Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matematica - IM
Sociedade Brasileira de Matematica - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Uma Análise do Ensino de Geometria no Ensino Médio Através do Teorema de Euler para poliedros convexos

Jorge Alécio Mascarenhas

Salvador - Bahia
Abril de 2013

Uma Análise do Ensino de Geometria no Ensino Médio Através do Teorema de Euler para poliedros convexos

Jorge Alécio Mascarenhas

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Antonio Nogueira Fernandes.

Salvador - Bahia
Abril de 2013

Uma Análise do Ensino de Geometria no Ensino Médio Através do Teorema de Euler para poliedros convexos

Jorge Alécio Mascarenhas

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, aprovada em 12 de março de 2013.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marco Antônio Nogueira Fernandes (Orientador)
UFBA

Prof. Dr. Isaac Costa Lázaro
UFBA

Prof. Dr. Hilário Alencar da Silva
UFAL

Dedico este trabalho aos meus pais, Juvenal Alves Mascarenhas e Anna Brêda Mascarenhas que, mesmo não estando mais presentes, foram fundamentais para a formação da pessoa que sou.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me concedido a força necessária para toda essa jornada, por ter me abençoado, ter me dado condições de compreender e de ir até ao fim desse curso.

Sou imensamente grato aos idealizadores, coordenadores e todos aqueles que contribuíram com o curso PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, por essa proposta que respeita a condição daqueles, como eu, que já estão trabalhando e que não dispõe de horários tão flexíveis como os exigidos na proposta do Mestrado Acadêmico.

Agradeço à CAPES pelo apoio dado durante todo o curso. Ajuda essa que viabilizou superar os problemas com deslocamentos, vencer a distância entre a cidade que moro e a cidade onde realizei o curso, que permitiu a aquisição de muitos livros que servirão para toda a minha vida profissional.

Gandes foram as contribuições dos professores e tutores do curso, aos quais devo muita gratidão. A compreensão, os sábados de estudo e de diálogos, os conselhos e os exemplos foram valiosos nesse percurso.

Quero registrar a minha gratidão ao meu orientador, o professor Doutor Marco Antonio Nogueira Fernandes, pela forma como me ajudou, com conselhos, dicas e principalmente com a tranquilidade que conduziu esse processo, pois grandes foram as minhas dificuldades e em momento algum ele me deixou desanimar.

Os colegas do curso formaram um verdadeiro time em que todos buscaram o crescimento, não apenas o individual, mas também o coletivo. Acredito que todos cresceram muito com esse curso, em conhecimento e como pessoas. Muitas das dificuldades foram vencidas pela ajuda de um e de outro colega.

Agradeço à minha esposa Ana Célia pela paciência, pela dose diária de força de vontade que me foi dada, pelo companheirismo pelo amor a mim concedido. Valiosa foi a presença das minhas filhas Maíra e Rebeca que, mesmo no momento de suas adolescências, tiveram a paciência e compreenderam a minha ausência em vários momentos desse curso: era preciso estudar.

Tenho uma família com oito irmãos e sou grato a todos eles: Antonio Carlos, José Mário, Maria, Ana Maria, Nancy, Rita Brêda, Luis Alberto e Luciano Brêda, pois acostumados com a minha presença constante souberam respeitar a necessidade de me abster de vários momentos familiares sem diminuir o amor deles por mim.

Obrigado. Que Deus abençoe todos nós.

"A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida".

Jacques Bernoulli

Resumo

Nesta dissertação será feita uma análise da situação atual do ensino da Geometria nos cursos do Ensino Médio através da apresentação do Teorema de Euler para Poliedros Convexos e da análise da sua utilização em salas de aula. Será feita uma reflexão sobre o desenvolvimento do raciocínio dedutivo nesse nível de ensino e sobre a abordagem que se dá a formação do cidadão quanto a algumas competências importantes para a capacidade de análise crítica da realidade. Uma abordagem histórica investigará a trajetória das didáticas utilizadas no ensino dessa ciência. Por fim serão levantadas propostas para o ensino de Geometria e para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo através de demonstrações geométricas.

Palavras-chave: Ensino, Geometria, Raciocínio Dedutivo, Euler e Poliedros Convexos.

Abstract

This dissertation is an analysis of the current situation of the teaching of geometry in high school courses through the presentation of Euler's Theorem for Convex Polyhedra and the study of its use in classrooms. The purpose of the research is to make a reflection on both the development of deductive reasoning and on the approach towards the training of citizens regarding some important strengths which are key to the improvement of students' capacity of critical analysis of their reality within this level of education. A historical approach will investigate the trajectory of methods that are used to teach such science. Ultimately, proposals will be raised aimed at the teaching of Geometry and at the development of deductive reasoning through geometrical demonstrations.

Keywords: Teaching, Geometry, Deductive Reasoning, Euler's Theorem for Convex Polyhedra.

Sumário

Introdução

O texto que se segue é a uma reflexão sobre o Ensino de Geometria para alunos do Ensino Fundamental II e, principalmente, para alunos do Ensino Médio. Tal reflexão será pautada na experiência do autor em sala de aula, nas abordagens sugeridas por alguns livros didáticos do Ensino Médio, nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental e nos Parâmetros Curriculares Naciuonais para o Ensino Médio.

A experiência profissional do autor lecionando Matemática e Geometria teve início ainda durante o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual de Feira de Santana quando, a partir do terceiro semestre, foi realizado um estágio na área de Matemática numa escola da rede estadual, durante o curso também foi monitor de Geometria Analítica auxiliando alunos dos cursos de Matemática e de Engenharia Civil, situação que já permitiu notar muitas iseguranças nos estudantes quanto à Geometria e dificuldades de representação e de interpretação.

A partir do ano de 1997 foi iniciada a atividade profissional, lecionando em escolas da rede privada de ensino a disciplina Matemática e no ano de 2001 na rede Estadual. Com uma abordagem bastante própria sobre o ensino de Geometria tomando o cuidado, desde o oitavo ano de Ensino Fundamental, de garantir a validade do que se apresenta ao aluno, com demonstrações e deduções. Foi-se constastando um amadurecimento nos estudantes, quanto à argumentação, quanto à exploração dos problemas e no prazer de estudar Matemática e Geometria.

Entendendo essa prática, de apresentar um conhecimento cuidadosamente validado sem, no entanto, pretender fazer uma construção axiomática da Geometria, por entender que não é a abordagem apropriada para o grau de maturação dos estudantes, conseguiu-se grande respeito do alunado, e criou-se um ambiente onde os alunos não expressam medo ou rejeição quanto ao estudo dessa área.

A criação de um Clube da Matemática na escola privada bem como a participação em Olimpíadas de Matemática mobilizou grande parte do alunado, criando um clima muito positivo frente ao estudo de Matemática e Geometria. Aulas de resolução de problemas, o acervo de desafios lógicos, geométrico e de manipulação geram a desconstrução de preconceitos com essas áreas do conhecimento. Como frutos colhidos desse trabalho hoje notou-se um grande número de alunos que trilharam o cominho das engenharias e os cursos de Matemática.

Os livros didáticos mais atuais estão evitando fazer as construções de validação do conhecimento. Não é raro encontrar livros que apresentam propriedades geométricas apenas por meio de exemplos resolvidos e fórmulas sem fazer a devida construção. Tal abordagem gera, no estudante, a sensação de que a Matemática e a Geometria sempre esteviveram prontas e não se discute como se chegou àquele resultado. Os livros evoluíram muito no tocante à contextualização, pois superaram uma postura anterior de apenas treinar exaustivamente certos conteúdos, passando para problemas que apresentam contextos mais fáceis de situar na realidade do aluno, tal direção precisa ser mantida e valorizada cada vez mais.

Tomando como ponto de comparação o Teorema de Euler para Poliedros Convexos, buscou-se perceber como os livros didáticos apresentam esse tema. Se é feita a demonstração ou não, se há um contexto histórico nessa apresentação ou se apenas são feitas aplicações e resoluções de problemas.

A fórmula percebida por Euler tem uma história bastante rica e possui demonstrações que são adequadas ao grau de abstração dos alunos do Ensino Médio. A história da demonstração deste teorema ajuda a perceber como o conhecimento matemático é construído. A contextualização histórica é importante para gerar no aluno um melhor entendimento de como a Geometria foi construída ao longo da trajetória humana.

Inicialmente é apresentada a história do criador do teorema em questão, relata-se quem foi Leonhard Euler, e algumas de suas contribuições. A história do Teorema e da sua validação a partir da demonstração são apresentadas em seguida, posteriormente são apresentadas duas demonstrações que se tem registro em livros do Ensino Médio ou superiores, a primeira foi da por Cauchy e a segunda foi publicada por Zoroastro Azambuja Filho na terceira edição da Revista do Professor de Matemática e publicada no livro Meu professor de Matemática e outras histórias de Elon Lages Lima.

O Ensino da Geometria é analisado de duas maneiras, a primeira por meio do seu desenrolar na história da educação brasileira e na outra é traçado um perfil do quadro atual do Ensino da Geometria. Tal quadro é feito a partir dos documentos oficias, como Os Parâmentros Curriculares Nacionais, os quais apresentam um quadro atual do Ensino de Matemática no Brasil e dos livros didáticos atualmente publicados no Brasil, em que se observa como a Geometria é construída.

A partir dos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, é percebido o que é traçado como contribuições necessárias para formação do cidadão, ou seja, a participação do ensino da Geometria na formação crítica, as competências e habilidades que se espera construir nesse adolescente, bem como o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, tão importante para a construção de argumentações no mundo atual.

O pensamento matemático, ou seja, o que se espera da contribuição do ensino de Matemática e da Geometria para o aprimoramento das formas de análise, é abordado no final do terceiro capítulo, bem como a importância do uso de algumas demonstrações que valorizem o pensamento, a criatividade, sem perder o rigor da argumentação, para desenvolver nos estudantes uma maior maturidade na ideia do que significa a Matemática na vida de cada um.

Finalmente são ponderados alguns aspectos que se pode tirar como conclusão da pesquisa realizada. O que pode ser agregado às estratégias de Ensino da Geometria, o que se pode fazer para valorizar esse ensino e, principalmente, o caminho que se precisa trilhar para resgatar a importância, para a vida e para o crescimento pessoal de cada estudante do Ensino Médio, mesmo aquele que não pretendam seguir carreira nas áreas que envolvam diretamente as disciplinas das ciências matemáticas.

Capítulo 1

O Teorema de Euler para Poliedros Convexos

1.1 Breve Histórico Sobre O Matemático Leonhard Euler

Leonhard Euler nasceu em 1707 na Basiléia, uma importante cidade suíça, filho de um pastor calvinista, é um dos maiores nomes da história da Matemática. É considerado pelos historiadores como a pessoa que mais produziu artigos matemáticos de todos os tempos, escrevendo sobre praticamente todos os ramos da Matemática, bem como sobre ramos da Física. Segundo Boyer [2], página 303:

> (...) O mais importante matemático nascido na Suiça nessa época - ou em qualquer outra - foi Leonhar Euler (1707 - 1783), que nasceu em Basiléia.
>
> O pai de Euler era um ministro religioso que, como o pai de Jacques Bernoulli, esperava que seu filho seguisse o mesmo caminho. Porém o jovem estudoou com Jean Bernoulli e se associaou com seus filhos, Nicolaus e Daniel, e através deles descobriu sua vocação.

O pai de Euler tinha esperança que seu filho seguisse a carreira teológica, mas logo cedo percebeu seu grande potencial para as exatas. Foi o próprio pai de Euler, que tinha também formação nas áreas de exatas, que iniciou o filho pelos caminhos da lógica e, posteriormente, conseguiu que seu filho estudasse com Jean Bernoulli, o que lhe propiciou uma aproximação com a família Bernoulli.

A formação de Euler foi extremamente vasta, estudando matemática, teologia, medicina, astronomia, física e línguas orientais. Aos vinte anos mudou para a Rússia, em busca de uma vaga na área de medicina na recém criada Academia de São Petersburgo.

Nessa mesma Academia de São Petersburgo, dois jovens da família Bernoulli tinham ido para ocupar as cadeiras de matemática. Como afirma Eves [10], página 471.

