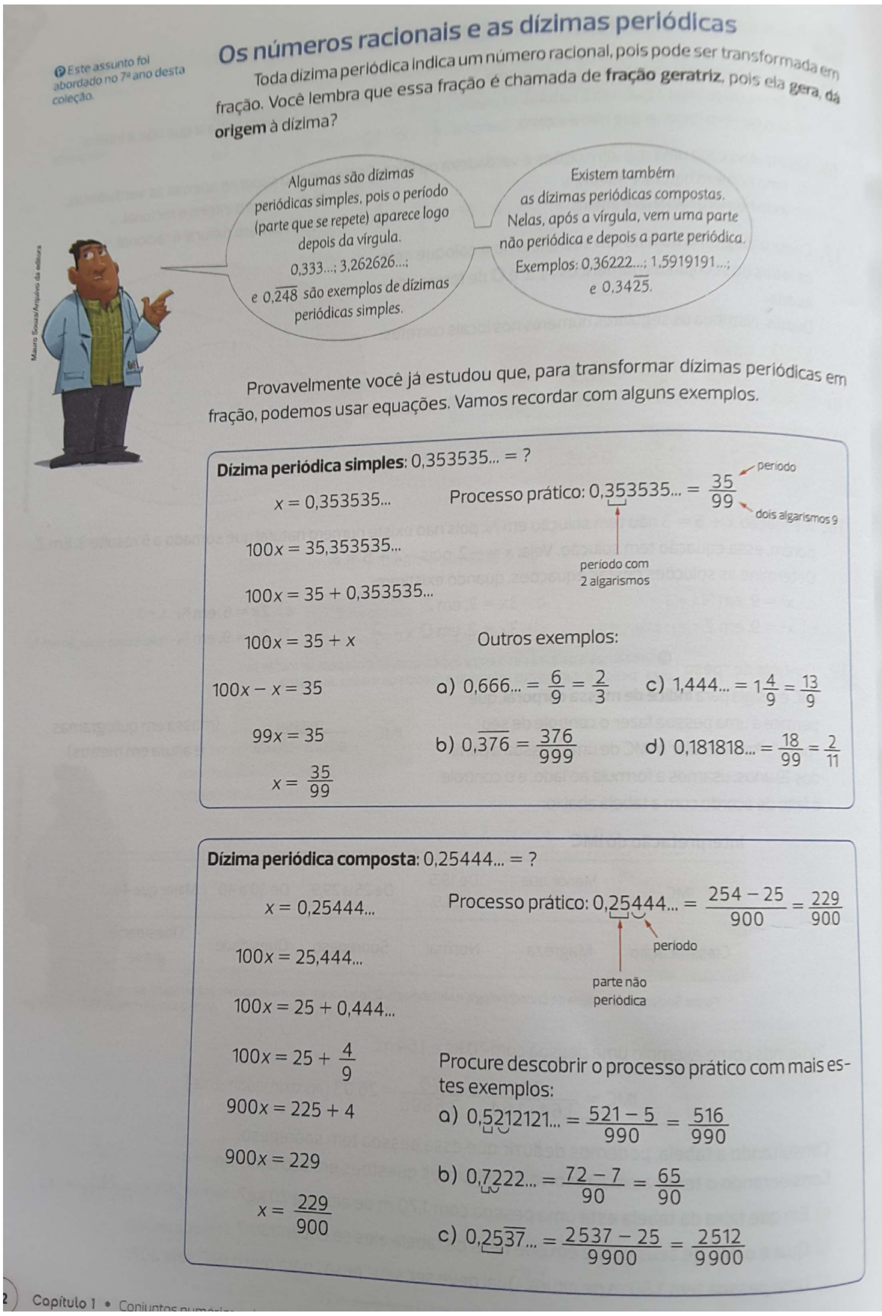
.

Em particular, toda dízima periódica simples representa um número racional. Além disso, existem ainda as dízimas periódicas ditas compostas, que são aquelas que depois da vírgula têm uma parte que não se repete, seguida por uma parte periódica. A geratriz de uma dízima periódica composta é a fração cujo numerador é igual à parte não-periódica seguida de um período menos a parte não-periódica e cujo denominador é formado por tantos noves quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos zeros quantos são os algarismos da parte não periódica. Dessa forma tomando $\alpha = 0,35172172...$, teremos que sua fração geratriz pode ser obtida conforme segue:

$$\alpha = \frac{35172 - 35}{99900} = \frac{35137}{99900}$$

A Figura 4 ilustra como o processo prático é abordado no livro didático.

Figura4 – Processo prático



Este assunto foi abordado no 7º ano desta coleção.

Os números racionais e as dízimas periódicas

Toda dízima periódica indica um número racional, pois pode ser transformada em fração. Você lembra que essa fração é chamada de **fração geratriz**, pois ela **gera**, **dá origem** à dízima?

Provavelmente você já estudou que, para transformar dízimas periódicas em fração, podemos usar equações. Vamos recordar com alguns exemplos.

Dízima periódica simples: 0,353535... = ?

$x = 0{,}353535...$

$100x = 35{,}353535...$

$100x = 35 + 0{,}353535...$

$100x = 35 + x$

$100x - x = 35$

$99x = 35$

$x = \frac{35}{99}$

Processo prático: $0{,}\underbrace{35}3535... = \frac{35}{99}$

período

dois algarismos 9

período com 2 algarismos

Outros exemplos:

a) $0{,}666... = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

b) $0{,}\overline{376} = \frac{376}{999}$

c) $1{,}444... = 1\frac{4}{9} = \frac{13}{9}$

d) $0{,}181818... = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$

Dízima periódica composta: 0,25444... = ?

$x = 0{,}25444...$

$100x = 25{,}444...$

$100x = 25 + 0{,}444...$

$100x = 25 + \frac{4}{9}$

$900x = 225 + 4$

$900x = 229$

$x = \frac{229}{900}$

Processo prático: $0{,}\underbrace{25}\underbrace{4}44... = \frac{254 - 25}{900} = \frac{229}{900}$

período

parte não periódica

Procure descobrir o processo prático com mais estes exemplos:

a) $0{,}\underbrace{5}\underbrace{21}2121... = \frac{521 - 5}{990} = \frac{516}{990}$

b) $0{,}\underbrace{7}\underbrace{2}22... = \frac{72 - 7}{90} = \frac{65}{90}$

c) $0{,}\underbrace{25}\overline{37}... = \frac{2537 - 25}{9900} = \frac{2512}{9900}$

Fonte: (DANTE, 2015, p.22)

Essa última forma de cálculo da fração geratriz propõe uma regra simples de ser aplicada pelos estudantes. Tal regra sempre funcionará, pois conforme demonstrado seção onde foi tradada da representação decimal dos números reais, a estrutura das dízimas periódicas, simples ou compostas, consistem na representação decimal de uma fração geratriz cujo numerador e denominador podem sempre ser obtidos através desta regra.

No 1° Ano do Ensino Médio contamos com a colaboração de Dante (2005) que destaca que um número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um decimal exato ou periódico, estes também podem ser escritos na forma $\frac{a}{b}$, que recebe o nome de fração geratriz do decimal. Ele demonstra como encontrar a fração geratriz explanando quatro exemplos conforme segue:

(a) 0,75 $= \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$;

(b) 0,222...

$$\begin{aligned} x &= 0,222... \\ 10x &= 2,222... \\ 10x &= 2+0,222... \\ 10x &= 2+x \\ 9x &= 2 \\ x &= \frac{2}{9} \end{aligned} \tag{12}$$

Tem-se que (12) é a fração geratriz procurada.

(c) 0,414141...

$$\begin{aligned} N &= 0,414141... \\ 100N &= 41,414141 \\ 100N &= 41+0,414141... \\ 100N &= 41+N \\ 99N &= 41 \\ N &= \frac{41}{99} \end{aligned} \tag{13}$$

Tem-se que (13) é a fração geratriz procurada.

(d) 0,1787878...

$$\begin{aligned} N &= 0,1787878... \\ 10N &= 1,787878... \\ 10N &= 1+0,787878...\ e\ 0,787878 = \frac{78}{99} \\ 10N &= 1+\frac{78}{99} \\ 990N &= 99+78 \\ N &= \frac{177}{990} \end{aligned} \tag{14}$$

Tem-se que (14) é a fração geratriz procurada.

Em síntese, a sequência didática de abordagem comum nos livros analisados, pela ordem é:

- Explica como identificar se o decimal é ou não uma dízima periódica;
- Esclarece como reconhecer uma dízima periódica: um número decimal infinito e periódico;
- Destaca que as frações podem ter representação decimal exata ou não exata;
- Enfatiza que a representação dos decimais exatos possui regra simples de se calcular a fração geratriz;
- Explana as frações, cuja representação decimal é não exata, demonstrando que estas podem ser reconhecidas como dizimas periódicas, números que podem ser expressos na forma fracionária, ou seja, números Racionais.

