Universidade Federal do Amapá
Departamento de Pós-Graduação
Sociedade Brasileira de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática

Graciano dos Santos Neto

Proposta de Ensino para o estudo de Gráficos de Funções através do software KmPlot

Macapá - AP

2017

Graciano dos Santos Neto

Proposta de Ensino para o estudo de Gráficos de Funções através do software KmPlot

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT - UNIFAP/SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

UNIFAP

Universidade Federal do Amapá

SBM

Orientador: Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco

Macapá - AP

2017

Graciano dos Santos Neto

Proposta de Ensino para o estudo de Gráficos de Funções através do software KmPlot

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em rede nacional, PROFMAT - UNIFAP/SBM (Sociedade Brasileira de Matemática), como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Trabalho avaliado. Macapá - AP, 01 de setembro de 2017:

Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco
Orientador

Prof. Dr. Erasmo Senger
(UNIFAP)

Prof. Ms. Hilton Bruno Pereira Viana
(IFAP)

Prof. Dr. José Walter Cárdenas Sotil
(UNIFAP)

Macapá - AP
2017

Este trabalho é dedicado à todos que sempre acreditaram na sua capacidade,
aos professores que tornam tudo possível, fazendo o que parece distante e inviável,
seja apenas uma questão de tempo para alcançá-lo.

Agradecimentos

A Deus por ter me abençoado e concedido a oportunidade de concretizar mais um grande sonho em minha vida.

Aos meus pais, pela educação, motivação, orientação e à minha esposa Greice Kelly e filho Miguel S. Santos pelo apoio e compreensão.

À Universidade Federal do Amapá, seu corpo docente, por toda contribuição e dedicação nesse projeto.

Aos professores formadores do Profmat (IMPA) que em esclareceram várias dúvidas em suas vídeos aulas, em especial, um agradecimento póstumo ao Prof. Dr. Elon Lages Lima por toda sua contribuição ao ensino da matemática.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Guzmán Eulálio Isla Chamilco, pela contribuição durante o mestrado, esclarecimentos e dedicação para a conclusão do trabalho.

Aos meus amigos do curso, principalmente, Almir Sardinha por toda contribuição na conclusão desse trabalho.

“Não vos amoldeis às estruturas deste mundo,
mas transformai-vos pela renovação da mente,
a fim de distinguir qual é a vontade de Deus:
o que é bom, o que Lhe é agradável, o que é perfeito.
(Bíblia Sagrada, Romanos 12, 2)

Resumo

A utilização de novas tecnologias na escola vem buscar soluções para as dificuldades encontradas na docência de Matemática, em qualquer nível da educação básica onde os índices de reprovação ainda são muito altos nesta disciplina, portanto, é necessário que a abordagem dada ao uso do software deve ser estudada, estrategicamente construída e didaticamente acompanhada para garantir o aproveitamento das ferramentas computacionais. Assim, procurou-se explorar as funções afins e quadráticas na forma canônica, motivando as aulas teóricas e expositivas, trabalhando com o lado intuitivo de cada aluno, com objetivo que ele possa analisar o comportamento dos gráficos construídos através do software Kmplot, e assim, a partir dessa análise, estender e consolidar o conhecimento já desenvolvido em sala. Através construções de funções no plano cartesiano do Kmplot, visualize, junto com seus alunos os conceitos, definições e propriedades relacionadas às funções. Essa proposta foi desenvolvida como experiência na Escola Estadual Professor José Ribamar Pestana no município de Santana com alunos do primeiro e segundo ano do ensino médio, possibilitando uma metodologia diversificada para as aulas de matemática, de modo que sejam mais atrativas e que desperte o interesse e a motivação dos alunos e dos docentes.

Palavras-chaves: Tecnologias, gráficos, funções, Kmplot.

Abstract

The use of new technologies in school has sought solutions to the difficulties encountered in teaching mathematics at any level of basic education where failure rates are still very high in this discipline, so it is necessary that the approach given to the use of software should be studied, strategically constructed and accompanied by a computer to guarantee the use of computational tools. Thus, we attempted to explore the related and quadratic functions in the canonical form, motivating the theoretical and expositive classes, working with the intuitive side of each student, so that he can analyze the behavior of the graphs constructed through the Kmplot software, from this analysis, to extend and consolidate the knowledge already developed in the classroom. Through function constructions in the Kmplot Cartesian plane, visualize, along with your students, concepts, definitions, and properties related to functions. This proposal was developed as an experience at the Professor José Ribamar Pestana State School in the municipality of Santana with first and second year high school students, enabling a diversified methodology for math classes, so that they are more attractive and that arouses interest and the motivation of students and teachers.

Key-words: Technologies, graphs, functions, Kmplot.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O processo de aprendizagem do conhecimento matemático na educação básica, em especial, no ensino médio, deve ser enfrentado como um ensino claro e objetivo, para que o discente possa ler e interpretar a realidade, desenvolver capacidades matemáticas que dele serão exigidas durante sua vida. Nessa perspectiva, o ensino da matemática deve ir além de seu caráter instrutivo tradicional. É necessário estabelecer meios para que seja garantido uma visão abrangente dos conteúdos abordados no ensino.

Dessa maneira, a motivação tecnológica no ensino da matemática, agregada a um acompanhamento didático pode ampliar as compreensões do aluno sobre tais conteúdos do ensino básico, capacitando-o para compreender e interpretar gráficos e elementos que envolvem o estudo de funções. Isso, leva o discente a se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, construir suas próprias conjecturas, tomar decisões acertadas, generalizar e observar suas consequências.

Proponho nesta dissertação a abordagem do estudo dos gráficos de função afim e quadrática, equiparando as variações entre os gráficos quando varia-se os parâmetros a, b e c das funções. No caso da função afim, aborda-se elementos como coeficiente angular, função crescente e decrescente, translações verticais e horizontais. Para o estudo de função quadrática a abordagem se deu principalmente pelos elementos da forma canônica do trinômio, considerando elementos como ponto máximo ou mínimo da função quadrática escritas da forma $f(x) = a(x - m)^2 + k$ e as translações vertical e horizontal.

O objetivo deste trabalho é tornar-se um material de apoio ao professor para as aulas de estudo de função, de maneira a conduzir o aluno a perceber a aplicação dos elementos algébricos na construção dos gráficos de funções. Como essa construção em sala, através do quadro, torna-se demorada e desgastante, tanto para o professor quanto ao aluno, a inserção do software nesse ponto é muito viável, pela facilidade e dinâmica na observação do comportamento dos gráficos, além de conduzir uma aula mais instigante ao aluno, que é o mais afetado com as modificações tecnológicas ocorridas na sociedade.

Este trabalho está organizado em capítulos da seguinte maneira: Uma visão histórica é mostrada no capítulo 1, onde percorremos o desenvolvimento do pensamento científico matemático no que se refere as ideias que foram construídas ao longo do tempo a respeito de função. No capítulo 2 faremos uma abordagem didática sobre a utilização dos laboratórios de informática educativa e os softwares utilizados para o ensino da matemática. No capítulo 3 abordaremos definições e propriedades de funções, assim como seus respectivos gráficos. No capítulo 4, será apresentado o desenvolvimento da proposta didática para ensino de funções.

Nos apêndices, está disponível a sequência didática da Atividade I e II desenvolvida no trabalho, contudo, é um material didaticamente organizado e pré-estabelecido para que o professor tenha acesso e possa desenvolver diretamente com seus alunos. Fica ainda, como, modelo para o desenvolvimento das atividades restantes propostas nesse trabalho.

2 Breve histórico sobre a noção de Função

Para alguns autores, as primeiras e mais primitivas noções de função aparecem a partir de relações numéricas descritas em tabelas construídas por povos antigos. Tais tabelas exprimem apenas uma ideia de correspondência entre quantidades e, assim não faziam apontamentos em que essa relação seja funcional, pois, não existia a condição de variável e, dessa maneira, não se tratava aqui sobre o desenvolvimento do conceito de função, mas, obviamente, sendo um mecanismo de correspondência, assume-se uma relação indireta ao conceito.

Durante essa construção, o desenvolvimento da álgebra foi fundamental para a definição que tem hoje. Assim, grande parte do desenvolvimento da álgebra para esse início, se deve a contribuição dos Babilônicos[1], que apresentaram um domínio de estudos de álgebra e que fogem, a princípio, da utilização prática, como se pensava até então. Boyer evidencia,

> As realizações dos babilônicos no domínio da álgebra são admiráveis, mas os motivos que os impulsionaram essa obra não são fáceis de entender. Era suposição comum que virtualmente toda ciência e a matemática pré-helênicas eram puramente utilitárias; mas que espécie de situação da vida real na Babilônia antiga podia levar a problemas envolvendo a soma de um número e o seu recíproco, ou a diferença entre uma área e um comprimento?(BOYER, 2010, p 25)

Essas indagações sobre a maneira como estava se moldando a matemática, infere que nesse momento da história, os babilônicos estavam direcionando as associações matemáticas de forma bastante abstrata para a construção de relações numéricas complexas para a época.

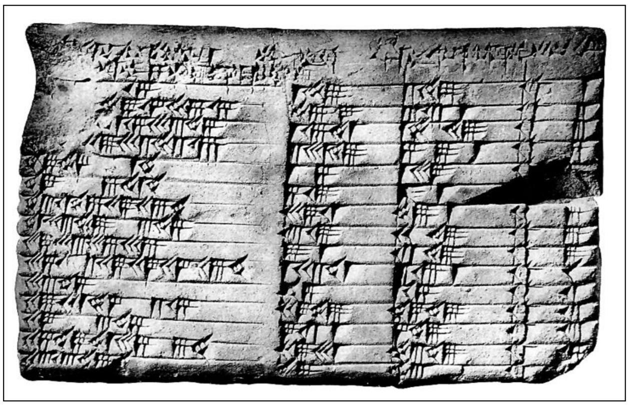
Assim, a ideia de correspondência entre quantidades aparecem nas tábuas dos babilônicos, a exemplo da Plimpton - figura 01, datada aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. que de forma direta, associavam valores em tabelas, que seria, a princípio a contribuição inicial para a noção de função. (MACIEL, 2011).

> Deste ponto de vista, poderíamos dizer que as tabelas babilônias e egípcias já pressupunham, de alguma forma, a ideia de função, uma vez que se tratavam justamente de registros de correspondências (entre um número e o resultado das operações que envolvem este número) (ROQUE; CARVALHO, 2012, p 208)

Um estudo resumido sobre a Tábua Babilônica Plimpton 322 encontra-se em Pereira (2010).

[1] Civilizações antigas da Mesopotâmia do período de 2000 a.C. até 600 a.C

Figura 1 – Tábua Babilônica: Plimpton



Fonte: (PEREIRA, 2010)

Contudo, é importante reiterar que essas colocações não mostram uma intensão dos povos da época em fundamentar a definição de função ou representação à ideia de relação funcional, pois, os elemento para a construção da ideia de função se constituíram anos a frente desses povo, como a definição de variável e a construção gráfica. O que se tem, na verdade é apenas uma particularidade em relação a uma correspondência numéricos.

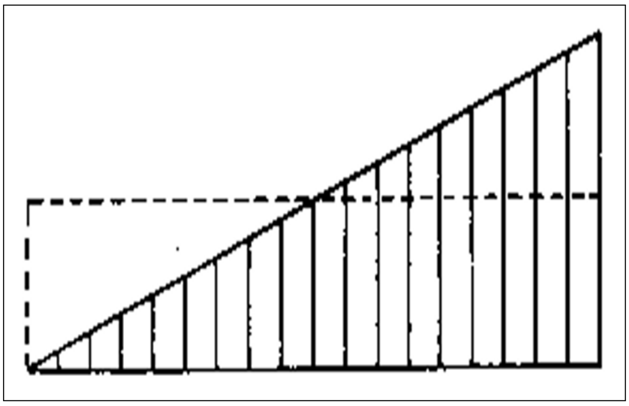
> A ênfase sobre a ideia de correspondência fez com que alguns historiadores da Matemática vissem um antecedente desta noção nas tabelas babilônicas e egípcias, ou ainda nas tabelas usadas pela astronomia grega e na Matemática antiga em geral. Obviamente, estes povos não propuseram uma noção de função para compreender suas tabelas e esta associação não parece ajudar a entender a natureza da Matemática que praticavam. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p 208)

2.1 O surgimento dos Gráficos

Após anos de estudo de geometria, a matemática se apresenta como um estudo direcionado aos questionamentos da física e os movimentos. No fim da Idade Média, os físicos já assumiam um grupo numeroso na Europa influenciado, principalmente, pelos estudos sobre movimento, em especial em Oxford e Paris. Dentre eles, dois se destacaram em relação ao estudo de proporcionalidade, tempo, velocidade e espaço, Thomas Bradwardine (1290 - 1349) e Nicole Oresme (1323 - 1382) (BOYER, 2010, p 190-191).

Em especial, o desenvolvimento do trabalho de Oresme *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum*, em que ele aborda a representação gráfica das funções, contudo, como o conceito de função não era formalizado, Nicole traçou um gráfico velocidade-tempo para um corpo que se desloca com velocidade constante, assim, a linha horizontal marcava cada instante para se obter a velocidade desse corpo. Cada ponto desse eram as longitudes. Os traços perpendiculares a cada instante, marcava a velocidade do corpo era as latitudes, chegando na figura 02.

Figura 2 – Gráfico: Velocidade-Tempo (Oresme)



Fonte: (BOYER, 2010)[p 193]

De acordo com Roque e Carvalho (2012), "o estudo da variação dos fenômenos naturais em relação ao tempo, por meio de leis matemáticas, se deve em grande parte ao desenvolvimento da física após Galileu[2] (1564 - 1642). Esta relação era analisada, contudo, por meio de proporções geométricas". Galileu deu continuidade no desenvolvimento de Oresme. Para Boyer (2010), é praticamente certo que Galileu conhecia perfeitamente a obra de Oresme sobre latitude de formas, usando várias vezes em *Duas novas ciências* Galileu usou um diagrama de velocidades semelhante ao gráfico triangular de Oresme, mas, organizou as ideias e contribuiu com a precisam matemática que lhe faltava.

Durante o século XVII, surge a figura do francês René Descartes (1596 - 1650) que apresenta uma visão aperfeiçoada da geometria e álgebra. O seu trabalho *La géométrie*, divido em três livros, Descartes utiliza a geometria para resolver problemas de construção, partindo, da aritmética básica através da geometria, adição, subtração, multiplicação, divisão e radiciação; até construções mais complexas. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p 196).

2.2 Notações Algébricas

Historicamente, o estudo de funções estava intimamente ligado ao desenvolvimento da álgebra, pois, a resolução de equações é a ferramenta fundamental para isso. De acordo com a definição, ainda que originalmente "álgebra" refira-se a equações, hoje tem um significado mais amplo. Para Baumgart (1992, p 06), a definição pode ser dada em dois enfoques: (1) Álgebra antiga (elementar) é o estudo de equações e método de resolvê-las. (2) Álgebra moderna (abstrata) é o estudo de estruturas matemáticas. Daí a importância da notação algébrica para o estudo de funções. Por outro lado, a necessidade de uma

[2] Galileu Galilei foi um filósofo natural, astrônomo e matemático italiano que deu contributos fundamentais para o desenvolvimento do método científico, na astronomia e em estudos do movimento e resistência de materiais.((RIBEIRO, 2004))

notação mais sofisticada se manifestou pela primeira vez em relação à resolução de equações algébricas (MILIES, 2004, p 06).

Dessa forma, o desenvolvimento da notação algébrica evoluiu ao londo de três estágios: o *retórico* (ou verbal), o *sincopado* (no qual era usadas abreviações de palavras) e o o *simbólico*. No último estágio a notação passou por várias modificações e mudanças, até tornar-se razoavelmente estável ao tempo de Isaac Newton (séc. XVII). (MILIES, 2004)

A notação algébrica simbólica começa a desenvolver mais evidente por volta de 1500, temos o seguinte resumo segundo Milies (2004)

– Cardano (1545): *cubus $\bar{p}$ rebus aequalis 20*

– $x^3 + 6x = 20$

– Viéte (1591): $1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N$ *aequatur 120*

– $x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$

– Harriot (1631): $aaa - 3bba ==== +2 \cdot ccc$

– $x^3 - 3b^2a = 2c^3$

– Descartes (1637): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 120$

– $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 120$

– Wallis (1693): $x^4 - bx^2 + cxx + e = 0$

Contudo, houve uma contribuição fundamental no desenvolvimento do simbolismo algébrico feito pelo francês François Viète (1540-1603). Segundo Boyer (2010, p 223), desde o período de Euclides, os matemáticos incluíram em seus trabalhos o uso de letras para representar grandezas, contudo, não havia meios de distinguir grandezas supostas conhecidas das quantidades desconhecidas que devem ser encontradas, então, Viète fez sua simples, mas, enorme contribuição: usou uma vogal para representar, em álgebra, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou um número supostos conhecidos ou dados. Assim, Viète, difere o conceito de parâmetro da ideia de uma quantidade desconhecida.

> O divisor de águas do pensamento algébrico (separando o antigo fluxo raso da "solução manipulativo de equações" da moderna corrente profunda que começa com propriedades teóricas das equações) concretiza-se no francês François Viète, que foi o primeiro, em sua *logística speciosa* a introduzir letras como coeficientes genéricos (positivos). (MILIES, 2004, p 15)

2.3 Definição do conceito de Função

Como já vimos, as correspondências numéricas criadas por povos antigos sugerem bruscamente uma construção da noção de função, porém, o conceito matemático de função ainda necessita ganhar vários elementos matemáticos. Um elemento fundamental foi a ideia de variável, ou seja, relação entre grandezas que variam. Esse conceito de variável se deu, inicialmente, no desenvolvimento do simbolismo algébrico, paralelo à construção gráfica de Descartes e Viète. "As grandes inovações foram a associação de curvas a equações algébricas e o uso de um sistema de coordenadas para relacionar as variáveis envolvidas naquelas equações, procedimentos que deram origem ao que chamamos hoje de geometria analítica." (BOTELHO; REZENDE, 2008, p 68)

> Ideias mais explicitas de funções aparecem ter começado por volta da época de de René Descartes (1637), que pode ter sido o primeiro a usar o termo. Descarte definia função como significando qualquer potência de x, com x^2, x^3, ... (MILIES, 2004, p 83)

Na segunda metade do século XVII, os principais matemáticos se fixaram em desenvolver estudos das curvas e seus conceitos associados. As variáveis associadas a uma curva eram geométricas, e, em 1673, G. W. Leibniz[3] utilizou pela primeira vez a palavra "função" para indicar quantidades que variavam ao longo de uma curva, por exemplo, a tangente. Segundo Botelho e Rezende (2008, p 69), Leibniz também introduziu o uso das palavras "constante", "variável" e "parâmetro". Já Isaac Newton (1642-1727), em *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*[4], mostrou que a área sob uma curva poderia ser determinada pelo processo inverso do cálculo da taxa de variação. Apesar de a validade deste resultado ter sido observada anteriormente, Newton foi o primeiro que percebeu sua generalidade (BOTELHO; REZENDE, 2008, p 69).

Com o objetivo do desenvolvimento do estudo de cálculo diferencial, vários matemáticos tiveram que definir o conceito matemático de função, até que em 1718, Johann Bernoulli (1667-1748) definiu função como sendo qualquer expressão envolvendo uma variável e quaisquer constantes. Leonard Euler (1707-1783), em 1750, definia como Bernoulli e uma segunda definição como funções analíticas e introduziu a notação $f(x)$. Dirichlet afirmou que y é uma função de x se y toma um ou mais valores definidos para cada um de certos valores que x pode assumir em um dado intervalo, mais recentemente, Georg Cantor e outros levou à definição de função em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente números (MILIES, 2004, p 83-84)

[3] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig e aos dezessete ano obteve grau de bacharel. Estudou teologia, direito, filosofia e matemática na universidade. (BOYER, 2010, p 292)

[4] Obra composta em 1969, mas publicada em 1711. Mais detalhes em Boyer (2010, p 286-289)

3 O ensino da matemática e as tecnologias

Várias discussões vêm sendo construídas sob as potencialidades e aplicações que a ferramenta computacional pode oferecer junto às metodologias do ensino da matemática, principalmente, através do uso dos softwares educacionais, nos conteúdos de ensino que necessitam de mais abstração para sua compreensão.