> Em 1727, quando Euler tinha apenas vinte anos de idade, os irmãos Daniel e Nicolaus Bernoulli, que pertinceiam à Academia de São Petersburgo, recém criada por Pedro, o Grande, conseguiram que ele fosse indicado membro da Instituição. Com a volta de Daniel a seu país pouco depois, para ocupar a cadeira de matemática da Universidade da Basiléia, Euler tornou-se o cabeça da seção de matemática da Academia.

Na Academia de São Petersburgo foi criada uma revista especializada em Matemática, da qual Euler participou desde seu lançamento com artigos constantes. A produção desse gênio era tão grande que mesmo depois da sua morte a revista continuou publicando artigos seus por mais de cinquenta anos.

O respeito e a admiração por Euler eram enorme e sua fama correu o mundo. Em 1741 foi convidado pelo Imperador Frederico o Grande para fazer parte da Academia de Berlim, onde ficou por vinte e cinco anos. A simplicidade do grande matemático incomodava o imperador que esperava uma postura mais requintada de uma pessoa tão ilustre. Essa simplicidade de Euler acabou gerando descontentamentos por parte do Imperador e, em alguns episódio, constrangimentos ao matemático. Em 1766, a convite de Catarina a Grande, retorna à Academia de São Petersburgo, onde vive até 1783, ano em que morre em sua casa o mestre da Matemática.

A história da vida de Leonhard Euler é riquíssima em contribuições para os diversos ramos da Matemática e das ciências, tendo produzido artigos em diversas áreas do conhecimento. Mesmo com tamanha sabedoria e profundidade ele era também conhecido por sua didática e simplicidade ao abordar temas trabalhados nos níveis escolares elementares, nesse sentido ele também produziu livros didáticos para esses níveis de ensino da Matemática para a Rússia. Segundo Boyer [2] (p. 305):

> De 1727 a 1783 a pena de Euler esteve ocupada aumentando os conhecimentos disponíveis em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada, dos mais elementares aos mais avançados. Além disso, em quase tudo, Euler escrevia na linguagem e notação que usamos hoje, pois nenhum outro indivíduo foi tão grandemente responsável pela forma da matemática de nível universitário de hoje quanto Euler, o construtor de notação mais bem-sucedido em todos os tempos.

Aos vinte e oito anos Euler perdeu a visão do seu olho direito, conta-se que devido a esforços excessivos da visão em um de seus estudos e aos sessenta anos começou a perder a visão do outro olho devido a uma catarata. Sabendo de sua cegueira inevitável ele mandou construir um quadro negro enorme, no qual treinou escrever sem olhar e dessa forma, ditando para seus filhos e escrevendo no quadro negro, continuou produzindo artigos na mesma dinâmica de antes devido à sua memória extraordinária e sua grande capacidade de concentração. Boyer afirma [2], página 304:

> (...) Em 1735 tinha perdido a visão do olho direito - por excesso de trabalho, ao que se diz - mas esta infelicidade não diminuiu em nada sua produção de pesquisa. Conta-se que ele disse que ao que parecia seu lápis o superava em inteligência, tão facilmente fluíam artigos; e ele publicou mais de 500 artigos durante sua vida. Por quase meio século depois de sua morte obras de Euler continuavam a aparecer nas publicações da Academia de S. Petersburgo(...)

Carl Boyer afirma ainda [2] página 304:

> (...) em 1766 Euler voltou à Russia. Durante esse ano Euler soube que estava perdendo a visão do olho que restava devido a catarata, e preparou-se para a cegueira final praticando escrever com giz numa grande lousa e ditando para seus filhos. Uma operação foi feita em 1771, e durante alguns dias Euler enxergou novamente; mas o sucesso não durou e Euler passou quase todos os últimos dezesseis anos de sua vida na total cegueira.

1.2 O teorema de Euler para Poliedros Convexos e sua história

Um trecho da história da Matemática e da vida de Leonhard Euler muito rico, principalmente para a Educação Básica é a relação feita entre o número de vértices (V), arestas (A) e faces (F) de um poliedro.

Definição de poliedros: Um poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos, onde cada lado de um destes polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono. Cada um destes polígonos chama-se uma face do poliedro, cada lado comum a duas faces chama-se uma aresta do poliedro e cada vértice de uma face é também vértice do poliedro.

A figura 1.1 é um poliedro, formado por oito triângulos equiláteros, como o triângulo $V_1V_2V_5$, os lados dos triângulos são as arestas, logo V_1V_2 é uma aresta e os pontos $V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4,\ V_5\ e\ V_6$ são os vértices do poliedro, que são os vértices dos triângulos correspondentes às faces.

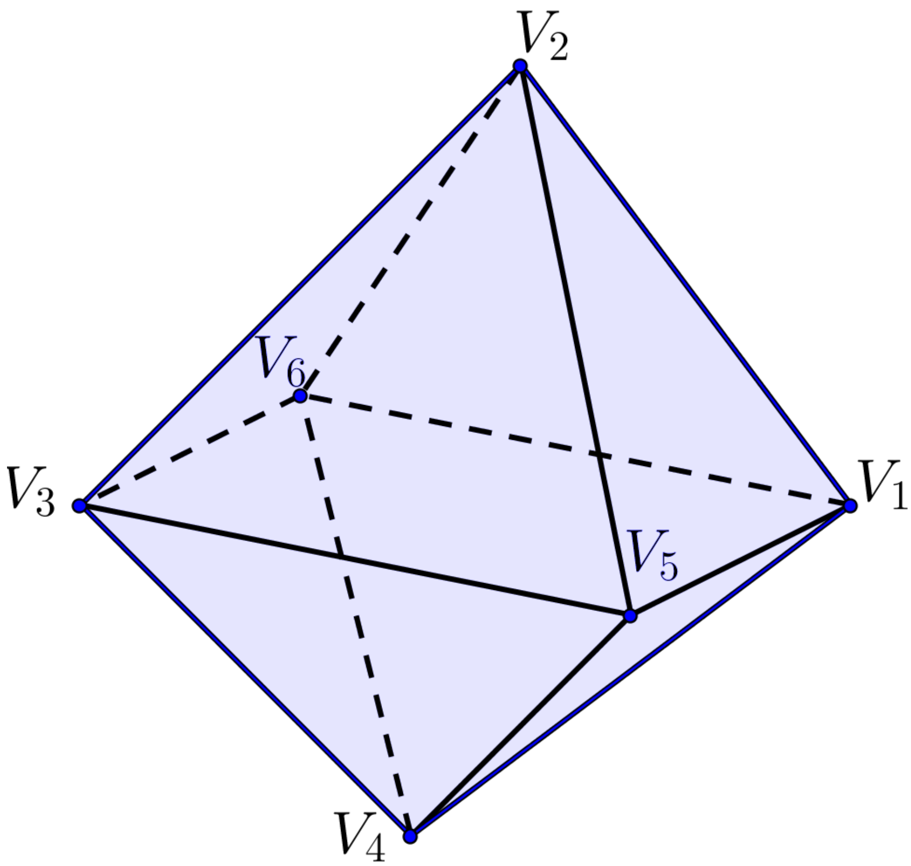

Figura 1.1: Octaedro Regular

Definição de Poliedro Convexo: Todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior deste poliedro. Dizemos que um poliedro é convexo se o seu interior C é convexo, isto é, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos de C está inteiramente contido em C. Em um poliedro convexo toda reta não paralela a nenhuma de suas faces o intersecta em, no máximo, dois pontos.

Outra Definição de Poliedro Convexo: Dize-se que um poliedro é convexo quando cada face deixa todas as outras faces no mesmo semiespaço determinado por ela.

Definição de poliedro não convexo: um poliedro que não é convexo será chamado de poliedro não convexo.

O Teorema de Euler para poliedros foi enunciado em 1758 e afirma que: Se um poliedro possui V vértices, A arestas e F faces, então:

$$V - A + F = 2$$

.

Neste texto serão abordadas duas demonstrações para o Teorema de Euler para poliedros convexos. A primeira será a fornecida por Augustin-Louis Cauchy e a segunda foi apresentada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho. A história do teorema e de sua demonstração já é um belo episódio do pensamento matemático moderno. Um problema importante sobre esse fato é que o autor do teorema nunca se preocupou em definir um poliedro. Segundo Elon [13] (p. 70) "Muito provavelmente Euler (o qual nunca se deu ao trabalho de definir precisamente "poliedro") não considerava como poliedros os sólidos, como o da figura 1.2, para os quais seu teorema é falso.

Para conceber uma demonstração, Cauchy teve a ideia de planificar o poliedro, através de uma projeção feita a partir de um ponto externo ao poliedro. O mais belo dessa demonstração é a inventividade e a criatividade, de sair de um problema espacial para um problema no plano.

Um fato importante a ser destacado é que este teorema só é válido em certas condições, o enunciado já deve ser preciso quanto a isso, pois existem poliedros, que não são tão comuns à nossa imaginação, que não verificam essa relação. O significado desse fato não é a invalidade do teorema, mas sim expressa à necessidade de sua delimitação, incluindo aí as definições dos termos que ele abrange. Tomando a definição já fornecida de poliedro convexo e restringindo o teorema para esse tipo de poliedro, Cauchy conseguiu construir sua demonstração.

O poliedros da figura 1.2 possui 9 vértices e 9 faces que estão destacados na figura e, observando-se que de cada vértice partem 4 arestas, como são 9 vértices e cada aresta é contada duas vezes, uma em cada expremidade, então a figura possui $36 : 2 = 18$ arestas, logo para este poliedro $V - A + F = 9 - 18 + 9 = 0$ e não satisfaz a relação de Euler.

A figura 1.3 também não verifica, pois possui 16 vértices, 16 faces e 32 aretas, logo