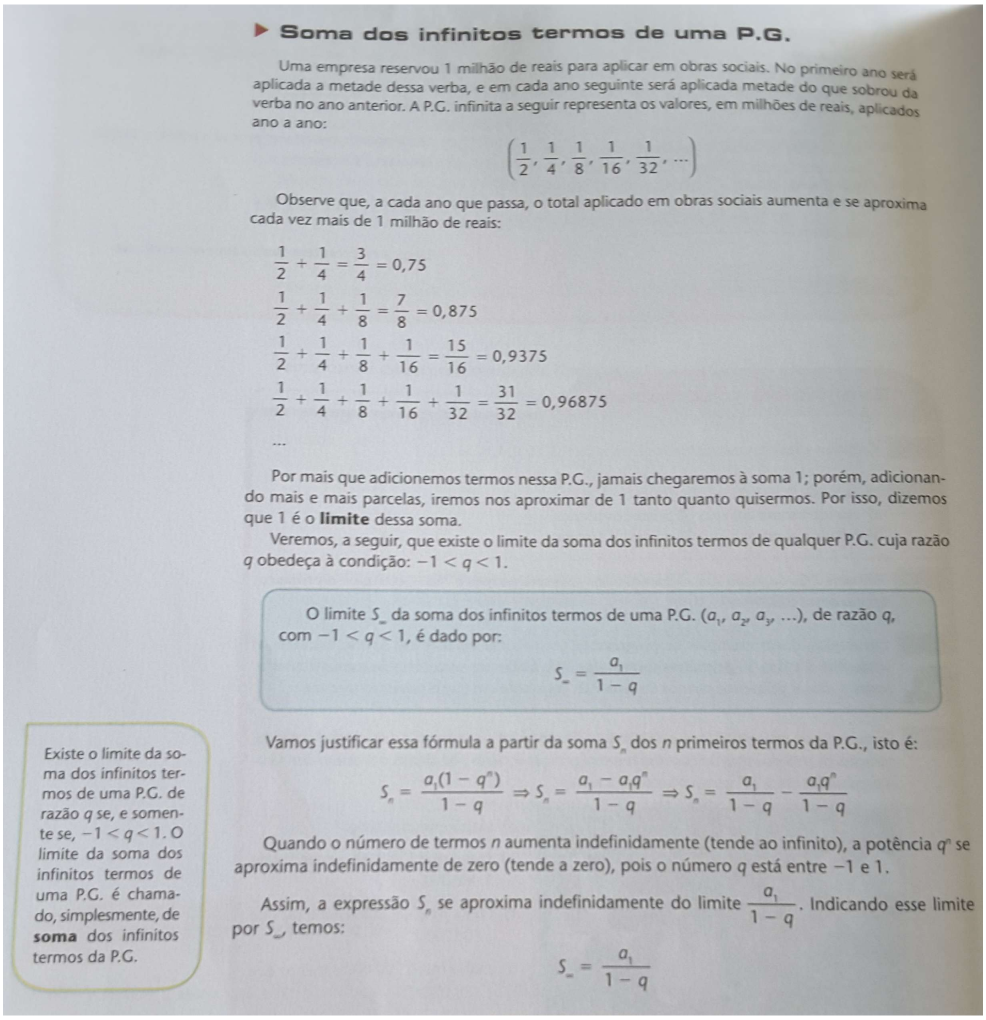
3.3 Como é a proposta para o ensino do tópico Progressão Geométrica infinita?

O tópico só aparece nos livros didáticos do 1° Ano do Ensino Médio, sendo abordado pelos autores (DANTE, 2005), (PAIVA, 2009), (SMOLE; DINIZ, 2013) e (SOUZA, 2010) na ordem destacada abaixo:

- Inicialmente é feita a apresentação de diversas sequências de números destacando quando são reconhecidas como Progressão Geométrica;
- Classificam as progressões em crescente, decrescente, constante, oscilante;
- Destacam a fórmula para o termo geral de uma progressão geométrica, depois a soma dos n primeiros termos, chegando à soma dos infinitos termos;
- Trabalham questões envolvendo progressões de razão compreendida entre -1 e 1;
- Fazem a introdução ao conceito de limite apresentando algumas somas parciais ou ilustrando graficamente;
- Exploram um exemplo de aplicação do cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica calculada através da soma dos termos de uma progressão geométrica;
- Explanam outras aplicações simples envolvendo equações de 1° Grau e construção de figuras geométricas cuja área e perímetro vão se desenvolvendo em progressão geométrica infinita.

A forma de abordagem destacada na Figura 5 é a mais comumente utilizada pelos diversos autores. Nela apresenta-se as somas parciais de certa quantidade de termos da série, demonstrando qual a tendência da soma indicada pela série, que vem a ser o limite da soma.

Figura5 – Soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica



Soma dos infinitos termos de uma P.G.

Uma empresa reservou 1 milhão de reais para aplicar em obras sociais. No primeiro ano será aplicada a metade dessa verba, e em cada ano seguinte será aplicada metade do que sobrou da verba no ano anterior. A P.G. infinita a seguir representa os valores, em milhões de reais, aplicados ano a ano:

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

Observe que, a cada ano que passa, o total aplicado em obras sociais aumenta e se aproxima cada vez mais de 1 milhão de reais:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16} = 0{,}9375$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = 0{,}96875$$

...

Por mais que adicionemos termos nessa P.G., jamais chegaremos à soma 1; porém, adicionando mais e mais parcelas, iremos nos aproximar de 1 tanto quanto quisermos. Por isso, dizemos que 1 é o **limite** dessa soma.

Veremos, a seguir, que existe o limite da soma dos infinitos termos de qualquer P.G. cuja razão q obedeça à condição: $-1 < q < 1$.

O limite S_∞ da soma dos infinitos termos de uma P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, de razão q, com $-1 < q < 1$, é dado por:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Vamos justificar essa fórmula a partir da soma S_n dos n primeiros termos da P.G., isto é:

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_1q^n}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

Quando o número de termos n aumenta indefinidamente (tende ao infinito), a potência q^n se aproxima indefinidamente de zero (tende a zero), pois o número q está entre -1 e 1.

Assim, a expressão S_n se aproxima indefinidamente do limite $\frac{a_1}{1-q}$. Indicando esse limite por S_∞, temos:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

Existe o limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. de razão q se, e somente se, $-1 < q < 1$. O limite da soma dos infinitos termos de uma P.G. é chamado, simplesmente, de **soma** dos infinitos termos da P.G.

Fonte: (PAIVA, 2009, p.236)

3.4 Os livros Didáticos estabelecem alguma relação entre Dízima Periódica e Progressão Geométrica?

O Conteúdo Básico Comum de Matemática, MINAS GERAIS (2005), para o 1° Ano do Ensino Médio destaca no Eixo Temático, tema 1: Números, ao abordar o tema **Números, contagem e probabilidade** o primeiro tópico que deve ser ensinado é Números Racionais e dízimas periódicas, prevendo que devem ser trabalhadas as seguintes habilidades:

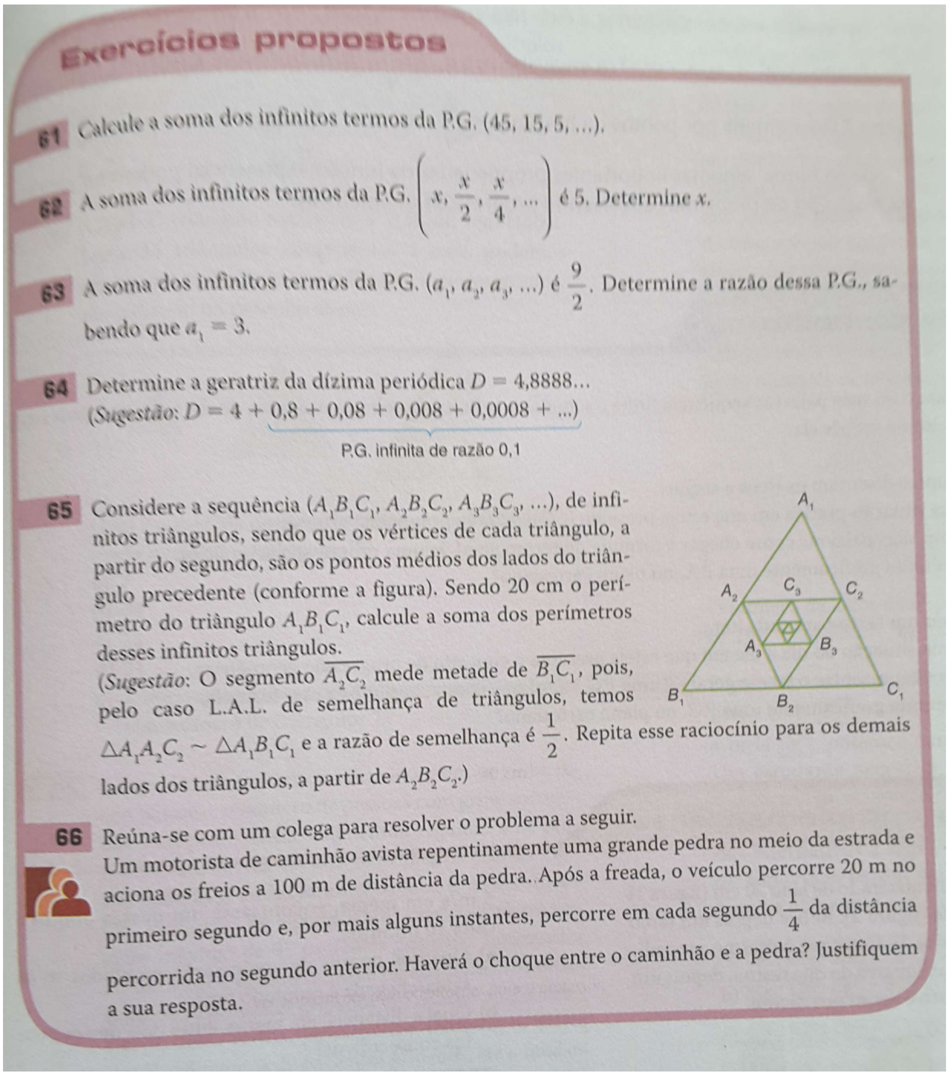
(1) Associar a uma fração sua representação decimal e vice-versa;

(2) Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional.

