Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional PROFMAT

PROFMAT

UFPB

Uma breve introdução ao estudo da análise do $\mathbb{R}^n$ †

por

Adim Martins Mendes

sob orientação do

Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2017
João Pessoa - PB

† O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Catalogação na Publicação
Seção de Catalogação e Classificação

M538b Mendes, Adim Martins.
Uma breve introdução ao estudo da análise do R^n / Adim Martins Mendes. - João Pessoa, 2017.
66 f.

Orientador: Dr. Alexandre de Bustamante Simas.
Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN/PROFMAT

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Topologia algébrica. I. Título.

UFPB/BC CDU - 51(043)

Uma Breve Introdução ao Estudo da Análise do $\mathbb{R}^n$

por

Adim Martins Mendes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT-CCEN-UFPB, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Alexandre de Bustamante Simas - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro - UFPB

Prof. Dr. Henrique de Barros Correia Vitório - UFPE

Agosto/2017

Agradecimentos

A Deus, pois a cada passo sinto suas bençãos em minha vida.

Aos meus pais, que desde cedo me mostraram a importância do conhecimento.

Agradeço, em especial, à minha esposa Andresa, meu suporte, meu porto seguro e que sempre esteve ao meu lado me dando forças e incentivando nos meus momentos de hesitação.

Ao meu filho, Adam, que a cada dia me faz querer ser uma pessoa melhor.

Ao professor Alexandre Simas, que tive o prazer de reencontrar, sou grato pelo apoio, suporte e paciência.

À coordenação e professores que fazem parte do PROFMAT - UFPB.

Aos colegas de turma, em especial a Manoel, Gustavo, Leônidas, Osvaldo e Valmir que me proporcionaram tantos momentos de descontração e aprendizado.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Dedicatória

À minha esposa Andresa.
Ao meu filho Adam.

Resumo

A análise é um dos ramos mais férteis da matemática, com seu rigor traz fundamento para novos conceitos desenvolvidos. O presente trabalho tem como objetivo principal, o estudo das funções de n-variáveis reais, fornecendo ao leitor um primeiro contato com a matéria. Introduzimos definições e teoremas importantes para o seu estudo, dando ênfase às noções de topologia. Passando a estudar algumas aplicações contínuas e diferenciáveis, chegando à desigualdade do valor médio.
Palavras-Chave: Análise, Topologia, Desigualdade do Valor Médio.

Abstract

Analysis is one of the most fertile branches of mathematics, with its rigor brings foundation for new concepts developed. The objective of this work is to study of the n-variables real functions, providing the reader a first contact with the matter. We have introduced important concepts and theorems, emphasizing the notions of topology. Moving on to studying some continuous and differentiable applications, reaching the mean value inequality.
Keywords: Analysis, Topology, Mean Value inequality.

Sumário

Introdução

Ao estudarmos o Cálculo Diferencial, e analisarmos problemas que envolvem uma variável, é bastante intuitivo fazer a associação de um valor numérico a um ponto na reta real. Quando consideramos mais de uma variável, isto é, espaços com maiores dimensões, surge a necessidade de criar um novo ente matemático que faça o papel de um ponto neste novo espaço. No presente trabalho abordamos a estrutura do espaço $\mathbb{R}^n$, dentre as principais diferenças entre a Análise de uma e a de n variáveis têm origens em dois fatos. O primeiro é que a topologia dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ fica muito mais complicada quando $n > 1$. Em segundo lugar, a Álgebra Linear, que em dimensão 1 é desnecessária, torna-se indispensável para formular os conceitos e demonstrar os teoremas do Cálculo Diferencial das funções com mais de uma variável. A infinita variedade de tipos topológicos de subconjuntos do espaço $\mathbb{R}^n$, que servirão de domínios para as funções que estudaremos, nos fornece uma conteúdo bastante geométrico, e nos leva a dedicar todo o primeiro capítulo à topologia do espaço euclidiano. Os conceitos ali apresentados e o ponto de vista adotado situam-se no contexto da Topologia Geral. Salvo a circunstância de serem mais complexas em dimensão maior do que um, estas noções não diferem muito das suas homônimas em dimensão 1.
É de se esperar que vetores, matrizes, transformações lineares, etc. constituam a linguagem natura para tratar o Cálculo Diferencial pois, afinal de contas, este se basei na ideia de aproximar, na vizinhança de cada ponto de seu domínio, uma função "arbitrária"por uma função linear (chamada sua derivada) e, a partir das propriedades desta, obter informações sobre aquela.
Apenas a circunstância de que, em dimensão 1, uma transformação linear se confunde com um número real é que leva a considerar a derivada como sendo um número. Em dimensões superiores a verdade se revela: a derivada é uma transformação linear. Com base nesta observação, os resultados e métodos da Álgebra Linear são indispensáveis no tratamento do Cálculo Diferencial.
No capítulo 2, tratamos das aplicações contínuas, passando pela continuidade uniforme e definimos o que vem a ser um Homeomorfismo. No mesmo capítulo mostra-

mos o que são conjuntos conexos e a conexidade por caminhos, mais ainda provamos que dado um aberto no $\mathbb{R}^n$ ele só poderá ser conexo se, e somente se for conexo por caminhos.
No capítulo 3, abordamos as aplicações diferenciáveis dando alguns exemplos e mostrando o que são classes de diferenciabilidade chegando até a desigualdade do valor médio.

Capítulo 1

Noções de Topologia

Neste capítulo, iremos introduzir algumas definições e provar alguns fatos que serão necessários para o desenvolvimento do restante do manuscrito. Mais precisamente, faremos uma introdução à topologia do espaço $\mathbb{R}^n$.

1.1 O espaço Euclidiano n-dimensional

Seja $n \in \mathbb{N}$, o espaço Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$ é o produto cartesiano de n conjuntos iguais a $\mathbb{R}$, ou seja, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \underbrace{\times \ldots \times}_{n \text{ vezes}} \mathbb{R}$. Seus elementos, são as sequências ou listas de n números reais $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, o termo x_i chama-se a i-ésima coordenada de x. Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, então $x = y \iff \forall i, x_i = y_i$. Assim, toda igualdade entre dois elementos do $\mathbb{R}^n$ equivale à n igualdades entre elementos de $\mathbb{R}$.

Temos que $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$; $\mathbb{R}^2$ é o plano cartesiano, cujos elementos serão denotados por (x, y) ao invés de (x_1, x_2); $\mathbb{R}^3$ é o espaço euclidiano tridimensional, cujos elementos serão denotados por (x, y, z) ao invés de (x_1, x_2, x_3).

O $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações:

a) Soma: dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, uma soma $x + y$ é dada por:

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

b) Multiplicação por escalar: Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, e $x = (x_1, \ldots, x_n)$, então:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

O vetor $0 = (0, \ldots, 0)$, chama-se origem do $\mathbb{R}^n$.

$\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \ldots, x_n)$, o vetor $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$ chama-se o oposto ou simétrico de x.

Dados quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{array}{rl} x+y=y+x\ ; \quad x+0=x\ ; & -x+x=0; \\ x+(y+z)=(x+y)+z; & \alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x; \\ (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x; & \alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \\ 1\cdot x=x. & \end{array}$$

Os vetores $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)$, constituem o que chamamos de base canônica do $\mathbb{R}^n$. Assim, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ é equivalente a $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$.

Existe ainda uma operação que associa a cada par de vetores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, o número real

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Essa operação é chamada de produto interno entre x e y.

Segue então que

$$\begin{array}{ll} \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle; & \langle x, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle; \\ \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle; & \langle x,x\rangle > 0 \text{ e } x \neq 0. \end{array}$$

Dessas propriedades, temos que $\langle x+y, z\rangle = \langle x,z\rangle + \langle y,z\rangle$; $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$; e $\langle x, 0\rangle = 0$.

Dizemos que x e $y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais, e escrevemos $x \perp y$, se $\langle x,y\rangle = 0$. Por exemplo, $e_i \perp e_j$, se $i \neq j$.

Exemplo 1.1. Seja $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, então $\forall y \in \mathbb{R}^n$, o vetor $z = y - \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} \cdot x$ é ortogonal a x. Basta observar que,

$$\langle x,z\rangle = \langle x,y\rangle - \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} \cdot \langle x,x\rangle = 0.\square$$

Escrevendo $y = \dfrac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle} \cdot x + z$, vemos que dado um vetor $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, todo vetor $y \in \mathbb{R}^n$ se escreve como a soma de um múltiplo de x com um vetor ortogonal a x.

Esta decomposição é única. De fato, se $y = \alpha x + z$, com $z \perp x$, temos que,

$$\langle y, x\rangle = \alpha\langle x, x\rangle \Rightarrow \alpha = \frac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

O vetor $\alpha x = \dfrac{\langle y, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x$ chama-se a projeção ortogonal de y sobre x.

O número não-negativo $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ chama-se a norma do vetor x. Se $x = (x_1, \ldots, x_n)$, então:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Quando $|x| = 1$, dizemos que x é um vetor unitário.

$$\forall x \neq 0, u := \frac{x}{|x|} \text{ é unitário.}$$

Teorema 1.1 (Pitágoras)**.** *Se $x \perp y$, então $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$.*

Demonstração:

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = |x|^2 + |y|^2.$$

□

Teorema 1.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $|\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$, valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores x, y é múltiplo do outro.*

Demonstração: O resultado é claro se $x = 0$. Supondo $x \neq 0$, e escreva $y = \alpha x + z$, com $x \perp z$ e $\alpha = \dfrac{\langle x, y\rangle}{|x|^2}$.
Por Pitágoras, $|y|^2 = \alpha^2|x|^2 + |z|^2$, daí, $|y|^2 \geq \alpha^2|x|^2$, donde $|y|^2 = \alpha^2|x|^2 \Leftrightarrow y = \alpha x$.
Assim,

$$|y|^2 \geq \alpha^2|x|^2 \Leftrightarrow |y|^2 \geq \frac{(\langle x, y\rangle)^2}{|x|^2} \Leftrightarrow (\langle x, y\rangle)^2 \leq |x|^2 \cdot |y|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq |x| \cdot |y|$$

Valendo a igualdade se, e somente se, $y = \alpha x$. □

A norma possui as seguintes propriedades:

1. $|x| \geq 0$, valendo $|x| = 0$, somente se $x = 0$;
2. $|\alpha \cdot x| = |\alpha| \cdot |x|$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$.

A última desigualdade equivale a:

$$|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$$

Mas, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \leq |x|^2 + 2|x|\cdot|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2.$$

Mais geralmente, qualquer função de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que associe a cada vetor $x \in \mathbb{R}^n$, um número $|x|$ com as três propriedades acima, chama-se norma.

A norma $|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, chama-se norma euclidiana.
Outras normas usuais do $\mathbb{R}^n$ são:

1. $|x|_M = max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ (norma do máximo);
2. $|x|_S = \sum_{n=1}^{n} |x_i|$ (norma da soma);

É fácil ver que essas normas são, de fato, cumprem os requisitos de uma norma. Além disso, é fácil mostrar que, $\forall \in \mathbb{R}^n$,

$$|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M,$$

onde $|x|$ é a norma euclidiana.
Podemos também denotar em alguns momentos $|x|_M$ ou $|x|_S$ apenas por $|x|$, por simplicidade.
Para toda norma, vale a desigualdade:

$$||x| - |y|| \leq |x-y|.$$

De fato, como $x = (x-y)+y$, temos que $|x| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$. Analogamente, temos $|y| - |x| \leq |x-y|$. Daí, $||x| - |y|| \leq |x-y|$.
Uma norma em $\mathbb{R}^n$, fornece a noção de distância $d(x,y)$ entre dois pontos do $\mathbb{R}^n$. Para $x = x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = y = (y_1, \ldots, y_n)$ pomos

$$d(x,y) = |x-y|$$

A distância satisfaz as seguintes propriedades:

1. $d(x,y) \geq 0$, com $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x,y) = d(y,x)$;
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (Desigualdade triangular).

Note que $|x-y| = |y-x|$ então por (2), temos

$$|x-z| = |x-y+y-z| \leq |x-y| + |y-z| \Rightarrow (3).$$

1.2 Bolas e Conjuntos Limitados

Dados o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e o número real $r > 0$, a bola aberta de centro a e raio r é o conjunto $B(a,r)$ dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ cuja distância ao ponto a é menor do que r. Em símbolos:

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-a| < r\}$$

Analogamente, a bola fechada de centro a e raio r, é o conjunto:

$$B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-a| \leq r\}$$

Por sua vez, a esfera de centro a e raio r é o conjunto

$$S[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-a| = r\}$$

Temos que, $B[a,r] = B(a,r) \cup S[a,r]$.

A bola fechada $B[a,r] \subset \mathbb{R}^n$ também é chamada de disco n-dimensional de centro a e raio r.
Em particular, o disco $B[0,1]$ de centro O e raio 1 é chamado o disco unitário de $\mathbb{R}^n$.
Uma notação especial é reservada para a esfera unitária de dimensão $n-1$:

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}.$$

Assim, S^{n-1} é a esfera de centro na origem e raio 1.
Acima, estamos admitindo que a norma adotada é a euclidiana, já que não foi menção em contrário.

Convém observar que a forma geométrica das bolas e esferas em $\mathbb{R}^n$ depende da norma que se considera.

Observação 1.1. Note que as desigualdades $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$ implicam que

$$B_M\left[a, \frac{r}{n}\right] \subset B_S[a,r] \subset B[a,r] \subset B_M[a,r].$$

Diz-se que o $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando está contido em alguma bola $B[a,r]$.

Como $B[a,r] \subset B[0,k]$, onde $k = r + |a|$, dizer que X é limitado equivale a dizer que existe $k > 0$ tal que

$$\forall x \in X, |x| \leq k.$$

Para mostrar que $B[a,r] \subset B[0, r+|a|]$, note que $|x-a| \leq r \Rightarrow |x| = |x-a+a| \leq |x-a| + |a| \leq r + |a|$.

Assim, $x \in B[a,r] \Rightarrow x \in B[0, r+|a|]$.

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ diz-se limitada no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando sua imagem $f(X) \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, isto é, quando existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$, para todo $x \in X$.

Observação 1.2. Considere $B_M[a,r] \subset \mathbb{R}^n$, definida pela norma do máximo. Então,

$$\begin{aligned} B_M[a,r] &= \{x \in \mathbb{R}^n; max_i\{|x_i - a_i|\} \leq r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n; |x_1 - a_1| \leq r, \ldots, |x_n - a_n| \leq r\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} (a_i - r, a_i + r) \end{aligned}$$

Note ainda que as desigualdades $|x|_M \leq |x| \leq |x|_S \leq n \cdot |x|_M$, mostram que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado em relação a uma dessas normas se, e somente se, é limitada em relação a qualquer das outras duas.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, a i-ésima projeção $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é definida como $\pi_i(x) = x_i = i$-ésima coordenada de x.

Teorema 1.3. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado se, e somente se, suas projeções $X_1 = \pi_1(X), \ldots, X_n = \pi_n(X)$, são conjuntos limitados em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Comece notando que se

$$C_1, \ldots, C_n \subset \mathbb{R} \text{ e } X \subset \mathbb{R}^n \text{ são conjuntos.}$$

Então,

$$X \subset C_1 \times \ldots \times C_n \iff \pi_i(X) \subset C_i, \text{ para todo i.}$$

Para demonstrar o teorema, podemos escolher qualquer uma das 3 normas usuais. Tomemos a do máximo. Assim, X é limitado $\iff \exists c > 0$ tal que

$$X \subset B_M[0,c] = [-c,c] \times \ldots \times [-c,c]$$

$$\iff \pi_1(X) \subset [-c,c], \ldots, \pi_n(X) \subset [-c,c]$$

$$\iff \pi_1(X), \ldots, \pi_n(X) \text{ são limitados em } \mathbb{R}.$$

□

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, chama-se *convexo* quando o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de X está inteiramente contido em X.
Ou seja, X é convexo se

$$\forall a, b \in X \text{ e } t \in \mathbb{R} \text{ com } 0 \leq t \leq 1, (1-t)a + tb \in X.$$

Exemplo 1.2. Toda bola (aberta ou fechada) é um conjunto convexo. Consideremos, por exemplo, a bola fechada $B = B[x_0, r]$. Dados $a, b \in B$, temos

$$|a - x_0| \leq r \text{ e } |b - x_0| \leq r. \text{ Para todo } t \in [0,1],$$

Temos $x_0 = (1-t)x_0 + tx_0$ daí,

$$\begin{aligned} |(1-t)a + tb - x_0| &= |(1-t)a - (1-t)x_0 + tb - tx_0| \\ &= |(1-t)(a - x_0) + t(b - x_0)| \\ &\leq (1-t)|a - x_0| + t|b - x_0| \leq (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Exemplo 1.3. Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \leq x^2\}$. O conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ não é conexo. De fato,

$$\begin{aligned} a = &\ (-1,1) \in X \\ b = &\ \ (1,1) \in X \end{aligned}$$

Mas, $\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b = (0,1) \notin X$

1.3 Conjuntos Abertos

Seja $a \in X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que o ponto a é interior ao conjunto X quando existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset X$.
Isto significa que todos os pontos suficientemente próximos de a também pertencem a X. O conjunto $int(X)$ dos pontos interiores a X chama-se o interior do conjunto X.