$$V{-}A + F = 0.$$

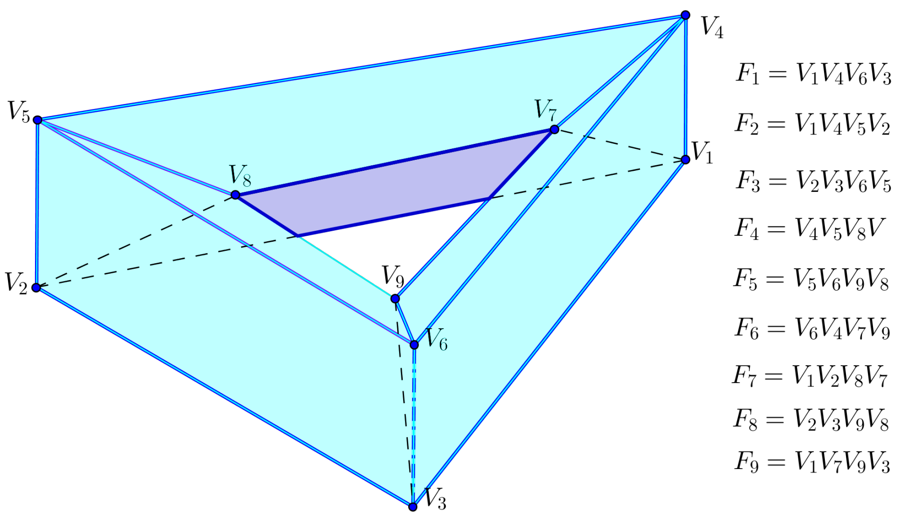

Figura 1.2: Poliedro não convexo

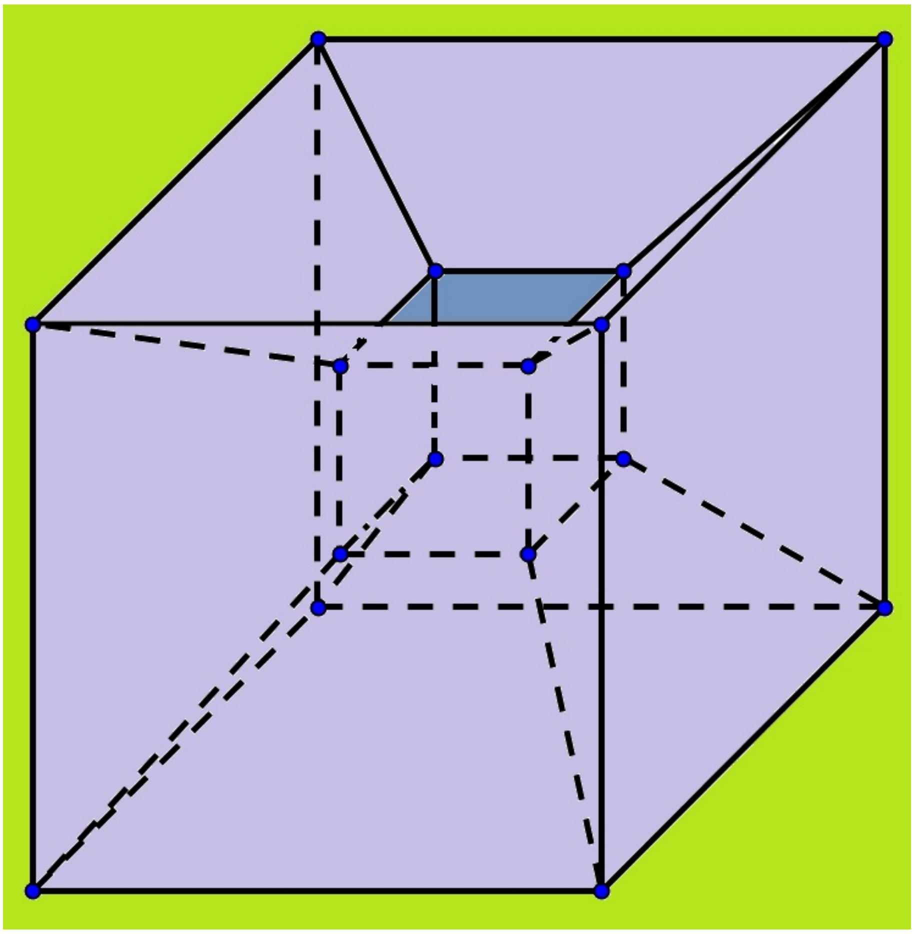

Figura 1.3: Poliedro não convexo

Já o poliedro da figura 1.4 não é convexo, mas satisfaz a relação de Euler. De fato V = 16, F = 10 e A = 24, logo

$$V{-}F + A = 2.$$

O primeiro questionamento que emerge é: ”Essas figuras correspondem a poliedros?”. Essa pergunta impõe a necessidade de uma definição clara e inequívoca de poliedro. A resposta é sim, são poliedros que não são tão comuns à ideia que se tem de poliedro, mas satisfaz à definição dada.

A definição de poliedro é bastante abrangente e nesta condição podem-se encontrar poliedros em que a relação V − A + F seja igual a outros valores. O fato interessante é que o resultado da expressão configura uma característica dos tipos de poliedros. Tem-se então um grupo em que V − A + F é igual a 2, em outro grupo é igual a zero e assim se cria uma separação de poliedros com esta característica.

Para uma abordagem da Educação Básica o Teorema de Euler para Poliedros

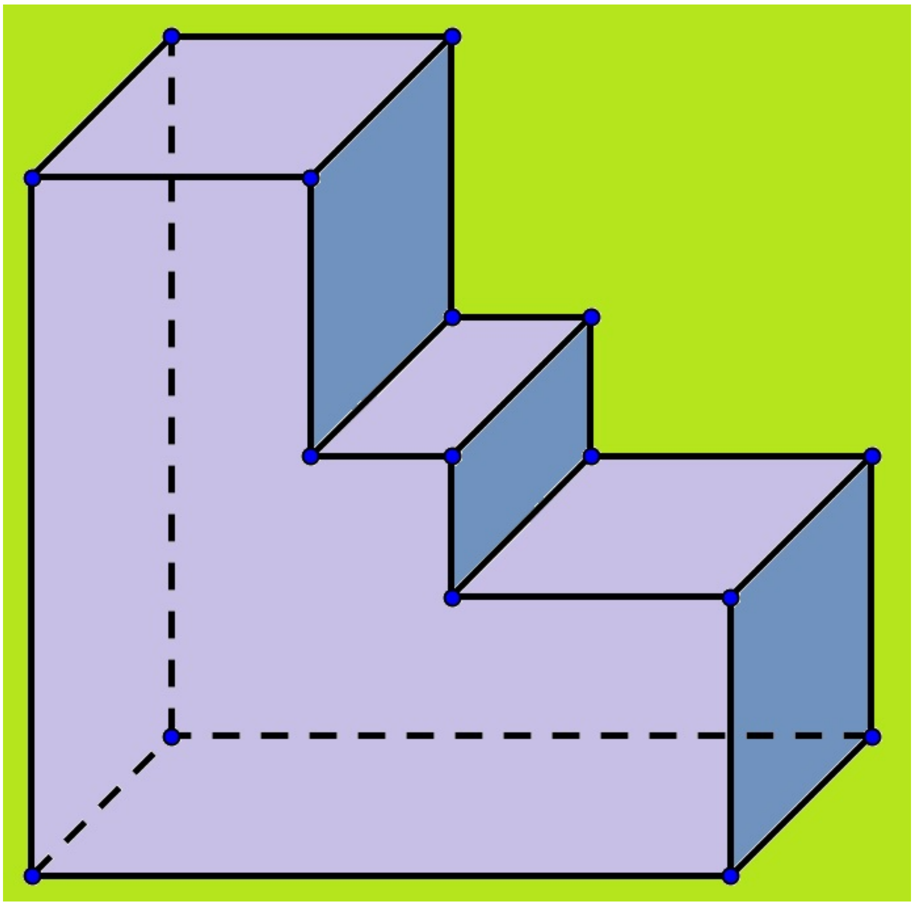

Figura 1.4: Poliedro não convexo

mostra-se muito valioso. Ele tem qualidades que são atraentes aos estudantes: ele é simples, de fácil compreensão de seu resultado e de sua aplicação, é geral e, para alunos do Ensino Médio, sua demonstração é compreensível e encanta pela criatividade. Uma atividade que gera surpresa em alunos do Ensino Fundamental II é verificar em poliedros distintos que a fórmula é sempre válida, pois a relação parece mágica, associando de uma maneira invariável os elementos de um poliedro convexo qualquer. É fato que nessa fase do ensino são apresentados apenas os poliedros convexos e aqueles em que a relação é válida, até porque os outros poliedros são mais difíceis de imaginar.

A solução para evitar contra indicações ao Teorema de Euler, na Educação Básica é enunciar este teorema para poliedros convexos e, no Ensino Médio, geralmente no segundo ano, apresentar a demonstração proposta por Cauchy para encantar os alunos com a beleza de um raciocínio criativo. É possível, e adequado, que a segunda demonstração seja dada também, pois um teorema pode ser demonstrado por mais de um caminho. Por exemplo o Teorema de Pitágoras, a relação matemática que existe entre a medida da hipotenusa e as medidas dos catetos, já foi demonstrada por mais de quatrocentas formas diferentes.

O matemático Poincaré mostrou, em sua teoria, que poliedros distintos, mesmo tendo valores diferentes para o número de vértices, arestas e faces, podem ter

$$X(P) = V - A + F$$

,

conhecido hoje como característica de Euler-Poincaré, iguais. Logo, um tetraedro, um hexaedro e todos os poliedros convexos que possuem X(P) = 2, ou seja, possuem característica de Euler-Poincaré igual a 2.

A figura 1.5 tem V = 17, F = 18 e A = 36, logo a característica de Euler-Poincaré

$$V - A + F = 1$$

.

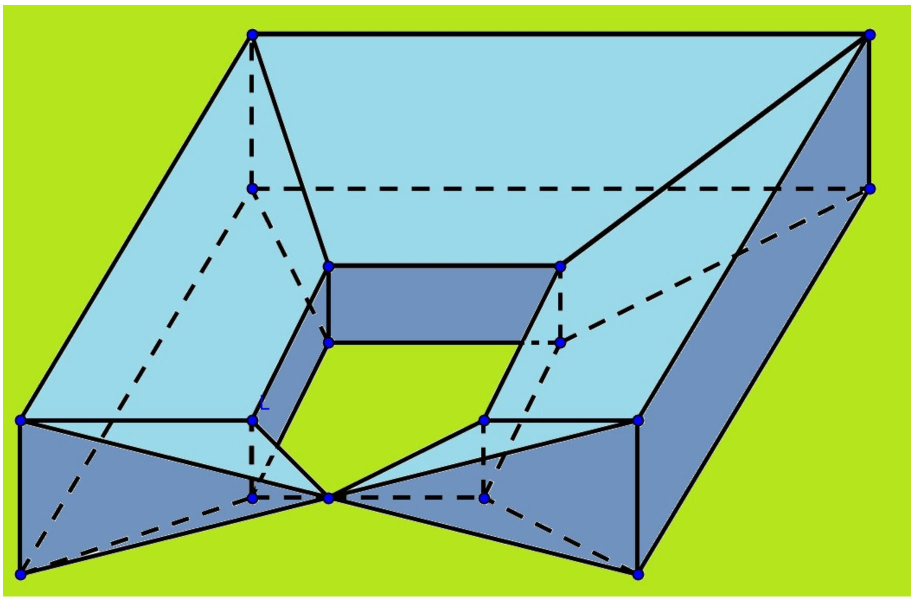

Figura 1.5: Poliedro não convexo

1.3 A Primeira demonstração

A demonstração que será apresentada a seguir é devida da Cauchy, e foi apresentada no ano de 1813. Para o Ensino Médio é limitada à poliedros convexos, para evitar uma abordagem muito mais complexa.

Diz-se que uma região C do espaço é convexa quando todo segmento que liga dois pontos de C está inteiramente contida em C.

Um poliedro é dito convexo quando limita em seu interior uma região convexa do espaço.

O enunciado do Teorema de Euler para Poliedros Convexos afirma: Seja P um poliedro convexo com F faces, V vértices e A arestas, então:

$$V - A + F = 2.$$

Primeiro passo: Retira-se uma face do poliedro. Note que esse procedimento diminui uma face, mas preserva o número V, de vértices, e A, de arestas. Logo se tem

$$V - A + F = 1$$

.

Segundo passo: chama-se aresta livre do poliedro a aresta que é lado de apenas um polígono. O poliedro, após a retirada de uma de suas faces possui as arestas livres correspondentes ao número de lados da face retirada. Como o poliedro em questão é convexo, projeta-se o poliedro sobre um plano H, a partir de um ponto Q suficientemente próximo ao lugar onde ficava a face que foi retirada, de forma que nenhuma semirreta que parta de Q contenha mais de um ponto do poliedro P. Uma ideia muito interessante é imaginar o ponto Q como um foco luminoso que projeta a imagem do poliedro numa anteparo (o plano H).

Terceiro passo: Decompondo-se cada polígono da imagem plana em triângulos que não se cruzam, isso pode ser feito traçando diagonais a partir de um único vértice de cada face, não se altera a expressão V – A + F = 1. Nota-se que para cada novo triângulo formado aumenta-se uma aresta e aumenta-se uma face, então essa alteração não interfere no resultado da expressão.

Considerando que uma aresta é chamada de aresta livre quando é lado de apenas uma face da figura plana gerada pela projeção sobre o plano H. Na figura 1.6 o triângulo, V_1 V_2 V_7 destacado, possui uma aresta livre, a areas V_1 V_2, pois é aresta de apenas um triângulo. Na figura 1.7 o triângulo V_1 V_5 V_6 possui duas arestas livres, são elas: V_1 V_5 e V_1 V_6.

Quarto passo: Começa-se a "despetalar" a imagem plana, ou seja, partindo de fora para dentro vai-se retirando cada triângulo da figura plana. Se for retirado um triângulo que possui uma aresta livre diminui-se uma aresta e uma face, logo a expressão V − A + F continua resultando um. Se o triângulo retirado tiver duas faces livres então serão retirados: uma face, um vértice e duas arestas, logo a expressão continua valendo um.