Conforme estabelecido no programa de ensino, depois desse tópico destacado, são trabalhados outros nove tópicos diversos para então iniciar a abordagem com o tópico Progressão Geométrica.

A Figura 6 exemplifica uma lista de exercícios com apenas uma questão envolvendo o cálculo da dízima periódica. Essa é uma ocorrência comum, constatada através da análise dos livros didáticos destacados.

Figura6 – Lista de exercícios progressão geométrica infinita



Exercícios propostos

61 Calcule a soma dos infinitos termos da P.G. (45, 15, 5, ...).

62 A soma dos infinitos termos da P.G. $\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \ldots\right)$ é 5. Determine x.

63 A soma dos infinitos termos da P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ é $\frac{9}{2}$. Determine a razão dessa P.G., sabendo que $a_1 = 3$.

64 Determine a geratriz da dízima periódica $D = 4{,}8888\ldots$
(*Sugestão*: $D = 4 + \underbrace{0{,}8 + 0{,}08 + 0{,}008 + 0{,}0008 + \ldots}_{\text{P.G. infinita de razão 0,1}}$)

65 Considere a sequência $(A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots)$, de infinitos triângulos, sendo que os vértices de cada triângulo, a partir do segundo, são os pontos médios dos lados do triângulo precedente (conforme a figura). Sendo 20 cm o perímetro do triângulo $A_1B_1C_1$, calcule a soma dos perímetros desses infinitos triângulos.
(*Sugestão*: O segmento $\overline{A_2C_2}$ mede metade de $\overline{B_1C_1}$, pois, pelo caso L.A.L. de semelhança de triângulos, temos $\triangle A_1A_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$ e a razão de semelhança é $\frac{1}{2}$. Repita esse raciocínio para os demais lados dos triângulos, a partir de $A_2B_2C_2$.)

66 Reúna-se com um colega para resolver o problema a seguir.
Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da estrada e aciona os freios a 100 m de distância da pedra. Após a freada, o veículo percorre 20 m no primeiro segundo e, por mais alguns instantes, percorre em cada segundo $\frac{1}{4}$ da distância percorrida no segundo anterior. Haverá o choque entre o caminhão e a pedra? Justifiquem a sua resposta.

Fonte: (PAIVA, 2009, p.237)

O exercício $N°64$ desta lista é o único que aborda o cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica. Note que, o autor relaciona a dízima periódica com uma progressão geométrica infinita convergente, mas não faz nenhuma referência à fórmula de calcular a fração geratriz ensinada desde o 8° do Ensino Fundamental. Não aparece referência em nenhum dos livros dos autores analisados, nenhuma justificativa da validade da fórmula, regra, ou método ensinado desde o 8° do Ensino Fundamental.

Da análise dos livros didáticos citados neste trabalho e programas de ensino do 6° ao 9° ano do Ensino Fundamental e Ensino Médio, constata-se que a relação entre dízimas periódicas e Progressões Geométricas só é estabelecida no 1° Ano do Ensino Médio, tendo sido possível comprovar que é pouco explorado a relação entre ambas.

3.5 Da forma como aparece nos livros é possível justificar ao aluno porque a "fórmula"para o cálculo da fração geratriz é válida?

Nos livros didáticos, a grande maioria dos autores exploram o cálculo da fração geratriz, equacionando a forma decimal e trabalhando com as operações de multiplicação e subtração entre equações equivalentes, para encontrar o $''x''$ que vem a ser a fração geratriz. O cálculo através da fórmula ou processo prático é pouco explorado, sendo abordado por apenas um ou dois autores, sem esclarecer por que ela sempre funciona.

Reforça-se que o processo prático explorado, o qual se referem alguns autores e conforme destacado na seção 4.1, sempre irá funcionar devido a estrutura do número decimal apresentado, porque a parte infinita da dízima poderá sempre ser escrita como uma série geométrica convergente

As formas de se encontrar a fração geratriz abordadas na seção 5.2, ao equacionar a dízima, utilizar dos processos de equações equivalentes e efetuar a subtração entre as equações, convenientemente subtrai-se a mesma parte infinita, restando apenas um número inteiro o que propicia encontrar facilmente a fração geratriz. O que deve ser justificado para aluno é que esse processo constitui uma estratégia para eliminar sempre a mesma parte infinita do número. Caso contrário, não seria possível encontrar a fração geratriz por esse caminho, uma vez que, se a parte infinita não puder ser eliminada não seria possível obter um número racional como resultado de sua representação decimal.

Ressalta-se que, a possibilidade de subtrair uma quantidade infinita de outra quantidade infinita, e, obter como resultado um número racional não é regra geral. Existem somas infinitas que não podem ser calculadas por serem divergentes, ou seja, não é possível obter a soma de suas infinitas parcelas, como, por exemplo, a série harmônica.

> **Série Harmônica:** Uma das mais importantes de todas as séries divergentes.
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ...$$
>
> que surge em conexão com os sons harmônicos produzidos pela vibração de uma corda musical. Não é imediatamente evidente que essa série diverge. Entretanto, a divergência se tornará aparente quando examinamos as somas parciais

> em detalhe. Como os termos na série são todos positivos, as somas parciais
>
> $$S_1 = 1, S_2 = 1 + \frac{1}{2}, S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...$$
>
> formam uma sequência estritamente crescente.
>
> $$S_1 < S_2 < S_3 < ... < S_n < ...$$
>
> Podemos provar a divergência demonstrando que não há nenhuma constante M que seja maior do que ou igual a cada soma parcial. Para isso, consideraremos algumas somas parciais selecionadas, a saber, $S_2, S_4, S_8, S_{32}, ...$. Note que os índices são potências sucessivas de 2, de modo que essas são as somas parciais da forma S_{2^n}. Essas somas parciais satisfazem as desigualdades
>
> $$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$
>
> $$S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) = S_2 + \frac{1}{2} > \frac{3}{2}$$
>
> $$S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) = S_4 + \frac{1}{2} > \frac{4}{2}$$
>
> $$S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$$
>
> $$> S_8 + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}) = S_8 + \frac{1}{2} > \frac{5}{2}$$
>
> $$\vdots$$
>
> $$S_{2^n} > \frac{n+1}{2}$$
>
> Se M for uma constante qualquer, podemos encontrar um inteiro positivo n que satisfaça $\frac{n+1}{2} > M$. No entanto, para esse n
>
> $$S_{2^n} > \frac{n+1}{2} > M$$
>
> de modo que nenhuma constante M é maior do que ou igual a cada soma parcial da série harmônica. Isso prova a divergência (ANTON; BIVENS; DAVIS, 2014, p.620).

Exemplificando, considere as somas parciais descritas a seguir: $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{10}{k} = 10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{3} + \frac{10}{4} + ... + \frac{10}{n}$ e $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$.

Observe que:

$$T_n - S_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{9}{k} = 9 + \frac{9}{2} + \frac{9}{3} + \frac{9}{4} + ... + \frac{9}{n},$$

ainda se trata da soma parcial de uma série harmônica. Portanto, passando ao limite, temos:

$$\lim_{n \to \infty} (T_n - S_n) = \infty,$$

ou seja, diverge. O que não ocorre no caso das dízimas periódicas, pois elas envolvem séries convergentes.

Na tentativa de melhoria do ensino aprendizagem dos números racionais, na próxima seção será apresentada uma proposta de reorganização da ordem de abordagem de alguns conteúdos do 1° Ano do Ensino Médio.

4 PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Atualmente no programa de ensino vigente nas escolas públicas do Estado de Minas Gerais, os tópicos Dízima Periódica e Progressão Geométrica aparecem conforme proposta curricular disposta na Tabela 1.

Tabela1 – Proposta Curricular atual conforme CBC

Ano	Tópico	Habilidades
8° Ano do Ensino Fundamental	Conjunto dos Números Racionais	Operar com números racionais em forma decimal e fracionária: adicionar, multiplicar, subtrair, dividir e calcular potências e calcular a raiz quadrada de quadrados perfeitos.
		Associar uma fração à sua representação decimal e vice-versa.
	Conjunto dos Números Reais	Identificar números racionais com as dízimas periódicas.
1° Ano do Ensino Médio	Números Racionais e dízimas periódicas (...)	Associar a uma fração sua representação decimal e vice-versa.
		Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional.
	Progressão Geométrica	Identificar o termo geral de uma progressão geométrica.
		Resolver problemas que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Fonte: (MINAS GERAIS, 2005, pp.44–47)

Na proposta curricular destacada acima pode ser que os estudantes não estabeleçam ligação entre as dízimas periódicas e as progressões geométricas, pois o estudo dos assuntos é feito em momentos distintos. Nos livros didáticos analisados, (DANTE, 2005; SOUZA, 2010; SMOLE; DINIZ, 2013; PAIVA, 2009), foi possível constatar que apenas quando é abordado o Tópico Progressão Geométrica, é que se apresenta um ou dois exemplos que estabelecem ligação entre eles.