É claro que $int(X) \subset X$. Quando $a \in int(X)$, dizemos que X é uma vizinhança de a.

Exemplo 1.4. Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ o semi-plano superior fechado. Se $p = (a,b)$ com $b > 0$, então $p \in int(X)$. De fato, $B(a,b) \subset X$, pois

$$\begin{aligned} (x,y) \in B \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < b \Rightarrow (y-b)^2 < b \\ \Rightarrow y^2 - 2by + b^2 < b^2 \Rightarrow y^2 < 2by \\ \Rightarrow y > 0 \text{ (pois } b > 0) \Rightarrow (x,y) \in X. \end{aligned}$$

Note ainda que os pontos da forma $q = (a,0)$, pertencem a X, porém não são interiores a X.
De fato, nenhuma bola de centro q pode estar contida em X, pois o ponto $(a, -\frac{r}{2}) \in B(q,r)$, mas $(a, \frac{-r}{2}) \notin X$.
Segue-se então que $int(X) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$.

Definição 1.1. Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ chama-se aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $A = int(A)$.

Exemplo 1.5. Toda bola $B = B(a, r)$ é um conjunto aberto. De fato, seja $x \in B$. Então, $|x - a| < r$, daí, $s = r - |x - a| > 0$. Afirmamos que $B(x, s) \subset B$. De fato, $y \in B(x, s) \Rightarrow |y - x| < r - |x - a|$. Portanto,

$$y \in B(x, s) \Rightarrow |y - a| \leq |x - y| + |x - a| < r - |x - a| + |x - a| = r.$$

$$\Rightarrow y \in B(a, r).\square$$

Definição 1.2. A fronteira de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é conjunto $fr(X)$ formado pelos pontos de X que não são interiores a X, juntamente com os pontos de $\mathbb{R}^n \setminus X$ que não são interiores a $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Resumindo, $x \in fr(X)$ quando toda bola de centro x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n \setminus X$.

Exemplo 1.6. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Da mesma forma que no exemplo anterior, mostra-se que todo ponto de $\mathbb{R}^n \setminus X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y < 0\}$ é ponto interior de $\mathbb{R}^n \setminus X$. Concluímos que, $\mathbb{R}^n \setminus X$ é aberto. Assim, nenhum ponto de $\mathbb{R}^n \setminus X$ pertence a $fr(X)$. Portanto, $fr(X) = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 1.4. *a) Se A_1, A_2 são abertos em $\mathbb{R}^n$, então $A_1 \cap A_2$ é aberto.*

b) Se $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família arbitrária de abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}^n$, então $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Demonstração: a) Se $x \in A_1 \cap A_2$, então $x \in A_1$ e $x \in A_2$. Como A_1 e A_2 são abertos, $\exists\ r_1, r_2 > 0$ tais que $B(x, r_1) \subset A_1$ e $B(x, r_2) \subset A_2$. Seja $r = min\{r_1, r_2\}$, então $B(x, r) \subset B(x, r_1) \subset A_1$ e $B(x, r) \subset B(x, r_2) \subset A_2 \Rightarrow B(x, r) \subset A_1 \cap A_2$. Assim, todo $x \in A_1 \cap A_2$ é ponto interior. Ou seja, $A_1 \cap A_2$ é aberto.
b) Se $x \in A = \cup_{\lambda \in L} A_\lambda$, então existe $\lambda \in L$ tal que $x \in A_\lambda$. Como A_λ é aberto, $\exists\ r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A_\lambda \subset A$, logo todo ponto de A é interior, ou seja, A é aberto. $\square$

Segue direto do Teorema 4 que a interseção finita $A = A_1 \cap \ldots \cap A_k$ de conjuntos abertos $A_1, \ldots, A_k$, é ainda é conjunto aberto.

No entanto, a interseção de infinitos abertos não é necessariamente aberta:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(a, \frac{1}{k}\right) = \{a\}.$$

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que um subconjunto $A \subset X$ é aberto em X, quando cada ponto $a \in A$ é centro de uma bola aberta $B(a, r)$, tal que $B(a, r) \cap X \subset A$. Isto

significa que os pontos de X que estão suficientemente próximos de cada $a \in A$, pertencem a A.
A união de todas essas bolas é um aberto U tal que $A = U \cap X$. Assim, um conjunto $A \subset X$ é aberto em $X \iff A = U \cap X$ onde U é aberto em $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, $(0,1]$ é aberto em $[0,1]$, pois $(0,1] = (0,2) \cap [0,1]$.

1.4 Sequências em $\mathbb{R}^n$

Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$, que associa a cada número natural k, um ponto $x_k \in \mathbb{R}^n$.
As notações usuais para uma sequência são $(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_k). Note que $\forall k; x_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$, então para cada k, temos n sequências de números reais. Diz-se que a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada quando existe uma bola em $\mathbb{R}^n$ que contém todos os termos x_k. Isto equivale a dizer que existe $c > 0$ tal que $|x_k| \leq c$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Note que, em virtude das desigualdades entre as 3 normas, ser limitada é uma propriedade de sequências que independe da norma que estamos adotando.

Se a sequência (x_k) é limitada então, para todo $i = 1, \ldots, n$, a sequência $(x_{k_i})_{k\in\mathbb{N}}$, das i-ésimas coordenadas de x_k também é limitada, pois $|x_k^i| \leq |x_k|$. Vale também a recíproca.

Para prová-la, adotaremos a norma do máximo. Então, se

$$|x_k^1| \leq c_1, |x_k^2| \leq c_2, \ldots, |x_k^n| \leq c_n,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomemos $c = max\{c_1, \ldots, c_n\}$,

$$|x_k|_M = max\{|x_k^1|, \ldots, |x_k^n|\} \leq c \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Assim, se cada $(x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}, i = 1, \ldots, n$, é limitada, então a sequência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitada.

Uma *subsequência* de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito

$$\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots\} \subset \mathbb{N}.$$

As notações $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$, $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ são usadas para indicar subsequência. Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da sequência (x_k) quando

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que, } k > k_0 \Rightarrow |x_k - a| < \varepsilon.$$

Ou seja, $k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a, \varepsilon)$. Escreve-se então $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$.

Temos que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a \iff \lim\limits_{k\to+\infty} |x_k - a| = 0$. Dizer que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$, significa que para todo $\varepsilon > 0$, $\{x_1, x_2, \ldots\} \setminus B(a, \varepsilon)$ é finito. Ou seja, qualquer bola de centro a contém todos os x_k com a exceção de um número finito de valores de k. Uma sequência diz-se convergente quando existe $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_k$. Segue que toda sequência convergente é limitada. Outra consequência é que toda subsequência de uma sequência convergente é também convergente e tem o mesmo limite.

Teorema 1.5. *A sequência (x_k) em $\mathbb{R}^n$ converge para o ponto $a = (a_1, \ldots, a_n)$ se, se somente se,*

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad \textit{temos} \ \lim_{k\to\infty} x_k^i = a_i,$$

isto é, se e somente se, vale a convergência coordenada a coordenada.

Demonstração. $\forall i = 1, \ldots, n,$ temos que $|x_k^i - a_i| \leq |x_k - a|_M$,
portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = a_i$.
Reciprocamente, se $\forall i \ \lim\limits_{k\to\infty} x_k^i = a_i$, então $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\, k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$, tais que

$$k > k_i \Rightarrow |x_k^i - a_i| < \varepsilon \ \ (i = 1, \ldots, n)$$

Tomando $k_0 = max\{k_1, \ldots, k_n\}$, vemos que $k > k_0$

$$\Rightarrow |x_k - a|_M < \varepsilon.$$

Logo, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. $\square$

Corolário 1.6. Se $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = b$ em $\mathbb{R}^n$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \alpha$ em $\mathbb{R}$. Então, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k + y_k = a + b$ e $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k \cdot x_k = \alpha \cdot a$.

O corolário segue das propriedades do limite em $\mathbb{R}$.
Além disso, $\lim\limits_{k\to\infty} \langle x_k, y_k\rangle = \langle a, b\rangle$, e da desigualdade $\Big||x_k| - |a|\Big| \leq |x_k - a|$, segue que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = |a|$.

Teorema 1.7 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Demonstração. Seja (x_k) uma sequência limitada em $\mathbb{R}^n$. Temos que (x_k^1) é uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, daí, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass em $\mathbb{R}$, $\exists\ \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, infinito, tal que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}_1} x_k^1 = a_1$$

Por sua vez, a sequência $(x_k^2)_{k\in\mathbb{N}_1}$ é limitada em $\mathbb{R}$. Assim, $\exists\ \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$ infinito, tal que

$$\lim_{k\in\mathbb{N}_2} x_k^2 = a_2$$

Repetindo o processo, temos n conjuntos infinitos:

$$\mathbb{N} \supset \mathbb{N}_1 \supset \mathbb{N}_2 \supset \ldots \supset \mathbb{N}_n$$

e n números reais $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\forall\ i = 1, 2, \ldots, n$, vale

$$\lim_{k \in \mathbb{N}_i} x_k^i = a_i.$$

Assim, colocando $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, temos pelo teorema anterior que $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}_n} x_k = a$. $\square$

Uma sequência de pontos $x_k \in \mathbb{R}^n$ chama-se sequência de Cauchy quando, $\forall\ \varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, r > K_0 \Rightarrow |x_k - x_r| < \varepsilon$. Toda sequência de Cauchy (x_k) é limitada.
De fato, tomando $\varepsilon = 1$ temos que existe k_0, tal que para todo $k > k_0$, $x_k \in B(x_{k_0+1}, 1)$. Portanto, o conjunto $\{x_1, \ldots, x_{k_0}, \ldots\}$ é limitado.
A condição para que (x_k) seja de Cauchy pode ser escrita como:

$$\lim_{r,k \to \infty} |x_k - x_r| = 0.$$

Teorema 1.8 (Teorema de Cauchy)**.** *Uma sequência em $\mathbb{R}^n$ converge se, e somente se, é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_k) uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^n$. Como é limitada, possui uma subsequência convergente (x_{k_m}).
Seja $a = \lim\limits_{m \to \infty} x_{k_m}$.
Tome k_0, tal que se $k, s > k_0$, então $|x_k - x_s| < \frac{\varepsilon}{2}$
Tome m_0, tal que se $m > m_0$, então $|x_{k_m} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$
Escolha $\overline{k} = max\{k_{m_0}, k_0\}$, então para $k > \overline{k}$, tome $k_m > \overline{k}$

$$|x_k - a| \leq |x_k - x_{k_m}| + |x_{k_m} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Reciprocamente, se (x_k) é convergente, com $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$, então, $|x_k - x_r| \leq |x_k - a| + |x_r - a|$, concluímos que $\lim\limits_{r,k \to \infty} |x_k - x_r| = 0$. Ou seja, (x_k) é de Cauchy. $\square$

Dizemos que duas normas arbitrárias $|\cdot|$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes se existirem $\alpha, \beta > 0$ tais que

$$|x| \leq \alpha\|x\| \text{ e } \|x\| \leq \beta|x|, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n.$$

Note que normas equivalente dão origem à mesma noção de limites de sequências em $\mathbb{R}^n$.

Teorema 1.9. *Duas normas quaisquer em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.*

Demonstração. É fácil notar que a equivalência entre normas é uma relação de equivalência. Assim, por transitividade, basta mostrar que qualquer norma do $\mathbb{R}^n$ é equivalente à norma da soma:

$$|x| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Seja $b = max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Então, $\forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\|x\| = \|x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\| \leq |x_1| \cdot \|e_1\| + \ldots + |x_n| \cdot \|e_n\| \leq b \cdot |x|.$$

Resta mostrar que existe $a > 0$ tal que $|x| < a \cdot \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Suponha, por absurdo, que não existe tal a. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in \mathbb{R}^n$, tal que $|x_k| > k\|x_k\|$.
Defina $u_k = \dfrac{x_k}{|x_k|}$. Daí, $\|u_k\| = \dfrac{\|x_k\|}{|x_k|} < \dfrac{1}{k}$ e $|u_k| = 1$, para todo k. Assim, u_k é limitada em relação à norma da soma, e pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, possui uma subsequência convergente, digamos u_{k_j} e $\lim\limits_{j\to\infty} u_{k_j} = u \in \mathbb{R}^n$. Por um lado, $|u| = \lim\limits_{j\to\infty} u_{k_j} = 1$, donde $u \neq 0$. Por outro lado, $\forall\ j \in \mathbb{N}$, temos

$$\|u\| \leq \|u_{k_j} - u\| + \|u_{k_j}\| \leq b \cdot |u_{k_j} - u| + \frac{1}{k_j}$$

Como

$$\lim_{j\to\infty} b \cdot |u_{k_j} - u| + \frac{1}{k_j} = 0,$$

concluímos que $\|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$. Esta contradição demonstra o teorema. □

Este teorema mostra que a noção de conjunto limitado, de limites de sequências de conjuntos abertos, e vários outros resultados, independem da norma escolhida.

1.5 Conjuntos Fechados

Dizemos que o ponto a é aderente ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando existe uma sequência de pontos $x_k \in X$, tais que $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$. Chamaremos de fecho do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n; x$ é aderente a $X\}$. Portanto,

$$a \in \overline{X} \iff a = \lim_{k\to\infty} x_k, \text{ com } x_k \in X.$$

Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é dito fechado quando $\overline{F} = F$, isto é, quando o limite de toda sequência convergente de pontos de F é ainda um ponto de F. Todo ponto $x \in X$ é aderente a X pois é limite da sequência constante $(x, x, \ldots)$. Assim, $X \subset \overline{X}$ qualquer que seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, $X \subset Y \Rightarrow \overline{X} \subset \overline{Y}$.

Exemplo 1.7. Se $|x| = r$, então $x \notin B = B(0,r)$, porém $x \in \overline{B}$. De fato, é fácil ver que $x_k = \left(1 - \dfrac{1}{k}\right) x$, satisfaz, $x_k \in B$ e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$. Logo, $x \in \overline{B}$. Reciprocamente, se $x \in \overline{B}$ então $x = \lim x_k$, com $|x_k| < r$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto $|x| = \lim\limits_{k\to\infty} |x_k| \leq r$. Portanto,

$$x \in \overline{B} \iff |x| \leq r, \text{ ou seja, } \overline{B} = B[0,r].$$

O fecho de um conjunto satisfaz as seguintes propriedades:

Teorema 1.10. *a) O ponto $a \in \overline{X}$ onde $X \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, toda bola de centro a contém algum ponto de X.*

b) Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. Equivalentemente: $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto se, e somente se $\mathbb{R}^n \setminus A$ é fechado.

c) O fecho de qualquer conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado. Ou seja, para qualquer $X \subset \mathbb{R}^n, \overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

Demonstração.

a) Se a é aderente a X, então $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ com $x_k \in X$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, dada uma bola qualquer $B(a,r)$, temos que ela contém pontos de X, a saber, todos os $x_k \in X$, com k suficientemente grande, tal que $|x_k - a| < r$, donde a existência desses pontos é garantida pela definição de limite. Reciprocamente, se toda bola de centro a contém pontos de X, escolha, para cada k, $x_k \in B\left(a, \dfrac{1}{k}\right) \cap X$, daí, $|x_k - a| < \dfrac{1}{k}$. Então, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, logo $a \in \overline{X}$.

b) As afirmações são equivalentes:

1. F é fechado;
2. Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, então x não é aderente a F;
3. Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$, então existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n \setminus F$ (pela letra a);
4. $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto.

