



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



A CONTEXTUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA PELO ESTUDO DO GLOBO TERRESTRE E SUAS REPRESENTAÇÕES COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Eduardo Luini da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientadores: Prof. Dr. Alexandro Bezerra Cavalcanti
Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros

Campina Grande - PB
Agosto/2017

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

S586c

Silva, Eduardo Luini da.

A contextualização da geometria esférica pelo estudo do globo terrestre e suas representações com o uso do software Geogebra / Eduardo Luini da Silva. – Campina Grande, 2017.

150 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Alexandro Bezerra Cavalcanti, Prof. Dr. Luiz Antônio da Silva Medeiros".

Referências.

1. Geometria Esférica. 2. Globo Terrestre. 3. Geogebra. I. Cavalcanti, Alexandro Bezerra. II. Luiz Medeiros, Antônio da Silva. III. Título.

CDU 514(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UFCG



**A CONTEXTUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA PELO
ESTUDO DO GLOBO TERRESTRE E SUAS REPRESENTAÇÕES
COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA**

por

Eduardo Luini da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

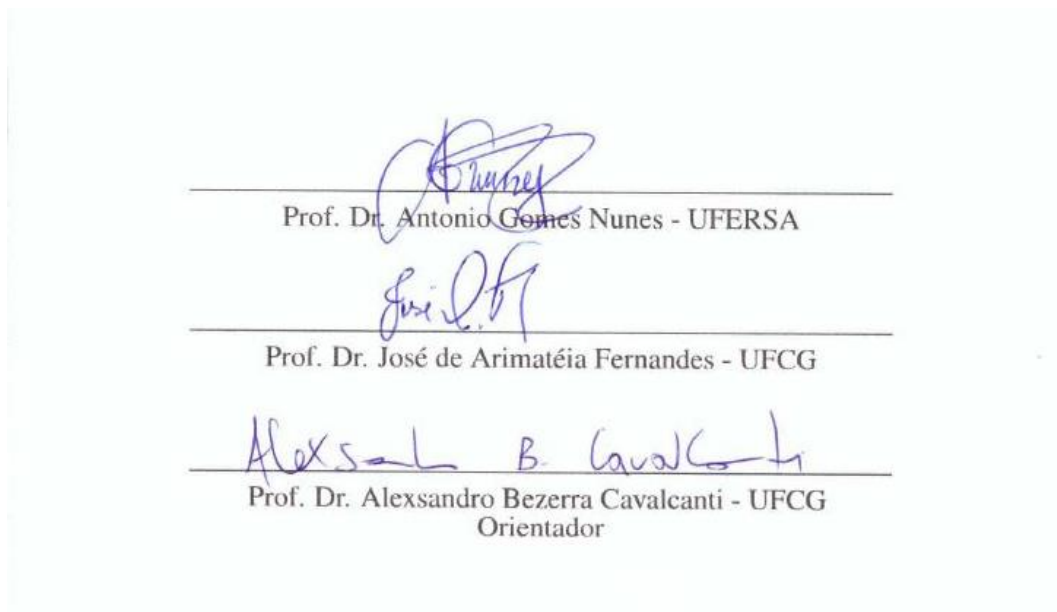
A CONTEXTUALIZAÇÃO DA GEOMETRIA ESFÉRICA PELO ESTUDO DO GLOBO TERRESTRE E SUAS REPRESENTAÇÕES COM O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA

por

Eduardo Luini da Silva

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UFCG, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



**Universidade Federal de Campina Grande
Centro de Ciências e Tecnologia
Unidade Acadêmica de Matemática
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**

Agosto/2017

Dedicatória

A minha esposa Carina, ao meu
anjo Vinícius e a minha filha
Heloísa.

Agradecimentos

A Deus, porque d'Ele, por Ele e para Ele são todas as coisas.
A minha esposa e filhos por serem minha inspiração e meu porto seguro.
Aos meus pais, por me ensinarem a gostar de livros e de números.
Aos meus orientadores e professores, pelos ensinamentos e dedicação.
Aos meus amigos da caserna, pelo apoio moral e incentivo.
E a todos os que, direta ou indiretamente, fizeram parte da minha formação.
Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo principal a contextualização da Geometria Esférica, apresentando-se uma proposta interdisciplinar entre as disciplinas de Matemática e de Geografia, referente aos estudos da Geometria Não Euclidiana e do Globo Terrestre, respectivamente, enfatizando suas construções geométricas e suas representações com o uso do Software Geogebra. O desenvolvimento deste trabalho transcorre desde a apresentação dos fatos históricos que nortearam o surgimento e o desenvolvimento da Geometria e do estudo da Geografia da Terra, passando pelo estudo teórico da Esfera e do Globo Terrestre, até o estudo direto das relações matemáticas relacionadas às dimensões, características e peculiaridades do Planeta Terra, culminado num estudo detalhado das construções destas representações matemáticas e numa modelagem de cálculo de distância entre dois pontos no Globo, por meio de software matemático de Geometria Dinâmica.

Palavras Chaves: Geometria Esférica. Globo Terrestre. Geogebra.

Abstract

The present work has as main objective the contextualization of Spherical Geometry, presenting an interdisciplinary proposal between the subjects of Mathematics and Geography, referring to the studies of Non-Euclidean Geometry and Earth Globe, respectively, emphasizing its geometric constructions and their representations with the use of Geogebra Software. The development of this work takes place from the presentation of the historical facts that guided the emergence and development of Geometry and the study of Earth Geography, passing through the theoretical study of the Sphere and the Earth Globe, to the direct study of the mathematical relations associated to the dimensions, characteristics and peculiarities of Planet Earth, culminating in a detailed study of the constructions of these mathematical representations and in a modeling of calculation of distance between two points in the Globe, by means of mathematical software of Dynamic Geometry.

Keywords: Spherical Geometry. Earth Globe. Geogebra.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Objetivos	4
1.1.1	Objetivos Gerais	4
1.1.2	Objetivos Específicos	4
1.2	Organização	4
2	Fatos Históricos	7
2.1	Um breve histórico da Geometria	7
2.1.1	A Geometria Euclidiana	7
2.1.2	A Geometria Não Euclidiana	11
2.2	Um breve histórico da Geografia da Terra	15
2.2.1	A esfericidade da Terra por Aristóteles	16
2.2.2	O cálculo da circunferência da Terra por Eratóstenes	16
2.2.3	O estudo da Terra por Newton: uma elipsóide achatada nos polos	19
3	A Esfera	21
3.1	Definições, áreas e volumes	21
3.2	A Trigonometria esférica	33
3.2.1	Relações Trigonométricas	37
3.3	Atividades	42
3.4	A construção da Esfera com o software Geogebra	54
4	O Globo Terrestre	63
4.1	A Terra esférica e seus principais elementos	63
4.1.1	Paralelos e Meridianos	64
4.2	Atividades	67
4.3	A construção do Globo Terrestre com o Geogebra	70
5	A Geometria do Globo Terrestre	83
5.1	A superfície esférica em Coordenadas Geográficas	83
5.2	A superfície esférica em Coordenadas Cartesianas	86

5.3	Distância entre dois pontos no espaço	90
5.4	Coordenadas Cartesianas x Coordenadas Geográficas	93
5.5	Atividades	95
5.6	A Construção das Coordenadas Geográficas com o Software Geogebra . . .	100
6	Modelagem com o Software Geogebra	109
6.1	A construção da modelagem do cálculo da distância entre duas localidades do Globo Terrestre	109
7	Conclusões	145
	Referências Bibliográficas	147
A	Os Movimentos da Terra	151
B	A inclinação da Terra e as Estações do Ano	153

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho visa apresentar uma contextualização da Geometria Esférica, através de uma proposta interdisciplinar entre a Matemática e a Geografia, referente aos estudos da Geometria Não Euclidiana e do Globo Terrestre, objetivando a aplicação de uma metodologia que seja capaz de mobilizar diferentes habilidades intelectuais dos alunos, em ambas disciplinas, afim de proporcionar aos discentes uma intervenção ativa e dinâmica da realidade e do ambiente no qual estão inseridos.

Por outro lado, enfatiza-se as construções geométricas e suas representações com o uso do Software Geogebra, buscando-se, a partir daí, uma reflexão crítica do processo de ensino-aprendizagem sobre alguns aspectos que fazem parte do cotidiano do aluno, de modo a permitir um ensino prazeroso e uma compreensão substancial do espaço em que ele vive, o que é proporcionado quando o ensino é feito por meio de atividades práticas e de desafios.

Portanto, espera-se, por meio de uma percepção clara e objetiva dos aspectos relacionados ao estudo da Geometria Esférica e do Globo Terrestre, atrelados à utilização consciente e efetiva de ambientes de Geometria Dinâmica (Software Geogebra), uma transformação profunda no estudo da Matemática e da Geografia, sendo que este software matemático possui ferramentas que permitem a construção e a manipulação dinâmica de objetos geométricos, sem que se percam as propriedades e as relações matemáticas. No entanto, destaca-se a impossibilidade de tomar os resultados do computador como critério de verdade matemática e enfatiza-se a necessidade de apresentação de argumentos matemáticos formais.

Diante disso, é sugerida a aplicação das atividades por ocasião do ensino de Geometria Espacial, particularmente a esfera, para alunos do 3º ano do Ensino Médio, bem como, para capacitação de professores, lembrando da interdisciplinaridade atrelada ao estudo do Globo Terrestre, pela disciplina de Geografia. Tal desafio não esgota o assunto, mas serve como um ponta-pé inicial para que novos saberes sejam adquiridos e que curiosidades sobre o mundo que nos cerca sejam despertadas.

Destarte, busca-se com este trabalho uma reflexão crítica do espaço que nos cerca e do mundo em que vivemos, de modo que alunos e professores adquiram uma percepção clara dos entes matemáticos e geográficos envolvidos no estudo do Globo Terrestre, para uma

perspectiva de ação transformadora da realidade. Por meio desta mobilização, através do exercício de reflexão e do despertar da curiosidade do aluno, é que podemos interagir com o espaço que nos cerca, adquirindo conhecimentos para podermos compreendê-lo e otimizá-lo.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

Este trabalho tem como objetivo geral contribuir com o processo de ensino aprendizagem, mediante a contextualização do estudo da geometria Esférica, apresentando uma proposta interdisciplinar entre as disciplinas de Matemática e de Geografia, referente aos estudos da Geometria Não-Euclidiana e do Globo Terrestre, enfatizando suas construções geométricas e suas representações com o uso do Software Geogebra.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Apresentar os fatos históricos que nortearam o surgimento e o desenvolvimento da Geometria e os fatos históricos do estudo da Geografia da Terra;
- Apresentar o estudo teórico da Esfera e do Globo Terrestre;
- Desenvolver as construções das representações matemáticas da esfera, do Globo Terrestre e da modelagem do cálculo da distância entre dois pontos no Globo Terrestre, por meio do Software Geogebra.

1.2 Organização

Estruturamos este trabalho nos seguintes capítulos:

- Capítulo 1: é o capítulo atual, que contém esta Introdução;
- Capítulo 2: realizamos um estudo bibliográfico, destacando os principais fatos históricos relacionados com o surgimento e o desenvolvimento da Geometria Euclidiana e da Geometria Não-Euclidiana e, também, os fatos históricos relacionados ao estudo da Geografia da Terra;
- Capítulo 3: são abordadas as definições, conceitos e demonstrações referentes à Esfera e, também, da Trigonometria Esférica, e são propostas atividades de fixação do tema e de construção da esfera com o Geogebra;
- Capítulo 4: neste capítulo, apresentamos os estudos referentes ao Globo Terrestre, no que diz respeito ao formato esférico da Terra e seus principais elementos, com

atividades propostas e de construção do Globo Terrestre e seus principais elementos com o Geogebra;

- Capítulo 5: resgatamos os conceitos matemáticos inerentes ao estudo da Geometria do Globo Terrestre, no que tange às Coordenadas Geográficas e Cartesianas, e apresentamos exercícios de fixação e atividade de construção das Coordenadas Geográficas com o Geogebra;
- Capítulo 6: desenvolvemos com o Software Geogebra um modelo de estudo do cálculo da distância entre dois pontos situados sobre a superfície da Terra, utilizando-se suas Coordenadas Geográficas;
- Capítulo 7: Conclusões;
- Referências Bibliográficas;
- Apêndice A: apresentamos alguns estudos importantes sobre os Movimentos da Terra: Rotação e Translação;
- Apêndice B: contém alguns dados teóricos sobre a Inclinação da Terra e as Estações do Ano.

Capítulo 2

Fatos Históricos

2.1 Um breve histórico da Geometria

A presente seção deste capítulo é um estudo bibliográfico, tendo como referências [1], [2], [5], [8] e [10], de modo a possibilitar-nos um posicionamento no contexto histórico que envolve o surgimento e o desenvolvimento da Geometria, pois, desde a antiguidade, os estudos relativos a esta área do conhecimento sempre estiveram diretamente ligados ao modo do homem relacionar-se com o ambiente em que vive e ao modo com que ele vê o mundo, seja causando modificações no mesmo, seja mensurando lugares e espaços.

Atualmente, frente aos avanços da matemática ao longo dos séculos, os estudos referentes à Geometria apresentados na Educação Básica estão intrinsecamente relacionados com a Geometria Euclidiana, sendo que determinados saberes desta geometria atravessaram milênios consagrando-se como verdades absolutas intransponíveis, até o surgimento de novas geometrias, tão consistentes quanto à Euclidiana. As dúvidas que pairam no ar são: Esta geometria é a única a descrever o meio em que vivemos? E se o Universo não for Euclidiano?

2.1.1 A Geometria Euclidiana

Há cerca de 300 anos *a.C*, Euclides de Alexandria apresentou o seu trabalho mais importante: a obra, na tradução atual, intitulada como “Os Elementos”; Dando-se, então, início à sistematização do conhecimento matemático e o estabelecimento de uma apresentação estruturada que se mantém até os dias atuais.

Segundo ANDRADE [2],

Toda esta construção da mente humana, feita ao longo de 300 anos, ficou registrada numa obra monumental intitulada *Elementos*, constituída de 13 livros (capítulos). Nela, estão demonstradas 465 proposições deduzidas de um sistema axiomático numa forma didática, cujo único rival em número de traduções é a Bíblia. Tal obra sistematiza toda a Matemática básica conhecida em seu tempo.

Neste trabalho, Euclides adota o Método Axiomático, construindo uma teoria a partir de axiomas, que, por sua vez, são proposições aceitas sem demonstração. Deste prisma, é necessário considerar a convergência das concepções a respeito da natureza da Matemática, para a sua devida fundamentação, na corrente de pensamento denominada Formalismo, que tem em Kant sua expressão mais profunda, por meio da qual o filósofo considera que, em matemática, os teoremas decorrem dos axiomas de acordo com as leis da Lógica.

A este respeito, MACHADO [8] escreveu:

Os axiomas são as verdades básicas, iniciais, que devem se apoiar na evidência empírica. As regras de inferência determinam as inferências legítimas e distinguem, dentre as fórmulas bem-formadas, as que constituem os teoremas, que são verdades demonstráveis a partir dos axiomas, em última análise.

O método axiomático-dedutivo nos *Elementos* de Euclides traduz em suas abordagens o fato de que suas afirmações deveriam ser logicamente deduzidas a partir de outras afirmações mais simples e, assim, sucessivamente. Essas primeiras afirmações, que não necessitavam de demonstração, constituíam as noções comuns, axiomas e postulados.

Portanto, estes axiomas ou postulados seriam o ponto de partida para outras afirmações, chamadas de proposições, as quais seriam demonstradas, rigidamente, por meio de regras lógicas. Assim, uma proposição significativa é chamada de Teorema; seu Lema, uma proposição auxiliar da sua demonstração e, conseqüentemente, uma proposição que resulta facilmente de um teorema, é chamada de Corolário.

De acordo com COUTINHO [5],

Uma teoria é dita axiomatizada, isto é, segue o modelo axiomático, quando é construída a partir de axiomas, que são afirmativas aceitas sem comprovação. Em outras palavras: a teoria tem como ponto de partida alguns princípios básicos que constituem o seu conjunto de axiomas ou postulados. Esses postulados, ou como é usual modernamente dizer, esses axiomas são escolhidos, até certo ponto, arbitrariamente; todavia, uma escolha não adequada de axiomas poderá originar uma teoria inconsistente ou desprovida de qualquer sentido.

O sistema elaborado por Euclides, tem como termos primitivos as noções de ponto, reta e plano, definindo novos termos a partir destes. Os axiomas e postulados dos Elementos de Euclides são os descritos a seguir:

Axiomas:

1. Coisas iguais a uma terceira são iguais entre si;
2. Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais;
3. Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais;
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais;
5. O todo é maior do que qualquer de suas partes.

Postulados:

1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade;
2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente;
3. Um círculo pode ser traçado com centro e raio arbitrários;
4. Todos os ângulos retos são iguais;
5. Se uma reta secante a duas outras forma ângulos, de um mesmo lado dessa secante, cuja soma é menor que dois ângulos retos, então essas retas se prolongadas suficientemente encontrar-se-ão em um ponto desse mesmo lado.

No que cerne aos postulados e axiomas, a ideia é de que eles sejam evidentes e não causem nenhuma dúvida em sua interpretação, pois eles são a fonte a partir dos quais todos os teoremas são demonstrados.

Destarte, o V Postulado de Euclides, descrito conforme a figura abaixo, foi motivo de estranheza por parte de muitos matemáticos, uma vez que ele parecia menos evidente do que os demais. Tal fato fez com que muitos candidatos, ao longo dos séculos, tentassem demonstrá-lo a partir dos outros quatro. Assim, diversos matemáticos passaram a investigar o que ocorreria caso eles desprezassem o V Postulado e passassem a negar o V Postulado, ou seja, que através de um ponto C não situado sobre uma reta AB , pudéssemos traçar nenhuma ou várias ou um número infinito de linhas paralelas à reta AB .

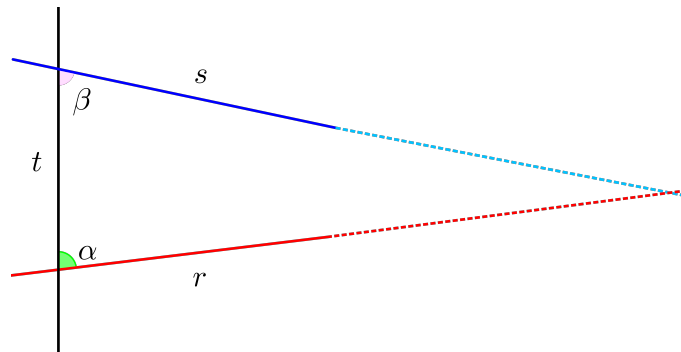


Figura 2.1: V Postulado de Euclides.

O questionamento que imperava era que se o V Postulado era realmente um teorema, então, a qualquer momento, a nova geometria conteria contradições lógicas, o que significaria que a suposição inicial estava errada e, portanto, o V Postulado estaria provado.

ANDRADE [2], em seu trabalho, escreveu:

Como pano de fundo ficava o Postulado das Paralelas, a secular dúvida se ele era ou não um axioma euclidiano independente dos demais, sendo o mais instigante tópico de interesse dos geômetras. Muitos acreditaram que podia ser um teorema. Não é!

Entretanto, um novo período de desenvolvimento sistemático surgiu a partir do século XV, advindo dos estudos de Descartes (1596-1650), Leibniz (1646-1716), Newton (1642-1727), dentre outros, onde a matemática começa a surgir como um conjunto mais ou menos ordenado de conhecimento.

Neste sentido, MACHADO [8] chega a afirmar:

O papel que os matemáticos gregos desempenharam relativamente aos resultados empíricos acumulados pelos egípcios, pelos babilônicos, os matemáticos deste novo período irão desempenhar, na tarefa a que se impuseram, de conectar em estruturas, assentar em bases firmes, o amontoado muitas vezes desconexo de noções e conceitos, resultados de três séculos de múltiplos e férteis trabalhos.

Assim, oriundos dessa nova percepção e crítica aos fundamentos matemáticos vigentes nesta época, é que diversos resultados começaram a surgir como, por exemplo, as Geometrias Não-Euclidianas. As sistematizações de tais geometrias, onde se nega um dos postulados de Euclides, começaram com o russo Nicolai Lobachevsky (1793-1856) e com o alemão Georg Friedrich Riemann (1826-1866) e seus estudos foram primordiais para a sistematização da Geometria Não Euclidiana, tanto que deram contribuição para o estudo geral dos espaços métricos que mais tarde possibilitou o desenvolvimento da Teoria Geral da Relatividade, elaborada por Albert Einstein.

2.1.2 A Geometria Não Euclidiana

A Geometria Euclidiana, sendo considerada como uma única geometria possível, implicaria no fato de que todas as proposições estabelecidas seriam, na verdade, teoremas, ou seja, uma consequência lógica dos axiomas, postulados e proposições anteriores. A partir deste fato, o V Postulado de Euclides foi colocado à prova, porém, essa pretensão nunca foi alcançada, pelo simples fato de que este postulado não é uma sequência lógica dos quatro anteriores. Assim, foram criadas novas geometrias, consistentes assim como a Euclidiana, de acordo com a substituição que se faz do V Postulado de Euclides.

COUTINHO [5] assim explicita,

Por cerca de dois mil anos, a Geometria de Euclides foi considerada como a única geometria possível. A obra Os Elementos era inquestionável. Tão famosa que, depois da Bíblia, é o livro de maior número de edições.

O V Postulado, também conhecido como Postulado das Paralelas ou Axioma de Playfair, como mostra a Figura 2.2 abaixo, é apresentado, modernamente, assim:

“Por um ponto P exterior a uma reta r , consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta r .”

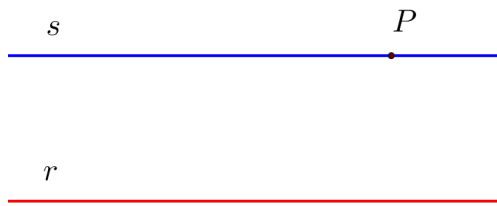


Figura 2.2: Axioma de Playfair.

Das tentativas de provar o V Postulado e, conseqüentemente, transformá-lo num teorema, diversos matemáticos tiveram suas tentativas frustradas e eles passaram a considerar três situações distintas com relação ao chamado Postulado das Paralelas, a partir das quais criaram-se novas geometrias, logicamente aceitas, as chamadas Geometrias Não-Euclidianas, a saber:

1. por um ponto exterior a uma reta dada passa **mais de uma reta** paralela à reta dada;
2. por um ponto exterior a uma reta dada passa **apenas uma reta** paralela à reta dada;
3. por um ponto exterior a uma reta dada não passa **nenhuma reta** paralela à reta dada;

De acordo com a substituição que se faz do postulado das paralelas, surgem dois tipos clássicos de geometrias não-euclidianas: a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

A Geometria Hiperbólica

Inicialmente, convém destacar que o objeto de nosso estudo será, principalmente, a Geometria Elíptica, que tem como axioma: “Quaisquer duas retas em um plano tem um ponto de encontro.” Sendo assim, explanaremos apenas sobre alguns pontos importantes da Geometria Hiperbólica, somente a título de conhecimento, uma vez que a ênfase será dada à Geometria Elíptica. Para um maior conhecimento sobre tal geometria, recomenda-se a leitura de [3] e de [5].

Consoante COUTINHO [5],

Na Geometria Hiperbólica, o V Postulado de Euclides é substituído pelo que se afirma que, por um ponto dado P , fora de uma reta r , existe mais de uma paralela a esta reta r , enquanto que na Geometria Elíptica postula-se que não existe nenhuma paralela.

Johann Friedrich Gauss (1777-1855), famoso matemático conhecido como o Príncipe da Matemática, foi um dos primeiros a tentar provar o V Postulado, deduzindo uma contradição a partir da sua negação. Porém, convencido de que o Axioma das Paralelas não era

uma proposição e sabendo da enorme repercussão e perturbação que causaria a divulgação da possível existência de uma geometria não euclidiana, não divulgou o resultado de suas pesquisas.

Os matemáticos Nicolai Lobachevsky (1792-1856) e Janos Bolyai (1802-1860), independentemente, desenvolveram esta Geometria Não-Euclidiana. O primeiro foi um dos matemáticos que mais contribuiu na construção das Geometrias Não-Euclidianas. Ele expôs suas ideias nas suas obras *On the Principles of Geometry*, de 1829 e *Pangeometria*, de 1855, admitindo todos os postulados da Geometria Euclidiana, exceto o 5º, fazendo a seguinte substituição:

Por um ponto P fora de uma reta r passa mais de uma reta paralela à reta r .

Veja a figura abaixo:

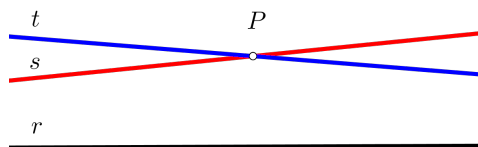


Figura 2.3: Postulado de Lobachevsky.

Outros matemáticos, também, desenvolveram estudos a este respeito, dentre eles, Eugênio Beltrame (1835-1900), Felix Klein (1849-1945) e o francês Henri Poincaré (1864-1912). Tais estudos podem ser consultados e o tema melhor explorado mediante consulta às referências citadas anteriormente.

A Geometria Elíptica

Este tipo de Geometria Não-Euclidiana, também chamada de Geometria Riemanniana, desenvolvida pelo matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), possui como axioma o fato de que não existem retas paralelas a uma reta dada, porém, esta “reta” não é mais infinita, mas sim ilimitada. Este axioma é assim definido:

“Quaisquer duas retas em um plano tem um ponto de encontro.”

Neste modelo, interpretam-se as “retas” como círculos máximos ou geodésicas da superfície esférica, onde quaisquer dois círculos máximos se interceptam em mais de um ponto.

Veja a figura abaixo:

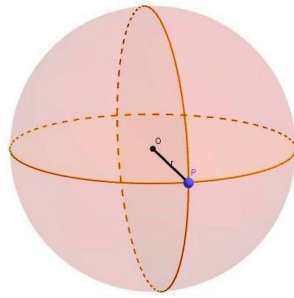


Figura 2.4: Esfera de Riemann.

Segundo COUTINHO [5],

Esta geometria foi considerada pela primeira vez na aula inaugural pronunciada em 1851 por George Bernhard Riemann (1826-1866) para sua admissão como professor-adjunto na Universidade de Gottingen. Na verdade, Riemann, na ocasião, apontou as possibilidades de outras geometrias e, consequentemente, outros espaços, o que motivou, a partir de então, os nomes geometrias ou espaços de Riemann.

Nesta Geometria, temos as seguintes características:

1. A soma dos ângulos internos de um triângulo é maior do que dois retos;
2. O plano é uma superfície esférica, e a reta, uma geodésica, ou circunferência de círculo máximo;
3. Duas retas distintas perpendiculares a uma terceira, se interceptam;
4. Uma reta não é dividida em duas por um ponto;
5. A área de um triângulo é proporcional ao excesso da soma dos seus ângulos;
6. Dois triângulos com ângulos correspondentes iguais são congruentes.

Ainda de acordo com COUTINHO [5],

A pseudo-esfera e a esfera são superfícies tridimensionais adequadas à modelagem, respectivamente, das geometrias planas Hiperbólica e Elíptica. A esfera e a pseudo-esfera tem, a primeira, curvatura positiva e, a segunda, curvatura negativa. O plano, superfície de curvatura nula, está ligado à Geometria Euclidiana que pode ser considerada o meio termo entre as duas clássicas Geometrias Não-Euclidianas.

2.2 Um breve histórico da Geografia da Terra

Esta seção do presente capítulo foi elaborada com o intuito de apresentar alguns fatos históricos relacionados com os estudos da geografia da Terra, em que diversos cientistas, pesquisadores e estudiosos formularam ideias e teorias sobre a forma e o tamanho do nosso planeta.

A abordagem do tema visa apresentar fatos do estudo da geografia que estão em consonância com a matemática, de modo a permitir ao professor uma contextualização do assunto, bem como, realizar seu trabalho de maneira interdisciplinar, ou seja, um trabalho conjunto entre os docentes de matemática e de geografia.

Em virtude disto, as seguintes referências foram utilizadas como base para a estruturação deste histórico, o qual está relacionado com a forma física da Terra e seus principais elementos e características: [4], [9], [19], [20], [21], [22], [23] e [24].

Nosso planeta sempre foi objeto de curiosidade de pesquisadores, poetas, religiosos e cientistas, pois o homem, desde a pré-história, sempre demonstrou interesse em conhecer o ambiente no qual está inserido, tanto é que, fruto dessa curiosidade, é que ele pode pensar, raciocinar e refletir, para então, tentar entendê-lo. Várias questões sobre ele e, consequentemente, sobre o universo no qual está inserido, foram formuladas, contudo, uma das mais intrigantes foi esclarecer o seu formato, ou seja, se sua superfície era plana, quadrada ou ainda, se era esférica.

Eratóstenes (276 a.C - 196 a.C) foi o primeiro a medir a circunferência da Terra com precisão notável em relação ao estabelecido hoje. Aristarco de Samos (310 a.C - 230 a.C) foi o pioneiro em afirmar que a Terra gira em torno do Sol e não ao contrário.

Na época das Grandes Navegações ¹, este tema foi debatido entre navegadores, exploradores, cientistas e religiosos. Acreditou-se, durante muito tempo, que o planeta Terra era constituído de um plano horizontal finito, e que numa determinada parte, seria o fim do planeta e também, que o sol girava em torno da Terra.

A ideia de que a Terra era imóvel perdurou até a época do Renascimento Europeu, com a primeira revolução científica liderada por Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727). Embora Aristóteles (600 a.C) já tivesse proposto

¹As Grandes Navegações foram um conjunto de viagens marítimas que expandiram os limites do mundo conhecido até então. Mares nunca antes navegados, terras, povos, flora e fauna começaram a ser descobertas pelos europeus.

essa ideia ao observar a sombra da Terra sobre a lua durante o Eclipse Lunar e Eratóstenes já tivesse calculado o raio terrestre, por ocasião das viagens de circum-navegação, todos tiveram que aceitar tais ideias.

De acordo com CANALLE [4],

Até a publicação de *De Revolutionibus Orbium Coelestium* de Nicolau Copérnico (1473-1543), pensava-se que a Terra estivesse imóvel no espaço e que, portanto, os fenômenos celestes eram observados por nós de um sistema de referência em repouso absoluto. Pensava-se que a nossa posição no Universo era privilegiada e que todos os astros moviam-se ao nosso redor. Na verdade, a Terra não só não está parada, mas também tem um movimento complexo. Sendo inelutavelmente arrastados pelo seu movimento, ao observarmos os astros, acabamos enxergando neles um movimento que, em boa parte, é o nosso próprio movimento.

O cientista italiano Galileu Galilei foi o primeiro a formular uma teoria na qual a Terra teria uma forma arredondada semelhante à forma de uma laranja e que a Terra era que girava em torno do Sol. Sua teoria foi duramente criticada pelas instituições religiosas da época, tanto que, para escapar da sentença de morte, teve que recusar sua teoria publicamente.

2.2.1 A esfericidade da Terra por Aristóteles

É difícil distinguirmos a forma do planeta Terra estando em sua superfície, em virtude das diferentes formas de relevo presentes na mesma, tais como vales, montanhas, planícies, planaltos, depressões, etc. . . Porém, os gregos puderam concluir que a forma da Terra era curva ao observarem os navios se afastando ou se aproximando da praia, sendo que o mastro era a última ou a primeira parte do navio a aparecer no horizonte, respectivamente.

Destas observações, Aristóteles (384 a.C - 322 a.C) apresentou estudos sobre a esfericidade da Terra, observando o contorno circular da sombra da Terra projetada na Lua durante os eclipses lunares, chegando com isso, a conceber a Terra com forma esférica, restando determinar seu tamanho (raio). Ele estimou a circunferência da Terra em cerca de 72 mil quilômetros. Contudo, a primeira estimativa mais precisa foi feita por Eratóstenes de Alexandria (276 a.C - 197 a.C).

2.2.2 O cálculo da circunferência da Terra por Eratóstenes

Uma das grandes descobertas científicas gregas foi, sem dúvida, o comprimento da circunferência da Terra. Na época, século III a.C., utilizou-se um método bastante simples,

porém, neste período não se tinha conhecimento matemático e muito menos científico como temos atualmente.

Eratóstenes, matemático e geógrafo grego, nasceu em Cirene, atual Líbia. As suas mais importantes observações visavam a determinação da obliquidade da eclíptica e a medida do meridiano terrestre. Considerados os meios de que dispunha, e o estado da ciência no seu tempo, o grau de erro no resultado é notavelmente pequeno.

Este matemático também é famoso por ter inventado o primeiro algoritmo para os números primos, chamado de Crivo de Eratóstenes², o qual, reservadas as devidas alterações, ainda é uma ferramenta útil e importante na pesquisa da Teoria dos Números.

Eratóstenes, há cerca de dois mil anos, ao tentar medir a circunferência da Terra, talvez tivesse imaginado a seguinte situação:

1. Dividindo-se a Terra ao meio e separando-a em várias frações iguais;
2. Sabendo-se a quantidade de frações iguais e o comprimento do arco de uma delas, bastaria, agora, multiplicar o comprimento desse arco pelo número de frações para obter o comprimento da Terra;

Então, sabendo que uma circunferência possui 360° e tomando o ângulo de uma dessas frações, poderia dividir 360 por este ângulo e, em seguida, encontrar o número de frações que corresponde o todo.

Assim sendo, de posse de um relato constante em um dos livros da Biblioteca de Alexandria³ de que, ao meio-dia do solstício de verão, podia-se ver o reflexo do Sol em um poço na cidade de Siena, uma cidade ao sul do Egito, atual Assuã, localizada a cerca de 800 km ao sul de Alexandria, Eratóstenes observou que, se conseguisse calcular o ângulo interno da fração que as duas cidades formavam, seria capaz de calcular a circunferência da Terra.

Sabendo que no 21º dia do mês de junho aconteceria o solstício de verão e que, nessa data, o Sol incidiria exatamente na vertical dentro do poço, de modo que nenhuma sombra fosse projetada, enquanto que em Alexandria, à mesma hora, haveria a projeção de sombras, Eratóstenes, sabendo do motivo: porque a Terra era redonda, mediu a sombra de um obelisco em Alexandria.

²O Crivo de Eratóstenes é um método que permite obter uma tabela de números primos até um limite escolhido.

³A Biblioteca de Alexandria foi, durante muitos séculos, cerca de 280 a.C. a 416, uma das maiores e mais importantes bibliotecas do Planeta e abrigava o maior patrimônio cultural e científico de toda a Antiguidade.

Com a altura do obelisco e o tamanho da sombra, calculou o ângulo de incidência da luz em aproximadamente $7,2^\circ$. Depois, dividiu 360 por 7,2, o que resultara em 50, ou seja, cerca de $1/50$ dos 360° de uma circunferência.

Portanto, o comprimento do meridiano terrestre deveria ser 50 vezes maior do que a distância entre Alexandria e Siena (800 km), ou seja, 50 frações iguais à medida da distância entre as duas cidades, o que totaliza 40.000 km.

A figura a seguir ilustra o procedimento adotado por Eratóstenes para obter o comprimento da Terra:

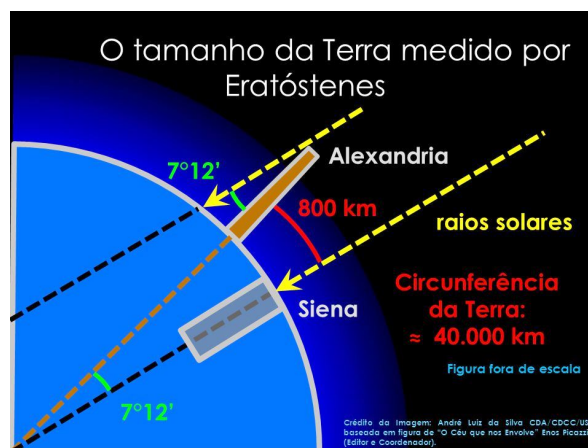


Figura 2.5: Cálculo do Raio da Terra. (Fonte: [18])

A medição atual do comprimento da Terra é de $C = 40.023$ km. Isto quer dizer que a medida feita por Eratóstenes apresentou um erro menor do que 2% em relação ao comprimento conhecido hoje. Assim, destacam-se a precisão das medidas usadas pelo matemático, uma vez que elas foram realizadas numa época em que o cálculo não havia sido desenvolvido e muito menos a tecnologia e os aparelhos capazes de realizar medidas de longas distâncias.

De acordo com PICAZZIO [9],

Atualmente, as distâncias do centro da Terra a um ponto situado no polo e um situado no equador são, respectivamente, de 39.940,6 km e 40.075,1 km. Isso implica, respectivamente, em uma distância entre os polos e entre os dois pontos opostos no equador de 12.713,5 km e 12.756,3 km (valor médio= 12.735 km).

2.2.3 O estudo da Terra por Newton: uma elipsóide achatada nos polos

No século XVII, Isaac Newton (1642-1727) realizou estudos sobre o achatamento da Terra, chegando a conclusão de que a região equatorial é centrifugada pela rotação da Terra em relação à região polar.

Newton, por volta de 1680, ao modelar um planeta em rotação como uma bola fluida, conseguiu prever o achatamento polar, publicando seus resultados, em 1687, na sua obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, a qual fundamentou a Mecânica Clássica, demonstrando, assim, que a Terra não era uma esfera perfeita, pois o raio polar tinha 85472 pés (cerca de 26 km) a menos do que o raio equatorial. Assim sendo, a previsão de Newton difere pouco do que hoje sabemos ser o achatamento da Terra.

De fato, a forma da superfície Terra aproxima-se de uma esfera, pois a Terra tem o diâmetro equatorial levemente maior do que o diâmetro polar, isto é, cerca de apenas 0,3% por cento maior do que o diâmetro polar.

Por um longo tempo, a forma da Terra foi motivo de debates e elaboração de teorias, tanto que, na antiguidade, alguns estudiosos a consideravam plana, porém, outros já afirmavam que a mesma apresentava um formato arredondado.

Mediante o avanço das técnicas cartográficas e o desenvolvimento da tecnologia, o que possibilitou a utilização de instrumentos avançados de precisão, foi possível ao homem constatar que a forma da Terra assemelha-se a um Geóide⁴, levemente achatado nos polos, uma vez que a forma geométrica do planeta Terra não é uma esfera perfeita, como sugeriu Galileu Galilei.

De acordo com a União Astronômica Internacional (UAI) e a União de Geodésia e Geofísica Internacional (UGGI), o diâmetro da Terra no sentido da linha do Equador é de 12.756 km, enquanto que, entre os polos Norte e Sul, é de 12.714 km, ou seja, uma diferença de apenas 42 km, o que implicaria num achatamento relativamente pequeno.

Outra característica importante que implica diretamente no formato arredondado da Terra está relacionada com a força da gravidade, pois em planetas como o nosso, cuja massa é expressiva, a força da gravidade puxa a massa para o centro do planeta. Consequentemente, o formato arredondado é a única maneira de se ter, aproximadamente, a mesma força da gravidade atuando em todos os pontos do planeta.

⁴Superfície média do nível dos mares (feita a abstração das marés), idealmente prolongada através dos continentes e perpendicular, em qualquer ponto, à direção da gravidade, apontada pelo fio de prumo. Termo universalmente adotado para designar a forma matemática da Terra.

Capítulo 3

A Esfera

O presente capítulo visa apresentar definições, conceitos e demonstrações a respeito da Esfera e também, da Trigonometria Esférica, por permitir ao leitor uma melhor compreensão do assunto e possibilitar ao mesmo revisar e consultar as fórmulas e teorias que serão utilizadas por ocasião das atividades propostas. Em virtude disso, como embasamento teórico, foram utilizadas as seguintes referências: [1], [5] e [7].

3.1 Definições, áreas e volumes

Definição 3.1 *Seja um ponto O e um segmento de medida r . Chama-se **esfera** de centro O e raio r ao lugar geométrico dos pontos P do espaço, cujas distâncias a O são menores ou iguais a r .*

Observação 3.1 *A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semi-círculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.*

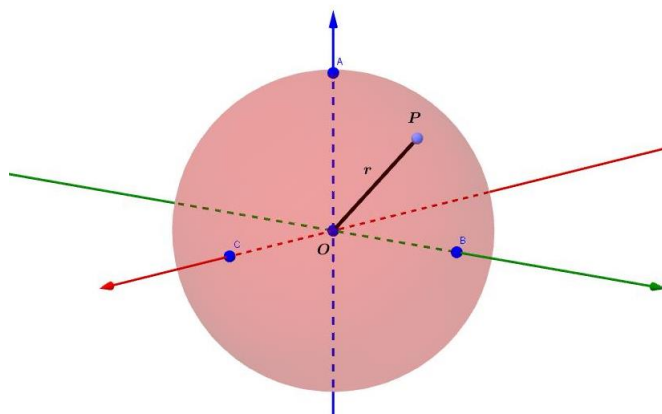


Figura 3.1: Esfera.

- O volume de uma esfera de raio r é igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Demonstração.

Consideremos um cilindro equilátero de raio da base r (a altura é $2r$) e seja S o ponto médio do eixo do cilindro, conforme Figura 3.2.

Tomemos dois cones tendo como bases as do cilindro e S como vértice comum (a reunião desses dois cones é um sólido chamado *Clépsidra*).

Ao sólido que está dentro do cilindro e fora dos dois cones vamos chamar de sólido X (este sólido X é chamado de *Anticlépsidra*).

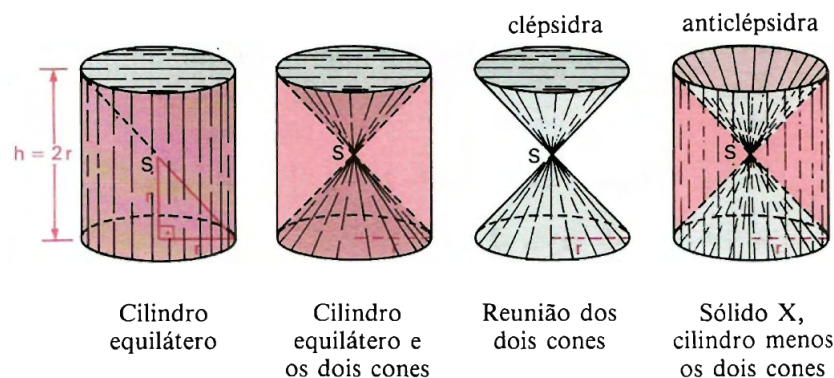


Figura 3.2: Clépsidra. (Fonte: [7])

Consideremos, agora, uma esfera de raio r e o sólido X descrito acima.

Suponhamos que a esfera seja tangente a um plano α , que o cilindro (que originou o sólido X) tenha base em α e que os dois sólidos, esfera e sólido X estejam num mesmo semi-espaco dos determinados por α .

Qualquer plano secante β , paralelo a α , distando d do centro da esfera (e do vértice do sólido X), também secciona o sólido X . Vejamos a figura abaixo:

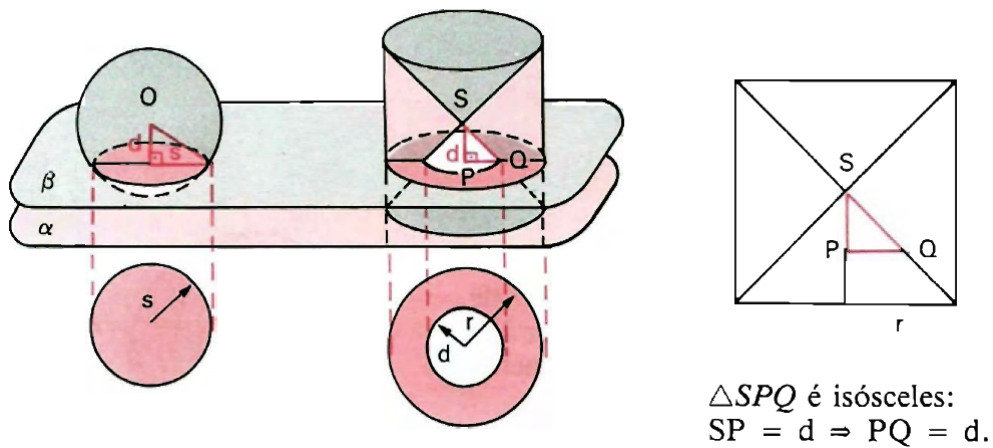


Figura 3.3: Esfera e Sólido. (Fonte: [7])

Assim, temos:

- Área da secção na esfera (círculo) = $\pi \cdot s^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2)$
- Área da secção no sólido X (coroa circular) = $\pi \cdot r^2 - \pi \cdot d^2 = \pi \cdot (r^2 - d^2)$

As áreas das secções na esfera e no sólido X são iguais; então, pelo princípio de Cavalieri, a esfera e o sólido X tem volumes iguais, ou seja,

$$V_{esfera} = V_{sólido\ X}.$$

Mas:

$$V_{sólido\ X} = V_{cilindro} - 2V_{cone} = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r\right) = 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$$

$$\Rightarrow V_{sólido\ X} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ou seja, como $V_{esfera} = V_{sólido\ X}$, então

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

□

Definição 3.2 Superfície esférica é o lugar geométrico dos pontos P do espaço tais que a distância OP seja igual a r .

- A área da superfície de uma esfera de raio r é igual a $4\pi r^2$.

Demonstração.

Demonstraremos a fórmula da área da superfície esférica, utilizando a fórmula do volume da esfera. Inicialmente, seja e uma esfera de raio r “contornada” por outra esfera e' de raio $r + x$, de mesmo centro, cujos volumes são V e V' , respectivamente, conforme a figura abaixo:

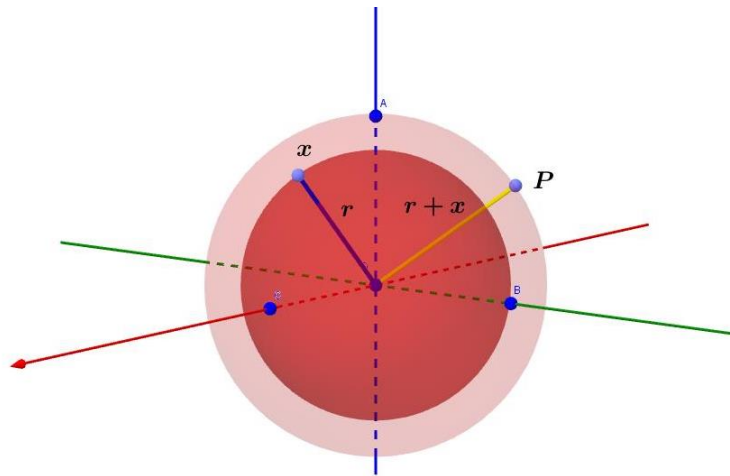


Figura 3.4: Área da Superfície Esférica. Fonte: [7]

Observemos que a região entre as duas esferas possui espessura igual a x . Caso a mesma seja igual a 0, esta região será igual a área da superfície esférica. Assim, calculando a diferença entre os volumes das esferas e e e' , temos:

$$\begin{aligned} V' - V &= \frac{4}{3}\pi(r+x)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \\ &= \frac{4}{3}\pi[(r+x)^3 - r^3] = \\ &= \frac{4}{3}\pi[r^3 + 3r^2x + 3rx^2 + x^3 - r^3] = \\ &= \frac{4}{3}\pi[3r^2x + 3rx^2 + x^3] \\ \Rightarrow V' - V &= \frac{4}{3}\pi x[3r^2 + 3rx + x^2] \end{aligned}$$

Sabemos que o volume de um sólido é igual ao produto da sua área pela sua altura (espessura), ou seja, $V = A \cdot h \Rightarrow A = \frac{V}{h}$.

Daí, $A_{SE} = \frac{V' - V}{x} = \frac{\Delta V}{x}$, donde A_{SE} é a Área da Superfície Esférica.

Logo, dividindo ambos os membros pela espessura x , fica:

$$\begin{aligned}\frac{V' - V}{x} &= \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3rx + x^2] \\ \Rightarrow \frac{\Delta V}{x} &= A_{SE} = \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3rx + x^2]\end{aligned}$$

Sendo assim, utilizando Limites, temos:

$$\Rightarrow A_{SE} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3rx + x^2]$$

Então, para $x = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}A_{SE} &= \frac{4}{3}\pi[3r^2 + 3r \cdot 0 + 0^2] \\ \Rightarrow A_{SE} &= 4\pi r^2\end{aligned}$$

□

Definição 3.3 *Corda da superfície é o segmento de reta definido por dois pontos distintos da superfície esférica.*

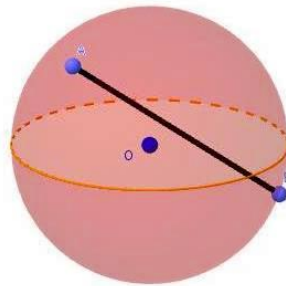


Figura 3.5: Corda da Esfera.

Definição 3.4 *Diâmetro da superfície esférica é uma corda que contém o ponto O, centro da esfera.*

Definição 3.5 *Pontos antípodas são pontos diametralmente opostos, isto é, dado um ponto P, seu antípoda, P', é o único ponto da superfície esférica tal que PP' é um diâmetro da superfície esférica.*

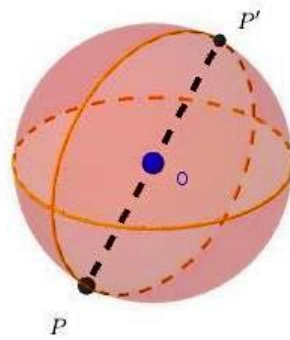


Figura 3.6: Pontos Antípodas.

Observação 3.2 Podemos observar pela figura que o ponto A e o ponto B são pontos antípodas e o segmento AB é diâmetro da superfície esférica.

Definição 3.6 Toda secção plana de uma esfera é um círculo. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, temos como secção um círculo máximo da esfera. Sendo r o raio da esfera, d a distância do plano secante ao centro e s o raio da secção, vale a relação:

$$s^2 = r^2 - d^2$$

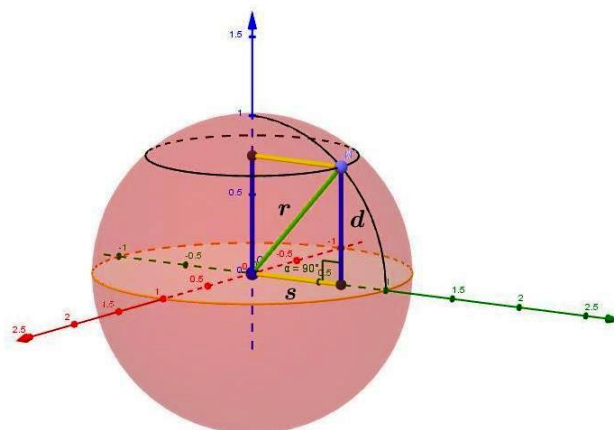


Figura 3.7: Secção Plana na esfera.

Definição 3.7 *Circunferência máxima* é uma circunferência que tem o mesmo raio da superfície esférica.

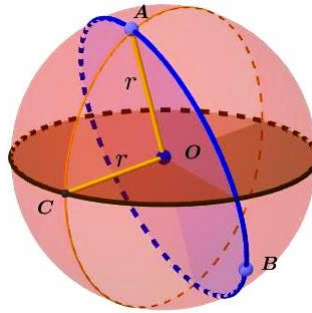


Figura 3.8: Circunferência Máxima.

Definição 3.8 *Elementos Notáveis:*

1. **Eixo e:** qualquer reta que contém o centro O ;
2. **Polos:** são as intersecções da superfície esférica com o eixo e . Desta forma, temos dois pontos: Polo Norte e Polo Sul;
3. **Equador:** é a secção (circunferência máxima) perpendicular ao eixo, pelo centro da superfície;
4. **Paralelo:** é uma secção (circunferência) cujo plano é perpendicular ao eixo e e é paralela ao equador;
5. **Meridiano:** é uma semicircunferência máxima cujo plano passa pelo eixo e e liga os polos.