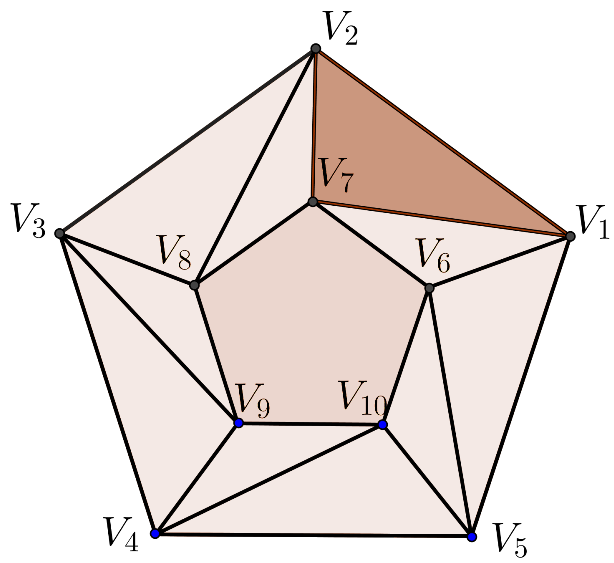

Figura 1.6: Despetalando: a face sombreada possui uma aresta livre

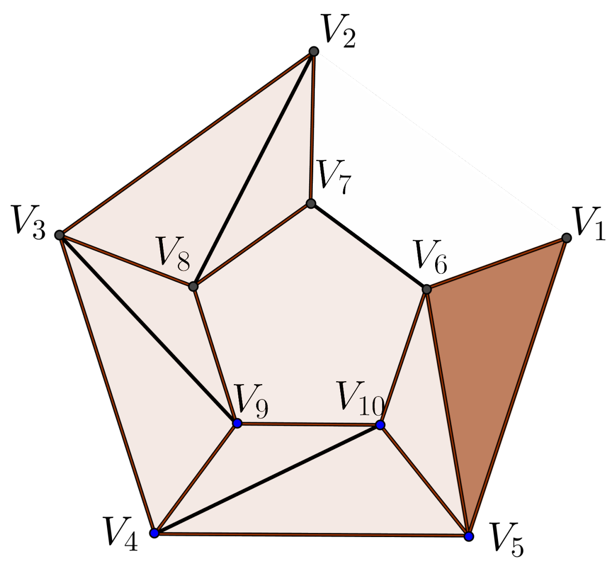

Figura 1.7: Despetalando: a face sombreada possui duas arestas livres

Quinto passo: retirando-se, uma a uma, as faces que têm uma ou duas arestas livres chaga-se, finalmente, a ultima face, que é um triângulo, para o qual a expressão

$$V–A + F = 1,$$

ficando então demonstrado o Teorema de Euler para poliedros convexos.

A seguir tem-se a sequência dos cinco passos descritos por Cauchy para um prisma triangular, o qual foi escolhido pela simplicidade da visualização do processo.

Toma-se o poliedro inicialmente: um prisma triangular reto.

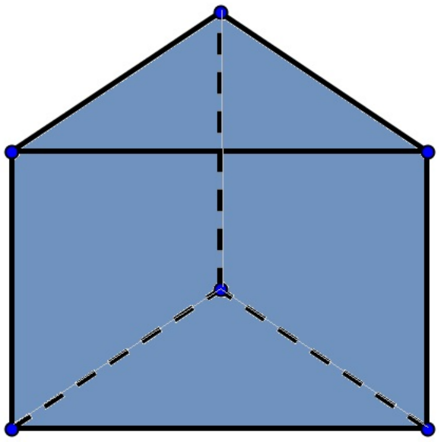

Figura 1.8: Prisma triangular reto

Em seguida retira-se uma de suas faces, por exemplo, o triângulo superior que é uma das bases, nesse caso.

O passo seguinte é tomar um ponto próximo à face que foi retirada e usar esse ponto como origem de semirretas para projetar a sombra no plano H.

Na sequência fica criada a imagem correspondente ao poliedro projetado no plano, ou seja, tem-se o poliedro planificado e neste caso tem-se:

$$V = 6,\ A = 9\ \ e\ \ F = 4,\ \ logo\ \ V–A + F = 6 - 9 + 4 = 1.$$

Dividindo cada um dos polígonos planos com diagonais para formar triângulos. A figura ficou com 7 triângulos, com V = 6 (não alterou o número de vértices), A =

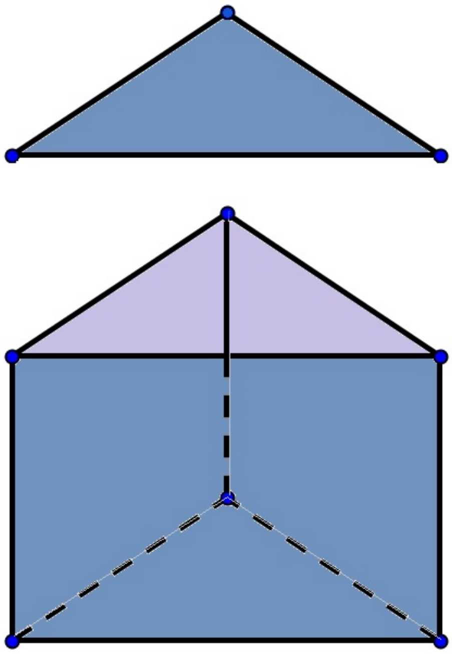

Figura 1.9: Retira-se a ”tampa”

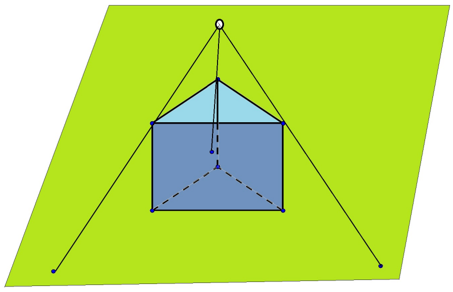

Figura 1.10: Projeção sobre o plano H

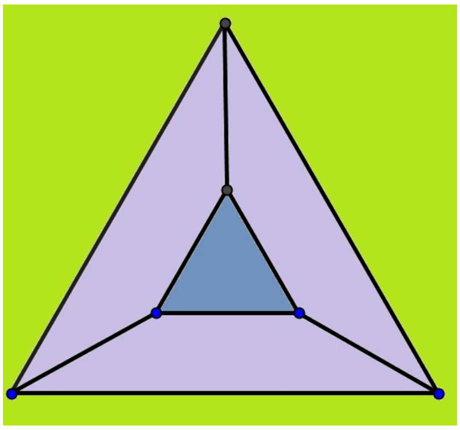

Figura 1.11: Polígono planificado, sem uma das faces

12, (aumentou em 3 o número de arestas) e F = 7 (aumentou em 3 o número de faces). Tem-se que:

$$V - A + F = 6 - 12 + 7 = 1.$$

As alterações sofridas pela figura não alteraram o valor da característica de Euler-Poincaré.

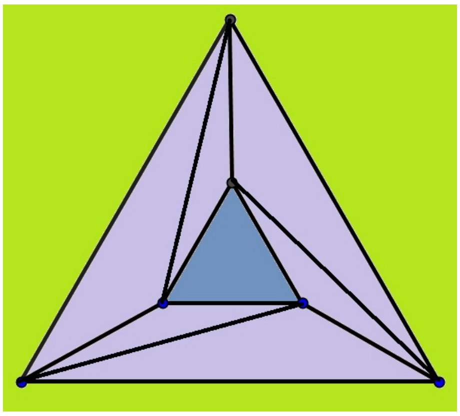

Figura 1.12: Faces divididas em triângulos

Iniciando o processo de “despetalar” a figura, vai-se retirando um triângulo com uma face livre. Diminuiu-se uma face e uma aresta, logo:

$$V - A + F = 1.$$

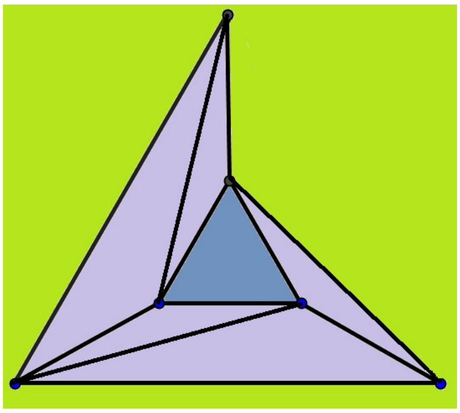

Figura 1.13: Despetalação: retirando a primeira face

Depois outro triângulo com uma face livre

Até retirar o último triângulo com uma face livre.

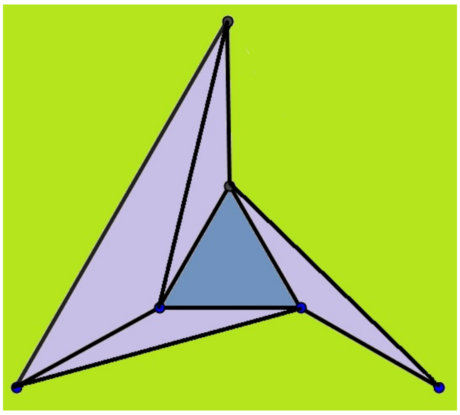

Figura 1.14: Despetalação: retirando a segunda face

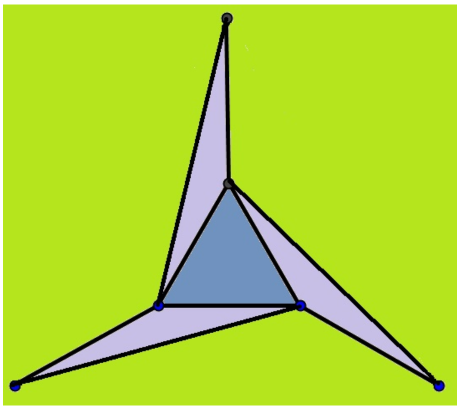

Figura 1.15: Despetalação: retirando a terceira face

Retirando-se, em seguida, os triângulos com duas faces livres, diminui-se uma face duas arestas e um vértice, conservando-se o valor da expressão:

$$V - A + F = 1.$$

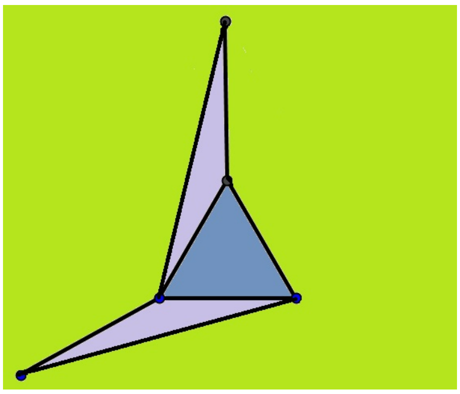

Figura 1.16: Despetalação: retirando uma face com duas arestas livres

Retira-se o último triângulo com duas faces livres.

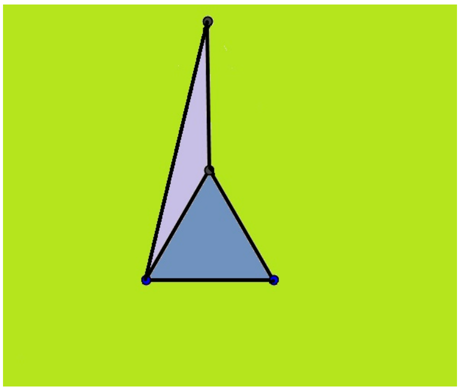

Figura 1.17: Despetalação: retirando uma face com duas arestas livres

E, finalmente, tem-se um triângulo em que A = 3, V = 3 e F = 1, logo:

$$V - A + F = 1.$$

Ficando, nesse exemplo, confirmado o teorema de Euler.

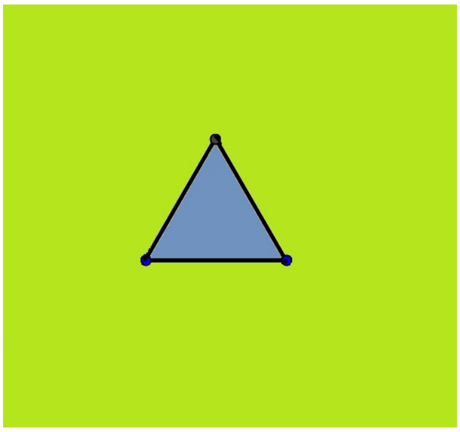

Figura 1.18: Despetalação: última face - um triângulo

1.4 A segunda Demonstração.

Outra demonstração para Teorema de Euler para poliedros convexos, com um grau de abstração adequado ou Ensino Médio, é feita a partir da soma dos ângulos internos das faces dos poliedro. Esta demonstração foi apresentada pelo professor Zoroastro Azambuja Filho, na terceira edição da Revista do Professor de Matemática - RPM e publicada no livro Meu professor de Matemática e ooutras histórias do Professor Elon Lages Lima **??**.

