Antonio Cesar Pinheiro

O teorema “de Pitágoras" estudado a partir de ornamentos africanos

São Paulo

2017

Antonio Cesar Pinheiro

O teorema “de Pitágoras" estudado a partir de ornamentos africanos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo.

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

Câmpus São Paulo

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Orientador: Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

São Paulo

2017

P654t
Pinheiro, Antonio Cesar
O teorema “de Pitágoras" estudado a partir de ornamentos africanos/ Antonio Cesar Pinheiro. – São Paulo, 2017-
81 f. il.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho

Dissertação – (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2017. 2017.

1. Etnomatemática. 2. Ensino de Matemática. 3. Cultura Africana. 4. Lei 10.639/03. 5. Teorema de Pitágoras. I. Pinheiro, Antonio II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP. III. Título.
CDD 510

Antonio Cesar Pinheiro

O teorema “de Pitágoras" estudado a partir de ornamentos africanos

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Câmpus São Paulo.

Trabalho aprovado. São Paulo, 15 de setembro de 2017:

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
Orientador

Prof. Me. Rodrigo Guimarães Abreu
GEPEm/FEUSP

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
IFSP - Câmpus São Paulo

São Paulo
2017

Dedico este trabalho aos meus pais
Isolina Leone da Silva
e David Alves Pinheiro (in Memoriam).

Agradecimentos

A minha mãe Isolina Leone da Silva, por toda a paciência, cuidado e carinho durante todo o momento.

Ao Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho pelas suas sugestões, orientação e críticas e que foi o responsável em incentivar a tratar sobre a Etnomatemática.

Aos meus professores do PROFMAT/IFSP pelas excelentes aulas e por nos incentivarem a passar por este estágio de forma tranquila e consciente.

Aos meus colegas mestrandos do PROFMAT/IFSP pelas trocas enriquecedoras de conhecimento.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

E acima de tudo a Deus.

A Matemática, quando a compreendemos bem,
possui não somente a verdade,
mas também a suprema beleza.
(Bertrand Russel)

Resumo

O presente trabalho apresenta uma proposta para que professores do 8º e 9º ano da Educação Básica possam discutir e estudar Matemática com seus alunos de uma forma diferente do que é apresentado em livros didáticos e apostilas convencionais e também resgatar as contribuições do povo negro na constituição da sociedade nacional como expõe a lei 10.639/03. Os subsídios teóricos foram buscados na etnomatemática, a partir de pesquisadores desta área como Ubiratan D'Ambrósio e Paulus Gerdes que entendem que a Matemática está presente e é praticada por diversos grupos sociais. Discutiremos neste trabalho o teorema "de Pitágoras" observado em ornamentos característicos da cultura africana. Por fim, oferecemos aos professores atividades comentadas com auxílio da teoria de registros de representação semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, acerca do processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e mostramos que é possível trilhar caminhos diferentes para estudar o teorema "de Pitágoras".

Palavras-chave: Etnomatemática; Ensino de Matemática; Cultura Africana; Lei 10639/03; Teorema de Pitágoras.

Abstract

The present work presents a proposal for teachers of 8th and 9th grade Basic Education to discuss and study mathematics with their students in a different way than what is presented in regular books and manuals and also to rescue the black people contribuitions in the constitution of the national society as describerd by Law 10639 / 03. For this purpose we found theoretical subsidies from Ethnomathematics, primally on the publications of researchers in this field such as Ubiratan D'Ambrósio and Paulus Gerdes who understand that Mathematics is present and is practiced by several social groups. We will discuss in this work the Pythagorean theorem where the object of study are african ornaments. Finally, we offer activities with comments based upon the theory of registers of semiotic representation, developed by Raymond Duval, dealing with the process of teaching and learning of mathematical content and showing that there are possible alternative paths to study the Pythagorean theorem.

Keywords: Ethnomathematics; Mathematics Teaching; African Culture; Law 10639/03; Pythagorean theorem.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Sumário

Introdução

Para a leitura e compreensão deste trabalho devemos destacar que o sabere matemático não é exclusivo dos grandes centros acadêmicos nem é unicamente ensinado de forma linear pelas escolas, mas que tal saber ou fazer matemático faz parte, como diz D'Ambrósio (2015), do cotidiano de qualquer sociedade, comunidade ou grupo que apresentam certas características comuns. Em algum momento nas relações entre os seres humanos existem necessidades como comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e avaliar situações.

Assim surge a etnomatemática, com essa e outras questões fundantes, em meados da década de 70 que, nas palavras de seu idealizador Ubiratan D'Ambrósio busca evidenciar que existem várias maneiras, técnicas, habilidades (ticas) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (matema) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (etnos), logo, a Etnomatemática não é apenas o estudo de "matemáticas das diversas etnias", mas sim a matemática praticada por outros grupos culturais, como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, crianças de certa idade, sociedades indígenas e outros grupos que apresentam tradições comuns (D'AMBROSIO, 2015, p.63).

Sobre o uso de aspas para o teorema "de Pitágora" remete ao fato de indagarmos se realmete existiu o sujeito denominado Pitágoras. Grupos da historiografia da matemática não definem se relamente existiu este personagem, como apontam Roque e Carvalho (2012, p.65), e se existiu, provavelmente aprendeu este teorema no polo cultural e científico da época que era o Egito (GERDES, 2011, p.7).

Outro ponto importante e conceitual presente no decorrer do texto se refere em escrevermos matemática (com m minúsculo) e Matemática (com M maiúsculo). De acordo com Fiorentini e Oliveira (2013), entende-se por matemática ou *matemáticas* o fato de existirem diversas matemáticas dependendo do contexto da prática social enquanto que Matemática é a matemática produzida e teorizada por matemáticos profissinais, mas que pode ser transportada para a escola, conforme teoriza Chevalard (1991). Portanto, nos referimos à Mátematica, aquela matemática presente em propostas curriculares e documentos oficiais e matemática ou *matemáticas* seguida de um adjetivo como pura, aplicada, popular, escolar, africana, grega, ..., que vai ao encontro do programa de pesquisa da etnomatemática.

Tomamos o que é discutido ao utilizar a etnomatemática e o seu programa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com importantes implicações pedagógicas, definidos por D'Ambrosio (2015), para incorporar na Matemática escolar valores da humanidade, sintetizados numa ética de respeito, solidariedade e cooperação com grupos históricamente excluídos. Desta forma, selecionamos um conhecimento matemático a ser ensinado na Educação Básica e mostramos que é possível discutir ideias sobre o resgate da dignidade cultural, dos valoes e da autoestima. Para o nosso trabalho escolhemos o teorema "de Pitágoras" como conhecimento matemático a ser ensinado com o auxílio de um adorno decorativo de Gana e a aplicação é uma atividade que propõe ao aluno identificar, com o auxílio do professor, os principais pontos conceituais do teorema "de Pitágoras".

Destacamos as contribuições do matemático holandês naturalizado moçambicano Paulus Gerdes que nos deixou inúmeros trabalhos especialmente os que envolviam os saberes matemáticos em diversas sociedades africanas. Apresentamos comentários acerca de seus trabalhos, especialmente o livro "Pitágoras Africano" que encaminhou esta dissertação.

Como fundamentação teórica e argumentos justificativos para a proposta deste trabalho, discutimos duas importantes políticas públicas e a teoria de registro de representação semiótica. Sobre as políticas públicas tratamos dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, documento introduzido a quase três décadas que discute alguns problemas e sugere algumas soluções atuais para o processo de ensino de Matemática e a Lei 10.639/03 que busca resgatar as contribuições do povo negro[1] na constituição da sociedade nacional nas áreas social, econômica e política por meio do estudo, na Educação Básica da história e cultura africana. Já a teoria de registro de representação semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, trata de questões relacionadas ao conhecimento e como se processa a aprendizagem nos indivíduos e nos foi válida na elaboração das estratégias sugeridas nas atividades.

Por fim, devem surgir inevitavelmente algumas das seguintes questões para os professores interessados em aplicar esta metodologia se "é possível ensinar Etnomatemática?" e se "é possível ensinar com a Etnomatemática?" que serão respondidas durante o texto.

[1] Tomamos a ideia de povo negro da Lei 10.639/09 e sugerimos o estudo para o aprofundamento do termo e sua ideias o trabalho de dissetação de Vanisio Luiz da Silva intitulado *A cultura negra na escola pública: uma perspectiva etnomatemática.*

1 O ambiente natural, social, cultural, e imaginário de explicar, aprender, conhecer, lidar com modos, estilos, artes e técnicas: Etnomatemática

Os povos ou sociedades, nas distintas épocas da história da humanidade, desenvolveram e desenvolvem a sua própria cultura, ou noção de cultura, linguagem, costumes, culinária, cultos, comércio, agricultura e sistemas de explicações. Não é diferente o que ocorre com os conhecimentos matemáticos.

De acordo com o pesquisador e educador brasileiro Ubiratan D'Ambrosio, o fazer matemático faz parte do cotidiano de qualquer sociedade, comunidade ou grupo que apresentam certas características em comum como as necessidades de comparar, classificar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e avaliar situações. Assim, Ubiratan D'Ambrosio define a etnomatemática como "a maneira particular e específica que cada grupo culturalmente identificados utiliza para classificar, ordenar, contar e medir"(D'AMBROSIO, 2015, p.22), em que podem ser ampliadas as capacidades de domínio deste grupo de observar, inferir e experimentar.

É importante observar que para compor a palavra etnomatemática, o pesquisador Ubiratan D'Ambrosio utiliza as raízes *tica*, *matema* e *etno* para expressar que existem várias maneiras, técnicas, habilidades (*ticas*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver (*matema*) com distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etnos*), logo, a Etnomatemática não é apenas o estudo de "matemáticas das diversas etnias", mas sim a matemática praticada por cada grupos cultural, como comunidades urbanas e rurais, grupos de trabalhadores, crianças de certa idade, sociedades indígenas e outros grupos que apresentam tradições comuns.

Como exposto até este momento, a visão política da etnomatemática, é focada na recuperação da dignidade do ser humano com o objetivo de induzir a atitudes mais globalizantes, mais justas, mais decididamente enraizadas em autênticos valores sociais e humanos (VERGANI, 2007, p.10) contra uma visão eurocêntrica que classifica os povos em civilizados e não civilizados.

As ideias sobre a Etnomatemática surgiram por volta da década de 70 por meio das críticas à matemática ensinada tradicionalmente nas escolas, mas foi só reconhecida oficialmente como novo campo de investigação/ação na *5th International Congress on*

Mathematical Education / ICME na Austrália em 1984. É importante apontar neste momento que não basta observar um problema, no caso do Ensino de Matemática tradicional, e supor respostas sem antes fazer pesquisas e construir o embasamento teórico para a resolução do problema. Sendo assim, Ubiratan D'Ambrosio, apresenta as dimensões conceitual, histórica, cognitiva, epistemológica, política e educacional da Etnomatemática com o intuito de torná-la um campo de investigação/ação.

D'Ambrosio (2015, p.27) caracteriza na dimensão conceitual a etnomatemática como um programa de pesquisa em história e filosofia da matemática com implicações pedagógicas. O pesquisador justifica esta conceituação no fato da matemática, como qualquer conhecimento geral da humanidade, ser "resposta às pulsões de sobrevivência e de transcendência, que sintetizam a questão existencial da espécie humana"(D'AMBROSIO, 2015, p.27).

Considerando a dimensão histórica, D'Ambrosio (2015, p.29) discute a rápida evolução do conhecimento em curto espaço de tempo e destaca os tipos diferentes de raciocínios, do quantitativo dos babilônios para o qualitativo que se iniciou com os gregos e que prevaleceu durante a Idade Média. O pesquisador diz que "a modernidade se deu com a incorporação do raciocínio quantitativo"(D'AMBROSIO, 2015, p.27), possível graças à aritmética, algarismos indo-arábicos e dos logaritmos, culminando com os computadores. Sendo assim, para o apogeu da ciência moderna

> foi privilegiado o raciocínio quantitativo, que pode ser considerado a essencia da modernidade. Mais recentemente, vemos uma busca intensa de raciocínio qualitativo, particularmente através da inteligênci artificial(D'AMBROSIO, 2015, p.29).

Em dimensões cognitivas, D'Ambrosio (2015, p.31) volta a discutir as ideias matemáticas, particularmente comparar, quantificar, medir, explicar, generalizar, inferir e, de algum modo, avaliar, são formas de pensar, presentes em toda espécie humana e se existem essas ideias, existe a Etnomatemática, D'Ambrosio (2015, p.33) dá o exemplo do australopiteco e da pedra lascada, pois foi necessário ao sujeito selecionar a pedra e avaliar suas dimensões e lascá-la de forma necessária e suficiente para o seu uso. O autor destaca a construção do conhecimento via interação social, salientando que

> Embora o conhecimento seja gerado individualmente, a partir de informações recebidas da realidade, no encontro com o outro se dá o fenômeno da comunicação, talvez a característica que mais distingue a espécie humana das demais espécies. Via comunicação, as informações captadas por um indivíduo são enriquecidos pelas informações captadas pelo outro (D'AMBROSIO, 2015, p.29).

Quanto a dimensão epistemológica, D'Ambrosio faz críticas à noção de epistemologia focalizada no conhecimento já estabelecido de acordo com paradigmas do momento, desvalorizando outros tipos de conhecimentos e entende que

> Os sistemas de conhecimentos são os conjuntos de respostas que um grupo dá as suas pulsões de sobrevivência e de transcendência, inerentes à espécie humana. São os fazeres e os saberes de uma cultura. (D'AMBROSIO, 2015, p.37).

No caso da Matemática presente em nossos ambientes escolares, a questão do desenvolvimento de saberes focaliza a matemática ocidental como a "culminância de um desenvolvimento sequencial e único do pensamento humano"(D'AMBROSIO, 2015, p.38), desqualificando tudo o que é periférico, e estabelece uma epistemologia dominante.

Na dimensão política, o pesquisador trata do conflito existente em toda a história da humanidade entre conquistador e conquistado, onde

> O conquistado não pode deixar o conquistado se manifestar. A estratégia fundamental no processo de conquista, adotado por um indivíduo, um grupo ou uma cultura [dominador], é manter o outro, indivíduo, grupo cultural ou cultura [dominado], inferiorzado. Uma forma, muito eficaz, de manter um indivíduo, grupo ou cultura inferiorizado é emfraquecer suas raízes, removendo os vínculos históricos e a historicidade do dominado. (D'AMBROSIO, 2015, p.40).

E para essa finalidade o conquistador arma-se das ferramentas mais prejudiciais onde consta

> A remoção da historicidade pelo conquistador implica na remoção da língua, da produção, da religião, da autoridade, do reconhecimento, da terra e da natureza e dos sistemas de explicação em geral. (D'AMBROSIO, 2015, p.40).

A etnomatemática se propõe a resgatar estes sentidos, estas raízes, pela reflexão sobre uma possível descolonização, na procura de reais possibilidades de acesso ao marginalizado e excluído. Esta ação pretende restaurar a dignidade do indivíduo; reconhecer e respeitar as raízes de um indivíduo não significa ignorar e rejeitar as raízes do outro, mas num processo de síntese, reforçar suas próprias raízes (D'AMBROSIO, 2015).

A dimensão educacional da etnomatemática trata de não ignorar e nem rejeitar a matemática acadêmica da sociedade moderna, mas, sim, de incorporar "a ele valores de humanidade, sintetizados numa ética de respeito, solidariedade e cooperação"(D'AMBROSIO, 2015, p.43). Logo, conhecer e assimilar a cultura do dominador torna-se positivo quando se pensa na troca de conhecimentos, desde que as raízes culturais do dominado sejam fortes para que não sejam substituídas.