> O termo 'novas alfabetizações' sugere que há outras motivações para a alfabetização oriundas em geral das novas tecnologias, não bastando saber ler, escrever e contar. Ao mesmo tempo, os aportes teóricos se flexibilizaram para darem conta de contextos flexíveis de alfabetização, a começar pela necessidade de superar o modelo tradicional relativo ao texto impresso em favor de textos mais voltados para a imagem, em especial, animada.(DEMO, 2008, p. 6).

Essas discussões são motivadas em função do espaço que as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC[1]) vêm tomando no meio social do educando. Sendo assim, com a utilização dos computadores pelos discentes nas salas especializadas e através de metodologias de ensino que possam oportunizar um meio de compreensão mais eficaz do conteúdo abordado.

3.1 O uso do computador nas escolas públicas

É notório que as novas tecnologias estão cada vez mais presentes em nossos dias e esta mudança tecnológica alcança também nas escolas públicas como uma verdadeira ferramenta em potencial, assim, os professores e alunos necessitam atulizar-se no processo de investigação dos recursos computacionais, com objetivo de construir seus próprios conhecimentos e acompanhar este acelerado crescimento dos métodos de ensino e de aprendizagem.

Os PCN's já apontavam esse processo, principalmente, no que se refere ao ensino da matemática.

> Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento.(BRASIL, 1997, p. 41).

[1] Tecnologias de informação (informática) e Tecnologias de Comunicação (telecomunicação) e mídia eletrônica. Envolvem a aquisição, o armazenamento, o processamento e a distribuição da informação por meio eletrônico e digital.

Desde a introdução no Brasil do termo Tecnologia Educacional em 1971 (segundo a Associação Brasileira de Tecnologia - ABT), onde os educadores se deparam com diferentes conceitos que se caracterizaram pela compreensão diferenciada do papel dos instrumentos tecnológicos no processo educacional. Assim, várias expressões - “Educação Tecnológica, Tecnologia Educacional, Tecnologia na Educação”, são normalmente empregadas, indistintamente, para se referir ao uso do computador e suas ferramentas na educação.

3.2 O software KmPlot como ferramenta para o estudo gráfico das funções

Este software foi desenvolvido com o objetivo de plotar gráficos de funções e, apesar da sua interface não ser tão sofisticada quanto de outros softwares matemáticos, como GeoGebra e Maple, é isso que o possibilita um manuseio fácil e rápido, facilitando com que o os professores que apresentam dificuldades em manusear softwares, não encontrem muitas dificuldades em realizar as atividades propostas nesse trabalho.

Outro fato, é que grande parte das escolas públicas que ofertam o ensino médio possuem laboratórios de informática, segundo as notas estatísticas do INEP[2] do ano 2016, 82,7% das escolas de ensino médio. INEP (2016, p 9), por outro lado, o sistema operacional disponível nas máquinas que constituem este laboratório é Linux Educacional, que já incluem o KmPlot nas configurações básicas.

Essas características tornam o software mais viável, pois, tanto o docente que possui essas limitações, quanto o aluno que mesmo não possuindo limitações em manuseio das ferramentas tecnológicas não está familiarizado com essa ferramenta, podem utilizá-lo com certa facilidade, e eficaz por aproveitamento do tempo da aula de matemática e quando executado nas aulas de matemática não se torna cansativo para o educando. Segundo Melo (2013), “o KmPlot é capaz de motivar e ampliar a compreensão dos conceitos abordados em sala de aula, e, além disso, proporcionar a visualização dos gráficos, através do manuseio do programa.”.

3.2.1 Utilização do KmPlot

Como pré-requisito da proposta, faz-se necessário que o docente conheça os comandos básico para construção dos gráficos das funções no plano cartesiano apresentado no software. Assim, será construído um pequeno tutorial para que o docente, junto aos seus alunos sejam totalmente capazes de plotar as funções.

[2] Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, criado em 13 de janeiro de 1937, inicialmente chamado de Instituto Nacional de Pedagogia e em 1972 passa a ser conhecido como INEP. (INEP, 2017)

Para gerar o gráfico de uma função, barra lateral à esquerda, existe um botão com uma lista para *Criar* grácos novos. Clique nela e selecione a opção *Gráfico Cartesiano*. O campo de texto para editar a equação atual ficará em primeiro plano. Substitua o texto por uma função: $y = x^2$ (por exemplo) e pressione *Enter*. Isto irá desenhar o gráfico de $y = x^2$ no sistema de coordenadas.

Segundo Möller, Rodrigues e Saxton (2004), o KmPlot também oferece algumas funcionalidades numéricas e visuais como:

– O preenchimento e cálculo da área entre o gráfico e o primeiro eixo;

– Descoberta dos valores mínimo e máximo

– Mudança dinâmica dos parâmetros da função

– O desenho das funções derivadas e integrais.

Estas funcionalidades ajudam na aprendizagem da relação entre as funções matemáticas e a sua representação gráfica num sistema de coordenadas.[3]

[3] Ver mais detalhes em (MöLLER; RODRIGUES; SAXTON, 2004)

4 Funções

Para o estudo de gráficos de funções é imprescindível a explanação sobre algumas definições e elementos fundamentais do estudo de funções para que se aplique ao estudo o uso do software.

Contudo, é importante compreender aqui, que o objetivo dessa proposta não é decorrer sobre as definições de funções ou ainda, sobre a metodologia que o professor de sala deve utilizar para explorar o ensino de funções e suas definições, porém, para que a proposta seja desenvolvida na sala de informática, os alunos precisam ter explorado noções fundamentais sobre essas definições em sala para que as questões façam sentido ao aluno. E através da sequência didática abordada, espera-se que o aluno decorra da compreensão gráfica do estudo de funções partindo do pressuposto que o professor já tenha realizado a exploração desses tópicos.

Para isso, utilizaremos como base para as definições e conceitos o livro *A matemática do ensino médio - vol 1* do Professor Elon Lages Lima (2005).

4.1 Função Afim

4.1.1 Definição de Função Afim

Definição 1 *Uma função* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ *chama-se afim quando existem constantes* $a; b \in \mathbb{R}$*, tais que* $f(x) = ax + b$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*.*

Dessa maneira, teremos as principais funções afim:

a) A *função identidade* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$;

b) As *translações* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + b$;

c) As *funções lineares* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax$;

d) As *funções constantes* $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = b$;

Lembremos ainda que uma função $f : X \Rightarrow \mathbb{R}$ com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se:

a) *Crescente*, quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

b) *Decrescente*, quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

c) *Monótona não decrescente*, quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

d) *Monótona não crescente*, quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Por outro lado, dizemos que uma função afim é crescente quando a taxa de crescimento (o coeficiente a) é positiva, decrescente quando a é negativo e constante quando $a = 0$.

4.1.2 Gráfico da Função Afim

Aqui, antes da construção gráfica de funções, precisamos considerar outras definições fundamentais sobre plano Produto Cartesiano e Plano Numérico em $\mathbb{R}^2$ para garantir que a interface do software sugira ao aluno a ideia de plano cartesiano, por isso, é necessário que essas características gráficas sejam desenvolvidas pelo professor em sala de aula.

a) Produto Cartesiano

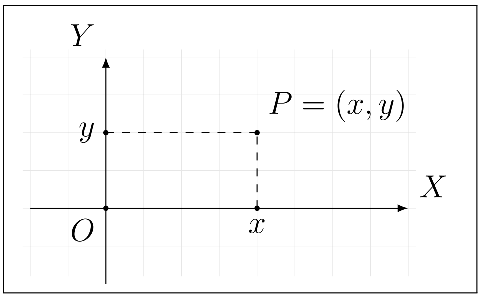
Um *par ordenado* $P = (x, y)$ é formado por um objeto x, chamado a *primeira ordenada* de P e um objeto y chamado a *segunda ordenada* de P. Por outro lado, dizemos que o *produto cartesiano* $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y), cuja a primeira coordenada x pertence a X e a segunda coordenada y pertence a Y, isto é, $X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$, de acordo com a figura 3, o sistema de coordenadas para o ponto P.

Assim, o gráfico de uma função $f : X \to Y$ é subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$.

b) Plano de $\mathbb{R}^2$

Os elementos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) são os pares ordenados de números reais e surgem de um ponto P do plano Π (x = abcissa, y = ordenada) quando se fixa nesse plano um par de eixos ortogonais OX e OY, que se intersectam no ponto O (origem do sistema de coordenadas).

Figura 3 – Sistema de Coordenadas para P

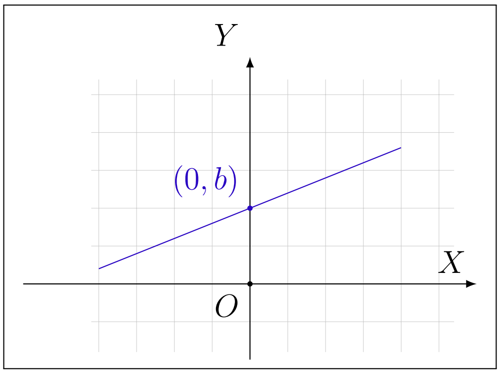


Fonte: (LIMA, 2005)

Para a construção de gráficos de funções afim no plano cartesiano, deve-se ressaltar, como mostra a figura 4, que "o gráfico G de uma função afim $f : x \mapsto ax + b$ é uma **linha reta**"(LIMA, 2005, p 88).

Do ponto de vista geométrico, b é a ordenada do ponto onde a reta, que é o gráfico $f : x \mapsto ax + b$, intersecta o eixo OY. O número a chama-se *a inclinação*, ou *coeficiente angular*, dessa reta (em relação ao eixo horizontal OX). Quanto maior o valor de a, mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$, o gráfico de f é uma reta ascendente (quando se caminha para direita) e quando $a < 0$, a reta é descendente.

Figura 4 – Gráfico G



Fonte: (LIMA, 2005)

4.2 Função Quadrática

4.2.1 Definição de Função Quadrática

Definição 2 *Uma função $f : \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números a, b, c, com $a \neq 0$ tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

É importante lembrar que o estudo das funções quadráticas tem sua origem na resolução da equação do segundo grau, mais especificamente, sobre um dos problemas mais antigos da matemáticas escritos pelos babilônicos em que se pede para que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semiperímetro s e a área p. Esses dois números são encontrados através das raízes da seguinte equação: $x^2 - sx + p = 0$

Para a resolução, os babilônicos usaram uma regra e mostraram que as raízes são x e $s - x$[1]:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

[1] Ver Lima (2005, p 119-123)

$$s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

Para o estudo do gráfico da função quadrática, é interessante o estudo da função na forma canônica do trinômio.

4.2.2 A forma canônica do Trinômio

Considere o trinômio: $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right]$

As duas primeiras parcelas do colchete são as mesmas do desenvolvimento do quadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, assim:

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Daí, convenientemente, tomando $m = -\frac{b}{2a}$ e $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$, chegamos a:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

Essa maneira de escrever a função quadrática pode não parecer eficiente, principalmente, ao aluno, mas, é fundamentalmente eficaz para o estudo do máximo e mínimo da função. Segundo Silva (2013),

> Para o aluno, pode parecer complicado e até mesmo inútil num primeiro momento representar uma função quadrática na sua forma canônica. Porém, com uma observação mais detalhada da mesma, vemos que ela nos fornece o valor mínimo (no caso de $a > 0$) ou máximo (no caso de $a < 0$) de $f(x)$ e o valor de x para o qual um desses dois casos ocorre. (SILVA, 2013, p 15)

Tomemos $a > 0$ e na forma canônica de $f(x)$, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

No colchetes, a soma de duas parcelas, a primeira depende de x e é sempre maior ou igual a zero. A segunda é constante. Então, o menor valor dessa soma é atingido quando a primeira parcela é igual a zero.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

Nesse ponto, quando $a > 0$, $f(x)$ assume o valor mínimo e $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo, pois, é ilimitada superiormente.

Análogo, quando $a < 0$, o valor de $f(-b/2a)$ é o maior para quaisquer $x \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor mínimo, pois, é ilimitada inferiormente.

4.2.3 Raízes ou Zeros da Função

Os zeros da função quadrática a partir da função canônica pode ser escrita a partir dos parâmetros a, m e k.

Considere: $f(x) = a(x-m)^2 + k$, onde $f(x) = 0$

Daí:

$$a(x-m)^2 = -k \Rightarrow (x-m)^2 = \frac{-k}{a} \Rightarrow x - m = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}}$$

$$x = m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$$

Dessa maneira, as raízes da função na forma canônica nos leva a algumas observações. Primeiramente, quando, k e m iguais a zero.

Para $k = 0$, as raízes são iguais:

$$x_1 = x_2 = m$$

Por outro lado, se $m = 0$, temos:

$$x_1 = \sqrt{-\frac{k}{a}} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{k}{a}}$$

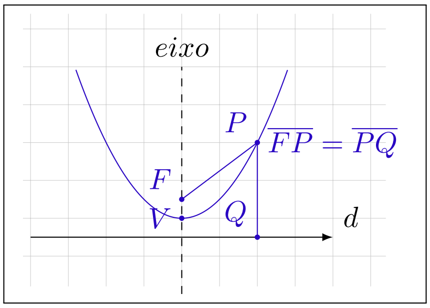
Outra observação fundamental em relação as raízes quadradas da equação: $x = m \pm \sqrt{-\frac{k}{a}}$

Pois, necessariamente, seja $k \neq 0$, para que a função apresente raízes reais, é necessário que $-\frac{k}{a} > 0$, ou seja, quando $a > 0$ e $k > 0$ ou $a < 0$ e $k < 0$ a função não apresenta raízes reais.

4.2.4 Gráfico da Função Quadrática

O gráfico de uma função quadrática é uma parábola de foco F e diretriz d (fig.5). A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco chama-se *eixo* da parábola e o ponto mais próximo da diretriz chama-se vértice (V). Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz:

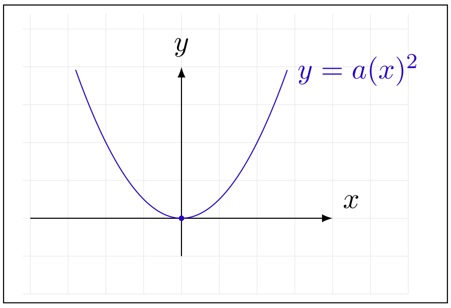
Figura 5 – Parábola



Fonte: (LIMA, 2005)

A partir da construção $f(x) = x^2$ na figura 06, usando a forma canônica do trinômio, chegamos ao seguinte gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2 + k$

Figura 6 – Gráfico de $f(x) = ax^2$



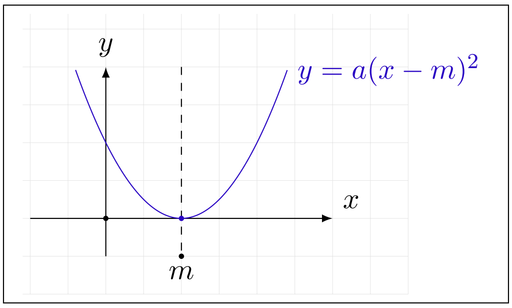
Fonte: (LIMA, 2005)

Observa-se que, o gráfico gerado por $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico $f(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \mapsto (x+m, y)$, como podemos ver na figura 07.

Por fim, temos que o gráfico da figura 08 de $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é obtido do gráfico de $f(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \mapsto (x, y+k)$

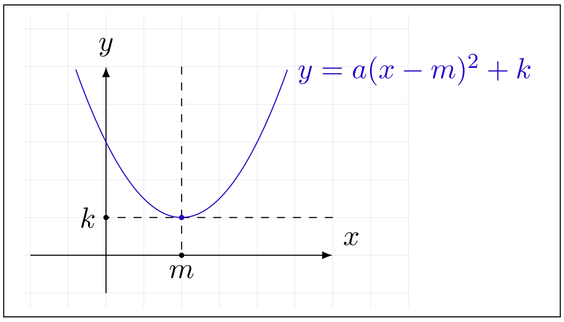
Por outro lado, vamos verificar a influência da parábola quando $a > 0$ e $a < 0$ no gráfico da função quadrática (figura 09). Usaremos, por simplificação, $f(x) = ax^2$ e $g(x) = a'x^2$:

Figura 7 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2$



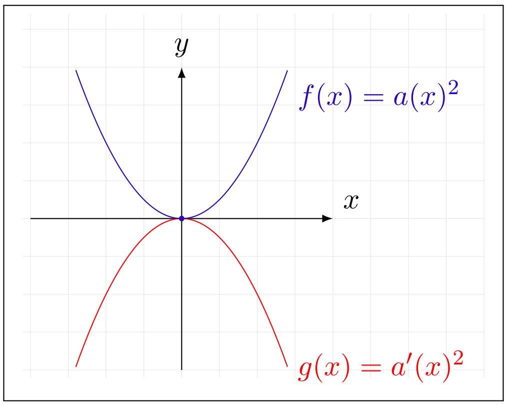
Fonte: (LIMA, 2005)

Figura 8 – Gráfico de $f(x) = a(x - m)^2 + k$



Fonte: (LIMA, 2005)

Figura 9 – Gráfico de $f(x) = ax^2$ para $a > 0$ e $g(x) = a'x^2$ para $a' < 0$



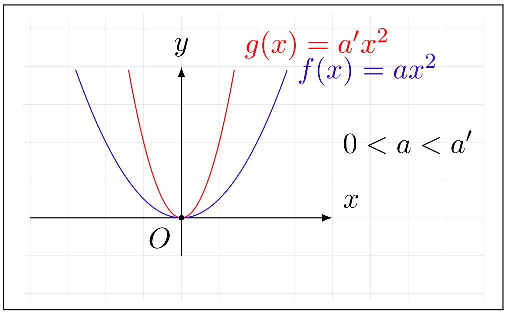
Fonte: Autor

Com parâmetro $a > 0$, a parábola tem sua concavidade voltada para cima e possui valor mínimo. Com $a < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo e encontramos seu valor máximo.

Mais uma característica importante é a congruência entre as parábolas, ou seja, verificar o que temos no gráfico quando $a > a'$, independente de b e c, onde $f(x) = ax^2$ e

$g(x) = a'x^2$ (figura 10).

Figura 10 – Gráfico de $f(x)$ para a e $g(x)$ para a'



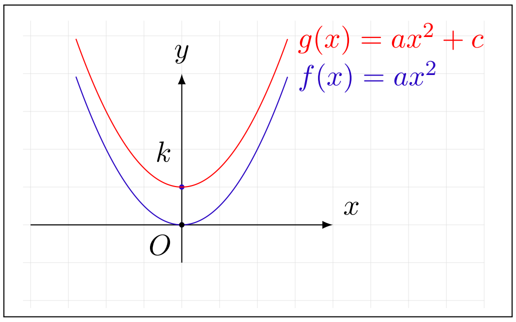
Fonte: Autor

Claramente, quanto maior o valor de a, menor é a abertura da concavidade da parábola e quanto menor o valor de a, maior é a abertura da concavidade da parábola.