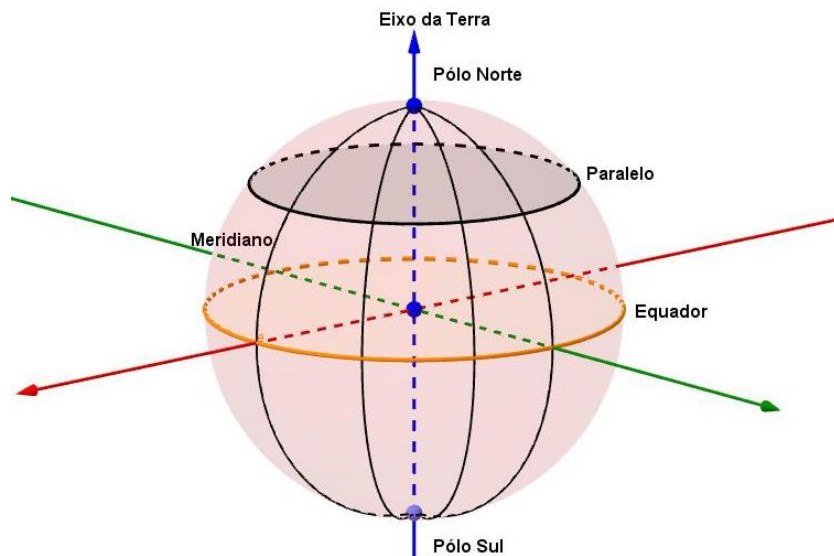


Figura 3.9: Elementos da esfera.

Definição 3.9 O **Fuso Esférico** é a intersecção da superfície de uma esfera com um diedro¹, cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica. O ângulo α , medida do diedro, medido na secção equatorial, é o que caracteriza o fuso.

Sua **área** pode ser calculada da seguinte maneira, utilizando-se Regra de Três Simples: Sendo α a medida do diedro, temos:

1. com α em graus:

$$360^\circ \longrightarrow 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\alpha^\circ \longrightarrow A_{fuso}$$

$$\Rightarrow A_{fuso} = \frac{\pi r^2 \alpha}{90}$$

2. com α em radianos:

$$2 \cdot \pi \text{ rad} \longrightarrow 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\alpha \text{ rad} \longrightarrow A_{fuso}$$

$$\Rightarrow A_{fuso} = 2r^2 \alpha$$

¹Ângulo diedro ou diedro ou ângulo diedral é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano. A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e os dois semiplanos são suas faces. Assim, α e β são dois semiplanos de mesma origem r , distintos e não opostos.

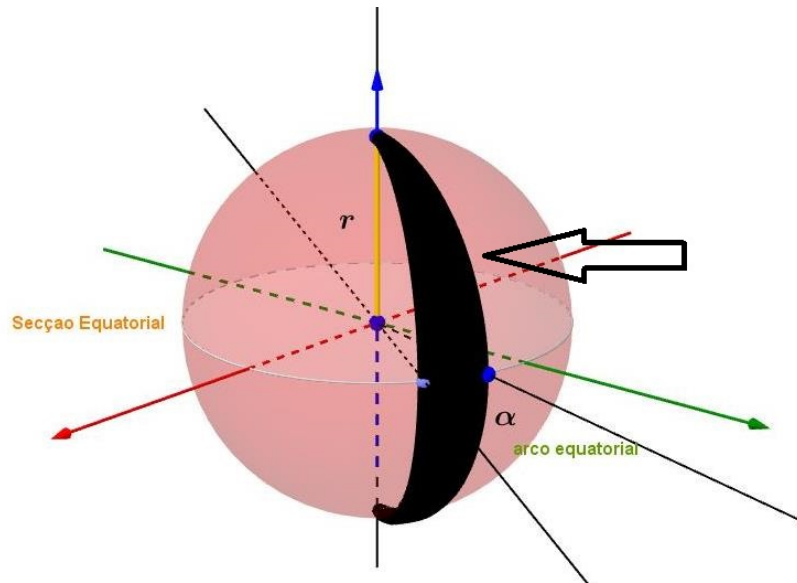


Figura 3.10: Fuso esférico.

Definição 3.10 *Cunha esférica é a porção de uma esfera, limitada por um diedro (ou setor diedral), cuja aresta contém o diâmetro da esfera. A cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.*

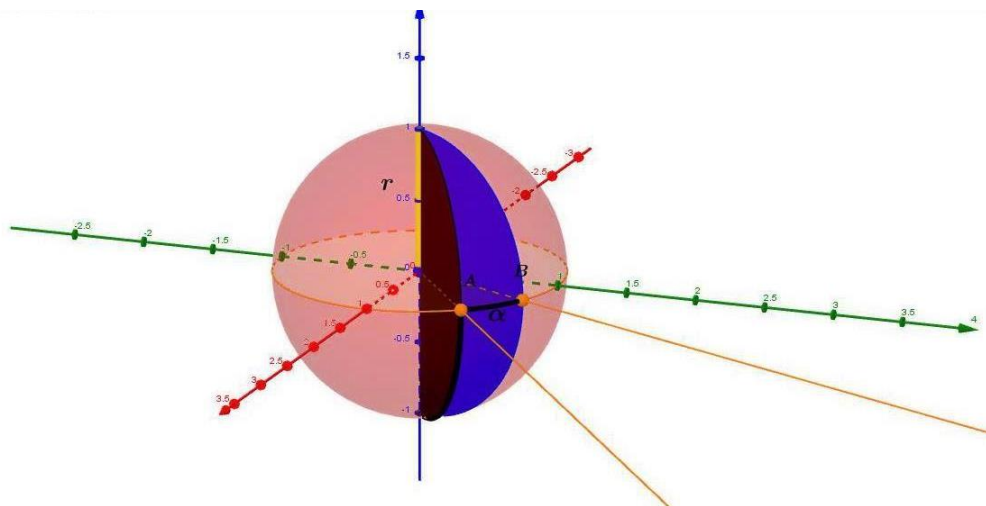


Figura 3.11: Cunha esférica.

O **volume da cunha** pode ser encontrado utilizando-se Regra de Três Simples, obtendo-se:

1. com α em graus:

$$360^\circ \rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

$$\alpha^\circ \rightarrow V_{cunha}$$

$$\Rightarrow V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}$$

2. com α em radianos:

$$2\pi \text{ rad} \rightarrow \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

$$\alpha \text{ rad} \rightarrow V_{cunha}$$

$$\Rightarrow V_{cunha} = \frac{2r^3 \alpha}{3}$$

Definição 3.11 Calota esférica: *é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta real tal que:*

1. *passa pelo centro da circunferência que contém o arco;*
2. *passa por um extremo do arco e não o intersecta em outro ponto;*
3. *é coplanar com o arco.*

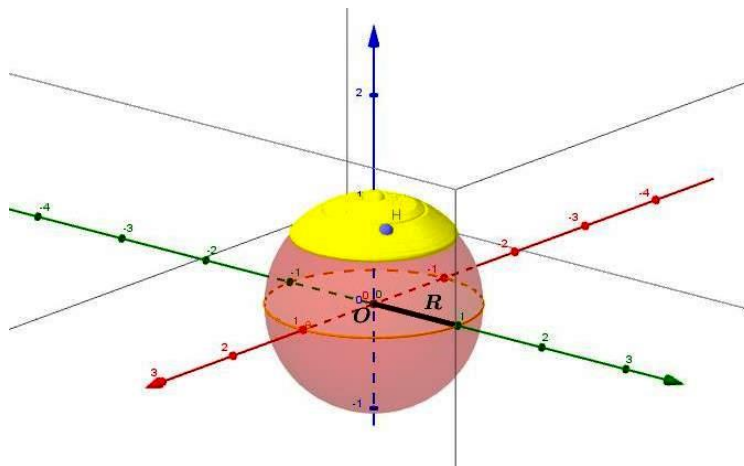


Figura 3.12: Calota esférica.

Definição 3.12 Zona esférica *é a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:*

1. *passa pelo centro da circunferência que contém o arco;*
2. *não passa por nenhum extremo do arco nem intersecta o arco em outro ponto;*
3. *é coplanar como arco.*

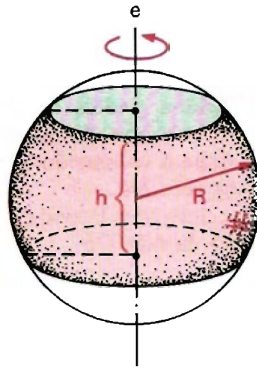


Figura 3.13: Zona esférica. (Fonte: [7])

Analisando a Figura 3.14 abaixo, veremos que o cálculo da **área da calota ou da zona esférica** é realizado da seguinte maneira, donde R é o raio da circunferência que contém o arco (é o raio da superfície esférica) e h é a projeção do arco sobre o eixo:

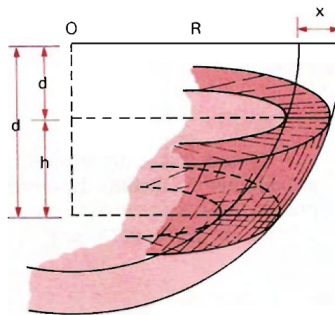


Figura 3.14: Área da calota ou zona esféricas. (Fonte: [7])

Sendo assim, podemos verificar que o volume do Segmento Esférico² correspondente à zona (ou calota) esférica é dado por:

$$V_1 = \pi R^2 h - \frac{1}{3} \pi h (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2).$$

Para a esfera concêntrica de raio $r + x$, o volume é:

$$V_2 = \pi (R + x) h - \frac{1}{3} \pi h (d_1^2 + d_1 \cdot d_2 + d_2^2).$$

Portanto,

$$V_p = V_2 - V_1$$

²Seccionando uma esfera por dois planos paralelos entre si, dividimos a esfera em três partes; a que está compreendida entre os dois planos, reunida aos dois círculos-seção, é chamada segmento esférico de duas bases, e cada uma das outras duas, reunidas ao respectivo círculo-seção, é chamada segmento esférico de uma base. (Fonte:[7])

$$\Rightarrow V_p = \pi(R+x)^2h - \pi R^2h.$$

$$\Rightarrow V_p = \pi(2R+x)hx$$

$$\Rightarrow \frac{V_p}{x} = \pi(2R+x)h$$

Então, para $x = 0$, fica: A_{zona} ou $A_{calota} = \pi(2R+0)h = 2\pi R h$

Logo,

$$A_{zona} = 2\pi R h_{zona}$$

e

$$A_{calota} = 2\pi R h_{calota}.$$

Definição 3.13 A distância esférica entre dois pontos A e B é o comprimento do menor arco AB do círculo máximo.

A distância esférica l entre dois pontos A e B é dada por:

$$l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

onde α é o ângulo central, medido em graus, que subtende o menor arco AB do círculo máximo de raio r .

Demonstração.

Como o comprimento do arco de círculo (l) é proporcional à sua medida α , em graus, então,

$$\frac{360}{\alpha} = \frac{2\pi r}{l},$$

ou seja,

$$l = \frac{\alpha}{360} \cdot 2\pi r = \frac{\pi r \alpha}{180}.$$

□

Definição 3.14 Geodésica é a curva, contida na superfície esférica, que minimiza a distância entre dois pontos distintos. Ou seja, é o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por dois pontos.

Observação 3.3 Na geometria plana a distância entre dois pontos é o segmento de reta formado por esses dois pontos. Como o plano, na geometria esférica, é uma superfície esférica, a distância entre dois pontos é um arco de circunferência máxima, como mostra a Figura 3.15 a seguir:

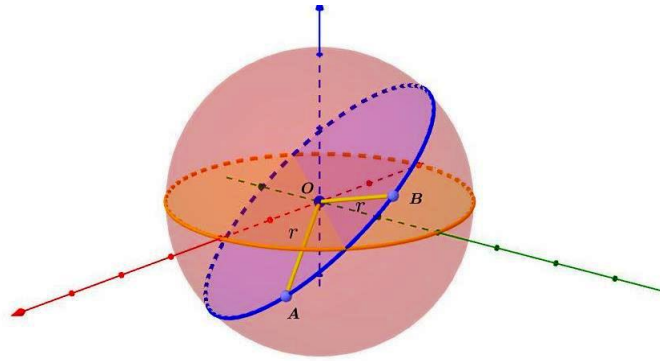


Figura 3.15: Geodésica.

Definição 3.15 *Ângulo esférico* é o ângulo, formado por dois arcos de circunferências máximas. Sua medida é a mesma do ângulo plano formado pelas semirretas tangentes a esses arcos.

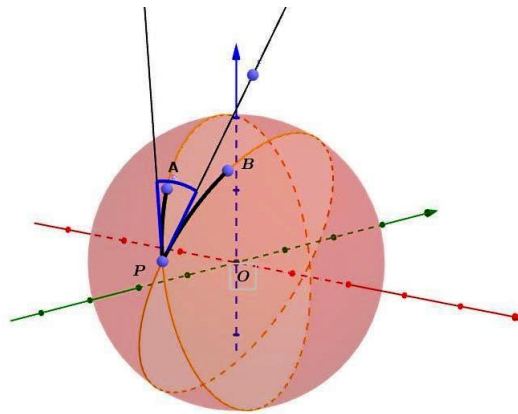


Figura 3.16: Ângulo esférico

3.2 A Trigonometria esférica

Definição 3.16 *Triângulo esférico* é a superfície limitada por três arcos de circunferências máximas, contida em algum hemisfério, sendo estes arcos menores que uma semicircunferência máxima.

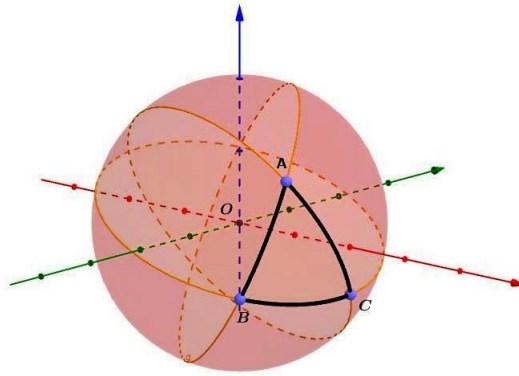


Figura 3.17: Triângulo esférico.

Teorema 3.1 *Sejam α , β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$, onde a é a área desse triângulo esférico e r é o raio da superfície esférica.*

Demonstração. Inicialmente, temos que a área de cada fuso esférico, pela Definição 3.9, com α em radianos, é de $2r^2\alpha$, $2r^2\beta$ e $2r^2\gamma$.

Sendo assim, prolongando os lados do triângulo esférico, construiremos três fusos completos, com os mesmos ângulos internos desse triângulo. Logo, a área de cada um desses fusos completos é de $2 \cdot 2r^2\alpha = 4r^2\alpha$, $2 \cdot 2r^2\beta = 4r^2\beta$ e $2 \cdot 2r^2\gamma = 4r^2\gamma$.

Temos que a área de um triângulo esférico ABC é igual a área do triângulo $A'B'C'$ formado pelos pontos antípodas do triângulo esférico ABC , pois estes triângulos são congruentes, pelo caso *LLL*. Por exemplo, os lados AB e $A'B'$ são arcos subtendidos por ângulos congruentes, caso opostos pelo vértice.

Ao somarmos estas áreas teremos a área da superfície esférica acrescida de quatro vezes a área do triângulo esférico ABC , pois foi contada duas vezes a mais a área do triângulo esférico ABC e duas vezes a mais a área do triângulo esférico $A'B'C'$.

Então,

$$4\alpha r^2 + 4\beta r^2 + 4\gamma r^2 = A_{SE} + 4a = 4\pi r^2 + 4a$$

$$\Rightarrow 4r^2(\alpha + \beta + \gamma) = 4r^2\left(\pi + \frac{a}{r^2}\right)$$

Logo,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2}$$

□

Teorema 3.2 *Sejam α , β e γ as medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico ABC , então $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 6\pi$.*

Demonstração.

Inicialmente, temos, conforme demonstração do teorema anterior, que a área é maior do que π .

Agora, imaginemos um triângulo esférico que ocupe quase todo o hemisfério que o contém (por exemplo, o Hemisfério Norte). Sendo assim, tomemos os três vértices equidistantes e próximos à circunferência máxima que separa um hemisfério do outro (“Equador”).

Conseqüentemente, a área do triângulo esférico tende à área do hemisfério, ou seja, tende à $A = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$. Logo, a soma dos ângulos internos do triângulo esférico tende à $3 \cdot 2\pi = 6\pi = 540^\circ$, entretanto, não assumindo este valor.

Notemos, por fim, que este valor não é constante, como na geometria plana.

De fato, o excesso a π é diretamente proporcional à área do triângulo, isto é,

$$\Rightarrow a = [\pi - (\alpha + \beta + \gamma)]r^2.$$

□

Definição 3.17 *O caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície esférica é o comprimento do menor arco de círculo máximo que passa por esses dois pontos.*

Demonstração. Será apresentada uma prova formal de que a menor distância entre dois pontos numa superfície esférica, $d(A, B)$, é o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e por B . Tal demonstração por ser feita mediante simplificações e operações com o uso do Cálculo Diferencial e Integral.

Supomos, inicialmente, sem perda de generalidade, uma superfície esférica de raio unitário (ou qualquer medida que quisermos), cujo centro é a origem do sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Assumimos, agora, o ponto A como sendo o Polo Norte e denotemos o ponto B pelas suas coordenadas geográficas, medidas em radianos, a saber: longitude φ_1 e latitude θ_1 . Sendo assim, a circunferência máxima que passa por A e B contém o meridiano por B , de modo que o arco menor AB tem comprimento $\frac{\pi}{2} - \theta_1$.

Desta forma, considerando uma trajetória arbitrária ligando A e B , mostremos que seu comprimento é maior ou igual a $\frac{\pi}{2} - \theta_1$.

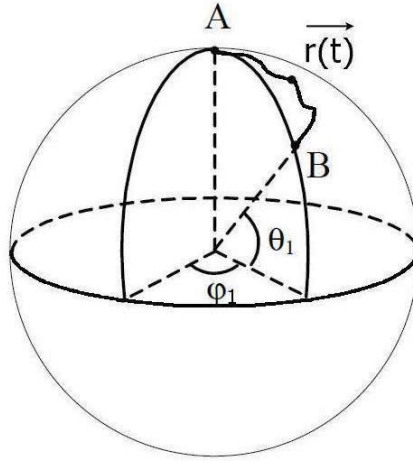


Figura 3.18: Arco menor AB da circunferência máxima.

Imaginando-nos numa viagem do ponto A ao ponto B , a cada instante t , estaremos num determinado ponto do Globo Terrestre, cuja longitude e latitude serão, respectivamente, $\varphi(t)$ e $\theta(t)$. Logo, iniciando a viagem no instante $t = 0$ e a finalizando no instante t_1 , teremos: $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$, $\theta(t_1) = \theta_1$ e $\varphi(t_1) = \varphi_1$.

Consequentemente, a trajetória arbitrária considerada até então, ligando os pontos A e B , será descrita por um vetor posição $\vec{r}(t)$ dado por

$$\vec{r}(t) = (\cos\theta(t)\cos\varphi(t), \cos\theta(t)\sin\varphi(t), \sin\theta(t)),$$

com $0 \leq t \leq 1$, fórmula esta que será demonstrada, oportunamente, consoante 5.4.

Derivando essa função vetorial do espaço em relação ao tempo t , obtemos o vetor velocidade $\vec{r}'(t)$ da trajetória e, conseqüentemente, sua velocidade $\|\vec{r}'(t)\|$ no instante t .

Efetuando os devidos cálculos, teremos:

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{\theta'(t)^2 + \varphi'(t)^2 \cdot \cos^2\theta(t)} \geq \sqrt{\theta'(t)^2} = |\theta'(t)| \geq -\theta'(t).$$

Logo, sabendo que o comprimento da trajetória é calculado pela expressão $L = \int_0^{t_1} \|\vec{r}'(t)\| dt$, podemos concluir que

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{t_1} \|\vec{r}'(t)\| dt \geq \int_0^{t_1} -\theta'(s) ds \\ \Rightarrow L &\geq \int_0^{t_1} \|\vec{r}'(t)\| dt = -[\theta(t_1) - \theta(0)] = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \end{aligned}$$

e, por fim, temos a prova desejada. □

Definição 3.18 A soma dos lados de um triângulo esférico é menor do que 360° .

3.2.1 Relações Trigonométricas

Lei dos Cossenos para lados

Teorema 3.3 *Seja ABC um triângulo esférico, com lados a, b e c , e ângulos internos A, B e C . Então,*

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$$

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(B)$$

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(C)$$

Demonstração.

Seja ABC um triângulo esférico sobre uma esfera de centro O e raios $\overline{OA} \equiv \overline{OB} \equiv \overline{OC} \equiv 1$, conforme a figura abaixo:

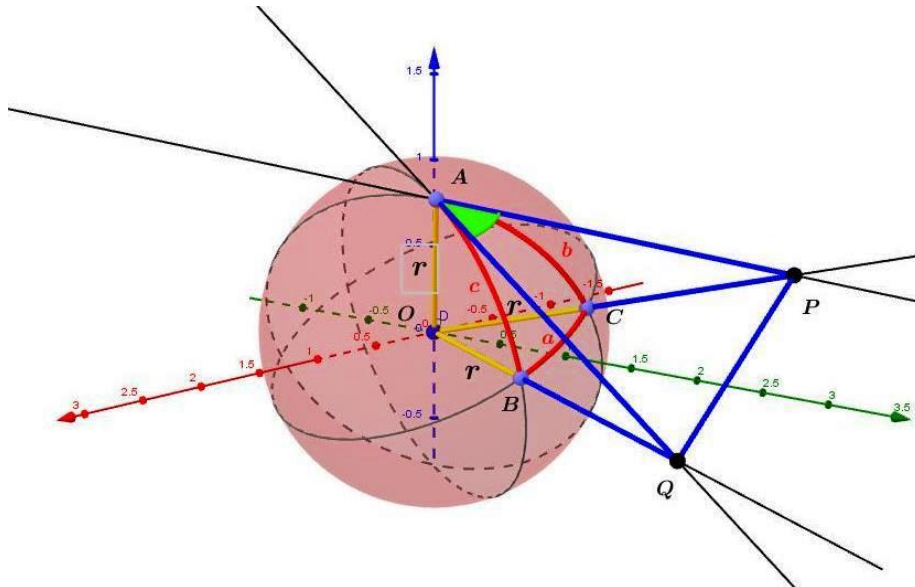


Figura 3.19: Triângulo esférico e suas tangentes.

Sendo assim, destacamos:

- Os lados a, b e c equivalem aos ângulos centrais \widehat{BOC} , \widehat{AOC} e \widehat{AOB} , respectivamente;
- O ângulo interno \widehat{A} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{AB} e \widehat{AC} que passam por A ;
- O ângulo \widehat{B} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{BA} e \widehat{BC} passando por B ;
- O ângulo \widehat{C} é o ângulo formado pelas retas tangentes aos arcos \widehat{CA} e \widehat{CB} passando por C .

Os lados a , b e c são opostos, respectivamente, aos ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} .

Sendo assim, prolongando as tangentes que passam por A e as retas \overrightarrow{OB} e \overrightarrow{OC} , temos que estas se encontram nos pontos P e Q , conforme a Figura 3.19.

As retas \overleftrightarrow{AP} e \overleftrightarrow{AQ} são tangentes à superfície da esfera e, portanto as semirretas \overrightarrow{AO} e \overrightarrow{AP} são perpendiculares, pois uma reta tangente a uma esfera é perpendicular ao raio no ponto de tangência. O mesmo acontece com as semirretas \overrightarrow{AO} e \overrightarrow{AQ} .

Da geometria plana, podemos estabelecer algumas relações trigonométricas. Vejamos, então, que os triângulos OAP e OAQ são retângulos em \hat{A} .

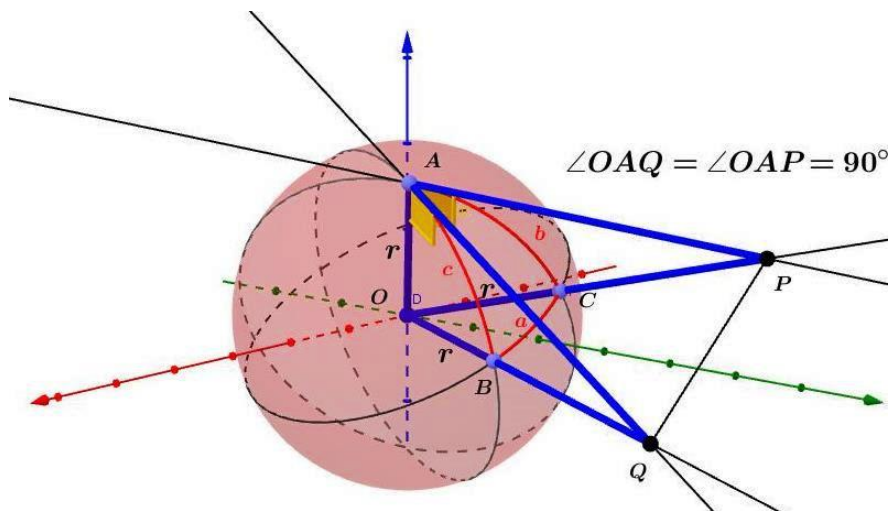


Figura 3.20: Triângulos Retângulos OAQ e OAP .

Então:

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}$$

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}$$

$$\cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}}$$

$$\text{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2$$

$$\overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2$$

Somando estas duas equações, temos que:

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 = 2 \cdot \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2$$

Então,

$$2 \cdot \overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2)$$

Observemos que os triângulos PQO e PQA não são retângulos.

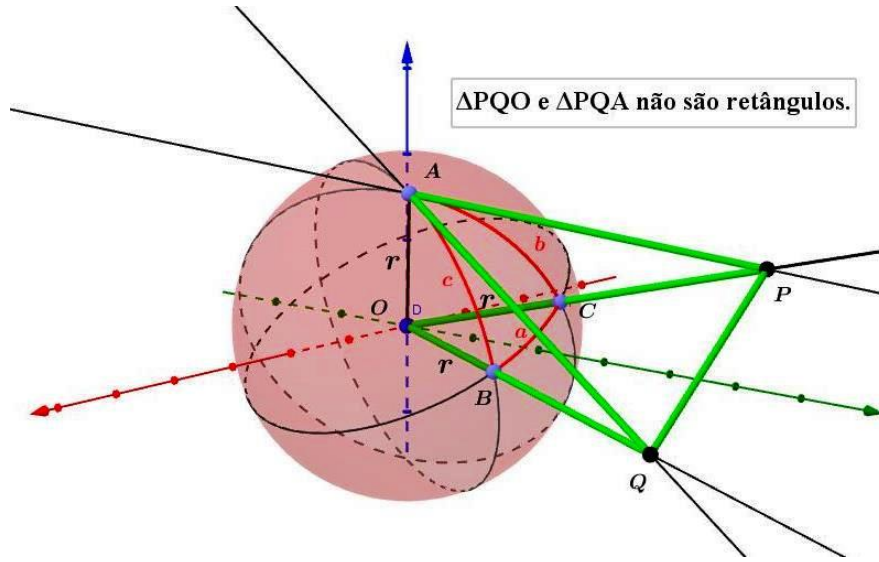


Figura 3.21: Triângulos PQO e PQA .

Logo, aplicando a Lei dos Cossenos da Trigonometria Plana nos triângulos PQO e PQA , temos as seguintes equações:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) \quad (3.1)$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(a) \quad (3.2)$$

Igualando as duas expressões acima, vem:

$$\begin{aligned} \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) &= \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(a) \\ \Rightarrow 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) &= \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - \overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2 + 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(a) \end{aligned}$$

Daí,

$$2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) + 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(a)$$

Sabemos, por (3.1), que $2 \cdot \overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2)$.

Portanto,

$$2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = 2 \cdot \overline{AO}^2 + 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(A)$$

$$\Rightarrow \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) = \overline{AO}^2 + \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(A)$$

Agora, dividindo ambos os membros por $\overline{PO} \cdot \overline{QO}$, fica:

$$\cos(A) = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos(A)$$

Ou seja,

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO} \cdot \overline{AO}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} + \frac{\overline{AP} \cdot \overline{AQ}}{\overline{PO} \cdot \overline{QO}} \cdot \cos(A)$$

Sendo assim, substituindo $\frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} = \cos(b)$; $\frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} = \cos(c)$; $\frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} = \sin(b)$ e $\frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}} = \sin(c)$, chegamos na fórmula fundamental para triângulos esféricos.

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$$

De forma análoga, chegamos às outras duas combinações, completando assim, o grupo das chamadas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica:

$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(B)$$

e

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(C).$$

□

Lei dos Senos

Teorema 3.4 *Em um triângulo esférico, os senos dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos.*

Demonstração.

Tomemos, novamente, um triângulo esférico ABC , com lados a , b e c .

Tracemos o plano perpendicular ao raio AO que passa por C e o plano perpendicular ao raio OB que passa por C . A intersecção desses planos com o ângulo triedro associado ao triângulo ABC formam os triângulos planos CED e CDF , como vemos na figura abaixo:

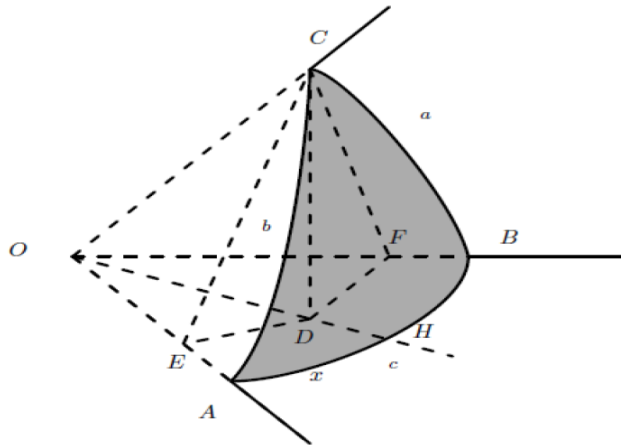


Figura 3.22: Lei dos Senos. Fonte: [12]

Sabemos que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = r$ (onde r é o raio da esfera).

Por construção, temos, então, que

$$\text{sen}(b) = \frac{\overline{CE}}{r},$$

$$\text{cos}(b) = \frac{\overline{OE}}{r},$$

$$\text{sen}(a) = \frac{\overline{CF}}{r},$$

e

$$\text{cos}(a) = \frac{\overline{OF}}{r}.$$

Por outro lado, $\text{sen}(A) = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CE} \cdot \text{sen}(A)$ (pois o ângulo \widehat{CED} é igual ao ângulo A) e $\text{sen}(B) = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \Rightarrow \overline{CD} = \overline{CF} \cdot \text{sen}(B)$ (pois $\widehat{CFD} = \widehat{B}$). Assim teremos:

$$\overline{CE} \cdot \text{sen}(A) = \overline{CF} \cdot \text{sen}(B)$$

e, conseqüentemente,

$$r \cdot \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(A) = r \cdot \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(B).$$

Donde se conclui que

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(B)}.$$

Com um raciocínio análogo, obteremos que:

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(A)} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(C)}$$

□

Observe que, em todas as fórmulas trigonométricas obtidas, não aparece o raio da esfera utilizada. Isso é de fundamental importância para a astronomia esférica, ou astronomia de posição, a qual diz respeito fundamentalmente às direções nas quais os astros são vistos, sem se preocupar com sua distância.

É conveniente expressar essas direções em termos das posições sobre a superfície de uma esfera. Essas posições são medidas unicamente em ângulos. Dessa forma, o raio da esfera, que é totalmente arbitrário, não entra nas equações. Isso permite que as fórmulas apresentadas possam ser utilizadas.

Veremos nas atividades a seguir como efetuar alguns cálculos valendo-se da Trigonometria Esférica e, principalmente, como calcular a distância entre dois pontos do Globo Terrestre com o auxílio da Lei dos Cossenos, também chamada de Fórmula dos 4 Elementos, conhecendo-se apenas suas coordenadas geográficas (longitude e latitude), de modo a notarmos, ao final, a desnecessidade do uso de mapas cartográficos.

3.3 Atividades

1. (Extraído e Adaptado de [15]): Antares (Alfa Scorpii ou Alfa do Escorpião) é a estrela mais brilhante da constelação do Escorpião e uma das 20 estrelas mais brilhantes do céu. Ela tem um diâmetro de cerca de 900 vezes (Baade, R. e Reimers, D., *Astronomy and Astrophysics* 474 (1): 229-237, 2007) o diâmetro do Sol e é uma Supergigante Vermelha.

a) Se colocada na posição do Sol, Antares, por seu tamanho, envolveria até além da órbita de Marte. Considerando o diâmetro do Sol como sendo de 1.400.000 km e sabendo que 1 Unidade Astronômica (U.A.) = 150.000.000 km, calcule o diâmetro da estrela Antares em U.A.

Solução:

Chamemos D_A =Diâmetro de Antares e D_S =Diâmetro do Sol

Assim sendo,

$$D_A = 900 \cdot D_S = 900 \cdot 1400000 \text{ km}$$

Logo,

$$D_A = \frac{900 \cdot 1400000}{150000000} = \frac{9 \cdot 14}{15} = 8,4 \text{ U.A.}$$

- b) Calcule quantas estrelas iguais ao Sol cabem dentro de Antares.

Solução:

Sejam V_A =Volume de Antares e V_S =Volume do Sol.

Daí,

$$\frac{V_{Antares}}{V_{Sol}} = \frac{(D_A)^3}{(D_S)^3} = \left(\frac{D_A}{D_S}\right)^3 = \left(\frac{900 \cdot D_S}{D_S}\right)^3 = 900^3 = 729 \cdot 10^6$$

2. (Extraído e Adaptado de [13]): Determine a área de um triângulo esférico que está contido na superfície esférica de raio 10 cm, onde $\alpha = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ$ e $\gamma = 5^\circ$. Use $\pi = 3,14$.

Solução:

Pelo Teorema 3.1 da Trigonometria Esférica, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{a}{r^2},$$

donde α , β e γ são as medidas dos ângulos internos do Triângulo Esférico, a é a área deste triângulo e r é o raio da superfície esférica.

Assim, convertendo os ângulos de graus para radianos, vem:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{36} = \pi + \frac{a}{10^2}$$

$$\Rightarrow \pi + \frac{\pi}{36} = \pi + \frac{a}{100}$$

Daí, vem:

$$\frac{\pi}{36} = \frac{a}{100}$$

Logo,

$$a = \frac{100 \cdot \pi}{36} = \frac{100 \cdot 3,14}{36} = 8,72 \text{ cm}^2$$

3. (Extraído e adaptado de [14]): A cidade de Kingston, Jamaica, tem as seguintes coordenadas geográficas: latitude $18^\circ 5'N$ e longitude $76^\circ 58'W$, enquanto que a cidade de Bristol, Inglaterra, tem latitude $51^\circ 26'N$ e longitude $2^\circ 35'W$. De posse desses dados, determine a distância entre Kingston e Bristol, utilizando a fórmula do Triângulo Esférico.

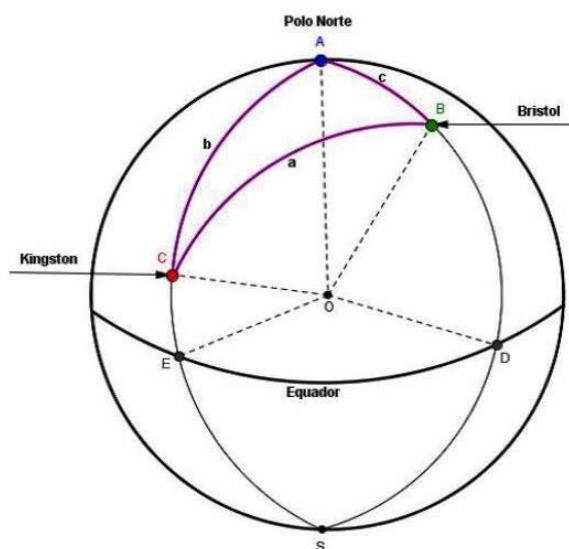


Figura 3.23: Distância entre as cidades no Triângulo Esférico. (Fonte: [14])

Solução:

Inicialmente, consideraremos o Globo Terrestre de modo que um dos vértices do triângulo esférico coincida com o Polo Norte, e os outros vértices coincidam com as cidades entre as quais queremos saber a distância e cujas coordenadas (latitudes e longitudes) conhecemos.

Então, designamos os seguintes pontos: A = Polo Norte, B =Cidade de Bristol e C = Cidade de Kingston, conforme a Figura 3.23.

Diante disso, verificaremos que, com o uso da Fórmula Fundamental, teremos a possibilidade de determinar o valor do arco menor a da circunferência máxima que passa pelas duas cidades.

Sendo assim, como o arco AD tem 90° e o arco BD tem $51^\circ 26'$ (latitude de Bristol), então,

$$c = 90^\circ - 51^\circ 26' = 38^\circ 34'.$$

Analogamente, temos:

$$b = 90^\circ - 18^\circ 5' = 71^\circ 55'.$$

Como o ângulo \hat{A} está associado ao arco DE , então, para determiná-lo, basta fazer a diferença entre as longitudes, isto é:

$$A = 76^\circ 58' - 2^\circ 35' = 74^\circ 23'.$$

Por fim, basta aplicar os dados na fórmula fundamental:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(A)$$

Assim sendo,

$$\cos(a) = \cos(71^\circ 55') \cdot \cos(38^\circ 34') + \sin(71^\circ 55') \cdot \sin(38^\circ 34') \cdot \cos(74^\circ 23')$$

$$\Rightarrow \cos(a) = \cos(71,9166^\circ) \cdot \cos(38,5666^\circ) + \sin(71,9166^\circ) \cdot \sin(38,5666^\circ) \cdot \cos(74,3833^\circ)$$

$$\Rightarrow \cos(a) = 0,310401 \cdot 0,781884 + 0,950605 \cdot 0,623423 \cdot 0,269200$$

$$\Rightarrow \cos(a) = 0,242697 + 0,159535$$

Daí,

$$\cos(a) = 0,402232$$

Logo,

$$a = \arccos(0,402232)$$

Portanto,

$$a = 66,28^\circ$$

Como 1° de circunferência máxima corresponde na superfície terrestre a aproximadamente 111,6 km, (veja mais adiante, conforme exercício 4 do próximo capítulo), temos, então, que a distância entre Kingston e Bristol é de, aproximadamente, $66,28 \cdot 111,6 = 7396,84$ km.

4. (Extraído e adaptado de [5]): Os comandantes de navios, comumente, defrontam-se com a escolha da melhor alternativa para uma travessia transoceânica: a Rota Ortodrômica³ ou a Rota Loxodrômica⁴. Optando-se pela navegação ortodrômica, poderá encontrar geleiras no caminho, pois este tipo de derrota, dependendo das coordenadas geográficas dos pontos de partida e de chegada, alcança altas altitudes, as quais ficam sujeitas, no verão, à presença de icebergs, enquanto que a derrota loxodrômica evitaria esse inconveniente, porém a distância por este caminho é maior, pelo fato de não ser uma geodésica. Logo, o que se poderia ganhar em tempo e em combustível poderia não justificar o risco do encontro com a geleira e fortes temporais, comuns nas proximidades dos polos.

A figura abaixo esquematiza as condições do problema:

³Ortodromia é qualquer segmento de um círculo máximo da esfera terrestre. É, portanto, a menor distância entre dois pontos na Superfície da Terra

⁴Loxodromia é a linha que intersecta os vários meridianos segundo um ângulo constante

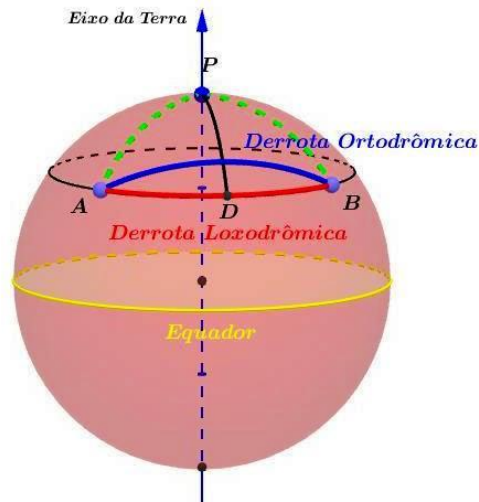


Figura 3.24: Derrotas Loxodrômica e Ortodrômica.

Sabendo que no Hemisfério Norte, na época do verão, são encontrados icebergs à deriva nas latitudes maiores ou iguais a 62°N , o comandante de um navio deseja saber:

a) qual a latitude máxima alcançada pela derrota ortodrômica que liga os portos A e B , ambos situados na mesma latitude de 49°N e cuja diferença da longitude de um ponto para o outro é de 120° ?

Solução:

Antes de passarmos à resolução propriamente dita do exercício, é de fundamental importância apresentarmos as **Fórmulas para Triângulos Retângulos** inerentes à Trigonometria Esférica.

Assim sendo, consideremos o triângulo retângulo esférico ABC de lados a , b e c de uma esfera de centro O e ângulo $\hat{A} = 90^\circ$, conforme a figura abaixo:

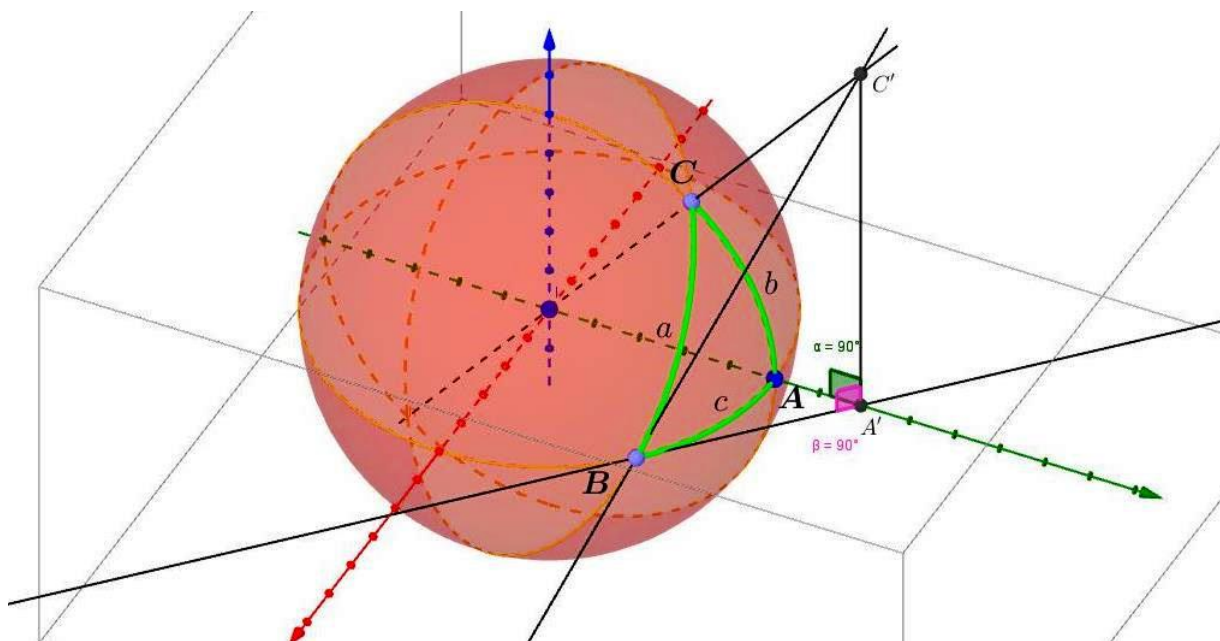


Figura 3.25: Triângulo Retângulo Esférico.

Traça-se, por B , a tangente ao círculo máximo AB que, conseqüentemente, intersectará o prolongamento do raio OA em A' . Notemos que esta tangente pertence ao plano AOB .

Agora, traça-se, também por B , a tangente ao círculo máximo BC , que intersectará o prolongamento do raio OC em C' . Em seguida, liga-se A' a C' .

Observemos que os planos $A'BC'$ e AOB são perpendiculares (pois a reta \overleftrightarrow{OB} é perpendicular às retas $\overleftrightarrow{BA'}$ e $\overleftrightarrow{BC'}$, no ponto de tangência B).

Também são perpendiculares os planos AOC e AOB (pois o ângulo \hat{A} é reto).

A reta $A'C'$, sendo a intersecção dos planos AOC e $A'BC'$, é perpendicular ao plano AOB . Logo, os ângulos $O\hat{A}'C'$ e $B\hat{A}'C'$ são retos.

Assim, a Figura 3.25 ilustra quatro triângulos retângulos planos: $BA'C'$ e $OA'C'$, ambos retos em \hat{A} ; e, também, OBA' e OBC' , ambos retos em B .

Notemos as seguintes igualdades relativas aos ângulos e arcos do Triângulo Esférico ABC : $A'\hat{B}C' = \hat{B}$, $C'\hat{O}A' = b$, $A'\hat{O}B = c$ e $C'\hat{O}B = a$.

Analisemos, agora os triângulos retângulos obtidos e suas principais relações trigonométricas:

- Triângulo $BA'C'$

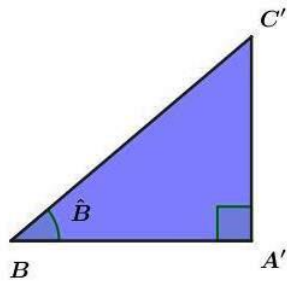


Figura 3.26: Triângulo Retângulo Plano BA'C'.

De fato, $\cos(\hat{B}) = \frac{A'B}{BC'}$; $\text{sen}(\hat{B}) = \frac{A'C'}{BC'}$; e, $\text{tg}(\hat{B}) = \frac{A'C'}{A'B}$

- Triângulo OA'C'

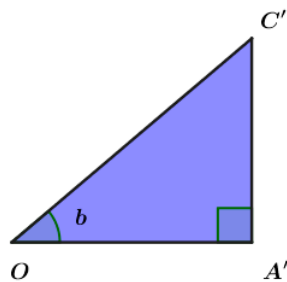


Figura 3.27: Triângulo Retângulo Plano OA'C'.

Logo, $\cos(b) = \frac{OA'}{OC'}$; $\text{sen}(b) = \frac{A'C'}{OC'}$; e, $\text{tg}(b) = \frac{A'C'}{OA'}$

- Triângulo OBA'

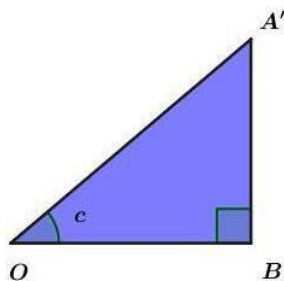


Figura 3.28: Triângulo Retângulo Plano OBA'.

Assim, $\cos(c) = \frac{OB}{OA'}$; $\text{sen}(c) = \frac{BA'}{OA'}$; e, $\text{tg}(c) = \frac{BA'}{OB}$

- Triângulo OBC'

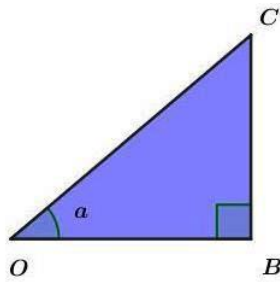


Figura 3.29: Triângulo Retângulo Plano OBC'.

$$\text{Portanto, } \cos(a) = \frac{OB}{OC'}; \text{ sen}(a) = \frac{BC'}{OC'}; \text{ e, } \text{tg}(a) = \frac{BC'}{OB}$$

Agora, podemos extrair algumas relações importantes. Diante disso, podemos escrever:

(a)

$$\frac{OB}{OC'} = \frac{OA'}{OC'} \cdot \frac{OB}{OA'}$$

$$\Rightarrow \cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c)$$

(b)

$$\frac{A'C'}{BC'} = \frac{A'C'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{BC'}$$

$$\Rightarrow \text{sen}(B) = \text{sen}(b) \cdot \frac{1}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(a)}$$

$$\Rightarrow \text{sen}(b) = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(B)$$

Por analogia, temos:

$$\text{sen}(c) = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(C)$$

(c)

$$\frac{A'B}{BC'} = \frac{A'B}{OB} \cdot \frac{OB}{BC'}$$

$$\Rightarrow \cos(B) = \text{tg}(c) \cdot \frac{1}{\text{tg}(a)} = \frac{\text{tg}(C)}{\text{tg}(a)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(c) = \cos(B) \cdot \operatorname{tg}(a)$$

Analogamente, vem:

$$\operatorname{tg}(b) = \cos(C) \cdot \operatorname{tg}(a)$$

(d)

$$\frac{A'C'}{A'B} = \frac{A'C'}{OA'} \cdot \frac{OA'}{A'B}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(B) = \operatorname{tg}(b) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(c)} = \frac{\operatorname{tg}(b)}{\operatorname{sen}(c)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(b) = \operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{sen}(c)$$

Por analogia, também, temos:

$$\operatorname{tg}(c) = \operatorname{tg}(C) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

(e) Agora, multiplicando estas duas últimas relações do item (d), temos:

$$\operatorname{tg}(b) \cdot \operatorname{tg}(c) = \operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{tg}(C) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{tg}(C) = \frac{\operatorname{tg}(b) \cdot \operatorname{tg}(c)}{\operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(b)} = \frac{\frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(c)}{\cos(c)}}{\operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(b)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{tg}(C) = \frac{1}{\cos(b) \cdot \cos(c)}$$

Mas, sabemos, pelo item (a), que $\cos(b) \cdot \cos(c) = \cos(a)$. Daí, podemos reescrever na seguinte forma:

$$\operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{tg}(C) = \frac{1}{\cos(b) \cdot \cos(c)}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{tg}(C) = \frac{1}{\cos(a)}$$

Daí,

$$\cos(a) = \frac{1}{\operatorname{tg}(B) \cdot \operatorname{tg}(C)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(B)} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}(C)}$$

$$\Rightarrow \cos(a) = \cot g(B) \cdot \cot g(C)$$

Por fim, efetuando o produto da expressão do item (b) pela do item (c), ou seja, $\operatorname{sen}(c) = \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(C)$ por $\operatorname{tg}(C) = \cos(B) \cdot \operatorname{tg}(a)$, obtemos:

$$\operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(C) = \cos(B) \cdot \operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{sen}(C)$$

$$\Rightarrow \cos(B) = \frac{\operatorname{tg}(c) \cdot \operatorname{sen}(a)}{\operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{sen}(C)} =$$

Logo,

$$\cos(B) = \frac{\cos(a) \cdot \operatorname{sen}(C)}{\cos(C)}$$

Porém, pelo item (a), sabemos que $\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c)$

Assim,

$$\cos(B) = \operatorname{sen}(C) \cdot \cos(b)$$

Feito isto, passemos à resolução do exercício!

Sejam os pontos A , B e P a representação dos Portos A e B e do Polo Norte, respectivamente, conforme a Figura 3.24.

Sabemos que o ponto médio da derrota ortodrômica entre os dois portos A e B , que denotaremos por ponto D , é onde apresentará a maior latitude alcançada pelo navio.

Logo, temos que os triângulos retângulos esféricos APD e BPD , são retos em D , pois PD é um arco de círculo máximo perpendicular ao círculo máximo AB .

Destes dois triângulos congruentes, temos: as hipotenusas AP e BP (co-latitudes dos portos A e B); os ângulos congruentes λ e os ângulos retos (90°), com vértices em D .

Chamando de x o lado comum PD dos triângulos, temos:

$$\operatorname{tg}(x) = \cos(\lambda) \cdot \operatorname{tg}(AP)$$

Logo,

$$\operatorname{tg}(x) = \cos(60^\circ) \cdot \operatorname{tg}(41^\circ) = 0,5 \cdot 0,86929$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}(x) = 0,434645$$

Daí,

$$x = \operatorname{arctg}(0,434645)$$

Assim,

$$x = 23^{\circ}29,5'$$

Portanto, a maior latitude atingida pelo arco de círculo máximo será de:

$$90^{\circ} - x = 90^{\circ} - 23^{\circ}29,5' = 66^{\circ}30,5'$$

b) de quantas milhas marítimas a derrota ao longo do paralelo (círculo menor) excede à de círculo máximo?

Solução:

Neste momento, iremos estabelecer a relação entre o arco de Paralelo e o correspondente arco do Equador, antes de prosseguirmos com a resolução do exercício.