A proposta se limita a apontar os tópicos e os objetivos de ensino, sem fornecer indicativos em relação a que caminhos metodológicos poderiam ser seguidos para aliar os dois assuntos, ficando sob a responsabilidade do professor a escolha da abordagem que será feita.

Destaca-se a seguir a disposição curricular e cronológica dos tópicos iniciais abordados, extraídos do CBC do 1° Ano do Ensino Médio:

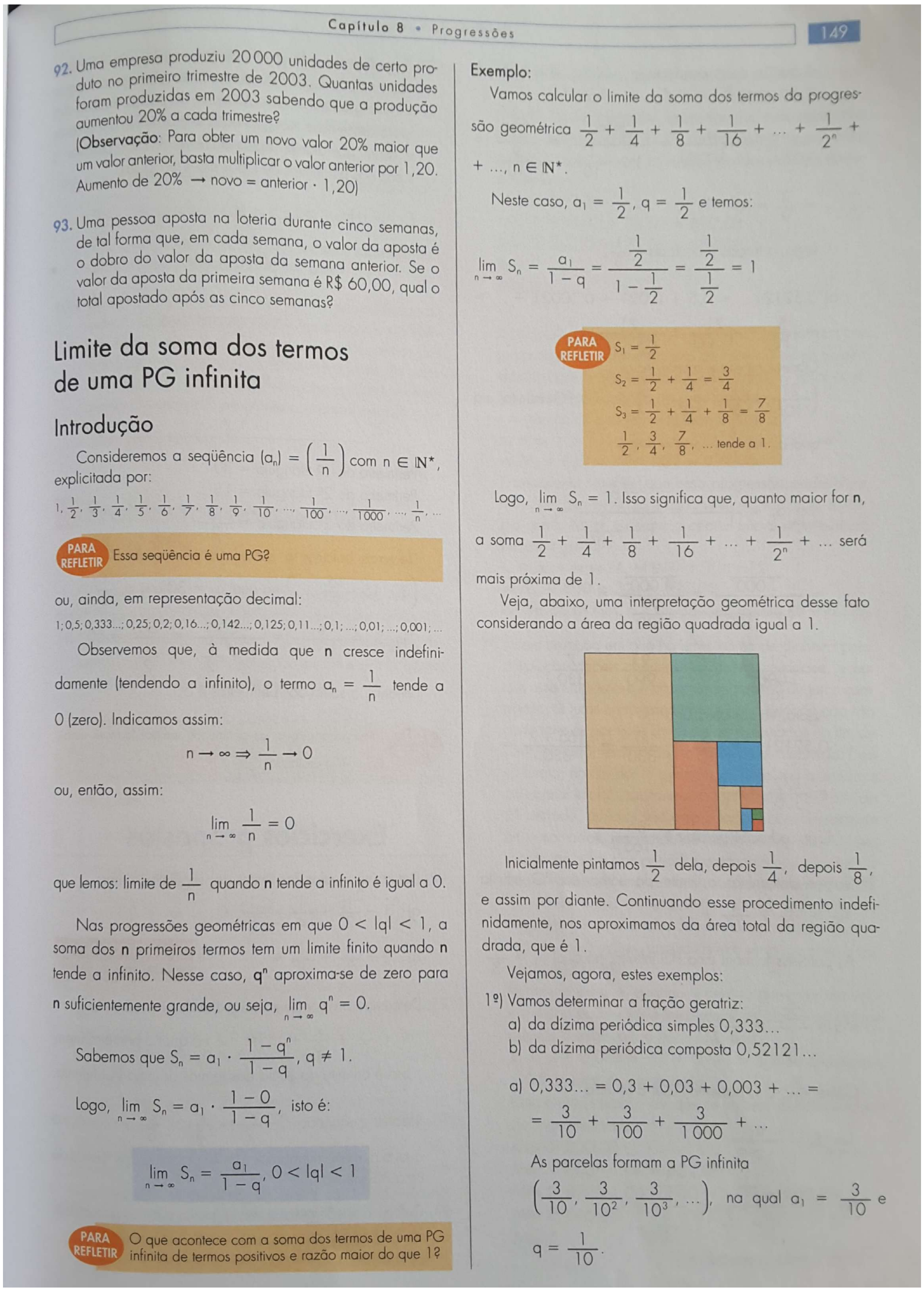
> 1. Números Racinais e dízimas periódicas
> 2. Conjunto dos números reais
> 3. Potências de dez e ordem de grandeza
> 4. Princípio multiplicativo
> 5. Probabilidade
> 6. Organização de um conjunto de dados em tabelas
> 7. Médias aritmética e geométrica
> 8. Função do primeiro grau
> 9. Progressão aritmética
> 10. Função do segundo grau
> 11. Progressão Geométrica
>
> (MINAS GERAIS, 2005, pp.44–47)

A sequência curricular acima demonstra que só após terem sido trabalhados em sala de aula 9 (nove) tópicos após Números Racionais e dízimas periódicas é então abordado o tópico Progressão Geométrica. Então, da forma como está, o professor quando for abordar o tópico Progressão Geométrica infinita deve retomar o tópico Dízima Periódica, recapitular como foi ensinado e explanar como pode ser calculado através da formula da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, a não ser que os estudantes já dominem os conceitos necessários.

Na proposta de intervenção, defende-se a ideia de que o cálculo da fração geratriz pode ser abordada, didaticamente, de forma aliada com o tópico limite da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão pertencente ao intervalo $(0, 1)$, apresentando ao aluno uma forma diferente das já exploradas pelos livros didáticos no Ensino Fundamental, podendo ser vista como uma aplicação útil de progressão geométrica. Como a fórmula ensinada desde o 8° Ano do Ensino Fundamental é eficaz o que se propõe aqui é levar o aluno a fazer a associação dos conteúdos e ainda comprovar a validade dos cálculos efetuados desde esse ano de escolaridade e, ainda, demonstrar que uma progressão geométrica convergente resulta em um número racional.

Para tanto, o conceito de infinito pode ser explorado de forma mais lúdica e principalmente visual conforme explorado por DANTE (2005), na Figura 7 quando ele apresenta um sequência de área de quadrados que decrescem na razão $\frac{1}{2}$, que inclusive

Figura7 – Exploração visual da soma infinita



Capítulo 8 • Progressões 149

92. Uma empresa produziu 20 000 unidades de certo produto no primeiro trimestre de 2003. Quantas unidades foram produzidas em 2003 sabendo que a produção aumentou 20% a cada trimestre?

(**Observação**: Para obter um novo valor 20% maior que um valor anterior, basta multiplicar o valor anterior por 1,20. Aumento de 20% → novo = anterior · 1,20)

93. Uma pessoa aposta na loteria durante cinco semanas, de tal forma que, em cada semana, o valor da aposta é o dobro do valor da aposta da semana anterior. Se o valor da aposta da primeira semana é R$ 60,00, qual o total apostado após as cinco semanas?

Limite da soma dos termos de uma PG infinita

Introdução

Consideremos a seqüência $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ com $n \in \mathbb{N}^*$, explicitada por:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots, \frac{1}{100}, \ldots, \frac{1}{1000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

PARA REFLETIR Essa seqüência é uma PG?

ou, ainda, em representação decimal:

1; 0,5; 0,333...; 0,25; 0,2; 0,16...; 0,142...; 0,125; 0,11...; 0,1; ...; 0,01; ...; 0,001; ...

Observemos que, à medida que **n** cresce indefinidamente (tendendo a infinito), o termo $a_n = \frac{1}{n}$ tende a 0 (zero). Indicamos assim:

$$n \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

ou, então, assim:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

que lemos: limite de $\frac{1}{n}$ quando **n** tende a infinito é igual a 0.

Nas progressões geométricas em que $0 < |q| < 1$, a soma dos **n** primeiros termos tem um limite finito quando **n** tende a infinito. Nesse caso, $\mathbf{q}^n$ aproxima-se de zero para **n** suficientemente grande, ou seja, $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Sabemos que $S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$, $q \neq 1$.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \frac{1 - 0}{1 - q}$, isto é:

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}, 0 < |q| < 1}$$

PARA REFLETIR O que acontece com a soma dos termos de uma PG infinita de termos positivos e razão maior do que 1?

Exemplo:

Vamos calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Neste caso, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

PARA REFLETIR

$S_1 = \frac{1}{2}$

$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots$ tende a 1.

Logo, $\lim_{n \to \infty} S_n = 1$. Isso significa que, quanto maior for **n**, a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$ será mais próxima de 1.

Veja, abaixo, uma interpretação geométrica desse fato considerando a área da região quadrada igual a 1.

Inicialmente pintamos $\frac{1}{2}$ dela, depois $\frac{1}{4}$, depois $\frac{1}{8}$, e assim por diante. Continuando esse procedimento indefinidamente, nos aproximamos da área total da região quadrada, que é 1.

Vejamos, agora, estes exemplos:

1º) Vamos determinar a fração geratriz:

a) da dízima periódica simples 0,333...

b) da dízima periódica composta 0,52121...

a) $0{,}333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + \ldots =$

$= \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1\,000} + \ldots$

As parcelas formam a PG infinita $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots\right)$, na qual $a_1 = \frac{3}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$.

Fonte: (DANTE, 2005, p.149)

pode ser ilustrado com os estudantes, de forma lúdica através de dobraduras, quando estará sendo apresentado uma sequência infinita de figuras cujas áreas vão decrescendo a uma razão decimal.