Assim, F é fechado $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus F$ aberto. Escrevendo, $A = \mathbb{R}^n \setminus F$, donde $\mathbb{R}^n \setminus A$, esta última conclusão é: A é aberto $\iff$ $\mathbb{R}^n \setminus A$ é fechado.

c) Se $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$ (isto é, x não é aderente a X) então, por (a) existe uma bola $B = B(x,r)$ que não contém pontos de X, ou seja,

$$X \subset \mathbb{R}^n \setminus B, \text{ logo } \overline{X} \subset \overline{\mathbb{R}^n \setminus B}.$$

Mas, pela parte (b) acima, $\mathbb{R}^n \setminus B$ é fechado, portanto, $\overline{X} \subset \mathbb{R}^n \setminus B$, ou equivalentemente, $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$. Assim, todo ponto $x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$ é ponto interior, logo $\mathbb{R}^n \setminus \overline{X}$ é aberto. Segue que $\overline{X}$ é fechado.

□

Alguns conjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ não são abertos nem fechados, como $X = B(a,r) \cup \{b\}$, com $|b-a| = r$. Ou, por exemplo $X = \mathbb{Q}^n$. Chama-se a distância do ponto $a \in \mathbb{R}^n$ ao conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ ao número

$$d(a,X) = inf\{|x-a|; x \in X\}$$

Pela definição de ínfimo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in X$ tal que

$$d(a,X) \leq |x_k - a| < d(a,X) + \frac{1}{k},$$

portanto, $\lim_{k\to\infty} |x_k - a| = d(a,X)$. Note que a sequência (x_k) é limitada $|x_k| \leq |x_k - a| + |a|$, portanto possui uma subsequência convergente (x_{k_m}). Assim, existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tal que, $x_0 = \lim_{m\to\infty} x_{k_m}$, e além disso, $|x_0 - a| = d(a,X)$. Tem-se $x_0 \in \overline{X}$. Se X for fechado, então $x_0 \in X$. Desta forma, temos que vale o:

Teorema 1.11. *Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado. Dado qualquer $a \in \mathbb{R}^n$, existe $x_0 \in F$ tal que, $|x_0 - a| \leq |x - a|$, para todo $x \in F$.*

Ou seja, se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado então, para $a \in \mathbb{R}^n$ qualquer, a função $f : F \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x - a|$, assume seu valor mínimo em algum ponto de $x_0 \in F$. Então, tem-se $d(a,F) = |x_0 - a|$.
Se $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$, com Y fechado, diz-se que X é *denso* em Y quando $\overline{X} = Y$. Por exemplo, $B(a,r)$ é denso em $B[a,r]$, e $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$.

De forma geral, se $X \subset Y \subset \mathbb{R}^n$, mas Y não é necessariamente fechado. Dizemos que X é *denso* de Y se $Y = \overline{X} \cap Y$. Ou seja, se $X \subset Y \subset \overline{X}$.

Definição 1.3. Dizemos que $a \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ quando toda bola de centro a contém algum ponto de X diferente de a, ou seja, quando $a \in \overline{X \setminus \{a\}}$.

Um ponto de acumulação de X pode pertencer a X ou não. Se $a \in X$ não é ponto de acumulação de X, dizemos que a é um ponto isolado de X. Isto significa que $\exists\, r > 0$ tal que $B(a,r) \cap X = \{a\}$. Quando todos os pontos de X são pontos isolados, dizemos que X é discreto.

Exemplo 1.8. Todos os pontos de uma bola são pontos de acumulação. O conjunto $\mathbb{Z}$ é um conjunto discreto.

Teorema 1.12. *Sejam a um ponto e X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *a é ponto de acumulação de X;*

2. *a é limite de uma sequência de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$;*

3. *Toda bola de centro a contém uma infinidade de pontos de X.*

Demonstração.

(1) $\Rightarrow$ (2). Se a é ponto de acumulação de X, então a é aderente ao conjunto $X \setminus \{a\}$. Portanto, existe uma sequência de pontos $x_k \in X \setminus \{a\}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n, n > n_0\}$ é infinito. Pois, se fosse finito, existiria algum termo x_{n_1} que se repetiria infinitas vezes. Desta forma, poderíamos tomar a subsequência constante igual a x_{n_1}, que convergiria para x_{n_1}. Como a sequência é convergente, a sequência também deveria convergir para x_{n_1}. Como a sequência é formada por elementos em $X \setminus \{a\}$, temos que $x_{n_1} \neq a$. Portanto, $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_{n_1} \neq a$. Esta contradição mostra que o conjunto é infinito.

(3) $\Rightarrow$ (1). Para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $x_k \in B(a, 1/k) \cap X$, com $x_k \neq a$ (isto é possível, pois $B(a, 1/k)$ contém uma infinidade de pontos de X). Daí, temos que $x_k \in X \setminus \{a\}$ e $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = a$. Portanto a é aderente a $X \setminus \{a\}$.

□

Teorema 1.13. *Todo conjunto infinito limitado $X \subset \mathbb{R}^n$, admite pelo menos um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ infinito limitado. X possui um subconjunto enumerável $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$. Fixando essa enumeração, temos uma sequência de termos dois-a-dois distintos, pertencentes a X, portanto, uma sequência limitada, a qual, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass possui uma subsequência convergente.

Desprezando os termos fora da subsequência e mudando a notação, podemos assumir que (x_k) converge. Seja $a = \lim\limits_{k \to \infty} (x_k)$. Como os termos (x_k) são todos distintos, no máximo um deles pode ser igual a a. Descartando-o caso exista, temos a como limite de uma sequência de pontos $(x_k) \in X \setminus \{a\}$, logo a é ponto de acumulação. □

Teorema 1.14. *a) Se F_1 e F_2 são subconjuntos fechados de $\mathbb{R}^n$, então, $F_1 \cup F_2$ também é fechado.*

b) Se $(F_\lambda)_{\lambda\in L}$ é uma família arbitrária de conjuntos fechados, então a interseção $\bigcap\limits_{\lambda\in L} F_\lambda$ é um conjunto fechado.

Demonstração. Basta notar que se F é fechado, $\mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto. □

Note que (a) implica que a união finita $F_1 \cup \ldots \cup F_k$ de conjuntos fechados $F_1, \ldots, F_k$ ainda é um conjunto fechado. Note que este resultado não vale para a uniões infinitas.
De fato, $B(a,r) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B\big[a, r - \frac{1}{k}\big]$.
Segue então, que o fecho do conjunto X é formado acrescentando-lhes os pontos de acumulação que não pertencem a X.
Seja $x \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que $F \subset X$ é fechado em X quando F contém todos os seus pontos aderentes que pertencem a X.
Assim F é fechado em $X \iff F = \overline{F} \cap X$. Mais precisamente, F é fechado em X quando, e somente quando, $F = G \cap X$, onde $G \subset \mathbb{R}^n$ é fechado. De fato, se $F = G \cap X$, com G fechado, então $\overline{F} \subset G$, logo, $F = F \cap X \subset \overline{F} \cap X \subset G \cap X = F$. Donde $F = \overline{F} \cap X$ e F é fechado em X.
O conjunto $F \subset X$ é fechado em X se, e somente se, $X \setminus F$ (complementar em relação a X) é aberto em X.
Analogamente, $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, $X \setminus A$ é fechado em X, pois, $A = U \cap X \iff X \setminus A = (\mathbb{R}^n \setminus U) \cap X$, e U é aberto $\iff \mathbb{R}^n \setminus U$ é fechado.
Finalmente, temos que $fr(X) = \overline{X} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus X)}$. De fato, se $z \in fr(X)$, temos que toda bola de centro z possui pontos de X e pontos de $\mathbb{R}^n \setminus X$. Assim, tome a sequência de bolas $B_n = B(z, \frac{1}{n})$.
Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\exists\ x_n \subset X$ e $y_n \in \mathbb{R}^n \setminus X$ tal que $x_n, y_n \in B_n$.

Segue, trivialmente, que $x_n \to z$ e que $y_n \to z$. Logo, $z \in \overline{X}$ e $z \in \overline{(\mathbb{R}^n \setminus X)} \Rightarrow z \in \overline{X} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus X)}$.
Reciprocamente, se $z \in \overline{X} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus X)}$, $\exists\ x_n \subset X$ e $y_n \in \mathbb{R}^n \setminus X$ tais que $x_n \to z$ e $y_n \to z$.
Tome $B(z,r)$ uma bola aberta qualquer em torno de z. Vamos mostrar que $\exists n \in \mathbb{N}; x_n, y_n \in B(z,r)$. De fato, tomando $\varepsilon = \frac{r}{2}$, existem n, m tais que

$$|x_n - z| < \varepsilon \text{ e } |y_n - z| < \varepsilon \Rightarrow x_n, y_n \in B(z,r).$$

Logo, toda bola aberta de centro z contém pontos de x e pontos de $\mathbb{R}^n \setminus X$. Como consequência temos que $fr(X) = fr(\mathbb{R}^n \setminus X)$.

1.6 Conjuntos Compactos

Definição 1.4. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se compacto quando é limitado e fechado.

Exemplo 1.9. Toda bola fechada $B\big[a,r\big]$ é compacta.
Nenhuma bola aberta é compacta.
O conjunto $\mathbb{Z}^n$ é fechado mas não é limitado, logo não é compacto.
Toda esfera $S\big[a,r\big]$ é compacta.

Teorema 1.15. *As seguintes afirmações sobre o conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ são equivalentes:*

1. *K é compacto;*

2. *Toda sequência de pontos $x_m \in K$ possui uma subsequência que converge para um ponto de K.*

Demonstração.
(1) $\Rightarrow$ (2).
Se K é compacto então toda sequência de pontos $x_m \in K$ é limitada, pois K é limitado. Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência (x_{m_j}) tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{m_j} = a \in \mathbb{R}^n$. Como K é fechado, temos que $a \in K$.

(2) $\Rightarrow$ (1)
Se vale (2), então K é limitado, pois caso não fosse, $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists\ x_m \in K$, tal que $\|x_m\| > m$. A sequência (x_n) assim obtida não possui subsequência limitada, logo nenhuma de suas subsequências converge.
Além disso, K é fechado, pois se $a = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$, com $(x_m) \in K$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Então, por (2), existe uma subsequência de (x_m) convergindo para um ponto de K. No entanto, toda subsequência de (x_m) converge para a. Portanto, $a \in K$, e K é fechado. □

Definição 1.5. Dados os conjuntos $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, podemos definir a distância entre eles colocando:
$$d(X,Y) = inf\Big\{|x-y|; x \in X, y \in Y\Big\}.$$

Nesse ponto é válida o seguinte pergunta: Se X e Y são fechados existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que $d(X,Y) = |x_0 - y_0|$? A resposta é que nem sempre isso acontece, por exemplo:
Tome $X, Y \subset \mathbb{R}^2$, com $X = \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$ e $Y = \{(x, \frac{1}{x}); x \in \mathbb{R}\}$.
Temos que X e Y são fechados, e que X e Y são disjuntos, mas que $d(X,Y) = 0$.

No entanto, temos que vale o teorema abaixo (note que é uma extensão do Teorema 1.11, basta tomar $K = \{a\}$).

Teorema 1.16. *Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto e $F \subset \mathbb{R}^n$ fechado. Existem $x_0 \in K$ e $y \in F$, tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$, para todo $x \in K$ e $y \in F$.*

Demonstração. Da definição de ínfimo, segue que existem sequências de pontos $x_m \in K$ e $y_m \in F$ tais que

$$d(K, F) = \lim_{m\to\infty} |x_m - y_m|.$$

Passando a uma subsequência, se necessário, a compacidade de K nos permite admitir que $\lim x_m = x_0 \in K$. Temos que a sequência y_m é limitada, pois, $|y_m| \leq |x_m - y_m| + |x_m|$, onde $|x_m - y_m|$ é limitada pois é convergente e $|x_m|$ é limitada pois $x_m \in K$. Logo, passando novamente a uma subsequência, se necessário, podemos admitir que $\lim y_m = y_0$, onde $y_0 \in F$, pois F é fechado. Então, $|x_0 - y_0| = \lim |x_m - y_m| = d(K, F) \leq |x - y|$, para todo $x \in K$ e $y \in F$. □

Corolário 1.17. Sejam $K \subset U \subset \mathbb{R}^n$, onde K é compacto e U é aberto. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in K; B(x, \varepsilon) \subset U$.

Demonstração. Sejam $x_0 \in K$ e $y_0 \in F = \mathbb{R}^n \setminus U$, tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$, para todos $x \in F$ e $y \in F$. Chamemos $\varepsilon = |x_0 - y_0|$. Como $K \subset U$, temos que $K \cap F = \emptyset$, portanto, $x_0 \neq y_0$ e daí, $\varepsilon > 0$. Assim, se $x \in K$ e $y \notin U$, temos que $|x - y| \geq \varepsilon$. Em outras palavras, se $x \in K$, então $B(x, \varepsilon) \subset U$. □

Se $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_m \supset \ldots$ é uma sequência decrescente de fechados não-vazios em $\mathbb{R}^n$, pode ocorrer que $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m = \emptyset$.
Tome, por exemplo, $F_m = [m, +\infty)$ em $\mathbb{R}$. No entanto, se para algum m, F_m é limitado, e portanto todos os seguintes são, isto não pode acontecer.

Teorema 1.18 (Cantor). *Seja $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_m \supset \ldots$ uma sequência decrescente de compactos não-vazios em $\mathbb{R}^n$. Existe pelo menos um ponto de $a \in \mathbb{R}^n$ que pertence a todos os K_m. Ou seja,*

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} K_m \neq \emptyset.$$

Demonstração. $\forall m \in \mathbb{N}$, escolha $x_m \in K_m$. Note que $x_m \in K_1$ para todo m e, portanto esta sequência é limitada. Logo, existe uma subsequência x_{m_j}, tal que x_{m_j} converge para $a = \lim\limits_{j\to\infty} x_{m_j}$. Vamos mostrar que $\forall m \in \mathbb{N}$ temos que $a \in K_m$. De fato, dado m, temos que $K_r \subset K_m$ se $r > m$. Assim, $\forall r > m$, $x_r \in K_m$, e em particular, para j suficientemente grande, $x_{m_j} \in K_m$.
Como K_m é fechado, segue-se que $a = \lim\limits_{j\to\infty} x_{m_j}$ pertence a K_m. □

Vamos agora caracterizar a compacidade por meio de coberturas. Comecemos com um lema:

Lema 1.19. Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ contém um subconjunto enumerável E, denso em X.

Demonstração. Considere:

$$\mathcal{B} = \{B(q,r); q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$

Temos que $\mathcal{B}$ é enumerável, assim,

$$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, escolha $x_i \in B_i \cap X$. Se $B_i \cap X = \emptyset$, x_i não existirá. É claro que o conjunto E dos pontos obtidos desta forma é um subconjunto enumerável de X. Mostraremos agora que E é denso em X. Tome $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer. Tome $r \in \mathbb{Q}$, tal que $0 < 2r < \varepsilon$. Como $\mathbb{Q}^n$ é denso em $\mathbb{R}^n$, existe $q \in \mathbb{Q}^n$ tal que $|x - q| < r$. Assim, $\exists\ i \in \mathbb{N}$ tal que $B_i = B(q,r)$. Além disso, $x \in B_i$, donde temos $B_i \cap X \neq \emptyset$.
Existe, portanto, $x_i \in E$. Assim, x e x_i pertencem à B_i. Daí

$$|x - x_i| \leq |x - q| + |q - x_i| < 2r < \varepsilon.$$

Fica provado então que toda bola aberta $B(x,\varepsilon)$ com centro em algum ponto de X contém um ponto $x_i \in E$. Então, E é denso em X. $\square$

Definição 1.6. Uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$; de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tal que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Isto significa que $\forall x \in X,\ \exists\ \lambda \in L$ tal que $x \in C_\lambda$.
Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.
Dizemos que a cobertura $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ é aberta, quandos os C_λ forem todos abertos; finita se L é um conjunto finito; enumerável se L for enumerável.