Sabemos que dois meridianos quaisquer do Globo Terrestre, ao convergirem para o polos, intersectam os diversos paralelos do globo, determinando arcos nos mesmos, os quais diminuem como aumento da latitude. Sendo assim, quanto maior é a latitude de um paralelo, menor é a distância entre estes dois meridianos, contados ao longo desse paralelo.

Sejam $\widehat{A'B'}$ um arco de paralelo de centro C , \widehat{AB} o correspondente deste arco no Equador e ϕ a latitude do paralelo, conforme a figura abaixo:

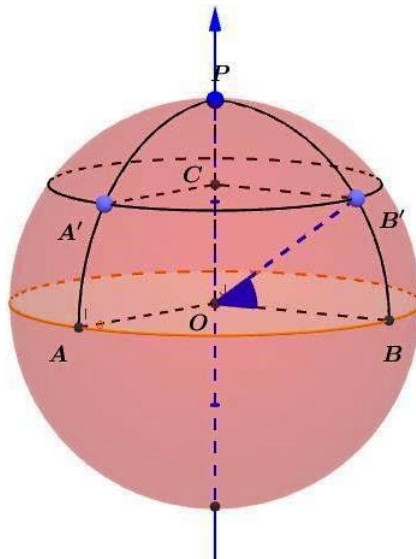


Figura 3.30: Relação entre o arco de Paralelo e o arco do Equador.

De fato, o raio da Terra OP é perpendicular ao raio CB' do paralelo em questão. Logo, temos o triângulo COB' , reto em C e podemos escrever:

$$\text{sen}(90^{\circ} - \phi) = \frac{CB'}{OB'}$$

$$\Rightarrow CB' = OB' \cdot \text{sen}(90^\circ - \phi)$$

Logo,

$$CB' = OB' \cdot \text{cos}\phi$$

Por outro lado,

$$\frac{A'B'}{\widehat{AB}} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{OB}}$$

Mas, por serem ambos o Raio da Terra, temos que $OB = OB'$. Daí,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\overline{CB'}}{\overline{OB}} = \frac{OB' \cdot \text{cos}\phi}{OB} = \text{cos}\phi$$

Então,

$$A'B' = AB \cdot \text{cos}\phi$$

Agora, resolveremos o exercício propriamente dito!

Seja d a distância ao longo do paralelo (derrota loxodrômica) e w , a distância ao longo do círculo máximo (derrota ortodrômica) entre os portos A e B .

Sendo assim, temos:

$$d = \widehat{AB} = 2 \cdot \lambda \cdot \text{cos}(\theta) = 2 \cdot 60 \cdot \text{cos}(49^\circ) = 120 \cdot 0,65605 \cong \mathbf{78,7^\circ}$$

e $w = AD + DB = 2AD$, pois $AD = DB$.

Assim, empregando a Lei dos Senos ao triângulo APD , tem-se:

$$\frac{\text{sen}(AD)}{\text{sen}(\lambda)} = \frac{\text{sen}(AP)}{\text{sen}(90^\circ)}$$

$$\Rightarrow \text{sen}(AD) = \frac{\text{sen}(\lambda) \cdot \text{sen}(AP)}{\text{sen}(90^\circ)} = \text{sen}(\lambda) \cdot \text{sen}(90^\circ - \phi) = \text{sen}(\lambda) \cdot \text{cos}(\theta)$$

$$\Rightarrow \text{sen}(AD) = \text{sen}(60^\circ) \cdot \text{cos}(49^\circ) = 0,86602 \cdot 0,65605 = 0,56815$$

$$\Rightarrow AD = \text{arcsen}(0,56815)$$

Logo,

$$AD \cong 34,6^\circ$$

Por outro lado,

$$w = 2 \cdot AD = 2 \cdot 34,6^\circ = \mathbf{69,2^\circ}$$

Neste ponto, é importante salientarmos que, na Navegação Marítima, a unidade de distância é a milha marítima, que corresponde ao comprimento do arco de $1'$ (um minuto) de uma circunferência máxima do Globo Terrestre, que no caso é de 60 milhas marítimas, ou seja, $1^\circ = 60$ milhas marítimas.

Agora, temos que a derrota loxodrômica ($d = 78,7^\circ$) corresponde a 4722 milhas marítimas, enquanto que a derrota ortodrômica ($w = 69,2^\circ$), corresponde a 4152 milhas marítimas. Desta forma, há uma diferença de cerca de 570 milhas, ou seja, a derrota ao longo do paralelo excede à derrota do círculo máximo em 570 milhas marítimas.

Por fim, é de fundamental importância salientarmos que, para um navio com velocidade de 20 nós, tem-se um aumento aproximado de 30 horas no tempo de viagem e, lembrando que um navio de porte médio não gasta menos do que 2 mil litros/hora de combustível, trata-se de uma diferença apreciável.

Todavia, a decisão do comandante terá que ser ponderada por outros fatores, pois a possibilidade de encontrar icebergs à deriva não está descartada, uma vez que a derrota ortodrômica alcançará, no caso, aproximadamente a latitude de 67° , e isto poderá retardar a viagem.

3.4 A construção da Esfera com o software Geogebra

Esta construção com o software Geogebra visa a criação de uma esfera para o estudo didático do Globo Terrestre. Esta elaboração inicial servirá de base para as demais construções, as quais, progressivamente, através da abordagem dos temas e das atividades dos sucessivos capítulos, representarão, didaticamente, o Globo Terrestre e o posicionamento de um ponto sobre a superfície terrestre, segundo suas coordenadas geográficas (latitude e longitude), possibilitando a modelagem do cálculo da distância entre dois pontos situados no Globo.

Em virtude disso, como objetivo final, criaremos um sistema de posicionamento que representará um ponto da superfície esférica, servindo de instrumento para o estudo das Coordenadas Geográficas (latitude e longitude).

- Objetivos:
 - Construir uma superfície esférica de raio unitário com centro na origem do sistema de coordenadas cartesianas tridimensional, voltada para o estudo do Globo Terrestre;
- Conhecimentos prévios:
 - Sistema de coordenadas cartesianas;

- Geometria plana e espacial (esfera);
- Conhecimentos básicos do Software Geogebra.

- Material necessário:

- Laboratório de informática;
- Computadores com a instalação do Software Geogebra.

- A CONSTRUÇÃO:

1. Abra o software Geogebra, clique no menu “Exibir” e depois na opção “Janela de Visualização 3D” ou pressione as teclas “ctrl+shift+3” para o respectivo atalho; Em seguida, feche a Janela de Visualização 2D, na área de trabalho do software, se for o caso.

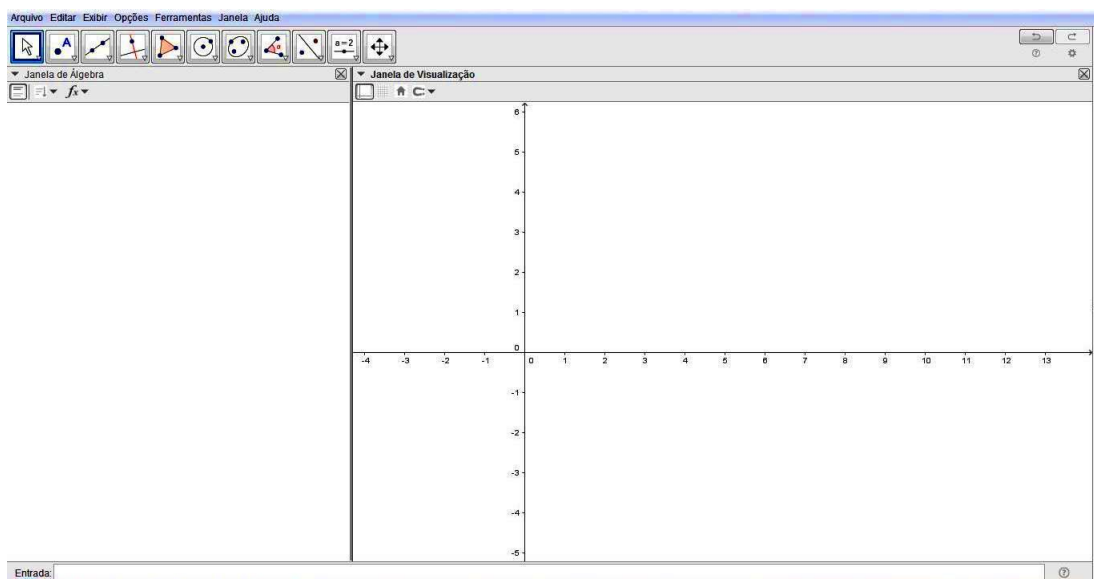


Figura 3.31: Tela Inicial do Geogebra.

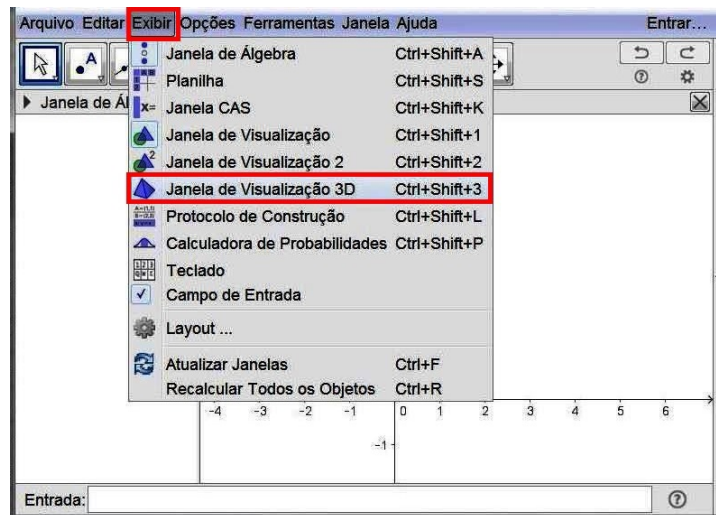


Figura 3.32: Menu Exibir/Janela de Visualização 3D.

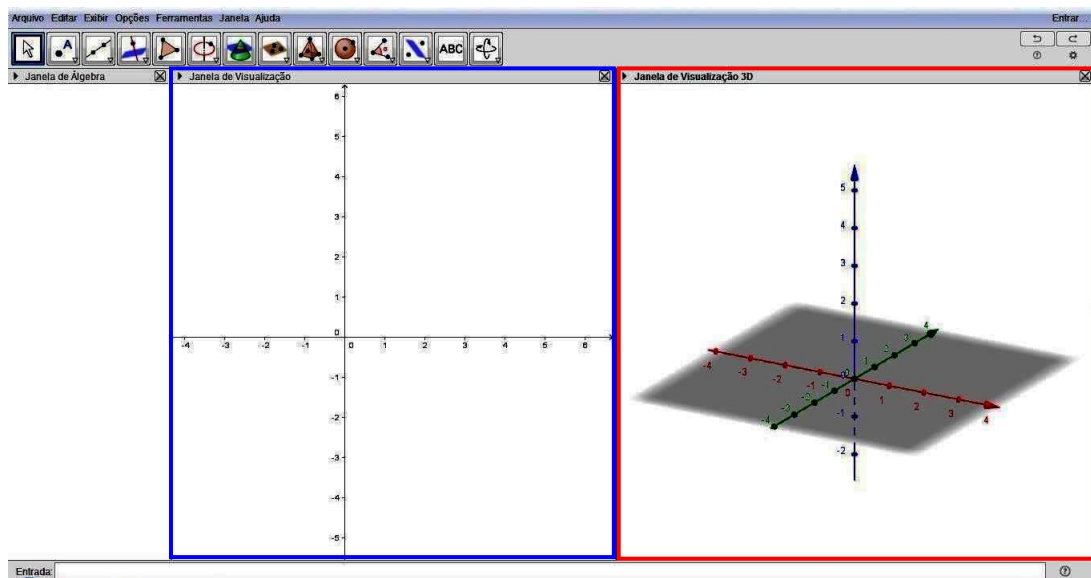


Figura 3.33: Janelas de visualização 2D e 3D.

Afim de padronizarmos algumas funcionalidades para esta construção, façamos as seguintes configurações:

- (a) Na Janela de Visualização 3D, clique com o botão direito do mouse para abrir a caixa de configurações intitulada “Janela de Visualização 3D” e desmarque a opção “Plano”, afim de limparmos o campo de visão e, em seguida, na mesma caixa, clique na opção “Janela de Visualização...”.

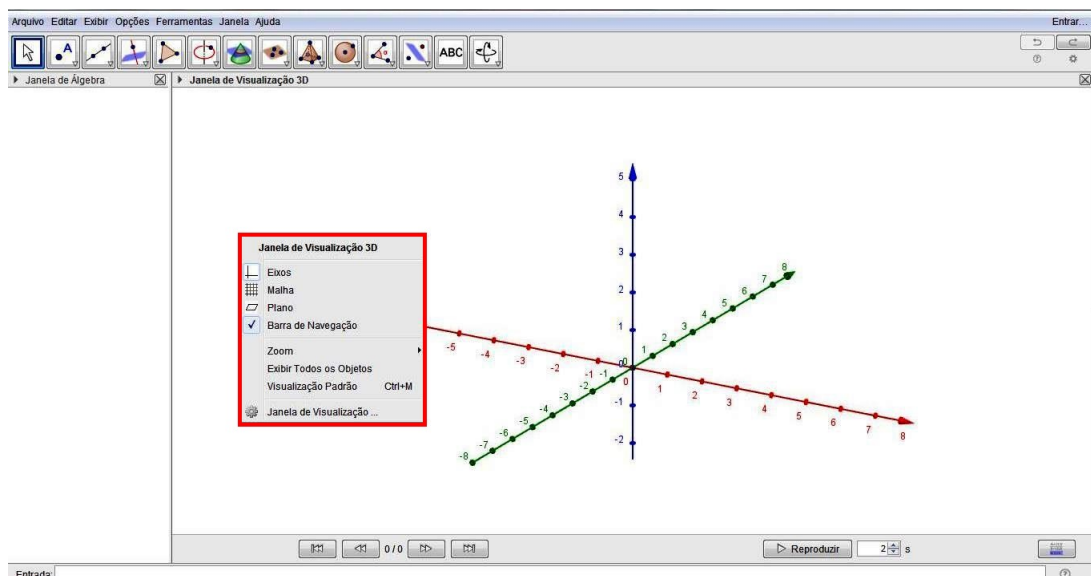


Figura 3.34: Caixa de configurações Janela de Visualização 3D.

- (b) Na próxima caixa, chamada Preferências, na guia “Básico”, opção “Barra de Navegação para Passos da Construção”, selecione a caixa “Exibir”; enquanto que, na opção “Clipping”, selecione a caixa “Habilitar Clipping”, marcando Tamanho da caixa de clipping: Médio e, após, feche a Janela de Preferências. Tal habilitação de clipping, que será utilizada em todas as construções deste trabalho, fica a critério do leitor, pois esta opção serve apenas para que as partes dos objetos contidas na mesma sejam visualizadas. Entretanto, caso o leitor não julgue necessária esta ação, pode-se desmarcar a caixa “Habilitar Clipping”.

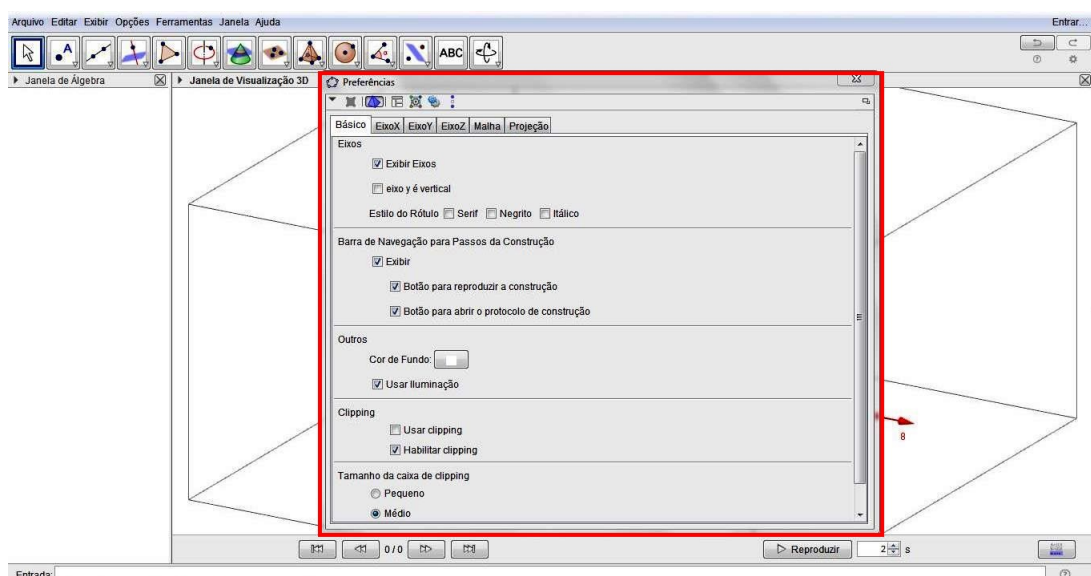


Figura 3.35: Caixa Preferências.

- (c) Clicar na ferramenta “Girar Janela de Visualização 3D” e rotacionar o espaço afim de visualizar os dois semieixos positivos x e y frontalmente. Caso queira, aplique zoom utilizando o scroll do mouse para ampliar a construção.

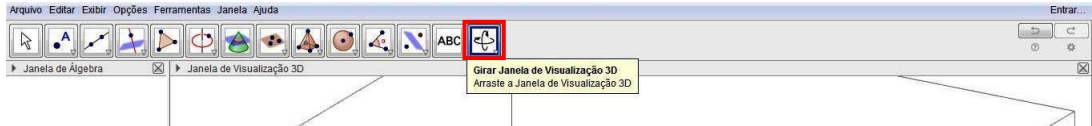


Figura 3.36: Ferramenta Girar Janela de Visualização 3D.

Criamos assim, o Layout Inicial para a construção das nossas atividade com o software Geogebra!

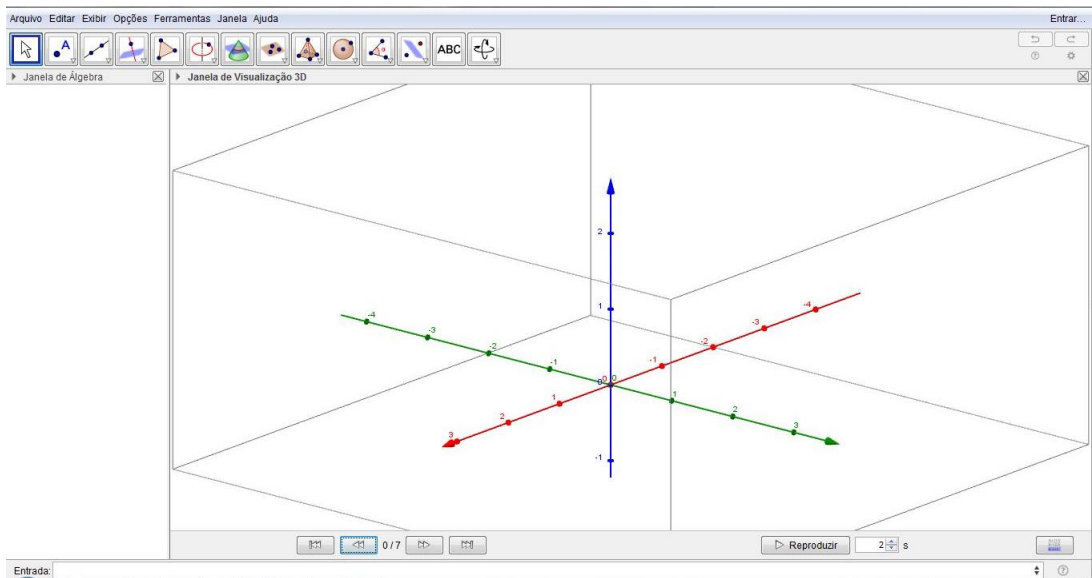


Figura 3.37: Layout Inicial.

2. Crie os pontos $A = (0, 0, 1)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (1, 0, 0)$ e $D = (0, 0, 0)$, inserindo-os no Campo de Entrada ou simplesmente, clicando na ferramenta “Ponto” e depois, nas suas respectivas coordenadas no sistema cartesiano tridimensional. Caso seja necessário, renomeie os pontos para fins de padronização.

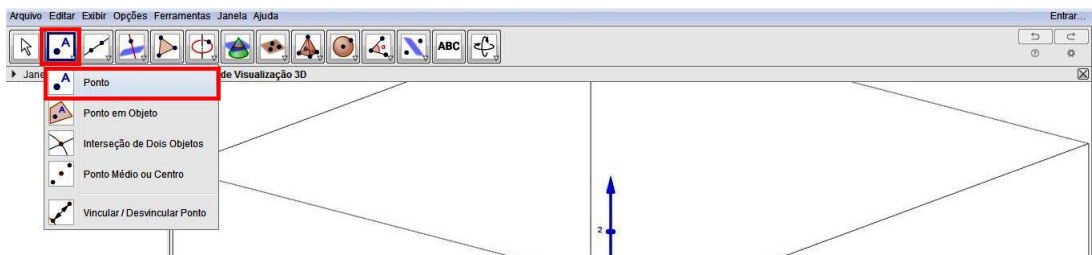


Figura 3.38: Ferramenta Ponto.

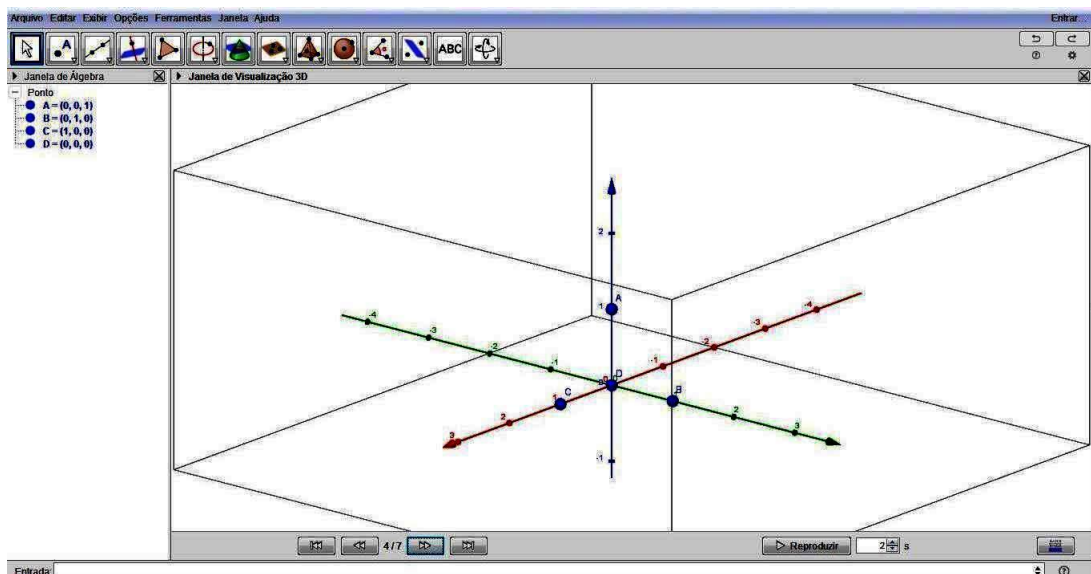


Figura 3.39: Criação de pontos.

3. Clique na ferramenta “Plano por três pontos” para criar os planos $a = (ACD)$ e $b = (BCD)$, devendo-se, para isto, clicar ponto-a-ponto. Assim, clique primeiramente na ferramenta e, depois, nos pontos A , C e D . Analogamente, para os pontos B , C e D .

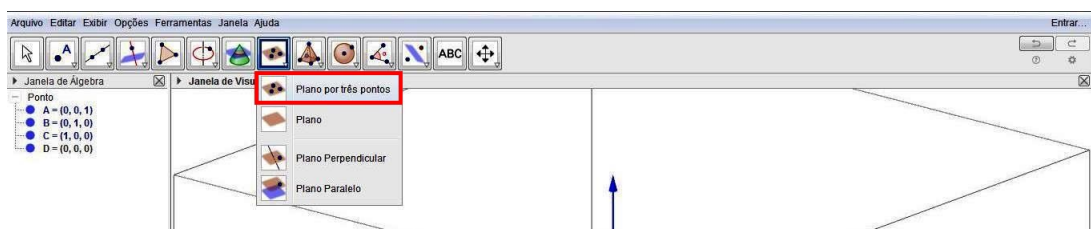


Figura 3.40: Ferramenta Plano por três pontos.

Notemos que estes planos, a e b , são perpendiculares, cujas equações mostradas na Janela de Álgebra, são $y = 0$ e $z = 0$, respectivamente. Outra maneira de criar os planos é, simplesmente, digitar suas equações no Campo de Entrada.

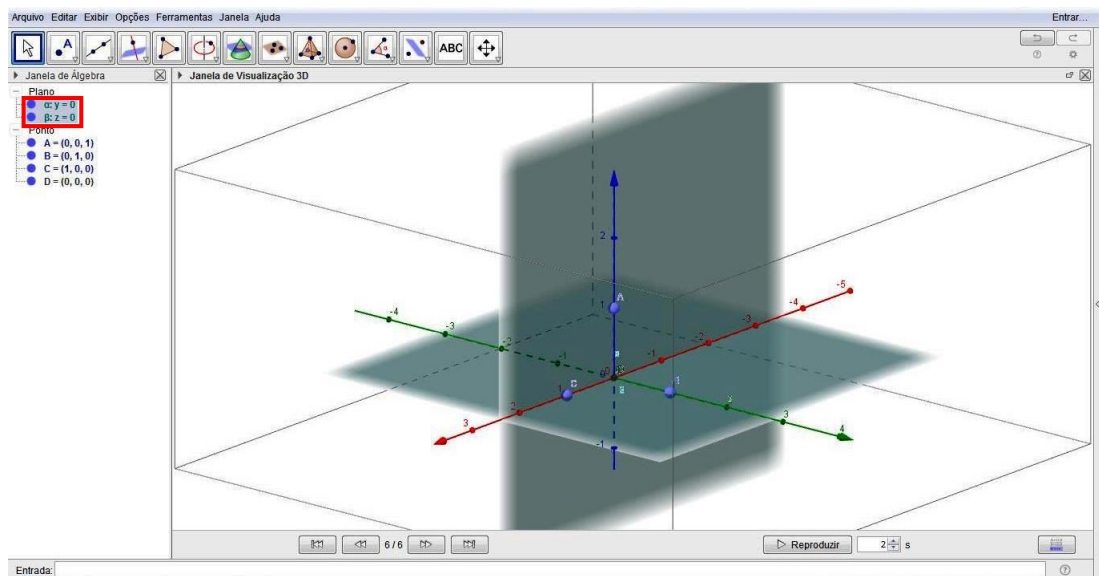


Figura 3.41: Criação de planos.

4. Clique na ferramenta “Esfera Dado o Centro e um de Seus Pontos”, construa uma superfície esférica com centro em $D = (0, 0, 0)$ e em qualquer um dos pontos A ou B ou C .

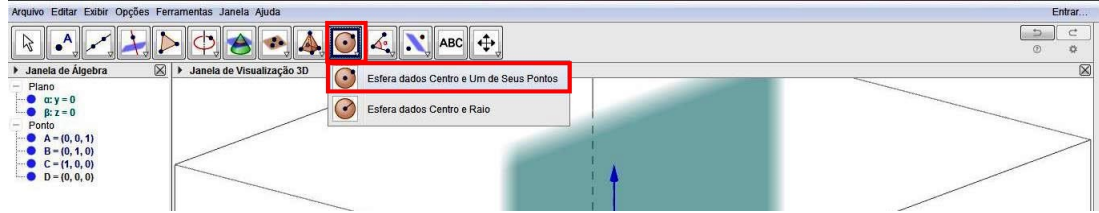


Figura 3.42: Ferramenta Esfera Dados Centro e Um de Seus Pontos.

Note que o raio mede 1 unidade e, também, que a esfera pode ser obtida, simplesmente, digitando sua equação $(x^2 + y^2 + z^2 = 1)$ no Campo de Entrada.

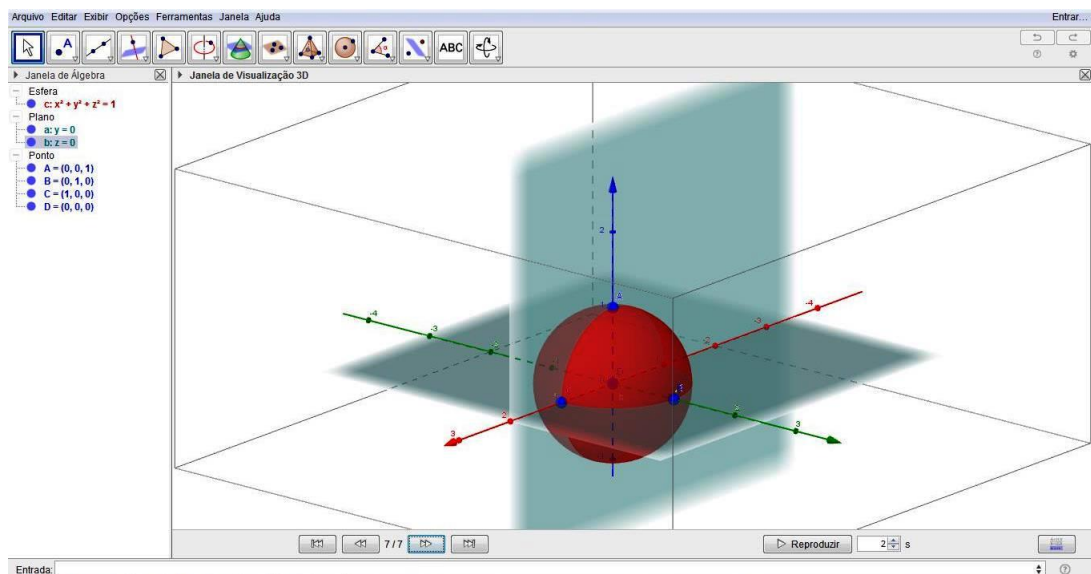


Figura 3.43: Criação da esfera.

É importante salientarmos que a elaboração da esfera descrita acima visa a padronização das demais construções. Esta forma padronizada será utilizada nas atividades dos capítulos posteriores como, por exemplo, a construção do modelo do Globo Terrestre e seus principais elementos e a construção do modelo de estudo das Coordenadas Geográficas.

Essa construção poderia, em muito, ser simplificada e reduzida ao fato de apenas digitarmos a equação da esfera no Campo de Entrada ou até mesmo, selecionando a ferramenta “Esfera Dado Centro e Um de Seus Pontos” e, posteriormente, clicando no ponto $D = (0, 0, 0)$ e no ponto $A = (0, 0, 1)$.

Convém destacarmos que o fato de escolhermos o raio como 1 unidade é de fundamental importância no cálculo, uma vez que a unidade de medida é a unidade comparativa com a unidade de grau, que por sua vez, é utilizada para o cálculo da área de porções da esfera unitária ou medir distâncias entre pontos do Globo Terrestre.

Capítulo 4

O Globo Terrestre

O presente capítulo visa apresentar os estudos referentes ao Globo Terrestre, no que diz respeito ao formato esférico da Terra, considerado para fins didáticos, bem como a definição dos seus principais elementos e a apresentação dos principais paralelos e meridianos do Globo Terrestre. Cabe ressaltar que foram utilizadas, como base para a estruturação deste capítulo, as seguintes referências: [25] e [26].

4.1 A Terra esférica e seus principais elementos

A superfície terrestre apresenta inúmeras irregularidades exteriores em virtude das suas diferentes formas de relevo, como por exemplo vales, depressões, montanhas, etc, sendo, portanto, denominada Superfície Topográfica, a qual não possui representação matemática. Assim sendo, concedeu-se o Geóide, que seria o sólido formado pela superfície do nível médio dos mares, supondo-o recobrimdo toda a Terra, prolongando-se através dos continentes. Entretanto, fazemos simplificações no modelo, considerando-o como uma forma aproximada à esfera.

Definição 4.1 *Os principais elementos do Globo Terrestre são:*

1. **Eixo da Terra:** é a linha em torno da qual a Terra executa o seu movimento de rotação, de Oeste para Leste (o que produz nos outros astros um Movimento Aparente de Leste para Oeste);
2. **Polos:** são pontos em que o eixo intercepta a superfície terrestre.
O Polo Norte é o que se situa na direção da Estrela Polar (a Ursa Menor), enquanto que o Polo Sul é o oposto;
3. **Plano Equatorial:** é o plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra e que contém o seu centro;

4. **Equador da Terra:** é o círculo máximo resultante da intersecção do plano equatorial com a superfície da terrestre.
O Equador divide a Terra em dois hemisférios: o Hemisfério Norte ou setentrional (que contém o Polo Norte) e o Hemisfério Sul ou meridional (que contém o Polo Sul). O raio do Equador é cerca de 6378 km, o que corresponde a um perímetro de 40075 km.
5. **Círculo Máximo:** é a linha que resulta da intersecção com a superfície terrestre de um plano que contenha o centro da Terra;
6. **Paralelos:** são círculos menores paralelos ao Equador e, portanto, perpendiculares ao Eixo da Terra, que materializam a direção E-W (Leste-Oeste).
7. **Meridianos:** são as semicircunferências de arcos máximos, ou seja, contidos em circunferências máximas que passam pelos polos da Terra e que marcam a direção N-S;

Veja a figura a seguir:

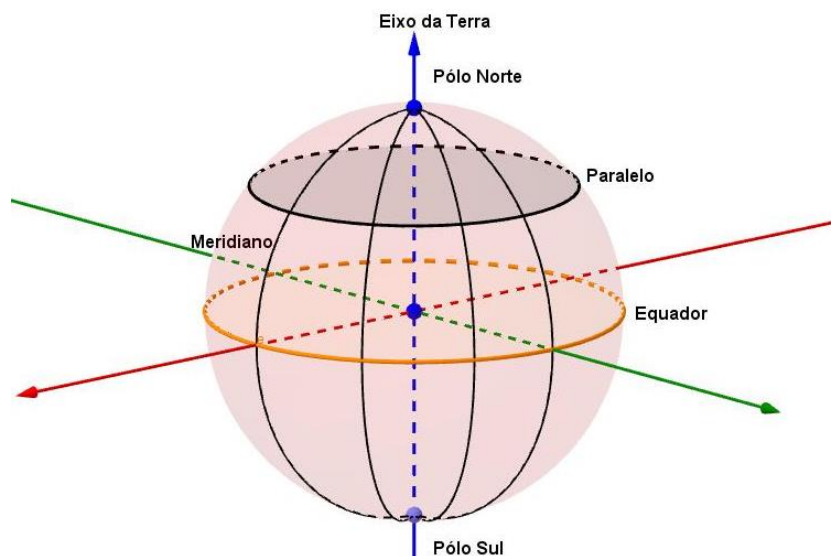


Figura 4.1: Elementos do Globo Terrestre.

4.1.1 Paralelos e Meridianos

1. **Paralelos:** são círculos menores paralelos ao Equador e, portanto, perpendiculares ao Eixo da Terra, que materializam a direção E-W (Leste-Oeste).
Dentre os paralelos, distinguem-se:

- o Trópico de Câncer (paralelo de $23,5^\circ$ Latitude Norte);
- o Trópico de Capricórnio (paralelo de $23,5^\circ$ Latitude Sul);

- o Círculo Polar Ártico (paralelo de $66,5^\circ$ Latitude Norte): define uma linha imaginária no planeta, ao norte da qual há pelo menos um dia de noite absoluta (24 horas de escuridão) no inverno e pelo menos um dia de luz absoluta (24 horas de sol) no verão boreal (sol da meia-noite) por ano.
- Círculo Polar Antártico (paralelo de $66,5^\circ$ Latitude Sul): passa pelas partes mais ao norte da Antártida. Durante o Inverno Austral, a partir dessa linha as noites absolutas, com 24 horas de duração, vão se acumulando em direção ao Polo Sul e durante o Verão acontece o contrário, pelo menos um dia de luz absoluta (24 horas de Sol, Sol da meia-noite) pode ser registrado nesse paralelo.

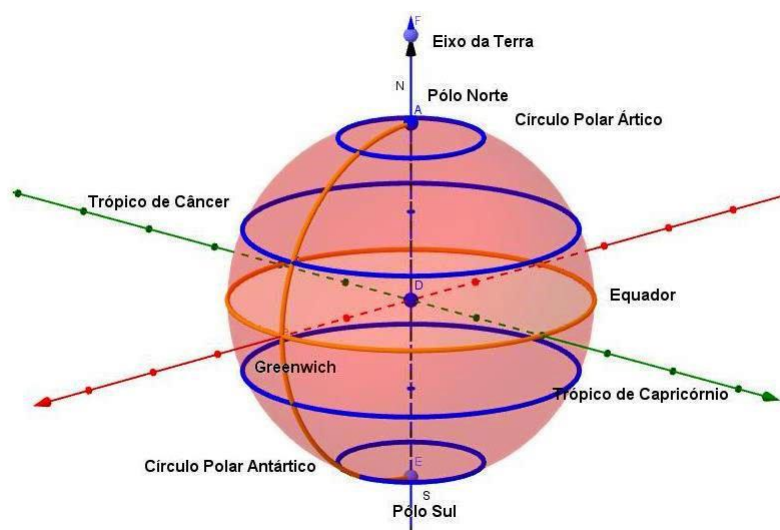


Figura 4.2: Paralelos Notáveis do Globo Terrestre.

Observação 4.1 *Nos pontos da Terra exatamente sobre trópicos de Câncer e de Capricórnio haverá ao menos um momento, num único dia por ano, em que o Sol estará em seu completo Zênite, ou seja, estará totalmente “a pino”, de modo que as sombras dos objetos ficarão exatamente sob os mesmos, o que ocorre por volta de meio dia, variando essa hora em função da posição relativa do local dentro do seu fuso horário. Isso ocorrerá na data do solstício de verão do respectivo hemisfério.*

Observação 4.2 *Nos pontos da superfície da Terra entre os trópicos de Câncer e de Capricórnio haverá um momento, em dois dias por ano, nessa condição de “sol a pino” (Zênite). Sobre a linha do Equador essas duas datas são os equinócios (20-21 de Março; 22-23 de Setembro), separados entre si por cerca de 6 meses.*

2. **Meridianos:** são as semicircunferências de arcos máximos, ou seja, contidos em circunferências máximas que passam pelos polos da Terra e que marcam a direção N-S;

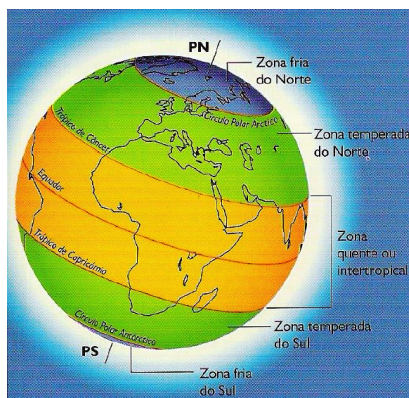


Figura 4.3: Zonas climáticas da Terra. Fonte: [12]

Observação 4.3 *O Meridiano de Greenwich foi estabelecido através de uma convenção, realizada em 1884, na cidade de Washington, como meridiano de referência. A intenção era de estabelecer uma padronização de horários em qualquer ponto da superfície da Terra e de dividir o globo terrestre em ocidente e oriente, permitindo assim, medir a longitude e estabelecer fusos horários. Cada fuso horário corresponde a uma faixa de 15 graus de longitude, sendo a hora de Greenwich chamada de Greenwich Mean Time (GMT). Este meridiano leva esse nome porque passa sobre o Observatório Real de Greenwich, situado na cidade de Londres, na Inglaterra.*

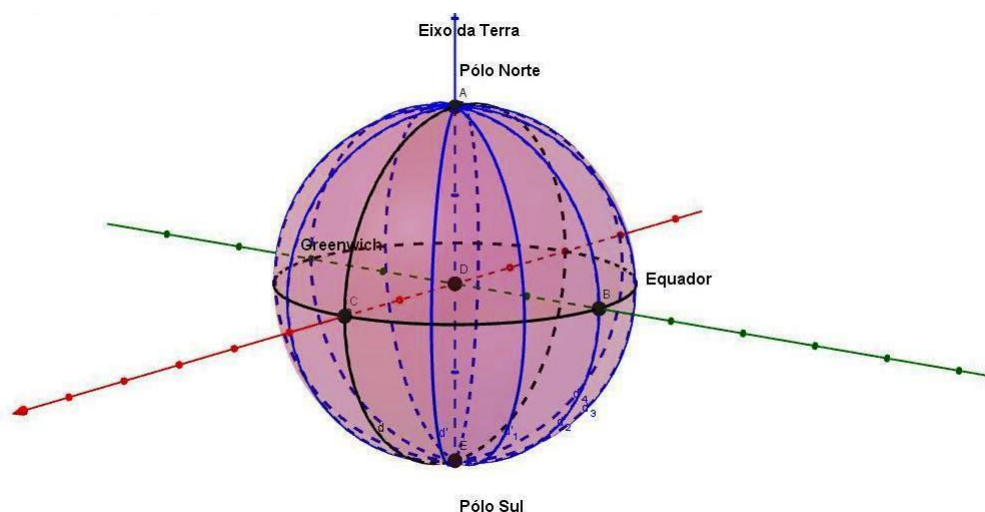


Figura 4.4: Meridianos do Globo Terrestre.

Os Fusos Horários de localidades situadas à leste de Greenwich tem suas horas adiantadas, enquanto que os de localidades situadas à oeste tem suas horas atrasadas, devido ao movimento de rotação da Terra, que se dá de oeste para leste. Com isso, determinados países, devido a sua grande extensão territorial no sentido leste-oeste, possuem mais de um fuso horário, como é o caso do Brasil, que possuía quatro fusos e hoje, devido ao Decreto n^o

11662, de 25 de abril de 2008, passou a adotar somente três.

Podemos citar um exemplo do cálculo do Fuso Horário entre duas localidades do Globo. Sendo assim, considerando que na cidade de New York, localizada no fuso $-5GMT$, são $8h$, conseqüentemente, na cidade de Brasília, que está localizada no fuso $-3GMT$, são $10h$, pois a capital brasileira está a dois fusos à leste da cidade norte-americana, ocasionando o aumento de 2 horas.

O cálculo dos Fusos Horários é bastante simples e seu conhecimento é de grande importância tanto para viagens, quanto para relações comerciais, econômicas e sociais.

4.2 Atividades

1. (Extraído e adaptado de [1]) Qual é o comprimento do Equador, supondo que o raio da Terra meça 6400 km ? (Use $\pi \simeq 3,14$).

Solução:

Sabemos que o Equador é o círculo máximo resultante da intersecção do plano equatorial (plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra e que contém seu centro) com a superfície terrestre.

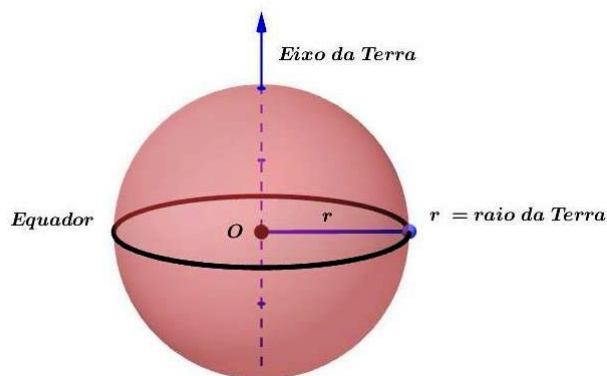


Figura 4.5: Equador.

Como comprimento de uma circunferência é calculado pela fórmula: $C = 2 \cdot \pi r$, então:

$$C = 2 \cdot \pi r$$

$$C = 2 \cdot 3,14 \cdot 6400$$

Logo, $C = 40192\text{ km}$.

2. (Extraído e adaptado de [1]) Uma outra maneira de se calcular o raio da Terra é escalar o topo de uma montanha, cuja altitude acima do nível do mar seja conhecida e medir o ângulo entre a vertical e a linha do horizonte. A altura do monte Shasta, na Califórnia, é de 4,3 km. Do seu topo, o horizonte sobre o oceano Pacífico faz um ângulo de $87^{\circ}53'$ com a vertical. Utilize esses dados para estimar o raio da Terra em km. Considere $\text{sen}(87^{\circ}53') = 0,99932$.

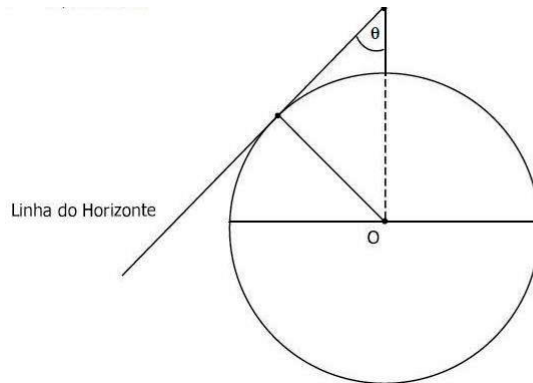


Figura 4.6: Cálculo do raio da Terra. (Fonte: ([1])

Solução:

Sejam os pontos T , O e P a representação do topo do Monte Shasta, do centro da Terra e do ponto de tangência da linha do horizonte com a superfície terrestre, respectivamente.

Note que a medida do segmento OP é a medida do raio da Terra, e que a altura do Monte Shasta de 4,3 km equivale à medida tomada em relação à superfície terrestre. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\theta &= \frac{OP}{OT} \\ \Rightarrow \text{sen}(87^{\circ}53') &= \frac{r}{r+4,3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r &= 0,99932 \cdot r + 4,297076 \\ \Rightarrow 0,00068r &= 4,297076 \end{aligned}$$

Portanto,

$$r = \frac{4,297076}{0,00068} \cong 6319 \text{ km}$$

3. (Extraído e adaptado de [16]) A figura abaixo ilustra o globo terrestre com alguns dos seus 24 meridianos. R é o raio da Terra, aproximadamente 6.000 km. A é o ângulo com vértice no centro da Terra e indo até dois meridianos consecutivos. L é o arco

entre dois meridianos consecutivos medido sobre o Equador terrestre, como mostra a figura abaixo. A superfície delimitada por dois meridianos consecutivos compreende um fuso horário.

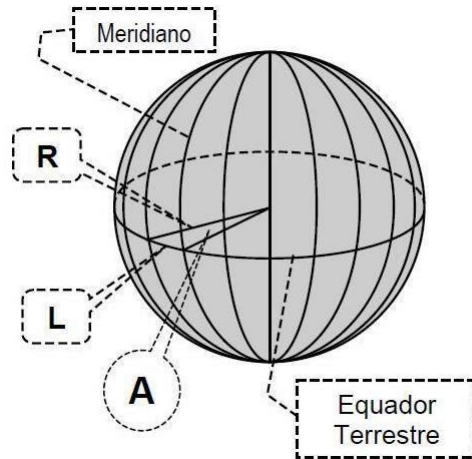


Figura 4.7: Globo Terrestre. (Fonte: ([16])

a) Quanto tempo o Sol gasta para passar a pino de um meridiano a outro?

Solução:

Como há 24 fusos e o Sol gasta 24 horas para girar, aparentemente, ao redor da Terra, ele precisa ir de 1 hora para ir de um meridiano ao outro.

b) Quantos graus compreende o ângulo A ?

Solução:

Como o ângulo A é delimitado por um fuso e temos 24 fusos, os 360 graus do círculo foram divididos em 24 ângulos A , ou seja, $A = \frac{360}{24} = 15$.

c) Qual é o comprimento, em km, do arco L , já definido?

Dados: A relação entre R , L e A é: $A = L/R$, mas A deve estar em radianos; π radianos equivale a 180 graus; Use $\pi = 3$; Comprimento do círculo: $2\pi R$.

Solução:

Por Regra de Três, temos: $\frac{2\pi R}{L} = \frac{360}{15} \Rightarrow L = 2\pi R \cdot \frac{15}{360} \Rightarrow L = 2 \cdot 3 \cdot 6000 \cdot \frac{15}{360}$
 $\Rightarrow L = 1500 \text{ km}$

4. (Extraído e adaptado de [14]) A forma física do Planeta Terra não é uma esfera, pois apresenta um achatamento nos polos Norte e Sul e outras irregularidades que chamamos de relevo (superfície topográfica). Na verdade, sua forma física se denomina geóide. Desprezando este fato e considerando a Terra como uma esfera, cujo raio médio é igual a 6400 km, responda: em alto mar, quantos quilômetros um navio percorre quando se move em 1° de circunferência máxima. Use $\pi = 3,14$.

Solução:

Determinaremos o comprimento de um arco de circunferência máxima da superfície terrestre associado a um ângulo central, cuja medida é igual a 1° .

Logo, usando Proporcionalidade, temos:

$$\frac{360^\circ}{1^\circ} = \frac{2\pi r}{l}$$
$$l = \frac{2\pi r}{360}$$
$$l = 3,14 \cdot \frac{6400}{180}$$
$$l \cong 111,6 \text{ km}$$

4.3 A construção do Globo Terrestre com o Geogebra

- Observações:
 - A presente construção com o software Geogebra visa a criação de um modelo de estudo para o Globo Terrestre e seus elementos, bem como, o posicionamento de um ponto sobre a superfície da Terra.
- Objetivos:
 - Construir um modelo de representação da Terra, a partir da construção do item 3.4, representando os seguintes elementos do Globo Terrestre: Eixo de Rotação, Polos, Paralelos (Equador) e Meridianos (Meridiano de Greenwich);
 - Representar um ponto sobre a superfície esférica.
- Conhecimentos prévios:
 - Geografia da Terra;
 - Globo Terrestre e seus elementos;

- Sistema de coordenadas cartesianas;
 - Geometria Plana e Espacial (esfera);
 - Conhecimentos básicos do Software Geogebra.
- Material necessário:
 - Laboratório de informática;
 - Computadores com a instalação do Software Geogebra.
- A CONSTRUÇÃO:

A partir da construção do item 3.4, simularemos a elaboração dos seguintes elementos do Globo Terrestre:

 - Eixo da Terra: eixo em torno do qual a Terra executa o seu movimento de rotação;
 - Polos: pontos em que o eixo intercepta a superfície terrestre;
 - Plano Equatorial: plano perpendicular ao eixo de rotação da Terra e que contém o seu centro;
 - Paralelo/Linha do Equador: círculo máximo resultante da intersecção do plano equatorial com a superfície terrestre;
 - Meridianos: semicircunferências de arcos máximos que passam pelos polos da Terra. O meridiano de Greenwich e seu contra-meridiano serão representados pela intersecção da superfície esférica com o plano vertical ACD que passa pelo centro da esfera, ao passo que o Equador será obtido pela intersecção da superfície esférica com o plano horizontal BCD , que também passa pelo centro e é perpendicular ao plano ACD .
1. Inicialmente, o Eixo da Terra será representado pelo eixo z do sistema de coordenadas cartesianas.

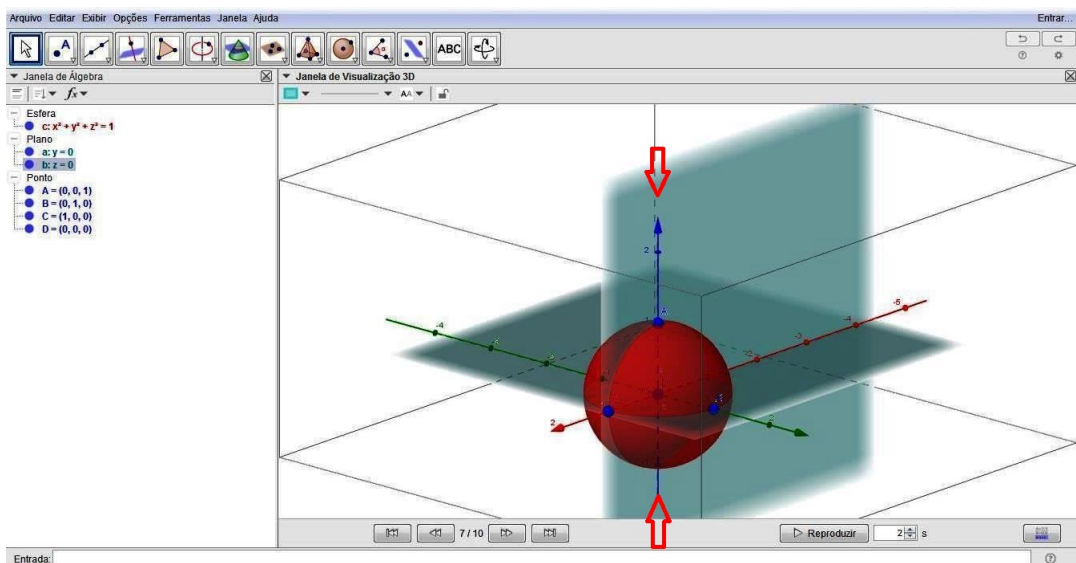


Figura 4.8: Eixo da Terra: eixo z do sistema cartesiano.