Seja P um poliedro convexo, logo suas faces são polígonos convexos e sejam os números $n_1, n_2, \ldots, n_k$ os gêneros dos polígonos correspondentes às faces, entende-se por gênero o tipo de polígono (triângulo n = 3, quadrilátero n = 4, pentágono n = 5, etc.), numerando as faces de 1 a F temos que $1 \leq k \leq F$. A soma dos ângulos de um polígono convexo é dada por

$$S = (n–2)\pi$$

então a soma dos ângulos internos de todas as faces será:

$$S = (n_1 - 2)\pi + (n_2 - 2)\pi + \ldots + (n_f - 2)\pi$$

colocando π em evidência e agrupando os números de faces e as parcelas 2 pode-se escrever:

$$S = \pi.[(n_1 + n_2 + \ldots + n_f) - (2 + 2 + \ldots + 2)].$$

Na expressão acima $(n_1 + n_2 + \ldots + n_f)$ corresponde ao número total de lados de todas as faces, como cada lado é comum a duas faces então esse número é o dobro do número de arestas (2A) e na expressão do segundo parênteses tem-se tantas parcelas 2 quanto o número de faces, logo é correspondente a 2F, portanto:

$$S = \pi(2A - 2F) = 2\pi(A - F)$$

Em seguida será calculada a mesma soma de todos os ângulos internos das faces do poliedro, só que por outro caminho.

Considere, agora, uma reta r, que não seja paralela e nenhuma face de P e um plano H, que não intersecte P e que seja perpendicular a r. O plano H será chamado de plano horizontal e todas as retas paralelas a r serão chamadas retas verticais. O plano H divide o espaço em dois semiespaços, chama-se espaço superior àquele que contem P e diz-se que seus pontos estão acima de H. A cada ponto X do espaço superior toma-se uma reta paralela a r que intersecta H no ponto X', chamado sombra de X. A sombra de qualquer conjunto C, contido no semiespaço superior é, por definição, o conjunto C', contido em H, formado pelas sombras dos pontos de C. Na figura 1.19 tem-se a representação de um poliedro e da sombra gerada pela interseção com o plano H.

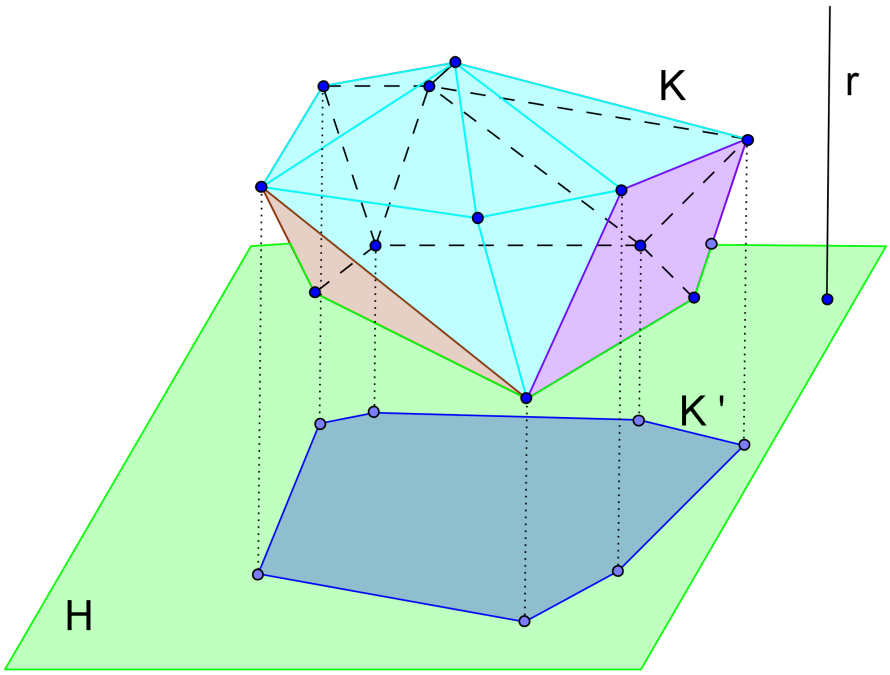

Figura 1.19: Projeção sobre o plano H

Seja P' a sombra do poliedro P. Tem-se que os pontos de P' são sombra de um ou dois pontos de P, pois o poliedro P é convexo. O contorno K', da sombra do poliedro, é um conjunto de pontos que são sombra de apenas um ponto do poliedro. K' é o conjunto das sombras dos segmentos de uma linha poligonal fechada K, dos pontos em que a reta paralela a r que passa por esse ponto não intersecta mais o poliedro. Chama-se de contorno iluminado a linha poligonal K. Note-se que todos os outros pontos da sombra do poliedro é sombra de dois pontos, um da parte iluminada e outro da parte escura do poliedro.

A partir dessas considerações procede-se o cálculo da soma dos ângulos internos de todas as faces. É importante notar que a sombra de uma face é um polígono do mesmo gênero, ou seja, com o mesmo número de lados, logo a soma dos ângulos internos do polígono é igual à soma dos ângulos internos da sua sombra. Sejam Vi, o número de vértices iluminados, Vs o número de vértices sombrios e V_c o número de vértices do contorno K, que é sombra de apenas um ponto. Então $V = V_i + V_s + V_c$. Tem-se que V é o número de vértices e, logicamente, o número de lados da poligonal K', contorno de P.

Considere a sombra da parte iluminada de P, essa sombra é um polígono convexo com V_c vértices e subdividido por V_i pontos interiores, que determinam as sombras dos polígonos iluminados, que são também polígonos com o mesmo número de lados. Para cada ponto V_i tem-se que a soma dos ângulos internos é 2π radianos, como se vê na figura 1.20 os vértices do contorno V_c são: $V_1, V_2, \ldots V_7$ e os vertices iluminados do interior V_i são: $V_8 \; e \; V_9$. Logo a soma dos ângulos contidos na sombra da parte iluminada será:

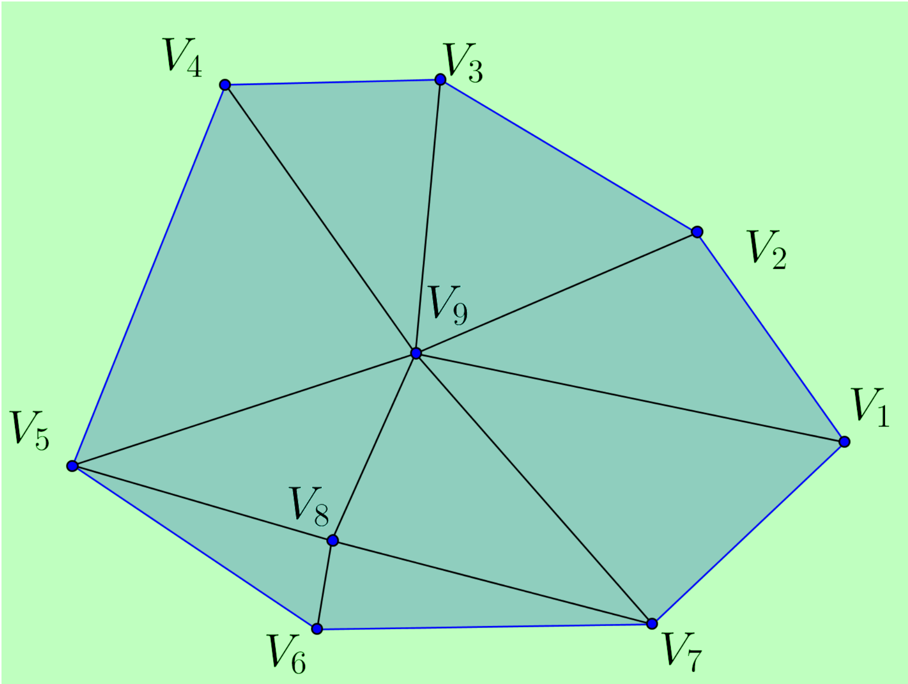

Figura 1.20: Contorno

$$S_i = 2.\pi.V_i + \pi.(V_c - 2)$$

.

Para se calcular a soma das medidas de todos os ângulos sombrios procede-se do mesmo modo e é fundamental lembrar que a essa soma envolve todos os vértices que estão no interior da região sombria assim como todos os vértices da poligonal K', logo:

$$S_e = 2.\pi.V_e + \pi.(V_c - 2)$$

.

Conclui-se, então, que a soma de todos os ângulos do poliedro será a soma entre todos os ângulos iluminados e todos os ângulos sombrios, então:

$$S = S_i + S_e = 2.\pi.V_i + \pi.(V_c - 2) + 2.\pi.V_e + \pi.(V_c - 2)$$

$$S = 2.\pi.V_i + 2.\pi.V_e + 2.\pi.(V_c - 2)$$

$$S = 2.\pi.(V_i + V_e + V_c - 2)$$

$$S = 2.\pi.(V - 2)$$

Como, pelo primeiro cálculo

$$S = 2.\pi(A - F)$$

e, pelo segundo cálculo,

$$S = 2.\pi.(V - 2)$$

temos, então, que

$$2.\pi(A - F) = 2.\pi.(V - 2)$$

Dividindo-se os dois membros por $2.\pi$, temos:

$$V–2 = A–F$$

ou

$$V–A + F = 2$$

Ficando, assim, demonstrado o Teorema de Euler para Poliedros Convexos.

Capítulo 2

O Ensino da Geometria na Educação Básica Brasileira

2.1 A trajetória do Ensino da Geometria no Brasil

A educação no Brasil, no período colonial, era ofertada pelos jesuítas que por aqui permaneceram por cerca de dois séculos. Nesse período era ministrado o curso de Letras, com aulas de gramática, retórica e latim e o curso de Artes, no qual se estudava também Matemática, Lógica, Física e Ética. No curso de Matemática estudava-se Geometria Plana e Sólida.

Em 1759 os jesuítas foram expulsos do país e por treze anos a educação ficou praticamente abandonada. Por volta de 1772 foram instituídas as chamadas Aulas Régias, as quais eram ministradas sobre disciplinas isoladas e não conseguiram atrair grande número de estudantes.

Só em 1837 é que foi criada a primeira instituição de Ensino Secundário, o Colégio Pedro II. Foi a partir desse ano que surgiu o plano de estudos para o ensino secundário. O regime de progressão passou a ser por série e não mais por disciplina. Nesse curso a Álgebra, a Aritmética e a Geometria tinham seu lugar garantido. Nesse período o ensino de Matemática era excessivamente abstrato, com sistematização lógica construída por definições, axiomas e postulados. A Geometria era ensinada a partir da construção axiomática de Euclides, tal estruturação era rigorosa matematicamente, mas não tinha cuidados didáticos. As demonstrações tinha a função de validar a afirmação, mas isso não trazia auxílio no aprendizado.

O ensino nesse período inicial era apenas transmissivo, centrado no professor, detentor do conhecimento que deveria "passar" para seus alunos, os quais deveriam se valer da memorização e resolução de exercícios para aprender. Um fato importante a ser notado é que o ensino era diferenciado: Para os alunos da elite era apresentada a geometria euclidiana, racional e rigorosa, já para as classes mais baixas, no ensino técnico, priorizavam-se os cálculos.

Na década de 1930 o Movimento da Escola Nova apregoava para o ensino de Matemática e consequentemente o de Geometria que o seu ensino não ficasse restrito ao conhecimento abstrato e estruturado logicamente, mas que procurasse contextualizá-lo na vida do estudante e também nas aplicações práticas, já que o Brasil passava por momentos de grandes transformações, saindo, naquela época, de um modelo puramente agrícola para iniciar a sua industrialização. Seriam necessários profissionais técnicos e operários para essa nova realidade.

Nesse período o Teorema de Euler para Poliedros Convexos era demonstrado pela soma dos ângulos internos das faces. O objetivo da demonstração era garantir a estruturação axiomática, toda afirmação deveria ser demonstrada ou então não era apresentada. O estudo da Geometria era desprezado pelos estudantes, pois a maioria não compreendia o que se pretendia com aquilo, perdia-se o sentido prático e poucos eram os que se encontravam compreendendo as demonstrações.

Foi no governo de Getúlio Vargas, quando o então ministro da Educação e Saúde, Francisco Campos, acatando as ideias de Euclides Roxo, professor de Matemática e diretor do Colégio Pedro II, propôs a unificação do ensino de Matemática em uma única disciplina, pois antes era dividida em Aritmética, Álgebra e Geometria.