Teorema 1.20 (Lindelöf)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. Toda cobertura aberta $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$ admite uma subcobertura enumerável*

$$X \subset C_{\lambda_1} \cup \ldots C_{\lambda_m} \cup \ldots$$

Demonstração. Seja $E = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \subset X$, um subconjunto enumerável denso em X.

Defina:

$$\mathcal{B} = \{B(x,r); x \in E; r \in \mathbb{Q};\ \exists\ \lambda \in L; B(x,r) \subset C_\lambda\}$$

Como E e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis, temos que $\mathcal{B}$ é enumerável. Afirmamos que as bolas $B \in \mathcal{B}$ cobrem X.
De fato, dado $x \in X$, $\exists\ \lambda \in L$, tal que $x \in C_\lambda$.
Como C_λ é aberto, $\exists\ r > 0$, racional, tal que $B(x, 2r) \subset C_\lambda$. Como E é denso em X, existe $x_i \in E$, com $|x - x_i| < r$. Então $x \in B(x_i, r)$. Para mostrar que $B(x_i, r) \in \mathcal{B}$, temos que mostrar que $B(x_i, r) \subset C_\lambda$. De fato, $y \in B(x_i, r) \Rightarrow |y - x_i| < r$

$$\Rightarrow |y - x| \leq |y - x_i| + |x_i - x| < 2r \Rightarrow y \in B(x, 2r) \subset C_\lambda.$$

Assim, $\mathcal{B}$ é uma cobertura de X. Tome uma enumeração $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots\}$, e escolha, $\forall i \in \mathbb{N}$, um índice $\lambda_i \in L$ tal que $B_i \subset C_{\lambda_i}$.
Concluímos então que $X \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_{\lambda_i}$.

$\square$

Finalmente, temos que:

Teorema 1.21 (Borel-Lebesgue). *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, então, toda cobertura aberta $K \subset \bigcup\limits_{\lambda \in L} C_\lambda$, admite uma subcobertura finita $K \subset C_{\lambda_1} \cup \ldots \cup C_{\lambda_m}$*

Demonstração. Pelo Teorema de Lindelöf, obtemos uma subcobertura enumerável

$$K \subset C_{\lambda_1} \cup \ldots \cup C_{\lambda_m} \cup \ldots$$

Defina $K_i = K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup\limits_{j=1}^{i} C_{\lambda_j}\right)\right)$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Isto nos dá uma sequência decrescente de compactos (pois $\mathbb{R}^n \setminus C_{\lambda_i}$ é fechado e $K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{i} C_{\lambda_i}\right)$ é limitada).

Dado qualquer $x \in K$, $\exists\ i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in C_{\lambda_i}$ e desta forma $x \notin K_i$.
Isto mostra que nenhum $x \in K$ está em todos K_i. Ou seja, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} K_i = \emptyset$. Segue do Teorema de Cantor que algum dos compactos K_i é vazio (pois caso todos fossem não-vazios, a interseção deles seria não-vazia). Se $K_i = \emptyset$, temos que $K \cap \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i} (C_{\lambda_j})\right) = \emptyset$,

$$\Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^{i} C_{\lambda_i}.$$

$\square$

Além disso, vale a recíproco do teorema de Borel- Lebesgue:

Teorema 1.22. *Se toda cobertura aberta do conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita, então K é compacto.*

Demonstração. Vamos mostrar que K é fechado e limitado.
Para mostrar que é limitado, tome a cobertura

$$X \subset \bigcup_{x \in X} B(x, 1).$$

Assim, K admite uma subcobertura finita:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, 1)$$

Logo, K é limitado. Por exemplo: $K \subset B\left(0, \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|\right) + m\right)$. Para mostrar que K é fechado, mostraremos que $\mathbb{R}^n \setminus K$ é aberto. De fato, tome $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ e considere a sequência de bolas fechadas:

$$B_i = B\left[x; \frac{1}{i}\right].$$

Como

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i = \{x\} \text{ temos que}$$

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus B_i) = \mathbb{R}^n \setminus \{x\} \supset K.$$

Assim, $\bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus B_i)$ é uma cobertura aberta de K, e admite uma subcobertura finita:

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{m} (\mathbb{R}^n \setminus B_i) = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \mathbb{R}^n \setminus B_m$$

$\Rightarrow B_m \subset \mathbb{R}^n \setminus K$. Ou seja, $B\left(x; \frac{1}{m}\right) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$, e $\mathbb{R}^n \setminus K$ é aberto. E, portanto, K é fechado. $\square$

Capítulo 2

Aplicações Contínuas e Conexidade

Neste capítulo iniciamos o estudo das aplicações contínuas e analisamos alguns exemplos de aplicações. Vemos ainda o que vem a ser conjuntos conexos e conexos por caminhos.

2.1 Aplicações Contínuas

Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$, definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, associa a cada ponto $x \in X$ sua imagem $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$.
As funções $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$, chamam-se funções-coordenadas de f.

Definição 2.1. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$, quando:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists\ \delta > 0, x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Ou seja, $\forall \varepsilon > 0;\ \exists\ \delta > 0; f(B(a;\delta) \cap X) \subset B(f(a);\varepsilon)$.

Note que, pela equivalência de normas, continuidade não depende de qual norma se utiliza. Diremos que $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua em X, quando f for contínua em todos os pontos de X.

Teorema 2.1. *Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$, $Y \subset \mathbb{R}^p$, $f : X \to \mathbb{R}^p$, com $f(X) \subset Y$ e $g : Y \to \mathbb{R}^n$. Se f é contínua em $a \in X$ e g é contínua em $f(a)$. Então, $g \circ f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto a. Ou seja, a composta de duas aplicações contínuas é contínua.*

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$. A continuidade de g no ponto $f(a)$ implica que $\exists\ \lambda > 0$, tal que $y \in Y; |y - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(y) - g(f(a))| < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$, a continuidade de f em a implica que $\exists\ \delta > 0$, tal que

$$x \in X; |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \lambda \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(a))| < \varepsilon.$$

Logo, $g \circ f$ é contínua no ponto a. $\square$

Teorema 2.2. *Valem as propriedades:*

a) *A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda sequência de pontos $x_k \in X$, com $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, temos $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.*

b) *A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua em $a \in X$ se, e somente se, suas funções-coordenadas $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}^n$ são contínuas neste ponto.*

Demonstração.

a) Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ contínua no ponto a e considere uma sequência $x_k \in X$, com $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Como f é contínua em a, segue que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(a;\delta) \cap X) \subset B(f(a);\varepsilon).$$

Correspondente a este δ, segue da convergência da sequência (x_k) que existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que se $k > k_0$, então

$$|x_k - a| < \delta \Rightarrow x_k \in B(a,\delta) \cap X.$$

Logo,

$$k > k_0 \Rightarrow x_k \in B(a,\delta) \cap X \Rightarrow f(x_k) \in B(f(a));\varepsilon),$$

ou seja, $k > k_0 \Rightarrow |f(x_k) - f(a)| < \varepsilon$.

Isto mostra que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$.
Reciprocamente, suponha, por absurdo, que exista uma sequência (x_k) tal que

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(a),$$

mas que f seja descontínua no ponto a. Então, $\exists\ \varepsilon > 0$ com a seguinte propriedade:

$$\forall\ k \in \mathbb{N};\ \exists\ x_k \in X,\ \text{com}\ |x_k - a| < \frac{1}{k}\ \text{e}\ |f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Logo, temos $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a$, mas não temos $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a)$. Absurdo!

b) Segue da letra (a), e do fato de que o limite de sequências equivale ao limite das sequências coordenadas. □

Teorema 2.3. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se as aplicações $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$, então são também contínuas neste ponto as aplicações*

$$f + g : X \to \mathbb{R}^n;\ \ \langle f, g\rangle : X \to \mathbb{R};\ \ |f| : X \to \mathbb{R}\ \textit{e}\ \alpha f : X \to \mathbb{R}^n.$$

Definidas por:
$\langle f, g\rangle(x) = \langle f(x), g(x)\rangle;\quad |f|(x) = |f(x)|;\quad (\alpha f)(x) = \alpha(x)f(x).$

Demonstração. Segue do teorema anterior juntamente com as propriedades de sequências. $\square$

Teorema 2.4. *A imagem $f(K)$ do conjunto compacto $K \subset X$ pela aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$ é também um conjunto compacto.*

Demonstração. Seja (y_j) uma sequência de pontos em $f(K)$. Assim, para todo $j \in \mathbb{N}$; $\exists\ x_j \in K$ tal que $f(x_j) = y_j$. Como K é compacto, (x_j) possui uma subsequência convergente (x_{j_l}), onde $\lim\limits_{l} x_{j_l} = a \in K$. Como f é contínua segue que $\lim\limits_{l} f(x_{j_l}) = f(a) \in f(K)$.
Logo, toda sequência (y_j) em $f(K)$ admite uma subsequência (y_{j_l}) convergente em $f(K)$. Logo $f(K)$ é compacto. $\square$

Corolário 2.5 (Weierstrass)**.** Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ compacto. Se $f : K \to \mathbb{R}$ é uma função real contínua. Então $\exists\ x_0, x_1 \in K$, tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$, para todo $x \in K$. Ou seja, toda função real definida num compacto assume seu máximo e mínimo em pontos de K.

Demonstração. Como $f(K)$ é compacto, $y_1 = \sup\limits_{x \in K} f(x)$ e $y_0 = \inf\limits_{x \in K} f(x)$ são atingidos em $f(K)$, assim, $\exists\ x_0, x_1 \in K; f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$. $\square$

Teorema 2.6. *Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa $f^{-1}(A)$ de todo subconjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto em X.*

Demonstração. Seja f contínua. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, então para todo $x \in f^{-1}(A)$, existe $\varepsilon > 0$, tal que $B(f(x), \varepsilon) \subset A$. Pela continuidade de f, $\exists\ \delta_x > 0$ tal que

$$f(B(x, \delta_x) \cap X) \subset B(f(x); \varepsilon) \subset A.$$

Daí,

$$B(x, \delta_x) \cap X \subset f^{-1}(f(B(x, \delta_x) \cap X)) \subset f^{-1}(A),$$

onde isto vale para todo $x \in f^{-1}(A)$. Tomando $U = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} B(x, \delta_x)$, temos que

$$f^{-1}(A) \subset U \cap X \subset f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A) = U \cap X.$$

Logo, $f^{-1}(A)$ é aberto em X.
Reciprocamente, suponhamos que para todo aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(A)$ seja aberto em X, isto é, $f^{-1}(A) = U \cap X$, onde U é aberto em $\mathbb{R}^m$.
Então, dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, tomamos $A = B(f(x); \varepsilon)$ e obtemos U aberto em $\mathbb{R}^m$ tal que

$$U \cap X = f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$$

Como $f(x) \in B(f(x);\varepsilon) \Rightarrow x \in f^{-1}(B(f(x);\varepsilon))$, logo $\exists\ \delta > 0$, tal que $B(x,\delta) \subset U$. Logo,

$$B(x,\delta) \cap X \subset U \cap X = f^{-1}(B(f(x);\varepsilon)).$$

Daí,

$$f(B(x,\delta) \cap X) \subset f(f^{-1}(B(f(x),\varepsilon))) \subset B(f(x),\varepsilon).$$

Resumindo, $f(B(x,\delta)\cap X) \subset B(f(x),\varepsilon)$. Portanto, f é contínua em todos os pontos $x \in X$. $\square$

Corolário 2.7. Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. A aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é contínua se, e somente se, a imagem inversa de todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto $f^{-1}(P)$ fechado em X.

Demonstração. Segue que $A = \mathbb{R}^n \setminus F$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, e $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(A)$ é fechado em X, pois $f^{-1}(A)$ é aberto em X. $\square$

Teorema 2.8. *Sejam $\varphi : K \to \mathbb{R}^n$ contínua no compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, e $L = \varphi(K)$ a imagem (compacta) de φ. Para que uma aplicação $f : L \to \mathbb{R}^p$ seja contínua é necessário e suficiente, que a composta $f \circ \varphi : K \to \mathbb{R}^p$ seja contínua.*

Demonstração. Se f é contínua, então $f \circ \varphi$ é contínua. Reciprocamente, supondo $f \circ \varphi$ contínua, então, para todo conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}^p$, a imagem inversa $(f \circ \varphi)^{-1}(F) = \varphi^{-1}[f^{-1}(F)]$ é fechado em K, logo é um subconjunto fechado de K. Portanto, é compacto.
Como φ é sobrejetiva, $\varphi[\varphi^{-1}(f^{-1}(F))] = f^{-1}(F)$, o que implica que $f^{-1}(F)$ é imagem de compacto por φ, logo é compacto, em particular, $f^{-1}(F)$ é fechado. Logo, f é contínua. $\square$

Exemplo 2.1. Tomemos $K = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, $L = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ e $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por

$$\varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t).$$

Temos que $[0, 2\pi]$ e S^1 são compactos e $\varphi : [0, 2\pi] \to S^1$ é contínua e sobrejetiva. Seja agora $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $g(0) = g(2\pi)$. Vamos definir $f : S^1 \to \mathbb{R}^n$ a partir de g como: $f(\cos t, sen\, t) = g(t)$, como $g(0) = g(2\pi)$, f está bem definida. Note ainda que $g = f \circ \varphi$ é contínua. Segue do teorema anterior que f é contínua. Assim, para definir uma aplicação contínua no círculo S^1, basta defini-la em $[0, 2\pi]$ de modo que seja contínua nesse intervalo e assuma valores iguais nos extremos 0 e 2π.

2.2 Continuidade Uniforme

Definição 2.2. Dizemos que uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$, com $X \subset \mathbb{R}^m$, é uniformemente contínua se, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0; x, y \in X, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. É de extrema importância entender a diferença desta definição, com relação à definição de continuidade usual. A diferença é que no caso de continuidade uniforme, para um $\epsilon > 0$ fixado, devemos encontrar um $\delta > 0$ tal que a condição

$$x, y \in X, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

funciona para todos os pares $x, y \in X$, tais que $|x-y| < \delta$. Ou seja, o δ encontrado não depende da escolha dos pontos x e y. Observe que no caso de continuidade usual em um ponto $x \in X$, o $\delta > 0$ encontrado pode depender de x.

Exemplo 2.2. Dizemos que uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é Lipschitz se, $\exists\ k > 0$, tal que $\forall x, y \in X$, temos

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|.$$

Afirmação: Toda aplicação Lipschitz é uniformemente contínua. De fato, dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$, então

$$|f(x) - f(y)| \leq k \cdot |x-y| < k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon.$$

Teorema 2.9. *Uma aplicação $f : X \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua se, e somente se, $\forall (x_k), (y_k) \in X$, com*

$$\lim_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0, \text{ temos } \lim_{k\to\infty}(f(x_k) - f(y_k)) = 0.$$

Demonstração. Seja f uniformemente contínua e considere duas sequências (x_k) e (y_k) tais que $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$. Então, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0; x, y \in X, |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Como $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k > n, |x_k - y_k| < \delta$. Daí, $|f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty}(f(x_k) - f(y_k)) = 0$.
Reciprocamente, se f não for uniformemente contínua,

$$\exists\ \varepsilon > 0; \forall \delta > 0;\ \exists\ x, y \in X; |x-y| < \delta \text{ e } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Daí, $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$, porém $\liminf_k(f(x_k) - f(y_k)) \geq \varepsilon > 0$. Logo, não vale $\lim_k(f(x_k) - f(y_k)) = 0$. Esta contradição prova a recíproca.

□

Teorema 2.10. *Toda aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$ definida num compacto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Se f não for uniformemente contínua, $\exists\ \varepsilon > 0$; e $(x_k), (y_k) \in X$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k - y_k) = 0$, mas $|f(x_k) - f(y_k)| \geq \varepsilon$ para todo k.