Uma colocação interessante, como pode-se notar na figura 11, é o fato de que quando $b = 0$ temos $m = -b/2a = 0$, daí, o valor máximo ou mínimo da função quadrática é explícito em c, ou seja, $k = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = c$.

$$f(x) = a(x - m)^2 + k = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = ax^2 + c \Rightarrow k = c$$

Figura 11 – Gráfico de $f(x) = ax^2 + c$



Fonte: Autor

5 Proposta de ensino

A proposta de ensino será constituída de algumas atividades que devem ser desenvolvidas nos laboratórios de informática educativa (LIED) através do software KmPlot para a construção e análise dos elementos gráficos das funções estudadas.

5.1 Proposta de Ensino: Gráficos de funções afim

Para do ensino de Funções Afim, busca-se acrescentar ao conhecimento já construído em sala de aula, uma análise gráfica sobre o comportamento dos coeficientes a e b dentro das funções, variando um dos parâmetros estrategicamente e mantendo-se um valor fixo ao outro parâmetro. Dessa forma, fazer um estudo fundamental sobre as translações e inclinações dos gráficos das funções afim.

Pré-requisitos

Para que os educandos sejam capazes de desenvolver as atividades proposta devem, por hipótese, já ter o conhecimento prévio de:

a) Saber desenvolver os comandos básicos do software KmPlot para escrever funções e plotá-las na interface;

b) Conhecer a definições e propriedades de funções afins;

c) Reconhecer funções lineares;

d) Identificar através de definições função afim crescente e decrescente.

5.1.1 Atividade I: Variação do Parâmetro a

Objetivos da atividade - I

– Relacionar a definição de função crescente ou decrescente a condição do parâmetro a;

– Analisar o comportamento das funções afins do tipo $f(x) = ax$ plotadas no KmPlot;

– Observar a influência da parâmetro a com parâmetro $b = 0$;

Desenvolvimento Didático

1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    a) $f(x) = 2x$;

    b) $g(x) = -2x$;

2. De acordo com a questão anterior, responda as seguintes questões:
    a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?
    b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?
    c) Qual o valor de a, nas funções acima?
    d) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:
    a) $f(x) = 3x$;
    b) $g(x) = -3x$;

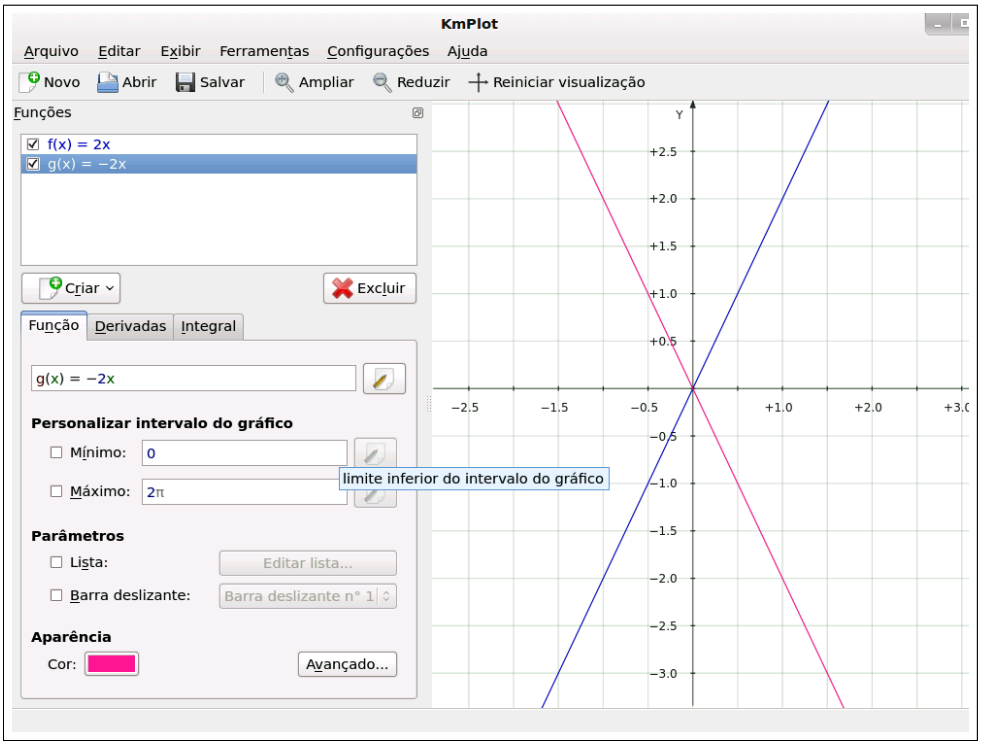
4. De acordo com a questão anterior, responda as seguintes questões:
    a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?
    b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?
    c) Qual o valor de a, nas funções acima?
    d) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

5. De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo são crescentes (C) e quais funções são decrescentes (D)

($\,)f(x) = -\dfrac{x}{2}$	($\,)f(x) = 5x$	($\,)f(x) = \dfrac{x}{3}$
($\,)f(x) = 3x$	($\,)f(x) = 2x$	($\,)f(x) = x$
($\,)f(x) = -x$	($\,)f(x) = -2x$	($\,)f(x) = -4x$

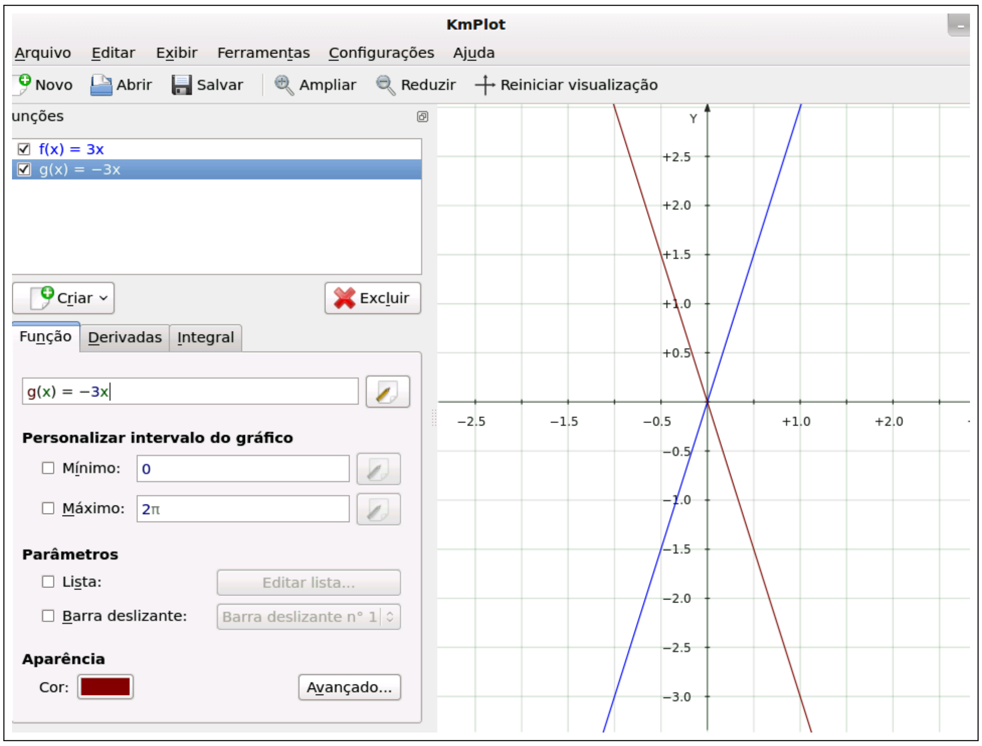
Resultados esperados: a partir da construção e observação dos gráficos mostrados nas figura 12 e figura 13, espera-se que o discente faça a análise e conjecture que para todo $a > 0$ a função é crescente e para todo $a < 0$ a função é decrescente. Ainda, espera-se, que o aluno perceba que as funções são lineares. É importante que o docente também faça o direcionamento dessa compreensão, através de questionamentos sobre o gráfico obtido.

Figura 12 – Função Afim: Atividade I - Questão 1



Fonte: Autor

Figura 13 – Função Afim: Atividade I - Questão 3



Fonte: Autor

6. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = x$;
   b) $g(x) = 2x$;
   c) $h(x) = 3x$;
7. De acordo com a questão anterior, responda as seguintes questões:
   a) As funções acima são crescentes ou decrescentes? Porque?
   b) Comparando-se as funções escritas no comando, quais diferenças podem ser notadas?
   c) Comparando-se os gráficos, quais diferenças podem ser notadas?
   d) Qual o ponto comum entre os gráficos?
8. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = -x$;
   b) $g(x) = -2x$;
   c) $h(x) = -3x$;
9. De acordo com a questão anterior, responda as seguintes questões:
   a) As funções acima são crescentes ou decrescentes? Porque?
   b) Comparando-se as funções escritas acima, quais diferenças podem ser notadas?
   c) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças podem ser notadas?
   d) Qual o ponto comum entre os gráficos?

Resultados esperados: através da construção e observação dos gráficos mostrados nas figura 14 e figura 15, espera-se que o discente faça a análise e conjecture que o parâmetro a na função determina a inclinação da reta construída pela função afim em relação ao eixo OX, isto é, quanto maior do valor de a, deve se notar que existe uma maior inclinação vertical da reta da função f em relação ao eixo OX.

5.1.2 Atividade II: Variação do Parâmetro a com $b \neq 0$

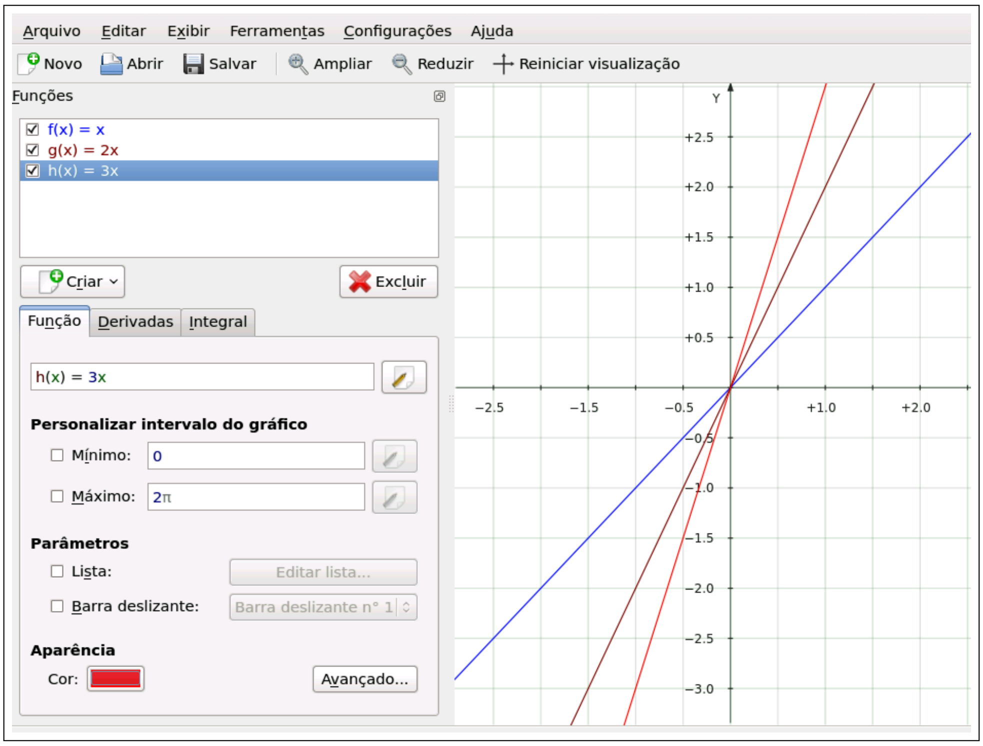
Objetivos da atividade II

– Relacionar a definição de função crescente ou decrescente a condição do parâmetro a;

– Conceber que o parâmetro b fixo é ponto em comum entre as funções que intersectam o eixo OY.

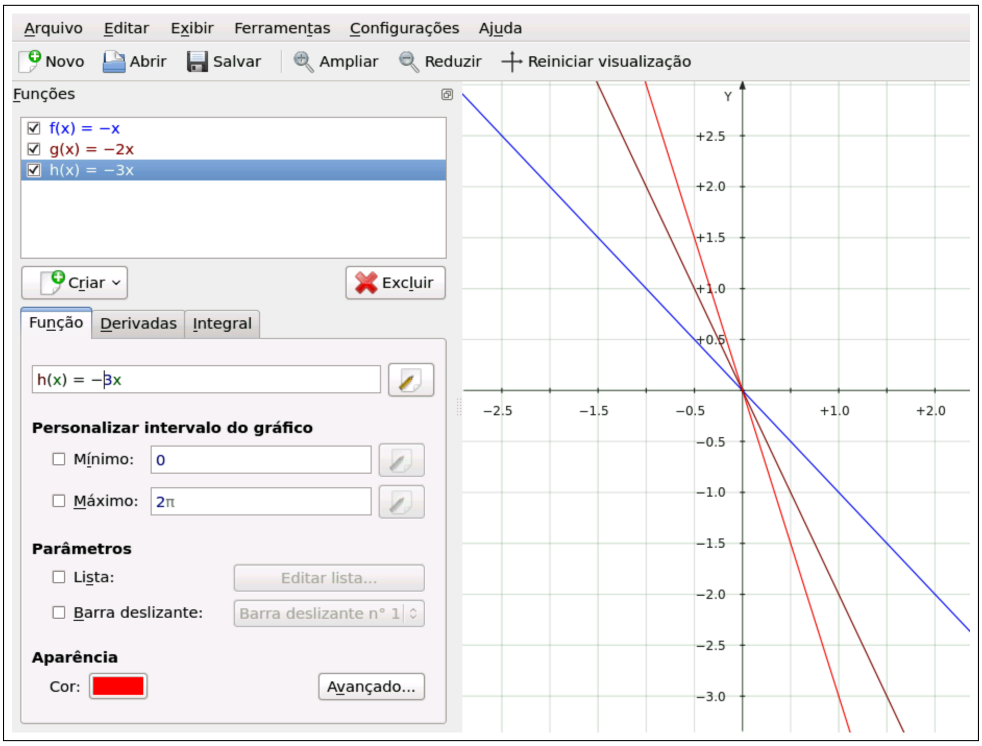
– Analisar o comportamento das funções afins do tipo $f(x) = ax + b$ plotadas no KmPlot;

Figura 14 – Função Afim: Atividade I Questão 6



Fonte: Autor

Figura 15 – Função Afim: Atividade I Questão 8



Fonte: Autor

– Observar a influência da parâmetro a, considerando o parâmetro b um valor fixo;

Desenvolvimento Didático

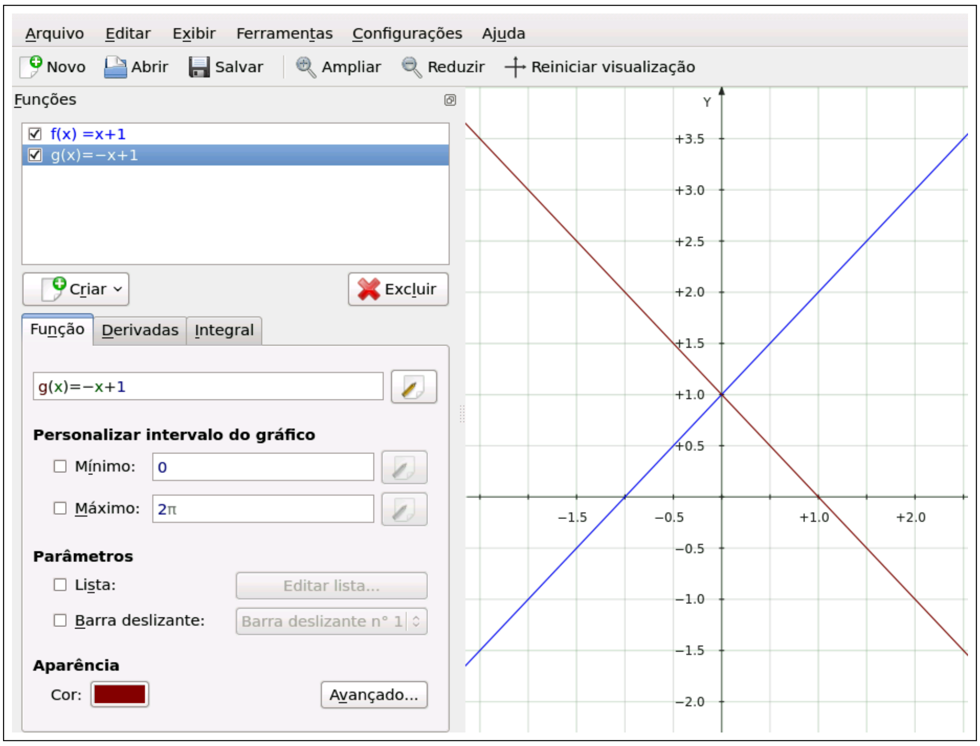
1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = x + 1$;
   b) $g(x) = -x + 1$;
2. A partir do gráfico, responda as seguintes questões:
   a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?
   b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças podem ser notadas?
   c) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.
3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   a) $f(x) = 2x + 1$;
   b) $g(x) = -2x + 1$;
4. A partir da questão anterior, responda:
   a) Comparando-se as funções acima descritas, quais diferenças podem ser notadas?
   b) Comparando-se os gráficos gerados, quais diferenças podem ser notadas?
   c) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.
5. De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo são crescentes (C) e quais funções são decrescentes (D)

( )$f(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$	( )$f(x) = 5x - 5$	( )$f(x) = 4 - x$
( )$f(x) = 3x - 4$	( )$f(x) = 1 + 2x$	( )$f(x) = -2x + 2$
( )$f(x) = -x + 1$	( )$f(x) = -x$	( )$f(x) = -4x + 2$

Resultados esperados: a partir da construção e observação dos gráficos, como na figura 16 (questão 1) e figura 17 (questão 3), espera-se que o discente faça a análise e conjecture que para todo $a > 0$ a função é crescente e para todo $a < 0$ a função é decrescente.

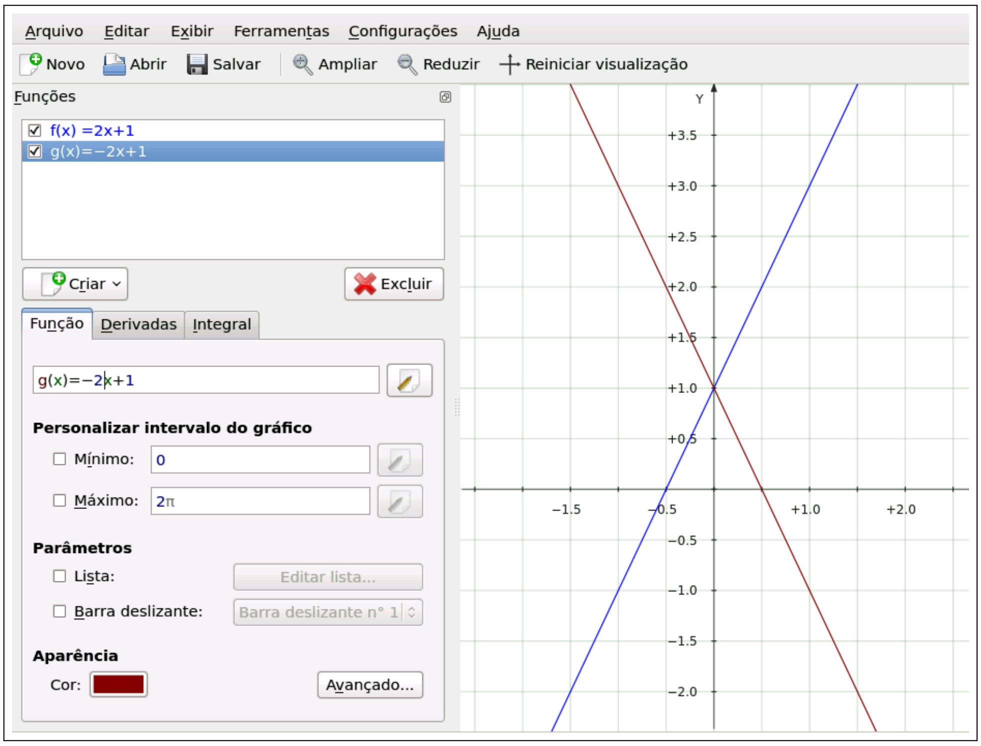
6. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Figura 16 – Função Afim Atividade II - Questões 1



Fonte: Autor

Figura 17 – Função Afim Atividade II - Questões 3



Fonte: Autor

a) $f(x) = x + 1$;

b) $g(x) = 2x + 1$;

c) $h(x) = 3x + 1$;

7. A partir da resolução da questão anterior, responda:

a) As funções acima são crescentes ou decrescentes? Porque?

b) Comparando-se as funções escritas no comando, quais diferenças podem ser notadas?

c) Comparando-se os gráficos, quais diferenças podem ser notadas?

d) Existe(m) ponto(s) em comum entre os gráficos das funções? Qual o valor de x quando isso acontece?

8. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -3x + 1$;

b) $g(x) = -2x + 1$;

c) $h(x) = -x + 1$;

9. A partir da resolução da questão anterior, responda:

a) As funções acima são crescentes ou decrescentes? Porque?

b) Comparando-se as funções escritas acima, quais diferenças podem ser notadas?

c) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças podem ser notadas?

d) Existe(m) ponto(s) em comum entre os gráficos das funções? Qual o valor de x quando isso acontece?

Resultados esperados: através da construção e observação dos gráficos, espera-se que o discente faça a análise e conjecture que o parâmetro a na função determina a inclinação da reta construída pela função afim em relação ao eixo OX, isto é, nota-se na figura 18 e figura 19, quanto mais distante de zero, o valor de a, deve se notar que existe uma maior inclinação vertical da reta da função f em relação ao eixo OX e independente do valor de b.

10. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 5x + 1$;

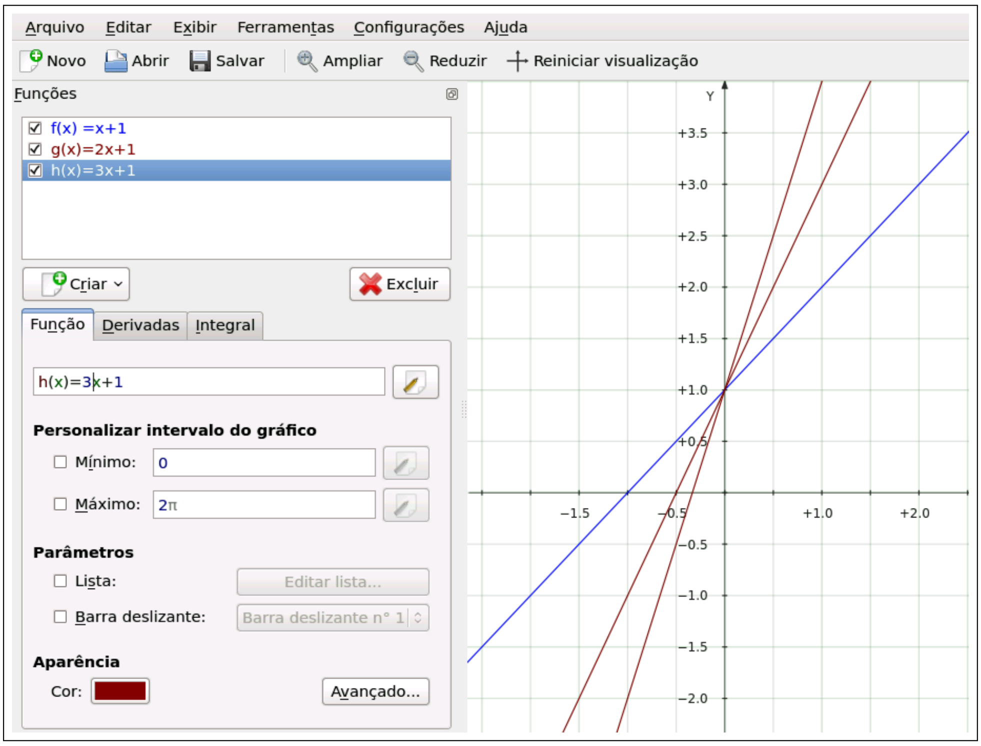
b) $g(x) = 2x + 1$;

c) $h(x) = -3x + 1$;

11. A partir da resolução da questão anterior, responda:

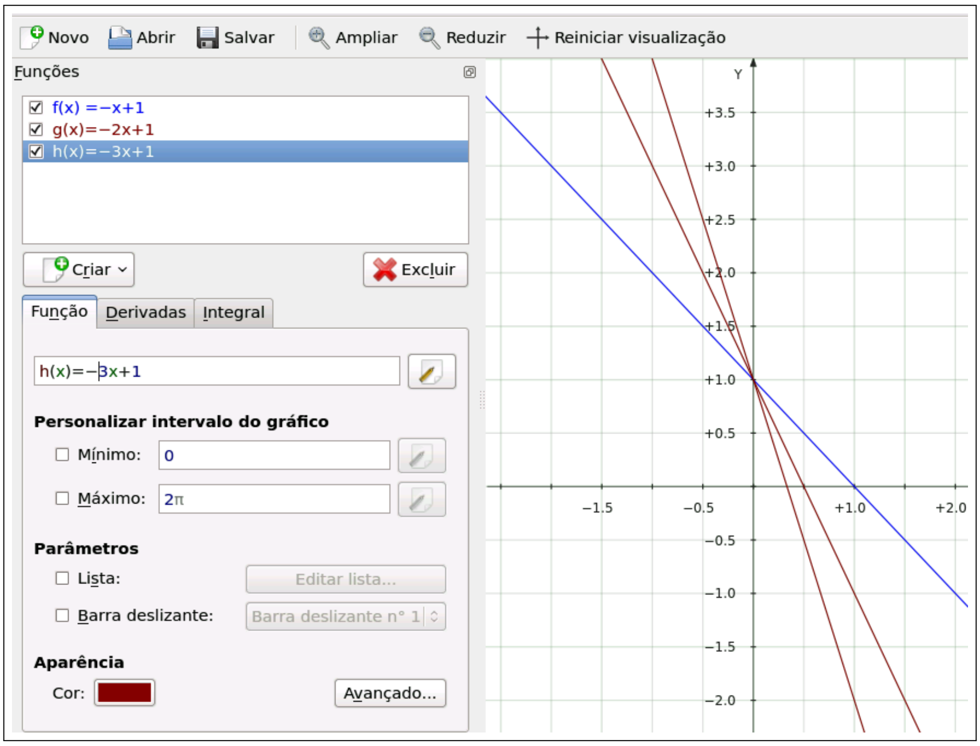
a) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?

Figura 18 – Função Afim: Atividade II Questões 6



Fonte: Autor

Figura 19 – Função Afim: Atividade II Questões 8



Fonte: Autor

b) Comparando-se as funções escritas acima, qual principal relação entre elas?

c) Comparando-se os gráficos das funções, qual principal característica pode ser notada?

12. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x - 2$;

b) $g(x) = -3x - 2$;

c) $h(x) = -x - 2$;

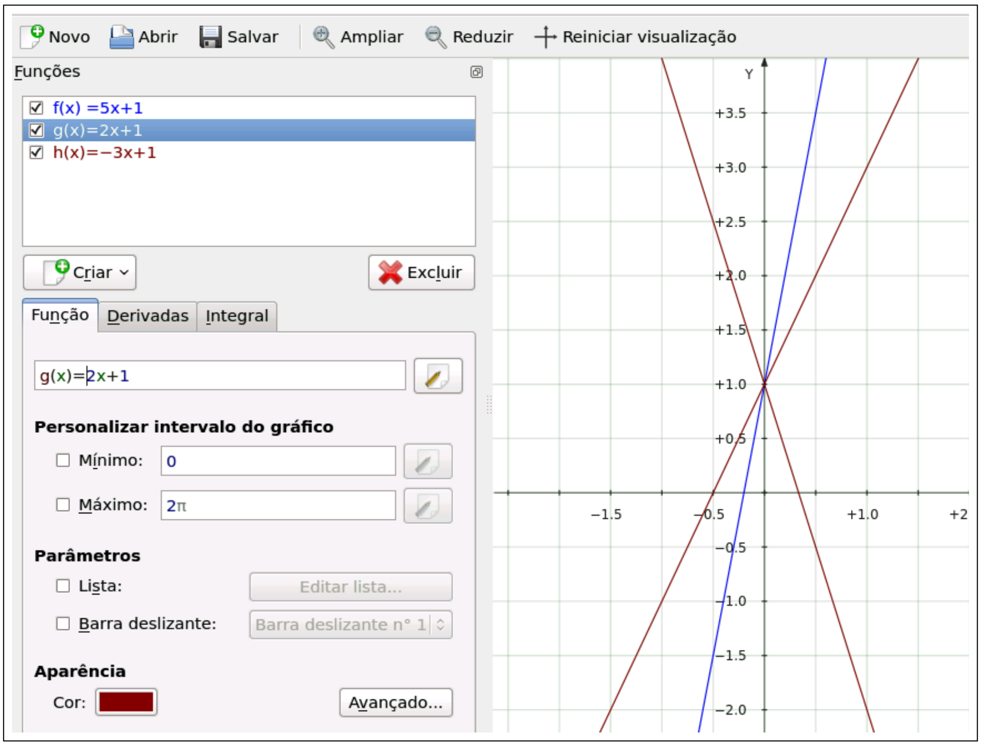
13. A partir da resolução da questão anterior, responda:

a) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?

b) Comparando-se as funções escritas acima, qual principal relação entre elas?

c) Comparando-se os gráficos, qual principal característica pode ser notada?

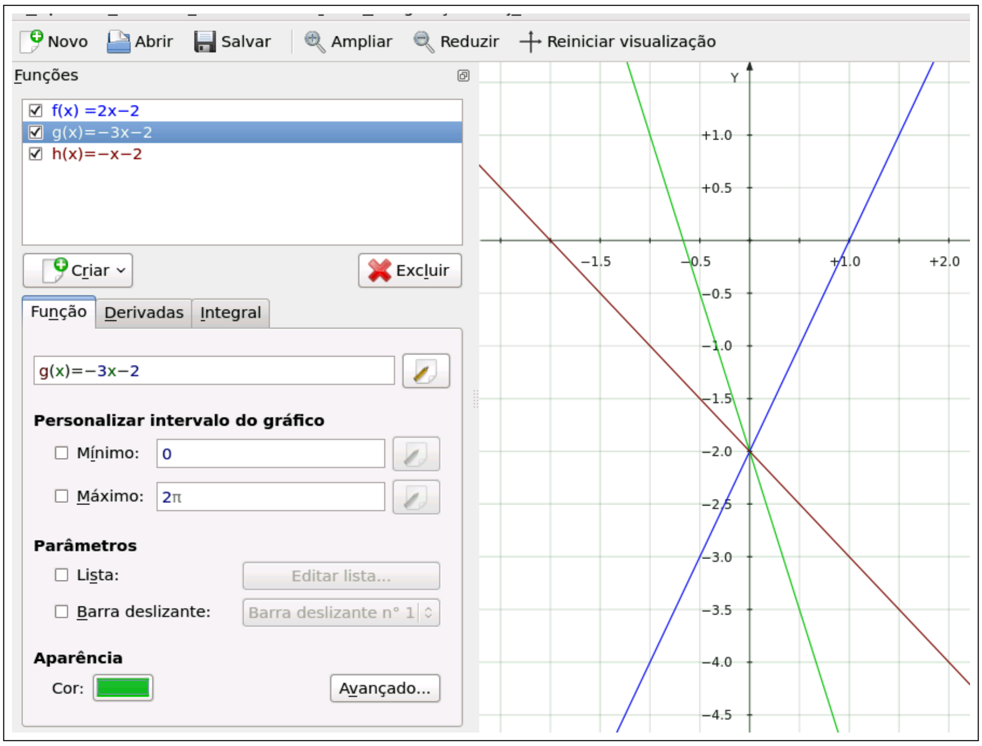
Figura 20 – Função Afim: Atividade II Questões 10



Fonte: Autor

Resultados esperados: Em relação ao parâmetro b, espera-se que o educando perceba que mantendo-se constante o valor de b, as retas das funções construídas intersectam o eixo das coordenadas OY em um mesmo ponto, no nosso caso, na figura 20, intersecta em 1 e, figura 21, em -2, independentemente da inclinação da reta gerada pelo coeficiente a.

Figura 21 – Função Afim: Atividade II Questões 12



Fonte: Autor

5.1.3 Atividade III - Variação do Parâmetro b

Objetivos da atividade III

– Identificar a influência do parâmetro b, considerando o parâmetro a seja um valor fixo da função;

– Relacionar as *translações* de f observadas nos gráficos em relação a variação do parâmetro b;

– Perceber que ocorre um deslocamento em paralelo dos gráficos das funções em relação ao parâmetro b;

– Diferenciar os deslocamentos das funções afins quando o parâmetro $a = 0$ ou quando $a \neq 0$;

Desenvolvimento Didático

1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   a) $f(x) = x + 1$;

   b) $g(x) = x + 2$;

   c) $h(x) = x + 3$;

2. A partir da questão anterior, responda:

    a) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?
    b) Comparando-se as funções escritas acima, o diferencia-se entre elas?
    c) Comparando-se os gráficos da funções, qual principal característica pode ser notada?
    d) Escreva os valores de b de cada função acima.

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    a) $f(x) = -x + 1$;
    b) $g(x) = -x + 3$;
    c) $h(x) = -x + 4$;

4. A partir da questão anterior, responda:

    a) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?
    b) Comparando-se as funções escritas acima, qual principal relação entre elas em relação aos valores de a e b?
    c) Comparando-se os gráficos das funções, qual principal característica pode ser notada?
    d) Escreva os valores de b de cada função acima.

    Resultados esperados: Em relação ao parâmetro b, espera-se que o educando faça a análise e conjecture que mantendo-se constante o valor de a e variando o parâmetro b, as retas das funções construídas se deslocam em paralelo horizontalmente entre elas, para a direita, quanto maior o valor de b como na figura 22 e para esquerda quanto menor o valor b como na figura 23. Ainda, que esse deslocamento é proporcional a diferença do parâmetro b.

5. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

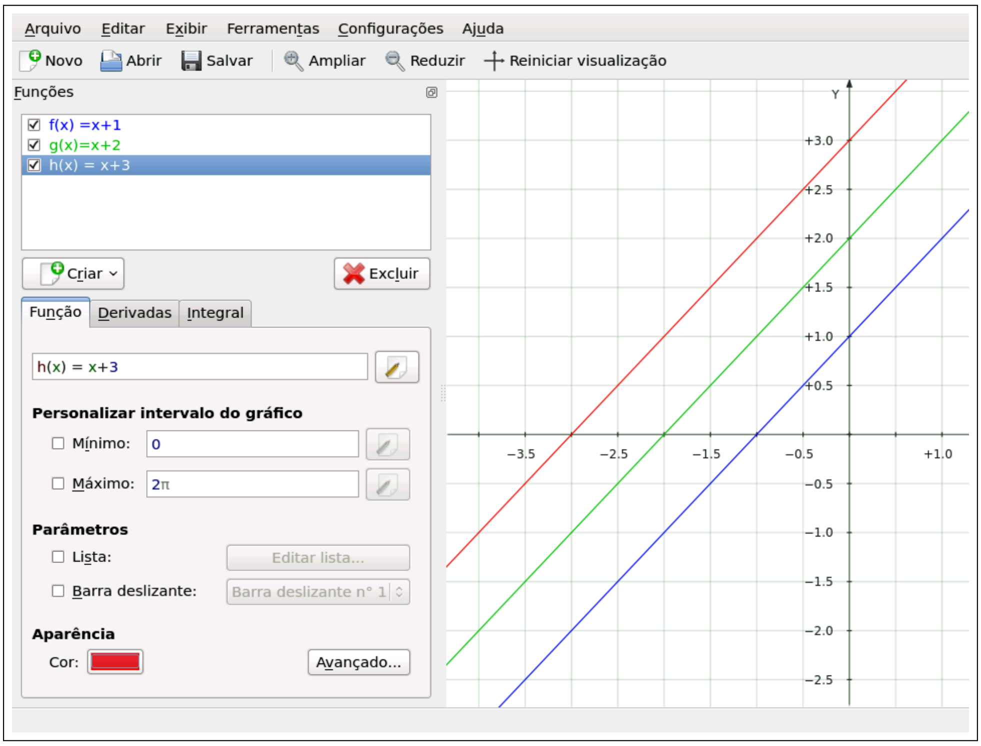
    a) $f(x) = 1$;
    b) $g(x) = 2$;
    c) $h(x) = 3$;

6. A partir da questão anterior, responda:

    a) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?
    b) Comparando-se as funções, qual principal relação entre elas?
    c) Comparando-se os gráficos, qual principal característica pode ser notada?
    d) Escreva os valores de a e b.

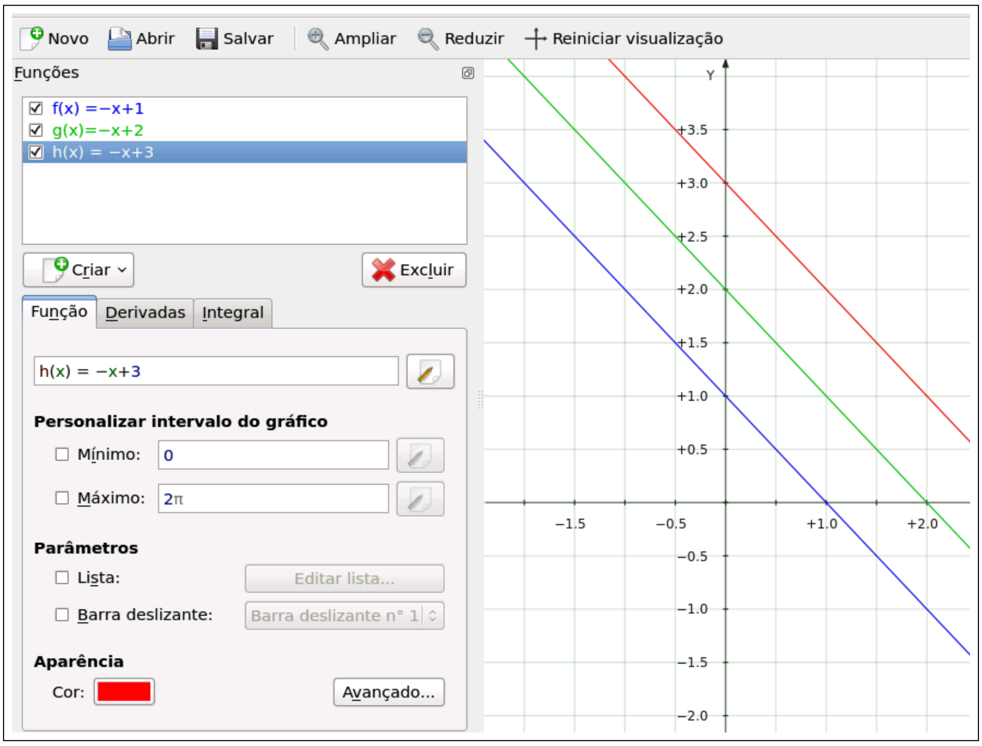
7. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Figura 22 – Função Afim: Atividade III Questões 1



Fonte: Autor

Figura 23 – Função Afim: Atividade III Questões 3



Fonte: Autor

a) $f(x) = -1$;

b) $g(x) = -2$;

c) $h(x) = -3$;

8. A partir da questão anterior, responda:

   a) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?