D'Ambrosio (2015) discute que é um grande equívoco substituir uma boa matemática acadêmica, que é essencial para que um indivíduo atue no mundo moderno, pela etnomatemática e destaca que

> Na sociedade moderna, a etnomatemática terá utilidade limitada, mas igualmente, muito da matemática acadêmica é absolutamente inútil nessa sociedade. [...] Costuma-se dizer "é necessário aprender isso para adquirir base para poder aprender aquilo". O fato é que, o "aquilo"deve cair fora e, ainda com maoir razão, o "isso". (D'AMBROSIO, 2015, p.43).

A etnomatemática privilegia o raciocínio qualitativo, que tem seu propósito quase sempre ligado a uma questão maior, de natureza ambiental ou de produção e "raramente se apresenta desvinculada de outras manifestações culturais, tais como arte e a religião"(D'AMBROSIO, 2015, p.45). Logo, a etnomatemática se enquadra numa concepção multicultural e holística de educação em transição no sentido de estarmos, nós e a escola, vivendo em um período histórico onde a comunicação, modelos econômicos, sistemas de produção, sistemas de governança e modelos de tomadas de decisão estão em constante mudança. Neste ponto, D'Ambrosio (2015) destaca que

> A educação nessa transição não pode focalizar a mera transmissão de conceitos obsoletos, na maioria desinteressante e inúteis, e inconsequentes na cosntrução de uma nova sociedade. O que podemos fazer para as nossas crianças é oferecer a elas os instrumentos comunicativos, analíticos e materiais para que elas possam viver, com capacidade de critica, numa sociedade multicultural e impregnada de tecnologia. (D'AMBROSIO, 2015, p.46).

A proposta pedagógica da etnomatemática é fazer da matemática algo vivo, lidando com situações no tempo e no espaço, e questionar o aqui e agora. Assim, a etnomatemática é vista "como um caminho para uma educação renovada, capaz de preparar gerações futuras para cosntruir uma civilização mais feliz"(D'AMBROSIO, 2015, p.47).

Então, de acordo com o exposto até este momento, pode-se perguntar: *Etnomatemática se ensina?*. D'Ambrosio escreveu um artigo com o mesmo questionamento na Revista Bolema, em 1988 e diz simplesmente que a "Etnomatemática não se ensina, se vive e se faz"(D'Ambrósio, 1998), ou seja, o professor interessado em trabalhar com Etnomatemática deve mergulhar no universo sociocultural de seus alunos, compartilhando com eles as suas observações. De acordo com o pesquisador, a pergunta que deve ser feita é: "como posso aprender Etnomatemática com meus alunos?"(D'Ambrósio, 1998).

Em contrapartida, alguns pesquisadores, como Teresa Vergani no seu livro *Educação Etnomatemática: o que é?* apresenta uma proposta de criação de uma disciplina de Etnomatemática nas universidades que teria por objetivo, por exemplo, a contextualização sociocultural dos conteúdos matemáticos curriculares e a descoberta do significado da matemática em termos de valor social/educacional/pessoal.

A etnomatemática recebe, de acordo com os pesquisadores Márcia e Roberto Ascher, uma conceituação diferente da proposta por D'Ambrosio que é: "a maneira particular e específico que cada grupo culturalmente identificados utilizam para classificar, ordenar, contar e medir" (D'AMBROSIO, 1988, p.28). Tais pesquisadores conceituam etnomatemática como "o estudo das ideias matemáticas de povos não alfabetizados", desta forma, a Matemática utilizada por certos grupos profissionais, por exemplo, não seria um tipo de Etnomatemática. É importante expor que os pesquisadores Márcia e Roberto Ascher fazem um grande apelo para não delimitar a Etnomatemática ao estudo de modos de contagem, como o conceito de número em diversas culturas, e de práticas de decoração em tapetes e vasos, por exemplo. Esta é a definição dita de modo trivial por muitos professores que ouvem falar de etnomatemática, e os exemplos são a simetria presente no artesanato indígena e a ideia que algumas tribos possuíam para contar nas quais existiam palavras para representar a unidade, o dois e por fim, algo referente a "muito"(D'Ambrósio, 1998).

Contrapondo as ideias de Márcia e Roberto Ascher e se alinhando a conceituação proposta por D'Ambrosio, Bishop (1994) complementa discutindo algumas características da matemática que se tornaram atualmente tabus, além de dividir as pesquisas na área da Etnomatemática em três focos. Em seu artigo, Bishop (1994) aborda que os conflitos culturais e educacionais da atual sociedade levaram professores e pesquisadores a discutir se a matemática é realmente um campo de conhecimento aculturado e universal. Entende-se o terno aculturado como algo livre e adaptável a qualquer cultura e universal como algo que todos devem conhecer seguindo as suas regras. Bishop (1994) argumenta que este é um tipo de visão em que se quer tornar o mundo ocidentalizado, onde a matemática é adaptável, mas imutável, ou seja, os conceitos matemáticos são introduzidos nas culturas, mas o inverso não ocorre, logo quem se adapta à matemática é a cultura.

A divisão proposta por Bishop (1994) para classificar as pesquisas ou trabalhos em Etnomatemática é a seguinte:

a) *Conhecimento matemático em culturas tradicionais* que apresentam uma forte contribuição antropológica e enfatizam a singularidade particular dos conhecimentos e práticas relacionados às várias culturas. Se destacam os pesquisadores Ascher, Zaslavsky, Gerdes, Harris e Pinxten.

b) *Conhecimento matemático em culturas não ocidentais* que apresentam fortes contribuições de documentos históricos para constatar práticas ainda existentes. Se destacam os pesquisadores Ronan e Needham, Joseph e Gerdes.

c) *Conhecimento matemático de diferentes grupos numa sociedade* que apresenta uma investigação socio-psicológica e dão ênfase à pratica e ao conhecimento matemático de um certo grupo da sociedade. Se destacam os pesquisadores Lave, Saxe, de Abreu e Carraher.

2 Documentos legais

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN de Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN foram organizados e apresentados oficialmente ao público de interesse em 1997 por iniciativa do Governo Federal. Apesar de se tratar de um documento publicado há quase três décadas e que, em alguns pontos apresenta certo descompasso com a atual situação da sociedade, há contribuições deste documento para a orientação, discussão, consolidação e execução dos currículos de estados e municípios. Destacamos alguns aspectos do PCN de Matemática nos seguintes itens: Tema Transversal Pluralidade Cultural, História da Matemática, Etnomatemática e os blocos de conteúdos Números e Operações e Espaço e Forma.

Os PCN de Matemática afirmam, na discussão a respeito do Tema Transversal Pluralidade Cultural, que a construção e utilização de conhecimentos matemáticos são presentes em todos os grupos socioculturais que utilizam as habilidades de contar, localizar, medir, desenhar, representar, jogar, explicar, avaliar, ordenar, em função de suas necessidades. Valorizar esses saberes matemáticos cultural e aproximá-los do saber escolar matemático é significativo para os discentes. Logo, ao dar importância a esses saberes, a escola contribui para a superação do preconceito de que a matemática foi construída por certos grupos sociais ou sociedades mais desenvolvidas. O aluno pode notar a importância dos conhecimentos matemáticos de culturas que não tiveram hegemonia política.

Vários exemplos podem ser tirados da História da Matemática, como a introdução do sistema indo-arábico que demorou muito tempo para ser aceito no continente europeu por conta de seus criadores e difusores não serem cristãos brancos. Logo, com essa apresentação, os PCN de Matemática introduzem o programa Etnomatemática como um campo que se comunica com o tema transversal Pluralidade Cultural, pois este programa valoriza e busca compreender as habilidades matemáticas desenvolvidas no ambiente sociocultural próprio de certos grupos sociais. (PCN, p. 32 e 33).

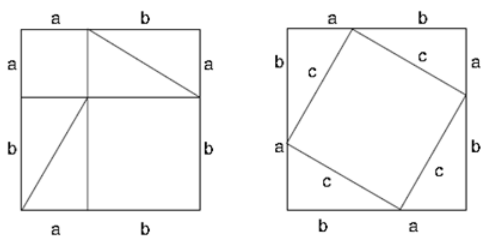
Os PCN reorganizam as áreas de Aritmética, Álgebra e Geometria em blocos de conhecimento denominados Números e Operações, Espaço e Forma e Grandezas e Medidas, além do bloco Tratamento da Informação que corresponde a conceitos básicos da Estatística e Análise Combinatória. O bloco Números e Operações contempla o campo da Aritmética e Álgebra. Durante todo o processo educativo o aluno vai descobrir a importância dos números e conhecer gradativamente os seus diversos tipos. Inicia-se o encaminhamento à Álgebra pela generalização de padrões aritméticos, bem como o estudo de variação de grandezas possibilita a exploração de funções.

O bloco Espaço e forma contempla a Geometria. Nesta área o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar o mundo em que vive. Sugere-se para o professor ensinar Geometria que o aluno use a régua e o compasso para algumas construções. Este bloco contempla o estudo das formas, noções relativas à posição, localização de figuras e deslocamento no plano e sistema coordenado (transformações geométricas) e as construções geométricas. Além disso,

> é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1997, p. 50)

Os PCN de Matemática tratam da importância da prova formal de alguns resultados geométricos e não somente por meio de manipulações concretas, e dá como exemplo o teorema “de Pitágoras":

> As atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que a partir de experiências concretas leve-os a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre os três domínios citados anteriormente: o espaço físico, as figuras geométricas e as representaccões gráficas.
>
> Tome-se o caso do teorema de Pitágoras para esclarecer um dos desvios frequentes quando se tenta articular esses domínios. O professor propõe ao aluno, por exemplo, um quebra-cabeças constituído por peças planas que devem compor, por justaposição, de duas maneiras diferentes, um modelo material de um quadrado (ver figura). Utilizando o princípio aditivo relativo ao conceito de área de figuras planas, observa-se que $a^2 = b^2 + c^2$. Diz-se, então, que o teorema de Pitágoras foi ”provado”. (BRASIL, 1997, p. 50)



Já o bloco Grandezas e Medidas permite uma interligação entre Aritmética, Álgebra e Geometria. Relaciona-se muito com o conhecimento matemático no cotidiano. Neste bloco são apresentadas diferentes grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, capacidade, etc., incluindo as que são obtidas pela razão ou produto de duas outras como velocidade, aceleração, energia elétrica, densidade demográfica, etc.

As recomendações presentes nos PCN, em algum grau têm influenciado, desde sua publicação, questões relacionadas à produção de materiais didáticos, currículos de formação inicial de professores e estrutura de avaliações dos sistemas de ensino. As propostas feitas neste trabalho não poderiam se isentar de verificar, portanto, suas conexões com tais parâmetros. O tema por nós escolhido permite transitar por assuntos que são tratados em mais de um dos blocos dos PCN e a questão das diversas representações possíveis de um mesmo conceito matemático foi interpretada a partir da teoria de Duval, tratada a seguir.

2.2 Lei 10.639/03

O primeiro artigo da lei 10.639/03[1] apresenta a inclusão nos currículos dos estabelecimentos de Ensino Fundamental e Médio de escolas públicas e privadas a obrigatoriedade do ensino da História e Cultura Afro-Brasileira e, logo em seguida, em seus parágrafos faz-se uma breve justificativa sobre a forma como será abordada esta temática no Ensino Fundamental e Médio. Justifica-se o estudo da História e Cultura Afro-Brasileira com o intuito de resgatar a contribuição do povo negro na constituição da sociedade nacional nas áreas social, econômica e política.

A lei 10.639/03 orienta que se trabalhe a temática História e Cultura Afro-Brasileira preferencialmente por professores das áreas de Artes, Literatura e História. Isso obviamente não justifica a ausência do trabalho de professores de outras áreas do conhecimento em atividades em suas salas ou em trabalhos interdisciplinares. O que se observa nas escolas e se constata em pesquisas acadêmicas como em Lima (2007) e Pereira (2011), é que a temática a ser tratada fica a cargo dos professores das áreas mencionadas no início do parágrafo e poucos são os trabalhos acadêmicos e artigos de práticas pedagógicas de professores de matemática.

Os poucos artigos acadêmicos e relatos de práticas matemáticas com foco na lei 10.639/03 são relativamente bem embasados legalmente e apresentam contribuições da Etnomatemática, da História da Matemática e do tema transversal Pluralidade Cultural introduzido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, mas com singelas contribuições matemáticas referentes aos principais conteúdos tratados na Educação Básica, por exemplo, em Oliveira, Severino e Ferreira (2011) em que se utiliza de pressupostos teóricos da História da Matemática e da Etnomatemática na formação de professores de Pedagogia e sugere analisar e criar atividades do bloco Números e

[1] A lei na íntegra para maiores detalhes encontra-se no anexo.

Operações tendo como referência o primeiro registro matemático da humanidade que é o Osso de Ishango[2]

Já Lima (2007) valeu-se principalmente do bloco Tratamento da Informação com foco em Estatística para mostrar e analisar por meio de atividades, o quanto a sociedade brasileira apresenta fatores de desigualdades sociais e raciais; a autora faz uma comparação e constatação dos gráficos e tabelas produzidos pelos alunos a partir de dados retirados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE.

Em Ferreira e Oliveira (2014) também se discute a escassez de material acadêmico produzido com a intenção de introduzir a cultura africana nas aulas de matemática e constata que alguns destes trabalhos são de atividades lúdicas como o jogo Mancala, de observação e estudo de formas geométricas de tecidos e teares de Gana, pinturas do antigo Egito e dos desenhos na areia Sona, também com um apelo geométrico, de Angola.

Utilizar elementos historicamente constituídos, como peças de artesanato ou obras de literatura folclórica como ponto de partida para o ensino de Matemática é uma proposta enfática do professor Paulus Gerdes, cuja breve biografia e contribuição são em seguida apresentadas.

[2] As incisões no osso de Ishango fazem referência ao calendário lunar e tal conclusão provocou uma revolução no conhecimento acadêmico do paleolítico, pois o emprego de artefatos para o registro de tempo ainda era insuspeito. (ALMEIDA, 2003, p.161).

3 Bases conceituais

3.1 Registros de representação semiótica

A teoria de registro de representação semiótica, desenvolvida por Raymond Duval, surgiu por meio de estudos sobre os processos de aprendizagem nos indivíduos. Uma representação semiótica, de acordo com Duval, são produções constituídas pelo emprego de certos signos característicos de um sistema de representação que possui suas próprias dificuldades e regras de funcionamento com o intuito de comunicar ideias entre indivíduos (DAMM, 2010). Ou seja, trata-se resumidamente de sistemas de linguagem que apresentam símbolos e regras próprias, por exemplo, as linguagens materna, figural, simbólica, gráfica, algébrica, de tabelas, sonora, entre outras (ALMOULOUD, 2010).

Duval apresenta três noções de representação para a constituição de sua teoria de registro de representação semiótica que são:

a) *as representações como representação subjetiva e mental:* foram inicialmente estudadas por Piaget nos anos de 1924-26 em sua obra *A representação do mundo da criança* que trata de estudar as concepções que as crianças criam sobre fenômenos naturais. Piaget apontou que as concepções errôneas criadas pelas crianças eram conversões que representavam indícios das coisas ou de outra lógica;

b) *as representações internas ou computacionais:* estudadas a partir de 1955-1960 juntamente com as teorias que abordam o tratamento da informação e são representações internas e não conscientes do sujeito, ou seja, o sujeito executa as tarefas sem pensar em todos os passos. Isso é comum em algoritmos computacionais no tratamento da informação ou mesmo em algoritmos para a realização das operações matemáticas;

c) *as representações semióticas* surgiram com um problema de modelização da linguagem. A representação semiótica, diferente das representações internas ou computacionais, é externa e consciente do sujeito e com isso o tratamento do conhecimento depende da forma e não do conteúdo envolvido, além da possibilidade da conversão de representações equivalentes (DAMM, 2010).