2. Selecione a ferramenta “Intersecção de Duas Superfícies” e indique duas-a-duas as superfícies que se intersectarão: plano $a : y = 0$ e esfera $c : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e em seguida, plano $b : z = 0$ e esfera $c : x^2 + y^2 + z^2 = 1$. A primeira intersecção refere-se ao Meridiano de Greenwich e seu contra-meridiano, enquanto a segunda, ao Equador.

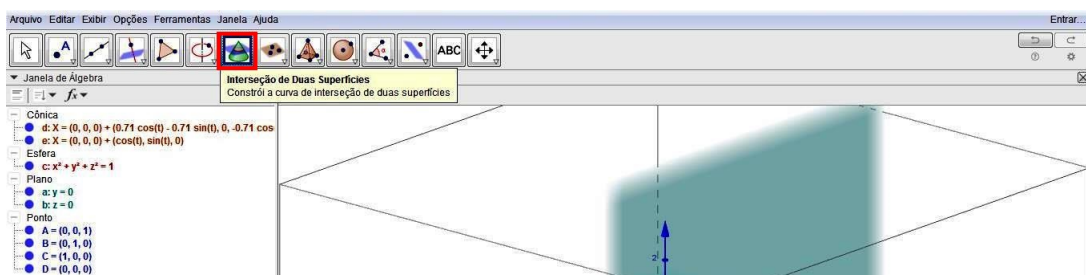


Figura 4.9: Intersecção de duas superfícies.

Note que podemos fazer as seleções diretamente na Janela de Álgebra, onde passará a conter as equações das cónicas obtidas pela intersecção dos planos com a esfera, após a ação descrita acima.

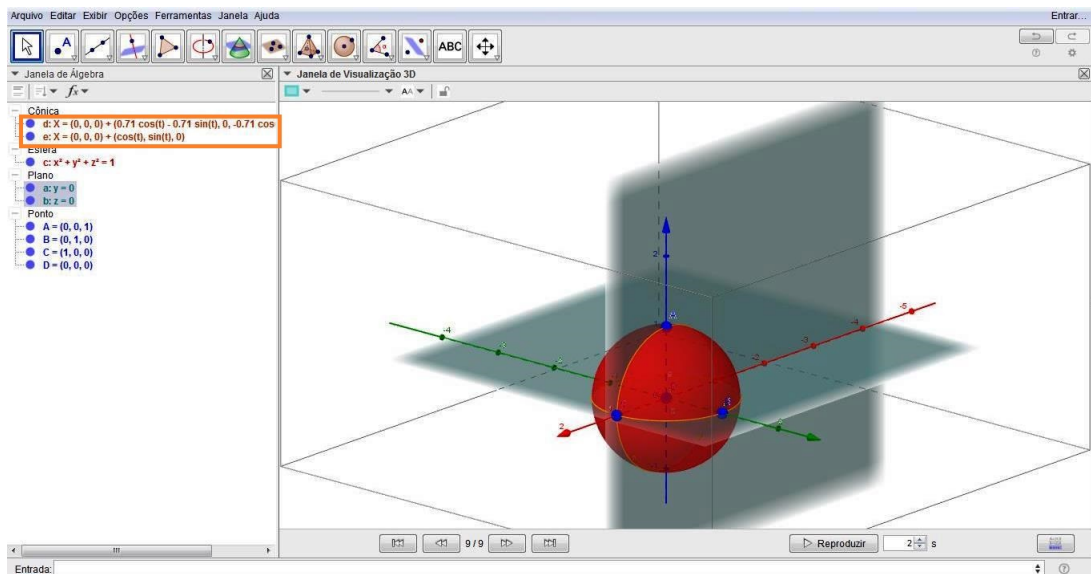


Figura 4.10: Intersecção planos/esfera.

- Os polos são as intersecções do Eixo da Terra com a superfície terrestre: O Polo Norte será representado pelo ponto A, que é uma das intersecções do Eixo da Terra (eixo z) com a esfera. Para a definição do Polo Sul, clique na ferramenta “Ponto” e, em seguida clique na intersecção oposta ao Ponto A. Então, será criado o ponto $E = (0, 0, -1)$.

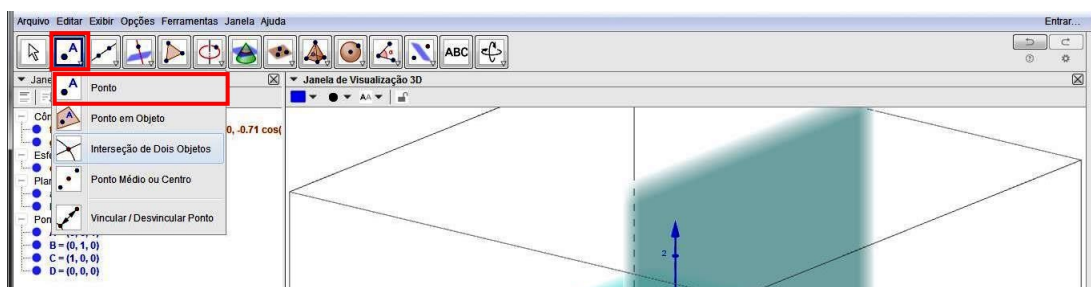


Figura 4.11: Ferramenta “Ponto”.

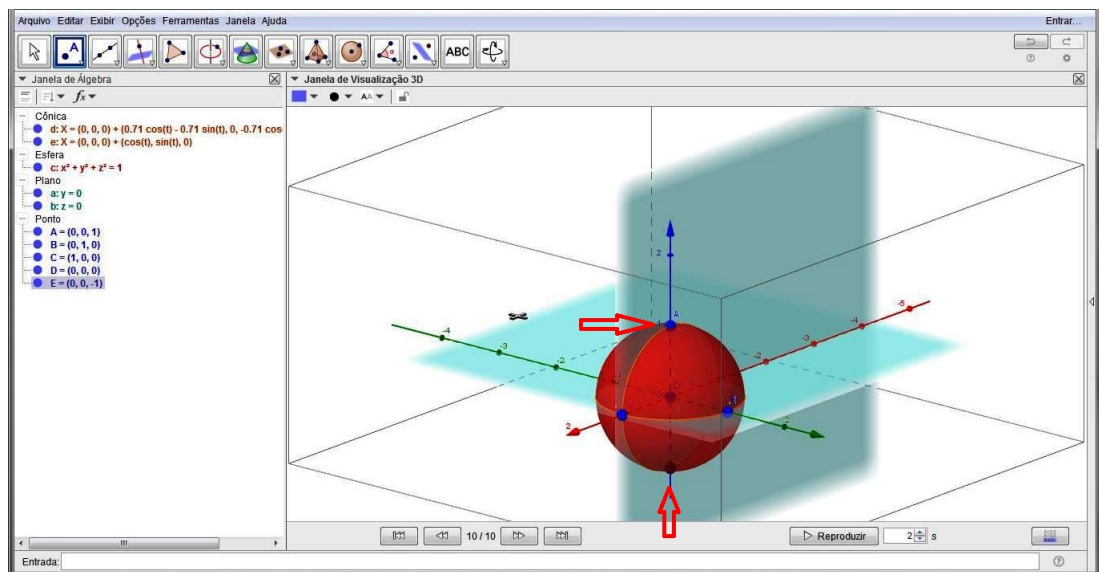


Figura 4.12: Criação dos polos.

- Para construir o Meridiano de Greenwich, devemos ocultar a cônica d , que representa a intersecção da esfera com o plano ACD , afim de deixarmos em evidência apenas a representação deste meridiano, sem seu contra-meridiano.

Para isto, façamos:

Na Janela de Álgebra, clique na bola azul ao lado da equação da cônica d ; (Repare que a cônica d desaparecerá).

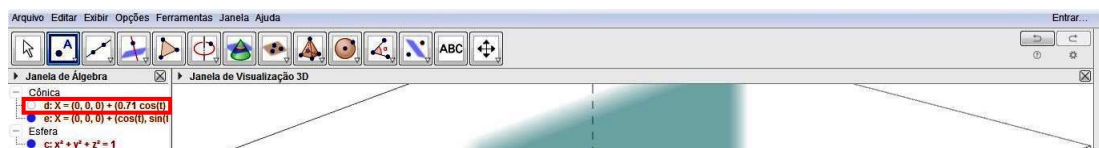


Figura 4.13: Ocultação da cônica.

Em seguida, clique na ferramenta “Arco Circuncircular” e depois, nos pontos A , C e E . Este arco ($f = 3,14$, na Janela de Álgebra) é a representação do Meridiano de Greenwich.

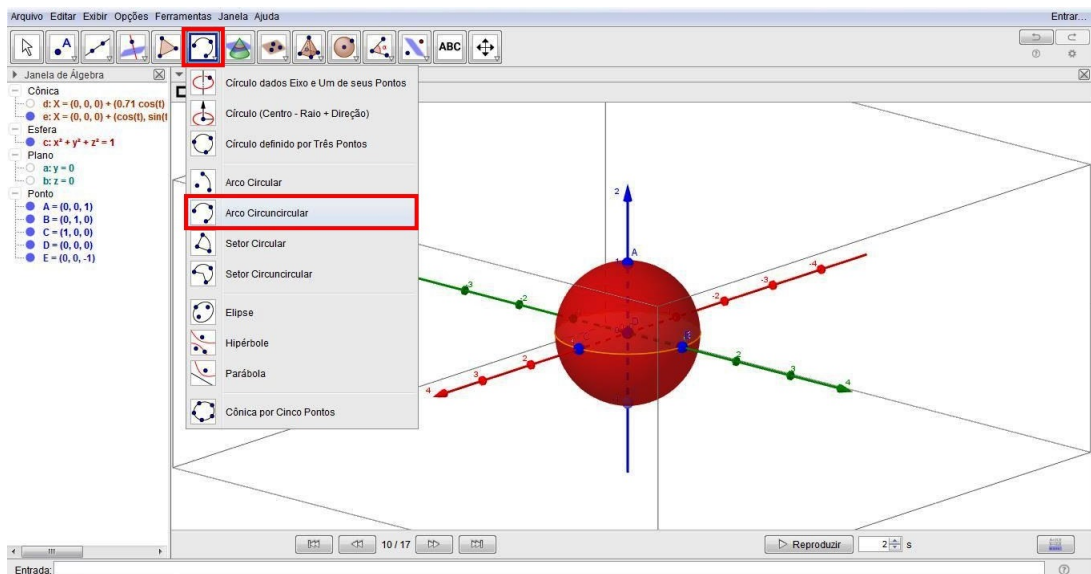


Figura 4.14: Ferramenta Arco Circuncircular.

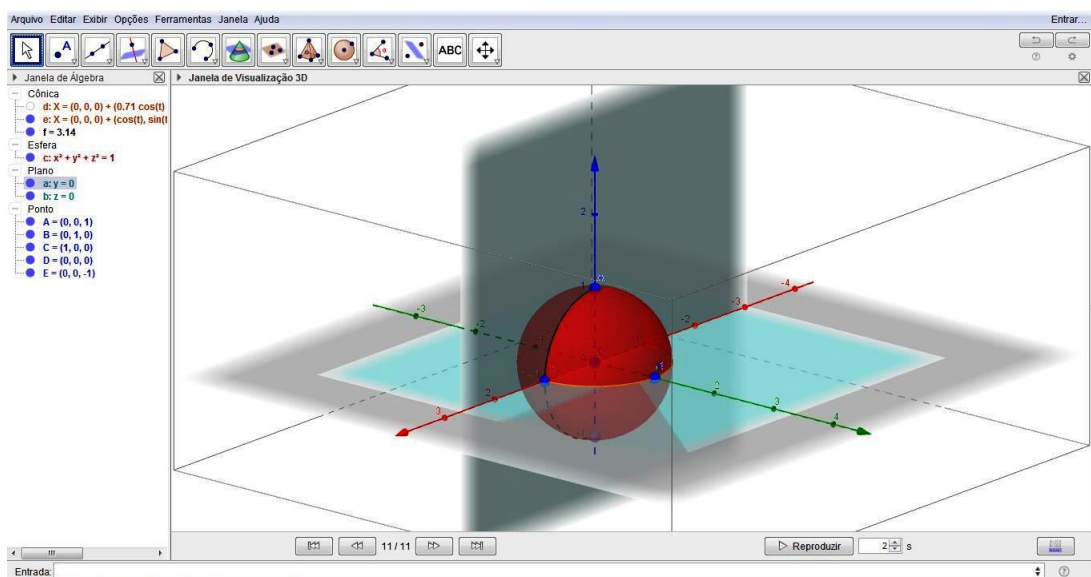


Figura 4.15: Construção do Meridiano de Greenwich.

Note que o ponto $C = (1, 0, 0)$, uma das intersecções do eixo x com a superfície esférica, representa a intersecção do Equador com o Meridiano de Greenwich.

5. Nesta próxima ação, nomearemos os elementos do Globo Terrestre, dentre eles: o Eixo da Terra, os Polos Sul e Norte, o Equador e o Meridiano de Greenwich.

Sendo assim, façamos: clique na ferramenta “Texto”, depois, clique em qualquer lugar da área de trabalho. Ao abrir a caixa de texto, digite “Eixo da Terra” e clique em “OK”. Ao final, basta arrastar o texto para o local próximo ao eixo z onde melhor lhe convier.

Caso seja necessário, clique com o botão direito do mouse no objeto e desmarque a opção ‘Fixar Objeto’. Agora, é só o leitor mover o objeto para o local desejado.

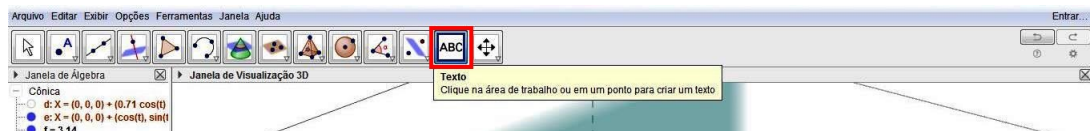


Figura 4.16: Ferramenta ‘Texto’.

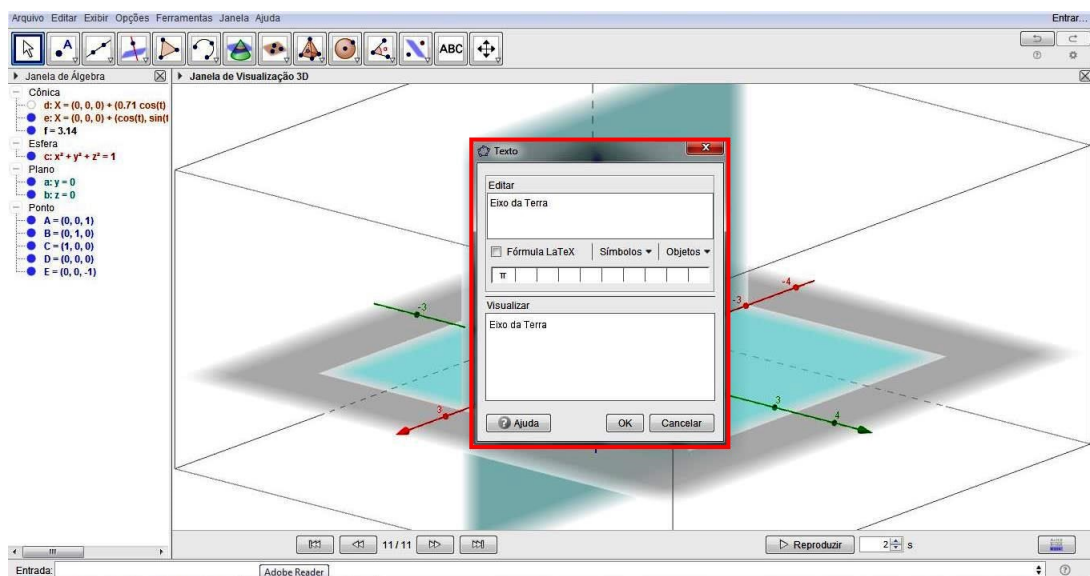


Figura 4.17: Caixa Texto.

Analogamente, procederemos com os textos ‘Polo Sul’, ‘Polo Norte’, ‘Equador’ e ‘Greenwich’.

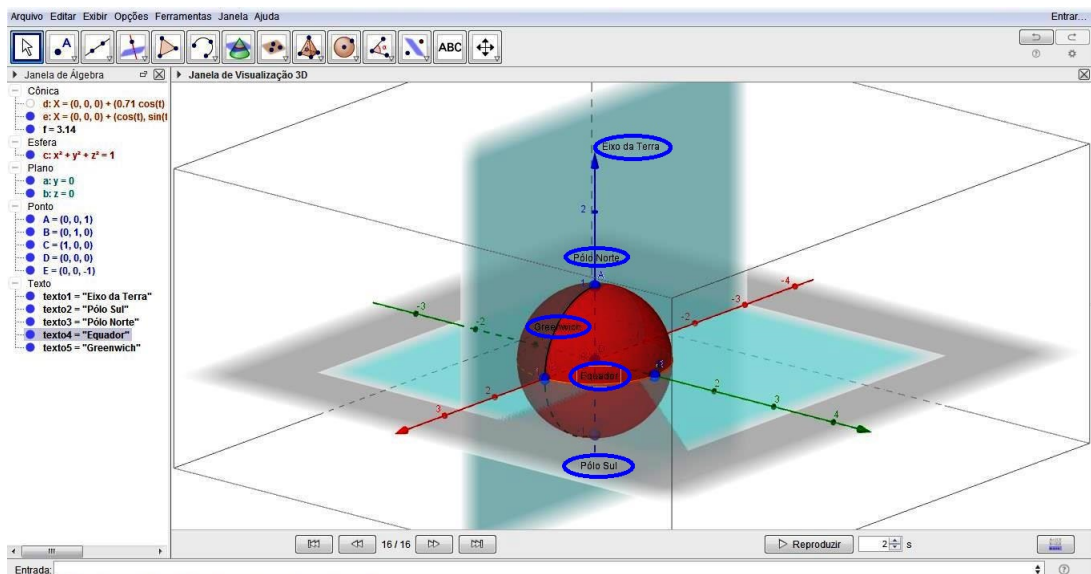


Figura 4.18: Inserção de nomes de elementos do Globo.

6. Agora, selecione a ferramenta "Ponto" e marque-o sobre a superfície esférica, preferencialmente na região do "cubo" (Caixa de Clipping) formado pelos semieixos positivos.

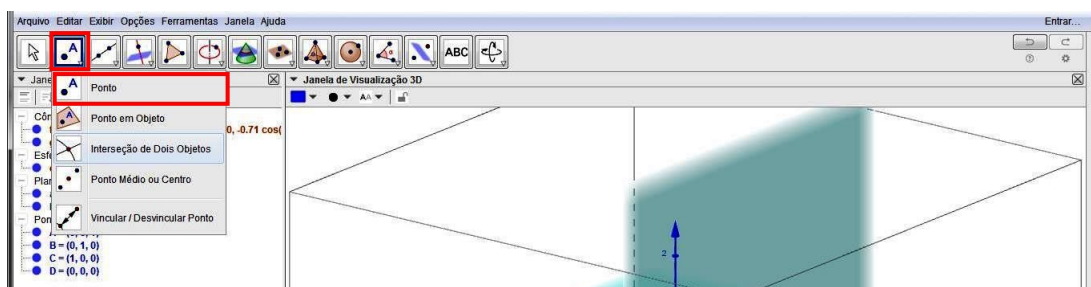


Figura 4.19: Ferramenta Ponto.

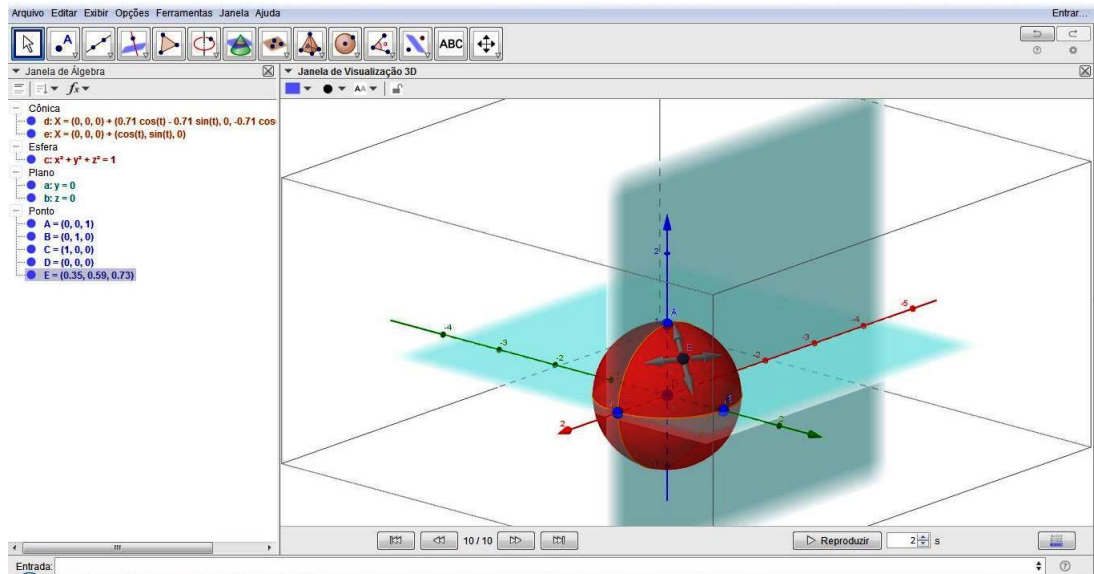


Figura 4.20: Marcação de um ponto sobre a superfície esférica.

Com a construção acima, foi criado o ponto F . Porém, para fins de padronização, renomearemos para P . Para isto, clique com o botão direito do mouse sobre o ponto F na Janela de Álgebra e na opção “Renomear”. Por fim, na caixa de inserção de novo nome, digite P .

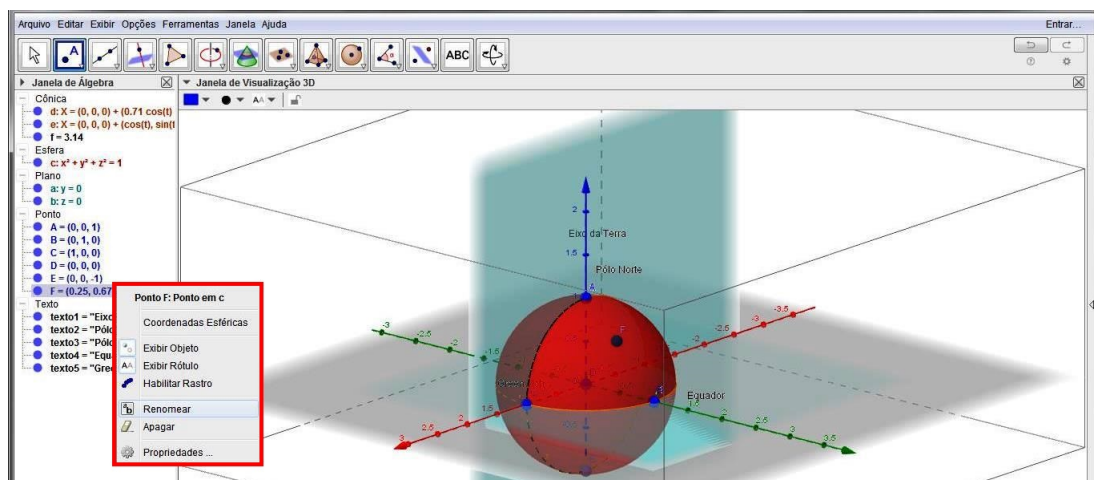


Figura 4.21: Renomear Ponto.

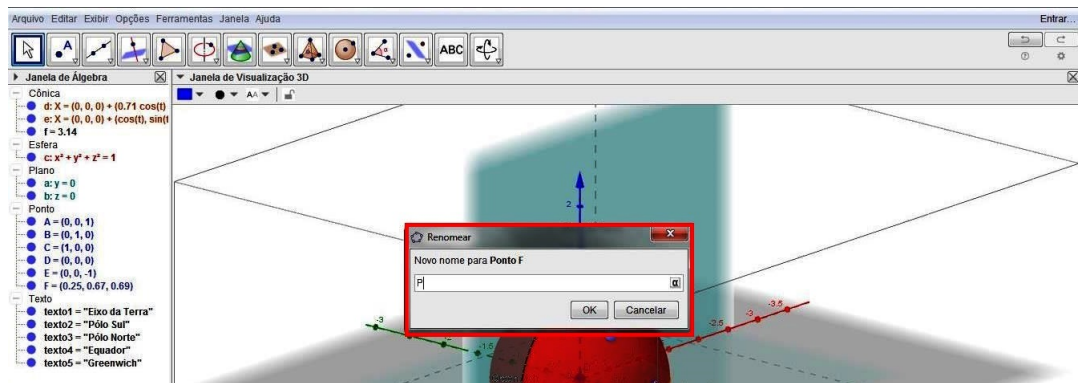


Figura 4.22: Inserção de novo nome para o ponto.

Observe, na Janela de Álgebra, que as coordenadas do ponto P mudam de acordo com o posicionamento do mesmo na superfície esférica, caso ele seja deslocado pela superfície da esfera.

Um fator importante a ser observado é a fixação dos nomes juntos aos seus elementos de modo que, ao rotacionarmos a figura, seus nomes permaneçam junto ao respectivo objeto. Desta forma, clique com o botão direito do mouse sobre o nome que desejar fixar ao objeto, depois, clique em “Propriedades...”

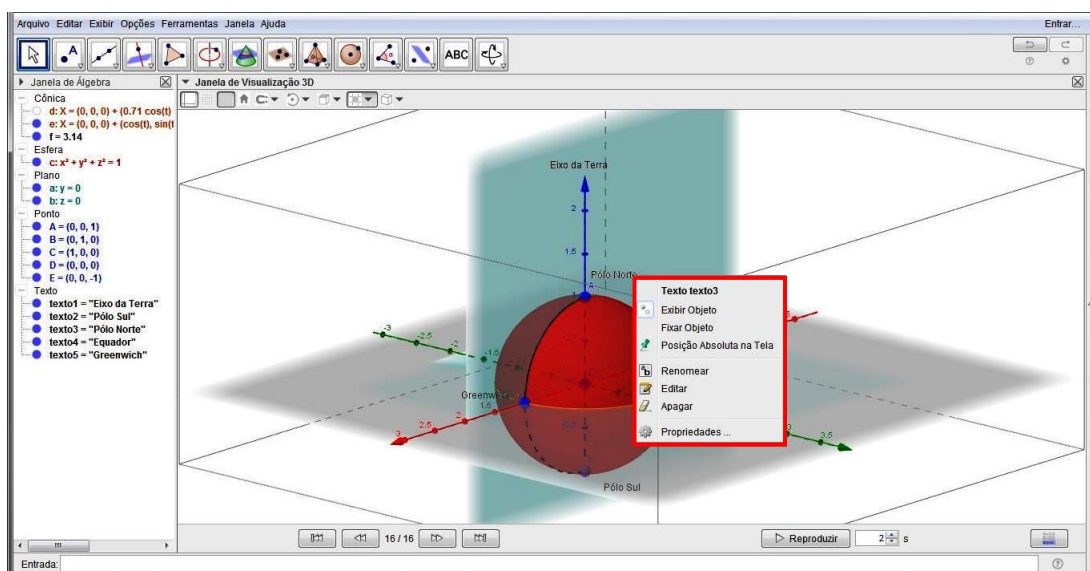


Figura 4.23: Caixa propriedades de texto.

Em seguida, selecione a guia “Posição” e, na caixa “Origem”, selecione o objeto ao qual deseja posicionar o nome. Ao fechar a caixa, pode-se com o uso do mouse reposicionar o local do texto. Repita este procedimento para todos os textos.

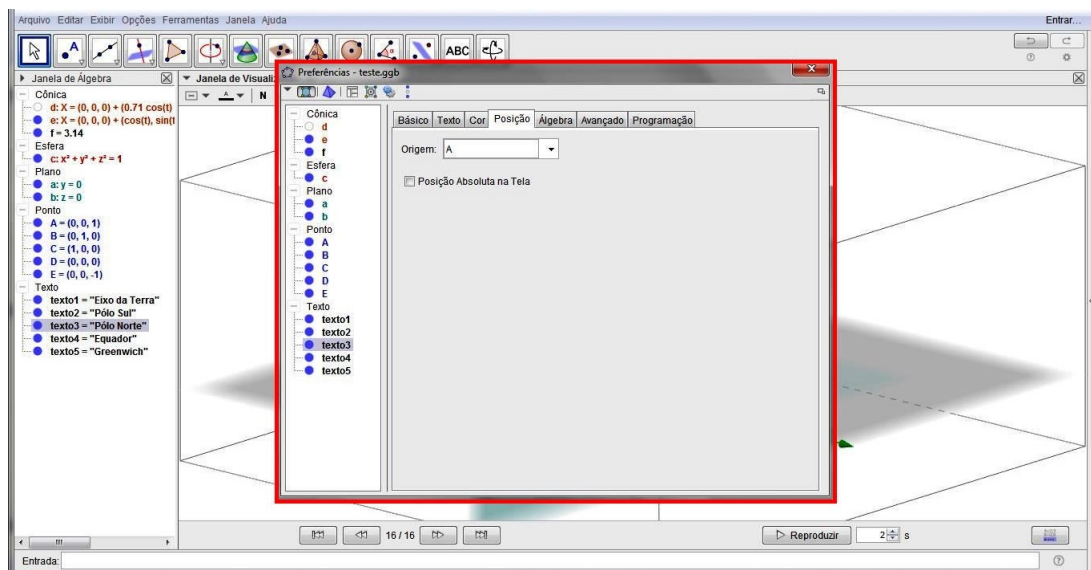


Figura 4.24: Caixa preferências de texto.

Por último, para fins de padronização e melhor visualização da Área de Trabalho, iremos ocultar os planos a e b .

Uma função interessante do Geogebra e que permite uma melhor visualização da figura em 3D construída é a Rotação da Cena, que permite uma melhor compreensão de toda estrutura e a percepção de vários elementos criados, em virtude da possibilidade de visualização da figura por vários ângulos.

Agora, para fins de visualização, rotacionaremos a cena do modelo do Globo Terrestre tomando as ações abaixo, as quais simularão o movimento de rotação da Terra. (Lembre-se de que este movimento dá-se da esquerda para a direita).

7. Selecione a ferramenta “Mover”. Depois, clique no ícone “iniciar ou parar rotação da cena” e selecione a velocidade de rotação desejada. Para parar a rotação, basta clicar sobre o desenho ou sobre o respectivo ícone.

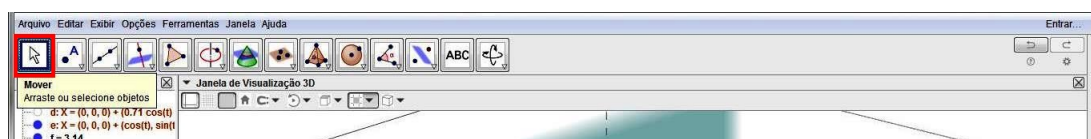


Figura 4.25: Ferramenta mover.

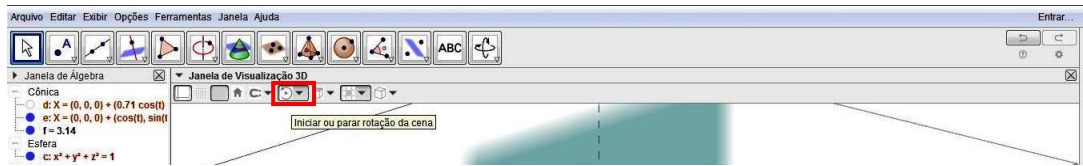


Figura 4.26: Iniciar ou parar rotação da cena.

Repare que, com a rotação de cena, iremos simular o movimento de rotação da Terra, permitindo uma visualização em três dimensões da mesma e tendo os nomes dos seus principais elementos fixados juntos à construção, acompanhando o movimento.

Capítulo 5

A Geometria do Globo Terrestre

Este capítulo foi elaborado com a intenção de resgatar os conceitos matemáticos inerentes ao estudo da Geometria do Globo Terrestre, afim de que o leitor possa relembrar os conceitos e definições necessárias ao entendimento dos cálculos e das propriedades relatadas no presente trabalho. Para isto, as seguintes referências bibliográficas foram utilizadas: [6], [12], [27] e [28].

Numa primeira aproximação, poderemos considerar a forma da Terra como sendo esférica, apesar da mesma não ter efetivamente este formato. Sendo assim, devemos coincidi-la com uma esfera, cujo raio é de aproximadamente 6400 km. Esta abstração incurte em erros perfeitamente aceitáveis dentro de uma devida tolerância, pois seu formato aproxima-se de uma esferoide oblato, ou seja, uma superfície esférica achatada nas extremidades.

5.1 A superfície esférica em Coordenadas Geográficas

Definição 5.1 *As principais características do Sistema de Coordenadas Cartesianas são:*

1. **Origem do Sistema:** centro da Terra;
2. **Plano Fundamental:** plano do Equador;
3. **Círculo Máximo Fundamental:** linha do Equador;
4. **Eixo Fundamental:** eixo da Terra;
5. **Polos:** o Polo Norte e o Polo Sul;
6. **Círculo Máximo Secundário:** o meridiano de Greenwich;
7. **Ponto Fundamental:** ponto de intersecção entre o meridiano de Greenwich e a linha do Equador;

A localização de qualquer ponto sobre a superfície terrestre pode ser obtida através de uma rede de linhas imaginárias (paralelos e meridianos) que dividem o globo, as quais originam dois tipos de coordenadas, respectivamente: a **Longitude** e a **Latitude**, que juntamente formam o que chamamos de **Coordenadas Geográficas**.

Essas coordenadas são como uma espécie de endereço de qualquer localidade na superfície do planeta, onde é determinada de modo similar ao plano cartesiano, porém, com uma grande diferença: devido à esfericidade da Terra, as coordenadas são medidas em graus, minutos e segundos.

LATITUDE

A Latitude é o arco, medido ao longo do meridiano do lugar, entre o Equador e o paralelo de um determinado lugar sobre a superfície terrestre. Os pontos situados sob o Equador possuem latitude geográfica igual a 0° ; Deste modo, os pontos situados ao norte do Equador têm latitudes que variam de 0° a 90° (Norte) e, conseqüentemente, os pontos situados ao sul do Equador têm latitudes que variam de 0° a 90° (Sul). Para a diferenciação quanto aos hemisférios (Norte ou Sul), atribui-se sinal positivo para as latitudes norte e negativo para as latitudes sul ou aposta-se a sigla N (Norte) ou S (Sul) após a coordenada.

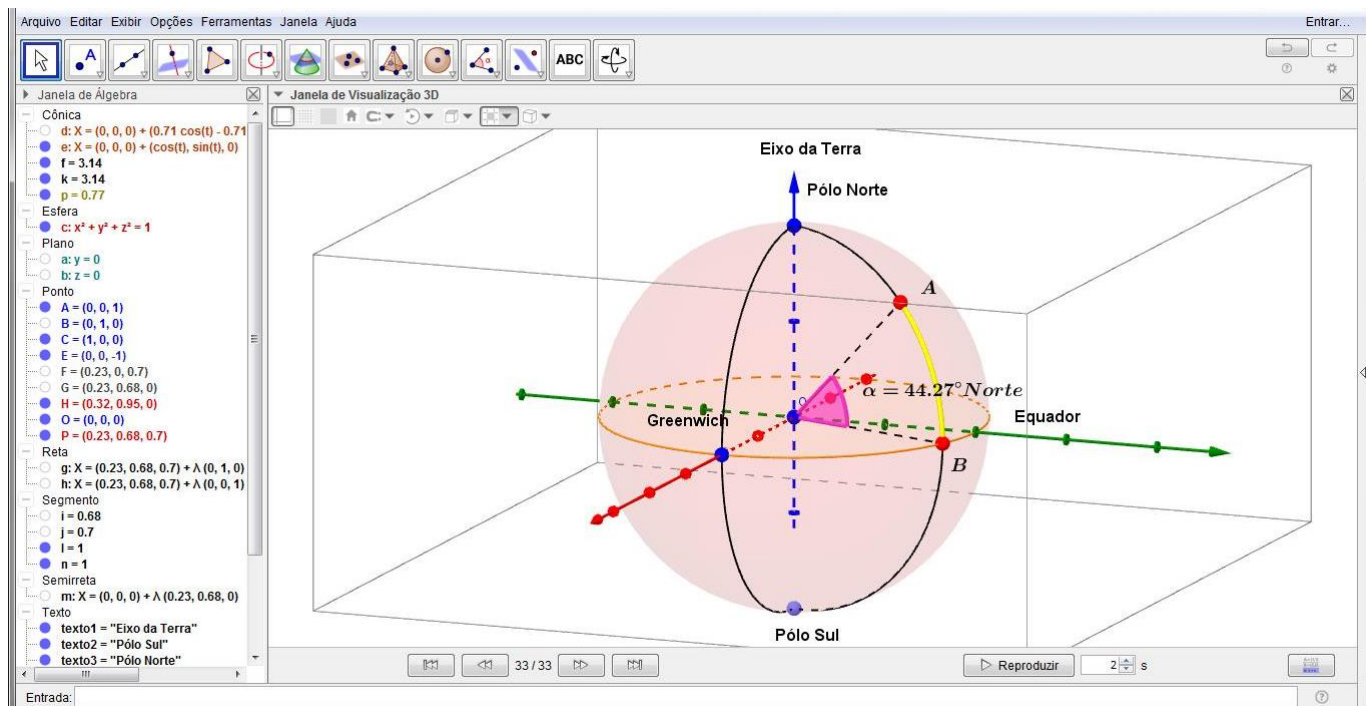


Figura 5.1: Latitude Norte de um ponto.

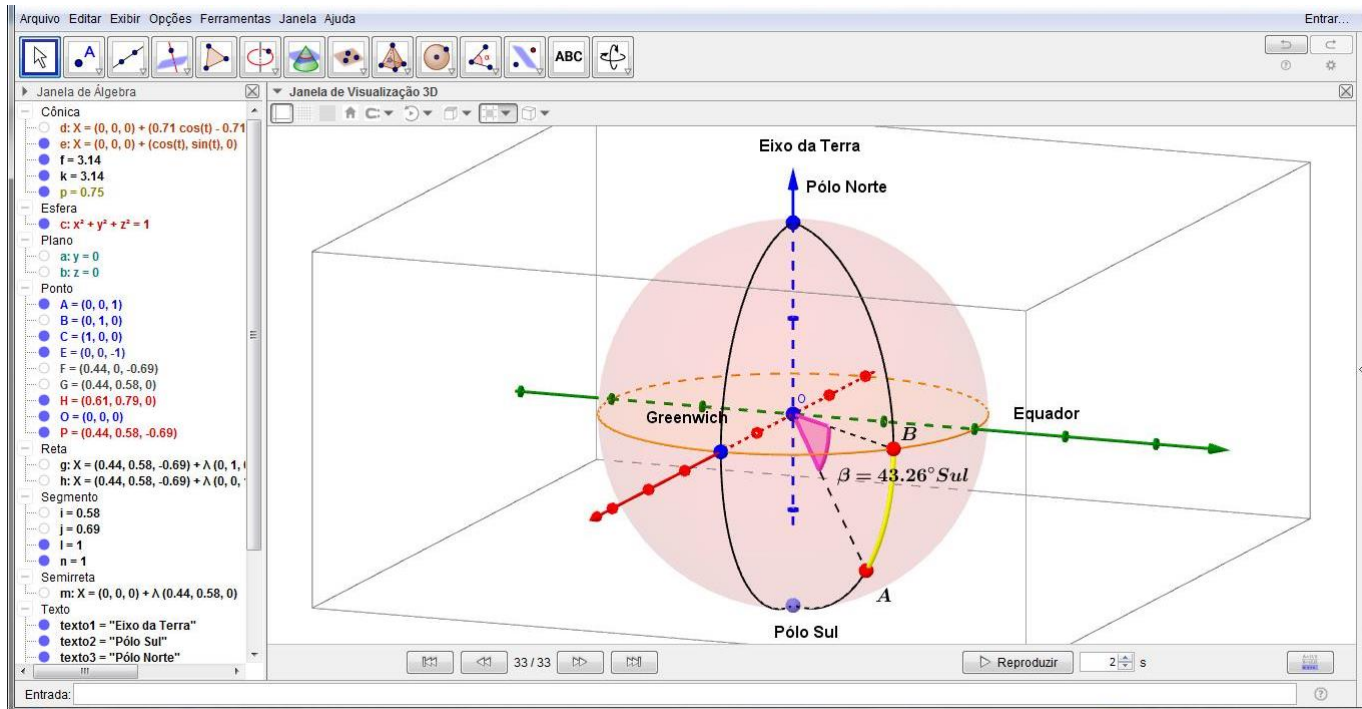


Figura 5.2: Latitude Sul de um ponto.

LONGITUDE

A Longitude é o arco, medido sobre o Equador, entre o meridiano de Greenwich e o meridiano de um determinado lugar sobre a superfície terrestre. Adotou-se o Meridiano de Greenwich como ponto de partida, isto é, a longitude de 0° ; A longitude varia de 0° a 180° , para leste ou para oeste de Greenwich. Por convenção, atribui-se também sinais para as longitudes: negativo para oeste e positivo para leste, ou atribui-se a sigla O (Oeste) ou L(leste) após a coordenada.

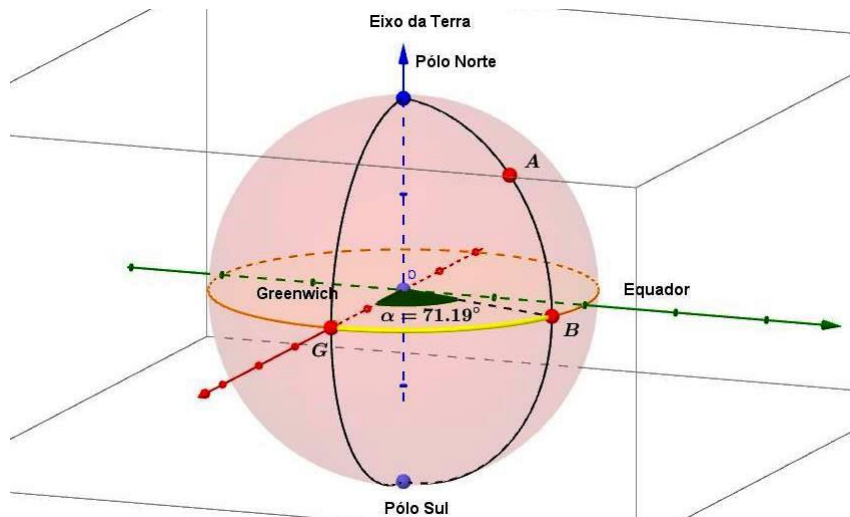


Figura 5.3: Longitude de um ponto.

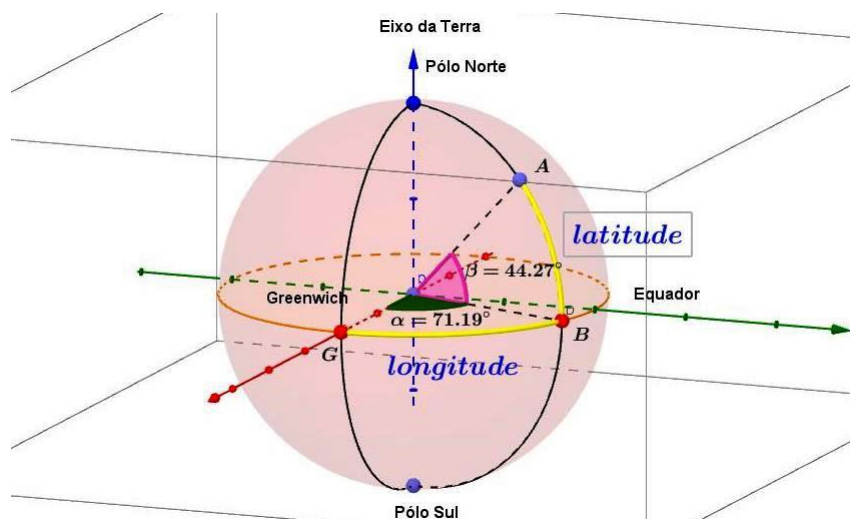


Figura 5.4: Latitude e Longitude de um ponto.

5.2 A superfície esférica em Coordenadas Cartesianas

Segundo DELGADO [6], temos as seguintes definições:

Definição 5.2 *Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε da Geometria Euclidiana consiste de três eixos mutuamente perpendiculares, OX , OY e OZ , com a mesma origem O .*

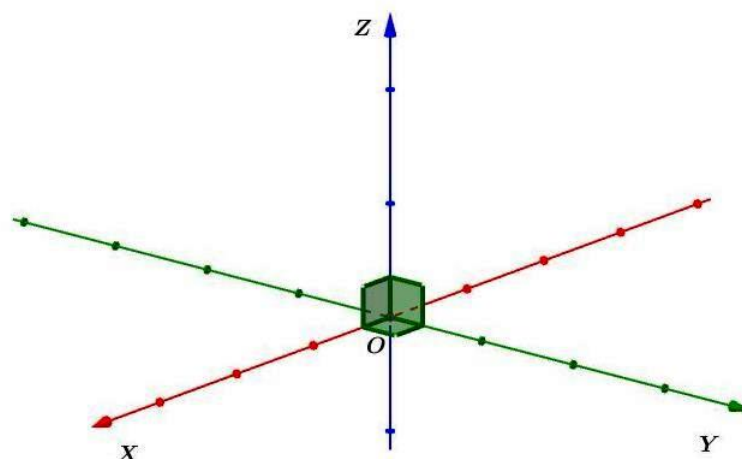


Figura 5.5: Eixos do sistema OXYZ no espaço.

Escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε , há três planos especiais, chamados planos cartesianos:

1. π_{XY} , o plano que contém os eixos OX e OY ;
2. π_{XZ} , o plano que contém os eixos OX e OZ ;
3. π_{YZ} , o plano que contém os eixos OY e OZ ;

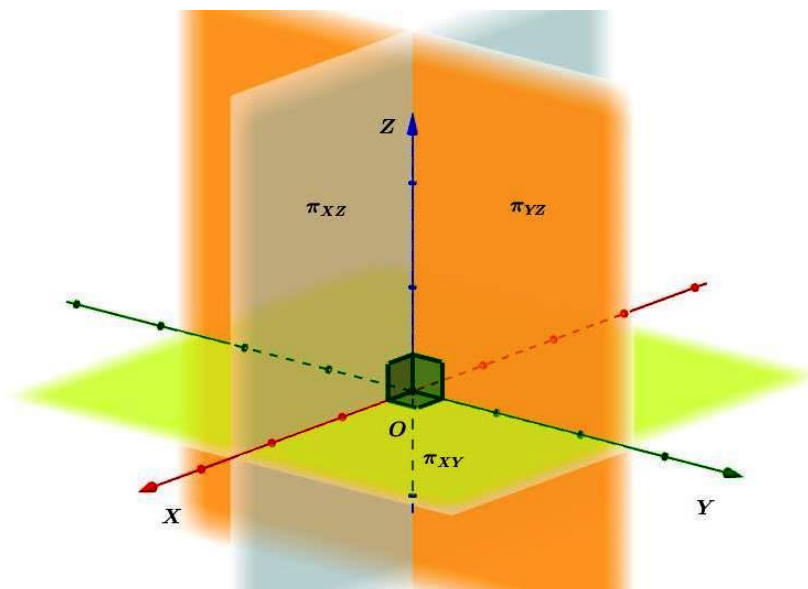


Figura 5.6: Planos cartesianos do sistema OXYZ.

Um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos P do espaço ε e os ternos ordenados de números reais (x, y, z) . Isto é, cada

ponto do espaço corresponde exatamente a um terno ordenado de números reais, e cada terno ordenado de números reais corresponde exatamente a um ponto de \mathcal{E} .

Se o ponto P está em correspondência com o terno (x, y, z) , dizemos que x, y e z são as coordenadas de P em relação ao sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Essas coordenadas são obtidas da seguinte forma:

1. coordenada x : coordenada no eixo OX do ponto de intersecção deste eixo com o plano π' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{YZ} ;
2. coordenada y : coordenada no eixo OY do ponto de intersecção deste eixo com o plano π'' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XZ} ;
3. coordenada z : coordenada no eixo OZ do ponto de intersecção deste eixo com o plano π''' que passa pelo ponto P e é paralelo ao plano π_{XY} ;

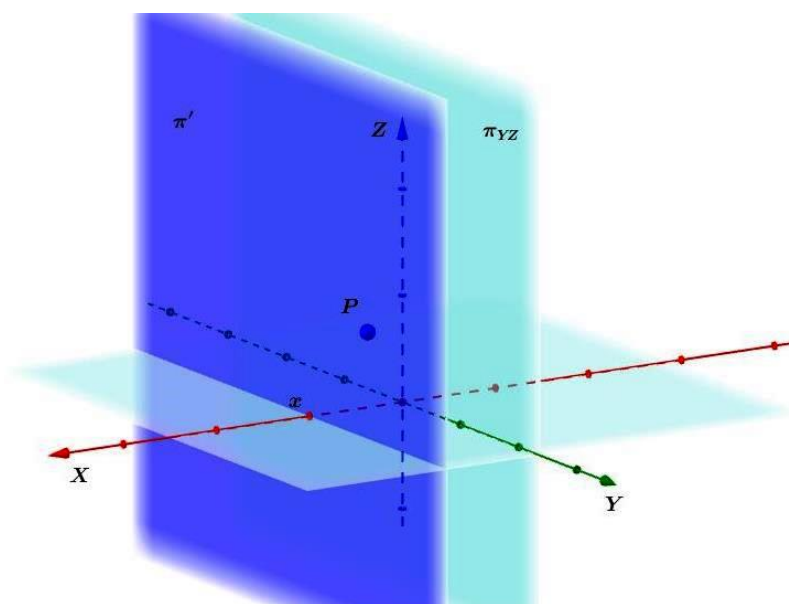


Figura 5.7: Coordenada x de P .

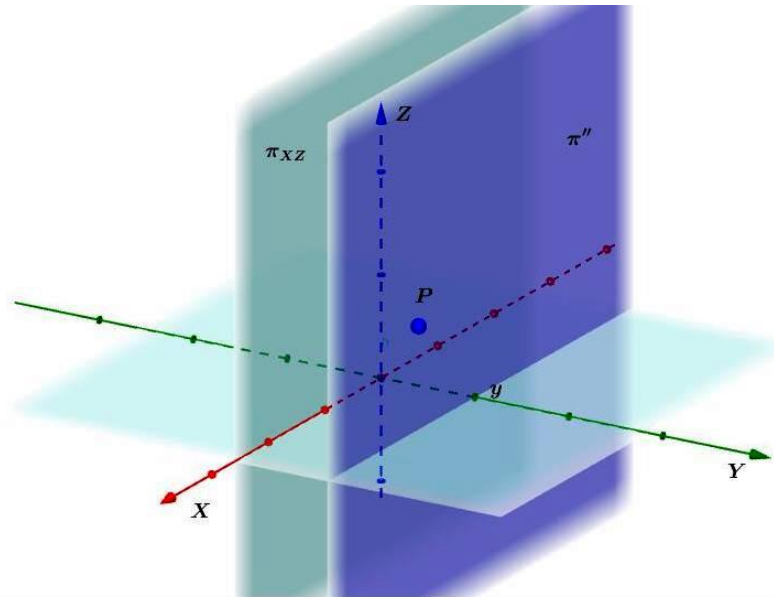


Figura 5.8: Coordenada y de P.