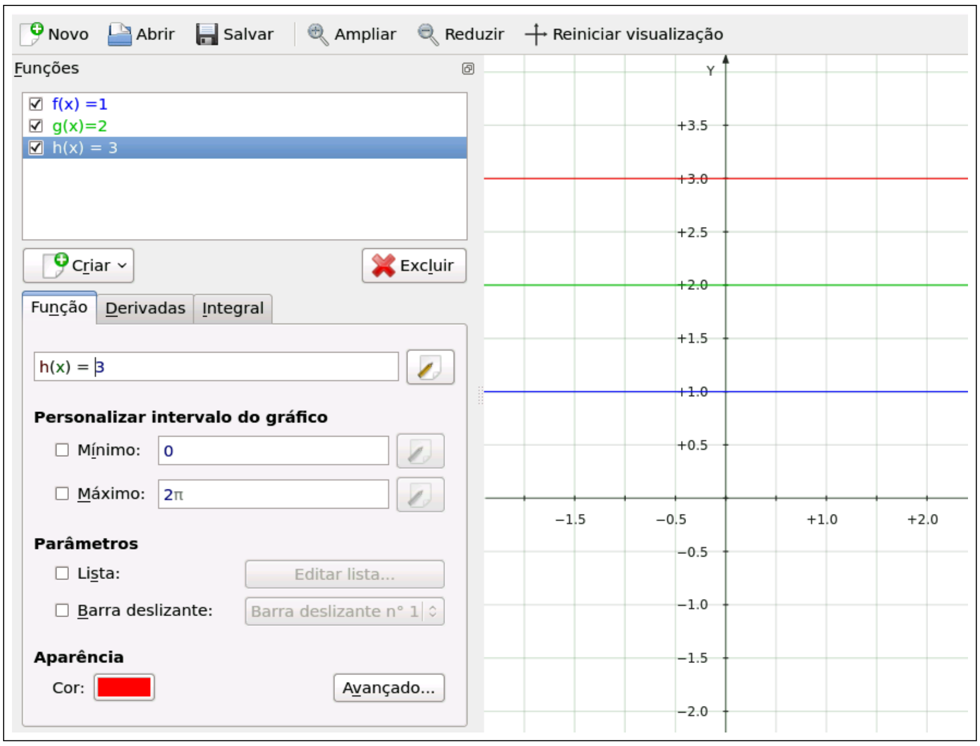
   b) Comparando-se as funções, qual principal relação entre elas?

   c) Comparando-se os gráficos, qual principal característica pode ser notada?

   d) Escreva os valores de a e b.

Resultados prováveis: Em relação ao parâmetro b, espera-se que o educando faça a análise e conjecture que mantendo-se constante o valor de $a = 0$ e variando o parâmetro b, as retas das funções constantes construídas se deslocam verticalmente em paralelo em relação ao eixo OX, para a cima quanto maior o valor de b como na figura 24 e para baixo quanto menor o valor b, mostrado na figura 25.

Figura 24 – Função Afim: Atividade III Questões 5

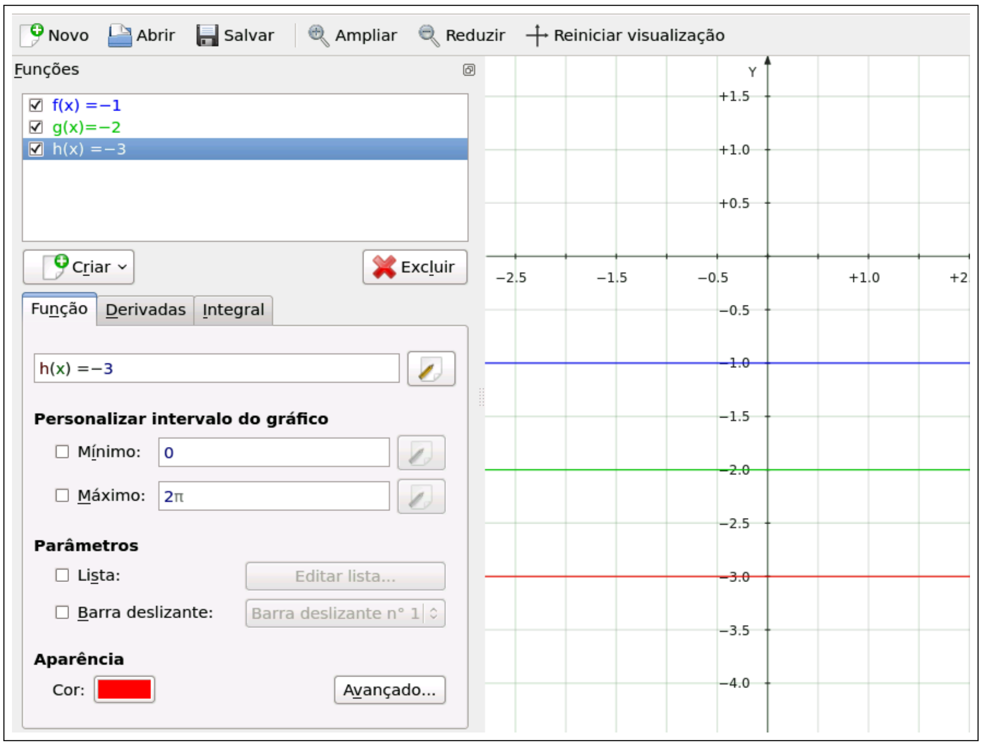


Fonte: Autor

5.2 Proposta de Ensino: Gráficos de funções quadráticas

Para do ensino de Funções Quadráticas, busca-se acrescentar ao conhecimento já construído em sala de aula, uma análise gráfica sobre o comportamento dos coeficientes a,

Figura 25 – Função Afim: Atividade III Questões 5



Fonte: Autor

b e c dentro das funções, variando um dos parâmetros estrategicamente e mantendo-se um valor fixo ao outro parâmetro. Dessa forma, fazer um estudo fundamental sobre as translações e inclinações dos gráficos das funções. Além disso, mostrar a função na forma canônica para o estudo do valor máximo e mínimo da função usando os valores de m e k em $f(x) = a(x - m)^2 + k$, ao mesmo tempo que estudaremos as translações da parábola de f.

Pré-requisitos

Para que os educandos sejam capazes de desenvolver as atividades proposta devem, por hipótese, já ter o conhecimento prévio e:

a) Saber desenvolver o algoritmo básico do software KmPlot para escrever funções e plotá-las na interface;

b) Conhecer a definições e propriedades de funções quadráticas;

c) Reconhecer funções quadráticas na forma canônica;

d) Escrever funções na forma canônica;

5.2.1 Atividade I: Variação do Parâmetro a com $f(x) = ax^2$

Objetivos da atividade - I

– Relacionar a definição de função crescente ou decrescente a condição do parâmetro a;

– Analisar o comportamento das funções afins do tipo $f(x) = ax$ plotadas no KmPlot;

– Observar a influência da parâmetro a com parâmetro $b = 0$ e $c = 0$;

Desenvolvimento Didático

1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    a) $f(x) = x^2$;

    b) $g(x) = -x^2$;

2. A partir da questão anterior, responda:

    a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?

    b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

    c) Qual o valor de a, nas funções acima?

    d) Observando os gráficos qual função apresenta um gráfico com a concavidade para cima?

    e) Observando os gráficos qual função apresenta um gráfico com a concavidade para baixo?

    f) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor máximo?

    g) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor mínimo?

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    a) $f(x) = 3x^2$;

    b) $g(x) = -3x^2$;

4. A partir da questão anterior, responda:

    a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?

    b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

    c) Qual o valor de a, nas funções acima?

d) Observando os gráficos qual função apresenta um gráfico com a concavidade para cima?

e) Observando os gráficos qual função apresenta um gráfico com a concavidade para baixo?

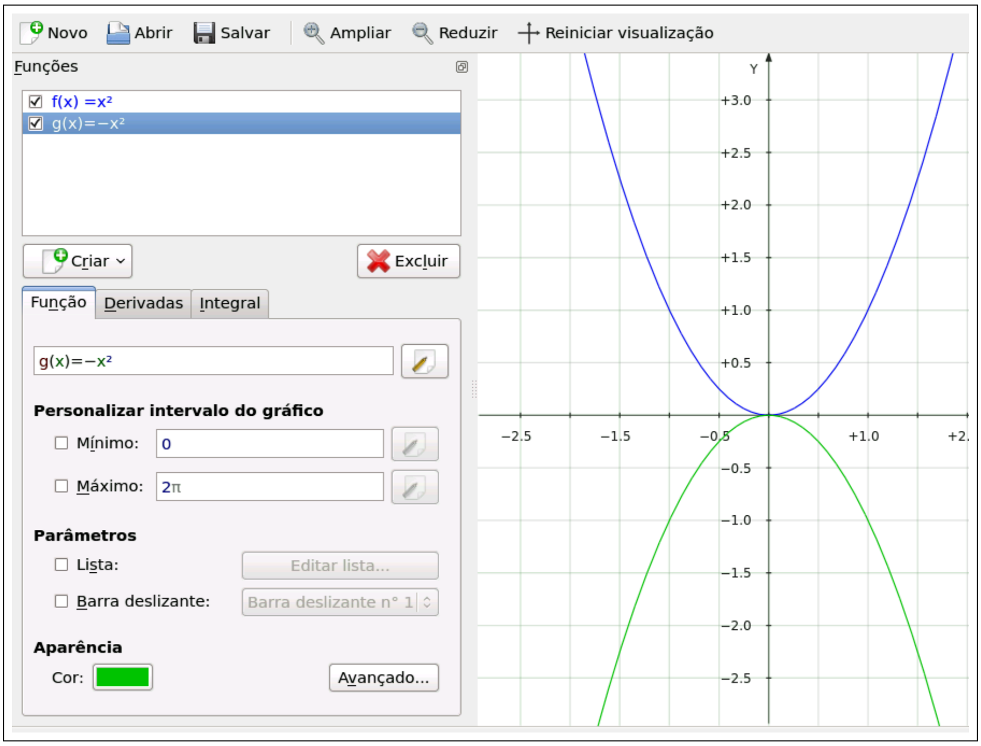
f) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor máximo?

g) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor mínimo?

5. De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo podemos determinar o máximo (Máx) ou mínimo (Mín)

( ) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2}$	( ) $f(x) = 5x^2$	( ) $f(x) = \dfrac{x^2}{3}$
( ) $f(x) = 3x^2$	( ) $f(x) = 2x^2$	( ) $f(x) = x^2$
( ) $f(x) = -x^2$	( ) $f(x) = -2x^2$	( ) $f(x) = -4x^2$

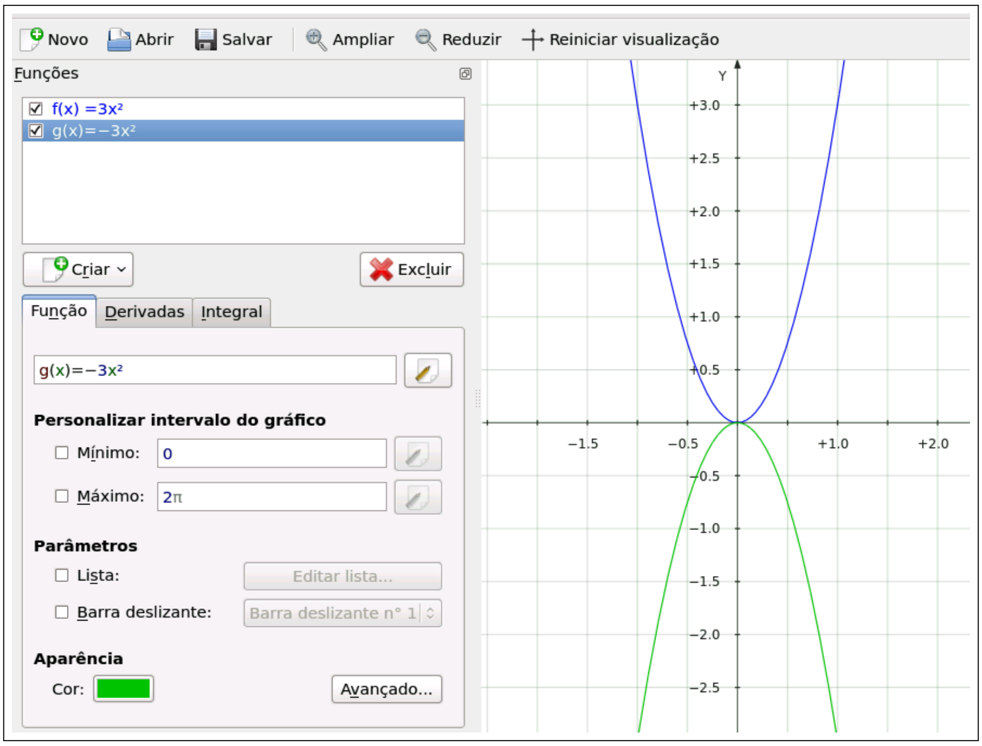
Figura 26 – Função Quadrática: Atividade I - Questão 1



Fonte: Autor

Resultados esperados: a partir da construção e observação dos gráficos, como temos na figura 26 e figura 27, espera-se que o discente faça a análise e conjecture que para todo $a > 0$ é possível determinar seu valor mínimo e a concavidade do seu

Figura 27 – Função Quadrática: Atividade I - Questão 3



Fonte: Autor

gráfico é voltado para cima. Para todo $a < 0$ é possível determinar seu valor máximo e a concavidade do seu gráfico é voltado para baixo.

6. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

    a) $f(x) = x^2$;

    b) $g(x) = 2x^2$;

    c) $h(x) = 3x^2$;

7. A partir da questão anterior, responda:

    a) As funções acima podemos determinar seus valores máximos ou mínimos? Porque?

    b) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?

    c) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

    d) Qual o valor de a, nas funções acima?

    e) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor mínimo?

8. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -x^2$;

b) $g(x) = -2x^2$;

c) $h(x) = -3x^2$;

9. A partir da questão anterior, responda:

    a) As funções acima podemos determinar seus valores máximos ou mínimos? Porque?

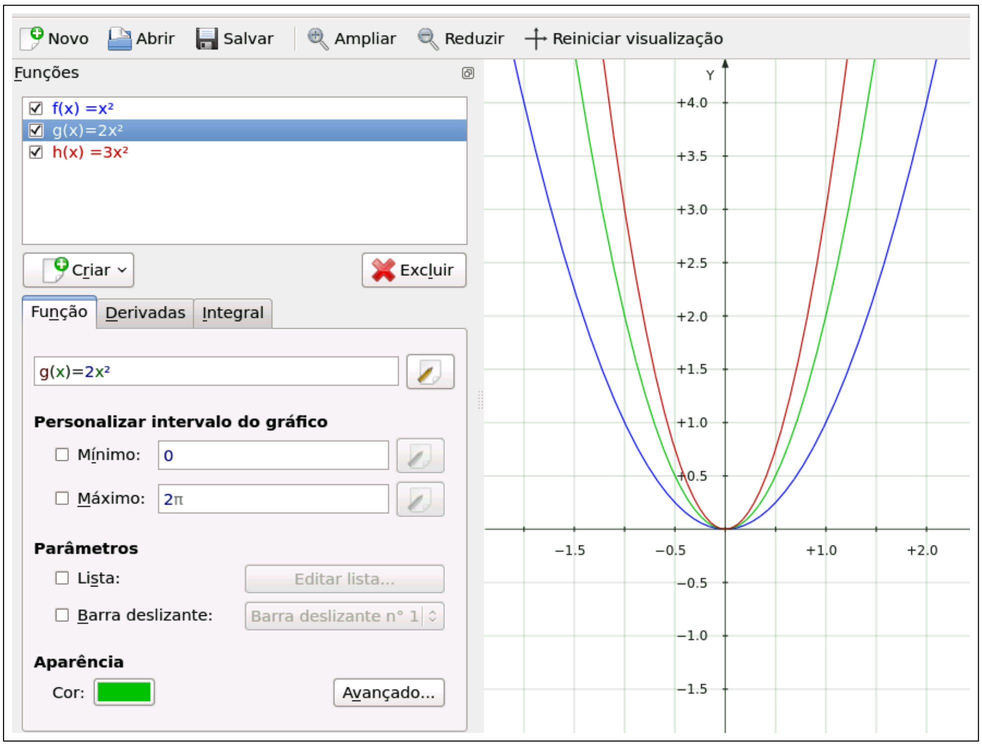
    b) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?

    c) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

    d) Qual o valor de a, nas funções acima?

    e) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor mínimo?

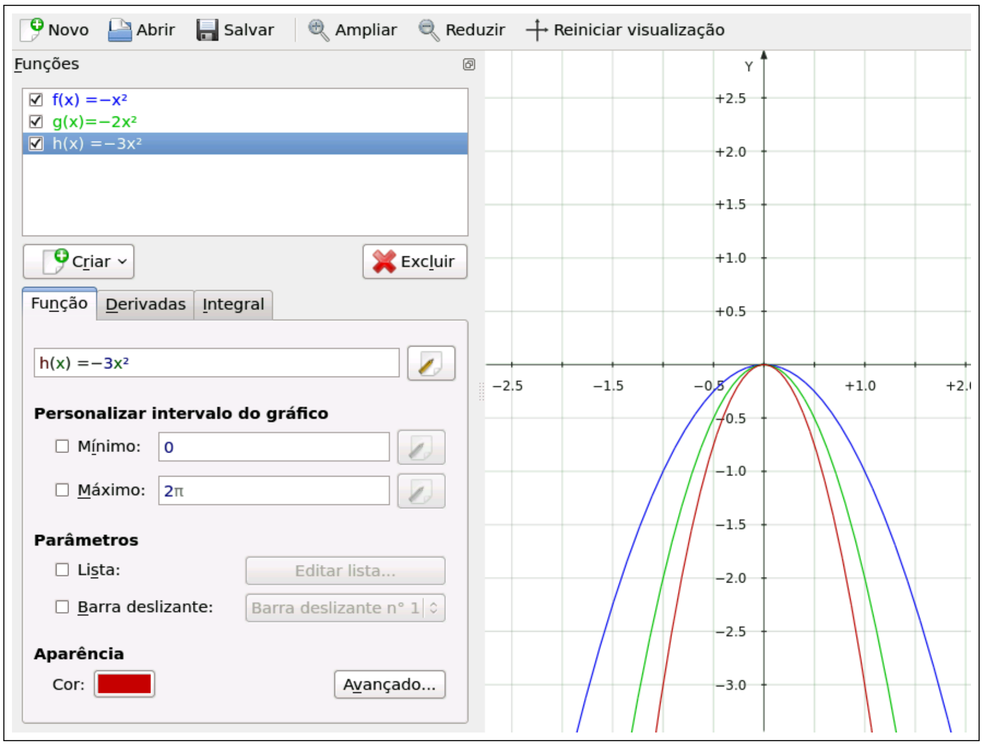
Figura 28 – Função Quadrática: Atividade I Questão 6



Fonte: Autor

Resultados esperados: através da construção e observação dos gráficos, figura 28 e figura 29, espera-se que o discente faça a análise e conjecture que o parâmetro a na função determina a abertura da concavidade da parábola, isto é, quanto maior do valor de a, deve se notar que existe uma maior abertura da parábola da função f em relação ao eixo OY.

Figura 29 – Função Quadrática: Atividade I Questão 8



Fonte: Autor

5.2.2 Atividade II: Variação do Parâmetro a e c com $b = 0$

Objetivos da atividade II

– Conceber que o parâmetro c fixo, com $b = 0$, ($c = k$, na forma canônica) é ponto em comum entre os gráficos das funções que intersectam o eixo OY.

– Conceber que o parâmetro a fixo, com $b = 0$, ($c = k$, na forma canônica) é ponto que intersectam o eixo OY no máximo ou mínimo.