> Com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas. O estudo da progressão geométrica infinita com razão positiva e menor que 1 oferece talvez a única oportunidade de o aluno estender o conceito de soma para um número infinito de parcelas, ampliando sua compreensão sobre a adi-

> ção e tendo a oportunidade de se defrontar com as ideias de convergência e de infinito. Essas ideias foram e são essenciais para o desenvolvimento da ciência, especialmente porque permitem explorar regularidades (BRASIL, 2002, p.118).

Para auxiliar os estudantes a compreender melhor a soma de parcelas infinitas, atualmente existem recursos computacionais avançados como o software GeoGebra[14] visualizar que é possível calcular o resultado dessa soma, mesmo sendo infinita.

> O ensino aprendizagem de Matemática em todos os níveis de escolaridade, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior tem sido foco de diversos estudos. Os alunos frequentemente apresentam dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos. Muitos deles não encontram sentido ou aplicação dos conteúdos abordados em sala de aula. Essas dificuldades não se limitam apenas aos conceitos básicos, uma vez que os conteúdos dessa disciplina se encadeiam e é necessária a compreensão de uns para o aprendizado dos assuntos seguintes (MOLON; FIGUEIREDO, 2013, p.13).

O pensamento acima reforça a ideia de que aliar os conteúdos poderá ser uma oportunidade de apresentar a ligação entre eles, demonstrando qual aplicação e utilidade da fórmula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita, pode ser inclusive uma forma de favorecer o nível de compreensão dos estudantes, reforçando o que é preconizado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio destacado a seguir.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p.108).

Ressalta-se que para utilizar a formula da soma dos termos de uma Progressão Geométrica infinita os conhecimentos necessários são: somar e ou subtrair e dividir frações, e no 1° Ano do Ensino Médio presume-se que o aluno já domine os conhecimentos necessários, visto que são vivenciados desde o 4° Ano do Ensino Fundamental, conforme é reforçado a seguir.

> A partir do 4° Ano, o estudo constante dos números racionais se torna necessário, pois eles começam a aparecer em diversas situações científicas e do dia-a-dia

---

[14] GeoGebra é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Ele foi desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas, sua distribuição é livre, nos termos da GNU General Public License, e é escrito em linguagem Java, o que lhe permite estar disponível em várias plataformas.

> que precisam ser compreendidas. Utiliza-se esse sistema numérico quando se fazem medições e sobra uma parte que não corresponde a uma unidade de medida inteira, ao comprar meio quilo de algum mantimento, ao dividir a pizza em pedaços iguais etc. São momentos em que os naturais não dão conta de representar a realidade. Na história da numeração, as frações surgiram justamente para resolver tais impasses. Conhecer o funcionamento e as regras dessa classe numérica é fundamental para que o aluno continue a aprofundar os conhecimentos ao longo da vida escolar em álgebra e em fórmulas de Física, por exemplo. Por enquanto, porém, os alunos dos primeiros anos do Ensino Fundamental devem aprender a reconhecer as frações e as situações em que seu uso se faz necessário e aprender a compará-las e ordená-las. Além disso, precisa saber realizar somas e subtrações envolvendo as que têm o mesmo denominador ou recorrer às equivalentes quando os denominadores forem diferentes. Os alunos também devem saber reconhecer as que representam quantidades, principalmente as mais usadas, como $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$, etc., e a realizar cálculos com elas. A questão é como ensinar esse conteúdo aos estudantes, fazendo com que eles compreendam as características e particularidades desse sistema numérico diferente (PAULINA, 2008, p.10).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para a disciplina matemática no Ensino fundamental, dentre muitos objetivos é contemplado o desenvolvimento destas capacidades.

> Construir o significado do número racional e de suas representações (fracionária e decimal), a partir de seus diferentes usos no contexto social (BRASIL, 1997, p.55–59).

Nesta etapa de escolaridade são trabalhados conceitos que colaboram para o desenvolvimento do estudante no campo dos números racionais conforme destacado abaixo.

> - Reconhecimento de que os números racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária;
> - Análise, interpretação, formulação e resolução de situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações envolvendo números naturais e racionais;
> - Exploração dos diferentes significados das frações em situações-problema: parte e todo, quociente e razão;
> - Observação de que os números naturais podem ser expressos na forma fracionária;
> - Relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo número racional (BRASIL, 1997, p.55–59).

Retoma-se nesse ponto o pensamento de Valera (2003) destacado na seção 2, quando a autora afirma que os números racionais são conteúdos que os alunos tanto do ensino fundamental quanto do ensino médio sentem dificuldades para aprender, e que essa dificuldade está relacionada a pouca relação entre o uso social dos números racionais e a forma como eles são ensinados na escola.

Colaborando com esse pensamento, ressalta-se que no dia-a-dia os estudantes tem pouco, ou quase nenhum contato com números na forma fracionária, por ser privilegiado o tratamento dos números na forma decimal. É mais habitual e comum para todas as pessoas, cotidianamente utilizarem os números na forma decimal, o que se justifica visto que por exemplo, as calculadoras simples largamente utilizadas em todo mundo não permite incluir números na forma de frações, a inclusão dos dígitos só permite a leitura decimal por este dispositivo. Assim o uso social dos números racionais é encontrado em sua maior parte na forma decimal pois, no dia-a-dia não é habitual lidar com os números na forma fracionária e sim decimal. Enquanto na escola, os números racionais são tratados com maior ênfase na forma fracionária.

Então, a partir dos estudos realizados, foi elaborado pelo autor deste trabalho a Tabela 2, que apresenta uma sugestão de proposta curricular para o ensino de Matemática a ser seguida pelo professor do 1° Ano do Ensino Médio.

Tabela2 – Sugestão de Proposta Curricular

Ano	**Tópico**	**Habilidades**
1° Ano do Ensino Médio	Progressão Geométrica	Identificar o termo geral de uma progressão geométrica.
		Resolver problemas que envolvam a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.
		Identificar o limite da soma dos termos de um PG
	Números Racionais, dízimas periódicas e Progressão Geométrica	Aplicar o limite da soma dos termos de um PG no cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica.
		Associar uma fração à sua representação decimal e vice-versa.
		Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional.

Fonte: do Autor

A perspectiva de resultados positivos, com a implementação dessa proposta de alteração na ordem da abordagem dos conteúdos, Dízimas Periódicas e Progressão Geométrica Infinita, no 1° Ano do Ensino Médio é considerável, visto que, será possível aliar a representação decimal infinita de uma dízima periódica à uma progressão geométrica infinita, demonstrando ao aluno a validade do processo prático ensinado no 8° ano do Ensino Fundamental, bem como, validar também a fórmula para o cálculo da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, visto que ao ensinar os conteúdos na educação básica, frequentemente, o professor é abordado com a pergunta: *"Pra que serve isso?"*, dessa forma o professor poderá justificar que um conteúdo é aplicação do outro.

Valera (2003) reforça que a multiplicidade de significados dos números racionais, e contexto em que eles se manifestam, constituem informação essencial ao professor sobre determinado conceito matemático que o instrui para pensar, e realizar um diversificado processo pedagógico em sala de aula relativamente a esse conceito.

Enfatiza-se que na sequência de conteúdo e habilidades proposta acima, pretende-se estabelecer uma abordagem didática adequada ao nível de desempenho e maturidade dos estudantes, sinalizando a possibilidade de ligação entre dízimas periódicas e Progressões Geométricas. Dessa forma, abre-se perspectivas para subsidiar o professor a um caminho metodológico que, permita aplicação em qualquer rede de ensino, no 1° Ano do Ensino Médio, tendo em vista que os conceitos estudados a partir do 4° Ano do Ensino Fundamental contemplam o desenvolvimento das capacidades operacionais com frações e números decimais necessárias. Também pode favorecer a compreensão intuitiva do conceito de soma infinita necessários à aplicação da fórmula da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica de razão compreendida entre 0 e 1.