É importante expor que Duval entende que as representações semióticas são indispensáveis para a construção do conhecimento do sujeito que aprende e que seria ingênuo pensar que as representações semióticas possuam a função de meramente comunicar as representações mentais.

Por meio das representações semióticas é possível a constituição de certas funções cognitivas essenciais ao pensamento humano. Duval chama de "*semiósis* a apreensão ou a produção de uma representação semiótica e de *noésis* a apreensão conceitual de um objeto" (DAMM, 2010, p 177). Para que ocorra a apreensão de um objeto matemático é necessário que a conceitualização ou noésis ocorra por meio de relevantes representações ou simeósis. Desta forma a compreensão de um conceito matemático ocorrerá de maneira tanto mais intensa quanto maior for a quantidade de tipos de representações e, consequentemente, a conversão entre essas representações.

Portanto, o processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos pode ser relacionado com o conceito de representação semiótica, pois, no ensino de matemática, ao contrário de outras ciências, há representações semióticas exclusivas ou mais especificamente utilizadas, por exemplo, registro de representação decimal, fracionário e verbalizado para um mesmo número racional (ALMOULOUD, 2010).

Raymond Duval introduz a distinção importante e muito útil para o ensino de matemática sobre o tratamento e a conversão de registros de representações. De acordo com o pesquisador, um tratamento é uma transformação que se desenvolve no interior deste mesmo registro, por exemplo, no registro de representação algébrico, pode-se fazer seguinte tratamento ao perceber que a expressão algébrica $x^2 + 2x + 1$ tem correspondência com a sua identidade algébrica $(x + 1)^2$. Já a conversão é uma transformação em que o registro de representação se modifica, mas conserva, pelo menos, a referência ao mesmo objeto ou à mesma situação representada (ALMOULOUD, 2010); por exemplo, ao se fazer o tratamento no registro de representação decimal da expressão numérica $0,4 + 0,3 = 0,7$ pode-se admitir o seguinte registro de representação fracionária $\frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Outro exemplo de como o tratamento e a conversão de registros de representação são muito úteis para o ensino de conceitos matemáticos se refere à relação entre aritmética, álgebra e geometria dos números quadrados. De posse do registro de linguagem materna pode-se definir que todo número quadrado é escrito como uma soma de números ímpares ou então converter esse tipo de registro em numérico e escrever que

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$$

$$\ldots$$

Ou então fazer um simples tratamento no próprio registro de representação numérico com potências para observar que em uma das linhas apresentadas, a soma de números quadrados (4^2 e 3^2) resulta em um número quadrado (5^2).

$$1 = 1^2$$
$$1^2 + 3 = 2^2$$
$$2^2 + 5 = 3^2$$
$$3^2 + 7 = 4^2$$
$$4^2 + 3^2 = 5^2$$
$$5^2 + 11 = 6^2$$
$$\ldots$$

Pode-se converter do registro de representação numérico para o registro de representação figurado/geométrico por meio do gnomo, que é sinónimo de número ímpar para os pitagóricos

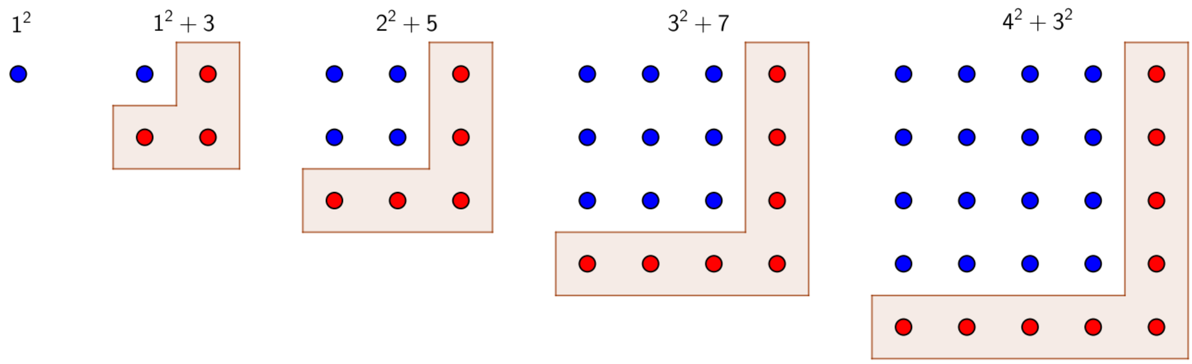


Figura 1 – Sequência dos números quadrados por meio do gnomon

Ainda é possível converter o registro de representação na língua materna, numérico, figural/geométrico para o registro de representação algébrico $n^2 = \sum_{i=1}^{n}(2i - 1)$. Os exemplos sugeridos não esgotam as conversões entre registros, mas foram selecionados para indicar como pode um mesmo conceito ser alvo de representação sob diversas formas.

A passagem de um registro de representação para outro não ocorre em muitos casos de forma espontânea, mas sim com a mediação constante do professor. A tarefa de mudar a forma de registro em alguns casos torna-se impossível para alguns alunos de diferentes níveis (DAMM, 2010, p 185). É fundamental que o professor apresente ao menos dois tipos diferentes de registros de representação durante o processo de ensino-aprendizagem para que ocorra a apreensão de um conteúdo matemático, pois caso contrário, entende-se que se efetua somente o tratamento de um conceito em um único registro de representação.

Na composição da cultura do povo brasileiro, as contribuições de diferentes povos garantiram o vastíssimo ambiente cultural que não pode ser desprezado pelos docentes de qualquer componente curricular no âmbito das atividades no ensino regular. Os instrumentos legais que tratam da valorização da História e Cultura afro-brasileiras e alguns impactos em pesquisas educacionais é objeto de estudo da próxima seção.

3.2 Contribuições de Paulus Gerdes

Paulus Gerdes (1953 - 2014) [1] nasceu na Holanda em uma família tradicional; estudou na Universidade de Nijmegen, onde recebeu o título de Bacharel com louvor em matemática e física, em 1972. Teve uma experiência em missão humanitária no Vietnam, tendo retornado para Nijmegen e concluido o Bacharelado em Antropologia cultural em 1974. No ano seguinte, concluiu o Mestrado em Matemática. Na Holanda tornou-se docente no “Centro do Terceiro Mundo"conectado com as lutas pela liberdade na África Austral. Em meados de 1976 foi para Moçambique, onde passou a morar, constituiu família e tornou-se cidadão moçambicano. Foi professor da Universidade Eduardo Mondlane até 1989, quando se transferiu para a Universidade Pedagógica onde permaneceu até o fim da sua vida.

Em 1986, fez Doutorado na Universidade de Dresden, Alemanha, com a tese *O despertar do pensamento geométrico* e, em 1996, concluiu seu segundo Doutorado com a tese *Geometria Sona: Reflexões sobre tradições de desenhar na areia entre os povos da África ao Sul e do Equador*, na Universidade de Wuppertal, Alemanha.

Paulus Gerdes foi responsável por diversas teorizações matemáticas tendo como objeto de estudo materiais artesanais culturais de diversas sociedades africanas. Foi um dos responsáveis por uma mudança de atitude referente ao uso do artesanato e do folclore como fonte de estudos de trabalhos científicos em matemática. Seu nome estava ligado aos principais expoentes da Etnomatemática e conseguiu constituir em Moçambique um grupo de pesquisa muito ativo com jovens pesquisadores e professores para analisar as bases históricas e epistemológicas da matemática. Fundou em 1989 em Maputo o “Centro de Pesquisas em Etnomatemática – Cultura, Matemática e Educação"que trata de assuntos voltados à Educação Matemática.

Como historiador, Paulus Gerdes contribuiu para a compreensão das ideias matemáticas, teorias e práticas principalmente no continente africano. Sua preocupação

[1] As informações biográficas do prof. Paulus Gerdes foram adaptadas do afetivo obituário escrito pelo prof. Ubiratan D’Ambrosio e disponível em sua página pessoal: http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br/2014/11/paulus-gerdes-in-memoriam.html

era organizar o contexto histórico já existente com as teorias encontradas em diversas sociedades africanas. De acordo com Miguel e Miorim (2011), Paulus Gerdes não via a História da Matemática como um ponto de partida e nem como algo pronto e acabado para que os professores do sistema educacional pudessem usar com seus alunos, aliás, a principal preocupação de Paulus Gerdes era o papel que a matemática iria desempenhar no processo de reconstrução do sistema educacional, pois seria contraditório apresentar uma matemática criada exclusivamente por homens brancos europeus e relegado aos colonizados a memorização de todos os procedimentos.

As relações entre Paulus Gerdes e Ubiratan D'Ambrosio surgiram por volta da década de 70 e se consolidaram entre os anos, como relata o próprio Paulus Gerdes no seu livro *Da etnomatemática a arte-designe e matrizes cíclicas* (2010):

> É deste período que data a nossa amizade quando Ubiratan nos visitou, em 1978, em Moçambique, no contexto duma missão da UNESCO. Nesse ano, eu tinha avançado com a proposta do projeto de pesquisa *Conhecimento matemático-empírico das populações bantu de Moçambique*, embrião do posterior projeto de *Etnomatemática em Moçambique*. (GERDES, 2010, p. 17 e 18)

Em uma conferência em honra do 65º aniversário de Ubiratan D'Ambrosio,realizada em Baltimore (EUA) em janeiro de 1998, Paulus Gerdes se denominou um "filho da etnomatemática"e Claudia Zaslavsky (1917-206) autora do livro *África Conta: Números e Padrões nas Culturas Africanas* (1973), a "mãe da etnomatemática"(GERDES, 2010, p.17), enquanto que Ubiratan D'Ambrosio é considerado internacionalmente o "pai da etnomatemática", e sendo assim

> fundador de todo um programa profundo de reflexão sobre e de pesquisa do desenvolvimento de ideias matemáticas nos mais diversos contextos históricos, culturais e educacionais, pai da reflexão sobre as *raízes socioculturais da arte ou da tecnica de explicar e conhecer*(GERDES, 2010, p.17)

Moçambique alcançou sua independência de Portugal em 25 de junho de 1975 após uma luta de libertação de onze anos. O país necessitava ser reorganizado em vários pontos sociais e neste contexto surgiu a proposta e projeto de *Etnomatémática em Moçambique*, na qual Paulus Gerdes destacou que:

> Naquela época não havia nem meia dúzia de professores moçambicanos qualificados de Matemática para o ensino secundário. Em 1977, iniciou-se na então única universidade do país o programa de formação de professores para o ensino secundário. (GERDES, 2010, p.18)

Gerdes (2010) relata que a primeira universidade[2] de Moçambique iniciou com vinte estudantes, e os mesmos aspiravam, após o ingresso, formarem-se em profissões que não eram acessíveis aos moçambicanos no tempo colonial como advocacia, economia, medicina ou engenharia. Os estudantes aceitaram, tendo em vista as prioridades nacionais, serem professores, por algum tempo. Para a primeira turma da então recém-criada universidade de Moçambique "a Matemática parecia-lhes uma discilina esotérica, pouco interessante, e pouco útil para o desenvolvimento do país"(GERDES, 2010, p.18). Outra característica que os alunos apontaram sobre a Matemática ensinada nos tempos de colônia era o fato da mesma ser um "mecanismo de seleção"(Gerdes, 2010, p.18) e impedimento para que os alunos moçambicanos progredissem nas escolas. Desta forma,

> A Matemática parecia paraos estudantes, ainda por cima, uma disciplina estranha, cheia de termos gregos importados da europa, e sem raízes na sociedade e cultura moçambicana. É esta a imagem que os estudantes tinham da Matemática ao começarem o primeiro curso de formação de professores de Matemática, obviamente que ninguém queria queria ser professor duma disciplina tão horrenda. (GERDES, 2010, p.18 e 19)

O corpo docente internacional deparou-se com a difícil tarefa de motivar estes futuros professores pela Matemática. Então, foi criado para esta finalidade um componente curricular chamado "Aplicações da Matemática na vida corrente das populações", lecionado por PaulusGerdes. A disciplina de Aplicações, além de ser estudada em sala de aula, também propiciava visitas em ambientes fora da universidade. Gerdes (2010) relata a surpresa dos alunos ao cosntatarem que profissionais de uma fábrica de cerveja na cidade de Maputo trabalhavam com números negativos para controlar vários processos da fabricação. Os alunos pensavam que a introdução dos números negativos pelos colonos tinham a finalidade somente de complicar a vida dos estudantes moçambicanos, logo não encontravam nenhuma aplicabilidade. Com os estudos desta disciplina os estudantes:

> Começaram a ver a relevância do conhecimento Matemática como instrumento poderoso para melhorar as condições de vida dos camponeses, e de outros trabalhadores. Passo a passo, os estudantes começaram a gostar da Matemática.(GERDES, 2010, p.19)

Gerdes (2010) relata que numa das sessões do curso de "Geometria Plana"os estudantes ficaram surpresos da existencia das relações entre a Matemática e as culturas moçambicanas nas construções das casas tradicionais, nas quais se usa quatro bambus para construir as fundações e limites das casas retangulares. A partir deste ponto, Paulus Gerdes possibilitou aos estudantes formular e conhecer conceitos geométricos implícitos em técnicas cotidianas. Com este tipo de abordagem do ensino de Matemática,

[2] O autor se refere a Univesidade de Lourenço Marques, criada para filhos de colonos, e que foi transformada em 1976 em Universidade Eduardo Mondlane.

Gerdes defendeu que a valorização cultural é importante para que o povo se veja nesta sociedade, com suas produções e dinamismos, resgatando sua autoestima.

De acordo com Gerdes (2010), a maioria dos estudantes daquela primeira geração eram professores de Matemática em vários níveis de ensino e alguns concluíram cursos de mestrado e doutorado.

Desta forma Paulus Gerdes procurou criar novas bases para a matemática a ser ensinada e pesquisada em Moçambique, nas quais os problemas geradores podem surgir de situações sociais cotidianas ou de materiais culturais e podem ser resolvidas por qualquer pessoa, restabelecendo assim a dignidade cultural de uma sociedades brutalmente castigada pelos colonizadores europeus.

Assim, ao criar novas bases para a matemática africana com a intenção de restabelecer a dignidade cultural de sociedades colonizadas, os trabalhos[3] de Paulus Gerdes são exemplos de como relacionar o tema transversal Pluralidade Cultural com a intenção de valorizar e estudar saberes de outras culturas. Por fim, vale observar que Paulus Gerdes não era natural de Moçambique, mas sim da Holanda para ressaltar que não é necessário que o pesquisador em Etnomatemática seja originário da sociedade cujas produções culturais decide estudar.

[3] Várias publicações de Paulus Gerdes e de seus grupos de estudos estão disponibilizadas gratuitamente ou com baixo custo no site da editora Lulu

4 Demonstrações do teorema "de Pitágoras"

4.1 Demonstração do teorema "de Pitágoras" de Euclides

É objeto de interesse de nosso trabalho o teorema apresentado no Livro I, proposição 47 do livro "Os Elementos" de Euclides que se enuncia da seguinte forma: "Nos triângulos retânglos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto" (BICUDO, 2009, p.132).

Demonstração

Seja o triângulo retângulo ABC com o ângulo $\hat{A}$ reto. Descreva por cada um dos lados os quadrados ABFG, BCED e ACKH, e, pelo ponto A, fique traçada o segmento $\overline{AL}$ paralela aos lados do quadrado maior e, por fim, que fique ligado os segmentos $\overline{AD}$, $\overline{FC}$,$\overline{BK}$ e $\overline{AE}$ (Figura 13).