Como X é compacto, há uma subsequência (x_{k_j}) tal que $\lim_j x_{k_j} = a \in X$. Além disso,

$$\lim_j y_{k_j} = \lim_j (y_{k_j} - x_{k_j} + x_{k_j}) = a.$$

Daí, $\lim_j (f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})) = f(a) - f(a) = 0$.
Contradição com $|f(x_{k_j}) - f(y_{k_j})| \geq \varepsilon$. □

Exemplo 2.3. Existem funções uniformemente contínuas que não são Lipschitz: Tome

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}.$$

Como f é contínua e $[0,1]$ é compacto, f é uniformemente contínua, mas,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \cdot |x - y|.$$

Logo, uma aplicação direta do Teorema 2.9 nos mostra que f não pode ser Lipschitz.

Exemplo 2.4. Toda aplicação linear $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é contínua, pois $\forall i = 1, \cdots, n$, a i-ésima função coordenada é a função contínua

$$(x_1, \cdots, x_m) \mapsto a_{i1}x_1 + \cdots + a_{im}x_m,$$

onde $[a_{ij}]$ é a matriz de A. Como $S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ é compacta, $A(S^{m-1})$ é compacto, em particular limitado, e chamamos

$$||A|| = sup\{|Ax|; x \in S^{m-1}\}$$

a norma de A.
Temos que $\forall v \in \mathbb{R}^m$, $|Av| \leq ||A|| \cdot |v|$. De fato, se $v = 0$, vale a igualdade. Se $v \neq 0$, temos:

$$|Av| = \left| |v| \cdot A\left(\frac{v}{|v|}\right) \right| = |v| \cdot \left| A\left(\frac{v}{|v|}\right) \right| \leq ||A|| \cdot |v|.$$

Assim, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$, como A é linear:

$$|Ax - Ay| = |A(x - y)| \leq ||A|| \cdot |x - y|.$$

Logo, A é Lipschitz.

2.3 Homeomorfismo

Definição 2.3. Um homeomorfismo do conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ sobre um conjunto $Y \subset \mathbb{R}^n$ é uma bijeção contínua $f : X \to Y$ cuja inversa $f^{-1} : Y \to X$, também é contínua. Se existe um homeomorfismo entre X e Y dizemos que X e Y são homeomorfos.

Exemplo 2.5. Os conjuntos $[0, 2\pi)$ e S^1 não são homeomorfos, pois S^1 é compacto e $[0, 2\pi)$ não, ainda que seja possível uma bijeção contínua $f : [0, 2\pi) \to S^1$.

Exemplo 2.6. A bola aberta $B := B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ é homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. De fato, as aplicações:

$$f : \mathbb{R}^n \to B \text{ e } g : B \to \mathbb{R}^n$$

dadas por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \text{ e } g(y) = \frac{y}{1 - |y|}$$

são contínuas e $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in B$. Logo, $g = f^{-1}$.

Exemplo 2.7 (Projeção Estereográfica)**.** Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$ e $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$, seu pólo norte. A projeção estereográfica

$$\pi = S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n,$$

é definida de tal forma que para todo $x \in S^n \setminus \{N\}$, $\pi(x)$ é o ponto em que a semi-reta $\overrightarrow{Nx}$ encontra o hiperplano $\{x_{n+1} = 0\}$. Este hiperplano será identificado com o $\mathbb{R}^n$ através do isomorfismo $(x_1, \dots, x_n, 0) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$.

Observe que os pontos da reta são da forma $N + t \cdot (x - N)$, com $t > 0$. Este ponto pertence ao hiperplano $x_{n+1} = 0$ quando sua última coordenada é igual a zero: $1 + t(x_{n+1} - 1) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}}$. Logo, $\pi(x) = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}} \cdot (\tilde{x})$, onde $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Note que utilizamos o isomorfismo acima.
Assim, $\pi : S^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ é contínua. Seja agora $\phi : \mathbb{R}^n \to S^n \setminus \{N\}$ dada por, $\phi(y) = x$, onde $\tilde{x} = \dfrac{2y}{|y|^2 + 1}$ e $x_{n+1} = \dfrac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}$. Segue que ϕ é contínua e $\pi(\phi(y)) = y$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $\phi(\pi(x)) = x$, para todo $x \in S^n \setminus \{N\}$. Portanto, $\phi = \pi^{-1}$.

Exemplo 2.8 (Domínio o Gráfico de função contínua)**.** Seja $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, $X \subset \mathbb{R}^m$.
Seu gráfico é o conjunto

$$G = \{(x, f(x)); x \in X\} \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$$

Afirmação: X e G são homeomorfos.
Considere $\tilde{f} : X \to G$, definida por $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$.
Temos que $\tilde{f}$ é contínua, pois suas coordenadas são contínuas. Sua inversa $g : G \to X$ é dada por $g(x, f(x)) = x$ e é contínua pois é a restrição da projeção $\Pi_1 : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^m$ ao conjunto G.

2.4 Limites

Definição 2.4. Sejam $f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação, $X \subset \mathbb{R}^m$ e $a \in \mathbb{R}^m$ um ponto de acumulação de X. Dizemos que $b = \lim_{x \to a} f(x)$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists\ \delta > 0, x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Como a é ponto de acumulação a não precisa pertencer a X. Além disso, perceba que a definição de limite *exige* que a seja um ponto de acumulação, pois isto é o que torna possível a aproximação de a por pontos pertencentes a X diferentes de a.

Note que, trivialmente, se o ponto de acumulação a pertencer a X, então

$$f : X \to \mathbb{R}^n \text{ é contínua em } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Teorema 2.11 (Permanência do sinal)**.** *Sejam $a \in \mathbb{R}^m$ ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $b = \lim_{x \to a} f(x) > 0$, então $\exists \delta > 0$, tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0$.*

Demonstração. Como $b > 0$, tome $\varepsilon = b$. Daí, $\exists \delta > 0$, tal que

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < b \Rightarrow -b < f(x) - b < b \Rightarrow 0 < f(x) < 2b.$$

□

Teorema 2.12. *Sejam a um ponto de acumulação do conjunto $X, f : X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação e $f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$ as funções coordenadas de f. Então,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b = (b_1, \ldots, b_n) \text{ se, e somente se, } \forall i = 1, \ldots, n, \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i.$$

Demonstração. Defina $\overline{f} : X \cup \{a\} \to \mathbb{R}^n$, como $\overline{f}(a) = b$ e se $x \in X$, $\overline{f}(x) = f(x)$. Assim, $\overline{f}$ é contínua em a, e obtemos o resultado desejado para $\overline{f}$. Como a definição de limite de f não depende do valor de f no ponto a, e sim em $X \cap (B(a, \delta) \setminus \{a\})$, e $\overline{f}$ coincide com f nesse conjunto, o resultado é válido para f. □

Teorema 2.13. *Seja a um ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Então,*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \iff \forall (x_k) \in X \setminus \{a\} \text{ com } \lim_k x_k = a$$

Temos $\lim_k f(x_k) = b$.

Demonstração. Análoga, às funções contínuas acrescida da caracterização de pontos de acumulação por sequências. □

Teorema 2.14. *Sejam a um ponto de acumulação de $X \subset \mathbb{R}^m$, $b \in Y \subset \mathbb{R}^n$ e $f : X \to Y$. Suponha ainda que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ e $g : Y \to \mathbb{R}^p$ contínua em b. Então $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(b)$.*

Demonstração. Defina $\overline{f} : X \cup \{a\} \to Y$, o que torna $\overline{f}$ contínua em a. Podemos então aplicar a versão do resultado acima para funções contínuas. Finalmente, o resultado segue do fato de $\overline{f}$ coincidir com f em $X \setminus \{a\}$. □

Teorema 2.15. *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}^n$ e $\alpha : X \to \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}^m$ e a ponto de acumulação de X. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$ e $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha_0$.*
Então:

$$\lim_{x\to a} \Big(f(x) + g(x)\Big) = b + c; \qquad \lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = \alpha_0 b$$

$$\lim_{x\to a} \Big\langle f(x), g(x)\Big\rangle = \langle b, c\rangle \text{ e } \lim_{x\to a} |f(x)| = b.$$

Demonstração. Segue de forma análoga às demonstrações anteriores. Ou seja, estendemos para $X \setminus \{a\}$ para tornar as funções contínuas, e aplicamos a versão deste resultado para funções contínuas. □

Teorema 2.16 (Permanência da desigualdade:)**.** *Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}^m$ e a ponto de acumulação de X. Se $\forall x \in X$, $f(x) \leq g(x)$ e existem $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Então, temos que*

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x).$$

Demonstração. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) > \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então, $\lim\limits_{x\to a} \Big(f(x) - g(x)\Big) > 0$. Assim, aplicando o Teorema de permanência do sinal, obtemos que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$, temos $f(x) - g(x) > 0$. Daí, $f(x) > g(x)$. Absurdo! □

Teorema 2.17. *Se $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ e $f : X \to \mathbb{R}^n$ é limitada, na vizinhança de a, isto é, $\exists\, \delta > 0$ e $M > 0$, tal que, $|x - a| < \delta$ implica $|f(x)| < M$, então*

$$\lim_{x\to a} \alpha(x)f(x) = 0, \text{ mesmo que } \lim_{x\to a} f(x) \text{ não exista.}$$

Demonstração. Basta observar que $|\alpha(x)f(x)| < M|\alpha(x)|$ para $|x - a| < \delta$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon/M$. Fazendo $\delta_2 = \min(\delta, \delta_1)$, obtemos que $0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |\alpha(x)f(x)| < M|\alpha(x)| < M\varepsilon/M = \varepsilon$. □

Exemplo 2.9. Seja $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$. Temos que $g(x,y) = x \cdot \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Daí,

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Como $|f(x,y)| \leq 1$ e $\lim\limits_{x,y\to 0} x = 0$, obtemos,

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

2.5 Conjuntos Conexos

Definição 2.5. Uma cisão do conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, isto é, nenhum ponto de A é aderente a B, e nenhum ponto de B é aderente a A.

Um exemplo imediato é a cisão trivial $X \cup \emptyset$.
Temos que $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ é uma cisão não-trivial.

Observação 2.1. Se $X = A \cup B$ é uma cisão, então os pontos de X que são aderentes a A não pertencem a B, pois $\overline{A} \cap B = \emptyset$, logo pertencem a A, e $A = \overline{A} \cap X$. Analogamente, $B = \overline{B} \cap X$. Assim, A e B são ambos fechados em X, como $A = X \setminus B$ e $B = X \setminus A$, segue que A e B são ambos abertos em X. Resumindo, numa cisão $X = A \cup B$, A e B são ambos abertos e fechados em X.
Reciprocamente, se $A \subset X$ é aberto e fechado em X, então, fazendo $B = X \setminus A$ temos que $X = A \cup B$ é uma cisão. De fato, nenhum ponto aderente a A pode pertencer a B, pois A é fechado em X, e, analogamente, nenhum ponto aderente a B pode pertencer a A, pois B também é fechado em X.

Assim, se $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, e $X = A \cup B$ é uma cisão, então A e B são abertos disjuntos em $\mathbb{R}^n$. Se X é fechado e $X = A \cup B$ é uma cisão, A e B são fechados disjuntos em $\mathbb{R}^n$, finalmente, se X é compacto, A e B são compactos.

Observação 2.2. Temos que $det : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é o único funcional multilinear em $\mathbb{R}^n$, alternado, tal que $det(I) = 1$.

Exemplo 2.10. Seja $GL(n)$ o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ invertíveis.
Afirmação: $GL(n)$ é um subconjunto aberto e desconexo de $\mathbb{R}^{n^2}$. De fato, temos que $GL(n) = det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, como a função determinante é contínua, temos que

$GL(n)$ é aberto, além disso, $GL(n) = det^{-1}((-\infty,0)) \cup det^{-1}((0,+\infty))$ é uma cisão. De fato, $\overline{det^{-1}((-\infty,0))} = det^{-1}((-\infty,0])$ e $\overline{det^{-1}((0,+\infty))} = det^{-1}([0,+\infty))$. Daí, $\overline{det^{-1}((-\infty,0))} \cap det^{-1}((0,+\infty)) = det^{-1}((-\infty,0]) \cap det^{-1}((0,+\infty)) = \emptyset$ e $det^{-1}((-\infty,0)) \cap \overline{det^{-1}((0,+\infty))} = det^{-1}((-\infty,0)) \cap det^{-1}([0,+\infty)) = \emptyset$.

Observação 2.3. Se $X = A \cup B$ é uma cisão, então para todo $Z \subset X$, $Z = (A \cap Z) \cup (B \cap Z)$ é uma cisão.

Definição 2.6. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo quando só admite a cisão trivial. Caso contrário dizemos que X é desconexo.

Teorema 2.18. *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é um conjunto conexo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $\mathbb{R} = A \cup B$ seja uma cisão não-trivial. Tome $a \in A$ e $b \in B$, e digamos que $a < b$. Seja $X = \{x \in A; x < b\}$. Inicialmente, $X \neq \emptyset$, pois $a \in X$. Além disso, b é uma cota superior para X, então existe $c = supX$. É claro que $c \leq b$. Pela definição de supremo, $c \in \overline{X}$ (e portanto pertence a $\overline{A}$), como A é fechado, $c \in A$. Como $b \in B$, temos que $c < b$. Como A é aberto, $\exists \varepsilon > 0; (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset A$, então todos os pontos do intervalo $(c, c+\varepsilon)$ pertencem a A, contradizendo que c seja o supremo de X. □

Teorema 2.19. *A imagem do conjunto conexo $X \subset \mathbb{R}^m$ por uma aplicação contínua $f : X \to \mathbb{R}^n$ é um conjunto conexo.*

Demonstração. Se $f(X) = A \cup B$ é uma cisão da imagem de X, então A e B são abertos e fechados em $f(X)$ e disjuntos. Daí, $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ são disjuntos abertos e fechados em X, portanto $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ é uma cisão, que é trivial, pois X é conexo. Como $A, B \subset f(X)$, temos que $A = f(f^{-1}(A))$ e $B = f(f^{-1}(B))$, daí, A ou B é vazio e a cisão $f(X) = A \cup B$ é trivial. Então, $f(X)$ é conexo. □

Corolário 2.20. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ são homeomorfos e X é conexo, então Y é conexo.

Corolário 2.21. Todos os intervalos da reta são conexos.

Demonstração. Consideremos as funções abaixo:

- Pela função tangente temos que $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ e $\mathbb{R}$ são homeomorfos;
- Considerando a função seno temos que $[-1,1] = sen(\mathbb{R})$;
- Para $I = (0,1]$, temos que $f(\mathbb{R}) = I$, onde $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$;
- Para $I = [0,+\infty)$, tome $f(x) = x^2$;

- Para $I = [0, +\infty)$, tome $f(x) = x^{-2}$

Qualquer outro intervalo da reta é trivialmente homeomorfo a um deles. $\square$

Reciprocamente, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.22. *Os únicos conexos da reta são os intervalos.*

Demonstração. Suponha que $X \subset \mathbb{R}$ seja um conexo que não é intervalo. Então, $\exists$ $a < c < b$, onde $a, b \in X$ e $c \notin X$. Tome $A = \{x \in X; x < c\}$ e $B = \{x \in X; x > c\}$. Como $\overline{A} = \{x \in X; x \leq c\}$ e $\overline{B} = \{x \in X; x \geq c\}$, é fácil ver que $X = A \cup B$ é uma cisão. Além disso, essa cisão não é trivial, pois $a \in A$ e $b \in B$. $\square$

Corolário 2.23 (Teorema do Valor intermediário)**.** Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo, então a imagem de toda função contínua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um intervalo. Assim, se $a, b \in X$ são tais que $f(a) < f(b)$, então $\forall\ d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$, existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.