4.1 Exemplificando com o GeoGebra

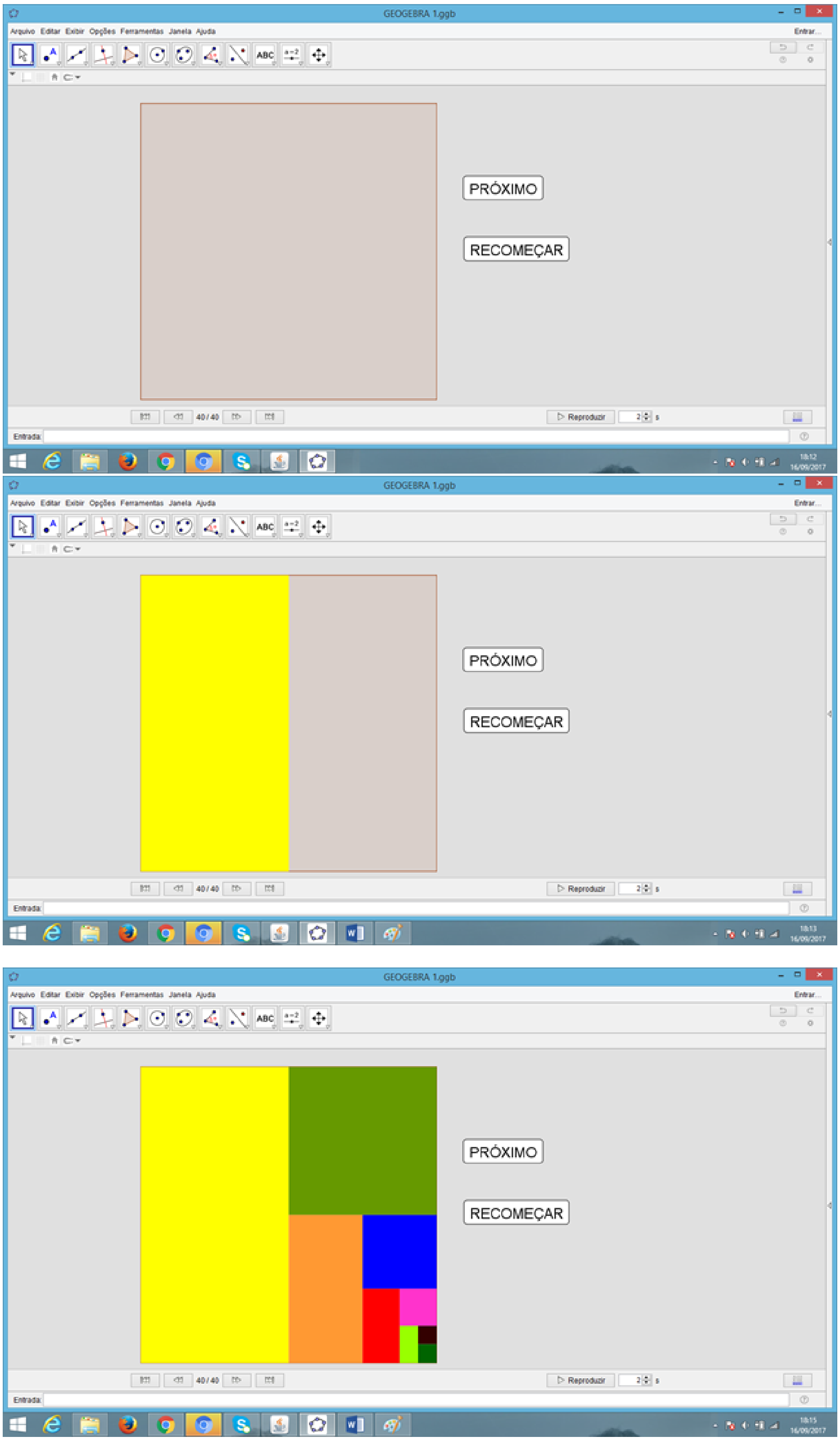
O uso do Geogebra como ferramenta de apoio ao trabalho em sala de aula, contribui para que a aula fique mais atrativa, interessante e interativa, podendo proporcionar maior entendimento ao conteúdo ensinado e favorecer a compreensão dos estudantes.

Para exemplificar o uso do GeoGebra, destacado nesta seção, apresenta-se o exemplo ilustrado por (DANTE, 2005) na figura 7, quando é apresentado uma construção de áreas de quadrados que vão se reduzindo pela metade, inciando com a pintura de metade da área do quadrado inicial e em seguida, colorindo sempre a metade da área que restou, demonstrando que isso pode ser feito indefinidamente, ilustrando a ideia de infinito e ao mesmo tempo mostrando que as áreas no final preenchem o quadrado maior, ou seja, podem ser somadas.

A figura 8 a seguir, exemplifica os passos acima. As duas imagens iniciais ilustram o inicio e a última o resultado final.

Na sequência estão elencados os passos resumidos que devem ser seguidos no GeoGebra para a construção desejada:

Figura8 – GeoGebra



Fonte: do Autor

1) Constrói-se um polígono maior, quadrado, inicial;
2) Através dos pontos médios desse quadrado ele é subdividido em duas partes iguais, quantas vezes isso for possível na tela do GeoGebra;
3) Colorir as metades desejadas, com cores diferentes;
4) Criar um controle deslizante com um número inicial $n = 0$;
5) Acessar as propriedades de cada figura e programar cada uma na ordem em que se deseja que eles apareçam, na aba "avançado"no item condições para exibir ponto;
6) Na ordem desejada para que apareçam as partes coloridas, as condições informadas para cada exibição devem ser $n > 0$, $n > 1$, $n > 2$ e assim sucessivamente;
7) Crie um ícone de botão escrito próximo, para cada vez que clicar nele, n seja igual à $n + 1$;
8) Crie outro botão, escrito "recomeçar"que irá iniciar o processo apagando todos os quadrados programados, de forma que ao clicar nele tenha-se $n = 0$

4.2 Sugestão de atividades

Essa seção de sugestão de atividades vem para ilustrar como podem ser exploradas alguns tipos de questões e como podem ser aliados os tópicos principais envolvendo dízima periódica e progressão geométrica infinita, a fim de que, o contexto de apresentação, possa ser de melhor compreensão para os estudantes da educação básica em sua trajetória escolar. A busca por contexto é significativa e preponderante no ensino aprendizagem, quando se trata de contextualizar tópicos de matemática, maior destaque merece ser dado a essa iniciativa.

A busca por novas metodologias de ensino da Matemática tem se tornado mais intensa na atualidade. Sobretudo, no que diz respeito ao ensino aprendizagem, especialmente na disciplina matemática, tem evoluído nos últimos anos, no que diz respeito à buscar estratégias variadas de ensino que sejam eficientes no processo ensino-aprendizagem.

> A educação, processo de desenvolvimento essencial ao ser humano, não é estática porque acompanha a evolução e, portanto, é dinâmica e adaptável a cada novo tempo que chega. Não obstante, são criados modelos de se educar que permanecem por determinado período, ás vezes longo, nas famílias, escolas e organizações. Há uma constante preocupação quanto a validade de cada modelo, a sua obsolescência ou tempo de vida útil, levando muitos estudiosos a compreender o momento em que vive a sua sociedade e as novas demandas educacionais (NETO, 2004, p.5).

Para alcançar a perspectiva proposta, a forma como o conteúdo será tratado é decisiva, a sequencia da organização das atividades em sala de aula, a escolha de materiais didáticos apropriados e a metodologia de ensino, são preponderantes para permitir um desenvolvimento satisfatório dos conteúdos e, ainda que a construção de significados para os números racionais seja uma competência de possível apropriação para cada estudante. As atividades propostas nesta seção tem o objetivo de ilustrar didaticamente algumas abordagens, que podem ser dadas às dizimas periódicas e progressões geométricas infinitas.

É válido destacar que o processo prático para o cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica, ou a resolução através de equações, não precisam e não devem ser abolidos. A sugestão proposta é aliar o estudo de Dízimas Periódicas à Progressões Geométricas infinitas de razão compreendida entre 0 e 1, no 1° Ano do Ensino Médio, visto que, os processos citados já foram explanados, e, espera-se ter sido desenvolvidas as habilidades previstas através dos mesmos no 8° Ano do Ensino Fundamental, inclusive por que o tópico Progressão Geométrica é objeto de estudo apenas no Ensino Médio.

4.2.1 Atividades Resolvidas

Serão apresentadas em algumas atividades duas formas de resolução:

- A Resolução 1 será desenvolvida conforme apresentado pelos autores dos livros didáticos analisados, (ANDRINI; VASCONCELOS, 2012), (SILVEIRA, 2015), (DANTE, 2005), (BIANCHINI, 2011), (GAY, 2014) , sem estabelecer ligação entre as dízimas periódicas e as progressões geométricas infinitas de razão compreendida entre 0 e 1.
- A Resolução 2 será desenvolvida estabelecendo a ligação entre as dízimas periódicas e as progressões geométricas infinitas de razão compreendida entre 0 e 1

As atividades as quais não foram apresentadas duas formas de resolução é por serem aplicação direta da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica infinita de razão compreendida entre 0 e 1, sendo neste caso, apresentadas com o objetivo de contextualizar o tema.

Nesse ensejo e, na expectativa de colaborar para a apropriação das capacidades necessárias, e favorecer o domínio das habilidades previstas no programa de ensino, destaca-se nas atividades a seguir quais habilidades espera-se que sejam demonstradas no desenvolvimento das questões pelos estudantes.

Habilidades - Atividades 1, 2 e 3:

- Associar uma fração à sua representação decimal e vice-versa;
- Reconhecer diferentes representações de um número racional e saber identifica-los na forma fracionária ou decimal;

- Reconhecer uma dízima periódica como uma representação de um número racional;

- Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais com diferentes representações desses números, envolvendo as operações básicas do conjunto dos números racionais;

- Aplicar o limite da soma dos termos de uma progressão geométrica no cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica

Atividade 01

Transforme em fração irredutível o número racional $3,4\overline{5}$

Resolução 1:

Nesta atividade pode-se explorar o cálculo da fração geratriz de dízima periódica simples e composta seguindo a proposta de equacionamento:

Nesta dízima o período é formado por um único algarismo, 5, e é antecedido por um ante-período também formado por um algarismo, 4. Denominando a dízima por $x = 3,4555...$ e multiplicando ambos os membros da igualdade por 100 para obter uma dízima periódica simples:

$$100x = 345,555... \tag{15}$$

A seguir multiplica-se ambos os membros da equação inicial por 10, obtendo-se

$$10x = 34,555... \tag{16}$$

Então, subtraindo (16) de (15) resulta:

$$\begin{aligned} 90x &= 311 \\ x &= \frac{311}{90} \end{aligned}$$

Logo, $\frac{311}{90}$ é a fração geratriz correspondente ao número racional $3,4\overline{5}$.