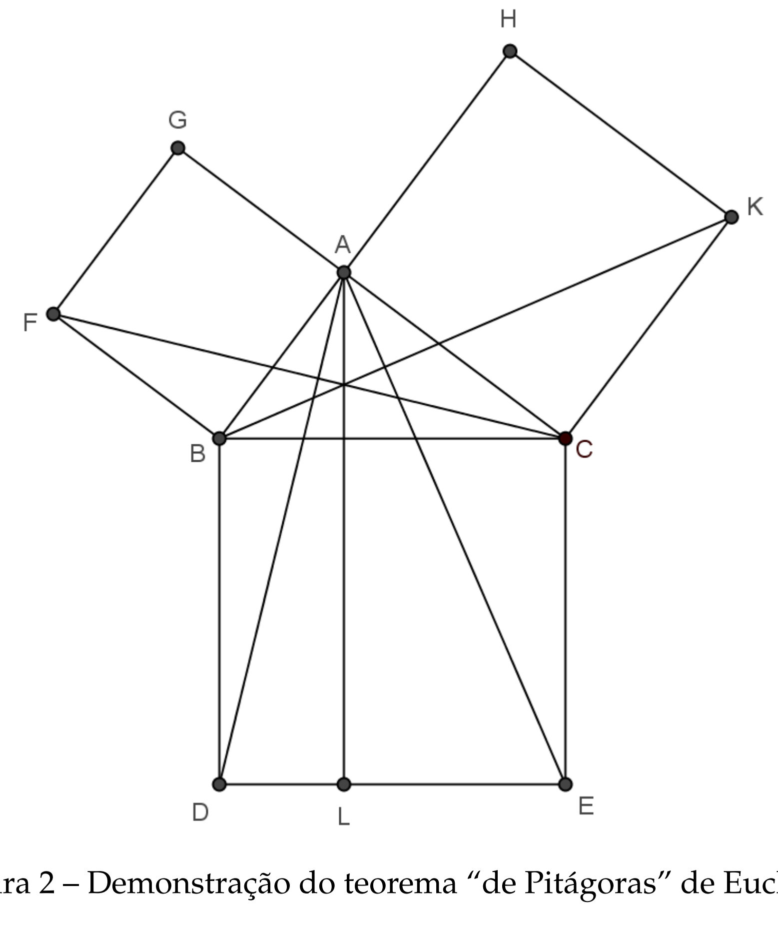


Figura 2 – Demonstração do teorema "de Pitágoras" de Euclides

A área do triângulo ABD é metade da área do retângulo cuja a base é o lado $\overline{DL}$ e a área do triângulo BCF é metade da área do do quadrado ABFG. Os triângulos BCF e ABD são congruentes pelo caso LAL, onde $\overline{AB} = \overline{BF}$, $F\hat{B}C = A\hat{B}D$ e $\overline{BD} = \overline{BC}$. Mas, “como os dobros das coisas iguais são iguais entre si", tem-se que a área do retângulo cuja a base é o lado $\overline{DL}$ é igual à área do quadrado ABFG. A área do triângulo ACE é metade da área do retângulo cuja a base é o lado $\overline{LE}$ e a área do triângulo BCK é metade da área do do quadrado ACKH. Os triângulos ACE e BCK são congruentes pelo caso LAL, onde $\overline{BC} = \overline{CE}$, $B\hat{C}K = A\hat{C}E$ e $\overline{AC} = \overline{CK}$. Mas, “como os dobros das coisas iguais são iguais entre si", tem-se que a área do retângulo cuja a base é o lado $\overline{LE}$ é igual à área do quadrado ACKH. Portanto, o quadrado sobre $\overline{BC}$ é igual aos quadrados sobre $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

O último resultado do Livro I, proposição 48 é o recíproco deste teorema que segue o enunciado: ”Caso o quadrado sobre um dos lados de um triângulo seja igual aos quadrados sobre os dois lados restantes do triângulo, o ângulo contido pelos dois lados restantes do triângulo é reto” (Bicudo, 2009, p.134).

Demonstração

A área do quadrado sobre o lado $\overline{BC}$ é igual as áreas sobre os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, por hipótese. Traçando a partir do ponto A o segmento $\overline{AD}$ congruente ao segmento $\overline{AB}$ perpendicular ao lado $\overline{AC}$ e ligando os ponts C e D (Figura 14), obtém-se que o quadrado sobre os lados $\overline{AD}$ e $\overline{AB}$ são iguais e o quadrado sobre o lado $\overline{AC}$ é comum aos dois triângulos ABC e ADC, assim, os quadrados sobre os lados $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ são iguais, logo os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BC}$ são congruentes. Desta forma, pelo caso LLL de congrueência de triângulos, os triângulos ABC e ADC são congruentes, portanto, $D\hat{A}C = B\hat{A}C = 90°$.

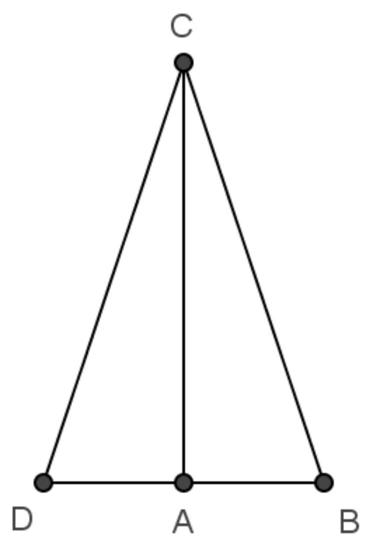


Figura 3 – Demonstração do teorema “de Pitágoras” de Euclides

4.2 O teorema “de Pitágoras" dos pitagóricos

O dito teorema “de Pitágoras” não costuma ser demostrado para alunos da Educação Básica da forma como vista na seção anterior, mas sim via relações métricas no triângulo retângulo ou por comparação de áreas de quadrados cujos lados têm as medidas correspondentes dos lados de um triângulo retângulo, apoiado por um tratamento algébrico (DANTE, 2010). Dizer que tal teorema foi formulado por Pitágoras ou desenvolvido por algum pitagórico não encontra sustento histórico, pois não se conhece nenhuma prova de que o teorema “de Pitágoras"tenha sido formulado ou demonstrado por aquela escola. É mais provável que o teorema “de Pitágoras” tal como trabalhado pelos pitagóricos tenha sido um caso de manipulação de números figurados (ROQUE; CARVALHO, 2012) como veremos abaixo.

Na historiografia da matemática, a escola pitagórica é localizada por volta do século V a.C e a ideia de números e sua representação eram distintas das atuais, pois cada número possuía um atributo e cada propriedade descoberta entre os números era associado a forças cósmicas. Desta forma, os pitagóricos consideraram que tudo são números e que “as propriedades aritméticas das coisas constituíam o seu ser propriamente dito” (ROQUE; CARVALHO, 2012, p.65).

Os números eram representados de forma figurada pelos pitagóricos com o uso de pedrinhas em certa disposição como os números triangulares e quadrados (Figura 4).

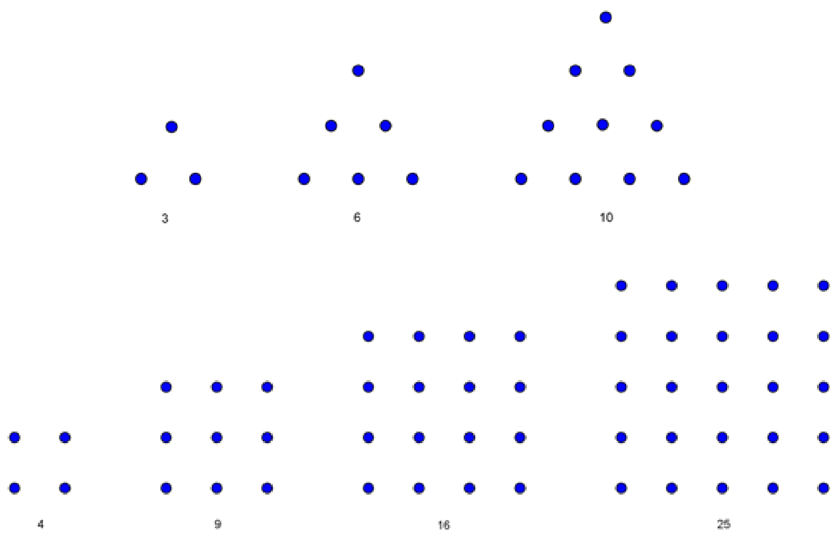


Figura 4 – Números triangulares e quadrados

Provavelmente, os pitagóricos chegaram ao que chamamos hoje de “triplas pitagóricas"ao observar a bela propriedade existente nos números quadrados por meio do gnomon (Figura 3). O gnomon é uma figura em forma de L e que é sinônimo dos números ímpares ou, pensado de acordo com pitagóricos, como a diferença de números quadrados sucessivos como descrito em Roque e Carvalho (2012).

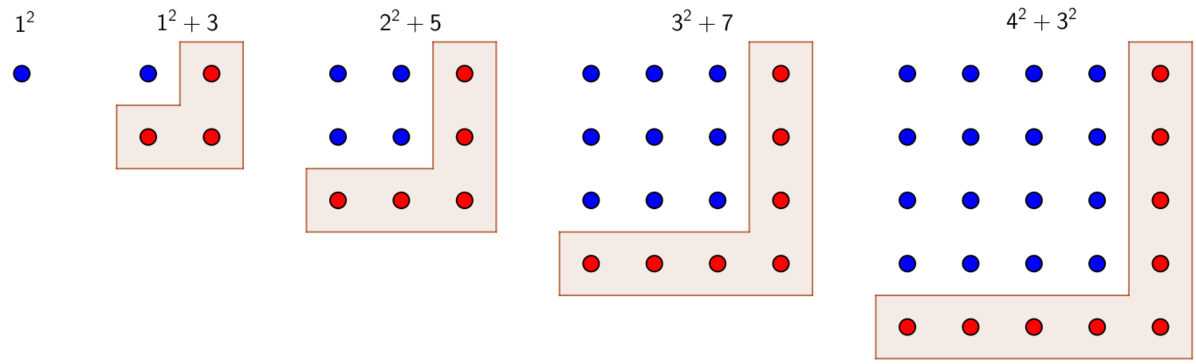


Figura 5 – Sequência dos números quadrados por meio do gnomon

Desta forma, para obter o número quadrado 4, por exemplo, adicionamos o gnomon de 3 pontos no número quadrado 1. Para obter o número quadrado 9, adicionamos o gnomon de 5 pontos no número quadrado 4. Para obter o número quadrado 16, adicionamos o gnomon 7 ao número quadrado 9. Para obter o número quadrado 25, adicionamos o gnomon 9 ao número quadrado 16. Mas 9 é um número quadrado e desta forma pode-se obter a primeira “tripla pitagórica"(3,4,5).

Além da demonstração por semelhança de triângulos, da abordagem algébrica ou da interpretação dos números figurado, há várias outras demonstrações deste célebre teorema e veremos como o pesquisador Paulus Gerdes o reconheceu em padrões geométricos de ornamentos tradicionais de Gana.

4.3 Demonstração do teorema ”de Pitágoras” de Paulus Gerdes

A demonstração selecionada para nosso estudo encontra-se no livro *Pitágoras Africano* [1], em sua versão publicada em 2011. O livro não procura analisar historicamente o personagem matemático Pitágoras ou se o mesmo tenha aprendido o famoso teorema quando viajou pelo Egito, mas sim, como diz o próprio autor, o objetivo é “didático cultural”, pretendendo enquadrar conteúdos matemáticos no ambiente cultural de uma sociedade, não simplesmente como uma cópia do que é ensinado nos grandes centros matemáticos.

Atualmente, tal preocupação de Paulus Gerdes em ressignificar um conceito como o teorema “de Pitágoras"recebe o nome de “descolonização do currículo". A descolonização do currículo critica a rigidez das grades curriculares, o empobrecimento

[1] A primeira edição de Pitágoras Africano foi publicada, em 1992, em Português e em Inglês, pelo Projeto de Investigação Etnomatemática da Universidade Pedagógica, Maputo, Moçambique (0911/FBM/92), tendo contado com o apoio financeiro da Agência Sueca para Cooperação com os Países em Vias de Desenvolvimento no âmbito da Investigação Científica.

do carater conteudista e a necessidade do diálogo entre escola, currículo e realidade social, logo a descolonização do currículo discute a importância de culturas consideradas negadas e silenciadas historicamente para a constituição de um currículo que dê significado para quem estuda (GOMES, 2012).

No livro "Pitágoras Africano", Paulus Gerdes mostra uma prova do teorema "de Pitágoras" que leva a observar como a matemática pode estar implícita na cultura e como resultados universais podem se relacionar com elementos tradicionais, por exemplo, a partir dos muitos ornamentos africanos que apresentam várias formas de simetria, principalmente a simetria rotacional de ordem quatro, como no adorno decorativo de Gana. (Figura 6)

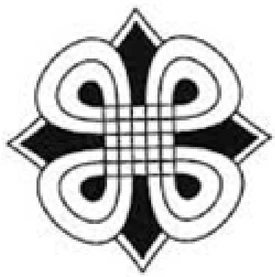


Figura 6 – Adorno decorativo de Gana

O procedimento criado por Paulus Gerdes foi o seguinte:

1. Das quatro circunferências abaixo, deve-se escolher quatro pontos correspondentes (por rotação de 90°):

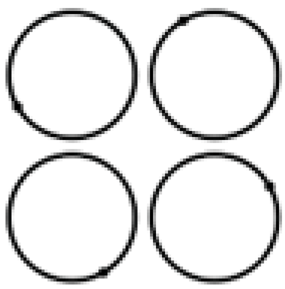


Figura 7 – Etapa 1

2. Unam-se os quatro pontos da forma indicada e identifique os novos pontos definidos na circunferência:

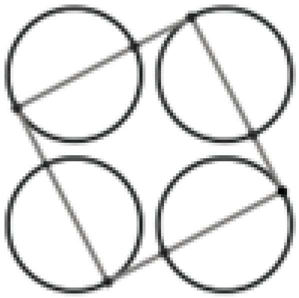


Figura 8 – Etapa 2

3. Unindo os novos pontos, obtém-se um quadrado inscrito:

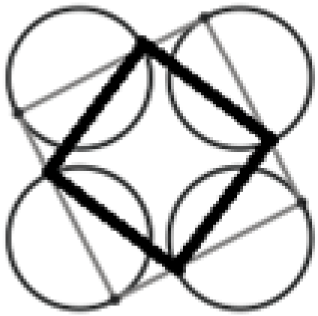


Figura 9 – Etapa 3

Mas tais pontos poderiam ser unidos de outra forma, conduzindo à seguinte figura:

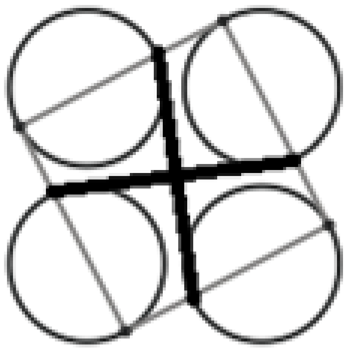


Figura 10 – Etapa 4

Note que, devido à simetria rotacional da figura de partida, os quatro quadriláteros do quadrado são iguais e suas transversais são perpendiculares, pois são as diagonais do quadrado original.

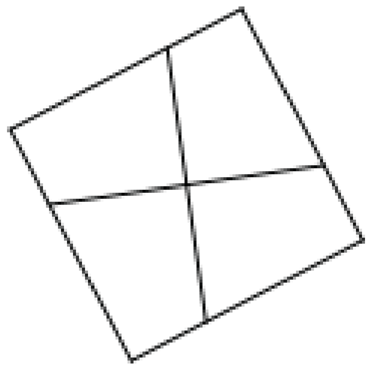


Figura 11 – Quadriláteros

Demonstração

Pela construção, tem-se que os quadriláteros ABCD e EFGH são quadrados, com EFGH inscrito em ABCD (Figura 12), onde os segmentos $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$ são os diâmetros das circunferências.