Poucas alterações de concreto ocorreram no ensino de Matemática até esse período e o crescimento industrial era cada vez mais forte. Foi nesse contexto mundial que se deu a maior das mudanças no ensino de Matemática e Geometria. A partir da década de 1950 o Movimento da Matemática Moderna, que propunha grandes alterações nas práticas pedagógicas e didáticas da Matemática, chega ao Brasil.

Grandes alterações no ensino de Geometria foram propostas nos Congressos do Ensino de Matemática, propondo que seu estudo começasse já nas séries iniciais do Ginásio, e sugerindo uma abordagem mais intuitiva, para só na 3ª e na 4ª série do Ensino Ginasial que se começasse a Geometria Dedutiva Plana com aplicações, quando possível dos conhecimentos de Álgebra.

Com o Movimento da Matemática Moderna, foi introduzido um rigor excessivo no estudo da Geometria, a exigência agora era a algebrização da geometria, trocou-se a construção axiomática por fórmulas e problemas excessivamente carregados de álgebra. Esse rigor exigia que o raciocínio dedutivo fosse aplicado de forma universal, até mesmo para se resolver problemas intuitivos, e isso desestimulou o alunado para o seu estudo.

Na década de 1970 surgem críticas ao Movimento de Matemática Moderna, provavelmente impulsionadas pelo insucesso das reformas. O Ensino de Matemática e Geometria passava por rejeições dos alunos, pois houve uma redução ao excesso de fórmulas e aplicações algébricas demasiadas, a cobrança demasiada do rigor na construção dedutiva e a não observância dos estágios de desenvolvimento cognitivos dos estudantes geraram uma estagnação.

O Ensino de Matemática passava por essa crise, no mesmo momento em que o país busca a universalização da Educação. Isso gerou outro problema, a grande demanda de professores para assumirem as escolas que se multiplicavam pelo país. Como a formação de muitos desses professores não era tão primorosa nas construções dedutivas, o Ensino de Geometria começa a ser deixado para o final do livro e para última etapa do ano letivo, muitas vezes com intenções de não se trabalhar com tanta ênfase as tais construções dedutivas.

Heranças dessa passagem podem ser vistas até hoje, em currículos de escolas que deixam o ensino de Geometria para uma época específica, geralmente o final do ano letivo, livros didáticas posicionam os capítulos dos conteúdos de Geometria no final. Isso passou a gerar alunos que pouco estudaram Geometria e quando a estudaram era de forma fragmentada e desconexa. As aplicações práticas nunca foram bem aproveitadas.

Um dos conteúdos mais valorizados pelo Movimento da Matemática Moderna foi a linguagem de conjunto, entendido como um instrumento para facilitar a interpretação. O Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – Geem – criado em 1961, num convênio entre a Universidade de São Paulo, Secretaria da Educação, Universidade Mackenzie, afirma num de seus livros, (Gee, [7] p.2).

> Conjuntos e estruturas são conceitos que permitirão desde o curso primário, com muito menos esforço do que o despendido atualmente pelo aluno, compreender a unidade existente na interpretação de fatos que, constituem não só o que é ensinado pela matemática propriamente dita, mas também os que são apresentados no estudo da língua pátria, da geografia, da história, através de relações que guardam e que têm sido reveladas.

Percebe-se que, naquele período, houve divergências sobre os conteúdos a serem ensinados nos níveis equivalentes ao Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. Um consenso, contudo, era que o método axiomático não seria conveniente para alunos do Ensino Médio. Distorções e falta de discussão sobre as propostas do Movimento da Matemática Moderna geraram grandes problemas, tais como a preocupação excessiva com a linguagem de conjuntos, prioridades aos temas algébricos com consequente supressão de tópicos de Geometria e pouca, ou nenhuma, ênfase na resolução de problemas.

Nesse período o ensino de Matemática ainda estava centrado no conhecimento e a busca de estratégias era feita no sentido de tornar possível a compreensão daqueles conteúdos julgados mais importantes, como nessa época o estudo algébrico foi muito enfatizado então o aprendizado excessivo de conhecimentos de propriedades algébricas e de fórmulas comprometeu o estudo da Geometria. A rejeição ao método axiomático implicou em um ensino Geometria superficial e sem aplicações, as aplicações exigiam muito mais a fórmula do que esforço em interpretação e reflexão dos alunos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, volume sobre Matemática de 5ª a 8ª série, ao se referir as abordagens sugeridas pelo Movimento da Matemática Moderna, consta (PCN, [5] p. 19).

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, enfatizava o ensino de símbolos e de uma terminologia complexa comprometendo o aprendizado do cálculo aritmético, da Geometria e das medidas.

Na década de 1980 começam a surgir pesquisas sobre o ensino de Matemática que apontavam para uma abordagem centrada no aluno e não no conhecimento. A resolução de problemas surge como proposta para a aquisição dos conhecimentos matemáticas e chamando a atenção de que aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, têm relevância na aprendizagem da Matemática.

No Final da década de 1990 surgem no Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's – que, como um documento oficial e de abrangência nacional busca orientar as propostas pedagógicas a serem assumidas nas escolas brasileiras, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Um grande passo para um país com história educacional tão conturbada e pouco orientada. Mesmo completando já dezesseis anos esse documento mostra-se atual. Aponta caminhos importantes para o ensino de Matemática e Geometria, são eles: a resolução de problemas, o recurso à História da Matemática, o recurso ao uso das tecnologias da informação e da comunicação e o recurso aos jogos.

2.2 O Quadro atual do Ensino de Geometria no Brasil

A realidade do ensino de Matemática no Brasil é carregada de barreiras, a primeira delas é a formação profissional dos docentes de Matemática, a falta de políticas públicas para a formação continuada desses profissionais e interpretações equivocadas de teorias educacionais.

Existem muitos casos de sucessos em instituições específicas, ou de professores que conseguiram grande sucesso no desenvolvimento de seus projetos em sala de aula. Se for analisado o tamanho da rede escolar do Brasil, não se pode esperar que casos isolados representassem o trabalho de toda a rede.

A formação inicial dos professores apresenta problemas e a formação continuada não é uma prática universalizada. Se as pesquisas sobre o ensino de matemática têm avançado, esse progresso não tem como chegar ao professor em sala de aula se este não estiver buscando atualizações em sua formação. As políticas educacionais não oferecem incentivos para essa prática e o quadro que se tem é um contingente de professores que reproduzem a prática pedagógica a qual lhes foi apresentada em sua formação superior e até mesmo na escolaridade básica .

As leituras equivocadas de novas concepções pedagógicas também tem sido um fator para a pouca evolução do ensino da matemática. Por exemplo, já se fala em trabalhar matemática através da resolução de problemas, mas isso requer muito cuidado na seleção dos problemas, na forma de abordagem, no processo de mediação e, em muitos casos, o que se tem são professores que passam listas de “problemas” intermináveis, os quais não geram crescimento, pois tratam de repetições.

A questão da seleção dos conteúdos, bem como a ordem de apresentação é, em geral, analisadas pelos pré-requisitos e isso inviabiliza a abordagens de ideias, mais úteis na formação do cidadão. Sobre isso os PCN’s colocam (PCN’s [5] , p.22).

> (...) essa concepção linear faz com que, ao se definir qual será o elo inicial da cadeia, tomem-se os chamados fundamentos como ponto de partida. É o que ocorre, por exemplo, (...) quando se tomam os conjuntos como base para a aprendizagem de números e operações, caminho que não são necessariamente os mais adequados.

Os conteúdos matemáticos são tratados, muitas vezes, de forma isolada, exaurindo o conteúdo com todos os tópicos e todos os exercícios e, ao se avançar para outros conteúdos aqueles deixam de ser abordados ou inter-relacionados, tornando, em alguns casos, os conteúdos estanques e compartimentalizados. Se hoje é indicada a interdisciplinaridade, não é possível que dentro da própria disciplina haja compartimentalizações, nem dissociações entre os conteúdos e os ramos da matemática.

A ideia da contextualização, já muito divulgada entre o meio educacional também passa por interpretações equivocadas. Ao se trabalhar apenas com o que se supõe fazer parte do quotidiano do aluno torna-se inviável a abordagem de muitos conhecimentos que são importantes, até mesmo para que se trabalhem conteúdos de grande aplicação na vida prática, como por exemplo, as funções. É preciso compreender que a contextualização pode, e dever, ser feita também com a história dos próprios conteúdos, pois em geral partiram de problemas da vida prática que alguns grupos sociais enfrentaram em períodos históricos. A contextualização também pode ser feita com questões internas da própria matemática e geometria.

O quadro do ensino da Geometria possui mais alguns agravantes em relação ao quadro geral apresentado acima sobre o ensino da Matemática. O que se tem percebido hoje é um abandono progressivo do ensino de Geometria nas escolas do Ensino Fundamental e Médio, tal abandono tem origem na própria história da Educação brasileira e nas políticas educacionais vigentes.

O Ensino de Geometria era, até a década de 1950, puramente axiomática e apresentava insucessos enormes, pois não considerava os estágios de desenvolvimento cognitivo dos alunos, era centrado no conhecimento e não no aluno, e a aula era centrada na pessoa do professor, aquele que era o detentor do conhecimento e que tinha a missão de "passá-lo" a seus alunos.

Por volta da década de 1960, com o Movimento da Matemática Moderna e, no Brasil, com a universalização da educação, os problemas se somaram, pois as propostas educacionais requeriam professores com sólida formação e a grande expansão do ensino criou uma demanda de professores que deveria ser suprida em tempo muito exíguo o que gerou um aumento na formação de professores sem uma manutenção da qualidade, pois as universidades não possuíam de aumentar a capacidade de formação tão rápida.

Com as dificuldades encontradas pelos professores e uma maior liberdade sobre os currículos aumentou a desvalorização do ensino da geometria, geralmente deixada para o final do ano e, em virtude da falta de tempo, muitas vezes era deixada para o ano letivo seguinte. Sobre isso [5](p. 23) afirma:

> Os obstáculos apresentados explicam em grande parte o desempenho insatisfatório dos alunos revelado pelas elevadas taxas de retenção em Matemática, o que a faz atuar como filtro social no Ensino Fundamental, selecionando os que terão oportunidade ou não de concluir esse segmento de ensino.

As políticas públicas educacionais também contribuíram: nos últimos anos a carga horária semanal de Matemática foi reduzida, assim como a Geometria foi incorporada à Matemática como apenas mais alguns conteúdos específicos. O Estudo de desenho geométrico foi substituído pelo ensino de Educação Artística. Este último fato passa a gerar mais dificuldades de interpretação de problemas geométrica e pouca habilidade para representar as situações, bem como dificuldades em resolver situações-problema que envolvem semelhança.

A Lei de Diretrizes e Bases, Lei n^o 9.394/96 em seu artigo 26 determina a obrigatoriedade da base comum nacional. Em [6] (P. 44) tem-se:

> Art. 26. Os currículos do ensino fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabe-

> lecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela.
>
> Parágrafo 1^o. Os currículos a que se refere o caput devem abranger, obrigatoriamente, o estudo da língua portuguesa e da matemática, o conhecimento do mundo físico e natural e da realidade social e política, especialmente do Brasil.
>
> Parágrafo 2^o. O ensino da arte constituirá componente curricular obrigatório, nos diversos níveis da educação básica, de forma a promover o desenvolvimento cultural dos alunos.(...)

Os diversos problemas apontados acima são confirmados pelas estatísticas educacionais sobre a educação brasileira. Em 2011, na avaliação do PISA – Programa Internacional de Avaliação de Alunos feita pela OCDE - Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico, situa o Brasil na 57ª posição, à frente apenas de oito nações, isso revela que os nossos alunos não estão bem nem em Matemática nem em Leitura.

É importante notar que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio não chegam a se posicionar quanto ao uso de demonstrações, mas abordam claramente a necessidade de desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Não que o foco deve ser a demonstração, mas a validação dos conhecimentos matemáticos e geométricos passa sempre pela sua prova. Abordar demonstrações que valorizem a criatividade a inventividade e o potencial do raciocínio humano é um fator positivo para o amadurecimento do pensamento matemático.

Pelo exposto acima pode-se perceber que a situação atual do ensino de Matemática apresenta dificuldades e, no ensino da Geometria, a situação parece ainda mais preocupante, pois na realidade brasileira não é incomum encontrar alunos concluíndo o Ensino Médio sem ter uma formação satisfatória em Geometria.