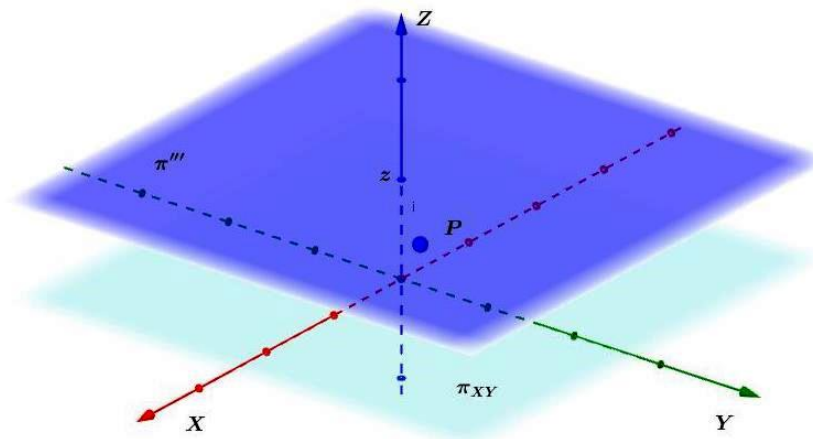


Figura 5.9: Coordenada z de P.

Designamos por \mathbb{R}^3 o conjunto de todos os ternos ordenados (x, y, z) de números reais. Uma vez escolhido um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ no espaço ε , identificamos cada ponto $P \in \varepsilon$ pelas suas coordenadas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e escrevemos:

$$P = (x, y, z).$$

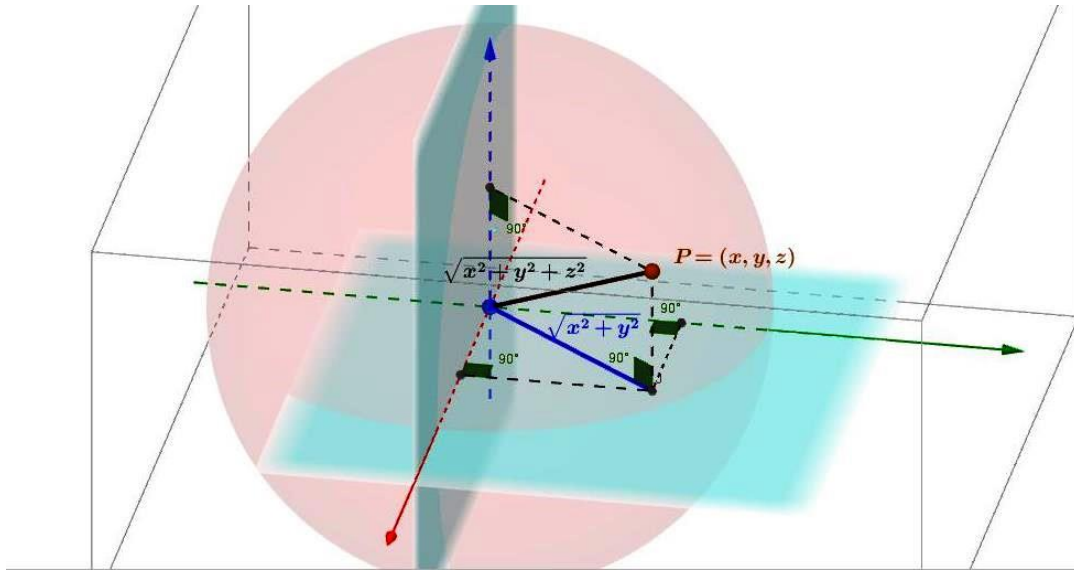


Figura 5.10: Coordenadas Cartesianas de um ponto P.

5.3 Distância entre dois pontos no espaço

A distância $d(A, B)$ entre dois pontos A e B é, essencialmente, o menor dos comprimentos das trajetórias ligando A a B . Sabemos que no plano a trajetória de menor comprimento é o segmento de linha reta \overline{AB} e seu comprimento AB é a distância entre A e B , enquanto que numa superfície esférica, não existe um segmento de linha reta, uma vez que ela é curvada em qualquer direção.

Consoante DELGADO [6], temos as seguintes definições:

Sejam $P = (a, b, c)$ e $Q = (a', b', c')$ pontos do espaço \mathcal{E} . Começamos observando que se P e Q estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados, então ele tem duas coordenadas iguais e a distância entre eles é o módulo da diferença das coordenadas diferentes.

Suponhamos que P e Q não estão sobre uma reta paralela a um dos eixos coordenados. Para o cálculo da distância de P a Q , vamos considerar os pontos auxiliares:

$$R = (a, b, c'), S = (a, b, 0), T = (a', b', 0) \text{ e } U = (a', b, 0).$$

Como $d(S, U) = |a' - a|$ e $d(U, T) = |b' - b|$, obtemos, pelo Teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo SUT , que:

$$d(S, T)^2 = d(S, U)^2 + d(U, T)^2 = |a' - a|^2 + |b' - b|^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

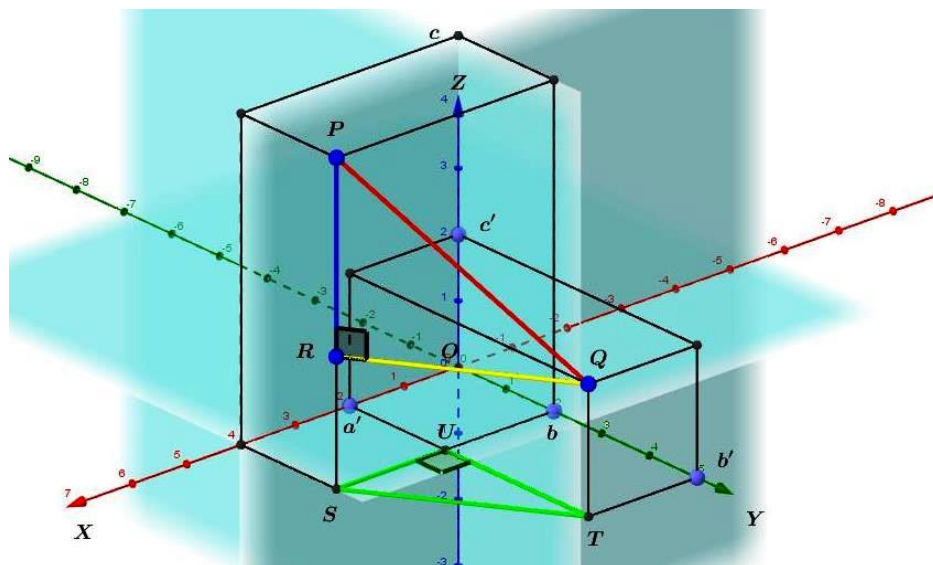


Figura 5.11: Cálculo de $d(P,Q)$.

Sendo os segmentos ST e RQ lados opostos de um retângulo, temos:

$$d(R,Q)^2 = d(S,T)^2 = (a' - a)^2 + (b' - b)^2.$$

Além disso, $d(P,R) = |c' - c|$, pois os pontos P e R estão sobre uma mesma reta paralela ao eixo OZ . Finalmente, como o triângulo PRQ é retângulo,

$$d(P,Q)^2 = d(P,R)^2 + d(R,Q)^2 = (c' - c)^2 + (a' - a)^2 + (b' - b)^2,$$

ou seja,

$$d(P,Q) = \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2}.$$

No plano, temos que o conjunto dos pontos que equidistam de um ponto formam um círculo, porém, no espaço, formam uma esfera.

Definição 5.3 A esfera S de centro C e raio $r > 0$ é o conjunto formado por todos os pontos $P \in \varepsilon$ cuja distância ao centro C é igual a r : $S = \{P \in \varepsilon \mid d(P,C) = r\}$

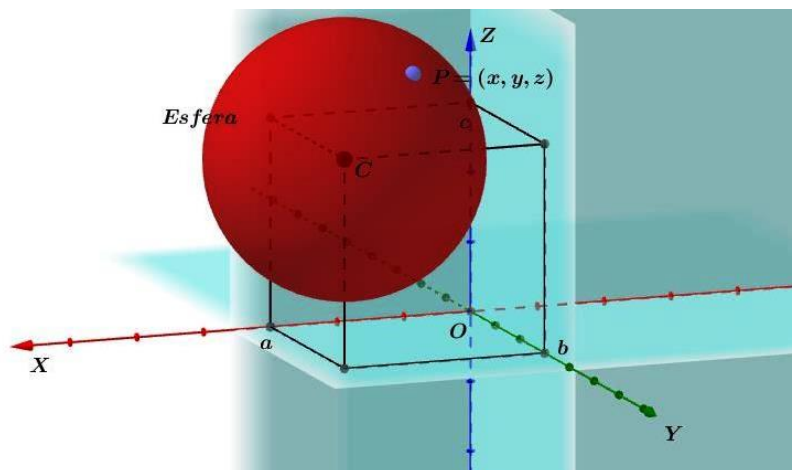


Figura 5.12: Esfera de Centro C.

Sejam $C = (a, b, c)$ e $P = (x, y, z)$ as coordenadas do centro C e de um ponto genérico P de S , respectivamente, em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$. Então,

$$P \in S \iff d(P, C) = r \iff \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r.$$

Elevando ao quadrado ambos os lados desta última identidade, obtemos a equação da esfera S no sistema de eixos $OXYZ$:

$$S : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

Sabemos que as circunferências de maior raio de uma superfície esférica S são as circunferências máximas, assim sendo, a distância nesta superfície entre dois pontos A e B é o comprimento do arco menor AB . O cálculo desse comprimento pode ser feito a partir do conhecimento da medida α do ângulo $\angle AOB$, onde O é o centro da superfície esférica S , de acordo com a Definição 3.13.

Na superfície da Terra, todos os meridianos estão contidos em circunferências máximas enquanto que, entre os paralelos, apenas o Equador é uma circunferência máxima. Logo, quando A e B possuem a mesma longitude, a diferença entre as latitudes pode ser usada para achar a medida de α . Analogamente, quando A e B estão sobre o Equador, é a diferença entre as longitudes que nos permite calcular α . Tal fato será exemplificado nas Atividades deste capítulo.

Destarte, quando duas cidade A e B estão sobre um mesmo paralelo, exceto sobre o Equador, o caminho mais curto possível entre elas, contrariando nossa intuição, não é o comprimento do arco menor AB daquele paralelo e sim, o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e B .

5.4 Coordenadas Cartesianas x Coordenadas Geográficas

Para que um determinado ponto sobre a superfície terrestre seja localizado, utiliza-se o sistema de coordenadas geográficas, sendo que, ao realizarmos este procedimento, deveremos relacioná-lo com o sistema cartesiano com o qual estamos habituados a utilizar.

Sendo assim, seja um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas com:

- Origem O : centro do planeta Terra;
- Eixo OZ positivo: sentido centro da Terra - Polo Norte (N);
- Plano OXY : plano do Equador, sendo o eixo OX positivo cortando o Meridiano de Greenwich e o eixo OY positivo cortando o meridiano de longitude 90° E.

Agora, consideremos um ponto $P = (x, y, z)$ do espaço e os ângulos θ e φ , conforme a figura abaixo:

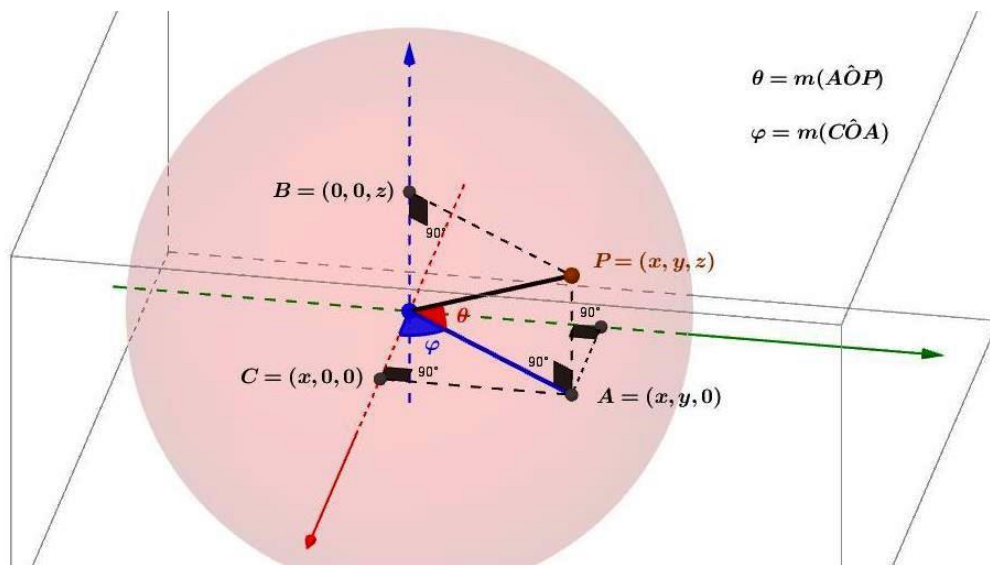


Figura 5.13: Coordenadas e Ângulos (latitude e longitude).

O ponto P sobre a superfície terrestre determina os ângulos θ e φ que correspondem a sua latitude e a sua longitude, respectivamente.

Sendo assim, temos que a diferença entre $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e o raio da Terra é chamada a elevação (ou altitude) de $P = (x, y, z)$.

Analisando o triângulo retângulo ΔOPB da figura acima, temos:

$$\cos(90 - \theta) = \frac{OB}{OP} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

e, como $\cos(90 - \theta) = \operatorname{sen}\theta$, segue que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Logo, temos que a expressão acima define a θ um único valor entre 0 e 90, para $z > 0$ e um único valor entre -90 e 0, para $z < 0$. No primeiro caso, dizemos então que a latitude de P é $\theta^\circ N$, enquanto que no segundo a latitude de P é $\theta^\circ S$.

Por outro lado, no triângulo retângulo ΔOAC , temos:

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e

$$\cos\varphi = \frac{OC}{OA} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Sendo assim, as expressões acima definem um único φ entre 0 e 180, para $y > 0$ e dizemos que a longitude de P é $\varphi^\circ E$. Quando $y < 0$, φ assume um único valor entre -180 e 0 e, neste caso, a longitude de P é $(-\varphi)^\circ W$.

Um fato importante de se destacar é que, conhecendo-se a latitude θ , a longitude φ e a elevação de um ponto P , podemos determinar as coordenadas cartesianas x , y e z de um determinado ponto.

Por padronização, as designações Norte(N)/Sul(S) para o ângulo θ e Leste(E)/Oeste(W) para φ são definidas como positivas/negativas, respectivamente. Por exemplo, um ponto com latitude $40^\circ N$ e longitude $50^\circ W$ terá $\theta = +40^\circ$ e $\varphi = -50^\circ$, enquanto que um ponto com latitude $40^\circ S$ e longitude $50^\circ E$ terá $\theta = -40^\circ$ e $\varphi = +50^\circ$.

Como $\overline{OP} = r$, então $\operatorname{sen}\theta = \frac{z}{r}$. Logo, $z = r \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Por outro lado, no triângulo OAP , temos:

$$\cos\theta = \operatorname{sen}(90 - \theta) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = r \cdot \cos\theta$$

Logo, $x = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos\varphi = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi$ e $y = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{sen}\varphi = r \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi$.

Portanto, temos as seguintes relações entre as coordenadas geográficas e as coordenadas cartesianas:

- $x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi$;
- $y = r \cdot \cos\theta \cdot \sin\varphi$;
- $z = r \cdot \sin\theta$;

5.5 Atividades

1. (Extraído e adaptado de [1]) As cidades de Curitiba e Goiânia estão sobre o mesmo meridiano (49° oeste) e suas latitudes são 26° sul e 17° sul, respectivamente. Calcule a distância entre estas duas cidades, sendo o raio da Terra igual a 6400 km. Use $\pi = 3,14$

Solução:

Como as cidades de Curitiba e Goiânia estão sobre o mesmo meridiano, ou seja, estão contidas em circunferências máximas que passam pelos polos da Terra, temos que a longitude de ambas são iguais (49° W). Porém, suas latitudes são de 26° sul e 17° sul, respectivamente, ou seja, apresentam uma diferença de 9° , que é a medida do arco entre as duas cidades.

Seja l a medida do arco do meridiano em questão, temos:

$$l = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

$$\Rightarrow l = \frac{\pi \cdot 6400 \cdot 9}{180} \cong 1004,8 \text{ km}$$

2. (Extraído e adaptado de [11]) As cidades de Quito, no Equador, e Entebe, em Uganda, estão ambas sobre o Equador. A longitude de Quito é 79° W, enquanto que a de Entebe é 32° E. Calcule a distância entre estas duas cidades. Use $\pi = 3,14$ e considere o raio da Terra sendo 6400 km.

Solução:

Como a longitude de Quito é de 79° W e a de Uganda é de 32° E, ou seja, estão em hemisférios diferentes, temos que a diferença entre as longitudes é de $32 - (-79) = 32 + 79 = 111^\circ$.

Assim sendo, temos que a distância d entre elas é igual à:

$$d = \frac{\pi r \alpha}{180}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\pi \cdot 6400 \cdot 111}{180} \cong 12392,5 \text{ km}$$

3. (Extraído e adaptado de [12]) Calcule a distância entre as cidades de Los Angeles (34° N, 118° W) e Recife (8° S, 34° W). As respectivas longitudes e latitudes são de valores aproximados, com o intuito de simplificar os cálculos. Considere o raio da Terra de 6400 km e use $\pi = 3,14$.

Solução:

Para resolvermos este exercício, utilizaremos a Lei dos Cossenos, vista em 3.2.1, a qual será de grande utilidade tendo em vista a simplicidade dos cálculos efetuados, bem como a desnecessidade de transformarmos as coordenadas geográficas para as coordenadas cartesianas, o que, didaticamente, é mais atraente e prático.

Seja o triângulo esférico ABC , de modo que Los Angeles-EUA seja representado por A , Recife-BR, por B e o Polo Norte, por C . Queremos determinar o comprimento do menor arco de circunferência máxima que passa por A e B , que nada mais é do que a distância entre as duas cidades, conforme a figura abaixo:

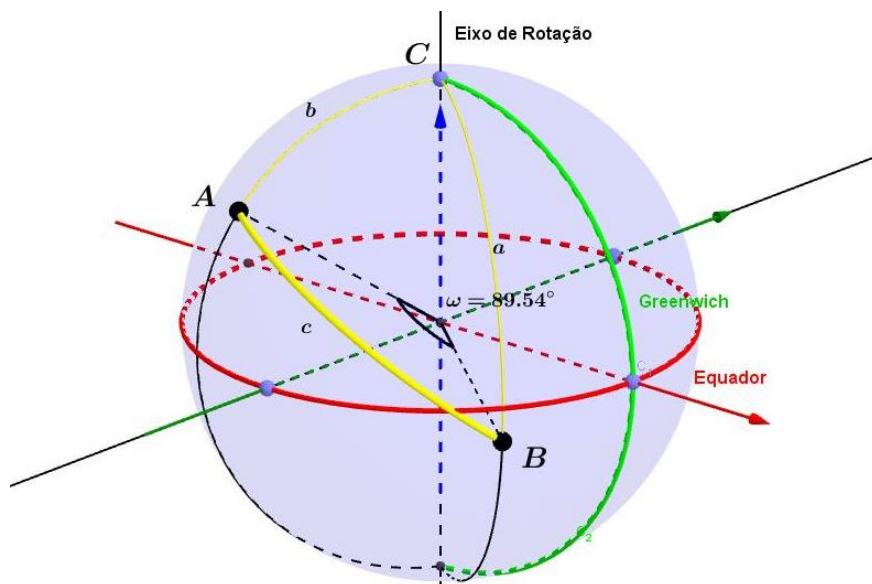


Figura 5.14: Distância entre Los Angeles e Recife.

Agora, temos que o ângulo C pode ser calculado pela diferença (em módulo) das longitudes dos pontos A e B . Logo,

$$C = 118^\circ - 34^\circ = 84^\circ.$$

Enquanto isso, temos que o lado b é um arco de meridiano determinado pelo ângulo $A\hat{O}C$, o qual pode ser determinado pelo cálculo da diferença (em módulo) entre as latitudes dos pontos A e C . Daí, vem:

$$b = A\hat{O}C = 90^\circ - 34^\circ = 56^\circ.$$

O lado a é um arco de meridiano determinado pelo ângulo $B\hat{O}C$, o qual pode ser determinado pelo cálculo da diferença (em módulo) entre as latitudes dos pontos B e C . Assim, temos:

$$a = B\hat{O}C = 90^\circ - (-8^\circ) = 98^\circ.$$

Neste momento, podemos aplicar a Lei dos Cossenos, conforme 3.2.1. Logo,

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\hat{C}) \\ \Rightarrow \cos(c) &= \cos(98^\circ) \cdot \cos(56^\circ) + \sin(98^\circ) \cdot \sin(56^\circ) \cdot \cos(84^\circ) \\ \Rightarrow \cos(c) &= -0,1391 \cdot 0,5591 + 0,9902 \cdot 0,8290 \cdot 0,1045 \\ \Rightarrow \cos(c) &= -0,07777081 + 0,085781521 \\ \Rightarrow \cos(c) &= 0,008010711 \end{aligned}$$

Daí,

$$c = \arccos(0,008010711) \cong 89,54^\circ$$

Deste modo, para calcularmos a medida do lado c , fazemos:

$$c = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} = \frac{3,14 \cdot 6400 \cdot 89,54}{180} \cong 9996,64 \text{ km}$$

Portanto, a menor distância entre as cidades de Los Angeles e Recife é de aproximadamente 10000 km.

4. (Extraído e adaptado de [1]) As cidades de New York e Nápoles estão praticamente sobre o mesmo paralelo 41°N e suas longitudes são 74°W e 14°E , respectivamente. Sabe-se que o comprimento do arco menor do paralelo entre as duas cidades é cerca de 7419 km. Calcule a distância entre as duas cidades. Use $\pi = 3,14$ e considere o raio da Terra de 6400 km.

Solução:

Neste exercício, utilizaremos uma outra forma para solucioná-lo, sem o uso da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica. Logo, utilizaremos as Coordenadas Cartesianas das localidades, uma vez que já possuímos suas Coordenadas Geográficas.

Sejam os pontos A , B e O a representação de New York, Nápoles, e do centro da Terra, respectivamente.

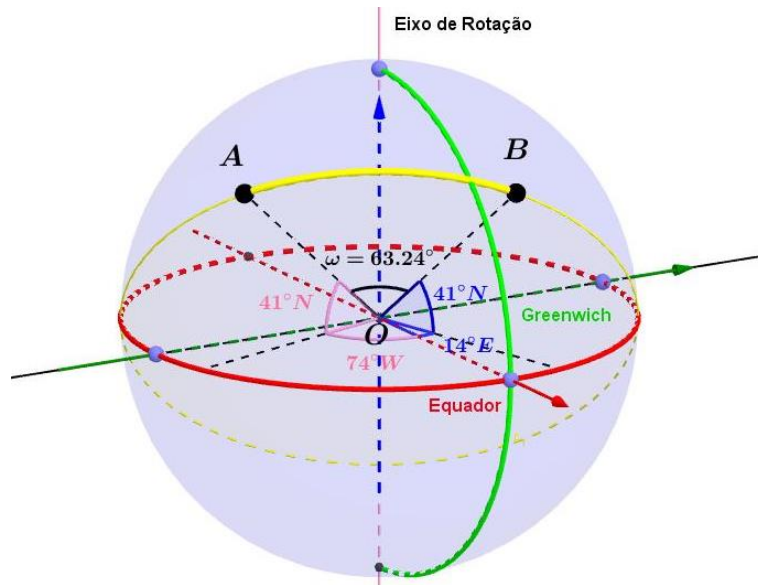


Figura 5.15: Distância entre New York e Nápoles.

Inicialmente, calcularemos o comprimento de um arco menor definido por A e B da circunferência máxima que passa por estes pontos, ou seja, calcularemos o ângulo $\theta = m(\widehat{AOB})$. Para isto, supondo o raio da Terra medindo 6400 km, consideraremos um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

Logo, as coordenadas cartesianas do ponto A (New York - Longitude: $\varphi = 74^\circ$ W e Latitude: $\theta = 41^\circ$ N) serão:

$$x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow x = 6400 \cdot \cos(41^\circ) \cdot \cos(-74^\circ)$$

$$\Rightarrow x = 6400 \cdot 0,20802$$

$$y = r \cdot \cos\theta \cdot \sen\varphi$$

$$y = 6400 \cdot \cos(41^\circ) \cdot (-74^\circ)$$

$$y = 6400 \cdot (-0,72547)$$

$$z = r \cdot \sen\theta$$

$$z = 6400 \cdot \sen(41^\circ)$$

$$z = 6400 \cdot 0,65606$$

Por outro lado, as coordenadas cartesianas do ponto B (Nápoles - Longitude: $\varphi' = 14^\circ$ E e latitude: $\theta' = 41^\circ$ N) serão:

$$x = r \cdot \cos\theta' \cdot \cos\varphi'$$

$$x = 6400 \cdot \cos(41^\circ) \cdot \cos(14^\circ)$$

$$x = 6400 \cdot 0,73229$$

$$y = r \cdot \cos\theta' \cdot \sin\varphi'$$

$$y = 6400 \cdot \cos(41^\circ) \cdot \sin(14^\circ)$$

$$y = 6400 \cdot 0,18257$$

$$z = r \cdot \sin\theta'$$

$$z = 6400 \cdot \sin(41^\circ)$$

$$z = 6400 \cdot 0,65606$$

Sendo assim, as coordenadas cartesianas de A e B são:

$$A = 6400(0.20802, -0.72547, 0.65606)$$

e

$$B = 6400(0.73229, 0.18257, 0.65606).$$

(i) Aplicando a Lei dos Cossenos da Trigonometria Plana ao triângulo AOB , para calcular a medida do ângulo θ , vem:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$$

Sabemos que $OA = OB = r = 6400$. Daí, a medida de AB é:

$$AB^2 = 6400^2 + 6400^2 - 2 \cdot 6400 \cdot 6400 \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow AB^2 = 2 \cdot 6400^2 - 2 \cdot 6400^2 \cdot \cos\alpha.$$

Logo,

$$AB^2 = 2 \cdot 6400^2 \cdot (1 - \cos\alpha).(*)$$

(ii) Agora, calculando a distância entre dois pontos no espaço, $d(A, B)$, temos:

$$d(A, B) = \sqrt{(6400 \cdot 0,73229 - 6400 \cdot 0,20802)^2 + [6400 \cdot 0,18257 - 6400 \cdot (-0,72547)]^2 + 0}$$

$$\Rightarrow d(A, B) = \sqrt{(6400 \cdot 0,52427)^2 + (6400 \cdot 0,90804)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(A, B) &= \sqrt{(6400)^2 \cdot (0,52427)^2 + (6400)^2 \cdot (0,90804)^2} \\ \Rightarrow d(A, B) &= \sqrt{(6400)^2 [(0,52427)^2 + (0,90804)^2]} \\ \Rightarrow d(A, B) &= 6400 \sqrt{0,274859032 + 0,824536641} \\ \Rightarrow d(A, B) &= 6400 \cdot \sqrt{1,099395674} = 6400 \cdot 1,048520707 \end{aligned}$$

Logo,

$$d(A, B) = \overline{AB} = 6710,532527$$

Substituindo em (*), fica:

$$\begin{aligned} AB^2 &= 2 \cdot 6400^2 \cdot (1 - \cos\alpha) \\ \Rightarrow (6710,532527)^2 &= 2 \cdot 6400^2 \cdot (1 - \cos\alpha) \\ \Rightarrow 45031246,8 &= 81920000 \cdot (1 - \cos\alpha) \\ \Rightarrow 0,54969784 &= 1 - \cos\alpha \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= 1 - 0,54969784 = 0,45030216 \\ \Rightarrow \alpha &\cong 63,24^\circ \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento do arco menor AB da circunferência máxima que passa por A e B , é dada por:

$$\widehat{AB} = \frac{\pi \cdot r \cdot \alpha}{180} = \frac{3,14 \cdot 6400 \cdot 63,24}{180} \cong 7060,39 \text{ km.}$$

5.6 A Construção das Coordenadas Geográficas com o Software Geogebra

- Observações:

- A presente construção com o software Geogebra visa a criação de um modelo didático para o estudo do posicionamento de um ponto sobre a superfície da Terra, por meio de suas Coordenadas Geográficas (latitude e longitude).

- Objetivos:

- Construir um modelo de representação do posicionamento de um ponto sobre a superfície terrestre, por meio de suas Coordenadas Geográficas;

- Conhecimentos prévios:
 - Sistema de coordenadas cartesianas e coordenadas geográficas (longitude e latitude);
 - Geometria Plana e Espacial (esfera);
 - Conhecimentos básicos do Software Geogebra.
- Material necessário:
 - Laboratório de informática;
 - Computadores com a instalação do Software Geogebra.
- A CONSTRUÇÃO:

A partir da construção do item 4.3, simularemos a determinação das Coordenadas Geográficas de um ponto P qualquer sobre a superfície terrestre. Inicialmente, aplique um zoom na figura, afim de possibilitar uma melhor visualização dos objetos a serem construídos.

Agora, situaremos o ponto P segundo sua posição angular em relação aos planos ACD e BCD ($a : y = 0$ e $b : z = 0$, na Janela de Álgebra, respectivamente) fazendo a projeção deste ponto sobre os planos citados.

1. Selecione a ferramenta “Reta Perpendicular” e, em seguida, clique sobre o ponto P e sobre o plano ACD (Plano $a : y = 0$ na Janela de Álgebra). Analogamente, proceder com o plano BCD (Plano $b : z = 0$ na Janela de Álgebra). Obs: A escolha dos elementos (ponto e planos) para esta ação pode ser realizada diretamente na Janela de Álgebra.

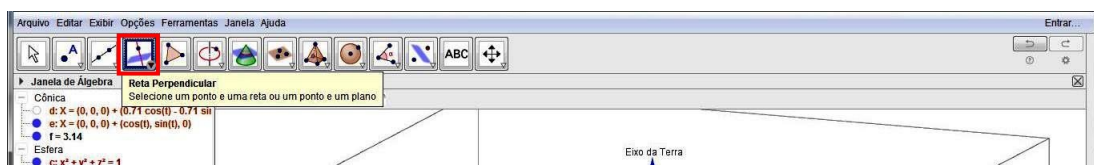


Figura 5.16: Ferramenta Reta Perpendicular.

Observe, na Janela de Álgebra, que serão criadas duas novas retas, g e h , automaticamente, na forma paramétrica e que as mesmas variam conforme a posição do ponto P . Neste momento, é interessante acompanharmos cada construção e sua respectiva nomenclatura na referida janela, atentando para a padronização, afim de identificarmos cada objeto construído.

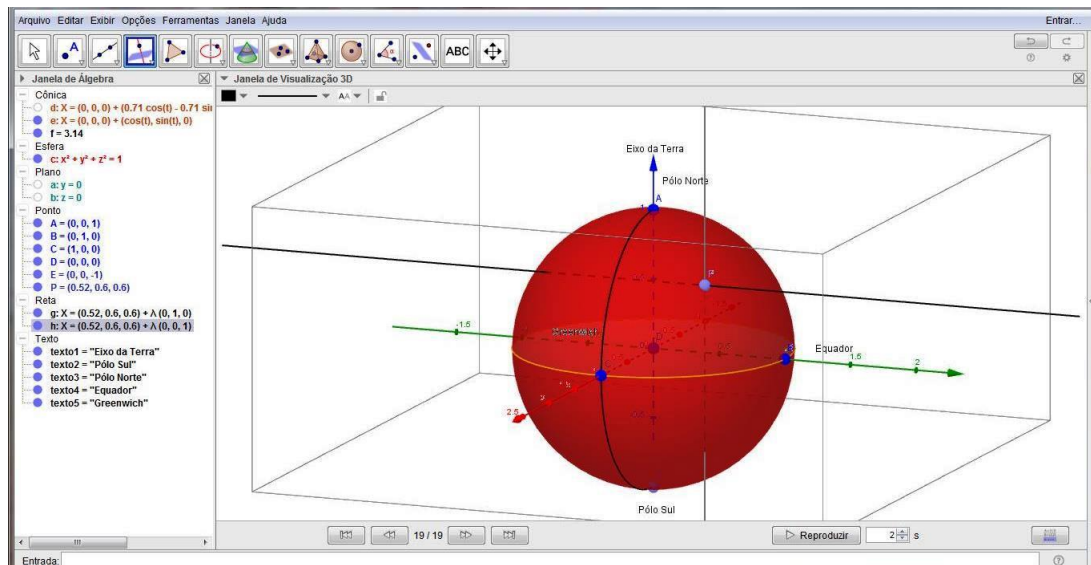


Figura 5.17: Retas perpendiculares aos planos passando por P.

2. Selecione a ferramenta “Intersecção de Dois objetos” e, depois, clique na reta g e no plano ACD . Analogamente, clique na reta h e no plano BCD . Lembre-se que poderemos sempre clicar nas suas respectivas equações na Janela de Álgebra.

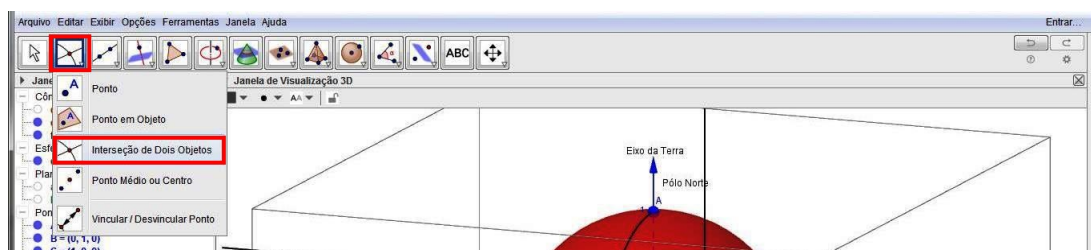


Figura 5.18: Selecionar intersecção de dois objetos.

Sendo assim, criar-se-ão as projeções do ponto P sobre os planos ACD e BCD , a saber: pontos F e G , respectivamente.

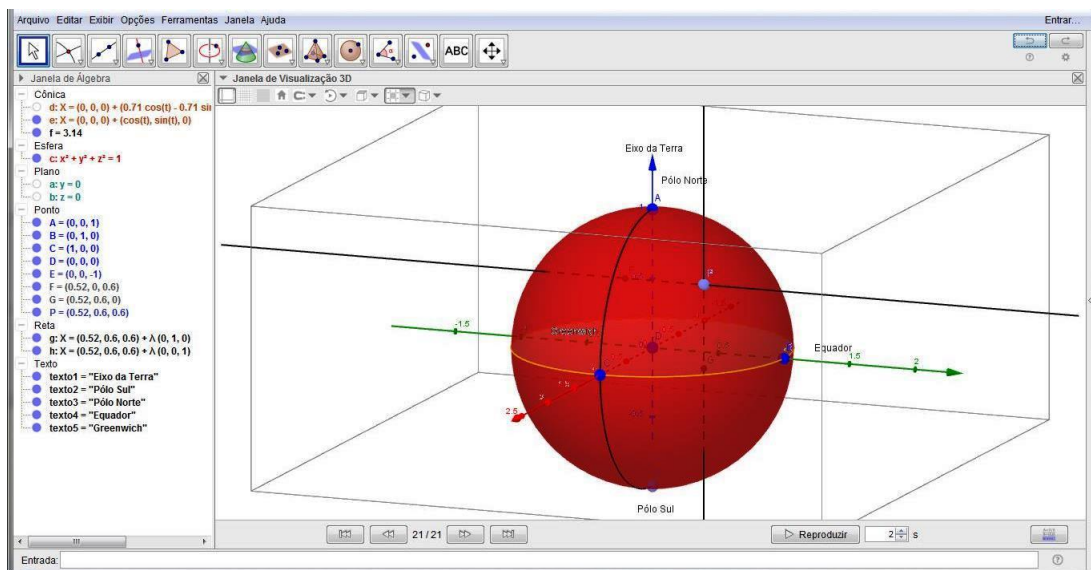


Figura 5.19: Projeções ortogonais do ponto P.

Propositalmente, faremos algumas modificações na construção, afim de “limparmos” a aparência da área de trabalho. Como, neste momento, as retas g e h não são interessante, vamos ocultá-las e, para isto, devemos desmarcar a opção “Exibir Objeto”, clicando com o botão direito do mouse sobre cada uma delas e desmarcando a opção “Exibir Objeto” ou clicar sobre a bolhinha azul localizada à esquerda de suas equações na Janela de Álgebra.

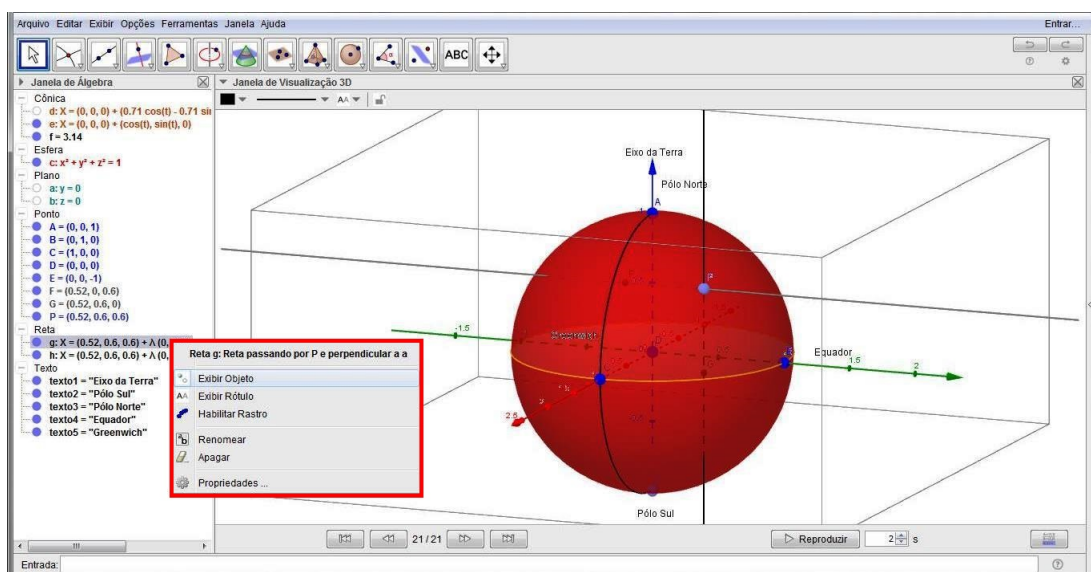


Figura 5.20: Ocultação de objetos (retas).

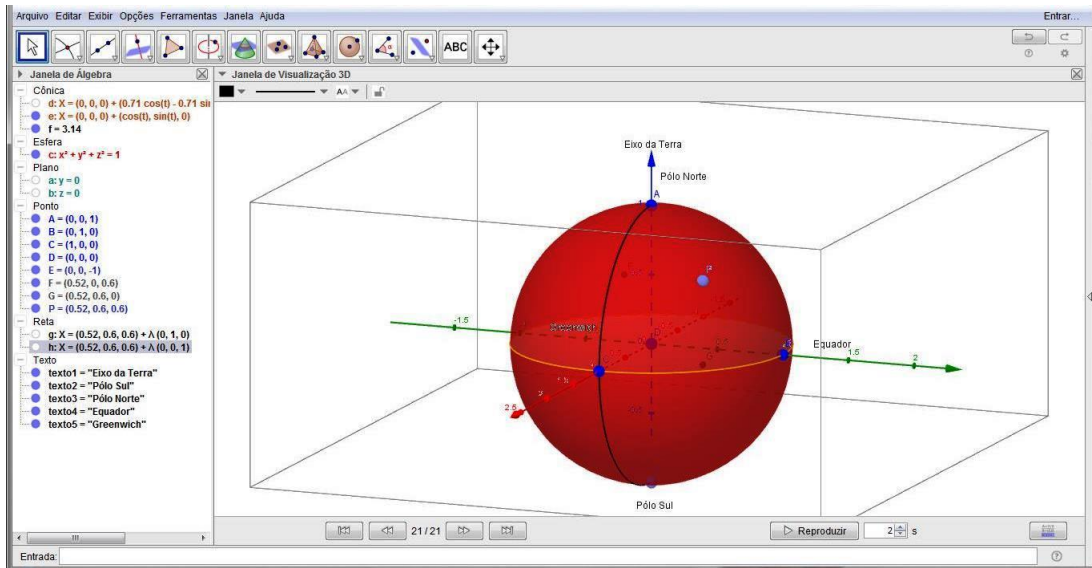


Figura 5.21: Otimização da área de trabalho.

Agora, de modo a melhor relacionarmos o ponto P e suas projeções sobre os planos ACD e BCD , trace os segmentos de reta \overline{PG} e \overline{PF} , descritos a seguir:

3. Selecione a ferramenta “Segmento”, clique no ponto P e, em seguida, no ponto G , repetindo o processo para o ponto F . Observe na Janela de Álgebra que os segmentos serão nomeados como i e j , respectivamente.

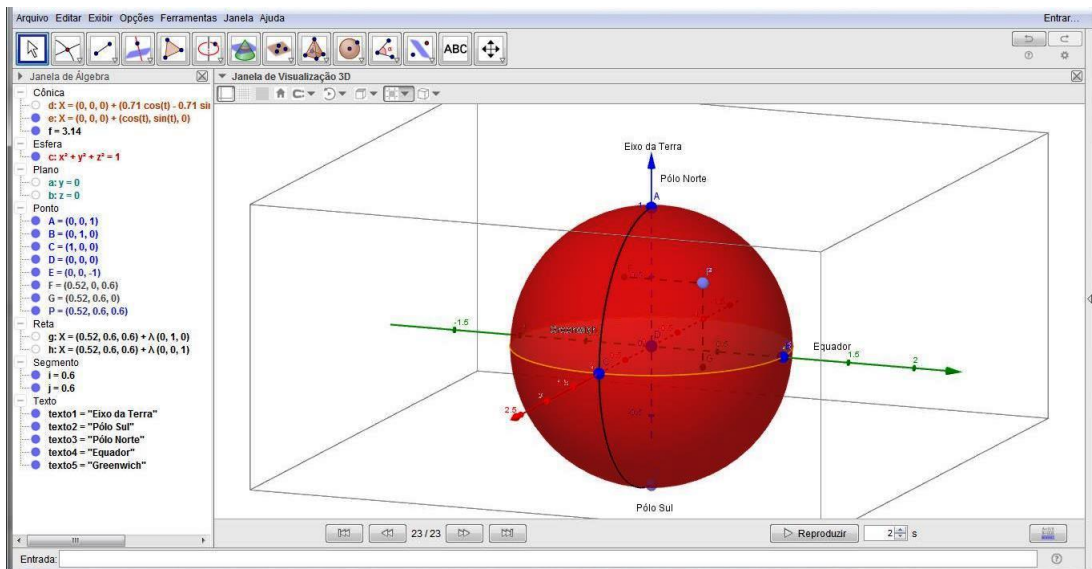


Figura 5.22: Construção de segmentos.

Neste momento, de acordo com as definições de Coordenadas Geográficas, construiremos as noções de posicionamento de um determinado ponto (Ponto P) sobre a Superfície Terrestre, relacionando-o com a longitude e a latitude de um determinado lugar.

Inicialmente, sabemos que a longitude é a distância, em graus, medida ao longo do paralelo, do ponto ao Meridiano de Greenwich e a latitude é a distância, em graus, do ponto ao Equador, medida ao longo do meridiano do ponto.

4. Para criar o ângulo α (longitude), selecione a ferramenta “Ângulo” e clique sobre os pontos C , D e G , nesta ordem.
5. Para criar o ângulo β (latitude), selecione a ferramenta “Ângulo” e clique sobre os pontos G , D e P , nesta ordem.

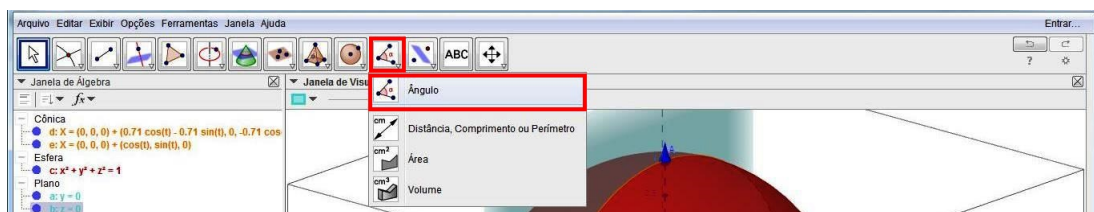


Figura 5.23: Ferramenta “Ângulo”.

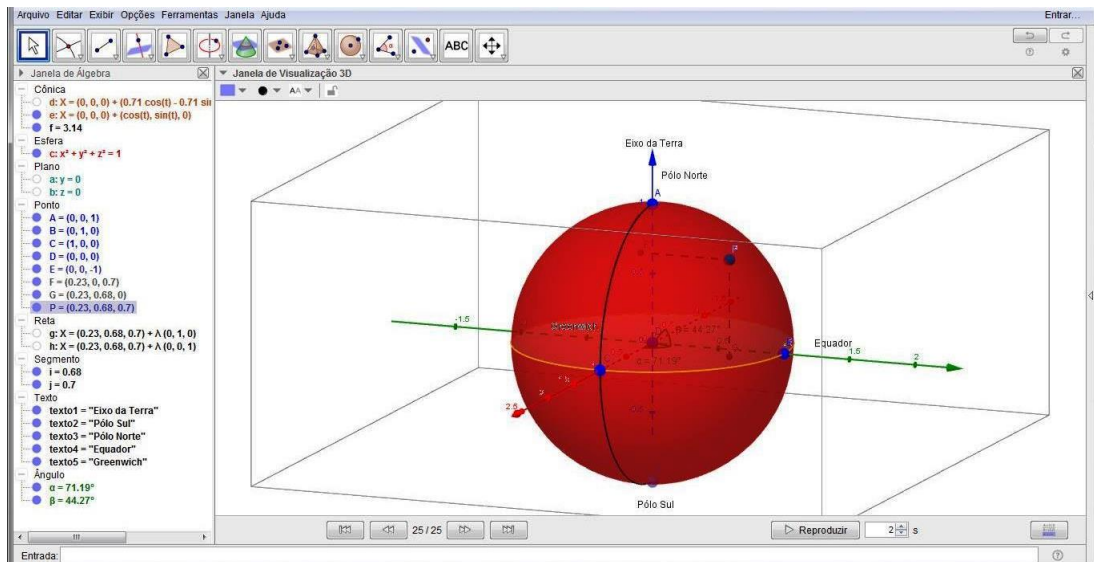


Figura 5.24: Criação de ângulos.

Lembre-se que há a possibilidade de melhorar a visualização dos ângulos, como cor e tamanho, bastando para isso clicar com o botão direito do mouse sobre o ângulo na Janela de Álgebra, ir em “Propriedades...” e, nas guias cor e estilo, fazer as alterações de acordo com a preferência do leitor.

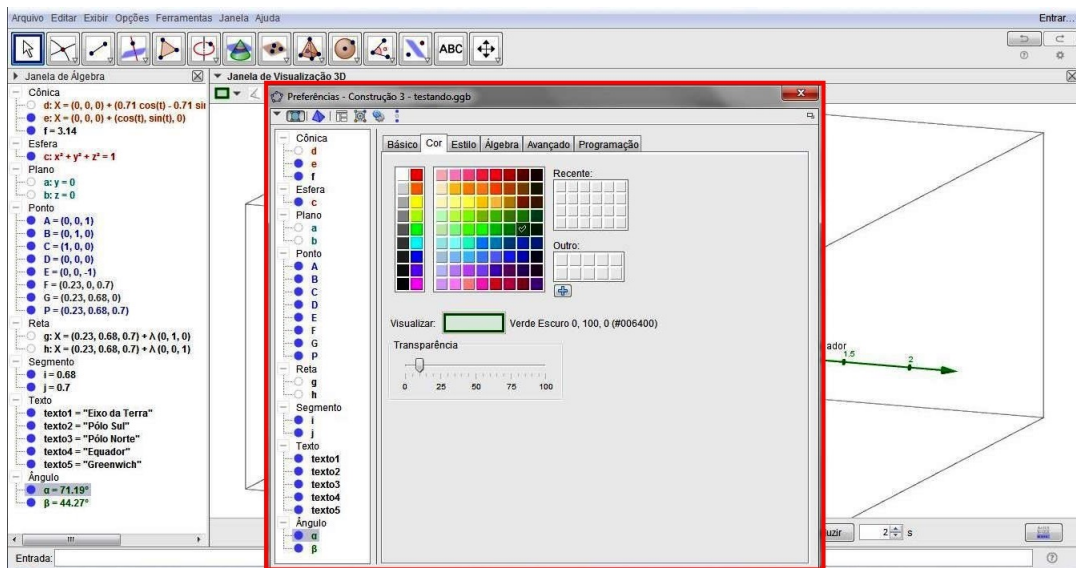


Figura 5.25: Janela “Preferência”/Cor.

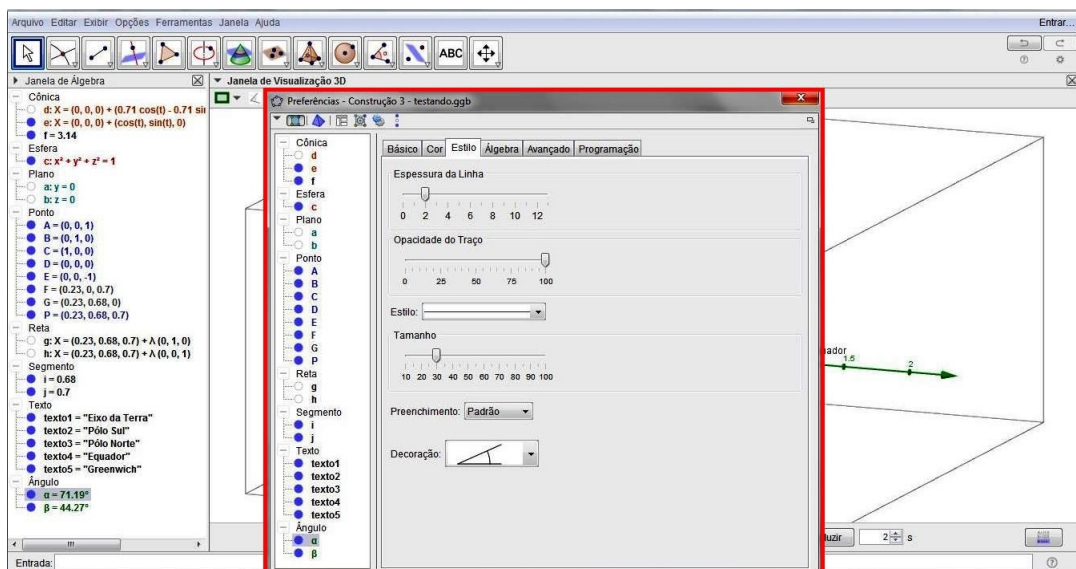


Figura 5.26: Janela “Preferência”/Estilo.