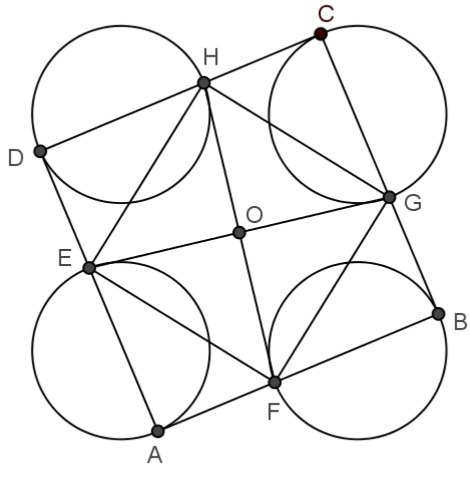


Figura 12 – Demostração

Como os segmentos $\overline{EG}$ e $\overline{FH}$ são as diagonais do quadrado EFGH, então os ângulos $H\hat{O}G = H\hat{O}E = F\hat{O}E = F\hat{O}G = 90°$, e consequentemente o ponto O é o ponto de interseção ou ponto médio das duas diagonais com $\overline{EO} = \overline{OG} = \overline{HO} = \overline{OF}$, logo, pelo caso LAL de congruñcias de triângulos, EOH, HOG, EOF e FOG são congruentes e isósceles (TIPO 1). Pelo caso especial de congruência de triângulos retângulos, tem-se que os triângulos EAF, FBG, GCH e HDE são congruentes (TIPO 2), pois $\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH}$ (catetos), $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH} = \overline{HE}$ (hipotenusa) e $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$.Cada um dos quadriláteros EOHD, AFOE, FBGO e GCHO são constituídos por um triângulo do TIPO 1 e 2 pela hipotenusa destes triângulos retângulos, portanto, os quadriláteros EOHD, AFOE, FBGO e GCHO são congruentes.

O que Paulus Gerdes fez em seu livro foi reorganizar os quatro quadriláteros da figura 11 de maneira a obter um quadrado ainda maior, mas com um buraco também quadrado (Figura 13).

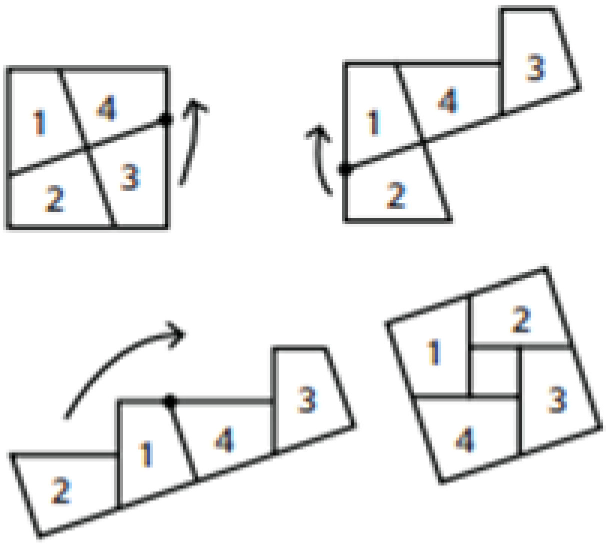


Figura 13 – Construção apresentada por Paulus Gerdes em seu livro Pitágoras Africano

É importante notar que o "buraco"da figura 13 é um quadrado cujo lado é o módulo da diferença entre os lados do triângulo de TIPO 2 e com ângulo adjacente de 90°. A figura 14 apresenta uma outra disposição dos quadriláteros da figura 13.

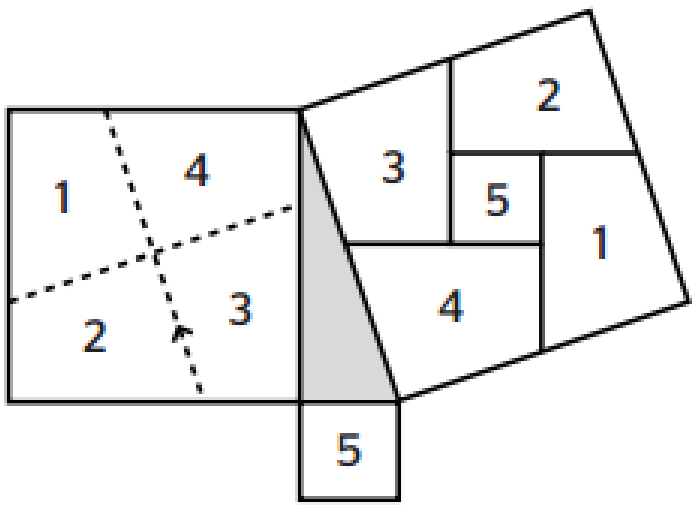


Figura 14 – Construção apresentada por Paulus Gerdes em seu livro Pitágoras Africano

Menezes (2005) mostra estes padrões geométricos rotacionais em estampas de tecidos do povo Akan habitantes de Gana.

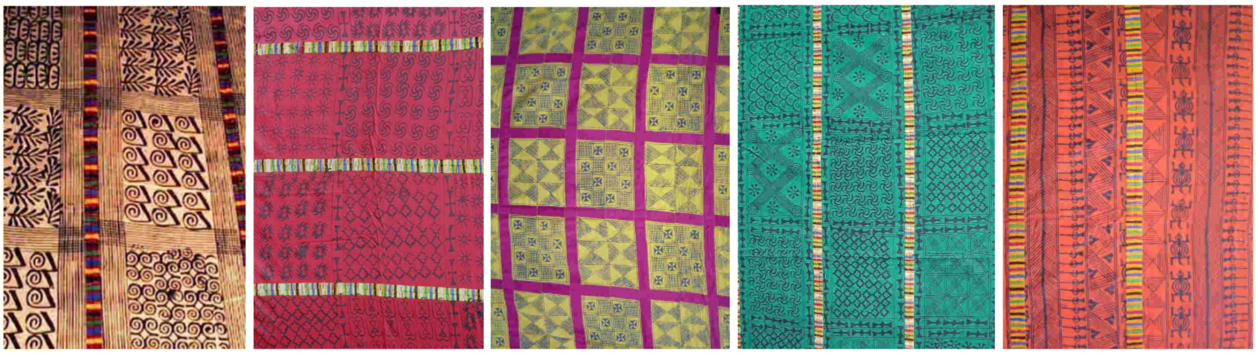


Figura 15 – Estampa de tecidos de Gana (Menezes, 2005, p.8)

4.4 Um outro motivo decorativo de Paulus Gerdes

Outro motivo decorativo que Paulus Gerdes apresenta no seu livro *Pitágoras Africano* e que pode ser relacionado com os números figurados para o Teorema "de Pitágoras"dos africanos são os quadrados dentados como os da próxima figura.

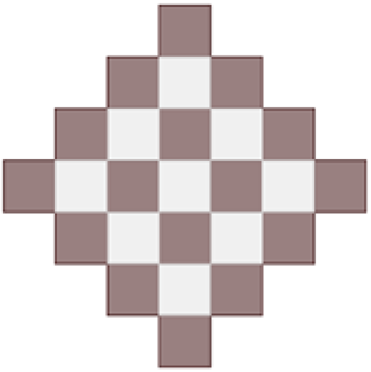


Figura 16 – Quadrado dentado

O seu padrão geométrico é conhecido desde o Antigo Egito por volta 1420 a. C. Este padrão pode ser identificado atualmente em diversos tecidos de Gana, de acordo com Santos (2008), ou objetos de utensílios diários como em cestos da África do Sul e Lesoto, como destacado por Gerdes (2011).

Figura 17 – Tecido de Gana (SANTOS, 2008, p. 109)

Figura 18 – Cesto da África do Sul (GERDES, 1992, p.78)

Figura 19 – Cesto do Lesoto (GERDES, 1992, p.68)

Este quadrado dentado ou também denominado *estrela* é composto por 25 quadradinhos que pode ser decomposto em um quadrado com 16 quadradinhos cinza escuro e outro quadrado com 9 quadradinhos cinza claro como pode ser observado na figura 16, logo fica evidente a relação existente entre os mesmos para formar a "tripla pitagórica"(3,4,5).

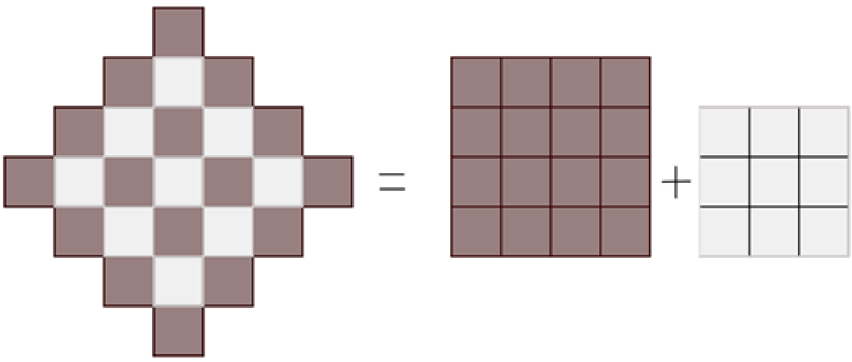


Figura 20 – Decomposição do quadrado dentado

Esta decomposição sugere que exista uma relação geométrica entre o quadrado dentado e os outros dois quadrados e que pode ser representada de acordo com a próxima figura:

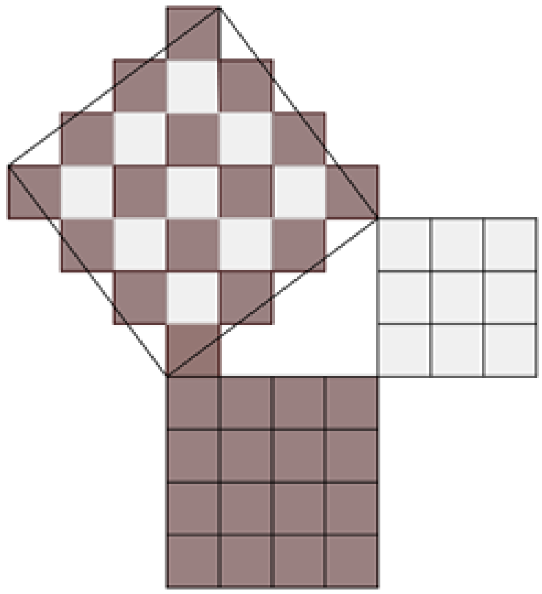


Figura 21 – Uma nova relação geométrica entre o quadrado dentado

Para prosseguir com a análise mais detalhada dos quadrados dentados e o teorema ”de Pitágora”, definiremos um quadrado dentado como uma figura composta por quadradinhos de duas cores com mesma área e que siga este padrão geométrico:

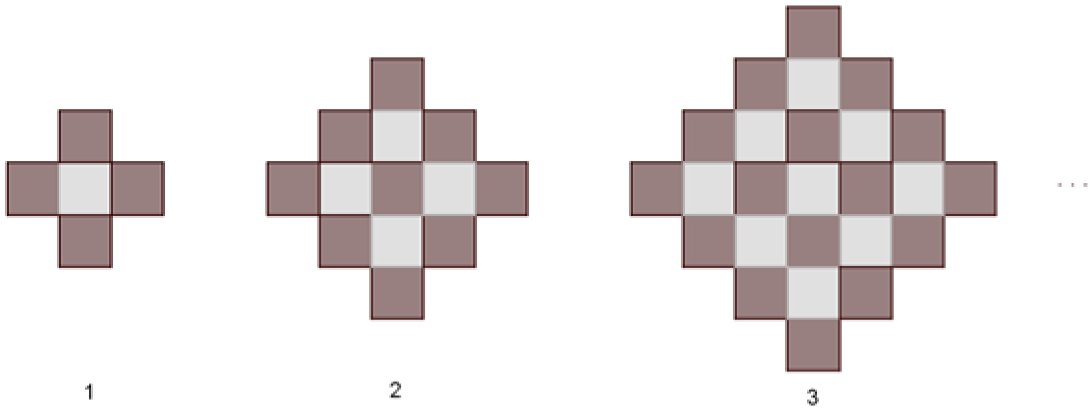


Figura 22 – Padrão geométrico dos quadrados dentados

O quadrado dentado 1 possui um quadradinho cinza claro na coluna central, o quadrado dentado 2 possui dois quadradinhos cinza claros na coluna central, o quadradinho dentado 3 possui três quadradinhos cinza claros na coluna central e assim por diante. É fundamental notar no padrão geométrico que a passagem de um quadrado dentado para o outro são acrescentados quatro vezes o número de quadradinhos cinza escuros de acordo com a sua posição n, ou seja, $4n$, isso acontece porque são acrescentados 4 quadradinhos cinza escuros em cada ponta do quadrado dentado e mais 4 quadradinhos pretos em cada espaço do quadrado dentado anterior que forma um ângulo de 90°, por exemplo, a passagem de 1 para 2, são acrescentados 4 quadradinhos pretos nas pontas do quadrado dentado 1 e que também possui $4 \cdot 1 = 4$ espaços que formam um ângulo de 90° que são preenchidos por quadrados escuros. Outra observação importante é que as cores internas dos quadrados dentados se alternam de uma passagem para a outra.

Em uma tabela pode-se observar e organizar melhor o que foi descrito acima para algumas criações de quadrados dentados buscando uma generalização:

Tabela 1 – Generalização para criação de quadrados dentados

Posição	Quadrados c. claros	Quadrados c. escuros	Acréscimos	Quadrado dentado
1	1	4	4.1 = 4	5
2	4	8 + 1 = 9	4.2 = 8	13
3	9	12 + 4 =16	4.3 = 12	25
4	16	16 + 9 =25	4.4 = 16	41
5	25	20 + 16 =36	4.5 = 20	61
6	36	24 + 25 = 49	4.6 = 24	85
7	49	28 + 36 = 64	4.7 = 28	113
8	64	32 + 49 = 81	4.8 = 32	145
9	81	36 + 64 = 100	4.9 = 36	181
10	100	40 + 81 = 121	4.10 = 40	221
n	n^2	$4n + (n-1)^2 = (n+1)^2$	$4n$	$n^n + (n+1)^n$

Assim, todo quadrado dentado sempre pode ser decomposto em dois quadrados cujos lados são sucessivos, ou seja, n e n +1, que são respectivamente, o número de quadrados cinza claro da maior coluna ou a posição onde se encontra o quadrado dentado e o número de quadrados cinza escuro da maior coluna. Já para uma representação geométrica igual ao da figura 3 que é muito semelhante às demonstrações por comparação de área do teorema ”de Pitágoras”, evidentemente que todos os quadrados dentados apresentam essa característica. E como nos números quadrados dos pitagóricos, pode-se observar acima que somente o quadrado dentado com 25 quadradinhos é um número quadrado que pode ser composto por dois números quadrados, 9 e 16.

5 Atividades

5.1 Atividade 1

Público alvo: alunos do 8º e 9º ano do EF

Objetivo: Esta atividade possibilita ao professor introduzir a ideia de números quadrados e consequentemente do teorema "de Pitágoras" por meio de fatos importantes da História da Matemática da época da escola pitagórica. É importante mostrar para o aluno que muitas relações ou regras da matemática podem surgir de padrões simples que qualquer um pode fazer. Depois da aplicação desta atividade é papel do professor institucionalizar o conteúdo teorema "de Pitágoras" por alguma demonstração aos seus alunos.