– Analisar o comportamento das funções quadráticas do tipo $f(x) = ax^2 + c = ax^2 + k$ plotadas no KmPlot;

– Reconhecer que para todo $b = 0$, c é o máximo quando $a < 0$ e mínimo quando $a > 0$

– Observar a influência da parâmetro a, considerando o parâmetro c um valor fixo;

Desenvolvimento Didático

1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   a) $f(x) = x^2 + 1$;

   b) $g(x) = 2x^2 + 1$;

2. A partir da questão anterior, responda:

a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?
b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?
c) Qual o valor de a, nas funções acima?
d) Observando os gráficos qual apresenta um gráfico com a concavidade para cima?
e) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor máximo ou mínimo?

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = -x^2 + 1$;
b) $g(x) = -2x^2 + 1$;

4. A partir da questão anterior, responda:

a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?
b) Comparando-se os gráficos das funções, quais diferenças geométricas podem ser notadas?
c) Qual o valor de a, nas funções acima?
d) Observando os gráficos qual apresenta um gráfico com a concavidade para cima?
e) Observando os gráficos decida e escreva qual função é possível determinar o valor máximo ou mínimo?

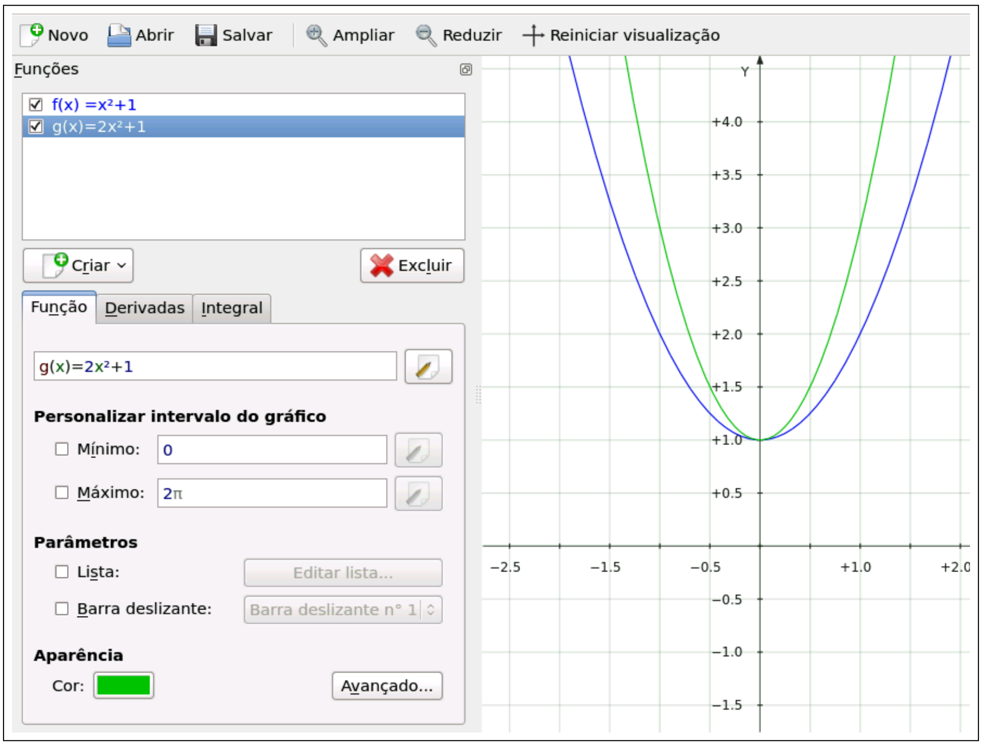
5. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2 + 1$;
b) $g(x) = x^2 + 2$;

6. A partir da questão anterior, responda:

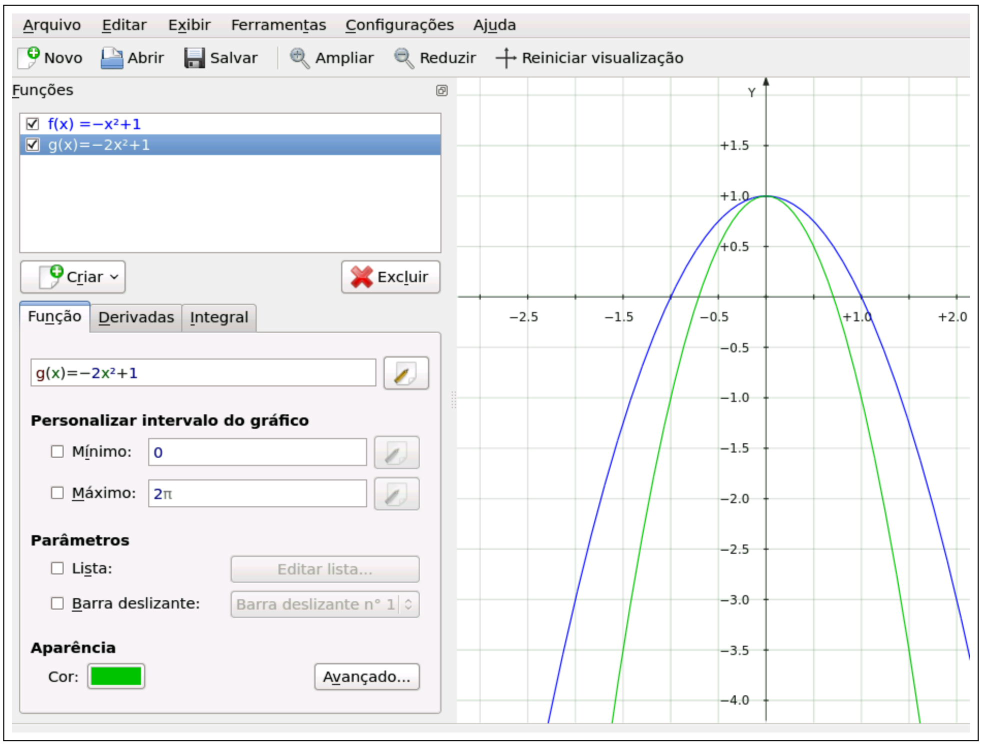
a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?
b) Comparando-se os gráficos das funções, quais comparações geométricas podem ser notadas?
c) Qual o valor de c, nas funções acima?
d) Os gráficos possuem concavidade para cima ou para baixo? Porque?
e) Observando os gráficos decida e determine o valor máximo ou mínimo das funções?

Figura 30 – Função Quadrática: Atividade II - Questão 1



Fonte: Autor

Figura 31 – Função Quadrática: Atividade II - Questão 3



Fonte: Autor

7. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   a) $f(x) = -x^2 - 1$;

   b) $g(x) = -x^2 - 2$;

8. A partir da questão anterior, responda:

   a) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças podem ser notadas?

   b) Comparando-se os gráficos das funções, quais comparações geométricas podem ser notadas?

   c) Qual o valor de c, nas funções acima?

   d) Os gráficos possuem concavidade para cima ou para baixo? Porque?

   e) Observando os gráficos decida e determine o valor máximo ou mínimo das funções?

9. De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo podemos determinar o máximo (Máx) ou mínimo (Mín)

( ) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 1$	( ) $f(x) = 5x^2 - 5$	( ) $f(x) = 4 - x^2$
( ) $f(x) = 3x^2 - 4$	( ) $f(x) = 1 + 2x^2$	( ) $f(x) = -2x^2 + 2$
( ) $f(x) = -x^2 + 1$	( ) $f(x) = -x^2 - 1$	( ) $f(x) = -4x^2 + 2$

Resultados esperados: a partir da construção e observação dos gráficos das fig. 30 e fig. 31, espera-se que o discente faça a análise e conjecture que sempre que $b = 0$, o parâmetro c indica o ponto em que a função intersecta o eixo OY, figura 32 e figura 33, e como $m = 0$ esse é o valor máximo f $(a < 0)$ e o valor mínimo de f $(a > 0)$.

5.2.3 Atividade III - Variação do Parâmetro m com $k = 0$

Objetivos da atividade III

– Identificar a influência do parâmetro m, escrito da forma canônica $f(x) = a(x - m)^2$;

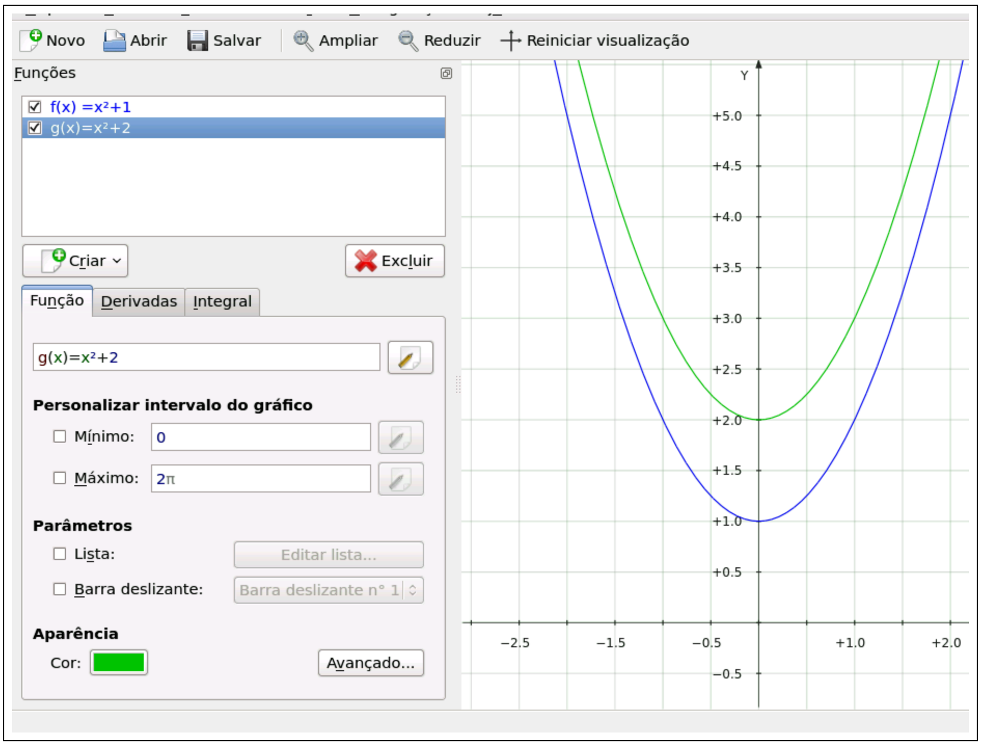
– Relacionar as *translações horizontais* de f observadas nos gráficos em relação a variação do parâmetro m;

– Perceber que ocorre um deslocamento em paralelo ao eixo OY dos gráficos das funções em relação ao parâmetro m;

Desenvolvimento Didático

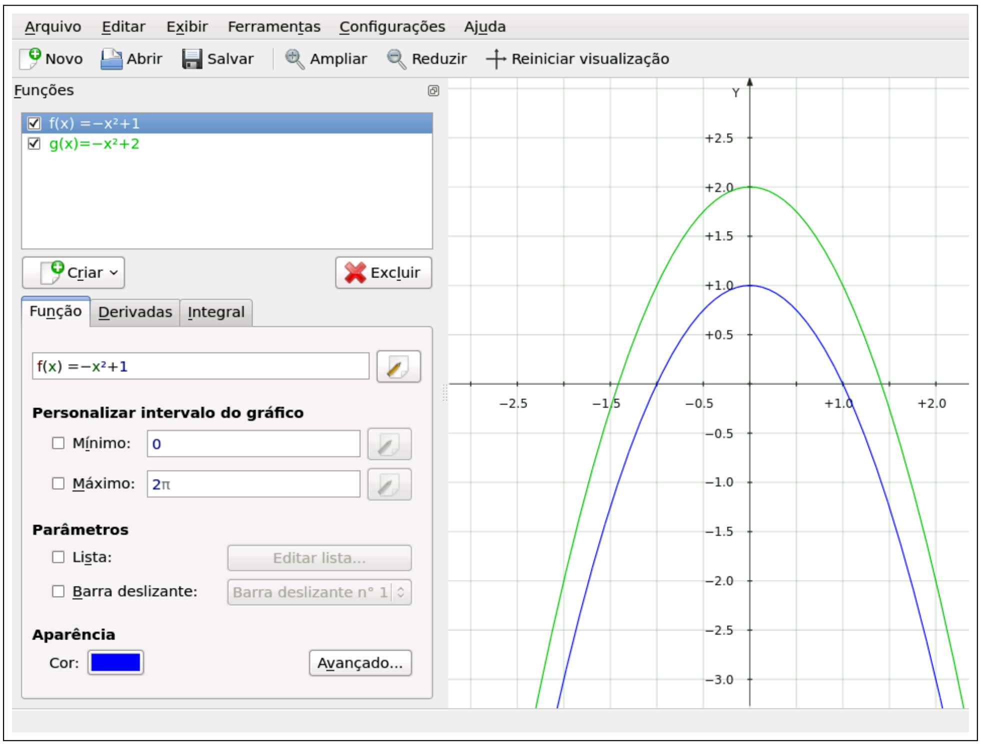
1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

Figura 32 – Função Quadrática Atividade II - Questão 5



Fonte: Autor

Figura 33 – Função Quadrática Atividade II - Questão 7



Fonte: Autor

a) $f(x) = 2x^2$;
b) $g(x) = 2(x+1)^2$;
c) $h(x) = 2(x+2)^2$;

2. A partir da questão anterior, responda:
    a) Comparando-se as funções escritas acima, determine o valor de a, m e k?
    b) Comparando-se os gráficos da funções, qual principal característica pode ser notada?
    c) Observando os gráficos, qual o valor mínimo da função?

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
    a) $f(x) = 3x^2$;
    b) $g(x) = 3(x-1)^2$;
    c) $h(x) = 3(x-2)^2$;

4. A partir da questão anterior, responda:
    a) Comparando-se as funções escritas acima, determine o valor de a, m e k?
    b) Comparando-se os gráficos da funções, qual principal característica pode ser notada?
    c) Observando os gráficos, qual o valor mínimo da função?

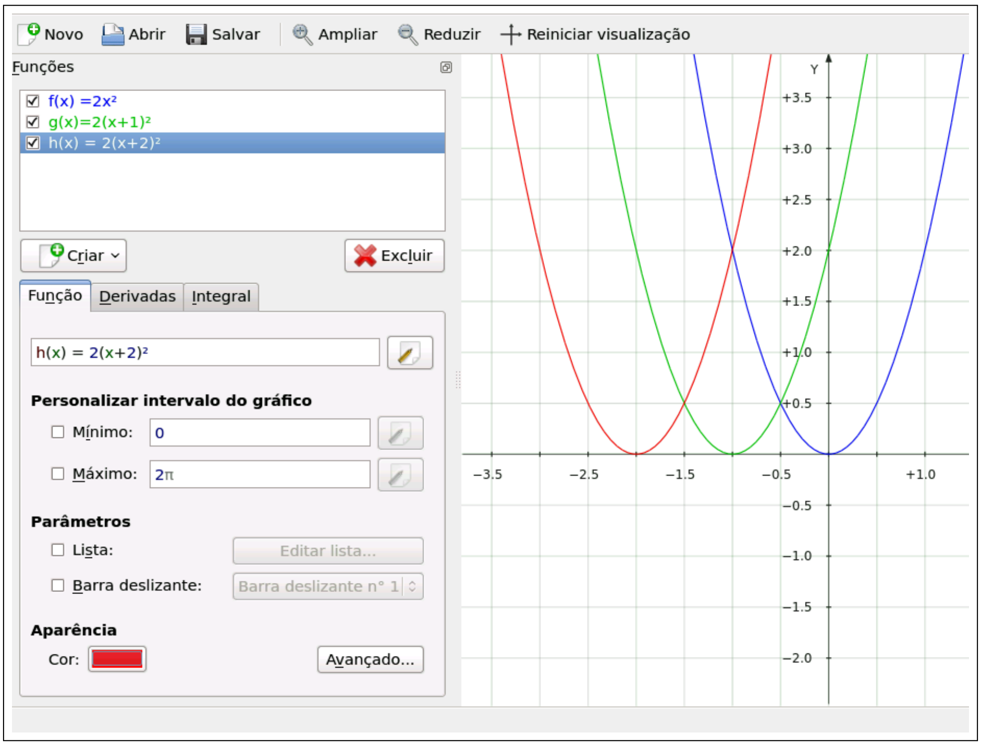
5. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
    a) $f(x) = 2(x+1)^2 + 1$;
    b) $g(x) = 2(x+2)^2 + 1$;
    c) $h(x) = 2(x+3)^2 + 1$;

6. A partir da questão anterior, responda:
    a) Comparando-se as funções escritas acima, determine o valor de a, m e k?
    b) Comparando-se os gráficos da funções, qual principal característica pode ser notada?
    c) Observando os gráficos, qual o valor mínimo da função?
    d) Observando os gráficos, em que o valor mínimo da função?

7. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
    a) $f(x) = -3(x-1)^2 + 1$;
    b) $g(x) = -3(x-2)^2 + 1$;
    c) $h(x) = -3(x-3)^2 + 1$;

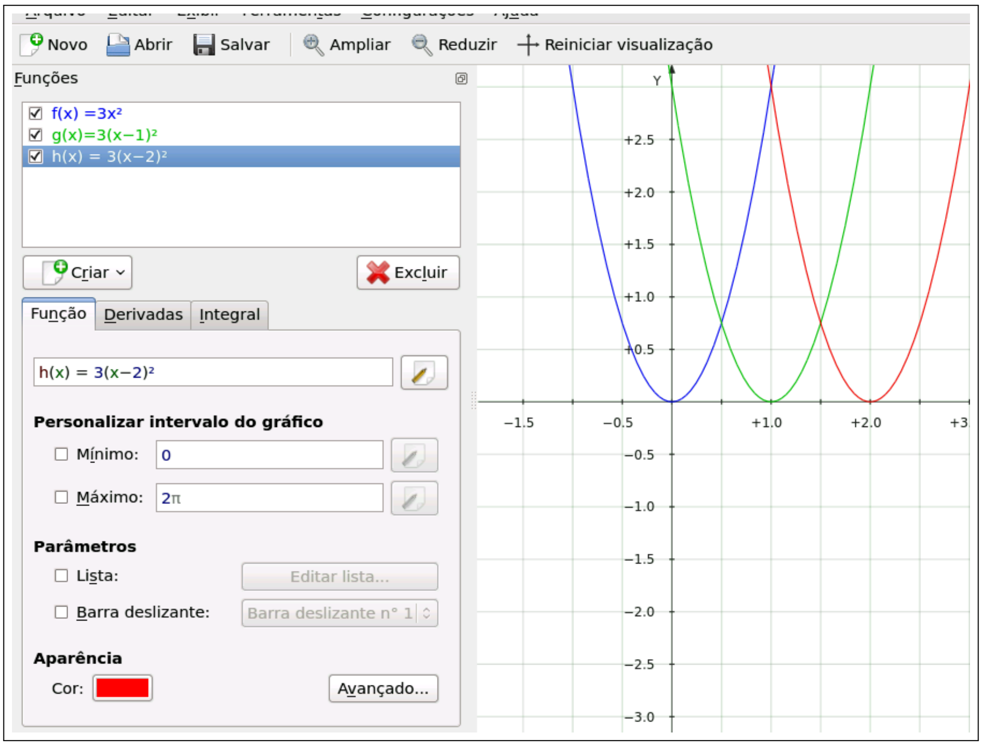
8. A partir da questão anterior, responda:

Figura 34 – Função Quadrática: Atividade III Questão 1



Fonte: Autor

Figura 35 – Função Quadrática: Atividade III Questões 3

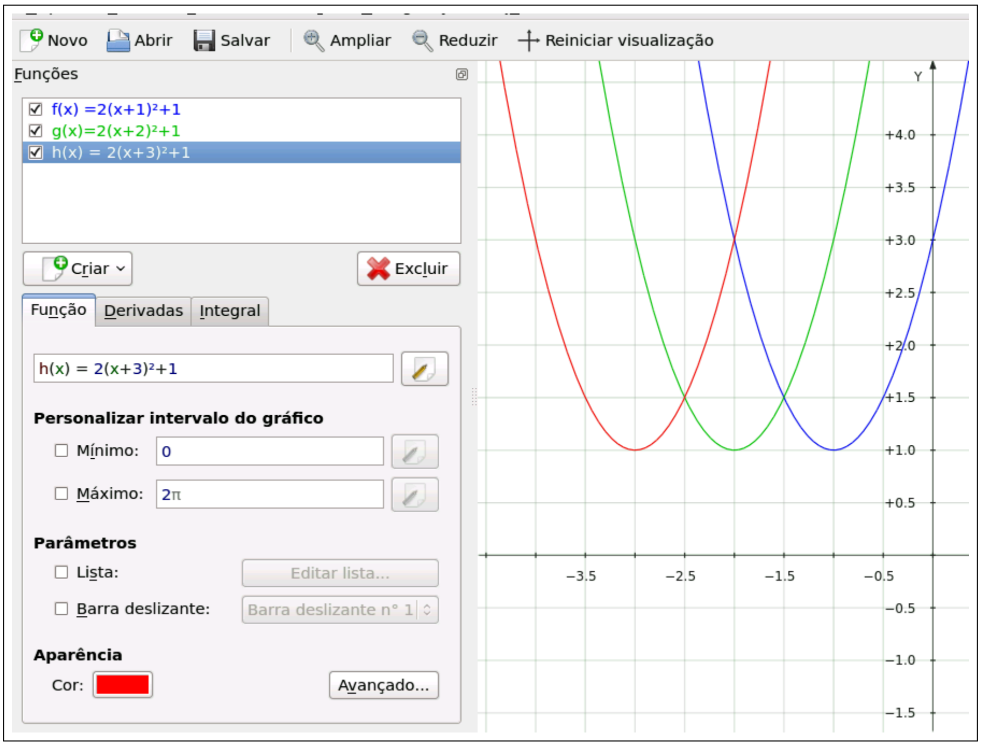


Fonte: Autor

a) Comparando-se as funções escritas acima, determine o valor de a, m e k?

b) Comparando-se os gráficos da funções, qual principal característica pode ser notada?