Diminuindo a transparência da cor da esfera na guia “Cor” (por exemplo, Transparência n° 25) e aumentando o tamanho dos ângulos na guia “Estilo” (por exemplo, Tamanho:70), através de suas respectivas caixas de Propriedades/Preferências, chegaremos a esta construção, onde é possível melhor visualizarmos os ângulos representantes das Coordenadas Geográficas do ponto P :

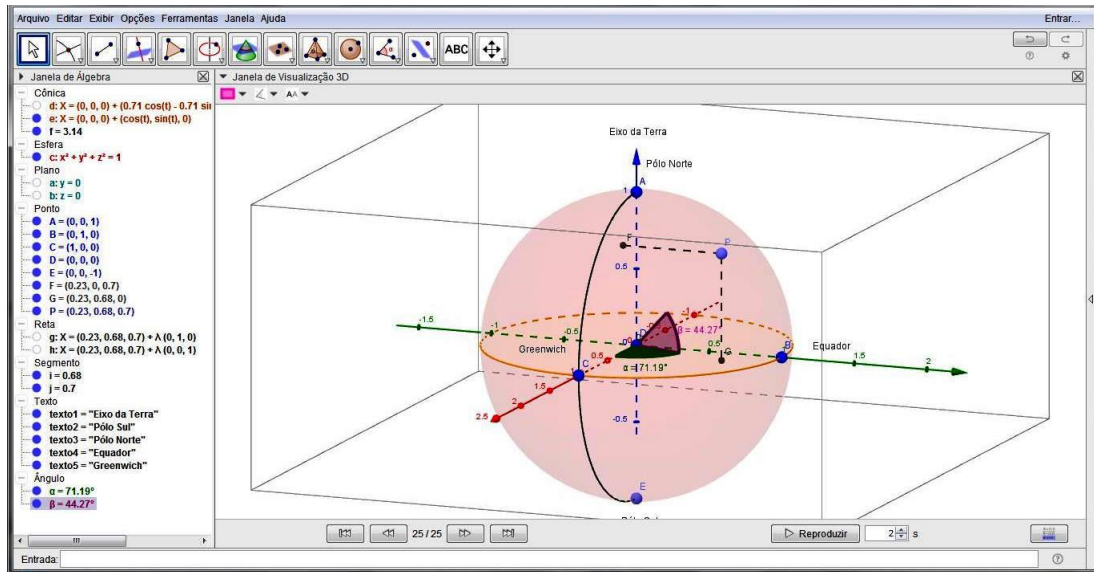


Figura 5.27: Criação das Coordenadas Geográficas.

Capítulo 6

Modelagem com o Software Geogebra

Neste capítulo, desenvolveremos com o Geogebra um modelo de estudo do cálculo da distância entre dois pontos situados sobre a superfície da Terra, utilizando para isto as suas coordenadas geográficas. Tal atividade será desenvolvida em quatro partes, de modo a facilitar a construção do Globo Terrestre e a compreensão dos conceitos, das definições e dos cálculos matemáticos envolvidos. Na construção serão determinados os pontos segundo suas coordenadas geográficas, com a finalidade de desenvolver no aluno sua percepção espacial, mediante o uso do software, bem como, fazê-lo compreender os entes matemáticos utilizados, tanto da Geometria Plana quanto da Geometria Esférica.

Esta atividade poderá ser desenvolvida pelo professor mediante um projeto interdisciplinar, que levará em consideração aspectos educacionais e pedagógicos do estudo de Geografia (Estudo do Planeta Terra) e de Matemática (Geometria Plana e Espacial), de modo a permitir ao aluno a elaboração, passo-a-passo, da construção propriamente dita, pelo uso do software, onde será possibilitado ao docente trabalhar simultaneamente com ambas disciplinas, desenvolvendo conceitos matemáticos e geográficos.

Como pré-requisito, é necessário que o professor trabalhe com o software antecipadamente com os alunos, no laboratório de informática da escola, de modo a propiciar aos mesmos uma noção básica das principais ferramentas e comandos do Geogebra.

6.1 A construção da modelagem do cálculo da distância entre duas localidades do Globo Terrestre

PARTE I

A partir da atividade de construção da esfera com o Software Geogebra, conforme Atividade 3.4, teremos o Layout Inicial da atividade a ser desenvolvida nesta próxima seção,

a qual será dividida em 4 partes. Por conseguinte, iremos realizar uma nova construção, baseada nas coordenadas geográficas de duas localidades do Globo Terrestre, afim de modelarmos, através da planilha do software, o cálculo da distância entre elas.

Nesta 1ª Etapa, iremos construir as coordenadas geográficas de um determinado ponto (Localidade 1) sobre a superfície de uma esfera de raio unitário, a qual, didaticamente, representará a superfície do Globo Terrestre. Sendo assim, considerando a construção da esfera, nos moldes da figura abaixo, como já realizada, a partir dela, façamos:

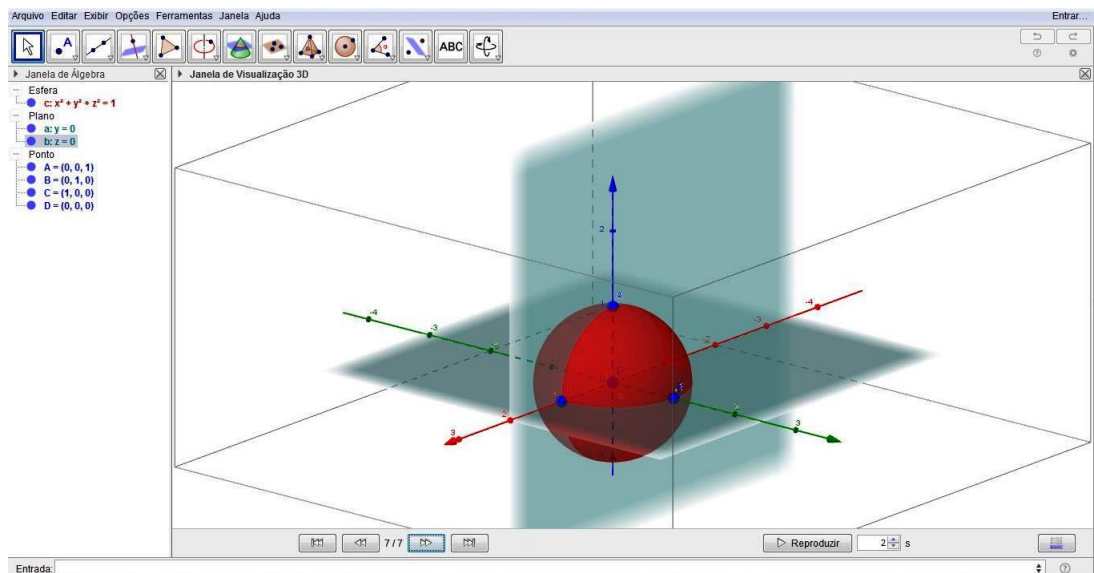


Figura 6.1: Criação da esfera.

1. Inicialmente, a fim de otimizar a área de trabalho e, conseqüentemente, “limpar” o campo de visão, iremos ocultar os planos $a : y = 0$ e $b : z = 0$, clicando sobre a bola azul ao lado das equações dos planos, ou seja, desmarcando-as na Janela de Álgebra. Também, reduziremos a transparência da cor da esfera, clicando com o botão direito do mouse sobre a equação da esfera na Janela de Álgebra, depois em “Propriedades...”. Na guia Cor, da janela intitulada “Preferências”, iremos alterar a cor para Azul e reduzir a Transparência para a marcação de número 10, ou qualquer outra, de preferência do leitor.

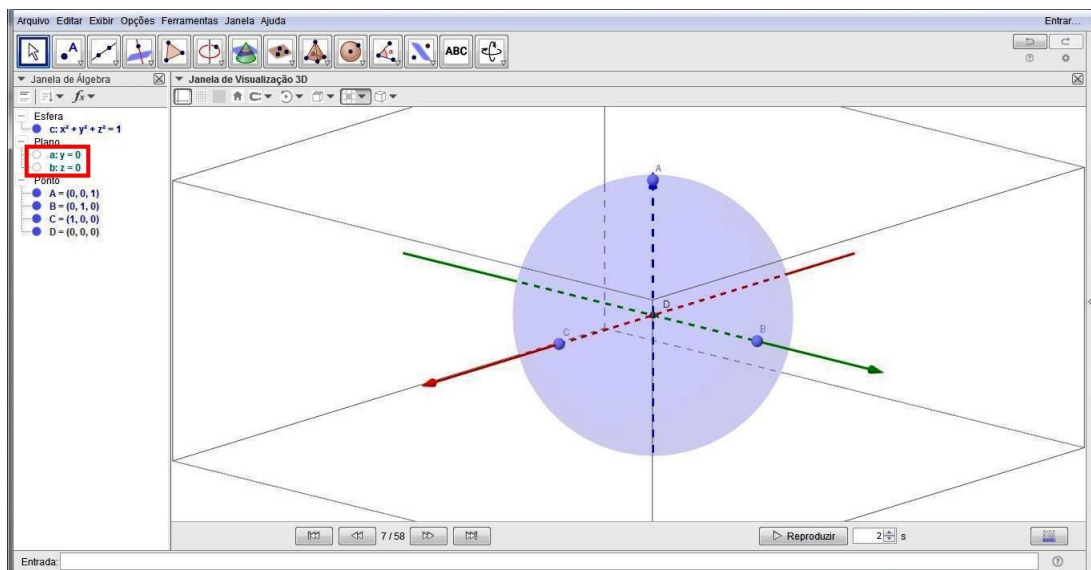


Figura 6.2: Ocultação de planos e alteração de cor da esfera.

2. Crie os pontos $E = (0, 0, -1)$, $F = (0, -1, 0)$ e $G = (-1, 0, 0)$, clicando na ferramenta “Ponto” e depois, nas suas respectivas coordenadas no gráfico 3D ou simplesmente, digitando-os no Campo de Entrada, naquela ordem.

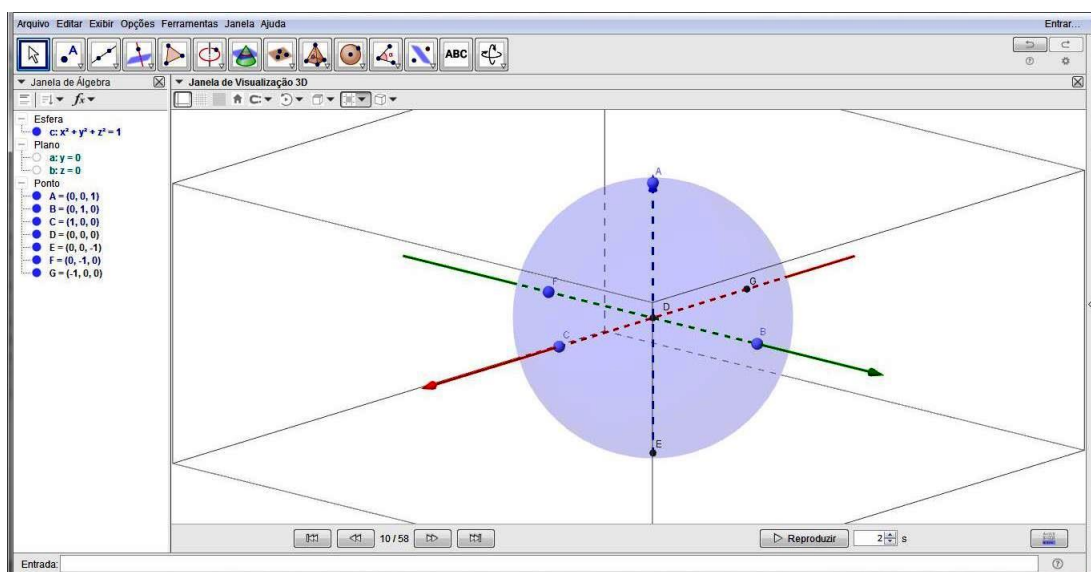


Figura 6.3: Criação dos pontos E, F e G.

Observe que o eixo z , representa o Eixo da Terra; o ponto D , o Centro da Terra; e o plano $a : y = 0$ (ocultado anteriormente), o plano que contém o Meridiano de Greenwich.

Sendo assim, clique na ferramenta “Girar Janela de Visualização 3” e rotacione o espaço afim de visualizar o hemisfério ocidental frontalmente. E, clicando com o botão

direito do mouse sobre a Janela de Visualização 3D, clique na opção “Janela de Visualização...”, desmarcando, nas guias de cada Eixo (X , Y e Z), a caixa “Exibir Números” e selecionando a opção “nenhuma” na Aba Graduações.

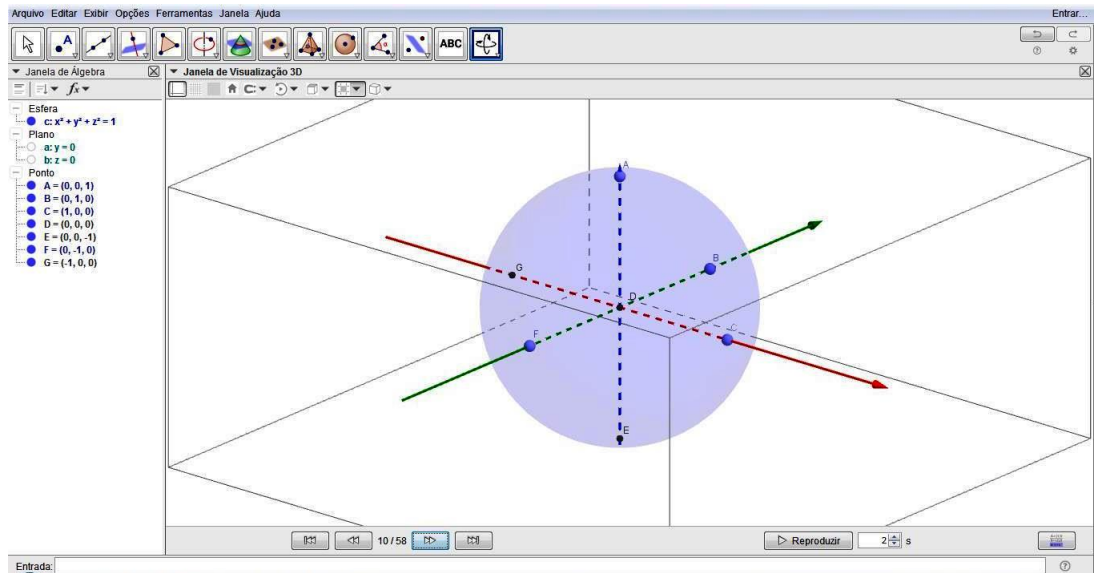


Figura 6.4: Esfera Rotacionada.

3. Para criar a Linha do Equador, crie um círculo que passa pelos pontos C , B e G . No Geogebra, clique na ferramenta “Círculo Definido por Três Pontos” e, em seguida, clique nos pontos C , B e G . Será, então, criada a cônica d , na Janela de Álgebra.

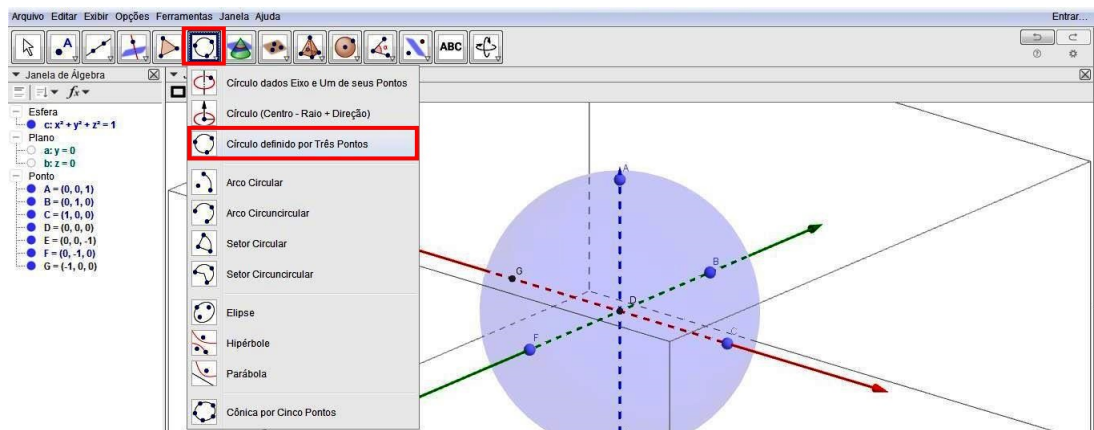


Figura 6.5: Ferramenta Círculo Definido por 3 pontos.

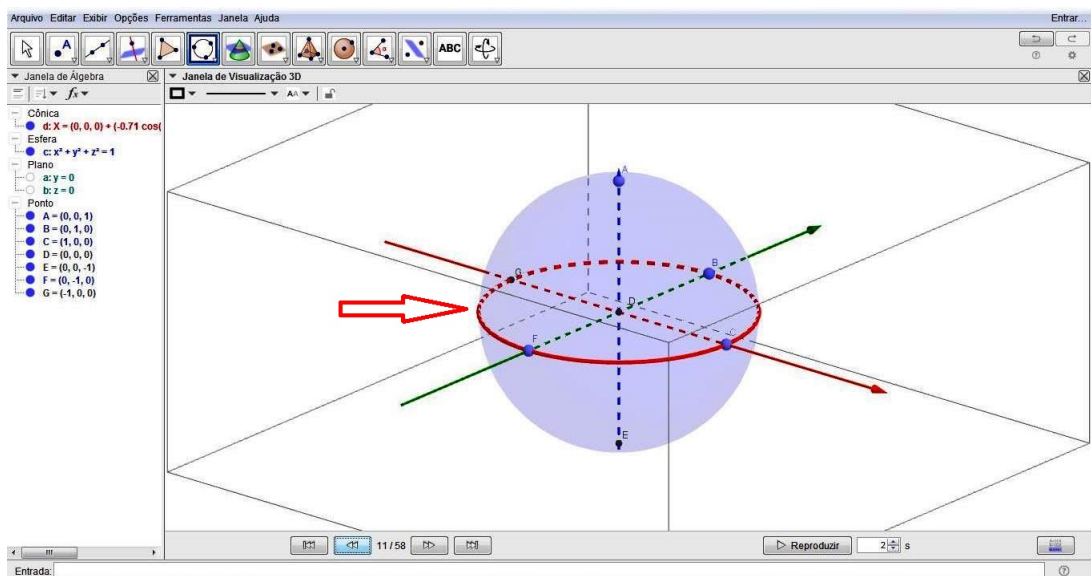


Figura 6.6: Representação do Equador.

Por outro lado, para criar a Linha de Greenwich, crie um Arco Circuncircular que passa pelos pontos A , C e E . Para isto, clique na ferramenta “Arco Circuncircular” e, em depois, clique nos pontos A , C e E . Note que será criada a cônica $e = 3,14$, na Janela de Álgebra.

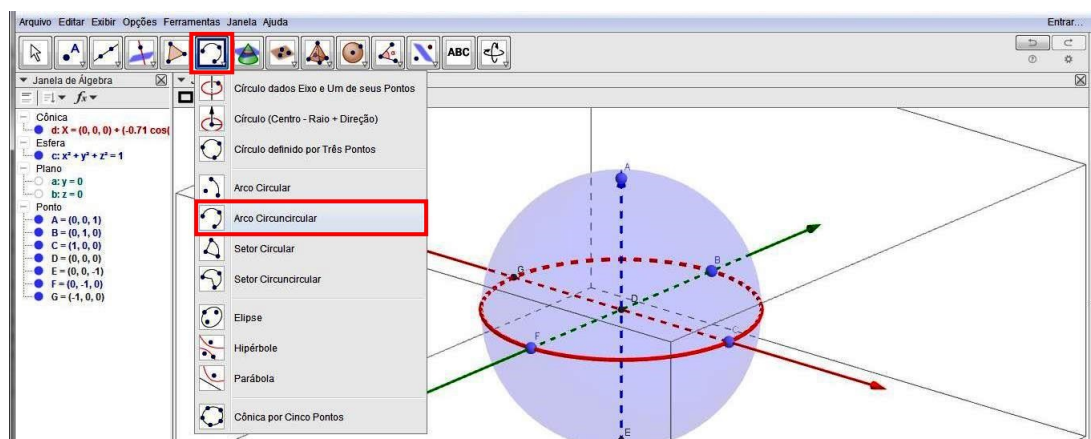


Figura 6.7: Ferramenta Arco Circuncircular.

Para melhor visualizarmos o Equador e o Meridiano de Greenwich, iremos modificar suas características na Janela de Visualização 3D. Sendo assim, clique sobre a equação de cada um deles com o botão direito do mouse e depois, clique em “Propriedades...”. Agora, na guia “Cor”, selecione a cor verde para Greenwich e a cor vermelha para Equador. Também, na guia “Estilo”, selecione Espessura da Linha: 5 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado, para ambos.

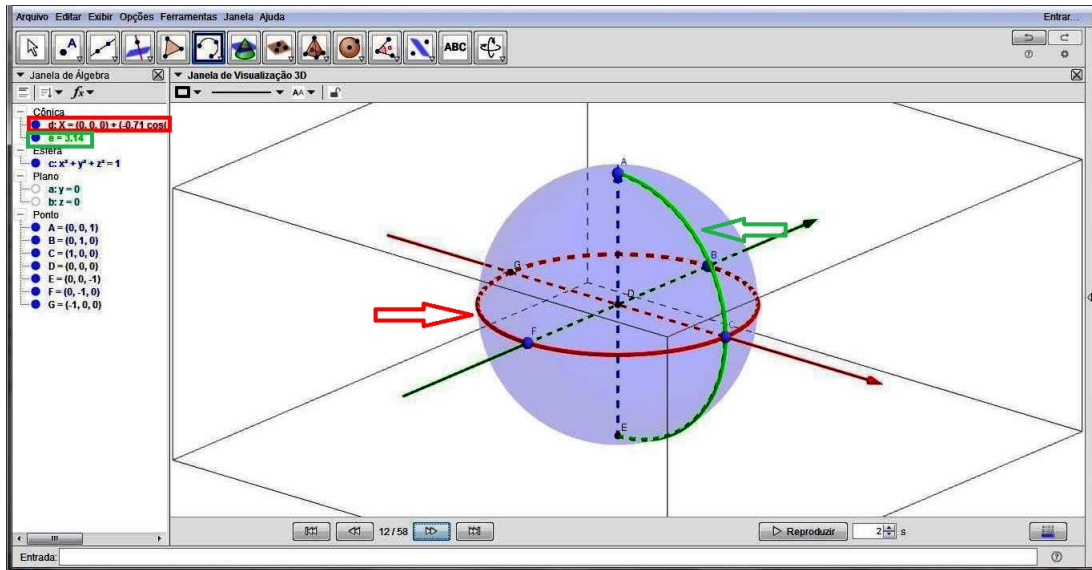


Figura 6.8: Equador e Greenwich.

4. Agora, criaremos o 1º Controle Deslizante, numa nova janela de visualização, o qual servirá de base para a construção da Latitude de um determinado ponto (Localidade 1). Porém, antes disso, devemos clicar no menu “Exibir” e, após, na opção “Janela de Visualização 2”, ou simplesmente, apertar as teclas $\text{ctrl}+\text{shift}+2$ para que a referida janela seja exibida.

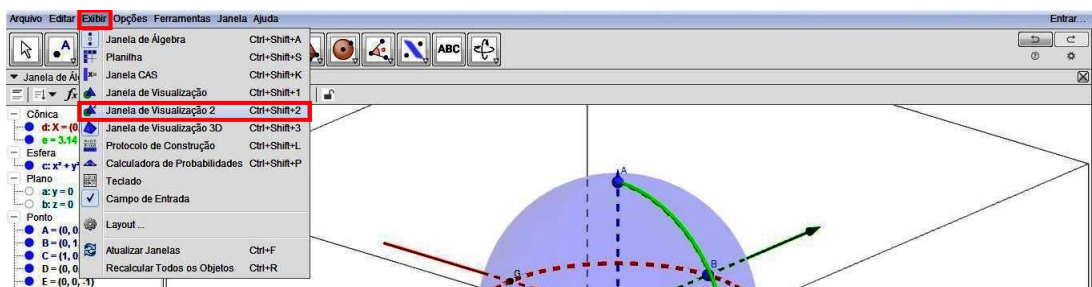


Figura 6.9: Exibir Janela de Visualização 2.

Repare que não utilizaremos a Janela de Visualização 1, tendo em vista a mesma possuir um sistema de coordenadas cartesianas desnecessária à nossa atividade.

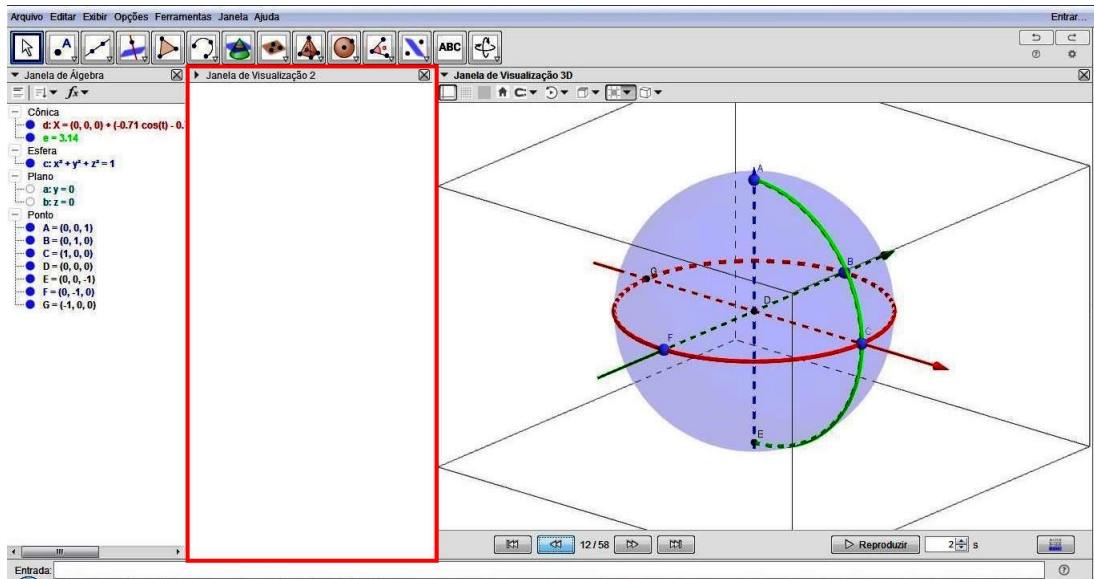


Figura 6.10: Janela de Visualização 2.

Deste modo, clique com o botão direito do mouse sobre a Janela de Visualização 2 e desmarque a opção “Eixos”. Em seguida, com esta janela ativa, clique na ferramenta “Controle Deslizante”, e depois no local da janela onde deseja inserir o controle. Feito isto, abrir-se-á a caixa do Controle Deslizante, onde selecionaremos a opção “Ângulo”, digitaremos o Nome: α e, na aba Intervalo, estipularemos o valor mínimo: -90° , máximo: 90° e incremento: 1, e clicaremos em OK.

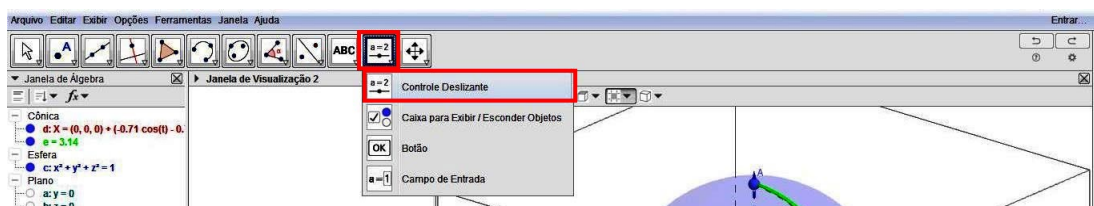


Figura 6.11: Ferramenta Controle Deslizante.

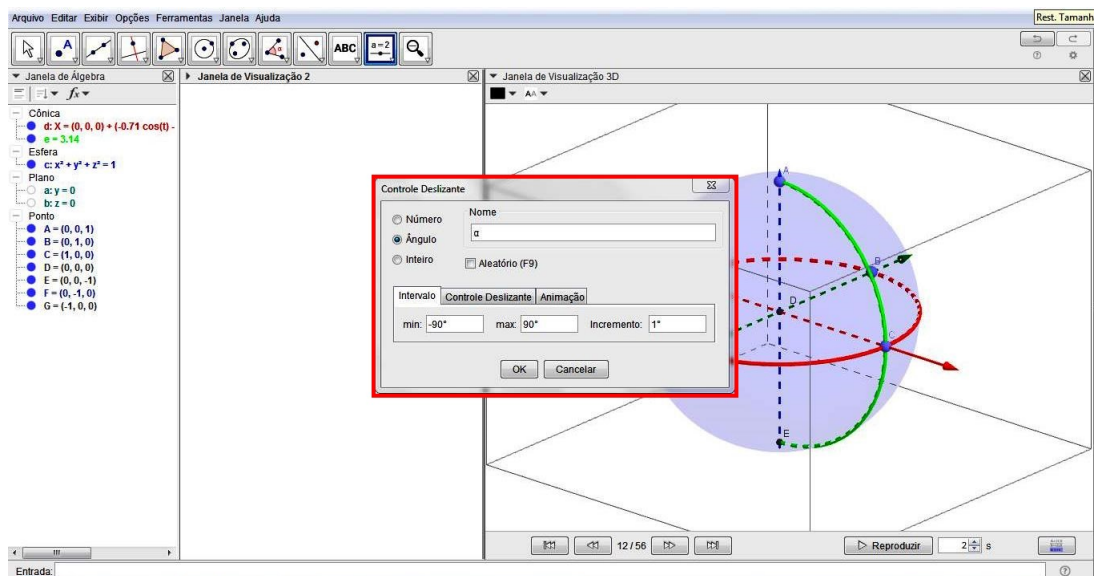


Figura 6.12: Caixa de Edição do Controle Deslizante.

Observe que o Controle Deslizante aparecerá no local designado na Janela de Visualização 2 e na Janela de Álgebra. Para fins de padronização, alteraremos a cor deste controle para Azul, selecionando-a na guia “Cor”.

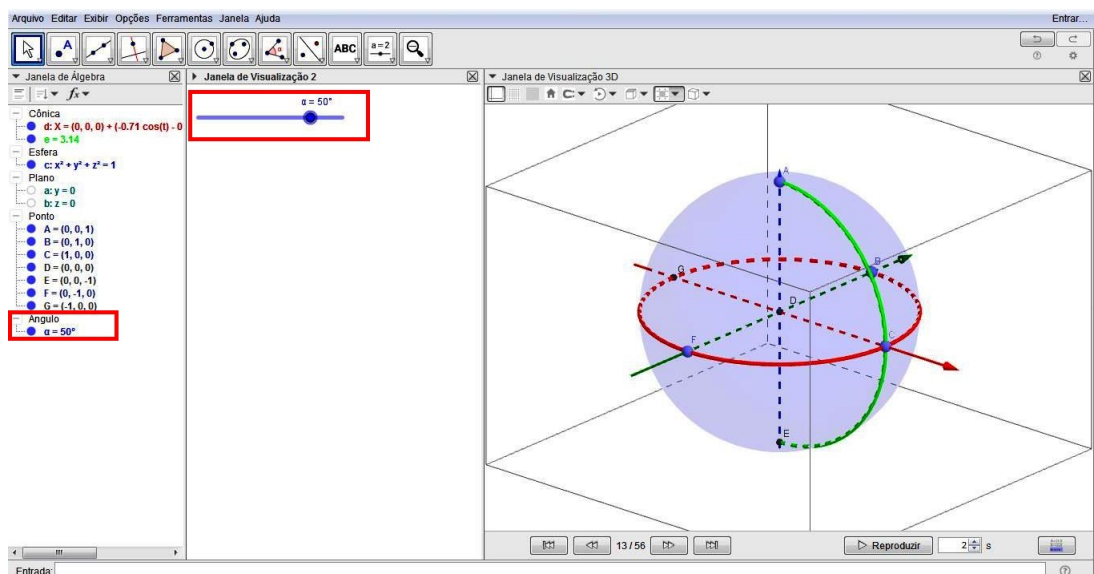


Figura 6.13: Controle Deslizante 1.

Note que será criado o Ângulo α na janela de Álgebra.

5. Criar as retas AE e FB , selecionando a ferramenta “Reta” e, em seguida, clicando sobre os pontos A e E e, após, clicando sobre F e B . Observe que serão criadas as retas f e g , na Janela de Álgebra.

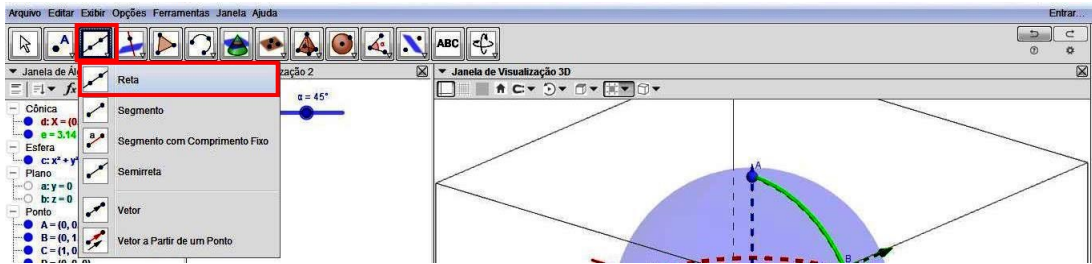


Figura 6.14: Ferramenta Reta.

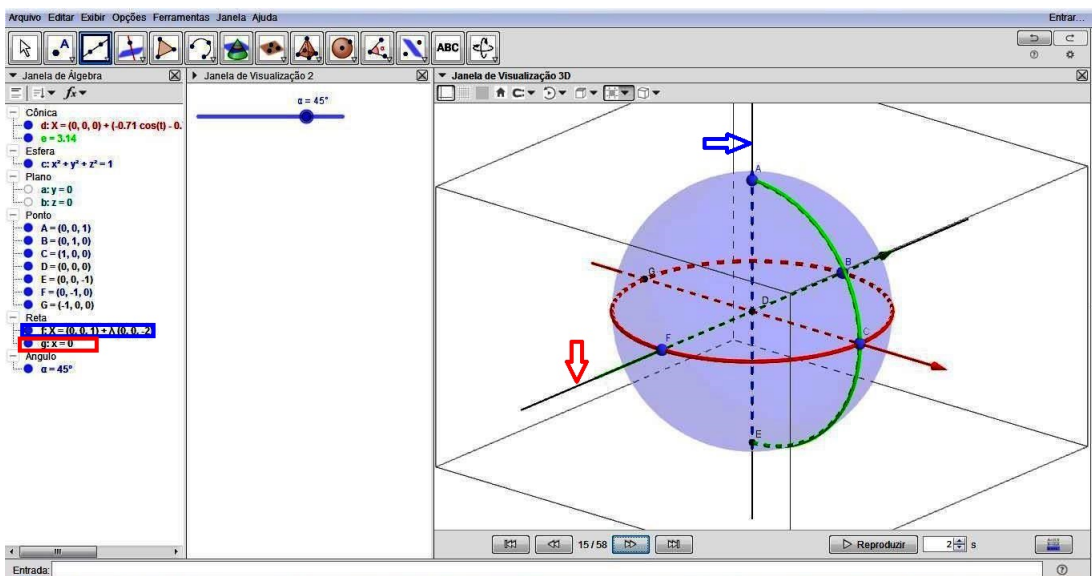


Figura 6.15: Criação das retas f e g.

- Neste momento, criaremos um novo ponto (C'), que nada mais é do que o ponto C girado por um ângulo de $-\alpha$ (ângulo este que será o valor do Controle Deslizante criado anteriormente), em relação à reta g (reta FB). Sendo assim, no Campo de Entrada, digite $\text{Girar}[C, -\alpha, g]$ e, tecele Enter. Observe que o símbolo de α deverá ser seleccionado no canto direito da caixa do Campo de Entrada. Com isso, será criado o ponto C' .



Figura 6.16: Comando Girar.

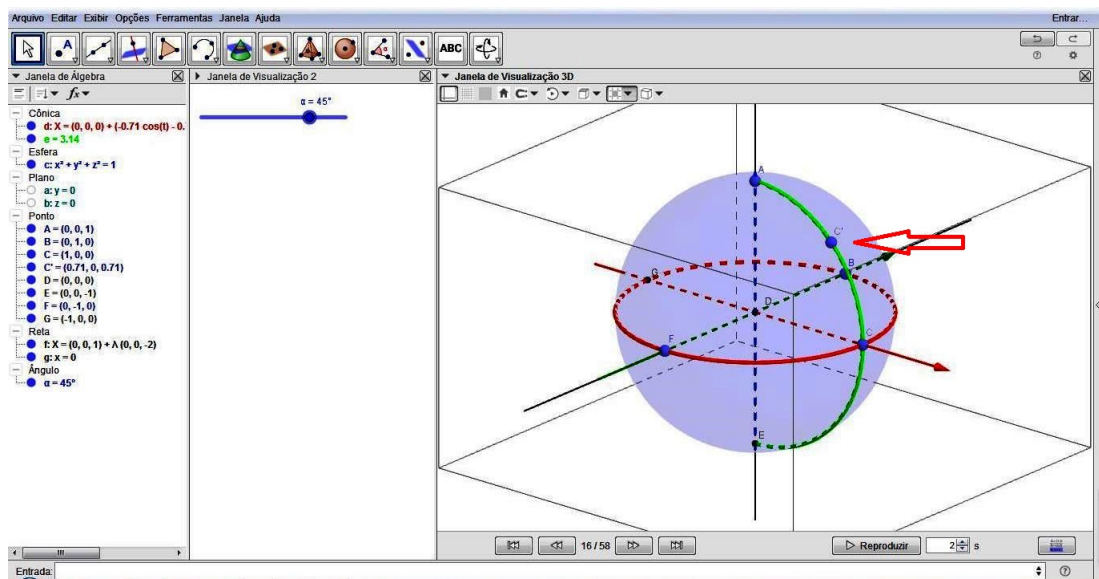


Figura 6.17: Ponto C'.

7. Dando continuidade à construção, criaremos o círculo que representará o paralelo do ponto C' . Para isto, digite no Campo de Entrada o comando $\text{C\u00edrculo}[f, C']$, que \u00e9 o c\u00edrculo de eixo f passando por C' , ou clique na ferramenta “C\u00edrculo Dados Eixo e Um dos Seus Pontos” e, depois, na reta f e no ponto C' . Ser\u00e1, ent\u00e3o, criada a c\u00f4nica h , na Janela de \u00c1lgebra, a qual ser\u00e1 destacada na cor Azul, Espessura da Linha: 3 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado.

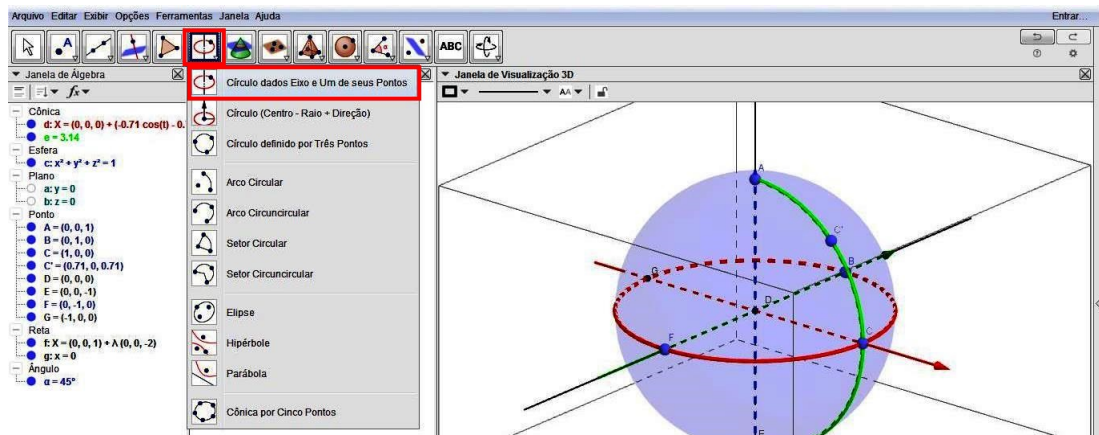


Figura 6.18: Ferramenta C\u00edrculo Dados Eixo e um dos Seus Pontos.

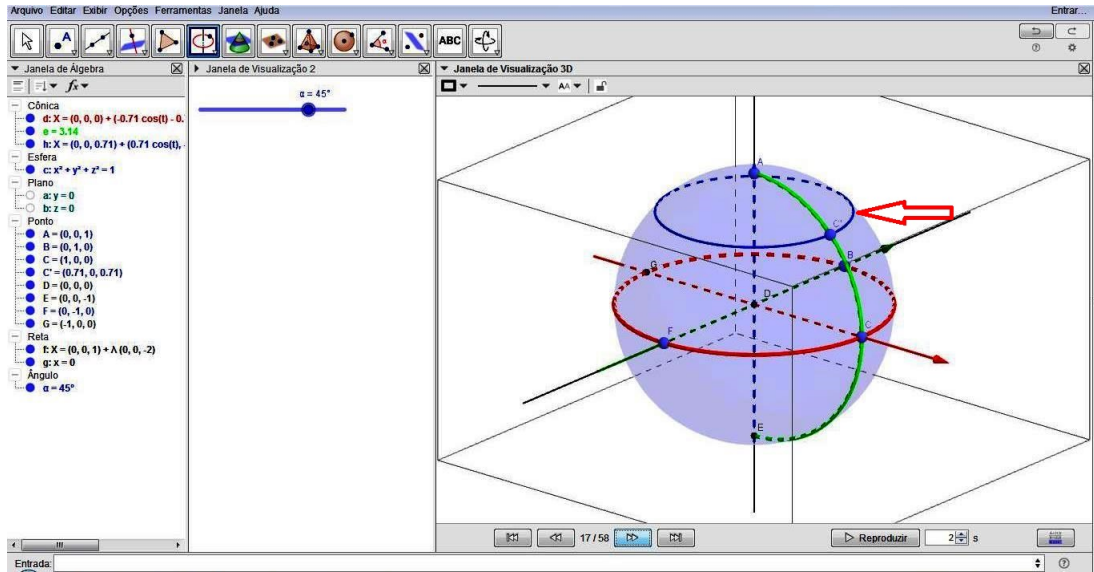


Figura 6.19: Paralelo de C' .

8. Para a criação do ângulo que representará a latitude do ponto, deve-se clicar na ferramenta “Ângulo” e, depois, nos pontos C , D e C' .



Figura 6.20: Ferramenta Ângulo.

Observe que será criado o ângulo β , na Janela de Álgebra. Para uma melhor visualização do ângulo construído, devemos clicar com o botão direito do mouse sobre o ângulo β na Janela de Álgebra, ir em “Propriedades...”, clicar na guia “Cor”, selecionando, por exemplo, a cor Azul e Transparência 0; Também, na guia “Estilo”, selecionar Espessura da Linha: 3 e o Tamanho: 50, ou alterar de acordo com a preferência do leitor. Por fim, devemos fechar a janela.

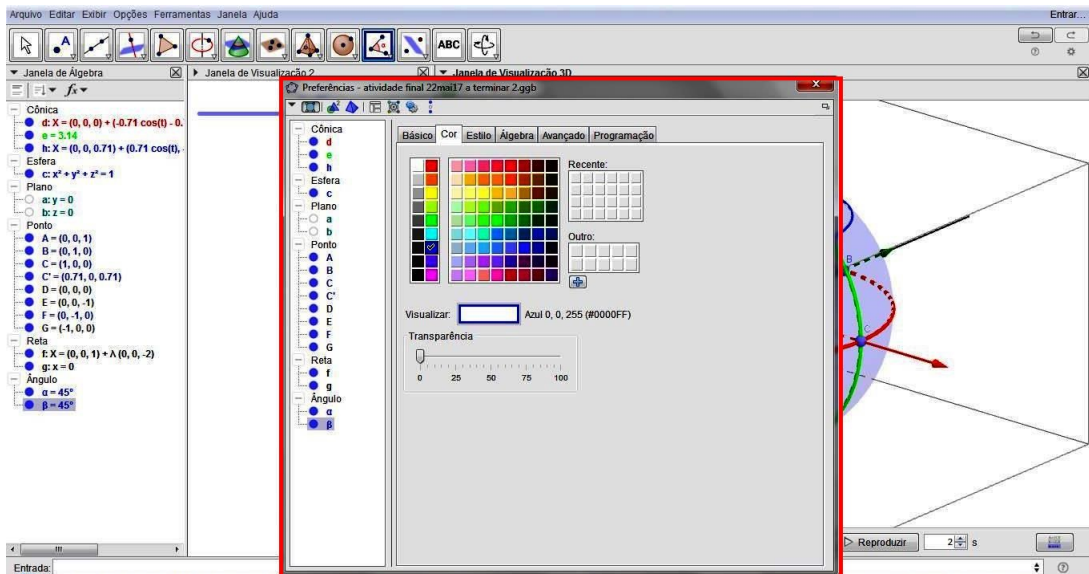


Figura 6.21: Caixa de Propriedades do Ângulo.

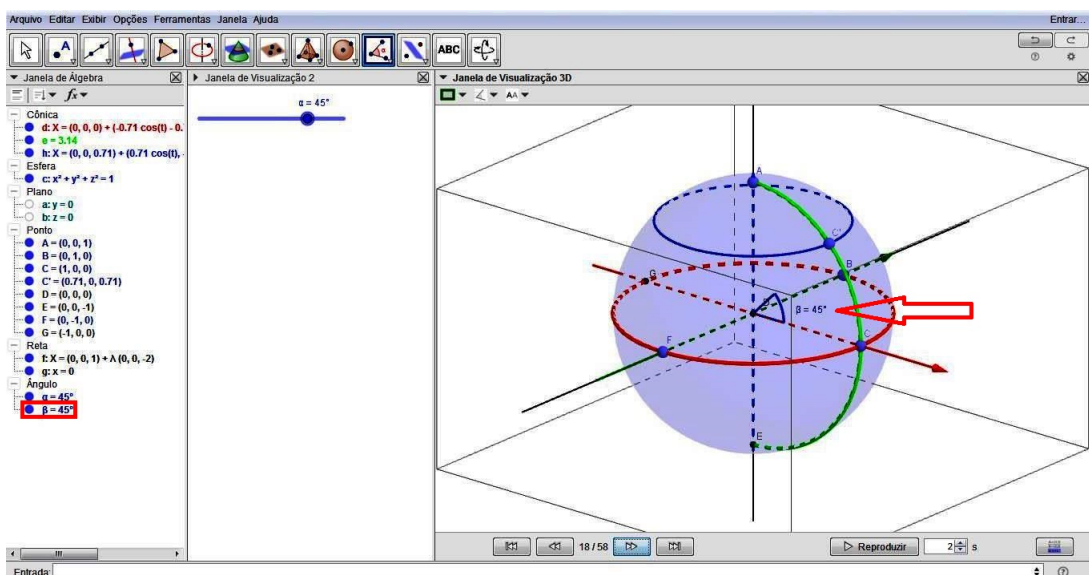


Figura 6.22: Ângulo beta.

9. Crie os segmentos \overline{DC} e $\overline{DC'}$, clicando na ferramenta “Segmento” e, em seguida, nos pontos D e C e por fim, nos pontos D e C' . Com isto, serão criados os segmentos $i = 1$ e $j = 1$, na Janela de Álgebra. Podemos, também, modificar as características dos segmentos, clicando com o botão direito sobre a palavra “Segmento” na Janela de Álgebra e, selecionando a cor Azul para o segmento $j = 1$ e Vermelha para o segmento $i = 1$; Na guia “Estilo”, aumentar a espessura para 3 e marcar como Tracejado o Estilo das Linhas Escondidas.

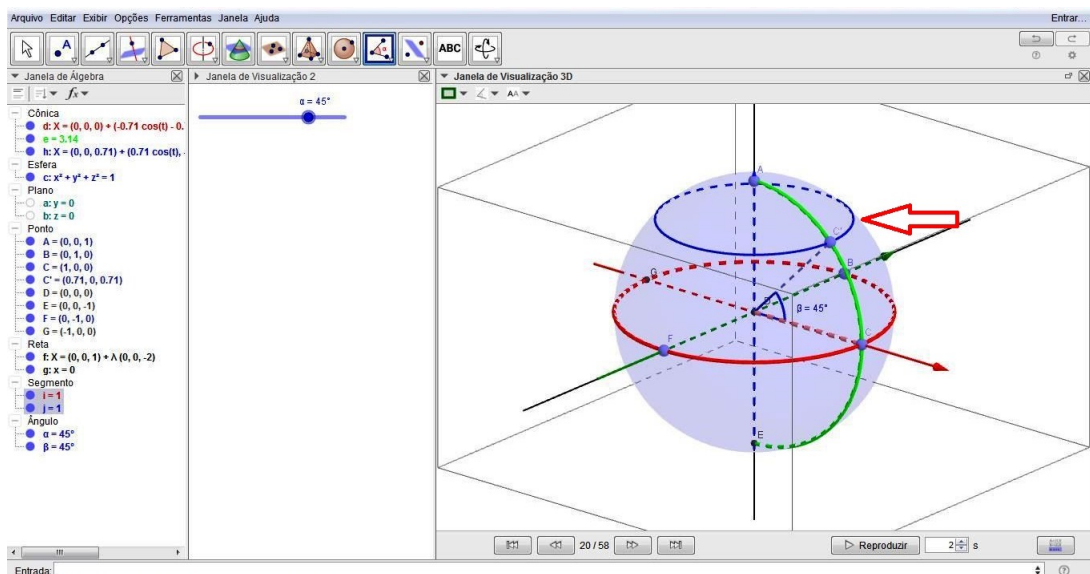


Figura 6.23: Latitude do ponto C' .

Deste modo, criamos o ângulo que representa a Latitude da Localidade 1!

10. Neste momento, criaremos o 2º Controle Deslizante, que servirá de base para a construção da Longitude de um determinado ponto. Para isto, ative a Janela de Visualização 2, clique na ferramenta “Controle Deslizante” e no local onde deseja inseri-la. A seguir, estabeleça Intervalo Mínimo: -180° , Máximo: 180° e Incremento: 1° . Será, então, criado o Controle Deslizante θ , na Janela de Álgebra e na Janela de Visualização. Pra fins de padronização, alteraremos a cor deste controle para a cor Rosa.



Figura 6.24: Controle Deslizante 2.

11. Agora, digite o comando $\text{Girar}[C, -\theta, f]$, na Caixa de Entrada, e verifique a criação do ponto C'_1 , que é o ponto C girado por um ângulo de $-\theta$ em torno de f .

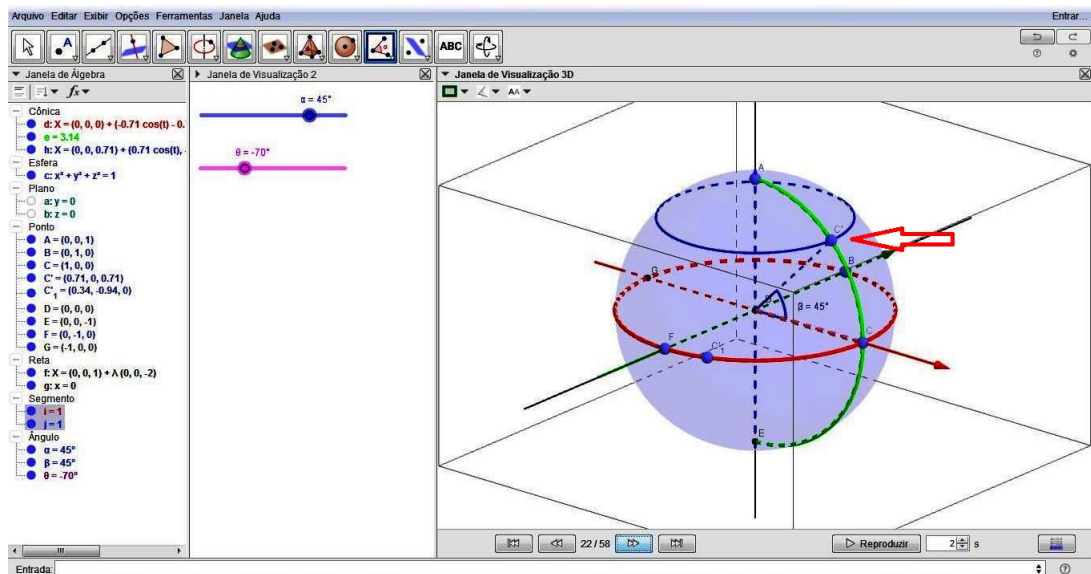


Figura 6.25: Ponto C'_1 .

12. Clique na ferramenta “Arco Circuncircular” e, em seguida, nos pontos A , C'_1 e E . Note que será criado um meridiano, no caso, $k = 3, 14$, o qual será configurado na cor Rosa, Transparência: 0, Espessura da Linha: 3 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado. Este arco representa um meridiano que passa por C'_1 .