Problema: Se você acha que a matemática lida com os números da mesma maneira desde quando o ser humano aprendeu a escrever, você esta muito enganado! Saiba que os integrantes da famosa escola pitagórica que se encontram na história por volta do século V a.C usavam, para fazer matemática, qualquer tipo de objeto como pedrinhas em certa disposição para representar as quantidades. Como exemplo da matemática dos pitagóricos observe os números quadrados da figura abaixo que são representados por pontinhos azuis.

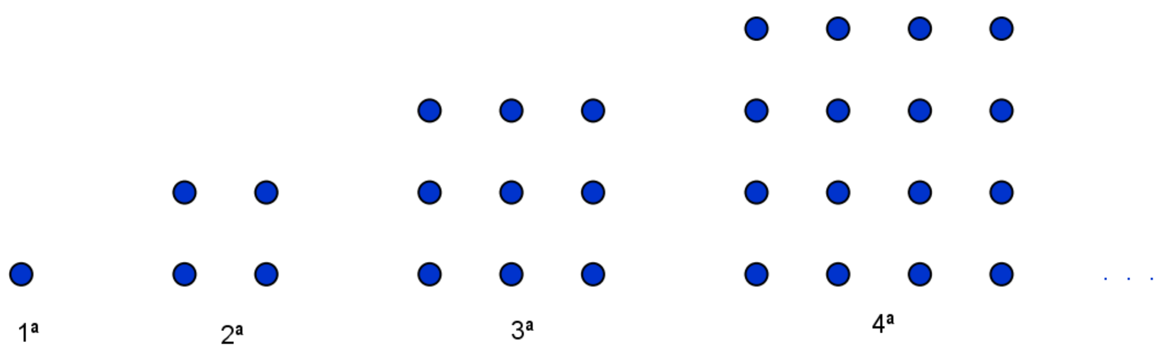


Figura 23 – Atividade 1

a) Complete a tabela abaixo e diga qual é a relação existente entre a posição dos números quadrados e a quantidade de pontinhos azuis.

Posição dos números quadrados	Quantidade de pontinhos azuis
1ª	1
2ª	4
3ª	9
4ª	16
5ª	
6ª	
7ª	
8ª	
9ª	
10ª	

b) Quantos pontinhos azuis foram acrescentados da 1ª para a 2ª posição, da 2ª para 3ª posição e da 3ª para a 4ª posição, ...? Use a tabela abaixo para responder até a 10ª posição.

Posição	Pontinhos azuis	Pontinhos azuis acrescentados
1ª	1	1
2ª	4	
3ª	9	
4ª	16	
5ª		
6ª		
7ª		
8ª		
9ª		
10ª		

c) Os pitagóricos observaram esta bela propriedade dos números quadrados e chamaram cada acréscimo de pontinhos azuis de *gnomon*. O *gnomon* também era uma figura, mas em forma de L que para eles era a diferença entre dois números quadrados sucessivos ou simplesmente era chamado de:

I) número par.

II) números ímpar.

III) número composto.

IV) número primo.

d) Copie e desenhe os gnomons de cada posição da figura 1.

e) Os números $1, 4, 9, 16, ..., n^2$ são conhecidos na matemática como números quadrados e foram estudados pelos pitagóricos no século V a. E. C, mas estes números são muito mais antigos e podem ser observados em tabletes de barro de escrita cuneiforme dos povos que habitavam a Mesopotâmia no século XVII a. E. C. Procure na tabela um número quadrado cuja soma são dois números quadrados, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Sugestões para os professores:

É importante comentar com os alunos que a matemática durante vários séculos mudou o seu formato de aprender e ensinar e como mostra Paulus Gerdes, mesmo em sociedades em que não existia uma escrita convencional é possível observar conceitos matemáticos intrínsecos. Nesta atividade, sabemos que os gregos possuiam uma escrita e que poderiam representar os números quadrados por algarismos, mas os pitagóricos não faziam desta forma por questões de ordem de sua própria seita. Assim, devemos destacar a quantidade e a qualidade de conhecimento matemático existente nos números figurados. O que pode ser visto como algo inteiramente simples como os números quadrados, com os quais o aluno compreenderá que para formar os quadrados com pontinhos a ”posição é multiplicada por ela mesma” ou sendo n a posição dos quadrados a quantidades de quadradinho será n^2, observe neste ponto a conversão existente entre os registros figural e o numérico.

Posição dos números quadrados	Quantidade de pontinhos azuis
1ª	1
2ª	4
3ª	9
4ª	16
5ª	25
6ª	36
7ª	49
8ª	64
9ª	81
10ª	100

Os itens (b) e (c) mostram uma curiosa forma já conhecida pelos pitagóricos de se determinar números quadrados que é pela soma dos números ímpares. É importante comentar com os alunos que os números ímpares recebiam outro nome pelos pitagóricos de gnomon em forma de L.

Posição	Pontinhos azuis	Pontinhos azuis acrescentados
1ª	1	1
2ª	4	3
3ª	9	5
4ª	16	7
5ª	25	9
6ª	36	11
7ª	49	13
8ª	64	15
9ª	81	17
10ª	100	19

No item (d) o professor poderá discutir com os seus alunos que a figura em forma de L só poderá ter uma quantidade ímpar de bolinhas. E por quê? O professor poderá discutir também que cada número quadrado a partir da segunda figura é composto pelo número quadrado anterior e um gnomon em forma de L. Ao tratar do item (e) obviamente que o professor não estará demonstrando o teorema “de Pitágoras"mas sim mostrando uma relação muito importante dos números quadrados. A partir deste momento o professor deverá escolher a melhor demonstração para os seus alunos.

5.2 Atividade 2

Público alvo: alunos do 8º e 9º ano do EF

Objetivo: O material de análise para a construção de conceitos matemáticos é um adorno decorativo. Este adorno decorativo apresenta simetria axial e rotacional que podem ser revisadas pelo professor com seus alunos. Por conta da manipulação dos quadriláteros que os alunos devem recortar (Peças 1 e 2 contidas no apêndice), o professor introduzirá a relação existente entre as áreas dos três quadrados e consequentemente institucionalizará o teorema de "Pitágoras" pela demonstração que achar mais conveniente para a sua turma.

Problema: O adorno decorativo abaixo é encontrado em ornamentos tradicionais de Gana, mas tal decoração se assemelha a de muitas outras culturas espalhadas pelo mundo.

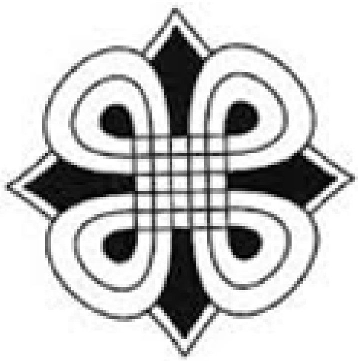


Figura 24 – Atividade 2

Podemos ver este tipo de adorno em estampas de tecidos como o da figura abaixo.

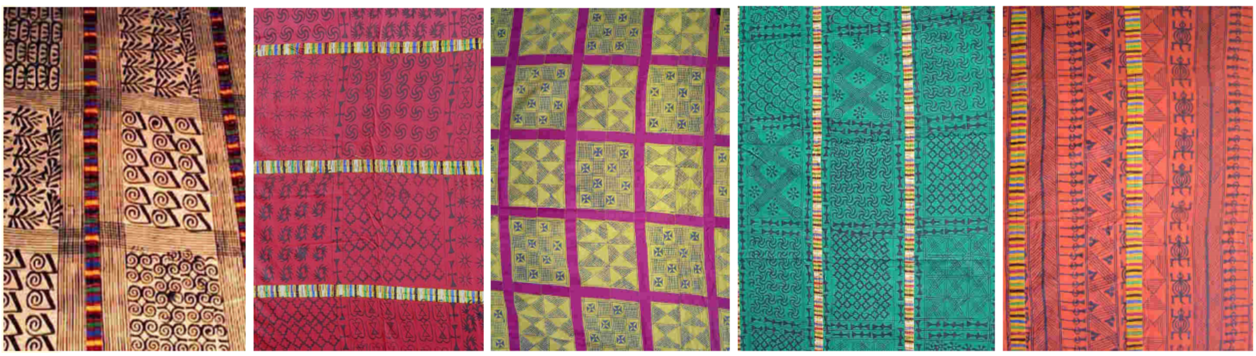
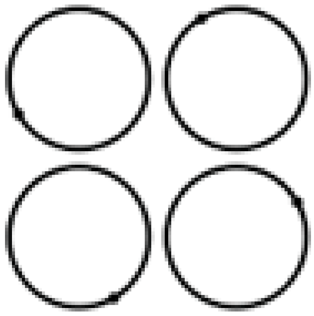


Figura 25 – Estampa de tecidos de Gana (MENEZES, 2005, p.8)

a) Desenhe na figura os seus eixos de simetria axial.

b) É possível observar que na figura existe a simetria rotacional? Se sim, qual é o seu ângulo de rotação?

c) O adorno decorativo acima apresenta quatro pétalas que se assemelham a quatro circunferências e que foram marcados quatro pontos correspondente por rotação de 90 ° como na figura abaixo.



Desenhe na figura acima um quadrilátero cujos vértices são os pontos marcados por rotação de 90 ° e outro quadrilátero inscrito a esse quadrilátero maior cujos vértices são os pontos diametralmente oposto aos anteriores. Desenhe também as diagonais do quadrilátero menor. Que tipos de quadriláteros são esses? Justifique.

d) Recorte (Peça 1) os quatro quadriláteros e organize essas peças de tal maneira a obter um quadrilátero maior, mas com um buraco no meio. Estes dois quadriláteros formados são de que tipo? Justifique.

e) Recorte (Peça 2) o quadrado maior e o quadrado menor. Manipule estes quadrados e o quadrado do item anterior. Quais são as suas conclusões?

f) Para determinar a área de um quadrado usamos $A = l^2$, onde A é a área do quadrado e l é o lado do quadrado. Use a, b, e c para representar os lados dos quadrados e dar uma outra resposta ao item anterior.

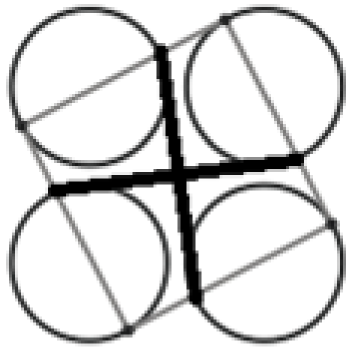
Sugestões para os professores:

Esta e a próxima atividade têm como base produções culturais e cotidianas de sociedades que vivem na África, como formatos de adornos decorativos e desenhos em tecidos. Os saberes matemáticos estão presentes nestes materiais e sem dúvidas levá-los como ponto de partida para estudar um conceito matemático é valorizar a produção de seu povo, sendo esse um dos objetivos da Etnomatemática. Observamos também o resgate e a valorização do povo negro ao aplicar esta atividade em sala (Lei 10.639/03), pois estes adornos estão presentes em diversas sociedades africanas e também na realidade brasileira, por conta da cultura africana..

Os dois primeiros itens tratam sobre simetria axial e rotacional[1] e proporcionam um bom momento para revisar estes conceitos com os alunos e discutir o motivos de

[1] Para os professores interessados em tratar estes conceitos com os alunos sugerimos a Situação de Aprendizagem 6: Refletindo e girando com simetria do material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo disponível em: Caderno do aluno

vários adornos decorativos apresentarem estas simetrias para se tornarem belos. As simetrias são muito presentes em adornos decorativos de vários povos e o adorno decorativo abordado nesta atividade é comum em comunidades de Gana. No item (c) é interessante o professor discutir porque os quadriláteros são quadrados e se necessário revisar as definições dos principais quadriláteros.



No item (d) o quadrilátero com um buraco nomeio também é um quadrado, pois seus ângulos são de 90 ° e todos os lados são congruentes e o mesmo vale para o quadrado do meio. O item (d) procura mostrar que o quadrado com o buraco no meio apresenta a mesma área que os quadrados do Peça 2 mas em forma de figura enquanto que o item (e) apresenta a relação entre as áreas como $a^2 = b^2 + c^2$. A simples manipulação dos quadrados e quadriláteros do Peça 1 e 2 não demonstra o teorema ″de Pitágoras″ mas sim reforçam a necessidade da prova formal para validar todas as hipóteses levantadas.

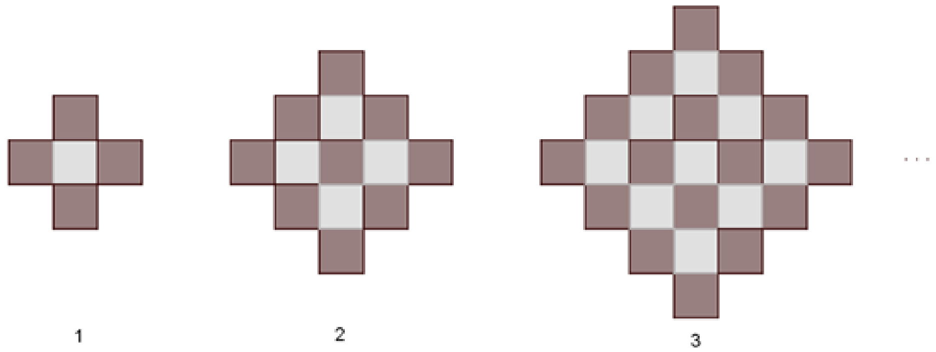
Durante a manipulação das peças do apêndice os alunos vão encontrar várias relações que sugerimos serem anotadas pelos alunos e pelo professor. A manipulação das peças corresponde a um tipo de tratamento no registro de representação figural e a etapa seguinte, a conversão, será mediada pelo professor no momento que passar inicialmente para uma representação numérica, atribuindo alguns valores notávies aos lados dos quadriláteros como (3,4,5) e depois algébrica. Sugerimos que tal atividade seja realizado em grupo para que as hipóteses levantadas sejam melhor compartilhadas.

5.3 Atividade 3

Público alvo: alunos do 8º e 9º ano do EF

Objetivo: O material de análise desta atividade são os quadrados dentados que foram observados em vários ornamentos de decoração. É importante mostrar para o aluno que muitas relações ou regras da matemática podem surgir de materiais do seu dia a dia. Depois da aplicação desta atividade é papel do professor institucionalizar o conteúdo teorema "de Pitágoras" pela demonstração que achar possível aos seus alunos.

Problema: Um padrão geométrico decorativo muito utilizado atualmente e que já era conhecida desde o Antigo Egito, por volta de 1420 a. C e foram utilizados por inúmeros povos e sociedades estão representadas abaixo e são chamados de quadrados dentados. Padrões geométricos formam sequências geométricas, por exemplo, a figura acima do número 1 é o padrão geométrico e a primeira figura do padrão, as outras figuras que foram formadas por meio deste padrão é a sequência geométrica. Os padrões geométricos são muito utilizados, por exemplo, em estampas de tecidos, objetos do cotidiano como um caderno, paredes de casas, entre outros, com a intenção de torná-los bonitos.



Veja este tipo de padrão geométrico um tecido e uma cesta.

Figura 26 – Tecido de Gana (SANTOS, 2008, p.109)

a) Onde podemos encontrar no nosso dia a dia este tipo de padrão geométrico? Compartilhe o que você escreveu com os seus colegas. Dê outros exemplos.

Figura 27 – Cesto da África do Sul (GERDES, 1992, p.78)

b) Desenhe os dois próximos quadrados dentados da sequência geométrica.

c) O que acontece na passagem de uma figura para a outra da sequência geométrica referente às cores dos quadradinhos?

d) Quantos quadradinhos cinza escuros são acrescentados ao entorno de um quadrado dentado para o outro?