Resolução 2:

Reconhecendo a dízima como a soma $3 + 0,4 + 0,05 + 0,005 + ...$ note que, a partir da terceira parcela, a soma é uma série geométrica de razão $0,1$. Calculando a soma dos infinitos termos da série $S = 0,05 + 0,005 + ...$ tem-se

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0,05}{1-0,1} = \frac{0,05}{0,9} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{5}{100}.\frac{10}{9} = \frac{1}{18}$$

Consequentemente, $3 + 0,4 + S = 3 + \frac{4}{10} + \frac{1}{18} = \frac{270+36+5}{90} = \frac{311}{90}$

Atividade 02

Qual fração é equivalente ao resultado do quociente $\frac{2,1666...}{0,333...}$

Resolução 1:

Nesta atividade pode-se explorar o cálculo da fração geratriz de dízima periódica simples e composta.

A dízima $0,333...$ possui como fração geratriz $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ aplicando a regra que é simplesmente o período sobre tantos noves quantos algarismos formam o período.

A dízima $2,1666...$ pode ser obtida através do processo prático que permite calcular a fração geratriz indicando no numerador a subtração entre o número formado até o período da dízima, subtraído do número formado até o ante-período da dízima. O denominador será o número formado por tantos noves quantos algarismos formam o período e tantos zeros quantos são a parte decimal que não se repete. Assim,

$$\frac{216-21}{90} = \frac{195}{90} = \frac{13}{6}$$

Segue que $\frac{2,1666...}{0,333...} = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{13}{6} \cdot 3 = \frac{13}{2}$

Resolução 2:

Com auxilio da aplicação da soma infinita o estudante deve reconhecer que o quociente proposto é da forma:

$$\frac{S_1 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ...}{S_2 = \frac{21}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + ...}$$

Então, a soma $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + ...$ será indicada como $S_1 = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$ por se tratar de uma soma inifinita de razão $\frac{1}{10}$ e 1° termo $\frac{3}{10}$. A soma $\frac{21}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + ...$, a partir do 3° termo é uma PG de razão $\frac{1}{10}$ com 1° termo igual a $\frac{6}{100}$ cuja soma será indicada por

$$S_2 = \frac{21}{10} + \frac{\frac{6}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{21}{10} + \frac{1}{15} = \frac{13}{6}$$

Logo $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{13}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{13}{2}$

Atividade 03

Encontre o resultado de $\sqrt{2,\overline{7}}$

Resolução 1:

Inicialmente, nesta atividade pode-se explorar o cálculo da fração geratriz de dízima periódica simples seguindo também a proposta de equacionamento, porém de forma mais artificiosa:

Nesta dízima o período é formado por um único algarismo, 7, Denominando a dízima por $x = 2,777...$ e multiplicando ambos os membros da igualdade por 10 para obter uma dízima periódica simples

$$10x = 27,777... \tag{17}$$

A seguir pode-se desenvolver os raciocínios abaixo:

$$\begin{aligned} 10x &= 25 + 2,777... \\ 10x &= 25 + x \\ 10x - x &= 25 + x - x \\ 9x &= 25 \\ x &= \frac{25}{9} \end{aligned}$$

Logo, $\sqrt{2,\overline{7}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ é o resultado procurado.

Resolução 2:

Reconhecendo a dízima como a soma $2 + 0,7 + 0,07 + 0,007 + ...$ percebe-se que a partir da segunda parcela a soma é uma série geométrica de razão $0,1$.

Então, calculando a soma dos infinitos termos da série $S = 0,7 + 0,07 + ...$ tem-se

$$S = \frac{0,7}{1-0,1} = \frac{0,7}{0,9} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{10}.\frac{10}{9} = \frac{7}{9}$$

Então a soma

$$2+S = 2+\frac{7}{9} = \frac{18+7}{9} = \frac{25}{9}$$

E $\sqrt{2,\overline{7}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$ é o resultado procurado.

Habilidades - Atividades 4, 5 e 6:

- Interpretar e reconhecer a sequência como uma série geométrica convergente;
- Compreender que pode ser calculado o limite da soma dos termos de uma PG infinita;
- Calcular corretamente o limite da soma dos termos de uma PG infinita;
- Efetuar os cálculos necessários ao aplicar o limite da soma dos termos de uma PG infinita, envolvendo as operações básicas do conjunto dos números racionais;

Atividade 04

A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Vamos calcular a soma dos perímetros de todos esses triângulos, cuja ilustração dos 3 primeiros pode ser visualizada na Figura 9.

Resolução:

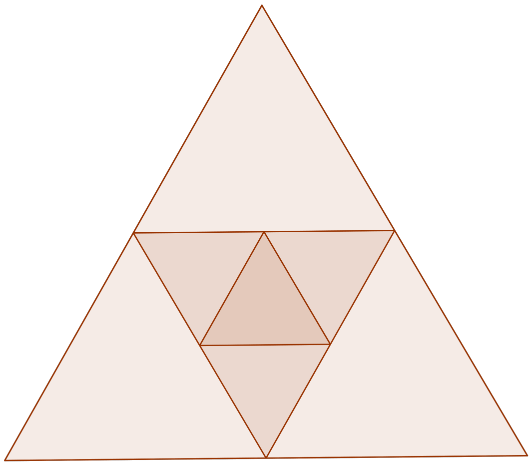
Uma forma de se iniciar a resolução dessa questão é destacando a sequência dos perímetros dos triângulos que vão se formando:

Perímetro do 1° Triângulo: 30
Perímetro do 2° Triângulo: 15
Perímetro do 3° Triângulo: $\frac{15}{2}$

E assim sucessivamente... Fornece a sequência: $\{30, 15, \frac{15}{2}, ...\}$. Aqui destaca-se que se trata de uma série geométrica, ou seja, uma soma infinita de razão $q = \frac{1}{2}$ e cujo 1° termo pode ser denotado por $a_1 = 30$, assim aplicamos a fórmula para o cálculo da soma infinita:

$$S_n = \frac{a_1}{1-q}.$$

Figura9 – Triângulos equiláteros



Fonte: do Autor

Então

$$S_n = \frac{30}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60.$$

Portanto, a soma dos perímetros é 60.

Atividade 05

Uma bola é atirada ao chão de uma altura de $100m$ ao atingir o solo ela sobre até uma altura de $50m$, caí e atinge o solo pela segunda vez, subindo até um altura de $25m$ e assim por diante até cessar o movimento após perder energia. Qual a quantidade de metros percorrida pela bola?

Resolução:

Verifica-se nesse problema que o estudante deve ter atenção quanto ao seguinte: A bola é atirada de uma altura de $100m$ quando cai e atinge nova altura de 50, torna cair e atinge a altura de $25m$ tornando a cair e assim por diante. Perceba que após ser atirada e percorrer os primeiros $100m$ a partir do segundo movimento de subir e descer a bola percorre uma trajetória dupla: $50m$ ao subir, $50m$ ao descer, $25m$ ao subir, $25m$ ao descer e assim sucessivamente até parar.

De tal forma que é descrita a seguinte sequência de trajetórias a qual indicaremos por $S = \{100 + (50 + 50) + (25 + 25) + ...\}$ que pode ser decomposta em duas somas $S_1 = \{100 + 50 + 25 + ...\}$ e $S_2 = \{50 + 25 + 12,5 + ...\}$. Tratando-se de duas somas infinitas de razão $\frac{1}{2}$

Dessa forma a Soma $S = S_1 + S_2$ ou seja $S = \dfrac{100}{1-\dfrac{1}{2}} + \dfrac{50}{1-\dfrac{1}{2}} = 200 + 100 = 300m$

Logo a bola percorrerá um total de $300m$.

Atividade 06

(Adaptação do Paradoxo de Zenão) Uma corrida será disputada entre Aquiles, grande atleta grego, e uma tartaruga. Como Aquiles é dez vezes mais rápido do que a tartaruga, esta partirá 10m à frente de Aquiles.Quando Aquiles chegou ao ponto em que a tartaruga estava inicialmente, depois de percorrer 10m, a tartaruga, dez vezes mais lenta, estava 1m à frente e assim sucessivamente. Repetindo esse raciocínio para os intervalos de tempo seguintes, parece que Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois ela sempre terá percorrido $\dfrac{1}{10}$ do que Aquiles percorrer.

a) Escreva a sequência das distancias percorridas por Aquiles enquanto tenta alcançar a tartaruga.

b) Essa sequência é uma PG? Em caso afirmativo, qual a razão?

c) Calcule a soma das infinitas distancias percorridas por Aquiles até chegar ao ponto em que se encontrava a tartaruga cada vez.

d) Quantos metros percorrerá Aquiles até alcançar a tartaruga? Ou ele não a alcançara?

Resolução:

a) $S = 10, 1, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, ...$

b) Sim é uma PG. $q = \dfrac{1}{10}$

c) $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{10}{1-0,1} = \dfrac{10}{0,9} = \dfrac{100}{9}m$

d) Aquiles alcançara a tartaruga e nesse ponto terá percorrido $\dfrac{100}{9}m$.