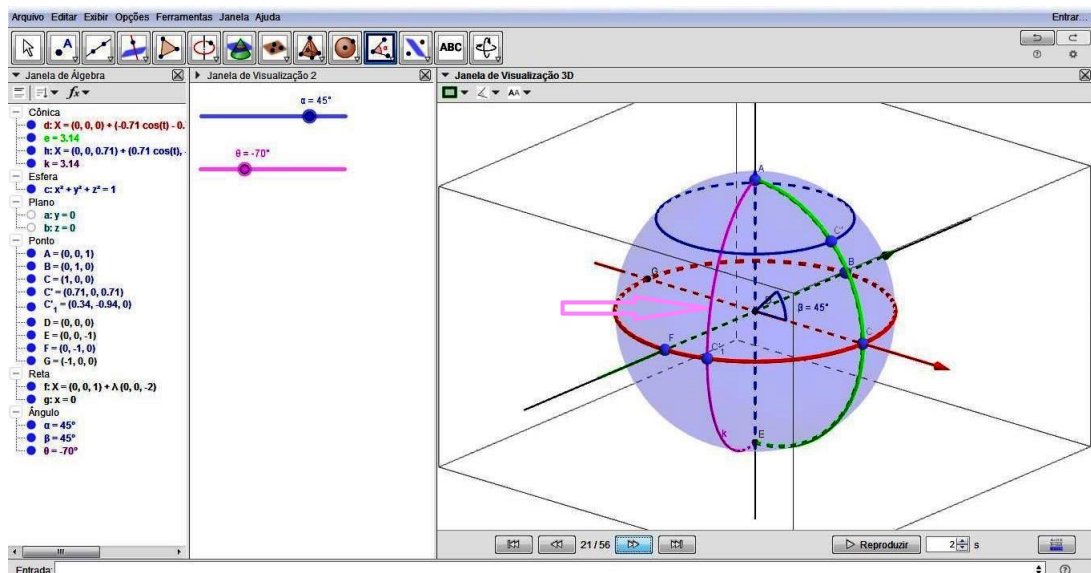


Figura 6.26: Meridiano de C'_1 .

13. Neste momento, estabeleceremos o ângulo que representará a longitude de um determinado ponto na superfície terrestre. Para isto, clique na ferramenta “Ângulo” e, depois, nos pontos C , D e C'_1 . Observe que será criado o ângulo γ na Janela de Álgebra. Para uma melhor visualização do ângulo construído, devemos clicar com o botão

direito do mouse sobre o ângulo γ na Janela de Álgebra, ir em “Propriedades...”, clicar na guia “Cor”, selecionando, por exemplo a cor Rosa e Transparência: 0; Também, na guia “Estilo”, selecionar Espessura da Linha: 3 e Tamanho: 50, ou alterar de acordo com a preferência do leitor. Por fim, devemos fechar a janela.

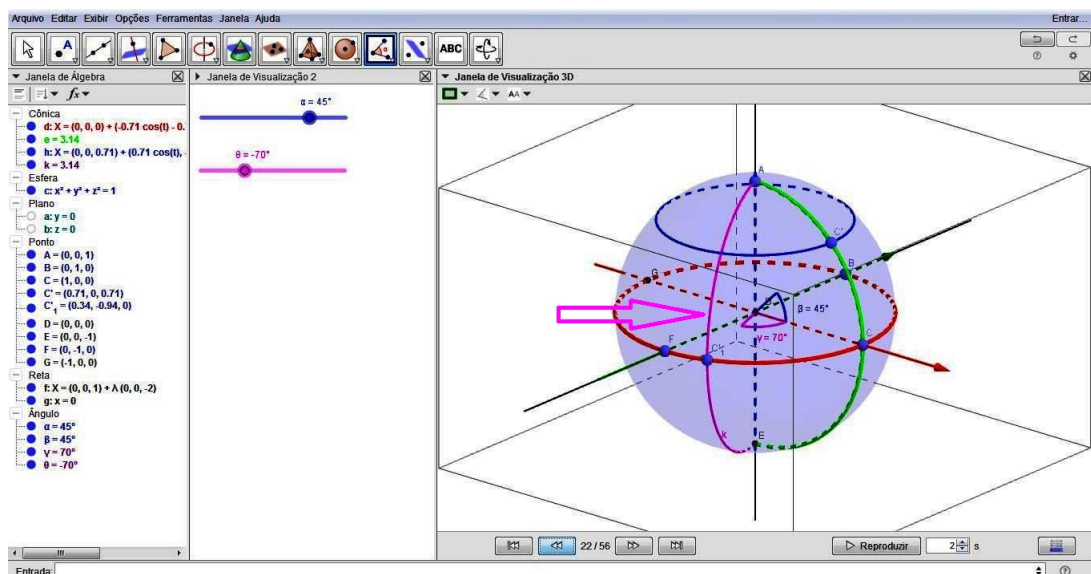


Figura 6.27: Longitude de C'_1 .

14. Agora, devemos marcar o ponto de intersecção da representação do meridiano e do paralelo. Sendo assim, clique na ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” e, após, clique nas cônicas h e k . Note que serão criados os pontos H e I .

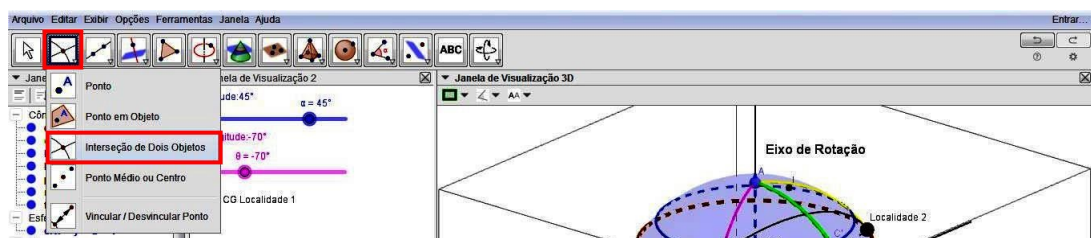


Figura 6.28: Ferramenta Intersecção de Dois Objetos.

Diante disso, ocultaremos o ponto I , em virtude do mesmo encontrar-se no contra-meridiano da representação do Globo.

Repare que o Ponto H , ponto de intersecção do paralelo com o meridiano, representa o ponto de um determinado local sobre a superfície da Terra, o qual chamaremos de Localidade 1. Agora, modificaremos o ponto H , alterando sua cor para Preta, na guia “Cor”, e selecionando o Tamanho do Ponto: 6, na guia “Estilo”. Após, o designaremos como Localidade 1, em sua Legenda, editada na guia “Básico”, do Menu Preferências de suas Propriedades (clicando-se com o botão direito do mouse sobre o Ponto H).

Ato contínuo, trace o segmento que une os pontos D e C'_1 , clicando sobre a ferramenta “Segmento” e, depois, nos referidos pontos.

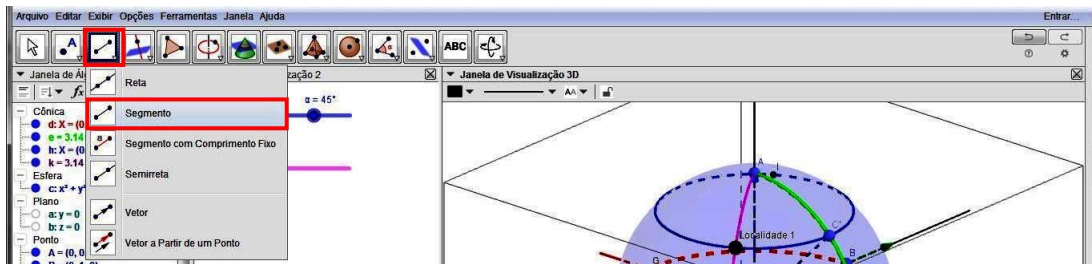


Figura 6.29: Ferramenta Segmento.

Podemos, também, modificar as características do segmento, clicando com o botão direito sobre a palavra “Segmento”, ir na guia “Cor”, selecionando a Rosa e, depois, na guia “Estilo”, para aumentar a espessura para 3 e marcar como Tracejado o Estilo das Linhas Escondidas. Note que será criado o segmento $l = 1$.

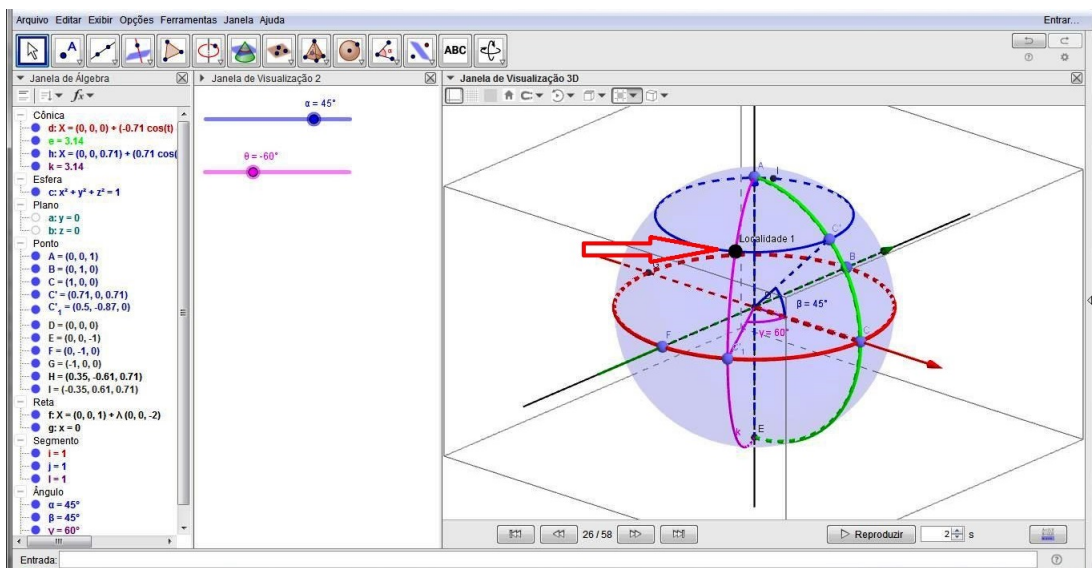


Figura 6.30: Localidade 1.

15. Por fim, afim de identificarmos cada elemento de nossa construção, digitaremos alguns textos, clicando sobre a ferramenta “Texto” e, depois, clicando na Janela de Visualização desejada.

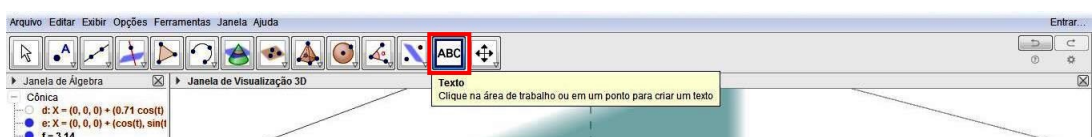


Figura 6.31: Ferramenta Texto.

Note que aparecerá a seguinte caixa de diálogo, onde deverão ser digitados os textos:

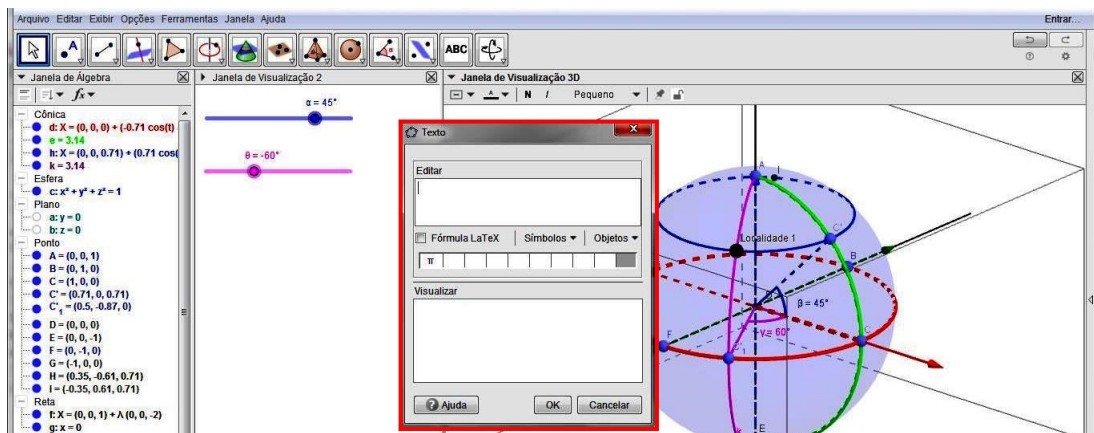


Figura 6.32: Caixa de Edição de Texto.

Na Janela de Visualização 3D, digitaremos os seguintes textos, clicando sobre ela, no melhor local que lhe convier e alterando-os para as respectivas cores:

- Eixo de Rotação (Cor Preta);
- Greenwich (Cor Verde);
- Equador (Cor Vermelha);
- Longitude: θ (Cor Rosa); e,
- Latitude: α (Cor Azul).

Por outro lado, na Janela de Visualização 2, digitaremos os seguintes textos e alterando-os para as respectivas cores:

- Longitude: θ (Cor Rosa); e,
- Latitude: α (Cor Azul).

Observe que, na edição dos textos de Latitude e Longitude, deveremos clicar na guia “Objetos” para selecionar os ângulos θ e α , conforme o caso, para a visualização dos respectivos valores, conforme o controle deslizante.

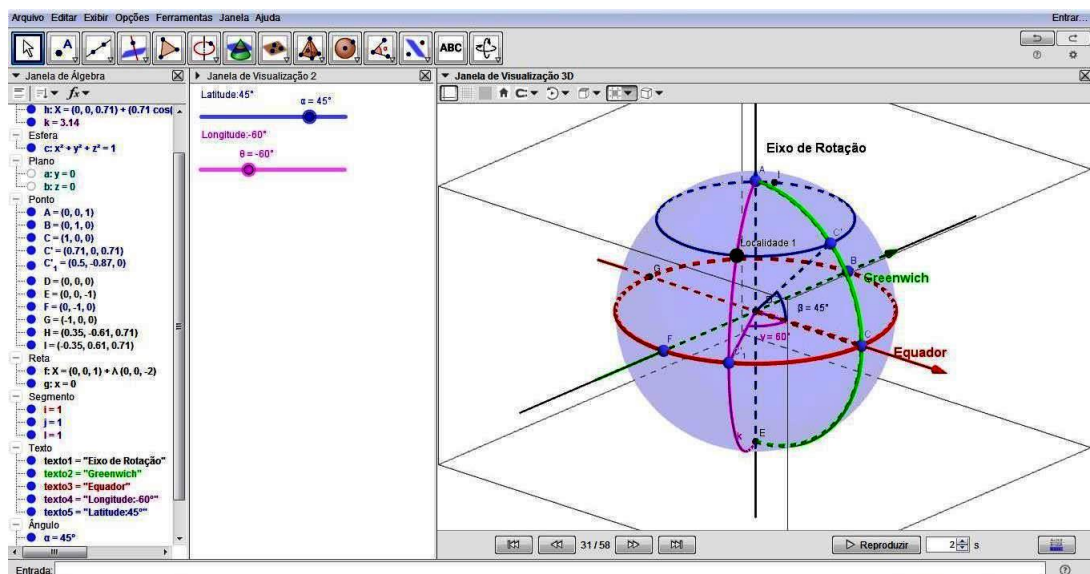


Figura 6.33: Globo Terrestre e seus elementos.

É importante salientarmos que, para iniciarmos a rotação de cena da Janela de Visualização 3D (caso queiramos), devemos fixar os textos em determinados objetos, afim de que texto e objeto sejam rotacionados simultaneamente.

Sendo assim, devemos clicar com o botão direito do mouse sobre cada texto inserido, e ir em “Propriedades...”. Feito isto, selecionaremos a guia “Posição” e, no campo “Origem”, designaremos o ponto ao qual o texto ficará posicionado, a saber:

- Eixo de Rotação: Ponto A;
- Greenwich: Ponto C; e,
- Equador: Ponto C;

Após esta ação, podemos remanejar a posição de cada texto, afim de um não ficar sobreposto ao outro e também, de modo a posicioná-los numa posição mais conveniente para o leitor.

16. Por fim, criaremos um Valor Booleano, que é uma ferramenta do Software Geogebra que tem a função de esconder ou exibir alguns objetos. Esse valor booleano terá a finalidade de exibir ou esconder as Coordenadas Geográficas da Localidade 1 (Ponto H), que acabamos de criar. Inicialmente, devemos clicar em qualquer lugar na Janela de Visualização 2. Em seguida, devemos clicar na ferramenta “Caixa para Exibir/Esconder Objetos” e, novamente, clicarmos no local da janela que melhor nos convier, digitando na caixa de diálogo a legenda: CG Localidade 1, que quer dizer, Coordenadas Geográficas da Localidade 1 (Ponto H).

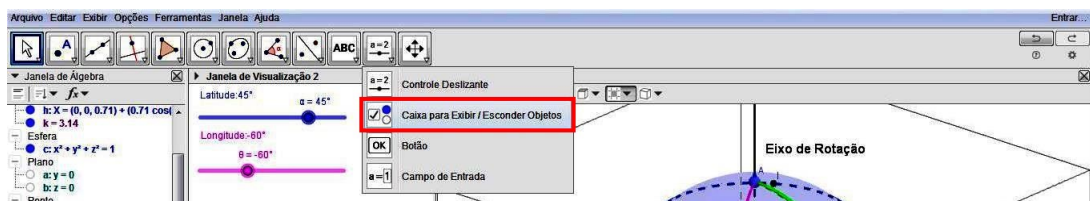


Figura 6.34: Ferramenta Caixa para Exibir ou Esconder Objetos.

Agora, devemos selecionar os objetos na construção ou escolhê-los de uma lista pré determinada pelo software.

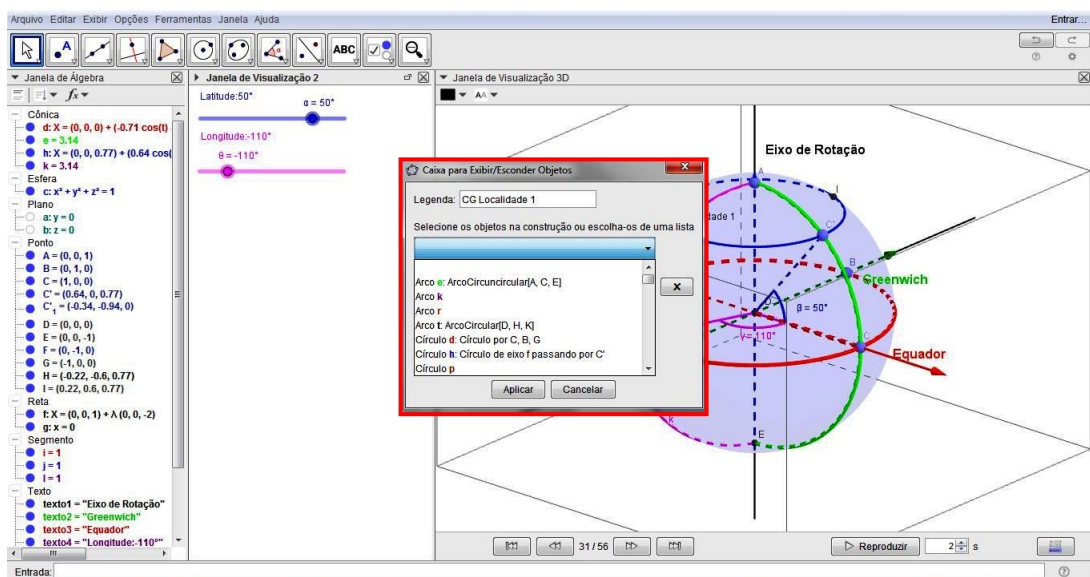


Figura 6.35: Caixa para Exibir ou Esconder Objetos.

No caso, iremos selecionar os seguintes objetos para compor nosso Valor Booleano:

- Círculo h : Círculo de eixo f passando por C' ;
- Arco k : Arco Circuncircular $[A, C'_1, E]$;
- Ponto C' : C girado por um ângulo de $-\alpha$ em torno de g ;
- Ponto C'_1 : C girado por um ângulo de θ em torno de f ;
- Ponto I : Ponto de intersecção de L, K ;
- Segmento $i = 1$: Segmento $[D, C]$;
- Segmento $j = 1$: Segmento $[D, C']$;
- Segmento $l = 1$: Segmento $[D, C'_1]$;
- Ângulo β : Ângulo entre C, D e C' ; e,
- Ângulo γ : Ângulo entre C, D e C'_1 .

Note que será criado o Valor Booleano m , na Janela de Álgebra.

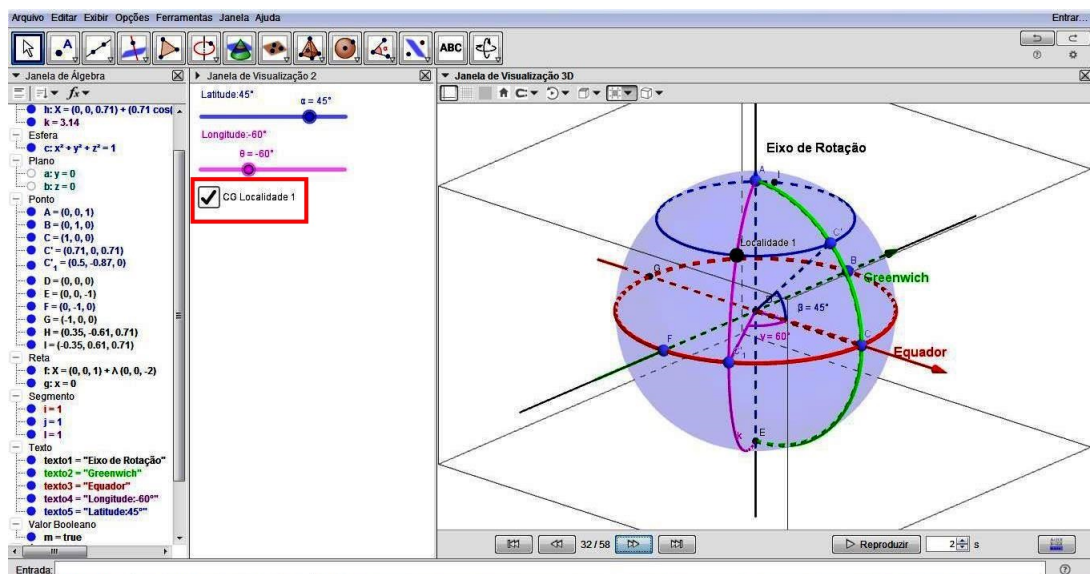


Figura 6.36: Valor Booleano CG Localidade 1.

Observe que, com estas ações, realizamos a construção das coordenadas geográficas com o Software Geogebra, referentes a uma determinada localidade da superfície terrestre, no caso, da Localidade 1.

Neste momento, torna-se de grande importância, ocultarmos os objetos que foram necessários à construção das Coordenadas Geográficas da Localidade 1, através do Valor Booleano, tendo em vista que, a partir de agora, iremos criar as coordenadas geográficas de uma segunda localidade, para só então, ao final, podermos obter uma construção que nos permita calcular a distância entre estas duas localidades.

Para ocultar os objetos, basta desmarcar a caixa do Valor Booleano CG Localidade 1, clicando sobre ela. Ao fazer isto, note que, na Janela de Álgebra, o Valor Booleano aparecerá como $m=false$. Ao marcarmos a caixa novamente, aparecerá $m=true$.

Então, façamos a construção das coordenadas geográficas, referentes à Localidade 2!

PARTE II

Inicialmente, iremos marcar a seguinte coordenada geográfica para a Localidade 1: Longitude: -110° e Latitude: 50° , apenas para fins de padronização e melhor acompanhamento da construção pelo leitor. Em seguida, iremos desmarcar a caixa de marcação do Valor Booleano m (CG Localidade 1) criada na Janela de Visualização 2, ou seja, na Janela de Álgebra, ficará $m=false$. Com isto, os objetos selecionados para esta ferramenta serão ocultados na Janela de Visualização 3D.

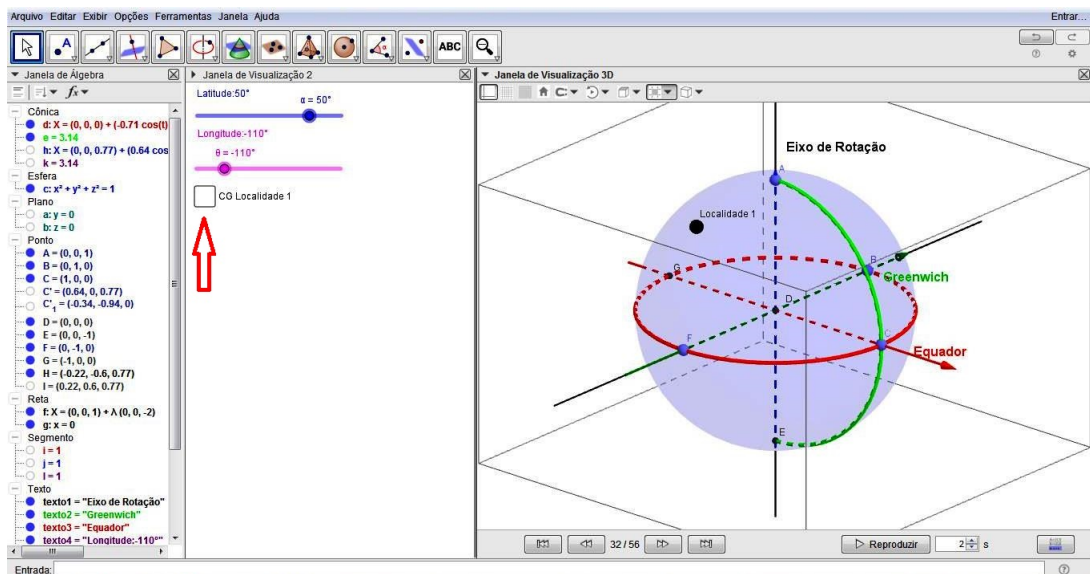


Figura 6.37: Valor Booleano m=false.

Agora, começaremos a construção das Coordenadas Geográficas da Localidade 2!

1. Para a criação da Latitude de um determinado ponto, ative a Janela de Visualização 2, clicando em qualquer lugar da mesma. Clique sobre a ferramenta “Controle Deslizante” (será o 3º Controle Deslizante da nossa construção), no local de sua preferência na Janela e por fim, selecione “Ângulo”. Nomeie-o como λ e estabeleça, na guia chamada Intervalo, o Valor Mínimo de -90° , Máximo de 90° , Incremento de 1° e, clique em OK.

Repare que será criado o Controle Deslizante λ , tanto na Janela de Álgebra quanto na Janela de Visualização 2. Agora, para fins de padronização, alteraremos a cor deste controle para a cor marrom e ajuste para a coordenada $\lambda = -30^\circ$ através do Controle Deslizante, para fins de padronização.

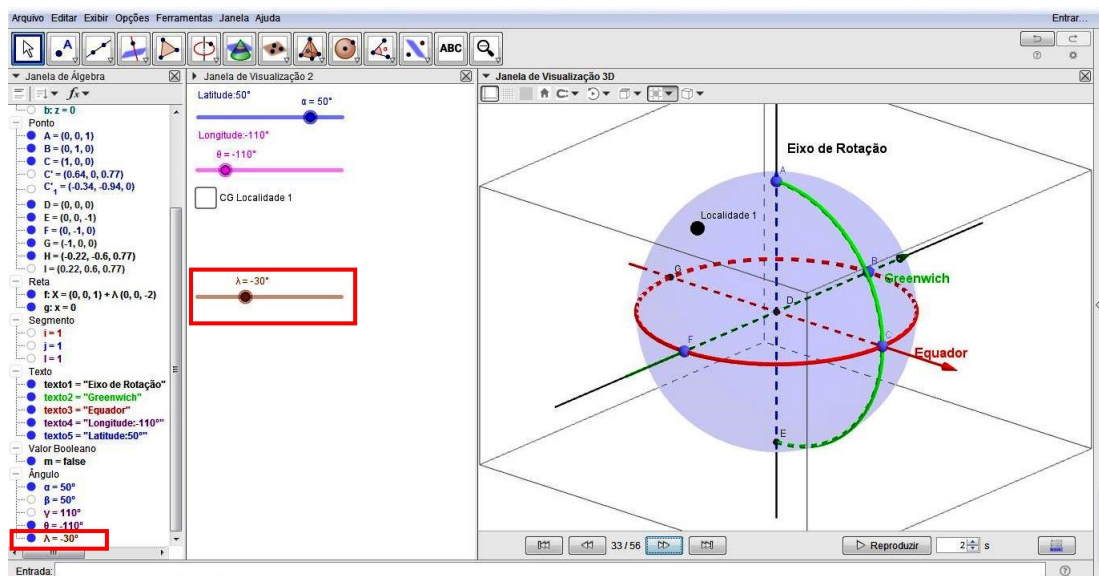


Figura 6.38: Controle Deslizante 3.

2. Digite no Campo de Entrada: $\text{Girar}[C, -\lambda, g]$, para criarmos o ponto C'_2 , que é o Ponto C girado por um ângulo de $-\lambda$ em torno da reta g .

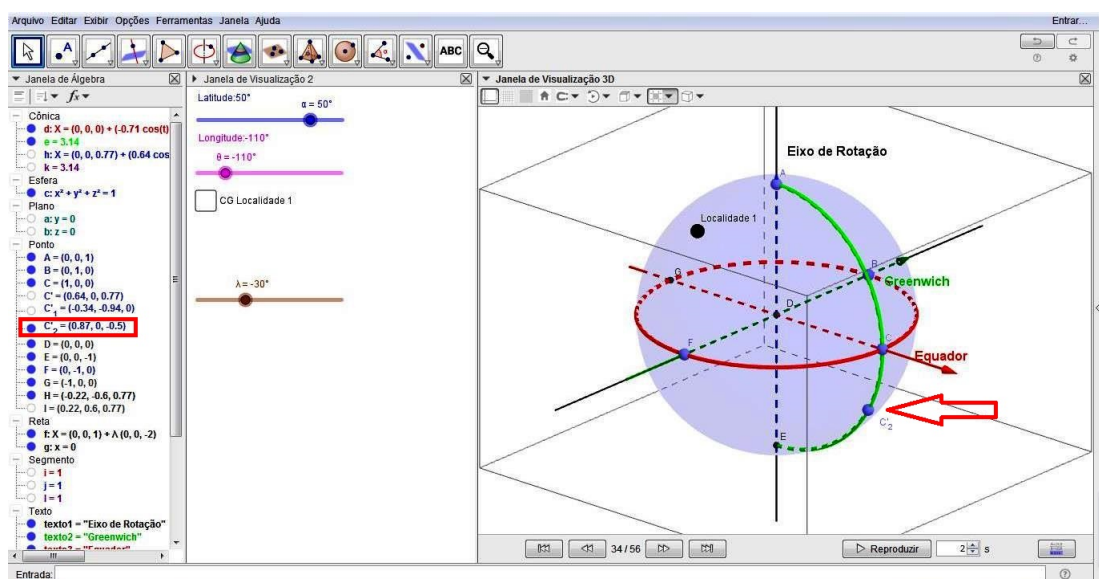


Figura 6.39: Ponto C'_2 .

3. Para criarmos o paralelo que passa por C'_2 e cujo eixo seja o Eixo da Terra, ou melhor, a reta f , digite no Campo de Entrada o comando $\text{Círculo}[f, C'_2]$ e tecele Enter. Verifique que será criado o círculo de eixo f passando por C'_2 , que na Janela de Álgebra será a cônica p , cuja aparência será padronizada, também, para cor marrom, Espessura da Linha: 5 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado.

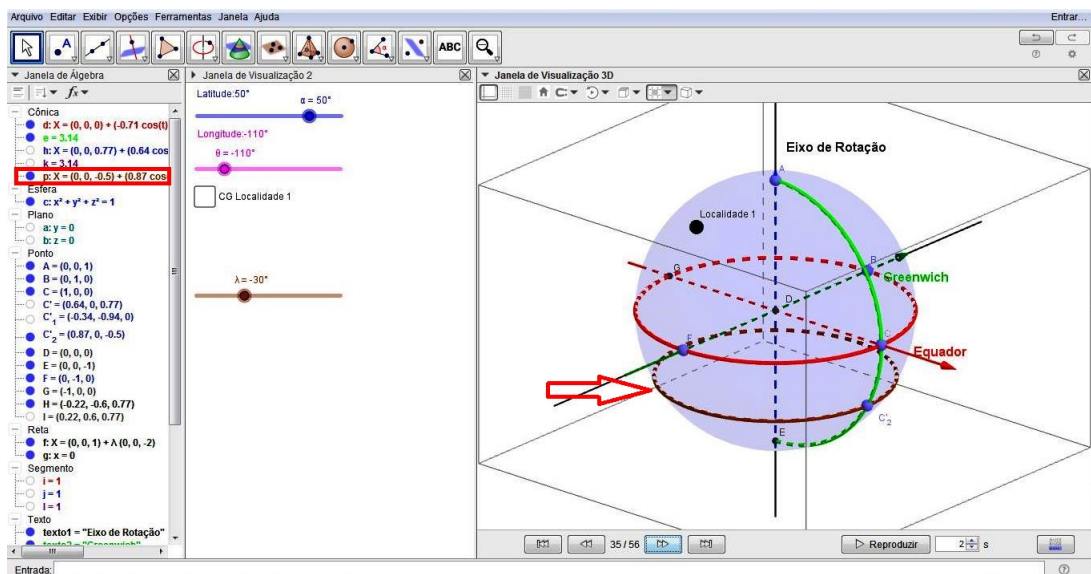


Figura 6.40: Paralelo de C'_2 .

4. O ângulo que representará a latitude do ponto C'_2 será criado da seguinte maneira:

Clique na ferramenta “Ângulo” e, em seguida, nos pontos C , D e C'_2 . Note que será criado o ângulo μ .

Para melhor visualizarmos o ângulo, basta clicarmos no referido ângulo com o botão direito do mouse, que abrirá a caixa “Preferências...”. Na guia “Cor”, selecione, por exemplo, a cor marrom e Transparência: 0 e, na guia “Estilo”, marque Espessura da Linha: 3 e Tamanho: 50.

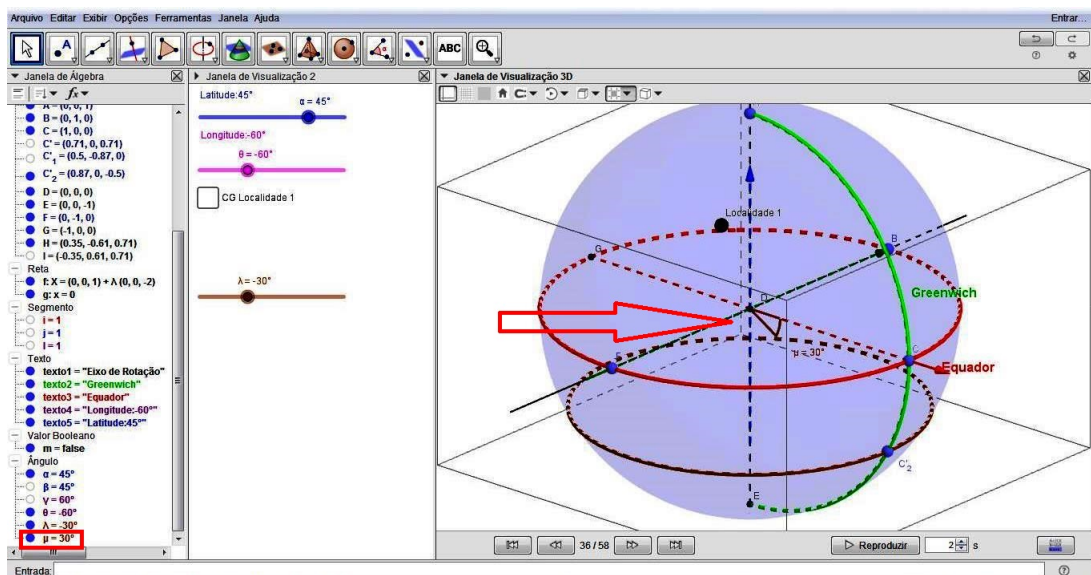


Figura 6.41: Ângulo μ .

5. Clique na ferramenta “Segmento” e após, nos pontos D e C e também, nos pontos D e

C'_2 . Serão criados os segmentos $n = 1$ e $q = 1$ na Janela de Álgebra, os quais poderão ser modificados, clicando-se com o botão direito do mouse sobre eles, selecionando a cor: Marrom e, na Guia Estilo, marcando a Espessura da Linha: 3 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado, sendo o segmento n : Segmento $[D, C]$, na cor vermelha;

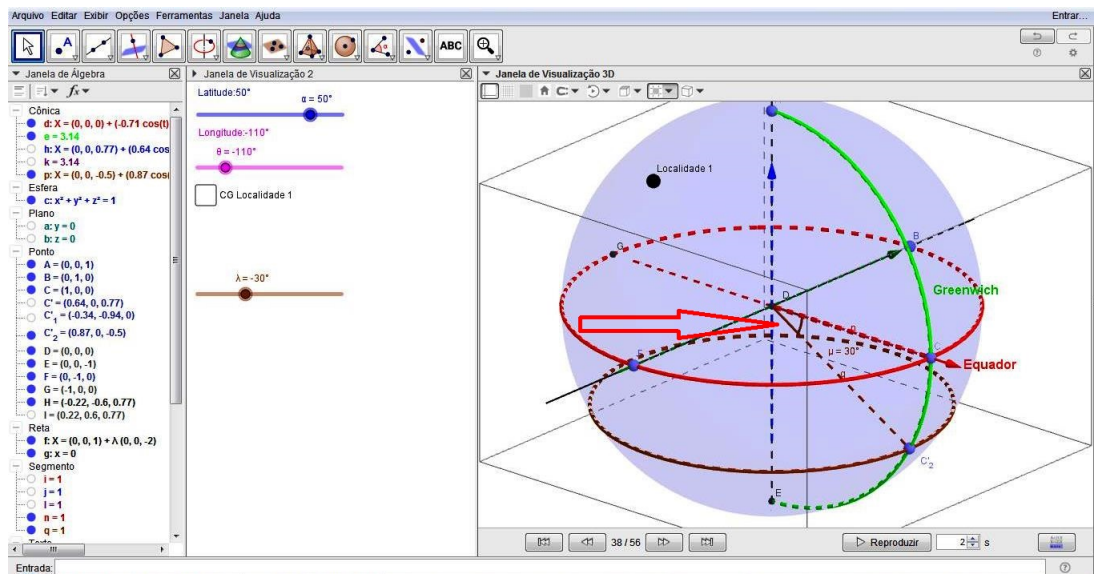


Figura 6.42: Latitude C'_2 .

6. Agora, crie o 4º Controle Deslizante, da mesma maneira descrita anteriormente, para a criação da Longitude da Localidade 2, marcando o tipo: “Ângulo”, nomeando como “delta” e estabelecendo o Intervalo Mínimo de -180° , Máximo de 180° e Incremento de 1° e após, clique em OK. Note que fora criado o Controle Deslizante δ , nas Janelas de Álgebra e de Visualização. Para fins de padronização, alteraremos sua cor para laranja e ajustaremos para a coordenada $\delta = -40^\circ$ através do Controle Deslizante, para fins de padronização.

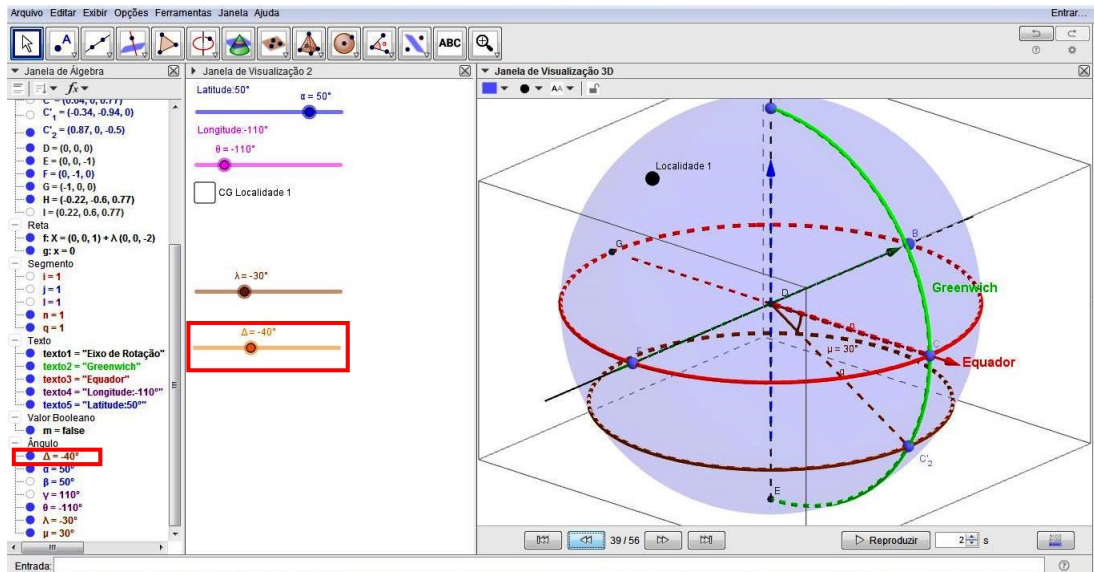


Figura 6.43: Controle Deslizante 4.

7. Digite no Campo de Entrada o comando $\text{Girar}[C, -\delta, f]$. Será, então, criado o ponto C'_3 , que é o ponto C girado por um ângulo de $-\delta$ em torno de f .

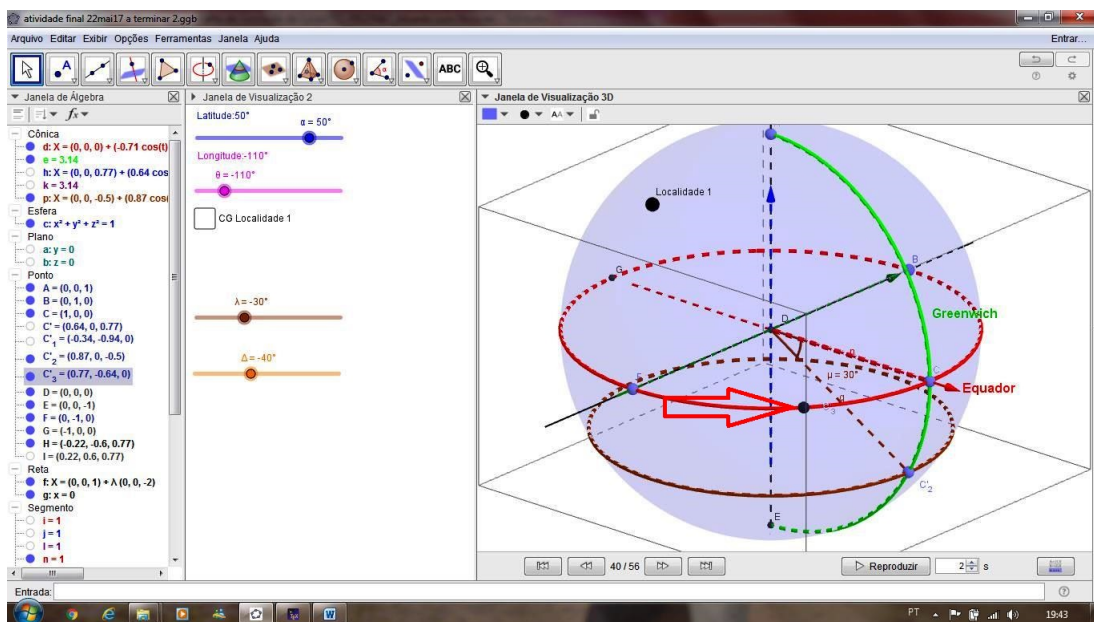


Figura 6.44: Ponto C'_3 .

8. Clique sobre a ferramenta “ArcoCircuncircular” e, em seguida, nos pontos A , C'_3 e E , para construir o meridiano, que será a cônica Arco $r = 3,14$ da Janela de Álgebra. Padronizaremos sua cor para laranja, Transparência: 0, Espessura da Linha: 3 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado.

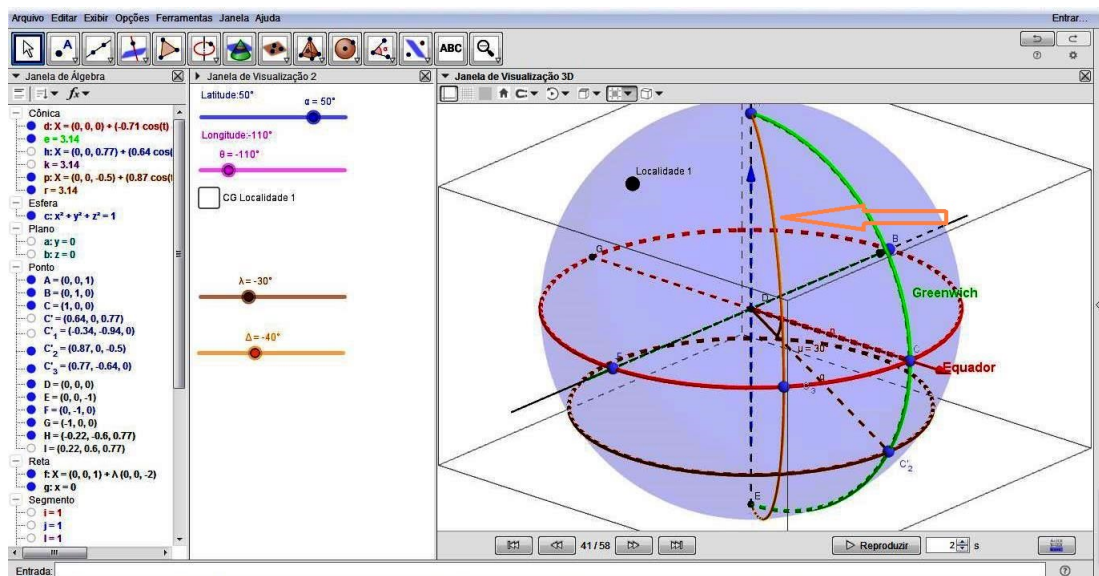


Figura 6.45: Meridiano C'_3 .

- Para criarmos o ângulo que representará a longitude do ponto, clique sobre o ferramenta “Ângulo” e depois, nos pontos C , D e C'_3 . Note que fora criado o ângulo ρ .

Em seguida, melhoraremos a visualização do ângulo clicando no mesmo com o botão direito do mouse, fato este que abrirá a caixa “Preferências”. Na guia “Cor”, selecione, por exemplo, a cor laranja e Transparência: 0; e, na guia Estilo, marque Espessura da Linha: 3 e Tamanho: 50.

Agora, tracemos o segmento $\overline{DC'_3}$, clicando na ferramenta “Segmento” e, depois, nos pontos D e C'_3 . Este será o segmento $s = 1$ na Janela de Álgebra. Podemos melhorar a visualização deste objeto, clicando com o botão direito do mouse sobre o segmento s , e ir em “Propriedades...”; Na guia “Cor”, selecionar a cor laranja e na guia Estilo, marcar Espessura da Linha: 3 e Estilo das Linhas Escondidas: Tracejado.

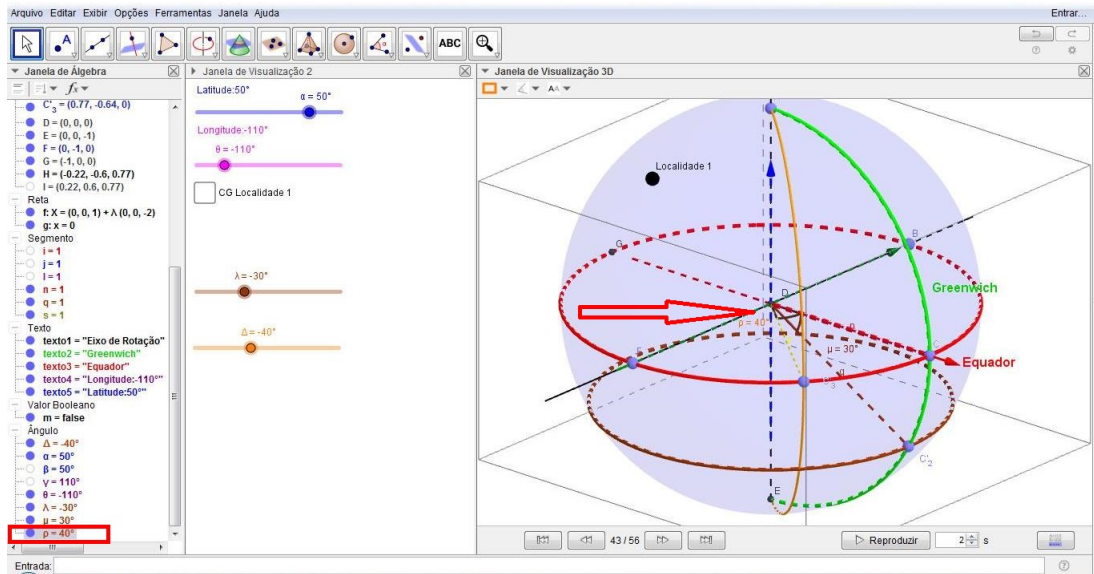


Figura 6.46: Ângulo ρ .

10. Por fim, marcaremos a intersecção das cônicas r e p , que representará o Ponto da Localidade 2. Para isto, basta clicarmos na ferramenta “Intersecção de Dois Objetos” e, em seguida, clicar nas cônicas r e p . Serão criados os pontos J e K .

Ocultaremos o Ponto J , em virtude do mesmo estar localizado no contra-meridiano do Globo Terrestre.

Note que o Ponto K , ponto de intersecção do paralelo com o meridiano, representa a localização (Coordenadas Geográficas) de um determinado local sobre a superfície terrestre, a qual chamaremos de Localidade 2.

Agora, alteraremos o Ponto K , designando sua cor para preta, Tamanho do Ponto: 6 e Legenda: Localidade 2.

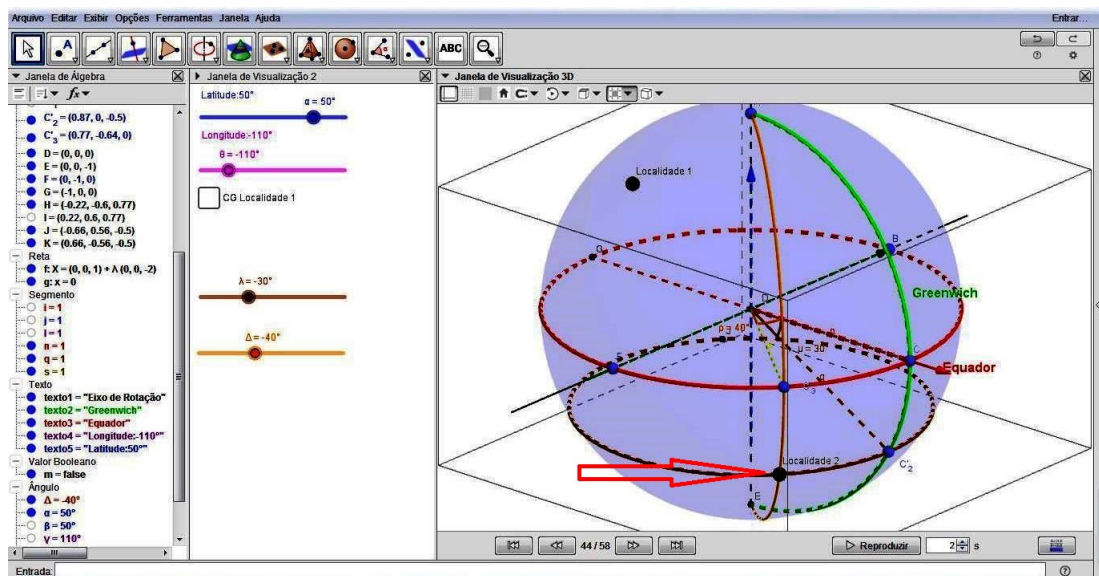


Figura 6.47: Localidade 2.

11. Com a Janela de Visualização 2 ativada, clique na ferramenta “Texto” e clique novamente na janela. Ao abrir a caixa de texto, digite os seguintes textos e altere para as respectivas cores:

- Longitude: ρ (cor laranja);
- Latitude: λ (cor marrom).