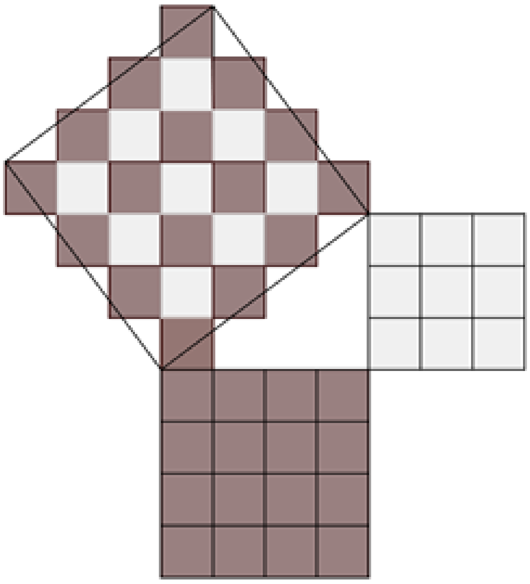
e) Use a tabela abaixo para determinar a quantidade de quadradinhos cinza claros e escuros de cada quadrado dentado.

Posição	Cinza claros	Cinza escuros	Acréscimos	Quadrado dentado
1	1	4	0	5
2	4	9	8	
3				
4				
5				
6				
7				
8				

f) A sequência de números dos quadradinhos cinza claros (1, 4, 9,...) e escuros (4, 9, 16,...) da tabela acima são exemplos de números quadrados. Converse com o seu colega por que esses números são chamados de números quadrados?

g) Qual quadrado dentado da tabela é um número quadrado? A quantidade dos quadrados cinza claros e escuros também são números quadrados?

h) Podemos reconfigurar os quadradinhos cinza claros e escuros de cada quadrado dentado como o da figura abaixo.



O quadrado dentado da figura corresponde ao da 3ª posição. Faça a mesma reconfiguração para o primeiro quadrado dentado. É possível fazer essa reconfiguração para qualquer quadrado dentado, ou seja, todo quadrado dentado pode ser decomposto em dois quadrados menores? Sugestão: Use n para a n-ésina posição da tabela do item e.

Sugestões para os professores:

Esta atividade mostra para o aluno que ideias matemáticas podem ser construídas mediante materiais presentes no dia a dia do aluno. Os quadrados dentados foram primeiramente observados em desenhos do Antigo Egito e são muito comuns em tecidos de roupas de sociedades africanas. Nesta sequência de atividades também mostramos a valorização da cultura e da sociedade e como é importante resgatar produçãoes regionais muitas vezes desvalorizadas pelo próprio indivíduo inserido nesta sociedade. Novamente não podemos deixar de citar Paulus Gerdes que buscou resgatar, por meio da Etnomatemática, a autoestima de sociedades que por séculos foram subjugadas por outros povos.

No item (a) pede que o aluno identifique em quais outros objetos do seu dia a dia ele já viu padrões semelhantes ao dos quadrados dentados. Os itens (b) e (c) abordam as principais características para a geração dos quadrados dentados que são as trocas das cores no interior das figuras, além da adição de quadradinhos cinza escuros no entorno. É importante que o professor verifique se os alunos fizeram corretamente os dois desenhos e que proponha que dois alunos desenhe-os na lousa. Observe que o aluno está desenvolvendo um tratamento no registro de representação figural.

Na questão (d) o aluno deve notar que as posições de cada quadrado dentado e o acréscimo de quadradinhos cinza escuros da borda se relacionam, ou seja, sendo n a posição do quadrado dentado, são acrescentados $4n$ o número de quadradinhos cinza escuros, isso acontece porque são acrescentados 4 quadradinhos cinza escuros em cada ponta do quadrado dentado e mais 4 quadradinhos cinza escuros em cada espaço do quadrado dentado anterior que forma um ângulo de 90°.

O item (e) o aluno deve preencher a tabela levando em consideração todas as observações citadas anteriormente. Observamos neste ponto o tratamento de registros numéricos advindos de um registro figural.

Posição	Cinza claros	Cinza escuros	Acréscimos	Quadrado dentado
1	1	4	4	5
2	4	9	8	13
3	9	16	12	25
4	16	25	16	41
5	25	36	20	61
6	36	49	24	85
7	49	64	28	113
8	64	81	32	145

O item (f) trata brevemente dos números quadrados e solicita que o aluno justifique porque deste nome e consequentemente o item (g) induz o aluno a identificar a tripla pitagórica (3,4,5) no momento em que pede para o aluno procurar na tabela um número quadrado que é a soma de outros dois números quadrados. Obviamente que o aluno não sabe ainda o que é uma tripla pitagórica, mas cabe ao professor mostrar esta importante relação ao se estudar os números quadrados.

E sobre o item (h) é possível fazer a configuração apresentada para qualquer quadrado dentado. Assim, chamando de n a n-ésima posição de um quadrado dentado temos n^2 quadradinhos cinza claros e $4n + (n-1)^2 = (n+1)^2$ quadradinhos cinza escuros e isso ocorreu porque foram acrescentados $4n$ quadradinhos cinza escuros e $(n-1)^2$ quadradinhos cinza claros passaram a ser escuros da posição de $n-1$ para n, logo o quadrado dentado é composto por $n^2 + (n+1)^2$ quadradinhos e vai apresentar a reconfiguração apresentada. Trata-se de uma conversão do registro de representação figural para o numérico e por fim para o algébico.

6 Conclusão

É apresentado neste trabalho uma sugestão de se introduzir o teorema “de Pitágoras"para alunos da Educação Básica com fortes contribuições de pesquisadores da etnomatemática que veem os saberes matemáticos presentes em qualquer sociedade. Esse é um ponto forte dos trabalhos do campo da etnomatemática, pois mostra a possibilidade da valorização cultural e social de povos que frequentemente foram marginalizados e deixados de lado quando se pensou em construir um saber universal e uniforme. Além da valorização, podemos destacar o resgate da autoestima destes povos cujo o objeto de aprendizagem deixa de ser somente o que é levado pelo colonizador, mas sim algo que está presente na sua cultura que é um ponto forte presente nos trabalhos de Paulus Gerdes.

Obviamente que não teria nenhum sentido descartar toda a matemática sistematizada pelos povos ocidentais, em particular os conhecimentos organizados pelos gregos, em favor da valorização da cultura e saber dos menos favorecidos da nossa atual sociedade, mas podemos ressignificar e mostrar que o conhecimento matemático que é estudado hoje por nossos alunos surgiram de problemas do cotidiano ou mesmo da observação de padrões geométricos em artefatos do dia a dia. Em algum momento, a relação entre a observação do cotidiano e o saber matemático se perdeu.

Desta forma, queremos mostrar que é possível ensinar conceitos matemáticos, ou seja, ensinar com a etnomatemática, para a qual o material de apoio do professor não é o livro , mas sim os saberes matemáticos presentes em qualquer sociedade que podem ser observados em materiais domésticos, de artesanato ou mesmo na própria linguagem. Assim, o professor que estiver interessado em trabalhar com a etnomatemática em sala de aula deverá saber que ele não ensinará Matemática, mas sim aprenderá com os seus alunos. O papel do professor será o de mediador entre a matemática formal e os saberes matemáticos de certa sociedade.

Para esta pesquisa nos aprofundamos na etnomatemática e em algumas de suas definições. Destacamos a figura de Paulus Gerdes para a etnomatemática e é animador notarmos que este pesquisador que não nasceu no continente africano soube muito bem resgatar os saberes matemáticos e a autoestima dos povos por onde passou com seus trabalhos. Este é um exemplo para mostrarmos que em alguns momentos é mais eficiente o olhar de uma pessoa de fora de uma comunidade para ver a sua beleza, no nosso caso, a pessoa de fora é um pesquisador matemático. Discutimos as políticas públicas que buscam a valorização das diversas culturas que constituem a sociedade brasileira, especificamente dos povos negros, nos PCNs com o tópico de pluralidade cultural e na Lei 10.639/03 que estabelece diretrizes e bases na educação para incluir a temática “História e Cultura Afro-Brasileira". E para os professores apresentamos como a teoria do registro da representação semiótica de Duval auxilia na apreensão de conceitos matemáticos.

Por fim, sugerimos aos professores de matemática a leitura e estudo dos livros e artigos do matemático Paulus Gerdes, que além de tratar de forma muito simples e rigorosa os saberes matemáticos em diversas sociedades africanas e latino americanas, mostra que é possível usar a Etnomatemática como campo de investigação de pesquisas. Tais produções acadêmicas apresentam muita matemática e destacamos em especial para futuros estudos as suas produções sobre a arte-design e matrizes cíclicas nas quais até o momento podemos observar muitos conceitos tratados em Álgebra Linear. O tema pesquisado trouxe-nos muito conhecimento e discussões e inclui nas pesquisas sobre Etnomatemática algo que vai além da coleta de dados para discutir a atual configuração da população brasileira.

7 Apêndice

Segue baixo as atividades para que os professores possam imprimir e trabalhar em sala de aula.

Escola:

Nome:

Série:

Professor:

Atividade de Matemática

Se você acha que a matemática lida com os números da mesma maneira desde quando o ser humano aprendeu a escrever, você esta muito enganado! Saiba que os integrantes da famosa escola pitagórica que se encontram na história por volta do século V a.C usavam, para fazer matemática, qualquer tipo de objeto como pedrinhas em certa disposição para representar as quantidades. Como exemplo da matemática dos pitagóricos observe os números quadrados da figura abaixo que são representados por pontinhos azuis.

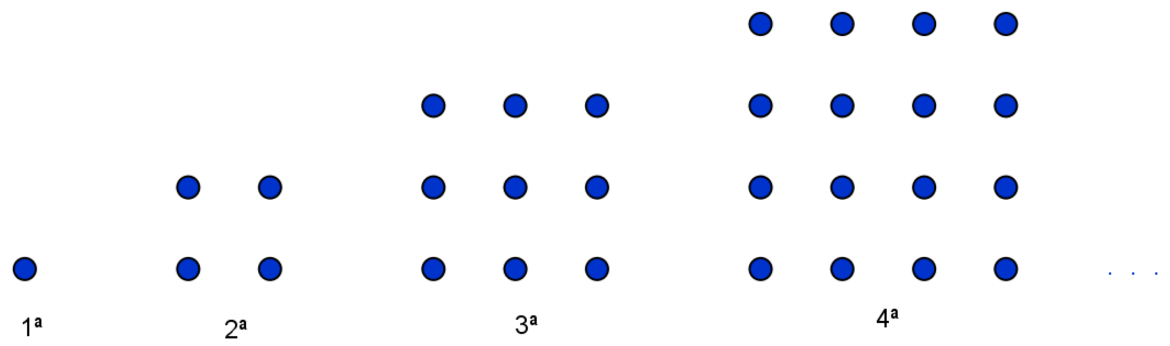


Figura 28 – Atividade 1

a) Complete a tabela abaixo e diga qual é a relação existente entre a posição dos números quadrados e a quantidade de pontinhos azuis.

Posição dos números quadrados	Quantidade de pontinhos azuis
1ª	1
2ª	4
3ª	9
4ª	16
5ª	
6ª	
7ª	
8ª	
9ª	
10ª	

b) Quantos pontinhos azuis foram acrescentados da 1ª para a 2ª posição, da 2ª para 3ª posição e da 3ª para a 4ª posição, ...? Use a tabela abaixo para responder até a 10ª posição.

Posição	Pontinhos azuis	Pontinhos azuis acrescentados
1ª	1	1
2ª	4	
3ª	9	
4ª	16	
5ª		
6ª		
7ª		
8ª		
9ª		
10ª		

c) Os pitagóricos observaram esta bela propriedade dos números quadrados e chamaram cada acréscimo de pontinhos azuis de *gnomon*. O *gnomon* também era uma figura, mas em forma de L que para eles era a diferença entre dois números quadrados sucessivos ou simplesmente era chamado de:

I) número par.

II) números ímpar.

III) número composto.

IV) número primo.

d) Copie e desenhe os gnomons de cada posição da figura 1.

e) Os números $1, 4, 9, 16, ..., n^2$ são conhecidos na matemática como números quadrados e foram estudados pelos pitagóricos no século V a. E. C, mas estes números são muito mais antigos e podem ser observados em tabletes de barro de escrita cuneiforme dos povos que habitavam a Mesopotâmia no século XVII a. E. C. Procure na tabela um número quadrado cuja soma são dois números quadrados, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

Escola:

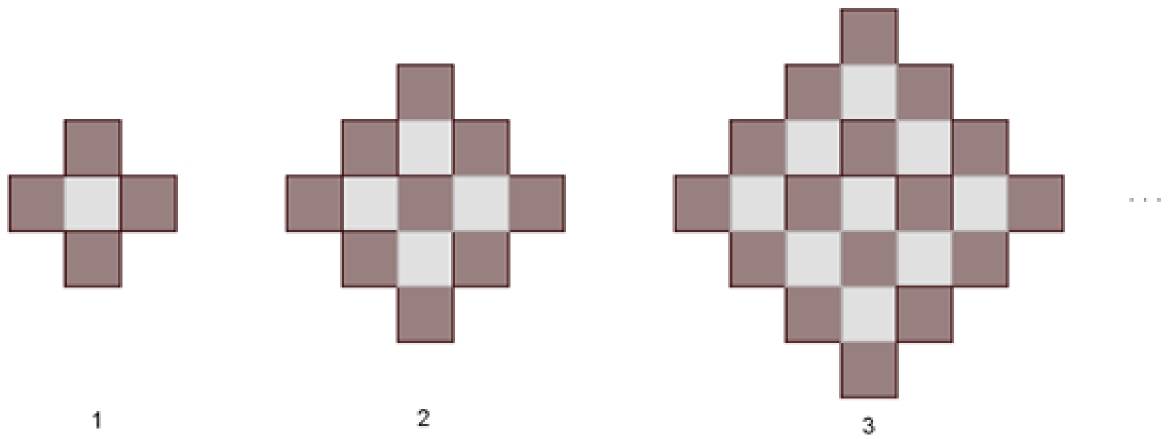
Nome:

Série:

Professor:

Atividade de Matemática

Um padrão geométrico decorativo muito utilizado atualmente e que já era conhecida desde o Antigo Egito, por volta de 1420 a. C e foram utilizados por inúmeros povos e sociedades estão representadas abaixo e são chamados de quadrados dentados. Padrões geométricos formam sequências geométricas, por exemplo, a figura acima do número 1 é o padrão geométrico e a primeira figura do padrão, as outras figuras que foram formadas por meio deste padrão é a sequência geométrica. Os padrões geométricos são muito utilizados, por exemplo, em estampas de tecidos, objetos do cotidiano como um caderno, paredes de casas, entre outros, com a intenção de torná-los bonitos.



Veja este tipo de padrão geométrico um tecido e uma cesta.

Figura 29 – Tecido de Gana (SANTOS, 2008, p.109)

Figura 30 – Cesto da África do Sul (GERDES, 1992, p.78)

a) Onde podemos encontrar no nosso dia a dia este tipo de padrão geométrico? Compartilhe o que você escreveu com os seus colegas. Dê outros exemplos.

b) Desenhe os dois próximos quadrados dentados da sequência geométrica.

c) O que acontece na passagem de uma figura para a outra da sequência geométrica referente às cores dos quadradinhos?

d) Quantos quadradinhos cinza escuros são acrescentados ao entorno de um quadrado dentado para o outro?