Teorema 2.24. *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo e $X \subset Y \subset \overline{X}$, então Y é conexo. Em particular, o fecho de um conexo é conexo.*

Demonstração. Seja $Y = A \cup B$ uma cisão. Então, $X = (A \cap X) \cup (B \cap X)$ também é uma cisão. Como X é conexo, temos que, digamos, $A \cap X = \emptyset$. Como $X \subset Y$ e $Y = A \cup B$, temos que $X \subset B$, logo $\overline{X} \subset \overline{B}$ e daí, $Y \subset \overline{B}$, pois $Y \subset \overline{X}$. Assim, temos que $A = A \cap Y \subset A \cap \overline{B} = \emptyset$, ou seja, $A = \emptyset$ e toda cisão de Y é trivial, logo Y é conexo. $\square$

Exemplo 2.11. Para todo $n \in \mathbb{N}$, a esfera S^n é conexa. De fato, retirando o pólo norte, $N = (0, 0, \ldots, 1)$, vemos que $X = S^n \setminus \{N\}$ é conexo, pois é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Como $S^n = \overline{X}$, temos que S^n é conexo.

Teorema 2.25. *Dados os conjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$, temos:*

a) A reunião $X = \bigcup\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$ de uma família de conexos que têm um ponto em comum é conexo.

b) A produto cartesiano $X \times Y \subset \mathbb{R}^{m+n}$ de $X \subset \mathbb{R}^m$ e $Y \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, X e Y são conexos.

Demonstração. a) Seja $a \in \bigcap\limits_{\lambda \in L} X_\lambda$. Se $X = A \cup B$ é uma cisão, então $a \in A$ ou $a \in B$. Digamos que $a \in A$. Então, para todo $\lambda \in L$,

$$X_\lambda = (A \cap X_\lambda) \cup (B \cap X_\lambda)$$

é uma cisão, que é trivial, pois X_λ é conexo. Como $a \in A$, segue que $B \cap X_\lambda$ é vazio, daí,

$$B = \bigcup_{\lambda \in L} (B \cap X_\lambda) = \emptyset$$

Daí, a cisão $X = A \cup B$ é trivial e X é conexo.

b) Se $X \times Y$ é conexo, então X e Y são conexos pois são as imagens de $X \times Y$ pelas projeções $p : X \times Y \to X$, $p(x, y) = x$ e $q : X \times Y \to Y$, $q(x, y) = y$, que são contínuas. Reciprocamente, se X e Y são conexos, tome um ponto $c = (a, b) \in X \times Y$. Para cada $x \in X$, o conjunto $C_x = (X \times \{b\}) \bigcup (\{x\} \times Y)$ é conexo, pois é a união dos conjuntos conexos $X \times \{b\}$ e $\{x\} \times Y$ (homeomorfos a X e Y, respectivamente) com o ponto (x, b) em comum. Além disso, $c = (a, b) \in C_x$, para todo $x \in X$. Portanto, como $X \times Y = \bigcup_{x \in X} C_x$ temos que $X \times Y$ é conexo.

□

Corolário 2.26. se $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são conexos, então $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ é conexo. Em particular, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \mathbb{R}$ é conexo.

Corolário 2.27 (Teorema da Alfândega)**.** Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto arbitrário. Se um conjunto conexo $C \subset \mathbb{R}^n$ contém $a \in X$ e $b \in \mathbb{R}^n \setminus X$, então C contém um ponto $c \in fr(X)$.

Demonstração. Tome a função contínua $f : C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = d(x, X) - d(x, \mathbb{R}^n \setminus X)$. Temos que $f(a) \leq 0$ e $f(b) \geq 0$, então, pelo teorema do valor intermediário $\exists\ c \in C$ tal que $f(c) = 0$, i.e., $d(c, X) = d(c, \mathbb{R}^n \setminus X)$. Como $c \in X$ ou $c \in \mathbb{R}^n \setminus X$, um desses valores é zero, logo ambos são e $c \in \overline{X} \cap \overline{(\mathbb{R}^n \setminus X)} \Rightarrow c \in fr(X)$. □

Observação 2.4. Como $\mathbb{R}^n$ é conexo, segue que se $X \subset \mathbb{R}^n$ não é vazio, nem coincide com $\mathbb{R}^n$, então $fr(X) \neq \emptyset$.
De fato, se $x \neq \emptyset$ e $X \neq \mathbb{R}^n$, então o conjunto conexo $\mathbb{R}^n$ contém algum ponto de X e que algum ponto de $\mathbb{R}^n \setminus X$, logo contém algum ponto de $fr(X)$.

2.6 Conexidade por caminhos

Definição 2.7. Um caminho num conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua $f : I \to X$, definida num intervalo I.

Exemplo 2.12. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ o caminho $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, definidos por $f(t) = (1 - t)x + ty$ chama-se caminho retilínio que liga x a y. Uma notação comum para este caminho é $[x, y]$. Diremos que $a, b \in \mathbb{R}^n$ podem ser ligados por um caminho em X quando existe um caminho $f : I \to X$ tal que $a = f(\alpha)$, $b = f(\beta)$, com $\alpha < \beta$ em I.

Exemplo 2.13. Se X é convexo, todos os pontos $a, b \in X$ pode ser ligados pelo caminho $[a, b]$.

Observação 2.5. Se $a, b \in X$ podem ser ligados pelo caminho $f : I \to X$, então a, b podem ser ligados por um caminho $\phi : [0,1] \to X$ tal que $\phi(0) = a$ e $\phi(1) = b$. Tome $\phi(t) = f((1-t)\alpha + t\beta)$, onde $a = f(\alpha)$ e $b = f(\beta)$.

Definição 2.8. Se $f, g : [0,1] \to X$ são caminhos em X, com $f(1) = g(0)$, definimos o caminho justaposto $h = f \vee g : [0,1] \to X$ como $h(t) = f(2t)$ e $t \in [0, \frac{1}{2}]$ e $h(t) = g(2t-1)$ se $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.
Como as restrições

$$h\,|_{[0,\frac{1}{2}]} \text{ e } h\,|_{[\frac{1}{2},1]}$$

são contínuas, segue que h é contínua.

Observação 2.6. Sejam $a, b, c \in X \subset \mathbb{R}^n$. Se a e b podem ser ligados por um caminho em X e b também podem ser ligado a c por um caminho em X, então existe um caminho em X ligando a até c. Tome $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, com $f(0) = a$, $f(1) = g(0) = b$, $g(1) = c$ e considere $h = f \vee g$.

Definição 2.9. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é dito conexo por caminhos quando dois pontos quaisquer $a, b \in X$ podem ser ligados por um caminho em X.

Observação 2.7. Todo conjunto convexo é conexo por caminhos. Em particular, toda bola (aberta ou fechada) é conexa por caminhos.

Proposição 2.28. Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ conexo por caminhos é conexo.

Demonstração. Fixe $a \in X$ e tome, $\forall\ x \in X$, C_x a imagem do caminho ligando a até x. Temos que C_x é conexo, pois é imagem de intervalo por função contínua. Assim, $\forall\ x \in X$, $a \in C_x$, daí o conjunto

$$X = \bigcup_{x \in X} C_x \text{ é conexo.}$$

□

Exemplo 2.14. O conjunto $X = \left\{ \left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right) \right); x \in (0,1) \right\} \cup \{(0,0)\}$ é conexo, pois $Y = \left\{ \left(x, sen\left(\frac{1}{x}\right) \right); x \in (0,1) \right\}$ é imagem do conjunto conexo $(0,1)$ por uma função contínua, e $X \subset \overline{Y}$. Porém X não é conexo por caminhos.

Definição 2.10. Dizemos que um caminho é poligonal quando é a justaposição de um número finito de caminhos retilínios.

Teorema 2.29. *Um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ é conexo se, e somente se, é conexo por caminhos.*

Demonstração. Já vimos que se A é conexo por caminhos, então A é conexo. Seja, então, $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Fixe um ponto $a \in A$ e considere o conjunto U formado pelos pontos $x \in A$ que podem ser ligados até a por um caminho poligonal contido em A.
Afirmação: U é aberto. De fato, seja $x \in U$, como A é aberto, $\exists\, r > 0; B(x, r) \subset A$. Como a bola é convexa $\forall\, y \in B(x, r)$; o caminho retilíneo $f : [y, x] \subset B(x, r)$, daí, se $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ liga x ao ponto a, tome $f \vee \gamma$. Logo, y se liga ao ponto a por um caminho poligonal contido em A. Portanto, $B(x, r) \subset U$ e U é aberto.
Seja agora, $V = A \setminus U$.
Afirmação: V é aberto. Se $v \in V$, então v não pode se ligar ao ponto a por um caminho poligonal contido em A. Tomando uma bola $B \subset A$, tal que $v \in B$. Temos que nenhum $z \in B$ pode se ligar ao ponto a por um caminho poligonal contido em A, pois se pudesse, bastaria justapor esse caminho ao caminho retilíneo $[v, z]$ e teríamos que v se ao ponto a por um caminho retilíneo.
Assim, $A = U \cup V$ é uma cisão, como $a \in U$ e A é conexo, temos que $V = \emptyset$. Logo $A = U$. □

Corolário 2.30. Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo, dois pontos quaisquer de A podem ser ligados por um caminho poligonal em A.

Exemplo 2.15. A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ é conexa por caminhos. De fato, dado $a, b \in S^n$, com $a \neq -b$, tome o caminho $f : [0, 1] \to S^n$, definida por

$$f(t) = \frac{(1-t)a + tb}{|(1-t)a + tb|}$$

é contínua (pois seu denominador nunca se anula). Além disso, $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Se $b = -a$, tome $c \in S^n \setminus \{a, b\}$, considere f_1 que liga a até c e f_2 que une c a b, use o caminho justaposto $f_1 \vee f_2$.

Definição 2.11. Seja $x \in X \subset \mathbb{R}^n$. Definimos a componente conexa de x, C_x como a união de todos os conjuntos conexos contidos em X, que contém o ponto x.

Observação 2.8. Temos que C_x é conexo. De fato, é o maior conjunto conexo que contém x.

Observação 2.9. Toda componente conexa é fechada em X, de fato, $C_x \subset \overline{C_x} \cap X \subset \overline{C_x}$. Como C_x é conexo, temos que $\overline{C_x} \cap X$ é conexo e contém C_x, logo $C_x = \overline{C_x} \cap X$. Note que X é conexo quando para todo $x \in X$, $C_x = X$.

Capítulo 3

Aplicações Diferenciáveis

Definição 3.1. Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Dizemos que $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x \in U$ quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h), \text{ onde } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0.$$

Note que na expressão acima h deve ser suficientemente pequeno para que $x+h \in U$ e $f(x+h)$ faça sentido.
Como U é aberto, temos que $\exists\, \varepsilon > 0; |h| < \varepsilon \Rightarrow x + h \in U$.
A igualdade $f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h)$ é a definição do "resto" $r(h) \in \mathbb{R}^n$. A diferenciabilidade de f no ponto x nos diz que este resto é um infinitésimo de ordem superior a h, ou seja, $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$. Isto significa que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$; $0 < |h| < \delta \Rightarrow |r(h)| < \varepsilon |h|$.
Algumas vezes é conveniente escrever a condição para diferenciabilidade de $f : U \to \mathbb{R}^n$ em $x \in U$ do seguinte modo:

$$f(x+h) = f(x) + T \cdot h + \rho(h), \text{ onde } \lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$$

Para tal, tome $\rho(h) = \dfrac{r(h)}{|h|}$.
Note que $\rho(h)$ não está definida em $h = 0$, mas se f for diferenciável em x, basta definir $\rho(0) = 0$. Assim, $\rho(h)$ será uma função contínua de h em $h = 0$.

Observação 3.1. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$, é diferenciável no ponto $x \in U$ então, para cada vetor $h \in \mathbb{R}^m$, temos

$$T \cdot h = \frac{T \cdot th}{t} = \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \pm \frac{r(th)}{|th|} \cdot |h|, \text{ para todo } t \neq 0 \text{ real.}$$

Logo,

$$T \cdot h = \lim_{t \to 0} \frac{T \cdot th}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

É única, portanto, a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ que dá a boa aproximação para f perto de x. Ela é chamada de derivada de f no ponto x, e indicada por $f'(x)$ ou $Df(x)$.
Resumindo, $f : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^m$ aberto), é diferenciável em $x \in U$ se

$$f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + r(h) \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$$

Note que $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, logo se f é diferenciável em x, então f é contínua em x.

Exemplo 3.1 (Aplicações Constantes). Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é constante, temos que:

$$f(x+h) = f(x) + 0 \cdot h + 0$$

Logo, $f'(x) = 0$.

Exemplo 3.2 (Transformações Lineares). Seja $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, então T é diferenciável em todo $\mathbb{R}^m$. De fato,

$$T(x+h) = Tx + Th + 0 \Rightarrow T'(x) = T.$$

Exemplo 3.3 (Transformações Bilineares). Seja $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ uma transformação bilinear.
Seja $M = max\{B(e_i, u_j)\}$, onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^m$ e $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, então

$$\begin{aligned} |B(x,y)| &= \left| B\left(\sum_i x_i e_i \, , \, \sum_j y_j u_j \right) \right| \\ &= \left| \left(\sum_{i,j} x_i y_j \; B(e_i, u_j) \right) \right| \le M \cdot \sum_{i,j} |x_i||y_j| \\ &= M \cdot |x|_S \cdot |y|_S. \end{aligned}$$

Desta forma, $\exists\ c > 0; |B(x,y)| \le c \cdot |x| \cdot |y|$.
Toda transformação bilinear é diferenciável em todo ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.
De fato, temos que

$$B(x+h, y+k) = B(x,y) + B(x,k) + B(h,y) + B(h,k)$$

Falta mostrar que $\lim_{(h,k)\to 0} \dfrac{B(h,k)}{|(h,k)|} = 0$.
Considere em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ a norma $|(h,k)| = max\{|h|, |k|\}$, temos que

$$\frac{|B(h,k)|}{|(h,k)|} = \frac{B(h,k)}{max\{|h|,|k|\}} \le \frac{c \cdot |h| \cdot |k|}{max\{|h|,|k|\}} = c \cdot min\{|h|,|k|\}$$

Daí,

$$B'(x,y)\cdot(h,k) = B(x,k) + B(h,y).$$

Vale a pena mencionar alguns casos especiais:
O produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; a composição de transformações lineares:

$$\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p),$$

onde $\mu(S,T) = ST$; O produto de matrizes, etc.

Exemplo 3.4 (Inversão de matrizes)**.** Relembre que o conjunto $GL(n)$ das matrizes invertíveis $n \times n$ é aberto.
Considere a inversão de matrizes $f : GL(n) \to M(n)$, definida por $f(X) = X^{-1}$. Afirmamos que f é diferenciável. Primeiro, note que se $AB = (z_{i,j})$, temos que

$$|AB|_M = \max_{i,j} |z_{ij}| = \max_{i,j} \left|\sum_k a_{ik} b_{kj}\right| \leq \max_{ij} \sum_k |a_{ik}||b_{kj}| \leq n \cdot |A|_M \cdot |B|_M.$$

Daí, para normas quaisquer, $\exists\, c > 0; |AB| \leq c \cdot |A| \cdot |B|$. f é contínua pois temos a fórmula da inversa em termos de determinantes. Além disso, temos que

$$\begin{aligned}
&(X+H)^{-1}(X+H) = I \Rightarrow (X+H)^{-1}(X+H)X^{-1} = X^{-1} \\
&\Rightarrow (X+H)^{-1}(I + HX^{-1}) = X^{-1} \\
&\Rightarrow (X+H)^{-1} + (X+H)^{-1}HX^{-1} = X^{-1} \\
&\Rightarrow (X+H)^{-1} = X^{-1} - (X + H^{-1})HX^{-1} \\
&\Rightarrow (X+H)^{-1} = X^{-1} - (X+H)^{-1}XX^{-1}HX^{-1} \\
&\Rightarrow (X+H)^{-1} = X^{-1} - (X+H)^{-1}(X+H-H)X^{-1}HX^{-1} \\
&\Rightarrow (X+H)^{-1} = X^{-1} - X^{-1}HX^{-1} + (X+H)^{-1}(HX^{-1})^2
\end{aligned}$$

Daí, $r(H) = (X+H)^{-1}(HX^{-1})^2$, logo,

$$\frac{|r(H)|}{|H|} \leq \frac{c \cdot |(X+H)^{-1}||H|^2|X^{-1}|^2}{|H|} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{r(H)}{|H|} = 0.$$

Portanto, $f'(X)\cdot H = -X^{-1}HX^{-1}$. Note que, para $n = 1$, $GL(1) \approx \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então, temos que f é diferenciável e sua derivada é $f'(x)\cdot h = -\dfrac{h}{x^2}$.