Capítulo 3

A formação do cidadão, o raciocínio dedutivo e o pensamento matemático.

3.1 Objetivos do ensino de matemática na educação básica segundo os documentos oficiais.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, documento editado em 1997 pelo Ministério da Educação coloca como Objetivos do Ensino Fundamental (p. 7):

> - compreender a cidadania como participação social e política, assim como exercício de direitos e deveres políticos, civis e sociais, adotando, no dia a dia, atitudes de solidariedade, cooperação e repúdio às injustiças, respeitando o outro e exigindo para si o mesmo respeito;
>
> - posicionar-se de maneira crítica, responsável e construtiva nas diferentes situações sociais, utilizando o diálogo como forma de mediar conflitos e de tomar decisões coletivas;
>
> - conhecer características fundamentais do Brasil nas dimensões sociais, materiais e culturais como meio para construir progressivamente a noção de identidade nacional e pessoal e o sentimento de pertinência ao país;
>
> - conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crença, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais;
>
> - perceber-se integrante, dependente e agente transformador do ambiente,

> identificando seus elementos e as interações entre eles, contribuindo ativamente para a melhoria do meio ambiente;
>
> - desenvolver o conhecimento ajustado de si mesmo e o sentimento de confiança em sua capacidade afetiva, física, cognitiva, ética, estética, de inter-relação pessoal e de inserção social, para agir com perseverança na busca de conhecimento e no exercício da cidadania;
>
> - conhecer o próprio corpo e dele cuidar, valorizando e adotando hábitos saudáveis como um dos aspectos básicos da qualidade de vida e agindo com responsabilidade em relação à sua saúde e à saúde coletiva;
>
> - utilizar as diferentes linguagens – verbal, musical, matemática, gráfica, plástica e corporal – como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
>
> - saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimento;
>
> - questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

Esse quadro de objetivos é a expressão clara do que se espera de um cidadão brasileiro que gozou do seu direito básico à educação e completou toda a educação básica. Então ser cidadão não é apenas pertencer a uma nação, mas sim ter consciência de toda a importância de sua existência e de que toda a estrutura criada por essa nação foi visando o bem comum. Para que exista um completo exercício da cidadania não implica apenas em deveres, mas sim em direitos e em respeito mútuo, em compreensão de sua realidade no seu entorno e de forma macro. Vê-se que para se ter análise crítica, para se conhecer a história para entender as inter-relações o pensamento lógico matemática e geométrico são ferramentas fundamentais.

O mesmo documento coloca como finalidades do ensino de Matemática, visando à construção da cidadania, levar o aluno a: (PCN - Matemática, p. 47).

> - identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;

- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);

- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;

- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;

- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;

- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;

- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;

- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.

Todos esses objetivos contribuem para a construção de uma educação de transformação do cidadão e do conhecimento. Indica que o processo de construção interna do conhecimento não é passivo e sim, o contrário é um processo de maturação e criticidade de elevação da autoestima. O conhecimento é adquirido pelo processo de reconstrução interna que cada aluno deve vivenciar para que seu aprendizado seja efetivo.

A Matemática e a Geometria não se encerram em si mesmas, mas são poderosas ferramentas intelectuais para a apropriação de outros conhecimentos e para a construção de outros tantos. Assumir essa postura significa mudar a forma de enxergar o conhecimento matemático e geométrico e, consequentemente, a forma como eles são ensinados em sala de aula. Valorizar o processo de mediação, a construção dialógica do conhecimento, motivar atividades em grupos, oferecer atividades que façam com que os estudantes mobilizem seu conhecimentos na construção de outros.

Observa-se que o processo de construção interna tem similaridades com o método axiomático, mas trabalha com outro foco. No método axiomático o conhecimento é construído através da validação pela demonstração de cada afirmação, enquanto que o processo de aquisição do conhecimento cada aluno se dá pela reconstrução particular dos conhecimentos. Tal processo é extremamente singular e deve respeitar o ritimo do aluno. O objetivo muda, de validar o conhecimento, para validar a compreensão. Não que a demonstração inviabilize a compreensão, mas a demonstração passa a ser mais um dos meios dentre vários outros, sendo que o principal meio para a validação interna do conhecimento é a resolução de problemas.

A escolha do conteúdo que tem maior ou menor relevância depende primeiramente dos objetivos que se tem com aquele conteúdo. Não se elege um tema por sua importância na história da Matemática, ou por sua complexidade, mas sim pelo impacto que deve ter na formação do cidadão, pela capacidade de agregar criticidade, interpretação e compreensão do mundo, bem como nas possibilidades de estruturações das argumentações.

Percebe-se então que o abandono do estudo da Geometria é um grande erro, inclusive pelas propostas atuais, pois o pensamento geométrico, que passa pela interpretação, pelo registro gráfico do problema e pela resolução é uma atividade muito rica enquanto aprendizado e amadurecimento dos alunos. Sem contar que os assuntos geométricos têm grande aplicabilidade na vida prática.

Várias profissões usam de maneira intensa o raciocínio geométrico e, às vezes, profissionais que não têm uma sólida formação escolar utilizam recursos geométricos em suas atividades, como por exemplo: o carpinteiro utiliza informações de inclinação do telhado, concordância entre as peças de madeira, quantidade de telhar, ou seja, a área do telhado. O torneiro mecânico, o eletricista e muitos outros.

3.2 O raciocínio dedutivo.

O Ensino Médio possui uma proposta diferenciada em relação ao Ensino Fundamental e isso não se dá apenas pela passagem de um nível para o outro. Nessa nova etapa os alunos, geralmente com idades a partir dos 14 anos passam por um momento de maturidade cognitiva, definida por Jean Piaget como pensamento operatório abstrato. Isso significa que o desenvolvimento biológico do cérebro do adolescente nessa faixa etária já possuem esquemas mentais que lhes permite compreender construções abstratas.

No Brasil, os alunos de 6 a 14 anos devem, por força da lei, estar matriculados e frequentando a escola, período correspondente ao Ensino Fundamental. Já o Ensino Médio é um direito, mas não é obrigatório. As construções do Ensino Fundamental são necessárias para o exercício da cidadania, o Ensino Médio se propõe a ampliar o rol de conhecimentos, inserindo o conhecimento científico e instrumentalizando os adolescentes para prosseguirem no caminho das ciências. Os parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio [6] (p. 251) colocam:

> (...) a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

A segunda parte da Educação Básica, o Ensino Médio, tem, então, como um de seus objetivos a inserção dos adolescentes numa segunda fase que é o aprimoramento e a depuração dos seus conhecimentos, surge a necessidade de se trabalhar o método científico, o pensamento dedutivo, as construções axiomáticas e as demonstrações. É importante ressaltar que o objetivo não é apenas a construção axiomática, mas sim conhecer o processo como a Matemática e outras ciências produzem novos conhecimentos. Os PCNEM [6] afirmam (P.252)

> (...) a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas.

O método dedutivo e a construção axiomática não precisam ser aplicados a toda construção matemática do Ensino Médio, mas é importante que o estudante conheça como são construídas as teorias matemáticas, é fundamental que o estudante conheça como são validados esses conhecimentos e que perceba o significado de uma demonstração. Não que os alunos tenham que produzir a demonstração de todo o conhecimento, mas é importante para o seu amadurecimento e um melhor entendimento que se compreenda que as engrenagens da Matemática são as provas e demonstrações e que o que se está estudando não foi algo que nasceu pronto e que muitos povos não conheciam aqueles resultados até que a necessidade, criatividade e inventividade do homem conseguiu conceber aquela propriedade ou característica e mobilizou seus conhecimentos para produzir uma demonstração.

Nesse ponto a História da Matemática colabora para o amadurecimento do estudante mostrando qual foi a necessidade que impulsionou a criação da teoria, mostrando que às vezes uma demonstração não foi concebida tão facilmente e que doses de criatividade são fundamentais para a sua concretização.

Muitas das demonstrações são complexas, são excessivamente algébricas ou usam teorias que não são abordadas no Ensino Médio. Em contrapartida existem demonstrações que são belíssimas pela simplicidade, criatividade e inovação. Alguns episódios da construção desses conhecimentos devem ser apresentados aos estudantes como motivação até para a criatividade.

Acompanhar o desenvolvimento de uma demonstração é um momento de grande crescimento e aprendizado, desde que seja trabalhado de forma clara. É fundamental deixar evidente o caminho que se está percorrendo, o objetivo daquela demonstração, o caminho que se pretende usar, definir com clareza a hipótese e a tese. Se essas demonstrações forem feitas frequentemente, o aprendizado será cada vez menos custoso.

Não há ramo melhor para apresentar o método axiomático do que a Geometria. Note-se que no Ensino Médio, os estudantes já possuem, ou deveriam possuir, diversos conhecimentos que lhes foram apresentados sem uma construção axiomática. Aproveitar o momento de maturação para fazer a construção axiomática dos tópicos iniciais da Geometria Plana e apresentar a Geometria Espacial de forma axiomática é uma oportunidade para se trabalhar o método axiomático e o pensamento dedutivo sem, no entanto, se perder em abstrações que não colaboram com o entendimento.

No ensino de Matemática o principal não é o conteúdo, mas sim os objetivos que se traçam para trabalhar os conteúdos. Se o objetivo for "a construção axiomática da Geometria" não haverá tempo suficiente, entendimento adequado nem o enriquecimento das habilidades e competências dos alunos. Mas se o objetivo for "apresentar o método axiomático na construção dos conhecimentos geométricos como método científico" será criada uma motivação diferente para o mesmo trabalho, bem como a ponderação sobre os excessos na abstração. Tal construção completa será importante para pesquisadores nas áreas específicas, e o modelo de construção do conhecimento é de extrema importância nas ciências.

3.3 O pensamento matemático e algumas demonstrações simples e belas.

O processo pelo qual se constrói conhecimentos matemáticos é bastante singular. Toda afirmação nessa área do conhecimento só terá sua validade comprovada após uma demonstração. A demonstração desempenha um papel central na teorização da matemática e no desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo. Segundo Krerley Oliveira [16] (p. 9)

> Uma demonstração em Matemática é o processo de raciocínio lógico e dedutivo para checar a veracidade de uma proposição condicional. Nesse processo são usados argumentos válidos, ou seja, aqueles que concluam afirmações verdadeiras a partir de fatos que também são verdadeiros.

O curso do Ensino Médio encontra-se numa posição adequada na vida dos estudantes. Estando numa fase em que a abstração já está acessível ao seu entendimento, é possível e desejável que essa abstração seja potencializada, fazendo inferências, aprimorando argumentações e justificando padrões e resultados. É fundamental ter-se em mente que a demonstração matemática é um processo e não um produto. Uma atividade do pensamento que, por meio de uma sequencia lógica, interliga os elementos inerentes ao processo, procurando, por meio de argumentações reconhecidamente válidas, produzir um discurso que convença os outros da veracidade de um enunciado.

Uma demonstração é uma atividade complexa do raciocínio, que mobiliza capacidades cognitivas, metodológicas e linguísticas. Não se espera que alunos do Ensino Médio construam demonstrações de problemas complicados, o objetivo é muito mais em apresentar o modelo de pensamento matemático. A compreensão da demonstração é que é fundamental. Entender o caminho que se está trilhando e o objetivo que se quer atingir. Diferenciar a hipótese da tese, e perceber que a demonstração é um caminho de argumentações que usa a hipótese para se concluir a tese. Sensibilizar os alunos sobre a beleza de uma demonstração, ou seja, sobre o poder do raciocínio humano será o maior objetivo do estudo de algumas demonstrações.

As técnicas de demonstrações usadas para provar teoremas são várias: prova dedutiva ou direta, prova por contraposição, prova por redução ao absurdo e a prova por indução finita. Para se trabalhar no Ensino Médio a mais indicada é a dedutiva ou direta, no qual se supõe verdadeira a hipótese e, a partir dela, numa sequência de argumentações válidas chega-se à tese.

Observe-se que o pensamento dedutivo é utilizado na produção de textos argumentativos, pois é o caminho de uma boa sequência de argumentações para se convencer alguém e concluir uma tese.