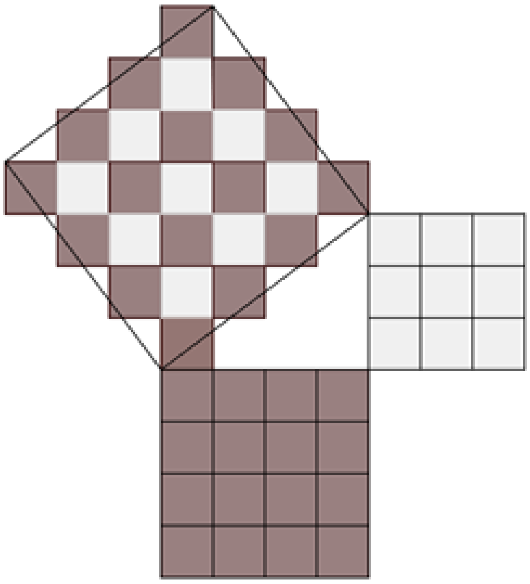
e) Use a tabela abaixo para determinar a quantidade de quadradinhos cinza claros e escuros de cada quadrado dentado.

Posição	Cinza claros	Cinza escuros	Acréscimos	Quadrado dentado
1	1	4	0	5
2	4	9	8	
3				
4				
5				
6				
7				
8				

f) A sequência de números dos quadradinhos cinza claros (1, 4, 9,...) e escuros (4, 9, 16,...) da tabela acima são exemplos de números quadrados. Converse com o seu colega por que esses números são chamados de números quadrados?

g) Qual quadrado dentado da tabela é um número quadrado? A quantidade dos quadrados cinza claros e escuros também são números quadrados?

h) Podemos reconfigurar os quadradinhos cinza claros e escuros de cada quadrado dentado como o da figura abaixo.



O quadrado dentado da figura corresponde ao da 3ª posição. Faça a mesma reconfiguração para o primeiro quadrado dentado. É possível fazer essa reconfiguração para qualquer quadrado dentado, ou seja, todo quadrado dentado pode ser decomposto em dois quadrados menores? Sugestão: Use n para a n-ésina posição da tabela do item e.

Escola:

Nome:

Série:

Professor:

Atividade de Matemática

O adorno decorativo abaixo é encontrado em ornamentos tradicionais de Gana, mas tal decoração se assemelha a de muitas outras culturas espalhadas pelo mundo.

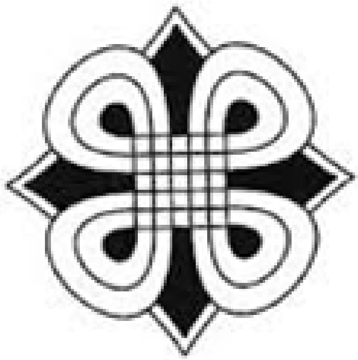


Figura 31 – Atividade 2

Podemos ver este tipo de adorno em estampas de tecidos como o da figura abaixo.

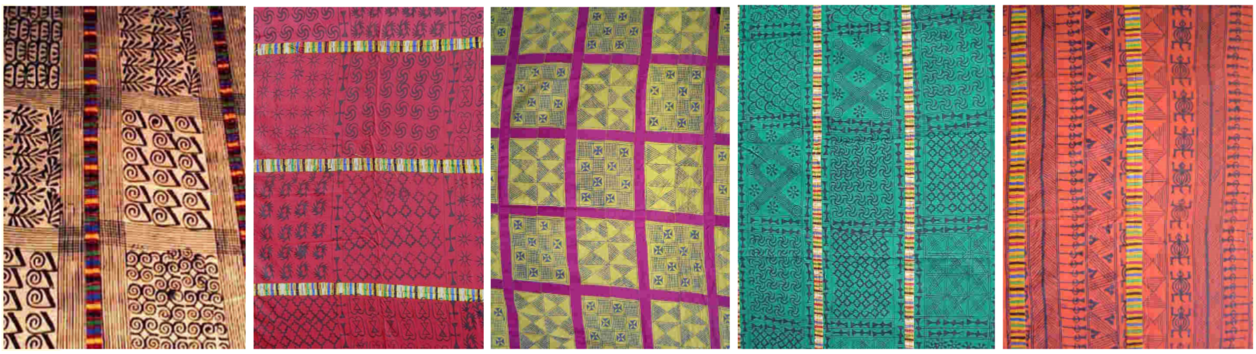
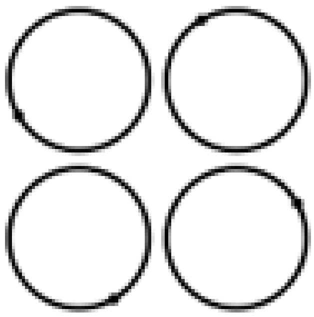


Figura 32 – Estampa de tecidos de Gana (MENEZES, 2005, p.8)

a) Desenhe na figura os seus eixos de simetria axial.

b) É possível observar que na figura existe a simetria rotacional? Se sim, qual é o seu ângulo de rotação?

c) O adorno decorativo acima apresenta quatro pétalas que se assemelham a quatro circunferências e que foram marcados quatro pontos correspondente por rotação de 90 ° como na figura abaixo.



Desenhe na figura acima um quadrilátero cujos vértices são os pontos marcados por rotação de 90 ° e outro quadrilátero inscrito a esse quadrilátero maior cujos vértices são os pontos diametralmente oposto aos anteriores. Desenhe também as diagonais do quadrilátero menor. Que tipos de quadriláteros são esses? Justifique.

d) Recorte (Peça 1) os quatro quadriláteros e organize essas peças de tal maneira a obter um quadrilátero maior, mas com um buraco no meio. Estes dois quadriláteros formados são de que tipo? Justifique.

e) Recorte (Peça 2) o quadrado maior e o quadrado menor. Manipule estes quadrados e o quadrado do item anterior. Quais são as suas conclusões?

f) Para determinar a área de um quadrado usamos $A = l^2$, onde A é a área do quadrado e l é o lado do quadrado. Use a, b, e c para representar os lados dos quadrados e dar uma outra resposta ao item anterior.

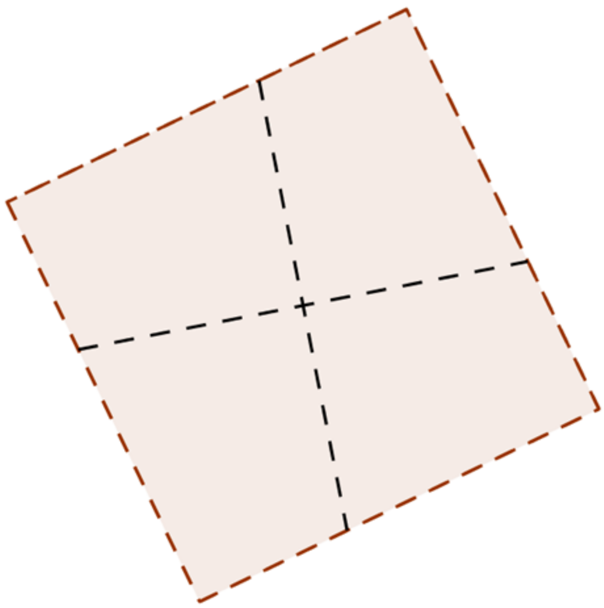


Figura 33 – Peça 1

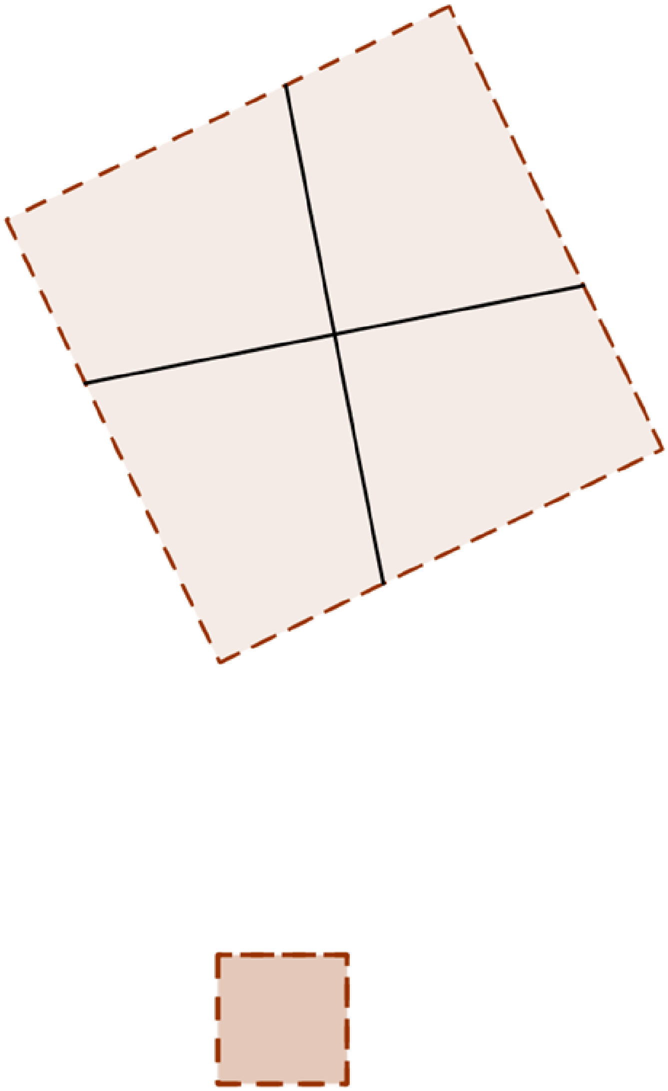


Figura 34 – Peça 2

8 Anexo

LEI No 10.639, DE 9 DE JANEIRO DE 2003.

Altera a Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira", e dá outras providências.

O PRESIDENTE DA REPÚBLICA Faço saber que o Congresso Nacional decreta e eu sanciono a seguinte Lei:

Art. 1o A Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, passa a vigorar acrescida dos seguintes arts. 26-A, 79-A e 79-B:

"Art. 26-A. Nos estabelecimentos de ensino fundamental e médio, oficiais e particulares, torna-se obrigatório o ensino sobre História e Cultura Afro-Brasileira.

§ 1o O conteúdo programático a que se refere o caput deste artigo incluirá o estudo da História da África e dos Africanos, a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, resgatando a contribuição do povo negro nas áreas social, econômica e política pertinentes à História do Brasil.

§ 2o Os conteúdos referentes à História e Cultura Afro-Brasileira serão ministrados no âmbito de todo o currículo escolar, em especial nas áreas de Educação Artística e de Literatura e História Brasileiras.

§ 3o (VETADO)"

"Art. 79-A. (VETADO)"

"Art. 79-B. O calendário escolar incluirá o dia 20 de novembro como 'Dia Nacional da Consciência Negra'."

Art. 2o Esta Lei entra em vigor na data de sua publicação.

Brasília, 9 de janeiro de 2003; 182º da Independência e 115º da República.

LUIZ INÁCIO LULA DA SILVA

Cristovam Ricardo Cavalcanti Buarque

9 Bibliografia

ALMEIDA, MANOEL DE CAMPOS. **A neurofisiologia e a pré-história da Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

ALMOULOUD, SADDO AG. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: Editora UFPR, 2010

BICUDO, IRINEU (tradutor e introdução). **Os elementos** de Euclides. São paulo: Editora da UNESP, 2009.

BISHOP, ALAN J. **Cultural conflicts in mathematics education:** developing a research agenda. For the Learning of Mathematics, Montreal, v. 14, n.2, p. 15-18, 1994.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática**. Brasília, MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Lei No 10.639, DE 9 de janeiro de 2003**. Brasília, Distrito Federal, 2003.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique: du savoir savant au savoir ensigné. 2. ed. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

D'AMBROSIO, UBIRATAN. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

D'AMBROSIO, UBIRATAN. **Etnomatemática se ensina?** In: **Revista Bolema** v.3, nº 4. Rio Claro, 1988.

DAMM, MARIA FLEMMING. **Registro de represetação**. In: MACHADO, SILVIA DIAS ALCÂNTARA. (Org.). **Educação matemática:** Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010.

FERREIRA, ANA CRISTINA; OLIVEIRA, FABIANA PEREIRA DE. **Inserindo a cultura africana nas aulas de Matemática:** um estudo com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Betim (MG), Universidade Federal de Ouro Preto, 2014. Disponível em <http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/3578>.

FIORENTINI, DARIO; OLIVEIRA, ANA TEREZA DE CARVALHO CORREA DE. **O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas?**. In: **Revista Bolema** v.27, nº47. Rio Claro, 2013.

FONTINHA, MÁRIO. **Desenho na areia dos Quiocos do Nordeste de Angola.** Lisboa: Instituto de Investigação Científica Tropical, 1993.

GERDES, PAULUS. **Da Etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas.** Belo

Horizonte: Autêntica, 2010.

GERDES, PAULUS. **Pitágoras africano: um estudo em cultura e educação matemática**. Maputo, Moçambique: Instituto Superior Pedagógico, 1992.

GOMES, NILMA LINO. **Relações étnico-raciais, educação e descolonização dos currículos**. In: **Revista Currículo sem Fronteiras**, v.12, n.1, pp.98-109, Jan/Abr 2012.

KNIJNIK, GELSA. **Currículo, etnomatemática e educação popular: um estudo em um assentamento do movimento sem terra**. In: **Revista Currículo sem Fronteiras**, v.3, n.1, pp.96-110, Jan/Jun 2003.

LIMA, CELIA TEREZINHA GROCHOVSKI DE. **Matemática e História e cultura afro-brasileira**. Secretaria da Educação do Paraná, 2007. Disponível em <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/412-4.pdf>.

MENEZES, MARIZILDA DOS SANTOS. **Etnogeometria: A geometria construída nos panos africanos**. In: GRAPHICA 2005 - Expressão Gráfica e Formação Humanística - VI International Conference on Graphics Engineering for Arts and Design e XVIIº Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico, 2005, Recife - PE.

MIGUEL, ANTONIO; MIORIM, MARIA ÂNGELA. **História na Matemática:** propostas e desafios. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.

OLIVEIRA, CRISTIANE COPPE DE; SEVERINO, ANTÔNIA APARECIDA; FERREIRA, NÚBIA APARECIDA. **Etnomatemática e História da Matemática: possibilidades de implementação da Lei 10.639/03 na formação inicial em Pedagogia**. Universidade Federal de Uberlândia, 2011. Disponível em <http://doczz.com.br/doc /562950/ etnomatem%C3%A1tica-e-hist%C3%B3ria-da-matem%C3%A1tica>.

PEREIRA, RINALDO PEVIDOR. **O jogo africano mancala e o ensino de matemática em face da Lei 10.639/03.** Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará. Fortaleza, 2011.

ROQUE, TATIANA; CARVALHO, JOÃO BOSCO PITOMBEIRA DE. **Topicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROSA, MILTON; OREY, DANIEL C. **Abordagens Atuais do Programa Etnomatemática: delineando um caminho para a ação pedagógica**. In: **Revista Bolema** v.19, nº26. Rio Claro, 2006.

SANTOS, CARLOS PEREIRA DOS; NETO, JOÃO PEDRO; SILVA, JORGE NUNO. **10 livros, 10 regiões, 10 jogos para aprender e divertir-se: África: Bao**. São Paulo: Edimprensa, 2008.

SANTOS, ELIANE COSTA. **Os tecidos de Gana como atividade escolar: uma**

intervenção etnomatemática para a sala de aula.Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2008.

SEE/SP. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. **Caderno do aluno**, 7º ano, Volume 1. (Matemática). São Paulo: IMESP, 2014.

SILVA, VANISIO LUIZ DA. **A cultura negra na escola pública: uma perspectiva etnomatemática.** Dissertação (mestrado) - Universidade de São Paulo. São Paulo, 2008.

VERGANI, TERESA. **Educação etnomatemática: o que é?**. Natal: Flecha do Tempo, 2007.