Exemplo 3.5 (Coordenadas de uma aplicação diferenciável)**.** Temos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $x \in U$ se, e somente se, cada função coordenada f_i for diferenciável em x.
Além disso, $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ será dada por

$$f'(x)\cdot h = (Df_1(x)\cdot h, \ldots, Df_n(x)\cdot h).$$

De fato, note que $f(x+h) = f(x) + T \cdot h + r(h)$ é equivalente a n igualdades

$$f_i = (x+h) = f_i(x) + T_i h + r_i(h), \text{ onde } T \cdot h = (T_1 \cdot h, \ldots, T_n \cdot h).$$

Finalmente, $\dfrac{r(h)}{|h|} \to 0$ se, e somente, se, $\forall\ i = 1, \ldots, n$, $\dfrac{r_i(h)}{|h|} \to 0$.

Exemplo 3.6 (A matriz Jacobiana)**.** Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in U$ e e_j o j-ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^m$. Então,

$$f'(x) \cdot e_j = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^m.$$

O limite acima é conhecido como j-ésima derivada parcial de f no ponto x e é denotado por $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$.

Pelo que vimos,

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_j} \right).$$

Isto nos fornece uma expressão para a matriz da transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ relativamente às base canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$, conhecida como matriz Jacobiana de f no ponto x. O elemento (i,j) dessa matriz é $Df_i(x) \cdot e_j$, daí,

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Cuidado! A existência das derivadas parciais $\partial f_i / \partial x_j(x)$ e portanto a existência da matriz $Jf(x)$, não garante a diferenciabilidade de f no ponto x. Na realidade, ainda podemos dizer "mais". De fato, comecemos introduzindo mais uma definição: dada $f : U \to \mathbb{R}^n$ ($U \subset \mathbb{R}^n$ aberto), $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^n$, definimos a derivada direcional de f no ponto x, na direção h como o limite:

$$\frac{\partial f}{\partial h}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^n.$$

Temos que f é diferenciável em x, então todas a derivadas direcionais existem e $\dfrac{\partial f}{\partial h}(x) = f'(x) \cdot h$.

A recíproca é falsa. Tome $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \text{ se } (x,y) \neq 0 \text{ e } f(x,y) = 0 \text{ se } (x,y) = 0.$$

Tome $h = (a, b)$, então,

$$\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^3} a^2 b}{\cancel{t^3}(a^2+b^2)} = \frac{a^2 b}{a^2+b^2}$$

Assim, f não pode ser diferenciável em 0, pois $\dfrac{\partial f}{\partial h}(0,0)$ não depende linearmente de h.

Em resumo, é possível que as derivadas direcionais existam em todas as direções, e ainda assim, f não seja diferenciável.

Exemplo 3.7 (Caminhos diferenciáveis)**.** Seja J um intervalo. Dado um caminho $f : J \to \mathbb{R}^n$, seu vetor velocidade em um ponto interior $x \in J$ é definido por

$$v = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \in \mathbb{R}^n$$

desde que o limite exista. Escrevemos $v = \dfrac{df}{dt}(x)$.
Temos que $f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + r(t)$ é o mesmo que $f(x+t) = f(x) + t\cdot v + r(t)$, onde $v = f'(x)\cdot 1 = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x)$. Daí,

$$\frac{r(t)}{|t|} = \pm\left(\frac{f(x+t)-f(x)}{t} - v\right).$$

Logo, $\lim_{t\to 0} \dfrac{r(t)}{|t|} = 0$ se, e somente se, f tem um vetor velocidade em x, e neste caso identificamos v com $f'(x)$.
Em particular, se $f : J \to \mathbb{R}$ vemos que f é diferenciável em um ponto interior de J se, e somente se, possui derivada no sentido clássico.
Finalmente, dado o caminho $f : J \to \mathbb{R}^n$, temos que

$$\frac{df}{dt}(x) = \left(\frac{df_1}{dt}(x), \ldots, \frac{df_n}{dt}(x)\right).$$

Exemplo 3.8 (Funções reais)**.** Enquanto a derivada de um caminho $f : J \to \mathbb{R}^n$ pode ser identificada com um vetor, a derivada de uma função $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, em um ponto $x \in U$, é um elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^m)^*$. Ou seja, $f'(x)$ é um funcional linear. Neste caso, a notação tradicional é $df(x)$ e é chamado de diferencial de f no ponto x. A matriz jacobiana de f em x tem uma linha e m colunas:

$$Jf(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\right).$$

Os números $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são as coordenadas do funcional linear $df(x)$ relativamente à base canônica de $(\mathbb{R}^m)^*$, dual de $\mathbb{R}^m$. Relembre que a base dual de $\mathbb{R}^m$ é dada por $\{dx_1, \ldots, dx_m\}$ que satisfaz, $\forall\ v = (v_1, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, $dx_i(v) = v_i$. Podemos, então, escrever

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i.$$

Esta expressão significa que

$$df(x) \cdot v = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i(v) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) v_i.$$

3.1 Classes de diferenciabilidade

Dado $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, diremos que uma aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável quando ela for diferenciável em todos os pontos $x \in U$. Define-se, então, a aplicação derivada

$$f' : U \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \approx \mathbb{R}^{m \cdot n}.$$

Ela associa cada $x \in U$ à transformação linear $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
O espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ pode ser identificado com $\mathbb{R}^{m \cdot n}$ (matrizes $m \times n$) e f' associa cada $x \in U$ à matriz jacobiana $Jf(x)$.

Definição 3.2. Diremos que $f : U \to \mathbb{R}^n$ é continuamente diferenciável, ou que f é de classe C^1, denotado, $f \in C^1$, quando f for diferenciável e, além disso, $f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ for contínua.

Quando queremos testar a diferenciabilidade de $f : U \to \mathbb{R}^n$ em todos os pontos $x \in U$, vale a pena deixar claro que o resto depende não só de h, como também de x. Daí, f é diferenciável em U quando, $\forall\ x \in U$, $\exists\ f'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, tal que

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \cdot h + r(x, h),$$

onde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(x, h)}{|h|} = 0.$$

Isto significa que,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in U, \exists \delta; \delta(x, \varepsilon) > 0$$

tal que $0 < |h| < \delta \Rightarrow |r(x, h)| < \varepsilon |h|$.

Note que $f \in C^1$ implica que a matriz jacobiana $Jf(x)$ depende continuamente de $x \in U$, ou seja, implica que cada uma das componentes de $Jf(x)$, $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ é

contínua em x.
Como f é diferenciável se, e somente se, suas coordenadas são diferenciáveis, temos que f' é diferenciável em x se, e somente se, cada elemento $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ da matriz jacobiana for diferenciável em x.

Definição 3.3. Se $f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tem derivada em $x \in U$, dizemos que f é duas vezes diferenciável no ponto x e escrevemos $f''(x) : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ para indicar a derivada de f' no ponto x, isto é, a segunda derivada de f no ponto x. Logo, $f'' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$.

Quando f é duas vezes diferenciável em todos os pontos $x \in U$, dizemos que f é duas vezes diferenciável em U. Se, além disso, $f'' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ for contínua, diremos que f é duas vezes continuamente diferenciável em U, e escrevemos $f \in C^2$.
Existe um isomorfismo natural

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \approx \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

que associa a cada transformação linear $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ a transformação bilinear $\tilde{T} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, tal que

$$\tilde{T}(u, v) = (T \cdot u) \cdot v.$$

Assim, podemos considerar a segunda derivada como sendo uma transformação bilinear $f''(x) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.
Olhemos um caso particular em detalhes. Seja $f' : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ dada por

$$f'(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j.$$

Logo,

$$f' = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Daí, as funções coordenadas de $f' : U \to (\mathbb{R}^m)^*$ são $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_m}$.

Assim, a matriz jacobiana de f' no ponto x é formada pelos elementos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x).$$

Como transformação linear, $f''(x) : \mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}^m)^*$ é caracterizada por:

$$f''(x) \cdot e_i = \frac{\partial f'}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) dx_j$$

ou seja, derivamos coordenada-a-coordenada.
Vamos observar a diferença entre $f''(x)$ e a transformação bilinear $d_2(f) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, que é associada pelo isomorfismo $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, (\mathbb{R}^m)^*) \approx \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.
Por definição,

$$d_2 f(x)(u, v) = (f''(x) \cdot u) \cdot v.$$

A expressão de $f''(x) \cdot e_i$, nos fornece

$$d_2 f(x)(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x)$$

Temos que $\{dx_i \otimes dx_j, 1 \leq i, j \leq m\}$ é uma base de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$.
Assim, dada $\Phi \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, temos que $\exists\ a_{ij} \in \mathbb{R}$, tais que

$$\Phi = \sum_{i,j} a_{i,j} dx_i \otimes dx_j, \text{ onde } a_{ij} = \Phi(e_i, e_j).$$

Portanto,

$$d_2 f(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} dx_i \otimes dx_j.$$

Não faremos mais distinção nenhuma entre f'' e $d_2 f$.

3.2 Derivadas de ordem superior

As derivadas de ordem superior são definidas indutivamente. Suponhamos que $f : U \to \mathbb{R}^n$, seja $(k-1)$ vezes diferenciável. Então, sua $(k-1)$-ésima derivada é uma aplicação $f^{(k-1)} : U \to L_{k-1}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
Se $f^{(k-1)}$ for diferenciável em um ponto $x \in U$, diremos que f é k vezes diferenciável neste ponto e, usando o isomorfismo canônico $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, identificaremos $f^{(k)}(x)$, a derivada de $f^{(k-1)}$ em x, com uma aplicação k-linear de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^n$, que chamaremos de k-ésima deriva de f no ponto x.
Definiremos então, a aplicação $f^{(k)} : U \to \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
Diremos que f é uma aplicação de classe C^k, ou k vezes continuamente diferenciável, denotado por $f \in C^k$, quando $f^{(k)}$ for contínua.
C^0 indica o conjunto das funções contínuas.

Definição 3.4. Definimos a classe das aplicações infinitamente diferenciáveis como sendo

$$C^\infty = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k.$$

Assim, $f \in C^\infty$ se, e somente se, possuir derivadas de todas as ordens em todos os pontos $x \in U$.
É claro que $C^\infty \subset \ldots C^k \subset C^{k-1} \subset \ldots C^1 \subset C^0$.
Para explicitar, é comum escrever $C^k(U, \mathbb{R}^n)$, ao invés de simplesmente C^k.

Exemplo 3.9. Seja $U \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Então $f \in C^k$ se, e somente se, $\forall\ i = 1, \ldots, n$ a coordenada $f_i : U \to \mathbb{R}$ é de classe C^k. Se este é o caso, $f^{(j)}(x) = D^{(j)}f(x) = (D^{(j)}f_1(x), \ldots, D^{(j)}f_n(x)$, onde $x \in U$ e $j = 1, \ldots, k$.

Exemplo 3.10. Toda transformação linear $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^∞, pois $f' : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é constante, de fato, $f'(x) = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Daí, $f(x)^{(k)} = 0$ para $k > 1$. Analogamente, toda transformação bilinear $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é de classe C^∞, pois $B' : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ é linear. De fato, $(B'(x,y)) \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y)$, daí, $B'(x+\tilde{x}, y+\tilde{y}) \cdot (h,k) = B(x,k) + B(h,y) + B(\tilde{x},k) + B(h,\tilde{y}) = B'(x,y) \cdot (h,k) + B'(\tilde{x},\tilde{y}) \cdot (h,k)$.
Daí, $B^{(k)} = 0$, para $k > 2$.

Exemplo 3.11. Nenhuma das inclusões $C^{k+1}(U, \mathbb{R}^n) \subset C^k(U, \mathbb{R}^n)$ se reduz à igualdade.
Por exemplo, tome $U = \mathbb{R}$ e considere $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Temos que f_0 é descontínua, f_1 é contínua, mas não é diferenciável em 0 daí, $f_1 \in C^0 \setminus C^1$.
Em geral, para $k > 1$, $f_k' = k \cdot f_{k-1}$, daí, $f_k \in C^{k-1} \setminus C^k$.

Exemplo 3.12. Se $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto, e $f : J \to \mathbb{R}^n$ é um caminho de classe C^k, então, para cada $j = 1, \ldots, k$, a j-ésima derivada $f^{(j)}(x)$, em $x \in J$, é ainda um vetor no $\mathbb{R}^n$. De fato, $f' : J \to \mathbb{R}^n$ é ainda um caminho, assim como são f'', f''', etc.
Mais precisamente, se $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$, então,

$$D^{(j)}f(t) = (D^{(j)}f_1(t), \ldots, D^{(j)}f_n(t)).$$

Definimos o vetor $D^{(2)}f(x)$ como a aceleração de f no instante t.

3.3 Regra da Cadeia

Teorema 3.1. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abertos, $f : U \to \mathbb{R}^n$, uma aplicação diferenciável no ponto $x \in U$, com $f(U) \subset V$ e $g : V \to \mathbb{R}^p$ uma aplicação diferenciável no ponto $y = f(x) \in V$. Então, a aplicação composta $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto x e $(g \circ f)'(x) = g'(y) \circ f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.*

Resumindo, a derivada da composta é composta das derivadas.

Demonstração. Da diferenciabilidade de f em x e g em y, temos que

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h|, \text{ com } \lim_{h\to 0}\rho(h) = 0,$$

e

$$g(y+k) = g(y) + g'(y)\cdot k + \sigma(k)\cdot |k|, \text{ com } \lim_{k\to 0}\sigma(k) = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned} g\circ f(x+h) &= g\left(f(x) + f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h|\right) \\ &= g\left(y + f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h|\right) \end{aligned}$$

fazendo $k = f'(x)\cdot h + \rho(h)\cdot |h|$, temos que

$$\begin{aligned} g\circ f(x+h) = g(y+k) &= g(y) + g'(y)\cdot k + \sigma(k)\cdot |k| \\ &= g(y) + g'(y)\cdot f'(x)\cdot h + g'(y)\cdot \rho(h)\cdot |h| + \sigma(k)\cdot |k| \\ &= g(y) + (g'(y)\circ f'(x))\cdot h + \tau(h)\cdot |h|, \end{aligned}$$

onde $\tau(h) = g'(y)\cdot\rho(h) + \sigma(k)\cdot\left|f'(x)\dfrac{h}{|h|} + \rho(h)\right|$.

Temos que se $h\to 0$, então $k\to 0$ e $f'(x)\cdot\dfrac{h}{|h|}$ é limitada.

Portanto, $\lim\limits_{h\to 0}\tau(h) = 0$. □

Corolário 3.2. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ e $g : V \to \mathbb{R}^p$ são ambas de classe C^k e $f(U)\subset V$, então $g\circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é também de classe C^k.