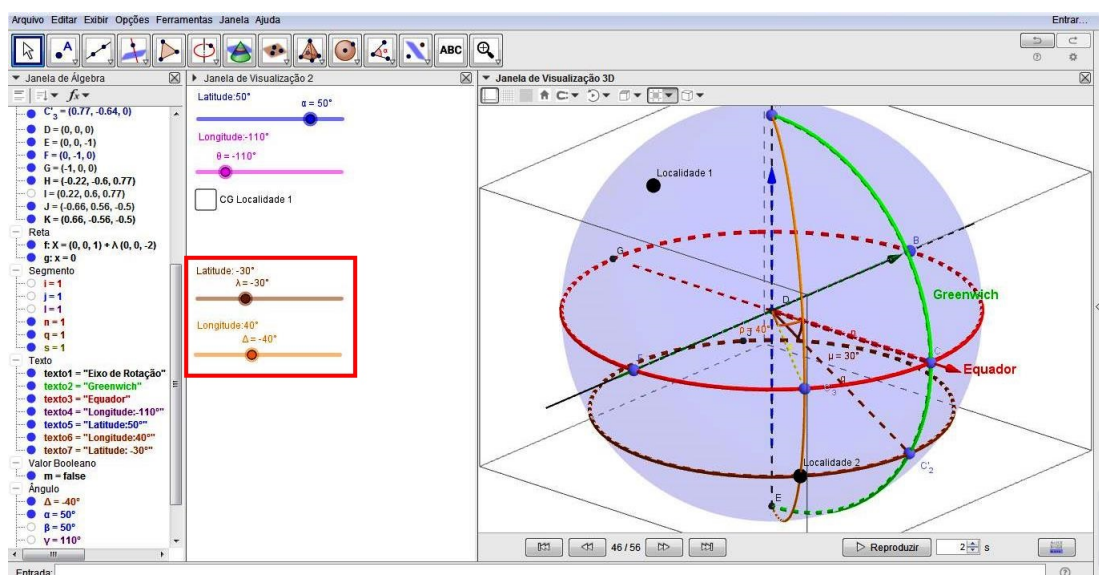


Figura 6.48: Textos Longitude e Latitude.

Lembre-se de que os ângulos ρ e λ são selecionados na Guia Objeto.

12. Por fim, criaremos o Valor Booleano para as Coordenadas Geográficas da Localidade 2. Sendo assim, ainda com a Janela de Visualização ativa, clique na ferramenta “Caixa para Exibir/Esconder Objetos” e clique na referida janela. Ao abrir a caixa para edição, editaremos sua legenda como CG Localidade 2, que quer dizer, Coordenadas Geográficas da Localidade 2. Por conseguinte, selecionaremos os seguintes objetos na lista:

- Círculo p : Círculo de eixo f passando por C'_2 ;
- Arco r : Arco Circuncircular $[A, C'_3, E]$;
- Ponto C'_2 : C girado por um ângulo de $-\lambda$ em torno de g ;
- Ponto C'_3 : C girado por um ângulo de $-\delta$ em torno de f ;
- Ponto J : Pontos de intersecção de r, p ;
- Segmento $n = 1$: Segmento $[D, C]$;
- Segmento $q = 1$: Segmento $[D, C'_2]$;
- Segmento $s = 1$: Segmento $[D, C'_3]$;
- Ângulo oito doído: Ângulo entre C, D, C'_2 ; e
- Ângulo Epson: Ângulo entre C, D, C'_3 .

Repare que será criado o Valor Booleano o , na Janela de Álgebra.

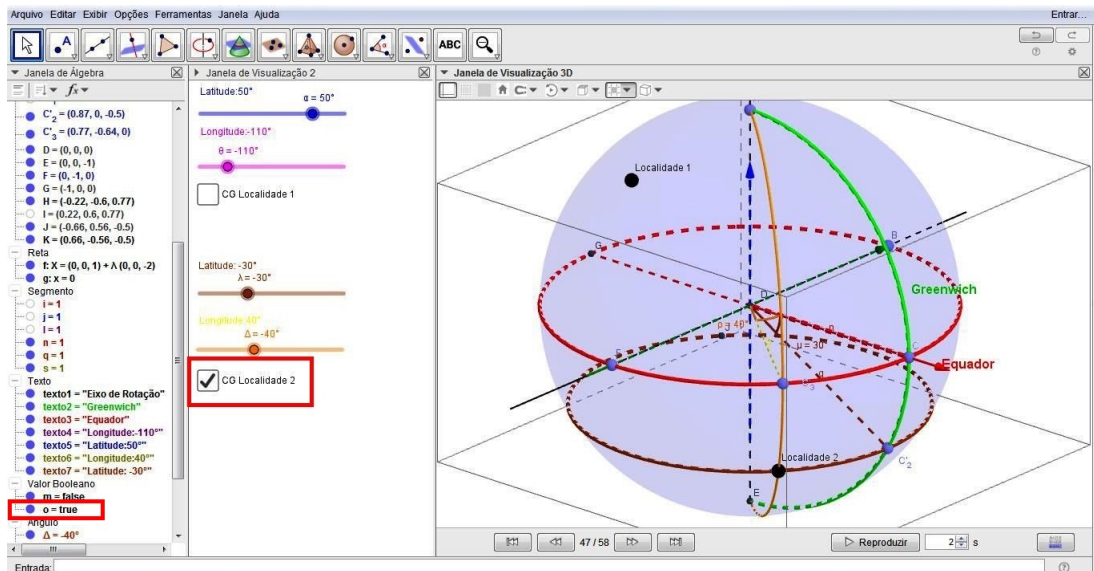


Figura 6.49: Valor Booleano Localidade 2.

Observe que, com estas ações, realizamos a construção das Coordenadas Geográficas da Localidade 2 com o Software Geogebra, nos mesmos moldes da Localidade 1.

A ocultação de alguns objetos, através do Valor Booleano, foi necessária devido ao fato de podermos “limpar” o campo de visão, deixando somente os objetos mais importantes à vista, afim de otimizarmos a construção e deixarmos somente as respectivas coordenadas em destaque.

PARTE III

Nosso próximo passo será estabelecer a representação do arco menor da circunferência máxima que passa pelas Localidades 1 e 2, de modo que, de posse do ângulo cujo vértice esteja no centro da esfera e que determina o referido arco menor \widehat{AB} , possamos obter, com o uso Software Geogebra, a distância entre as duas localidades situadas sobre a superfície do Globo Terrestre.

Deste modo, iremos ocultar os elementos do Valor Booleano CG Localidade 2, desmarcando sua respectiva caixa ($o=false$, na Janela de Álgebra), com a finalidade de “limparmos” o campo de visão da construção. Consequentemente, façamos:

1. Clique na ferramenta “Arco Circular” e nos pontos D , H e K , nesta ordem.

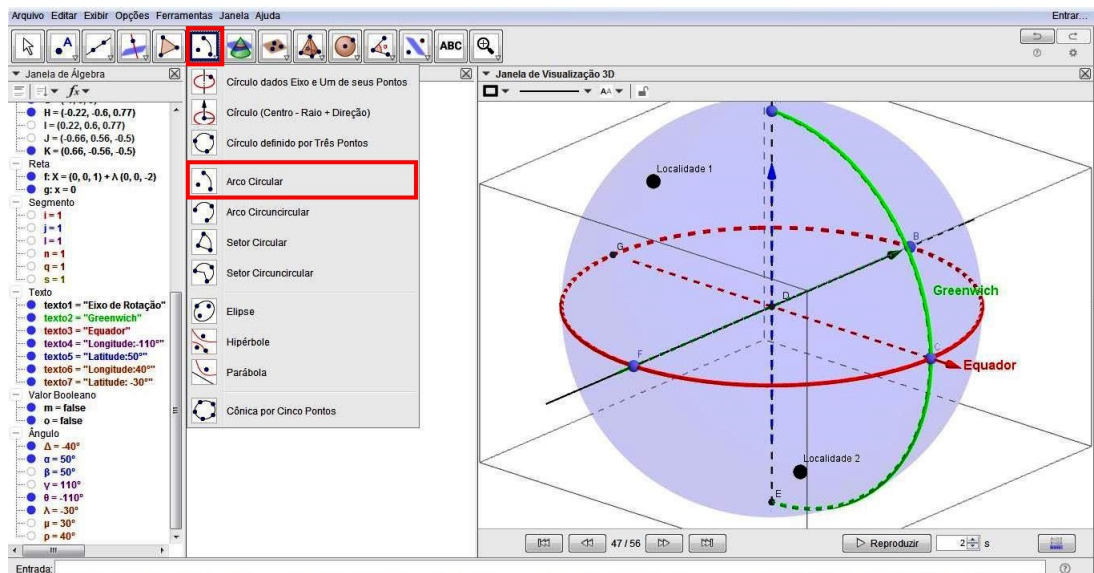


Figura 6.50: Ferramenta Arco Circular.

Note que será criada a cônica Arco t na Janela de Álgebra;

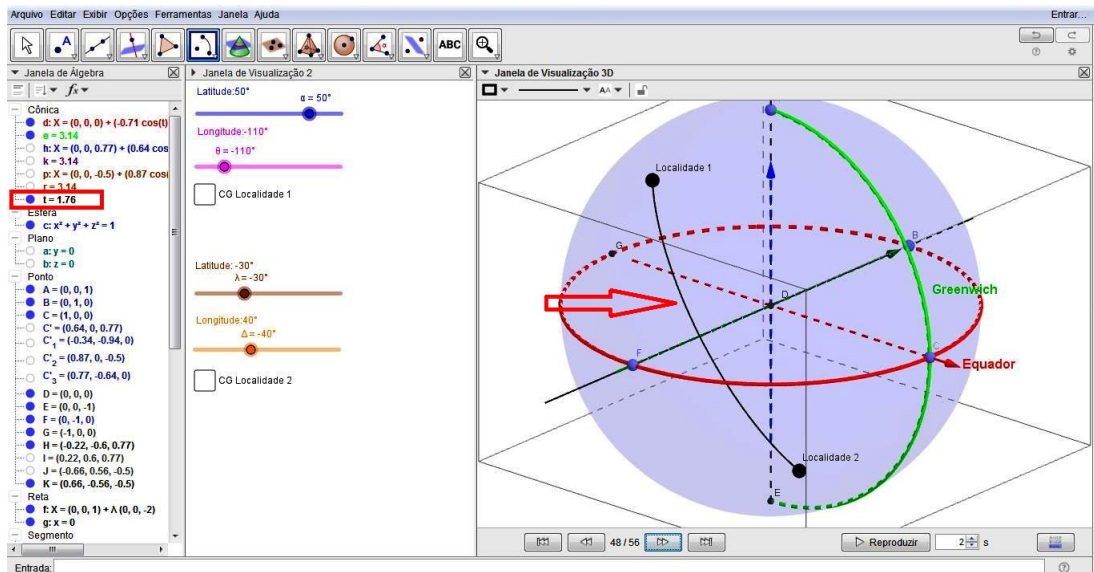


Figura 6.51: Arco Menor de Circunferência Máxima.

2. Crie um novo Valor Booleano, o qual nomearemos como “Arco Menor de Circunferência Máxima”, selecionando o objeto: Arco t . Observe que este será o valor booleano v , na Janela de Álgebra.

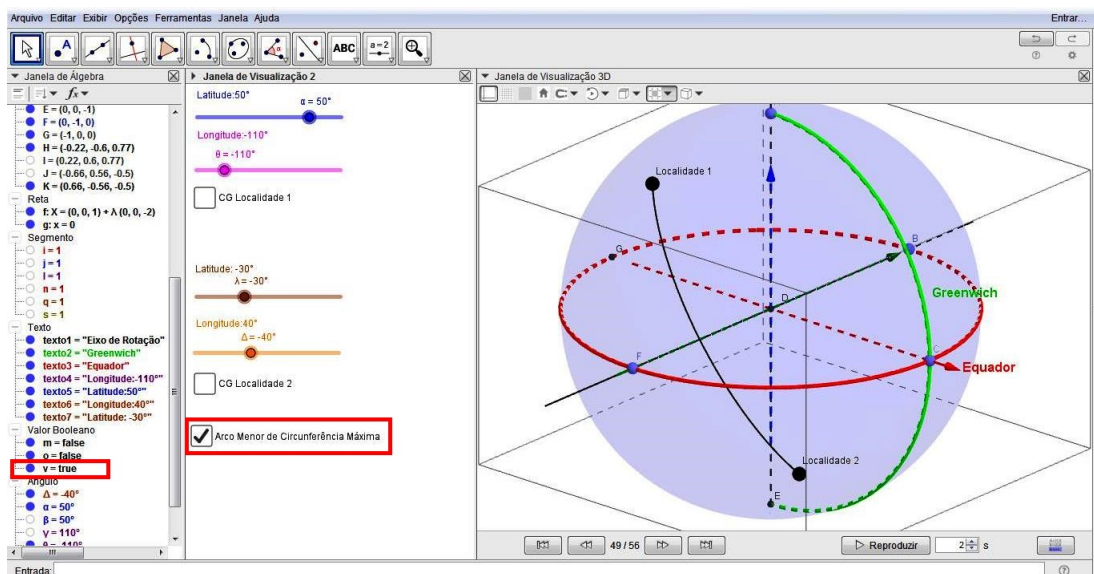


Figura 6.52: Valor Booleano de Arco Menor de Circunferência Máxima.

3. Agora, crie o ângulo HDK , o qual será o ângulo correspondente ao arco menor \widehat{AB} ; Note que fora criado o ângulo ω . Em seguida, crie os segmentos \overline{DH} e \overline{DK} , que serão nomeados automaticamente na Janela de Álgebra como segmentos: $f_1 = 1$ e $g_1 = 1$;

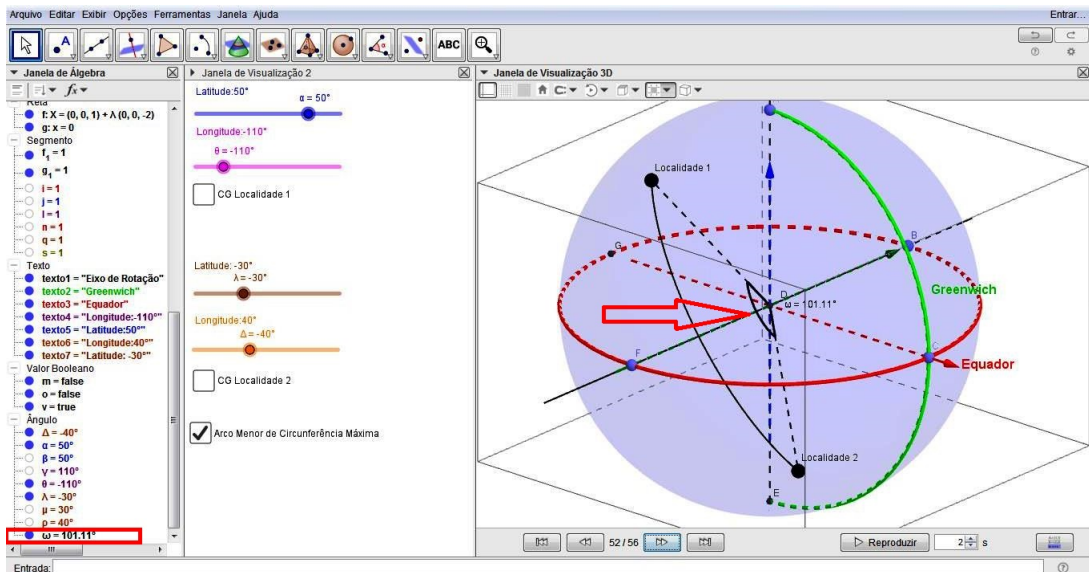


Figura 6.53: Ângulo Ômega.

4. Novamente, crie um Valor Booleano, de nome “Ângulo Central”, seleccionando os objetos: segmentos $f_1 = 1$ e $g_1 = 1$ e ângulo ω ;

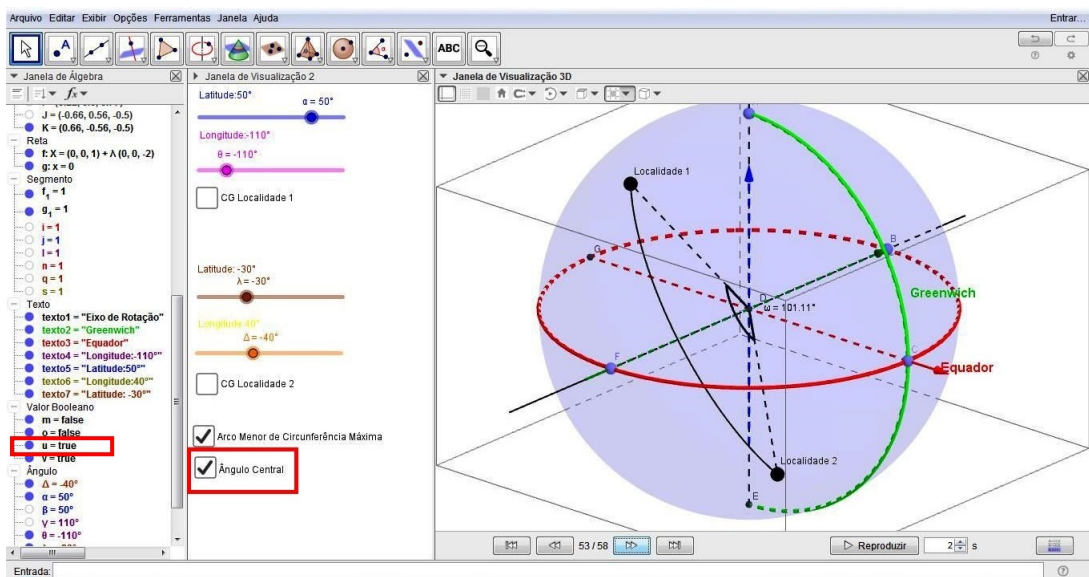


Figura 6.54: Valor Booleano Ângulo Central.

PARTE IV

Finalmente, neste último passo, efetivaremos o cálculo que determinará a distância entre duas localidades quaisquer da superfície terrestre, tendo por base o ângulo formado pelo arco menor da circunferência máxima que passa pelos dois pontos, referenciados pelas suas

respectivas coordenadas geográficas.

Sabemos, inicialmente, pela Definição 3.13, que a distância esférica é dada por:

$$l = \frac{\pi \cdot r \cdot \omega}{180},$$

onde ω é o ângulo central, medido em graus, que subtende o menor arco \widehat{AB} da circunferência máxima de raio r , que passa pelos pontos A e B .

Sendo assim, exibiremos a Planilha, clicando no Menu “Exibir” e, depois, em “Planilha”, ou simplesmente, apertando as teclas de atalho Ctrl+Shift+S, onde digitaremos a seguinte operação matemática em uma de suas células (por exemplo: na célula B2): “=(π *6400* ω) / π rad”. Observe que esta fórmula nada mais é do que a fórmula da distância esférica vista acima, donde r é o raio da Terra (6400 km) e ω é o ângulo central.

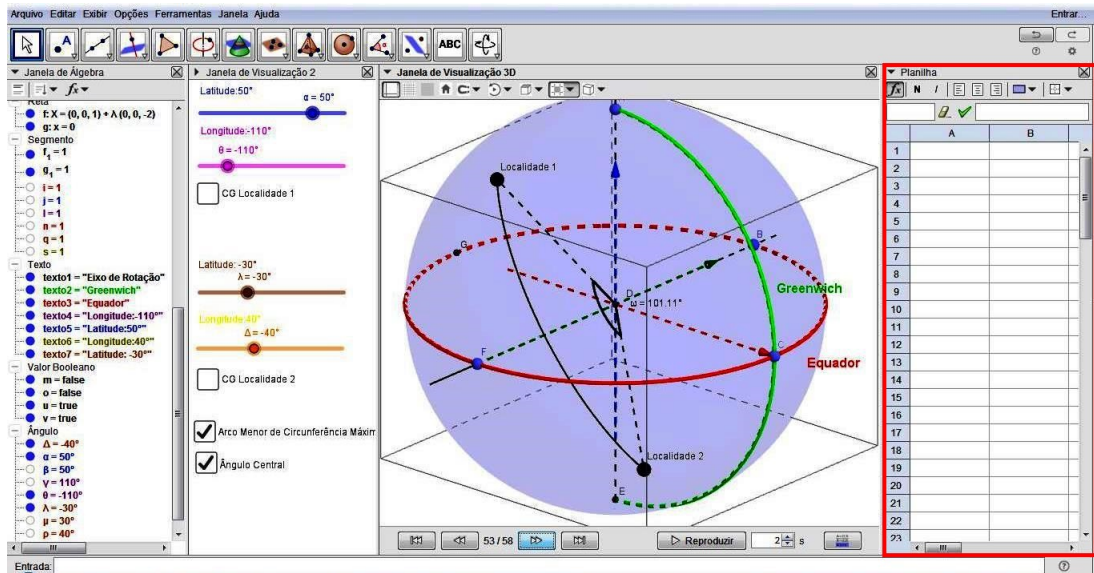


Figura 6.55: Exibição da Planilha.

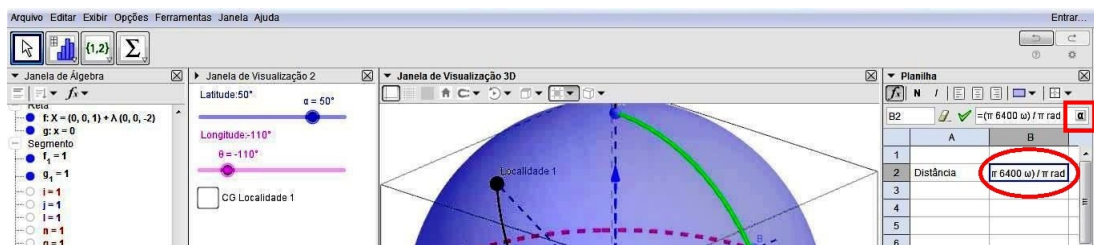


Figura 6.56: Edição de Fórmula na Planilha.

Note que o ângulo central ω deverá ser seleccionado no canto direito do Campo de Entrada de edição da célula da Planilha.

Feito isto, digitaremos o seguinte texto na Janela de Visualização 2, clicando na ferramenta “Texto”:

$$\text{“Distância} = \frac{\pi \cdot 6400 \cdot \omega}{180} = B2\text{”}$$

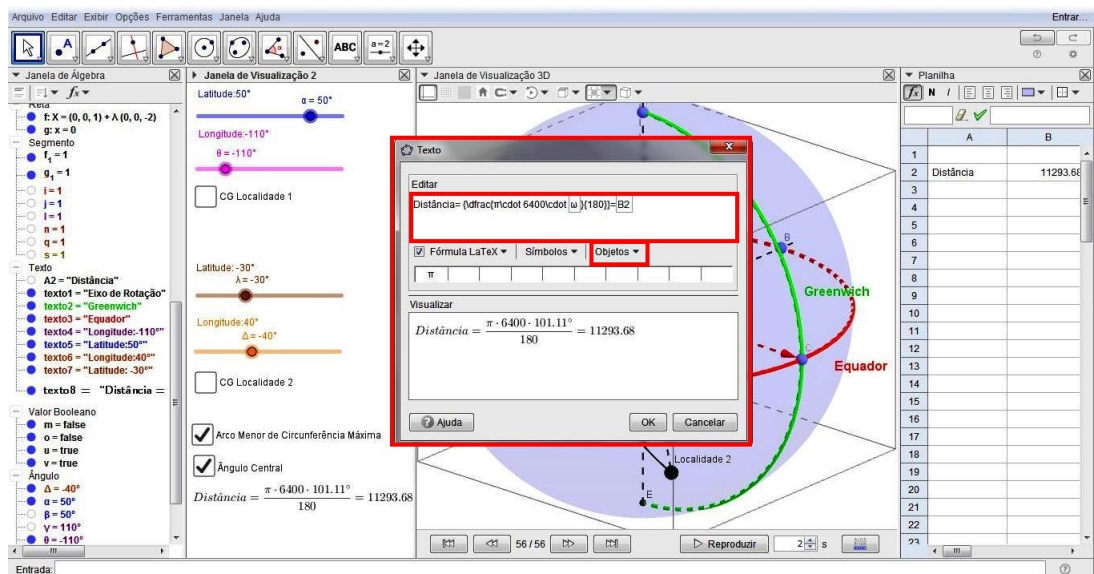


Figura 6.57: Edição de texto da Distância Esférica.

Repare que, na fórmula acima, $B2$ corresponde ao conteúdo da referida célula na Planilha, ou seja, a distância esférica e que, tanto o mesmo quanto o ângulo ω são selecionados na guia “Objetos” da caixa de Texto supra mencionada.

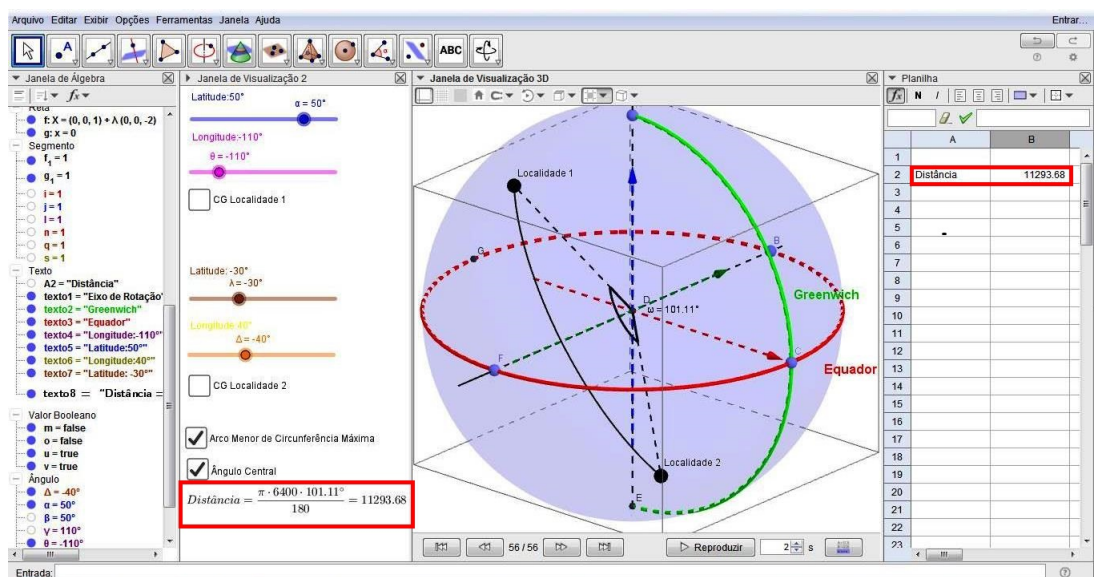


Figura 6.58: Cálculo da Distância Esférica.

Finalizadas as ações, observe que temos a construção, através do Software Geogebra, das Coordenadas Geográficas de duas localidades situadas sobre a superfície do Globo Terrestre, bem como, a definição do ângulo central formado por elas, fato este que nos propicia, mediante o uso da fórmula da Distância Esférica, efetuarmos os cálculos para a obtenção da distância, em quilômetros, entre as duas localidades da Terra.

Capítulo 7

Conclusões

O Software Geogebra é um software educacional gratuito, desenvolvido por Markus Hoehn Wsarter, nos anos de 2001 e 2002, que reúne possibilidades de construções geométricas e algébricas na mesma interface. Dentre as suas funcionalidades estão a possibilidade de movimentação dos objetos criados e o deslocamento de figuras, para uma melhor visualização e investigação dos conceitos matemáticos envolvidos.

Este software, juntamente com manuais e materiais de consulta, podem ser obtidos e baixados no link: <https://www.geogebra.org>, tanto em tablets e computadores, quanto em celulares, pois sua distribuição é livre. Também, dicas e vídeo-aulas podem ser acessadas no site do Youtube: <https://www.youtube.com>. Outras características do software é que o mesmo é escrito em linguagem JAVA, que proporciona o acesso em diversas plataformas, e é disponível em vários idiomas, além de possuir uma interface simples, mas que requer um minicurso para a obtenção do conhecimento básico de suas ferramentas e comandos, em que o próprio professor pode ministrar aos alunos.

As atividades deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foram desenvolvidas pensando no fato dos computadores estarem proporcionando uma verdadeira revolução no processo de ensino-aprendizagem, em virtude das diferentes possibilidades de aplicação e de ensino, uma vez que os mais variados objetos podem ser reproduzidos digitalmente em programas de manipulação geométrica interativa, dentre eles, o Geogebra.

Esta ação a ser realizada em sala de aula, especificamente no laboratório de informática da escola, pode, em muito, criar um ambiente de investigação, de pesquisa e de experimentação, proporcionando ao aluno ser um agente ativo na construção do conhecimento, à medida que o mesmo desenvolve as diversas construções propostas com o Geogebra, o qual, por sua vez, possibilitará aos agentes envolvidos uma nova percepção dos entes geométricos, o que dificilmente seria possível com a utilização do quadro e do giz. Sendo assim, o aluno será capaz de levantar hipóteses, tirar dúvidas, questionar, interpretar, interagir e, principalmente,

visualizar situações do seu cotidiano de maneira contextualizada.

O professor, ao desenvolver estas atividades, deverá atuar como mediador, refletindo na importância de usar a tecnologia como sua aliada e lembrando-se da necessidade de manter uma postura crítica e cuidadosa para com o uso dos recursos computacionais, de modo não caracterizá-lo apenas pelo seu visual atrativo. Ele deve desenvolver a atividade paralelamente à aplicação da revisão dos conteúdos básicos da Geometria Plana, de modo a aprimorar o ensino da Geometria Espacial, fazendo com que o aluno explore sua capacidade de abstração e formalização das ideias.

É de extrema importância salientarmos que as construções com o Geogebra propostas pelas atividades das seções 3.4, 4.3 e 5.6 foram realizadas tendo por base uma esfera de raio unitário que, para fins didáticos, representa o Globo Terrestre, ou seja, não leva-se em consideração, exceto nos cálculos finais, a medida do raio da Terra de 6400 km.

Não obstante, tais atividades estão sendo disponibilizadas no ambiente da plataforma do Geogebra, disponível em <https://www.geogebra.org>. Esta plataforma de ensino visa criar uma conexão entre geometria e álgebra de um modo inovador e visual, tornando a matemática dinâmica interativa e divertida e possibilita o armazenamento e o download da atividade e, posteriormente, sua edição, proporcionando a alunos, professores e pesquisadores o acesso a vários materiais de consulta e projetos já realizados e disponibilizados por outros estudiosos.

Destacamos que o software permite uma manipulação e edição, fato este que o professor poderá usar a seu favor ao pensar na forma como irá trabalhar o conteúdo e em quais metodologias de ensino irá se apoiar, o que é mais importante do que o simples fato de usar um software.

Por fim, é imprescindível que os exercícios sejam realizados, inicialmente, utilizando-se os conceitos e cálculos matemáticos, através do uso das fórmulas e das propriedades geométricas, para posteriormente, ser comparado à construção do Geogebra, lembrando que o software é uma ferramenta para auxílio e percepção das figuras e dos objetos construídos e que o mesmo não substitui o cálculo matemático propriamente dito. Todavia, os resultados podem ser comparados em sites específicos que fornecem a distância entre duas localidades do Globo Terrestre, dentre eles, o site www.distanciasentrecidades.com e o software Google Earth.

Referências Bibliográficas

- [1] ALVES, SÉRGIO. *A Geometria do Globo Terrestre*. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador-BA. (2004).
- [2] ANDRADE, Plácido; BARROS, Abdênago. *Introdução à Geometria Projetiva*, 1^a ed. Rio de Janeiro - RJ: SBM, (2010).
- [3] ANDRADE, Plácido. *Introdução à Geometria Hiperbólica*, Universidade Federal do Ceará, Campus Cariri, (2011).
- [4] CANALLE, João Batista Garcia; MATSUURA, OSCAR Toshiaki *Formação Continuada de Professores - Curso Astronáutica e Ciências do Espaço - Astronomia*, Rio de Janeiro-RJ, (2007).
- [5] COUTINHO, Lázaro; *Convite às Geometrias Não-Euclidianas*, 2^a ed. Rio de Janeiro - RJ: Interciência, (2001).
- [6] DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla *Geometria Analítica-Coleção PROFMAT*, 1^a ed. Sociedade Brasileira de Matemática, (2013).
- [7] DOLCE, Osvaldo; POMPEU, José Nicolau *Fundamentos de Matemática Elementar - Geometria Espacial - Volume 10*, 6^a ed. Atual Editora, São Paulo-SP, (2005).
- [8] MACHADO, Nílson José; *Matemática e Realidade: análise dos pressupostos filosóficos que fundamentam o ensino de matemática*, 7^a ed. São Paulo - SP: Cortez, (2009).
- [9] PICAZZIO, Enos; *O céu que nos envolve - Introdução à astronomia para educadores e iniciantes*, 1^a ed. Editora Odysseus, (2011).
- [10] ROQUE, Tatiana e CARVALHO, João Bosco Pitombeira. *Tópicos de História da Matemática*. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática,
- [11] DUCATTI, Murilo Cezar. *Explorando a Matemática do Posicionamento Geográfico*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade tal, São José do Rio Preto-SP, (2014).

- [12] HEIM, Luciane. Geometria Esférica: proposta de atividades em conexão com a geografia. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Federal Rural de Pernambuco. Recife-PE, (2013).
- [13] MARTINS, Shyrlene. Geometria Esférica e Trigonometria Esférica Aplicadas à Astronomia de Posição. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de São João Del Rei. São João del Rei-MG, (2015).
- [14] ZANELLA, Idelmar André. Geometria Esférica: uma proposta de atividades com aplicações. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina. Londrina-PR, (2013).
- [15] XVII OBA (Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica) - (2014)
- [16] XVIII OBA (Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica) - (2015).
- [17] Normas da ABNT – NBR 6023: *Elaboração de referências*, (2000). Disponível em <<http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/RegulamentoseNormas/ABNT-NBR6023.pdf>>. Acesso em 01 mai 2017.
- [18] SILVA, André Luiz - CDA/CDCC/USP; (figura baseada na obra “O céu que nos envolve”, de Enos Picazzio).
- [19] VINAGRE, André Luiz Mendes. Artigo Eratóstenes e a Medida do Diâmetro da Terra. Disponível em <www.ifi.unicamp.br/lunazzi/F530.../940298AndreVinagreEratostenes.pdf>. Acesso em 01/02/2017.
- [20] A Forma da Terra. Disponível em <mundoeducacao.bol.uol.com.br/geografia/a-forma-terra.htm>. Acesso em 10/01/2017.
- [21] Biblioteca de Alexandria. Disponível em <<http://www.infoescola.com/historia/biblioteca-de-alexandria>>. Acesso em 06/02/2017.
- [22] As Grandes Navegações. Disponível em <<http://www.brazilsite.com.br/historia/desco/desco04.htm>>. Acesso em 01/02/17.
- [23] Eratóstenes e a Circunferência da Terra. Disponível em <<http://www.zenite.nu/eratostenes-e-a-circunferencia-da-terra>>. Acesso em 01/02/2017.
- [24] Eratóstenes e a Medida da Circunferência da Terra. Disponível em <<http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Fernando-Torres>>. Acesso em 05/02/2017.

- [25] Os Movimentos da Terra. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/geografia/movimentos-terra.htm>>. Acesso em 02/01/17.
- [26] Estações do Ano - Centro de Divulgação de Astronomia. Disponível em <<http://www.cdcc.sc.usp.br/cda/aprendendo-basico/estacoes-do-ano.html>>. Acesso em 02/01/17.
- [27] Coordenadas - Só Geografia. Disponível em <<http://www.sogeografia.com.br/Conteudos/GeografiaFis>>. Acesso em 15/01/17.
- [28] Coordenadas Geográficas. Disponível em <<http://www.infoescola.com/geografia/coordenadas-geograficas/>>. Acesso em 16/01/17.

Apêndice A

Os Movimentos da Terra

O nosso planeta não está estático no Universo, assim como os outros corpos celestes. Ele realiza movimentos em torno de si próprio, em relação ao sol, em conjunto com a Via Láctea e, conseqüentemente, com o próprio Universo. Durante muito tempo, pensou-se que a Terra ocupava uma posição privilegiada no Universo, onde os demais astros do cosmo moviam-se ao seu redor. Em verdade, nosso planeta não só não está parado, como também, realiza um movimento complexo, sendo que, ao observarmos o movimento de um outro astro, em boa parte disso, enxergamos nosso próprio movimento.

Estudando esses movimentos poderemos observar a dinamicidade do espaço sideral, bem como entender as principais conseqüências desses movimentos no nosso cotidiano, os quais interferem diretamente no nosso convívio em sociedade. Os dois movimentos principais são o de **Rotação** e o de **Translação**.

A **Rotação** é o movimento que a Terra realiza em torno de si mesma, circulando ao redor do seu eixo imaginário central durante um período aproximado de 24 horas (precisamente, 23 horas, 56 minutos, 4 segundos e 9 centésimos), com uma velocidade de 1.666 km/h. A rotação ocorre no sentido anti-horário, ou seja, de oeste para leste, o que faz com que o movimento aparente do sol seja de leste (nascente) para oeste (poente).

A Terra, ao completar uma volta em torno de si mesma, uma metade fica voltada para o sol, recebendo luz e calor, sendo então, dia. A outra metade que não é voltada para o sol é noite. A principal conseqüência desse movimento é a sucessão dos dias e das noites. Assim sendo, considerando que os raios solares incidem paralelamente, podemos dizer que a curva sobre o globo terrestre que separa o dia da noite é uma circunferência máxima.

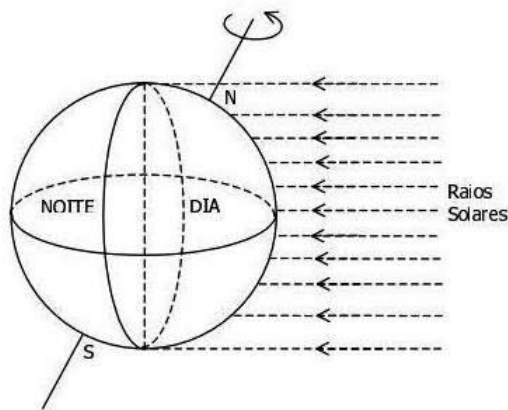


Figura A.1: Dia e noite no Globo Terrestre. (Fonte: [1])

A **Translação** é o movimento elíptico que a Terra executa ao redor do sol, com uma duração de 365 dias, 5 horas e 48 minutos em uma velocidade de 107.000 km/h, ou seja, 30 km/s. Quando a Terra termina uma volta completa em relação ao sol, dizemos que se passou um ano. A principal consequência desse movimento é a origem das estações do ano, que ocorrem pelo fato de o eixo do planeta apresentar uma inclinação de $23^{\circ}27'$, ocasionando a sucessão dos solstícios e dos equinócios.

Neste movimento, a Terra descreve uma curva elíptica, denominada órbita, cuja trajetória é chamada de **Eclíptica** e o plano que a contém, **Plano da Eclíptica**. Gasta-se, nesse percurso, portanto, pouco mais que 1 ano e, para corrigir esta diferença, acrescenta-se um dia no ano, a cada 4 anos. Estes anos em que isto ocorre são chamados de anos bissextos, onde o mês de fevereiro passa a ter 29 dias.

Apêndice B

A inclinação da Terra e as Estações do Ano

Um fato extremamente importante, referente ao movimento de Translação, é que o eixo da Terra não é perpendicular ao plano da eclíptica, formando um ângulo de $23^{\circ}27'$. Tal inclinação acarreta no fato dos Hemisférios não receberem a mesma quantidade de luz e calor a qualquer dia do ano, bem como no fato dos dias e das noites não terem a mesma duração em todos os lugares da Terra.

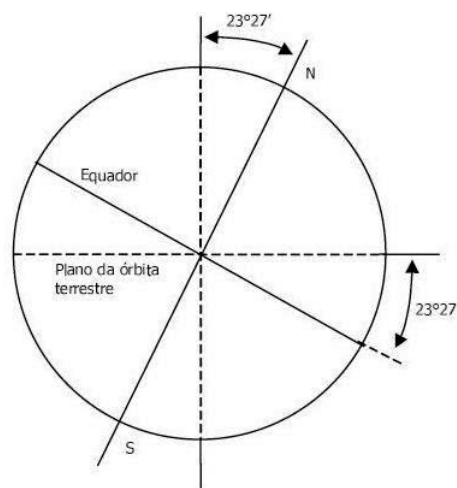


Figura B.1: Inclinação do eixo terrestre. (Fonte: [1])

A órbita da Terra em torno do sol descreve uma trajetória aproximadamente elíptica, porém, sua distância a este astro varia somente 3%. Conseqüentemente, o que causa as estações é o fato da Terra orbitar o Sol com o eixo de rotação inclinado. Em virtude dessa inclinação, no movimento de Translação, os raios solares incidem mais diretamente em um hemisfério do que em outro.

Durante o intervalo de um ano, nós temos dois solstícios e dois equinócios, o primeiro em 21 de março e 23 de setembro, e o segundo em 21 de junho e 21 de dezembro. Sendo assim, podemos dividir o intervalo de um ano em quatro períodos, a saber: Primavera, Verão, Outono e Inverno, os quais são chamados de Estações do Ano. Estes nomes devem-se ao fato das condições climáticas da zona temperada do hemisfério norte, tais como:

1. Primavera: Do latim: primo vere “no começo do verão”; Representa a época primeira, a estação que antecede o verão;
2. Verão: Do latim vulgar: veranum, i.e, veranus tempus “tempo primaveril ou primaveril” semelhante a vernal, isto é, relativo à primavera; Estação que sucede a Primavera e antecede o Outono;
3. Outono: Do latim: autumnus; Usualmente, conhecida como o tempo da colheita;
4. Inverno: Do latim: hibernus, i.e, tempus hibernus “tempo hibernal”; Associado ao ciclo hibernal de alguns animais ao entrar em hibernação e, se recolherem durante o período de frio intenso; Estação que sucede o Outono e antecede à Primavera.

O Mecanismo das Estações do Ano

No movimento de Rotação, o eixo da Terra faz com o plano da Eclíptica um ângulo de $66^{\circ}33'$. Em razão disso, os raios solares atingem um mesmo ponto do planeta com diferentes inclinações em diferentes épocas do ano.

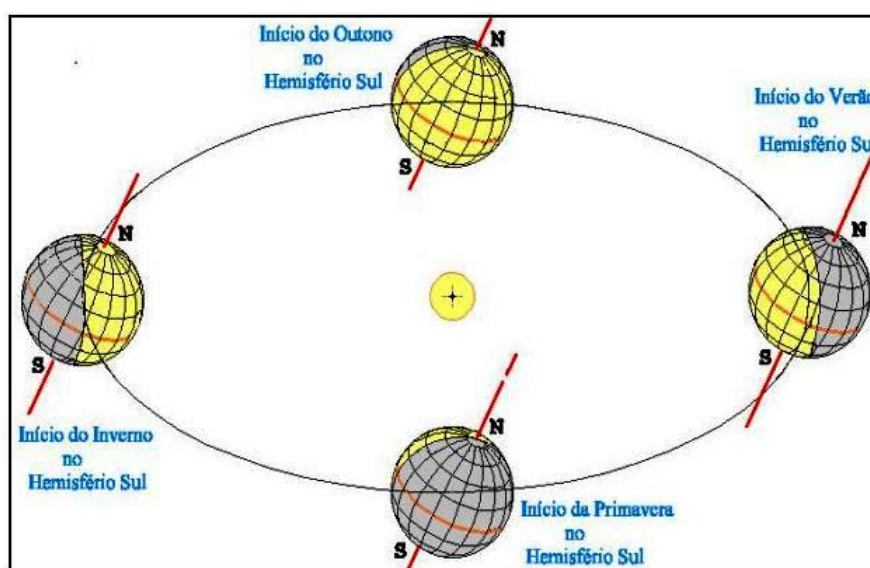


Figura B.2: Estações do ano e órbita da Terra. (Fonte: [1])

No dia 21 de junho, ao meio-dia local, a luz solar incide perpendicularmente sobre o Trópico de Câncer, enquanto que, no Trópico de Capricórnio, o ângulo de incidência é de aproximadamente 43° com a horizontal. Com isso, o Hemisfério Norte estará sendo mais aquecido que o Hemisfério Sul (inverno para nós).

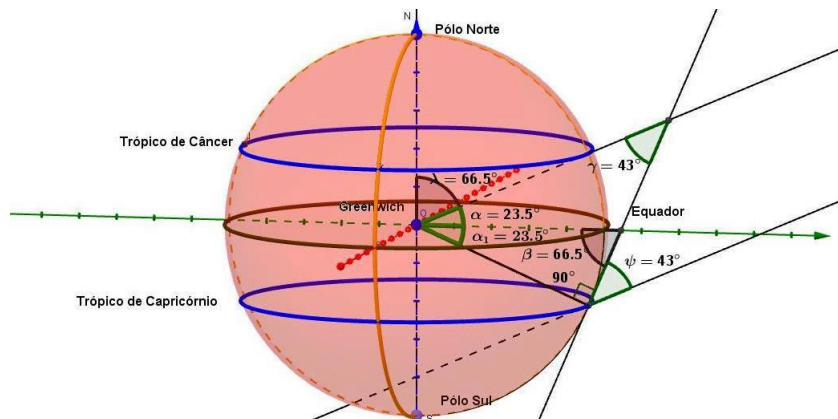


Figura B.3: Inverno no Hemisfério Sul.

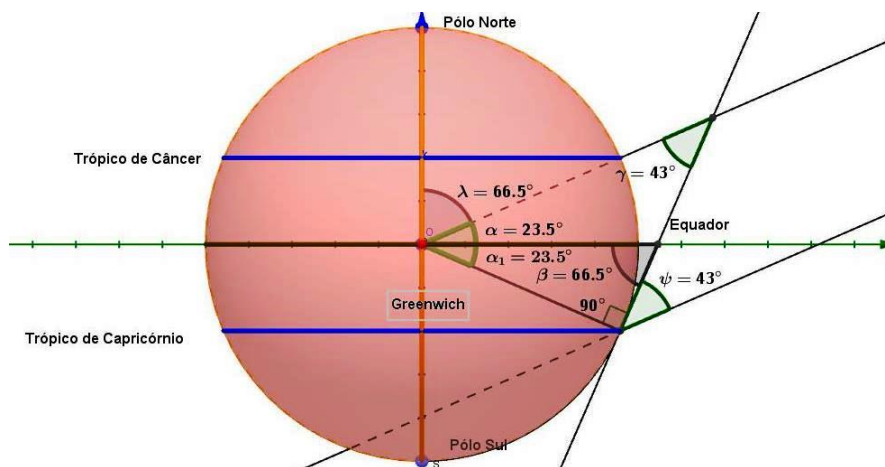


Figura B.4: Inverno no Hemisfério Sul - Vista Lateral do Geogebra.

No dia 22 de dezembro, a luz solar incide perpendicularmente sobre o Trópico de Capricórnio, enquanto que no Trópico de Câncer o ângulo com a horizontal é de 43° com a superfície, ou seja, a situação agora é contrária e por isso é verão no Hemisfério Sul (Brasil) e inverno no Hemisfério Norte (Europa).

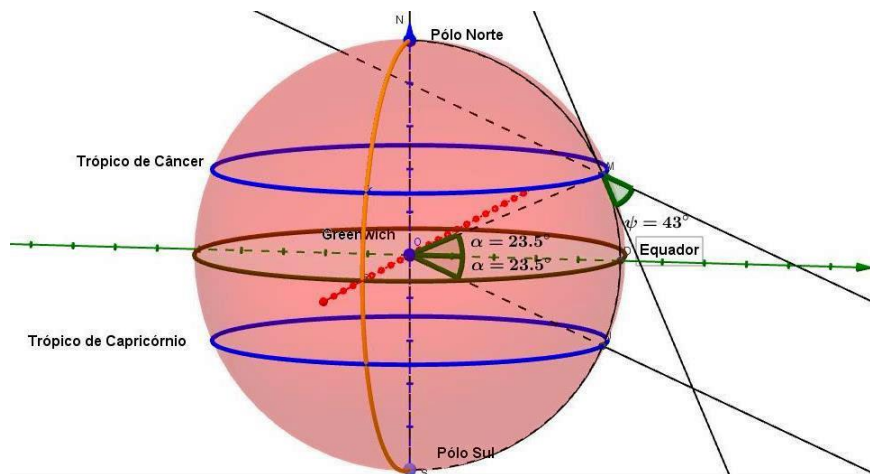


Figura B.5: Verão no Hemisfério Sul.

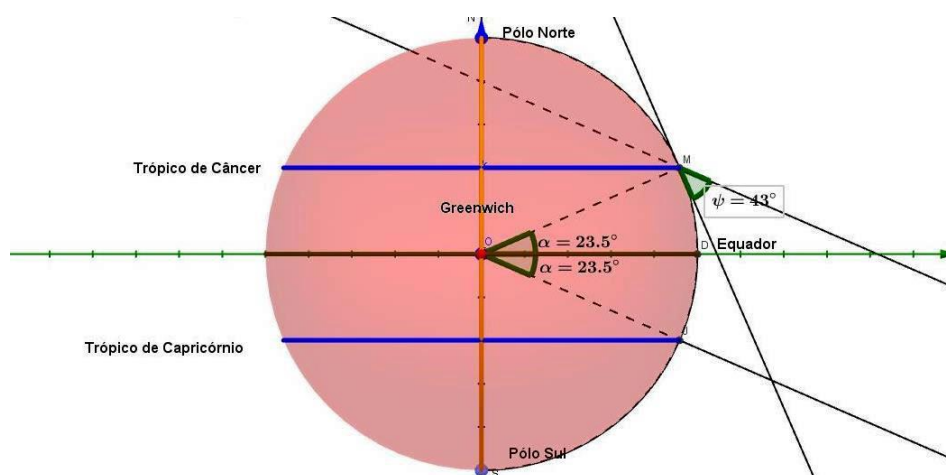


Figura B.6: Verão no Hemisfério Sul - Vista Lateral do Geogebra.

As duas situações em que a luz incide perpendicularmente sobre os trópicos chamam-se de Solstício. No caso do Hemisfério Sul, nós temos o Solstício de Verão (22 de dezembro) e Solstício de Inverno (21 de junho). Nos dias 21 de março e 23 de setembro, nós temos a situação em que a luz solar incide perpendicularmente sobre o Equador. Então, ambos os hemisférios são igualmente iluminados durante esses dias e tais situações chamam-se de Equinócio. No caso do Hemisfério Sul, tem-se o Equinócio de Outono (21 de março) e o Equinócio de Primavera (23 de setembro).

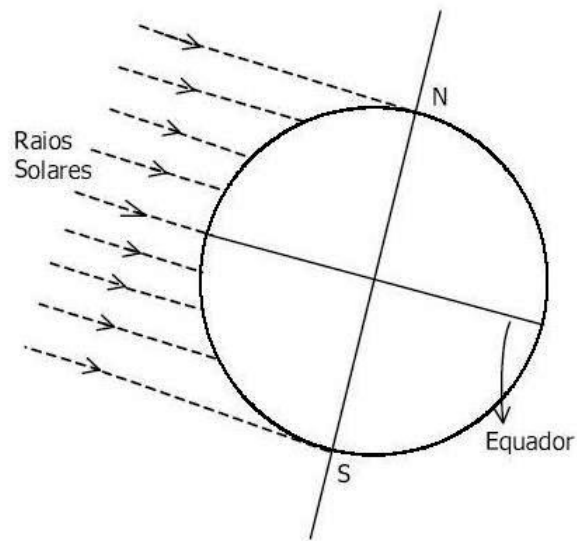


Figura B.7: Equinócio. (Fonte: [1])

É fácil notar que na região dos polos, a luz incide de forma rasante. No dia 21 de junho (inverno no Hemisfério Sul) a região do Círculo Polar Antártico não se encontra iluminada, ao passo que a região do Círculo Polar Ártico está totalmente iluminada. Esta situação se inverterá após seis meses de revolução do nosso planeta, quando o Hemisfério Sul estiver mais exposto à luz solar em 23 de dezembro (verão no Hemisfério Sul). Nessa situação, nós temos iniciada “noite eterna” para a região do Círculo Polar Ártico.