Figura 36 – Função Quadrática: Atividade III Questão 5



Fonte: Autor

9. De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo, determine o máximo (Máx) ou mínimo (Mín)

$f(x) = -2(x-2)^2 + 1$:

$f(x) = 3(x+2)^2 + 6$:

$f(x) = (x-1)^2 + 3$:

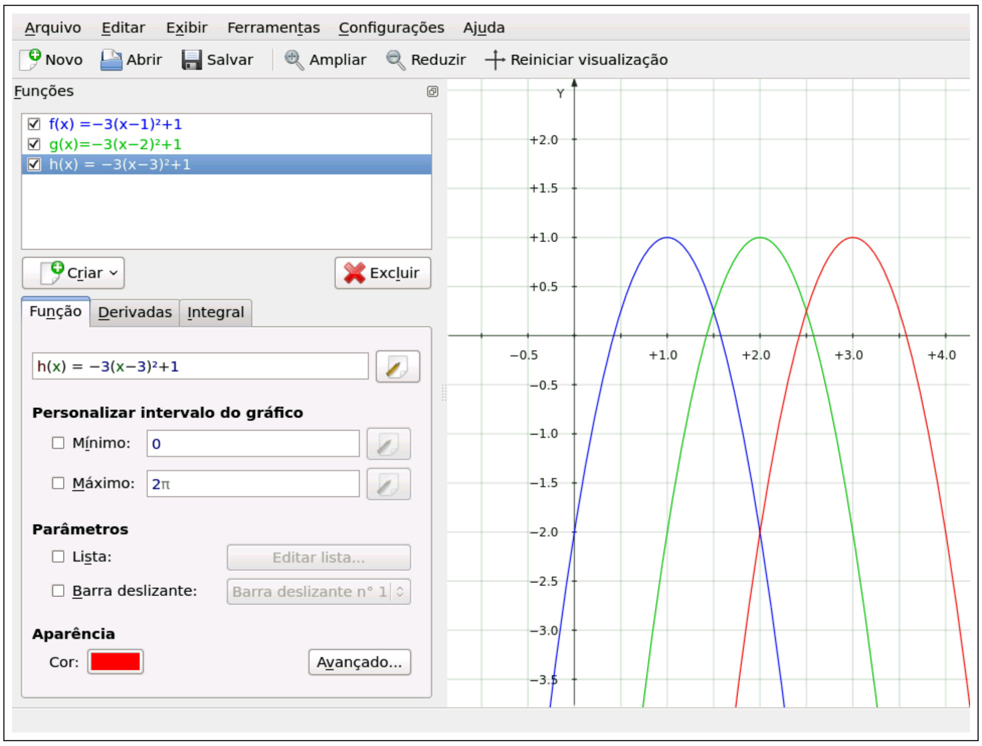
$f(x) = (x-3/2)^2 + 4$:

$f(x) = 4(x+1/2)^2 + 1$:

$f(x) = -4(x-1)^2 + 3$:

Resultados esperados: Em relação ao parâmetro m, espera-se que o educando faça a análise e conjecture que mantendo-se constante o valor de a e m, variando o parâmetro m, as parábolas das funções construídas se deslocam em paralelo horizontalmente. Na figura 34 e figura 35, temos o valor de $k = 0$, então, o vértice da parábola encontra-se no eixo OX. Já nas figuras 36 e 37, tem-se $k = 1$, assim, a parábola se desloca horizontalmente, com os vértices em 1.

Figura 37 – Função Quadrática: Atividade III Questão 7



Fonte: Autor

5.3 Relato da experiência em sala

Dentre os objetivos da proposta, houve a nível de experimentação, a realização das atividades na Escola Estadual Professor José Ribamar Pestana, localizada na Av. Palmira Miranda Andrade, nº 540, Bairro Remédios no município de Santana, estado do Amapá, com duas turmas. Uma turma “A” de primeiro ano do ensino médio regular com 15 alunos e outra turma “B” de segundo ano do ensino médio com 15 alunos.

A dinâmica de desenvolvimento foi a seguinte:

– Observar a aula sobre funções;

– Organização do LIED;

– Encaminhar os alunos ao LIED;

– 1º Momento: apresentar o software KmPlot, sua interface e os comando básicos;

– 2º Momento: realizar as atividades respectivas para 1º e 2º anos;

– Correção das atividades;

– Analisar dados;

Com a execução da proposta de ensino tornou-se fundamental para a verificação dos objetivos alcançados e pontos que podem ser melhorados na produção final da proposta. Logo no primeiro encontro com a turma “A” observou-se uma aula sobre funções afins desenvolvida pelo professor regente da turma. Na oportunidade, foram abordados os conceitos de plano cartesiano, par ordenado, coeficientes angular e linear da reta, funções crescentes e decrescentes.

Um outro acompanhamento foi realizado com a turma “B”, que vinham desenvolvendo o estudo de funções quadráticas. Na oportunidade, foi apresentado ao professor da turma a necessidade de trabalhar alguns elementos para a realização da proposta, como Forma Canônica do Trinômio.

Num segundo momento, o professor realizou atividades no quadro referentes ao conteúdo. Após a correção das atividade, encaminhamos os alunos ao LIED, que em vinte minutos foi apresentado o software Kmplot através do retroprojetor digital, demonstrando aos alunos o algoritmo básico para a construção gráfica de funções.

Em uma outra aula, voltamos a ir para o LIED, com o objetivo de executar a proposta de atividades, na qual, o professor regente da turma apenas acompanhou os alunos e observou a produção das atividades distribuídas, já que o objetivo da proposta e levar os alunos a analisar e conjecturar a partir de suas observações.

Inicialmente, os alunos apresentaram um maior interesse em se deslocar para o LIED e demonstraram certa habilidade para manusear o computador, mesmo nunca tendo utilizado o software, a facilidade que a interface apresenta tornou a construção gráfica muito simples.

Dessa forma, no primeiro horário da disciplina de matemática, os alunos foram levados ao LIED, e em duplas, começaram com a resolução da atividade I, na qual deveriam plotar as funções no KmPlot, observar e resolver as tarefas da atividade I a atividade III.

As turmas desenvolveram rapidamente o algoritmo para escrever as funções afins e quadráticas no KmPlot, porém, houve uma pequena demora para responder as questões que se seguiam. De acordo com que as atividades eram produzidas, os alunos começaram a resolver as questões com certa facilidade e menos tempo.

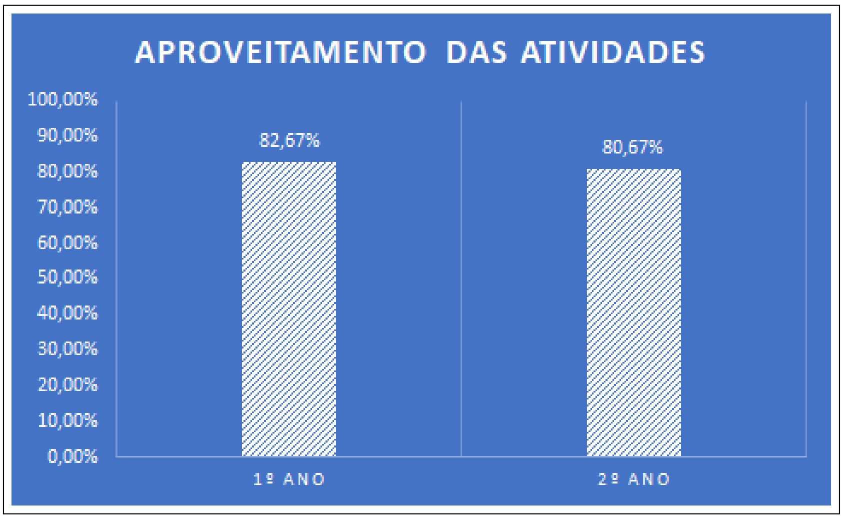
Ao final da realização das atividades, perguntado sobre o desenvolvimento das atividades, alguns alunos disseram que o entendimento sobre o assunto tornará mais simples do que necessariamente se especulava na aula do professor.

5.3.1 Avaliação da experiência

Após a aplicação das atividades, foram feitos a correção e tendo um resultado do aproveitamento dos alunos em relação a proposta. Os resultados foram tabulados e o rendimento das turmas estão na figura 38.

O rendimento da turma do primeiro ano, de acordo com a figura 38, de 82,67% foi levemente maior que a turma do segundo ano que apresentou um rendimento de

Figura 38 – Aproveitamento das atividades



Fonte: Autor

80,67% tendo em vista, principalmente, que a função quadrática apresenta elementos que necessita um domínio maior dos alunos que a função afim. Contudo, as turmas em geral apresentaram um aproveitamento satisfatório, comparado a atividades tradicionais.

De forma resumida, podemos elencar alguns pontos:

a) Pontos Positivos encontrados:
   - A velocidade e agilidade com que os alunos se adaptaram para realizar as atividades;
   - O interesse dos alunos em participarem das atividades;
   - O interesse do professor da turma em conhecer as propostas e o software;
   - A dinâmica das atividades em relação ao desenvolvimento.

b) Pontos Negativos encontrados:
   - A falta de preparo da escola em agilizar os ambientes como LIED para a utilização do professor;
   - A deficiência do ensino da matemática em relação a leitura de definições, proposições feitas pelos alunos;
   - O desconhecimento do sistema operacional (Linux Educacional) presentes nos computadores do laboratório;
   - O despreparo técnico em manusear os computadores que poucos alunos apresentam, contudo, são manuseios básicos.

Conclusão

O estudo de funções é um conteúdo fundamental para o currículo do ensino médio e na experiência realizada com a turma do primeiro ano e segundo ano do ensino médio regular da Escola Estadual Professor José Ribamar Pestana, ao encaminhar os alunos para o Laboratório de Informática, para desenvolver as atividades da Proposta de Ensino, observamos que alunos que tinham dificuldades na construção e leitura de gráficos de funções e nos conteúdos de matemática trabalhados em aulas tradicionais (aulas em que o professor não utiliza recursos computacionais, por exemplo). Mas, a partir do momento que os discentes utilizam o computador através de softwares apropriados para o estudo de funções, conseguem atingir os objetivos das atividades propostas com certa facilidade. Também o interesse e envolvimento dos alunos nos leva a repensar sobre o nosso papel como docente de matemática, uma das disciplinas que necessita de abstrações ao mesmo tempo que exige um uma linguagem rebuscada.

Quanto ao professor, assim como do aluno, também exige um domínio mais amplo do conteúdo que está sendo trabalhado em sala, para que ele possa sempre conduzir (ou reconduzir) os seus alunos aos objetivos previstos para aquela aula. Quanto ao aluno, este deve estar motivado para a realização das atividades que, algumas vezes, não é interessante para ele. Com o objetivo de minimizar os efeitos negativos, é fundamental que o planejamento das aulas deve ser realizado com muito cuidado, para que o professor não perca o controle da aula no laboratório, destacando o controle do tempo também para cada etapa da aula e a ordenação dos questionamentos que nortearão as ações dos alunos ao realizar as atividades propostas.

Por fim, espera-se que a proposta de ensino construída sob a perspectiva da utilização de softwares matemáticos seja rigorosamente estudada, estrategicamente construída e didaticamente acompanhada pelo professor para garantir o aproveitamento das ferramentas computacionais em sua plenitude, alcançando os objetivos do conteúdo estudado. Outro aspecto importante é que o docente, mesmo não sendo o responsável pela construção da proposta, seja capaz de compreender todos os passos da proposta para garantir seu efeito de aprendizagem.

Referências

BAUMGART, J. k. *História da Álgebra*. Trad.: Hygino h. domingos. São Paulo: Tópicos de História da Matemática para o uso em sala - Editora Atual, 1992. Citado na página 16.

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Habilidades do século xxi. Universidade Federal Fluminense, 2008. Disponível em: <www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume6/UM_BREVE_HISTRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNO.pdf>. Acesso em: 28 de maio de 2017. Citado na página 18.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher: [s.n.], 2010. Citado 5 vezes nas páginas 14, 15, 16, 17 e 18.

BRASIL, M. da Educação e D. *Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's*. Brasília - DF: [s.n.], 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf/>. Acesso em: 12 junho de 2015. Citado na página 19.

DEMO, P. Habilidades do século xxi. B. Téc. Senac: a R. Educ. Prof, maio/agosto 2008. Disponível em: <www.oei.es/pdf2/habilidades-seculo-xxi.pdf>. Acesso em: 28 de maio de 2015. Citado na página 19.

INEP, I. N. de Estudos e P. E. A. T. *Notas Estatísticas - Censo Escolar 2016*. Brasília - DF: [s.n.], 2016. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/censo_escolar/notas_estatisticas/2017/notas_estatisticas_censo_escolar_da_educacao_basica_2016.pdf>. Acesso em: 02 maio de 2017. Citado na página 20.

INEP, I. N. de Estudos e P. E. A. T. História. In: _____. Brasília - DF: [s.n.], 2017. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/historia>. Acesso em: 02 maio de 2017. Citado na página 20.

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro – RJ: SBM - 8ª Ed., 2005. Citado 5 vezes nas páginas 22, 23, 24, 27 e 28.

MACIEL, P. R. C. *A construção do conceito de função através da história da matemática*. Rio de Janeiro: Dissertação (Mestrado) CEFET - Rio, 2011. Citado na página 14.

MELO, G. da R. A inserção do software kmplot na aprendizagem de funções afim e quadrática. Centro Universitário Univates, 2013. Disponível em: <https://www.univates.br/bdu/bitstream/10737/595/1/2013GerciliodaRochaMelo.pdf>. Acesso em: 02 de março de 2017. Citado na página 20.

MILIES, C. P. Breve história da Álgebra abstrata. Instituto de Matemática e Estatística - II Bienal Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/M18.pdf>. Acesso em: 28 de maio de 2017. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

MöLLER, K.-D.; RODRIGUES, P.; SAXTON, D. Manual do kmplot. KDE-EDU: http://edu.kde.org/, São Paulo, 2004. Disponível em: <https://docs.kde.org/trunk5/pt_BR/kdeedu/kmplot/kmplot.pdf>. Acesso em: 02 de julho de 2016. Citado na página 21.

PEREIRA, V. M. C. História da matemática - plimpton 322. Instituto do Noroeste Fluminense de Educa¸c~ao Superior, 2010. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/profvinicius/plimpton322_1.pdf>. Acesso em: 02 de julho de 2016. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.

RIBEIRO, D. Galileo galilei. Revista de Ciência Elementar, V.2, Núm.04, 2004. Disponível em: <https://www.fc.up.pt/pessoas/jfgomes/pdf/vol_2_num_4_94_art_galileoGalilei.pdf>. Acesso em: 01 de março de 2017. Citado na página 16.

ROQUE, T. M.; CARVALHO, J. B. P. de. *Tópicos de História da Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 1ª Edição, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 16.

SILVA, R. de Abreu e. Funções quadráticas e suas aplicações no ensino médio. 2013. 53 f. IMPA - Dissertação (Mestrado em Matemática) Rio de Janeiro, 2013. Disponível em: <https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/ramon_abreu.pdf>. Acesso em: 01 de maio de 2017. Citado na página 25.

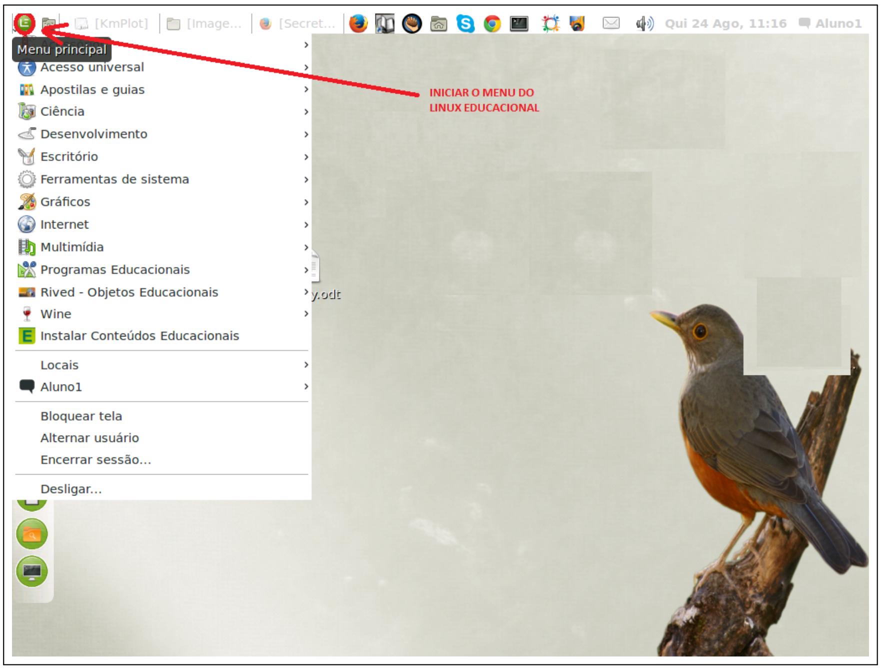
Apêndices

APÊNDICE A – Tutorial Básico para uso do KmPlot

Para iniciar o KmPlot, ao iniciar o Linux Educacional, basta clicar no **LE - Menu Principal** no canto direito da área de trabalho de acordo com a figura 39.

Esse botão, iniciará o menu básico no Linux Educacional, no caso estamos usando a versão 5.0 do Linux Educacional.