4.2.2 Atividade propostas para sala de aula

A seguir algumas sugestões de questões para serem trabalhadas em sala de aula

1) Determine, em seu caderno, a fração irredutível que representa o valor das expressões. Adaptado de Bianchini (2011, p.43)

a) $0,2 + 0,\overline{3}$

b) $0,2\overline{7} + 2,\overline{3}$

c) $0,3\overline{8} + 1,4\overline{5}$

d) $1,\overline{8} \cdot \dfrac{2}{17}$

2) Escreva na forma de fração irredutível o produto final $0,\overline{2} + 0,2\overline{3}$. Adaptado de Smole e Diniz (2013, p.22)

3) Expresse na forma de fração irredutível o resultado de $\dfrac{\sqrt{1,\overline{7}}}{\sqrt{0,\overline{1}}}$. Adaptado de Bianchini (2011, p.60)

4) O número $0,\overline{9}$ é racional ou inteiro? Adaptado de Andrini e Vasconcelos (2012, p.18)

5) Simplifique a expressão $S = \dfrac{1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + ...}{3 + \frac{15}{8} + \frac{75}{64} + ...}$ sabendo que tanto o numerador quanto o denominador são séries geométricas convergentes. Adaptado de Souza (2010, p.250)

6) Qual a soma da série infinita $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + ...$? Adaptado de Longen (2004, p.139)

7) Em um quadrado cujo lado mede $2a$, inscreve-se um círculo; neste círculo, um quadrado; neste quadrado, um círculo; e assim sucessivamente. Faça uma ilustração inicial da situação para determinar. Adaptado de Smole e Diniz (2013, p.165)

a) A soma das áreas desses círculos.

b) a soma das áreas desses quadrados.

8) Considerando-se, inicialmente, um triângulo equilátero de lado l, forma-se uma sequência de triângulos equiláteros, cada um tendo os vértices nos pontos médios dos lados do tri engulo anterior. Obtenha o limite da soma das áreas da infinidade de triângulos equiláteros dessa sequência sabendo que a área do triângulo equilátero é dada por $S = \dfrac{l^2.\sqrt{3}}{4}$. Adaptado de Dante (2005, p.152)

9) Um motorista de caminhão avista repentinamente uma grande pedra no meio da estrada e aciona os freios a $100m$ de distancia da pedra. Após a freada, o veículo percorre $20m$ no primeiro segundo e, por mais alguns instantes, percorre em cada segundo $\frac{1}{4}$ da distancia percorrida no segundo anterior. Haverá o choque entre o caminhão e a pedra? Justifique sua resposta. Adaptado de Paiva (2009, p.237)

10) Dispomos de uma fita de comprimento L. Resolvemos dividir a fita em 3 partes iguais e retiramos a parte central. Procedemos de forma análoga com as duas partes restantes: dividimos em 3 partes iguais e, a seguir, retiramos as partes centrais. Imagine que esse mesmo procedimento sendo repetido sucessivamente com as partes restantes. Determine: Adaptado de Longen (2004, p.136)

a) Qual a sequência formada pelos comprimentos retirados da fita?

b) O que acontecerá se continuarmos com esse procedimento indefinidamente?

c) Qual o comprimento total da fita que será retirado?

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebe-se ao final deste trabalho que as estratégias de ensino-aprendizagem em sala de aula não devem ser estáticas e tão pouco obsoletas. Toda disposição metodológica e didática a que se propõe um educador é bem vinda para o desenvolvimento do conteúdo a que se propõe ensinar. Explanar o conteúdo dos livros didáticos, esgota-los pela simples passagem ou cumprimento de um programa de ensino não cumpre a função de construção contínua e coletiva do processo-ensino aprendizagem em sala de aula, seja no Ensino Fundamental ou no Ensino Médio, destacando o ensino de matemática com vistas à formação cidadã.

É válido destacar que as atividades e a abordagem sugeridas neste trabalho tem a intenção de auxiliar o professor em sala de aula a colocar em prática as orientações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e Médio. No que se refere ao trabalho com os conteúdos relacionados aos números e as operações, merece ser enfatizado a importância de se privilegiar atividades que possibilitem ampliar o sentido numérico e a compreensão do significado das operações, pois permite que os estudantes possam estabelecer e reconhecer as relações entre os diferentes tipos de números e entre as diferentes operações.

Nessa concepção, o trabalho em sala não pode se restringir apenas ao repasse dos conteúdos dispostos nos programas de ensino determinados pelos sistemas nos quais se insere as unidades escolares. Assim, superando essa perspectiva e rompendo com esse modelo pode emergir um ensino mais dinâmico em que docente, aluno e objeto do conhecimento se interrelacionam.

A proposta curricular apresentada visa ampliar as oportunidades de ligação entre os tópicos elencados, favorecendo uma aplicação do conhecimento adquirido e, dimensionando as oportunidades de trabalho em sala de aula voltados para uma aprendizagem efetiva e concreta, o que vai ao encontro das orientações pedagógicas contidas no CBC - Currículo Básico Comum do Estado de Minas Gerais quando é reforçado que o ensino da Matemática deve evidenciar o caráter dinâmico, em constante evolução, do conhecimento matemático. O CBC destaca ainda, que mesmo conhecimentos matemáticos muito antigos possuem ainda hoje aplicações, propondo desmistificar a tendência existente que o considera como algo pronto e estático, defendendo que o que ocorre na atualidade é exatamente o contrário, a cada dia surgem novas questões matemáticas e até novas áreas de pesquisa.

A abordagem dos números racionais no desenvolvimento das aulas de matemática deve proporcionar, nesse contexto, mais significado aos estudantes da educação básica que, enveredados pelas formas de representação decimal ou fracionária possam desenvolver as habilidades necessárias ao seu desenvolvimento e apliquem de forma segura os conhecimentos adquiridos, propiciando assim a associação entre os tópicos e conteúdos que possuem aplicação direta.

Não podem existir muros que sejam capazes de cerrar o conhecimento à quatro paredes, deve-se buscar incessantemente, dia após dia, formas mais eficazes de se construir, alicerçadamente, conhecimento junto com o aluno e dessa forma tornar mais efetivo o processo ensino-aprendizagem.

Após toda análise realizada, com o objetivo de estabelecer relações entre as diferentes formas de resolver um problema através do uso correto das informações e conceitos apresentados na sequência didática sugerida, este trabalho se propõe a contribuir para o incentivo a criação de estratégias e oportunidades diversificadas, voltadas para a construção de argumentações nas resoluções de situações problemas envolvendo o tema central.

Ao final da discussão apresentada, é importante ressaltar que essa não é a única forma de abordagem para o tema central, espera-se ao final deste trabalho ter apresentado realmente uma contribuição para o ensino aprendizagem dos números racionais ao enfatizar a ligação entre dízimas periódicas e progressões geométricas, evidenciando ser primordial destacar que a atuação docente assume papel fundamental no desenvolvimento didático em sala de aula, por ser essa uma tarefa intrínseca à docência.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, A.; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. v. 3.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo**. Porto Alegre: Bookman, 2014.

AVILA, G. S. d. **Análise matemática para licenciatura**. São Paulo: Blucher, 2006.

BIANCHINI, E. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2011. v. 3.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 71-103 p.

BRASIL. **Decreto $N°$ 9.099, de 18 de Julho de 2017. Dispõe sobre o Programa Nacional do Livro e do Material Didático**. Brasília: Diário Oficial da União, 2017.

BRASIL, S. d. E. M. e. t. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.

CORRêA, F. J. S. d. **Introdução à Análise Real**. [s.n.], 2016. Disponível em: <http://www.mat.unb.br/furtado/homepage/verao/livro_de_analise-novo.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2017.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna LTDA, 2000.

DANTAS, J. P. **O Aprendizado dos números racionais**. Brasília, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática, volume único: livro do professor**. São Paulo: Ática, 2005.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris: Matemática**. São Paulo: Ática, 2015. v. 2. 320 p.

FIGUEIREDO, D. G. d. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

GAY, M. R. G. **Projeto Araribá: Matemática**. São Paulo: Moderna, 2014. III.

LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro: SBM: Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, Brasil, 2013. 297 p.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. Rio de Janeiro: Associação Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2014. v. 1. 432 p.

LONGEN, A. **Matemática**. Curitiba: Positivo, 2004.

MINAS GERAIS, S. d. E. d. E. **Proposta Curricular - CBC Matemática Ensinos Fundamental e Médio**. Belo Horizonte: SEE/MG, 2005.

MOLON, J.; FIGUEIREDO, E. S. **Calculo no ensino médio: uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra**. [s.n.], 2013. Disponível em: <http://periodicos.ufsm.br/cienciaenatura/article/viewFile/14523/pdf>. Acesso em: 17 jun. 2016.

NETO, A. C. d. S. **Os avanços e desafios da relação ensino-aprendizagem**. [s.n.], 2004. Disponível em: <http://www.psicologia.pt/artigos/ver_opiniao.php?codigo=AOP0031&area=d6>. Acesso em: 08 mai. 2016.

PAIVA, M. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 2009. v. 1. 256 p.

PAULINA, I. **Introdução aos números racionais**. [s.n.], 2008. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2722/introducao-aos-numeros-racionais>. Acesso em: 22 abr. 2017.

SILVEIRA, . **Matemática: compreensão e prática**. São Paulo: Moderna, 2015. v. 3.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática: ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2013. v. 1.

SOUZA, J. R. d. **Novo olhar matemática**. São Paulo: FTD, 2010. v. 1.

VALERA, A. R. **Uso social e escolar dos números racionais: representação fracionária e decimal**. 164 p. Dissertação (Mestrado) — Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Filosofia e Ciências de Marília, 2003.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

UFVJM