Demonstração. De fato, temos que $(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\circ f'(x)$, considerando $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^p)$ a composição de transformações lineares, temos que μ é bilinear, e portanto é C^∞.
Considere agora $\lambda : U\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^p)\times\mathcal{L}(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, dada por $\lambda(x) = (g'\circ f(x), f'(x))$. Temos então que $(g\circ f)'(x) = \mu\circ\lambda(x)$. Voltando ao corolário, se $f, g\in C^0$, então, claramente $g\circ f\in C^0$. Suponha agora que o corolário é verdadeiro para $k-1$, i.e., a composta de duas funções de classe C^{k-1} é de classe C^{k-1}. Então, dadas $f, g\in C^k$, temos que g' e f' são de classe C^{k-1}, como f é de classe C^k, temos que (pela hipótese de indução) $g'\circ f$ é de classe C^{k-1}.
Daí, $g'\circ f$ e f' são de classe C^{k-1}. Como estas são as coordenadas de λ, temos que $\lambda\in C^{k-1}$. Como $\mu\in C^\infty$, temos que $\mu\circ\lambda\in C^{k-1}$, ou seja, $(g\circ f)'\in C^{k-1}\Rightarrow g\circ f\in C^k$. □

Exemplo 3.13 (Aplicação do corolário 3.2)**.** $f : GL(n) \to GL(n)$ dada por $f(X) = X^{-1}$ é de classe C^∞.
Defina, $g : M(n) \times M(n) \to \mathcal{L}(M(n), M(n))$ como

$$G(Y, Z) \cdot H = Y \cdot H \cdot Z..$$

Sabemos que f é diferenciável e que

$$f' = -g \circ (f, f) : GL(n) \to \mathcal{L}(M(n), M(n))$$

onde,

$$(f, f)(X) = (f(X), f(X)) = (X^{-1}, X^{-1}).$$

Temos que $f \in C^0$. Suponha, por indução, que $f \in C^{k-1}$. Como g é bilinear e $g \in C^\infty$ e $(f, f) \in C^k$, a igualdade $f' = -g \circ (f, f)$ junto como corolário anterior, mostra que $f' \in C^{k-1} \Rightarrow f \in C^k$.
Daí, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k$, logo a inversão de matrizes é de classe C^∞.

Corolário 3.3. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x_0 \in U$. Dado $v \in \mathbb{R}^m$, seja $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$, $\varepsilon > 0$, um caminho diferenciável em $t = 0$, com $x(0) = x_0$ e $x'(0) = v$. Então o vetor velocidade de $f(x(t))$ em $t = 0$ é dado por $f'(x_0) \cdot v$.

De fato, o vetor velocidade de $f(x(t))$ em $t = 0$ é a derivada $(f \circ x)'(0) = f'(x_0) \cdot x'(0) = f'(x_0) \cdot v$.

Corolário 3.4. Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in U \subset \mathbb{R}^m$ e suponha que f admite uma inversa $g = f^{-1} : V \to \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, isto é, $f(U) = V$, $g(V) = U$, $f \circ g = id_V$ e $g \circ f = id_U$. Suponha ainda que g é diferenciável no ponto $y = f(x)$. Então $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo cujo inverso é $g'(y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Em particular, $n = m$.

Demonstração. Temos que $(id_U)' = id_{\mathbb{R}^m}$ e $(id_V)' = id_{\mathbb{R}^n}$, segue de $f \circ g = id_V$ e $g \circ f = id_U$ e da regra da cadeia segue que

$$f'(x) \circ g'(y) = id_{\mathbb{R}^n} \text{ e } g'(y) \circ f'(x) = id_{\mathbb{R}^m}$$

daí, $f'(x)$ e $g'(y)$ são isomorfismos sendo um o inverso do outro.

□

Corolário 3.5 (Antiga regra da cadeia)**.** Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em $x \in U$, com $f(U) \subset V$, e $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciável em $y = f(x) \in V$. Então:

$$\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x).$$

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_i \circ f}{\partial x_j}(x) =& D(g_i \circ f)(x) \cdot e_j = \\
&= D(g_i)(f(x)) \circ Df(x) \cdot e_j = D(g_i)(f(x)) \circ \frac{\partial f}{\partial x_j} \\
&= \left(\frac{\partial g_i(f(x))}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial g_i(f(x))}{\partial y_n} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x))}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n(x))}{\partial x_j} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Observação 3.2. Se $U \subset \mathbb{R}^m$ é aberto e $f : U \to \mathbb{R}^m$ é derivável em $x \in U$, então existe $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, e tem sentido falar no seu determinante, $det(f'(x))$. Ele é chamado de determinante jacobiano e pode ser calculado usando a matriz jacoiana. Assim, o determinante jacobiano da composta é o produto dos determinantes jacobianos das aplicações que estamos compondo.

Exemplo 3.14. Temos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dado por $f(t) = t^3$ é um homomorfismo C^∞ cujo inverso $s \to s^{1/3}$ não pode ser diferenciável no zero, porque se fosse $f'(0) = 0$ seria um isomorfismo.

3.4 A desigualdade do valor médio

Teorema 3.6 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$, $[a, a+h] \subset \mathbb{R}$, uma função contínua tal que $f|_{(a,a+h)}$ é diferenciável. Então existe t_0, $0 < t_0 < 1$, tal que*

$$f(a+h) - f(a) = h \cdot f'(a + t_0 h)$$

Vamos generalizar este teorema para funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$:
Denote $[a, b] = \{ta + (1-t)b \in \mathbb{R}^n; t \in [0, 1]\}$ e $(a, b) = \{ta + (1-t)b \in \mathbb{R}^n; t \in (0, 1)\}$.

Teorema 3.7. *Seja $U \to \mathbb{R}$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Suponha que $[a, a+h] \subset U$. Então, existe t_0, $0 < t_0 < 1$, tal que*

$$f(a+h) - f(a) = f'(a + t_0 h) \cdot h$$

Demonstração. Considere $\Phi : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $\Phi(t) = f(a+th)$. Ela satisfaz as condições do teorema do valor médio na reta, então $\exists\ t_0 \in (0, 1)$, tal que

$$\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(t_0).$$

Mas, $\Phi(1) = f(a+h)$; $\Phi(0) = f(a)$ e pela regra da cadeia, $\Phi'(t_0) = f'(a+t_0h) \cdot h$. □

Para aplicações $f : U \to \mathbb{R}^n$, com $n > 1$ não existe a igualdade do valor médio.

Exemplo 3.15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ o caminho de classe C^∞, definido por

$$f(t) = (\cos t, \text{sen } t).$$

Seu vetor velocidade é $f'(t) = (-\text{sen } t, \cos t)$, que é diferente de zero para todo t, de fato, $|f'(t)| = 1$.
Por outro lado, $f(2\pi) - f(0) = 0$, assim, nenhuma igualdade da forma

$$f(2\pi) - f(0) = f'(t_0) \cdot 2\pi$$

pode ser verdadeira.

No entanto, vale a desigualdade:

Teorema 3.8 (Desigualdade do valor médio)**.** *Seja $U \to \mathbb{R}^n$, contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $[a, a+h] \subset U$ e f é diferenciável em $(a, a+h)$, então*

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \cdot \sup_{0<t<1} |f'(a+th)|.$$

Demonstração. Seja $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ o caminho definido por $\Phi(t) = f(a+th)$.
Então, Φ é contínuo em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$.
Como $\Phi(0) = f(a)$ e $\Phi(1) = f(a+h)$ e $\Phi'(t) = f'(a+th) \cdot h$, basta provar que

$$|\Phi(1) - \Phi(0)| \leq M, \text{ onde } M = \sup_{0<t<1} |\Phi'(t)|.$$

De fato, basta mostra que $\forall\, \varepsilon > 0$, $|\Phi(1) - \Phi(0)| \leq M + \varepsilon$
Assim, considere o conjunto, para t_0, $0 < t < 1$,

$$X = \{t \in [t_0, 1]; |\Phi(s) - \Phi(t_0)| \leq (M+\varepsilon)s, \text{ para todo } s \in [t_0, t]\}.$$

É claro que X é um intervalo da forma $[t_0, \alpha]$.
Vamos começar mostrando que $\alpha = 1$.
De fato, suponha por absurdo, que $\alpha < 1$.
Então, $\exists\, \delta > 0$, tal que $\alpha + \delta < 1$ e tal que
$0 < \overline{\delta} < \delta$ implica

$$\Phi(\alpha + \overline{\delta}) = \Phi(\alpha) + \Phi'(\alpha) \cdot \overline{\delta} + r(\overline{\delta}), \text{ onde } |r(\overline{\delta})| \leq \varepsilon \cdot \overline{\delta}.$$

Segue que,

$$|\Phi(\alpha + \overline{\delta}) - \Phi(\alpha)| \leq (M + \varepsilon) \cdot \overline{\delta}, \text{ se } 0 < \overline{\delta} < \delta.$$

Como $\alpha \in X$, temos que $|\Phi(\alpha) - \Phi(t_0)| \leq (M + \varepsilon)\alpha$.

Portanto, $0 < \overline{\delta} < \delta$, implica

$$|\Phi(\alpha + \overline{\delta}) - \Phi(t_0)| \leq (M + \varepsilon) \cdot (\alpha + \overline{\delta}).$$

Como $\alpha \in X$, segue que todo $\alpha + \overline{\delta}$, com $0 < \overline{\delta} < \delta$ também pertence a X. Contradição!
Logo, $\alpha = 1$.
Portanto, $\forall\, t_0 \in (0, 1)$, temos que

$$|\Phi(1) - \Phi(t_0)| \leq M, \text{ pois } \Phi \text{ é contínua em } 0,$$

temos que $\lim\limits_{t_0 \to 0} |\Phi(1) - \Phi(t_0)| \leq M \Rightarrow |\Phi(1) - \Phi(0)| \leq M$. □

A demonstração acima possui a vantagem de fornecer uma boa cota para a desigualdade, para qualquer norma em $\mathbb{R}^n$, ou seja, a mesma demonstração funciona para qualquer norma. Se tivermos interessados apenas em mostrar que existe uma constante que limita, é possível considerar a demonstração abaixo que é substancialmente mais simples (e fornece uma cota idêntica à da demonstração acima no caso da norma euclidiana):

Teorema 3.9 (Desigualdade do valor médio). *Seja $U \to \mathbb{R}^n$, contínua no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $[a, a+h] \subset U$ e f é diferenciável em $(a, a+h)$, então*

$$|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \cdot \sup_{0<t<1} |f'(a+th)|.$$

Demonstração. Aqui vamos considerar a norma euclidiana, e definda $M = \sup\limits_{0<t<1} |f'(a+th)|$. Introduza, então, a função $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\varphi(t) = \langle f(a+th), f(a+h) - f(a) \rangle.$$

Assim, φ é contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $(0, 1)$, e pelo teorema do valor médio em $\mathbb{R}$, temos que existe $t_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\begin{aligned}
|f(a+h) - f(a)|^2 &= \langle f(a+h) - f(a), f(a+h) - f(a) \rangle \\
&= \langle f(a+h), f(a+h) - f(a) \rangle - \langle f(a), f(a+h) - f(a) \rangle \\
&= \varphi(1) - \varphi(0) \\
&= \varphi'(t_0) \\
&= \langle f'(a+t_0h) \cdot h, f(a+h) - f(a) \rangle && (3.1) \\
&\leq |f'(a+t_0h)||h||f(a+h) - f(a)| && (3.2) \\
&\leq M|h||f(a+h) - f(a)|,
\end{aligned}$$

onde usamos a regra da cadeia para obter a equação (3.1) e na desigualdade (3.2) usamos a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Desta forma, obtemos

$$|f(a+h) - f(a)|^2 \leq M|h||f(a+h) - f(a)|.$$

Se $|f(a+h)-f(a)| = 0$ a desigualdade enunciada é verdadeira, e se $|f(a+h)-f(a)| \neq 0$, podemos simplificar a expressão para obtermos:

$$|f(a+h) - f(a)|^2 \leq M|h|.$$

$\square$

Considerações Finais

Neste trabalho, tentamos trazer uma abordagem introdutória de conceitos que são abstratos e fornecer ainda uma noção de rigor justificando algumas propriedades da topologia do espaço $\mathbb{R}^n$. Embora tenhamos visto apenas rudimentos, em alguns exemplos as propriedades e o comportamento das funções com muitas variáveis podem ser compreendidas com mais clareza. Nosso objetivo é fornecer um material que possivelmente venha a ser um primeiro contato com a matéria e que possa servir de auxílio aos estudantes que tenham interesse na Análise.

Apêndice

3.5 Revisão de Álgebra Linear

Seja $\{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base do $\mathbb{R}^n$. Defina os funcionais $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{i=1}^n x_i u_i$ e $f_i(x) = x_i$. É fácil ver que $\forall i$, f_i é um funcional linear. Note ainda que

$$f_i(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Seja g um funcional linear em $\mathbb{R}^n$, i.e., seja $g \in (\mathbb{R}^n)^*$, então,

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(u_i) = \sum_{i=1}^n g(u_i) \cdot f_i(x) \Rightarrow g = \sum_{i=1}^n g(u_i) f_i.$$

Logo, $(\mathbb{R}^n)^*$ é gerado por $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Para mostrar que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é uma base, falta verificarmos que são L.I. Assim, sejam $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n = 0,$$

Daí, aplicando a equação acima no vetor u_i, obtemos

$$a_1 f_1(u_i) + \ldots + a_n f_n(u_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0.$$

Logo, $\{f_1, \ldots, f_n\}$ forma um conjunto L.I.
O conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ é chamado de base dual de $\{u_1, \ldots, u_n\}$. Tome, $f : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ um funcional k-linear, isto é, para cada $i = 1, \ldots, k$, valem as igualdades:

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + \tilde{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) + f(x_1, \ldots, \tilde{x}_i, \ldots, x_k).$$

e $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \alpha f(x_1, \ldots, x_k)$, onde $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o conjunto dos funcionais k-lineares em $\mathbb{R}^n$. Temos que $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, com as operações: $(f+g)(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k) + g(x_1, \ldots, x_k)$ e $(\alpha f)(x_1, \ldots, x_k) = \alpha f(x_1, \ldots, x_k)$, onde $f, g \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Existe uma operação sobre espaços de funcionais lineares de ordens diferentes.

Definição 3.5. Sejam $f \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ e $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ definimos o produto tensorial

$$f \otimes g \in \mathcal{L}_{k+p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$f \otimes g(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p}) = f(x_1, \ldots, x_k) + g(x_{k+1}, \ldots, x_{k+p})$$

onde $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+p} \in \mathbb{R}^n$.

Note que a ordem de f e g importa, então, em geral, $f \otimes g \neq g \otimes f$. No entanto, valem as propriedades:

$$(f_1 + f_2) \otimes g = f_1 \otimes g + f_2 \otimes g$$

$$f \otimes (g_1 + g_2) = f \otimes g_1 + f \otimes g_2$$

$$(\alpha f) \otimes g = f \otimes (\alpha g) = \alpha f \otimes g, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h).$$

Note que $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$. O produto tensorial permite que obtenhamos uma base de $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ em termos de uma base dual de $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.10. *Seja $\{u_1, \ldots, u_m\}$ uma base em $\mathbb{R}^n$, e seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ uma base dual. Temos então que*

$$\mathscr{B} = \{f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_k}; (1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n)$$

é uma base de $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Em particular, $dim(\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) = n^k$.

Demonstração. Note que

$$f_{i_1} \otimes \ldots \otimes f_{i_k}(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}) = \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k} = \begin{cases} 1, & \text{se } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dados k vetores, $x_1, \ldots, x_k$ tais que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j, \text{ e seja } f \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_k) &= f\left(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} u_{j_1}, \ldots, \sum_{j_k=1}^{n} a_{kj_k} u_{j_k}\right) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_k}^{n} a_{1j_1} \ldots a_{nj_n} f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}) \\ &= \sum_{j_1, \ldots, j_k} f(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k}) \cdot f_{j_1} \otimes \ldots \otimes f_{j_k}(x_1 \ldots, x_k) \end{aligned}$$

Logo,

$$f = \sum_{j_1,\ldots,j_k} f(u_{j_1},\ldots,u_{j_k}) \cdot f_{j_1} \otimes \ldots \otimes f_{j_k}.$$

Daí, $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ é gerado por $\mathscr{B}$. Sejam agora $a_{j_1,\ldots,j_k} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{j_1,\ldots,j_k} a_{j_1,\ldots,j_k} f_{j_1} \otimes \ldots \otimes f_{j_k} = 0.$$

Tomando os vetores $(u_{j_1},\ldots u_{j_k})$, temos que $a_{j_1,\ldots,j_k} = 0$. Logo, $\mathscr{B}$ é L.I. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Lima, Elon Lages *Curso de análise* 2,IMPA, (2010).

[2] Munkres, James R. Munkres, *Analysis on manifolds*. Addison-Wesley Publishing Company, (1991).

[3] Spivak, M., *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorem of Advanced Calculus*. Addison-Wesley Publishing Company, (1965).

[4] Bell, E.T., *Men of Mathematics*. Touchstone, (1986).