Todo o conhecimento de Geometria Plana e grande parte de Geometria Espacial que se estuda hoje no Ensino Médio é devido a Euclides de Alexandria, grande matemático que escreveu “Os Elementos”, compêndio de 13 volumes onde organiza de maneira axiomática todo o conhecimento disponível naquela época sobre Geometria e teoria dos números. Por cerca de 2000 anos todo o estudo de geometria Euclidiana foi feita baseado nos tratados de Euclides.

A teoria sobre Geometria partiu de conceitos primitivos: o ponto, a reta e o plano, ideias que não podem ser definidas, pois a teoria, até esse momento da construção, não tem base para isso. Os postulados são afirmações de devem ser aceitas sem a demonstração – forma a base de entendimento da geometria, é a geometria que se entende estar construindo. Por último vêm os teoremas que são as afirmações que são provadas, esses teoremas só podem ser provados a partir dos conceitos primitivos, dos postulados e daqueles teoremas que já foram provados. A ideia dos postulados serem aceitos gera uma desconfiança, pois aceitá-las sem a prova parece não ser matemático. Não é possível demonstrar algo sem um lastro, um rol de conhecimentos para garanti-lo e por fim, se forem alterados os postulados constrói-se outras geometrias. Assim os conceitos primitivos e os postulados são as caracterizações da Geometria.

Por exemplo, existe o caso muito importante e esclarecedor do chamado V postulado de Euclides que se for modificado gera as chamadas Geometrias Não Euclidianas. O V postulado afirma, sem demonstração, convidando o leitor e crer e usar essa ideia, que, num plano, por um ponto fora da reta passa uma única paralela. Ao se tentar criar uma demonstração para essa afirmação, ou seja, transformá-la num teorema, buscou-se usar a prova por absurdo. Supondo que fosse verdadeira a negação dessa hipótese deveria se chegar a um absurdo. O fato foi que nunca se chegou a absurdo algum, muito pelo contrário construíram-se duas outras geometrias, conhecidas hoje como não euclidianas. Entender essas implicações propiciará aos alunos do Ensino Médio uma melhor compreensão e, provavelmente, será aguçada a curiosidade.

Existem demonstrações importantes e algumas muito atraentes para serem abordadas no Ensino Médio. O uso dessas demonstrações em sala de aula deve ser para valorizar o conhecimento, não deve ter seu objetivo apenas na demonstração, pois é possível trabalhar várias competências nas construções das demonstrações. Conhecer o processo de construção dos conhecimentos matemáticos; fortalecer a ideia de que a Matemática e a Geometria não nasceram prontas, cada resultado que se usa hoje é fruto de um trabalho imenso de outras pessoas.

Experimentar o processo dedutivo de argumentação, de implicação, de encadeamento de ideias deve ser atividades frequentes nos estudos de Geometria.

A demonstração do Teorema de Euler para Poliedros Convexos é uma atividade muito rica. A sua história é encantadora, a sua demonstração é muito inteligente. Imaginar como Cauchy teve a ideia de projetar no plano para simplificar o processo e perceber que para cada dificuldade, para cada barreira, foram utilizados recursos diferentes.

As duas propostas de demonstração são adequadas para o nível do Ensino Médio, embora a demonstração proposta por Cauchy seja mais atraente.

Várias outras demonstrações são belíssimas e podem ser trabalhadas no Ensino Médio, algumas demonstrações do Teorema de Pitágoras, a demonstração do Teorema de Tales, as propriedades das figuras geométricas. Tudo vai depender dos objetivos que são traçados para aquele momento de construção do conhecimento.

Capítulo 4

Considerações finais.

4.1 Uma proposta para o Ensino de Geometria no Ensino Médio.

Não será apresentada aqui uma proposta considerada a única para se trabalhar a Geometria no Ensino Médio, nem se supõe ser a melhor que existe, mas, após anos de experiência do autor e uma pesquisa bibliográfica sobre o tema e um estudo histórico do ensino da Geometria, entende-se que será um caminho viável, produtivo e que atende aos objetivos propostos pelos documentos oficiais do Brasil para esse nível educacional.

O primeiro ponto a ser abordado é que o método axiomático não é um método de ensino nem muito menos é um método didático. O método axiomático é um processo de construção do conhecimento e este não é o objetivo do ensino de Geometria. Não se pretende aqui propor que se retroceda à abordagem feita até a década de 1950, aqui no Brasil, época em que a geometria era abordada apenas pelo método axiomático, mas aproveitar o que se tem de positivo naquela proposta.

A compreensão do verdadeiro significado da Geometria passa pelo entendimento da validade de suas afirmações. Tal validade só é assegurada após uma demonstração. Deve ficar claro que nem sempre o caminho para uma demonstração seja fácil de ser encontrado, pois existem teoremas que foram demonstrados de maneiras bastante criativas e a ideia demorou décadas ou até gerações para ser encontrada. Outras são extremamente automáticas e sequenciadas. Então não se espera que os alunos comecem demonstrando grandes teoremas da Geometria, mas sim criar uma atitude de argumentação fundamentada e dedutiva.

Outro aspecto a ser observado é o equívoco que vem acontecendo quanto à contextualização. Hoje já é uma prática se buscar situações do quotidiano para contextualizar os conteúdos matemáticos e Geométricos, mas é importante perceber que nem todos os conteúdos são tão aplicados no quotidiano. Essa contextualização pode ser feita na própria história da Matemática, com a necessidade naquela época e também pode ser contextualizado dentro da própria Geometria. Alguns teoremas e algumas propriedades são fundamentais para construções de outros conhecimentos e nem sempre são aplicáveis em situações próximas à realidade dos adolescentes.

Por exemplo, o tópico congruência de triângulos tem importância inquestionável nas demonstrações que se seguirão, mas não possuem aplicações práticas que se possa contextualizar em situações do quotidiano. Então, não se pode deixar de trabalhar a congruência de triângulos por não ter uso no quotidiano próximo ao aluno. Mas a contextualização pode ser feita em estudo de propriedades dos triângulos isósceles, dos triângulos equiláteros e de outras situações importantes.

O estudo de desenho geométrico foi sendo abandonado para se trabalhar a disciplina Artes nas escolas, pois a Lei de Diretrizes e Bases, lei n^o 9.394/96 insituiu o ensino de artes como currículo obrigatório, assim como a disciplina Matemática e não mensionou o ensino da Geometria. Não se questiona a importância de se estudar Artes, mas ficou uma lacuna no estudo de Geometria, pois a representação por meio de figuras é uma etapa importante na resolução de problemas e na construção de uma boa argumentação. A compreensão dos fatos em Geometria requer uma representação coerente do que se está analisando. A ausência da disciplina Desenho Geométrico pode ser minimizada com uma sequência de atividades envolvendo construções básicas de régua e compasso no Ensino Fundamental. Tais construções constituem atividades lúdicas e criativas, devem contemplar o uso do compasso, para trabalhar a coordenação motora e construção de desenhos básicos.

É valioso que os alunos criem competência para representar as situações propostas em Geometria por meio de Desenhos de forma fiel ao que se está analisando, sob pena de dificultar o entendimento e a possível solução. Uma representação coerente é uma etapa importante para uma boa construção de solução. Alunos com facilidade para essa construção possuem maior competência para construir os conhecimentos geométricos.

A proposta é, então, uma retomada da valorização da Geometria na Educação Básica. A Geometria deve compor uma importante e imprescindível etapa da formação básica. Tal postura deve inicialmente ser entendida pelos professores, pois é o primeiro ator do processo, é quem precisa ter a clareza dessa necessidade. A necessidade não apenas de aprender mais conteúdos, mas sim de desenvolver competências em mais uma área do conhecimento.

No Ensino Médio a Geometria deve ser acompanhada do pensamento dedutivo, com o hábito de provar os resultados que serão utilizados. Não se espera que este se transforme em mais um fardo para se carregar na escola. Muito pelo contrário o que se espera é uma mudança de atitude frente ao conhecimento. Acompanhar uma demonstração não significa que cada aluno deverá criar as ideias necessárias para provar aquele teorema, mas compreender de onde se parte e o que se quer concluir é o maior objetivo. Como se sabe muitas demonstrações são exemplos de brilhantismos na Matemática, como por exemplo, a demonstração do Teorema de Euler para Poliedros convexos, que demorou muito tempo para Cauchy visualizar a sua demonstração e que o próprio Leonhard Euler não conseguiu criar uma demonstração.

O desenvolvimento do pensamento dedutivo é uma das competências e habilidades previstas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio, a competência "Investigação e compreensão" apontam em suas habilidades "formular hipótese e prever resultados" e em outra habilidade "Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos" e continua em outra habilidade "Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades" e ainda "Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.". A construção da Geometria é a parte mais promissora para se trabalhar esse tipo de competência. Para isso é necessário que os professores vislumbrem essa possibilidade como algo positivo.

Não se está propondo, neste texto, que o ensino da Geometria volte ao modelo axiomático. O que se propõe é desenvolvem nos estudantes o sentimento de construção de uma argumentação, é compreender como funcionam os mecanismos da Matemática e da Geometria. Tal postura deve refletir no modo de pensar desses estudantes, deve gerar o hábito de questionar a validade de algumas afirmações, não só em Matemática ou Geometria, mas em todos os ramos científicos.

Uma grande barreira a se enfrentar será a formação dos professores, pois muitos já saíram da graduação há muito tempo ou não tiveram essa formação ou está distante de sua prática nos dias atuais. Este fato não inviabiliza a proposta, mas gera implicações. Se o ensino de Geometria deve tomar esse rumo então se torna fundamental a formação continuada dos professores que ministram essa disciplina.

Não se julga que seja uma mudança fácil para muitos dos professores. Sair de uma postura atual, na qual se acreditava ser a melhor proposta, para enveredar por caminhos que, com toda certeza, exigirão esforço e tempo de estudo, com toda certeza vai exigir muito compromisso com a educação e muita dedicação, mas são mudanças desse tipo que ajudam o progresso da educação e os frutos serão colhidos, mas não imediatamente, uma mudança de postura gera resultados lá na frente.

Referências Bibliográficas

[1] Elon Lages Lima Paulo Cezar Pinto Carvalho Augusto César Morgado, Eduardo Wagner. A Matemática do Ensino Médio – Volume 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[2] Carl B. Boyer. História da Matemática. Tradução: Elza Gomide. Edgard Blicher, São Paulo, 2002.

[3] Ana Célia da Costa Ferreira. Ensino da geometria no brasil: enfatizando o período do movimento matemática moderna. PUC/PR, 1:1–9, 2008.

[4] Maria Célia Leme da Silva. A geometria escolar e o movimento da matemática moderna: em busca de uma nova representação. GHEMAT-UNIBAN, 1:1–19, 2008.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parêmtros Curriculares Nacionais: Matemática. MEC, Brasília, 1991.

[6] BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parêmtros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. MEC, Brasília, 1999.

[7] GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática. Matemática Moderna para o Ensino Escundário. LPM, São Paulo, 1995.

[8] Daniel Cordeiro de Morais Filho. Manual de Redação Matemática. Fábrica de Ensino, Campina Grande, PB, 2010.

[9] Fernanda Aparecida Ferreira e Dimas Felipe de Miranda. Demonstrações em geometria euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para o ensino, 2008.

[10] Howard Eves. Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues. Unicamp, Campinhas, SP, 1992.

[11] Zoroastro Azambuja Filho. Demonstração do teorema de euler para poliedros convexos. RPM, 3:1–4, 1983.

[12] Elon Lages Lima. O teorema de euler sobre poliedros. Noticiário da Sociedade Brasileira de Matemática, 2:57–74, 1982.

[13] Elon Lages Lima. Meu Professor de Matemática e Outras Histórias. SBM, Rio de Janeiro, 2006.

[14] Setsuko Takara Mabuchi. Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores, 2000.

[15] Patrícia S Mascarenhas. Manual para elaboração de trabalhos acadêmicos. Ideia Viva, Feira de Santana, BA, 2011.

[16] Krerley Irraciel Martins Oliveira and Adán Jose Corcho Fernandez. Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções. SBM, Rio de Janeiro, 2010.

[17] Carlos Souza Pardim. O movimento da escola nova no brasil da década de 1930. UFMS, 1:1–12, 2008.

[18] João Bosco Pitombeira Tatiane Roque. Tópicos de história da Matemática. SBM, Rio de Janeiro, 2011.