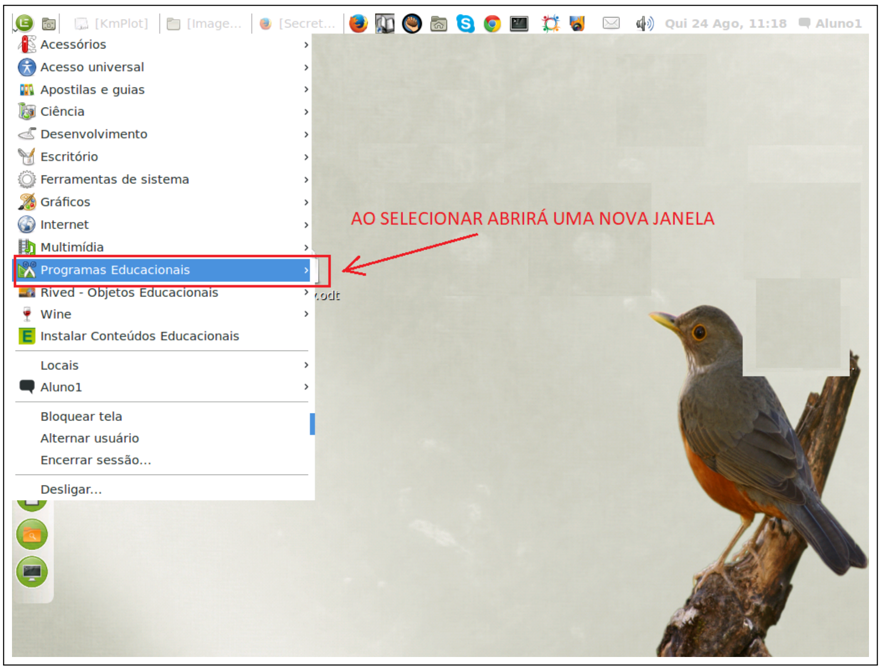
Figura 39 – Iniciar KmPlot



Fonte: Autor

Dentro do menu inciar, temos que localizar, a barra de “Programas Educacionais” e selecionar com o ícone do mouse de acordo com a figura 40.

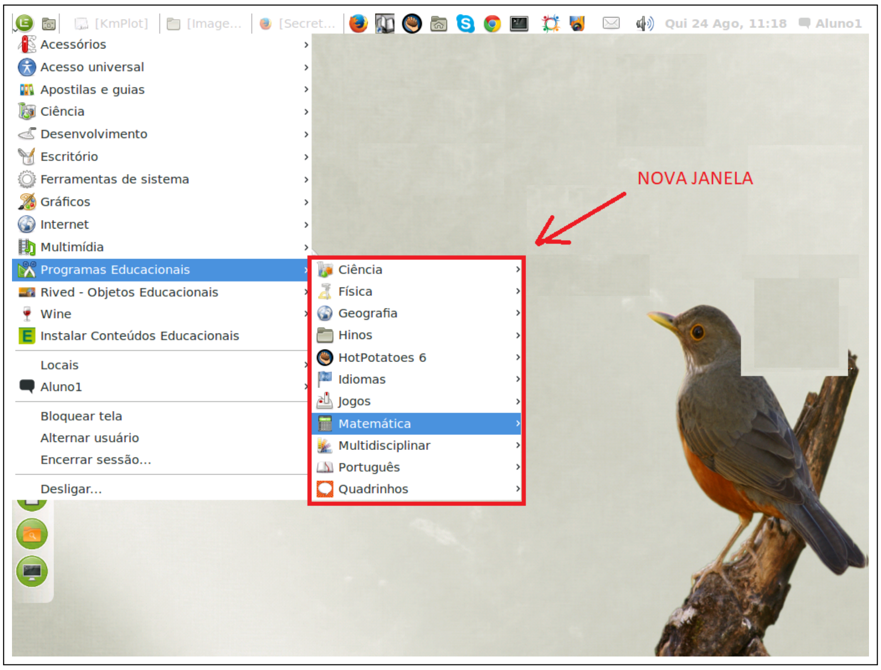
Figura 40 – Iniciar KmPlot



Fonte: Autor

Após, abrirá uma nova janela, figura 41.

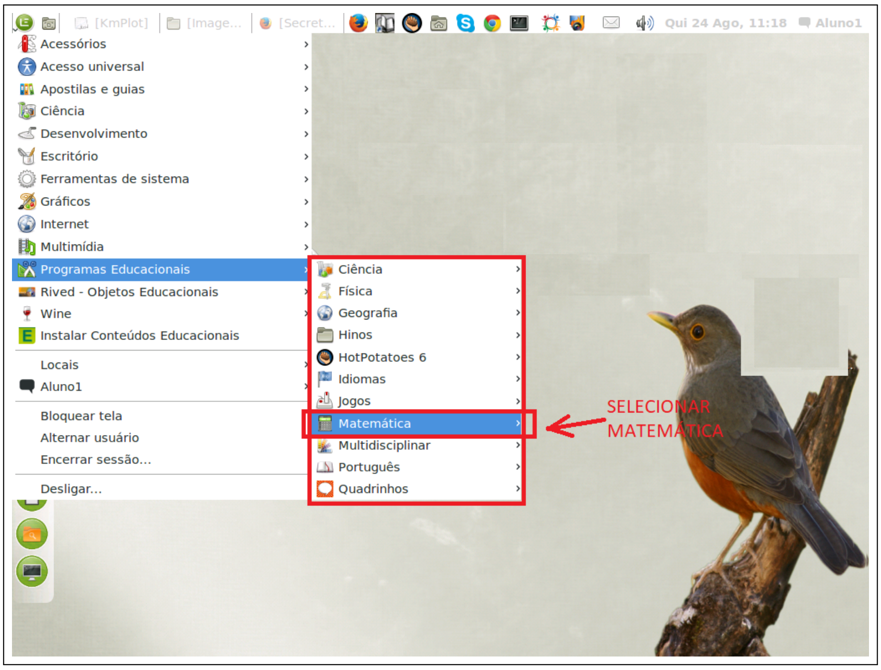
Figura 41 – Iniciar KmPlot



Fonte: Autor

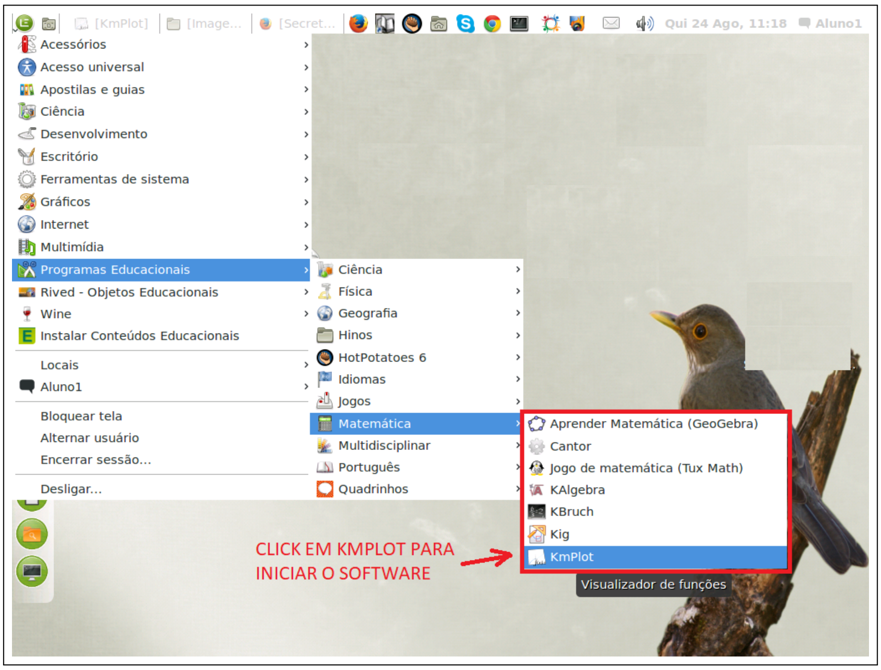
Nessa nova janela, localize “matemática”, figura 42. Abrirá mais uma janela, localize nosso software “KmPlot”, figura 43.

Figura 42 – Iniciar KmPlot



Fonte: Autor

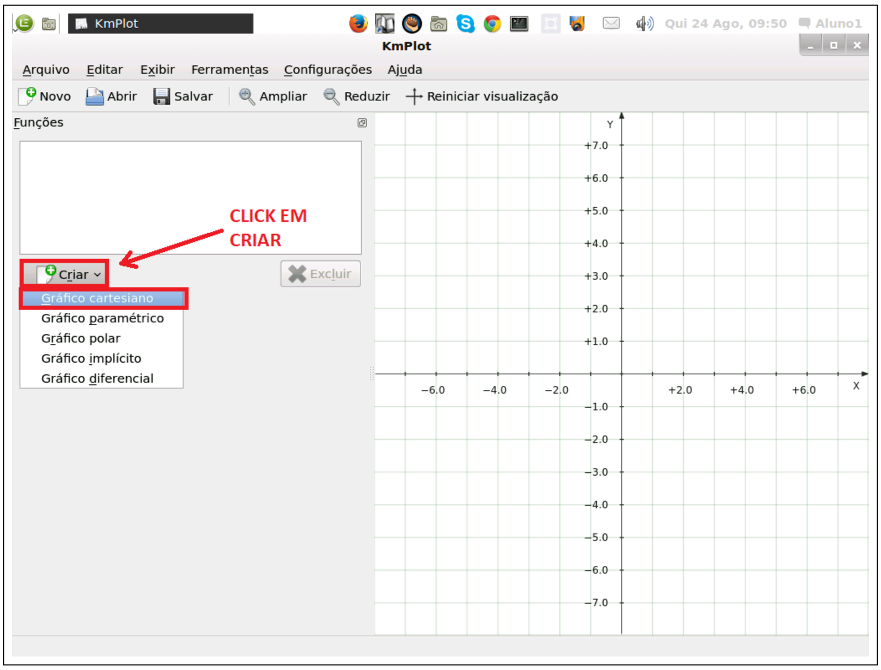
Figura 43 – Iniciar KmPlot



Fonte: Autor

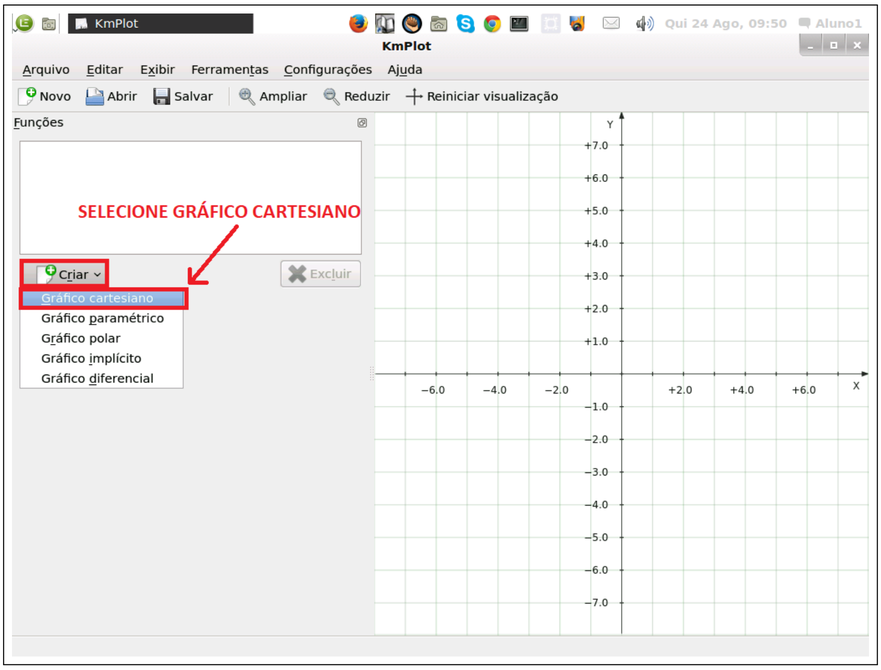
Ao iniciar a interface, selecione "criar" que abrirá uma nova janela (fig. 44), escolha "gráfico cartesiano" (fig. 45).

Figura 44 – Interface do KmPlot



Fonte: Autor

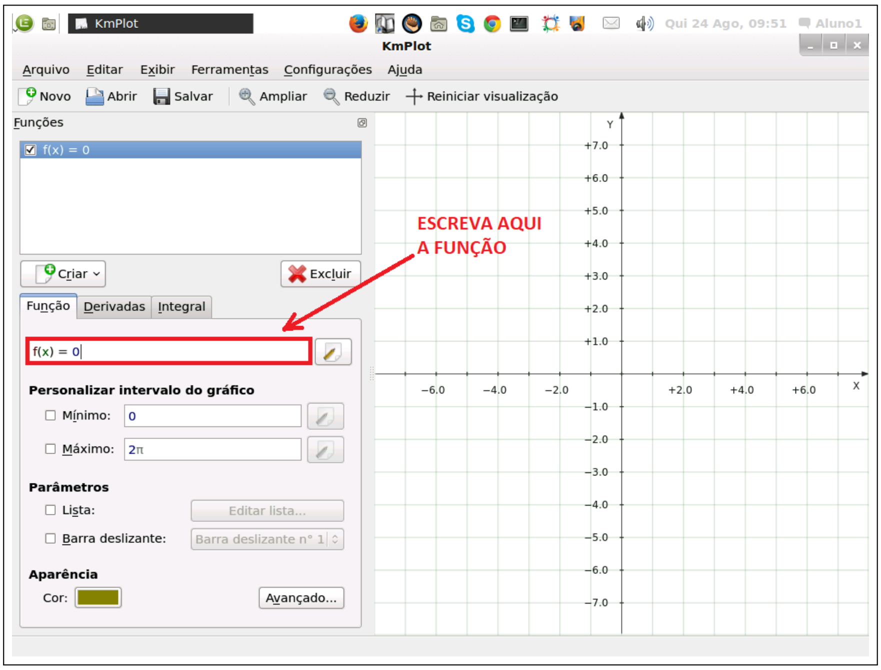
Figura 45 – Interface do KmPlot



Fonte: Autor

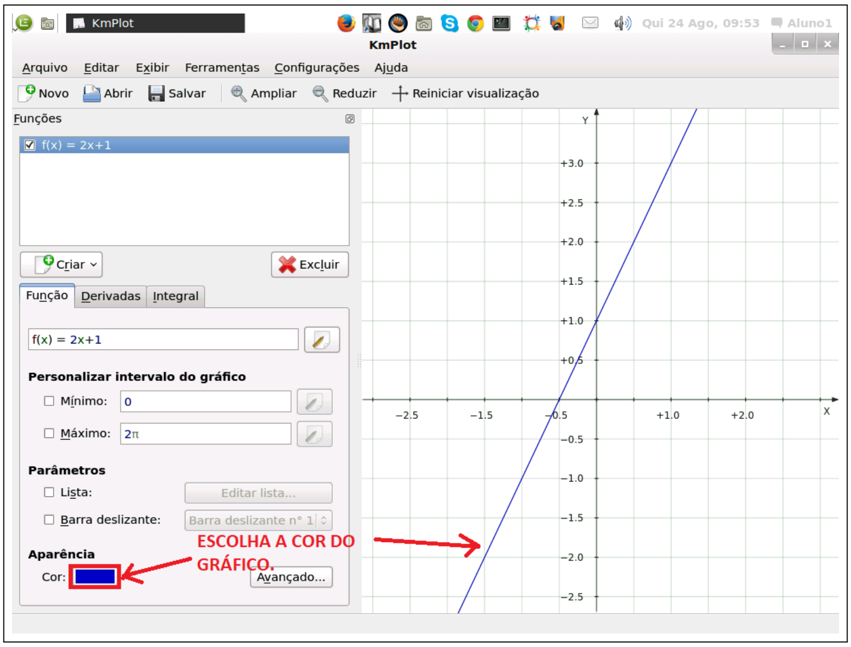
No campo $f(x) = 0$, dê um *backspace (teclado)* fig. 46 e escreva a função desejada, escolha a cor e pronto (fig. 47).

Figura 46 – Escrever as Funções



Fonte: Autor

Figura 47 – Escrever as Funções



Fonte: Autor

APÊNDICE B – Atividade I

Aluno (a): ____Turma: ________ Nº: _____

1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = 2x$;

b) $g(x) = -2x$;

c) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

____

____

d) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

____

____

e) Qual o valor de a nas funções acima?

____

____

f) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

____

____

2. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = 3x$;

b) $g(x) = -3x$;

c) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

____

____

d) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

e) Qual o valor de a nas funções acima?

f) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

g) De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo são crescentes (C) e quais funções são decrescentes (D)

( ) $f(x) = -\dfrac{x}{2}$	( ) $f(x) = 5x$	( ) $f(x) = -\dfrac{x}{3}$
( ) $f(x) = 3x$	( ) $f(x) = 2x$	( ) $f(x) = x$
( ) $f(x) = -x$	( ) $f(x) = -2x$	( ) $f(x) = -4x$

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = x$;

b) $g(x) = 2x$;

c) $h(x) = 3x$;

d) As funções acima são crescentes ou decrescentes? Porque?

e) Comparando-se as funções escritas, quais diferenças podem ser notadas?

f) Comparando-se os gráficos, quais diferenças podem ser notadas?

4. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = -x$;

b) $g(x) = -2x$;

c) $h(x) = -3x$;

d) As funções acima são crescentes ou decrescentes?

____

____

e) Comparando-se as funções, quais diferenças podem ser notadas?

____

____

f) Comparando-se os gráficos, quais diferenças podem ser notadas?

____

____

APÊNDICE C – Atividade II

Aluno (a): ____Turma: ________ Nº: ______

1. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = x + 1$;

b) $g(x) = -x + 1$;

c) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

____

____

d) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

____

____

e) Qual o valor de a nas funções acima?

____

____

f) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

____

____

2. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = 2x + 1$;

b) $g(x) = -2x + 1$;

c) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

____

____

d) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

e) Qual o valor de a nas funções acima?

f) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

g) De acordo com o que foi observado, decida quais as funções abaixo são crescentes (C) e quais funções são decrescentes (D)

( ) $f(x) = -\frac{x}{2} + 1$	( ) $f(x) = 5x - 5$	( ) $f(x) = 4 - x$
( ) $f(x) = 3x - 4$	( ) $f(x) = 1 + 2x$	( ) $f(x) = -2x + 2$
( ) $f(x) = -x + 1$	( ) $f(x) = -x$	( ) $f(x) = -4x + 2$

3. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = x + 1$;

b) $g(x) = x + 2$;

c) $h(x) = x + 3$;

d) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

e) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

f) Qual o valor de a nas funções acima?

g) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

____

____

4. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = -x + 1$;

b) $g(x) = -2x + 1$;

c) $h(x) = -3x + 1$;

d) Quais funções acima são crescentes ou decrescentes?

____

____

e) Comparando-se as funções, qual principal relação entre elas?

____

____

f) Comparando-se os gráficos, qual principal característica pode ser notada?

____

____

5. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = 5x + 1$;

b) $g(x) = 2x + 1$;

c) $h(x) = -3x + 1$;

d) Escreva os valores de a e b em cada função acima?

____

____

e) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

____

____

f) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

g) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.

6. Usando o software KmPlot, plote as seguintes funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e em seguida responda as questões:

a) $f(x) = 2x - 2$;

b) $g(x) = -3x - 2$;

c) $h(x) = -x - 2$;

d) Escreva os valores de a e b em cada função acima?

e) Comparando-se as funções acimas descritas, quais diferenças poder ser notadas?

f) Comparando-se os gráficos, quais diferenças geométricas podem ser notadas?

g) Observando os gráficos decida e escreva qual função é crescente e qual função é decrescente.