

Redes Complexas e Grafos: Uma Introdução com Proposta de Atividade para o Ensino Médio

Ariosvaldo Trindade da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini.

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586r Silva, Ariosvaldo Trindade da
Redes complexas e grafos: uma introdução com
proposta de atividades para o ensino médio /
Ariosvaldo Trindade da Silva. São Paulo: [s.n.],
2017.
80 f. il.

Orientador: Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini

Dissertação (Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal
de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo,
IFSP, 2017.

1. Teoria dos Grafos. 2. Grafos Na Educação
Básica. 3. Sistemas Complexos. 4. Propostas
Didáticas. I. Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

Ariosvaldo Trindade da Silva

Redes Complexas e Grafos: Uma Introdução com Proposta de Atividade para o Ensino Médio

Dissertação apresentada e aprovada em
06 de setembro 2017 como requisito
parcial para obtenção do título de Mestre
em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Profa. Dra. Mariana Pelissari Monteiro Aguiar Baroni
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Profa. Dra. Laurita dos Santos
Universidade Brasil
Membro da Banca

“Diga-me eu esquecerei, ensina-me e eu poderei lembrar, envolva-me e eu aprenderei”.

Benjamin Franklin

A DEUS, a JESUS e a Santíssima MARIA de quem sou muito devoto,

Aos meus Pais Cícero Joaquim da Silva e a Laurita Trindade da Silva, o meu muito obrigado por todo o amor, carinho e apoio que recebo em todos os instantes de minha vida.

Agradecimentos

À DEUS, À JESUS e a Santíssima MARIA, de quem sou muito devoto.

Aos meus pais, pela educação que me proporcionaram e por todo seu apoio em todos os momentos de minha vida.

À minha esposa Vanessa e aos meus filhos, Camila, Matheus e Victória, por todo incentivo e compreensão em meus momentos de ausência.

Aos meus irmãos, que desde de criança estivemos sempre juntos um auxiliando ao outro, conforme nossos pais nos ensinaram. Obrigado ao meu querido irmão Antônio (Nem), à minhas irmãs, Maria de Fátima (Nena), Maria Aparecida (Lelê), Maria Bethânia (Tutu, In Memoriam) e a Maria Vanessa (Vanessinha). Muito obrigado pelo amor de todos vocês.

A todos os meus professores, responsáveis por minha formação acadêmica desde tenra idade.

Agradeço a todos os professores do IFSP, que com muita paciência e gentileza, me proporcionaram um amadurecimento em termos de aprendizado matemático e pessoal.

Agradeço ao diretor da E.E. Prof. Renato de Arruda Penteado, no Jardim Carumbé (Vila Brasilândia), Albino Spínola Sardinha, pelo seu bom humor, incentivo e compreensão nos momentos em que me ausentei da Unidade Escolar.

Ao diretor Sebastião dos Santos, da E.M.E.F. Senador Miltom Campos, por sua enorme compreensão e auxílio nos momentos em que mais precisei.

À Professora Sheila por me estender a mão num momento muito delicado de meu trabalho.

A todos os meus alunos, cada qual ao seu estilo pela manifestação de carinho e apoio.

Agradeço a todos que participaram de forma direta ou indiretamente, e que não estão sendo citados aqui.

Agora quero deixar um agradecimento especial ao meu amigo e orientador nesta dissertação, o Prof. Me. Luciano Aparecido Magrini, que com sua paciência e firmeza, soube indicar os diversos enganos que cometi ao longo deste trabalho. E mesmo muito distante, jamais me abandonou. A você meu bom amigo, um forte abraço, de todo o coração.

Resumo

Neste trabalho procuramos fazer uma abordagem sobre os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, com o intuito de torná-lo mais conhecido no Ensino Regular. Embora apresente uma diversidade de aplicações nas mais variadas áreas, ainda é muito pouco explorado nas unidades escolares de nosso país, em especial na Escola Básica. Formalmente abordamos o conceito de Sistemas Complexos e como esses permeiam o nosso cotidiano, seguimos com a apresentação do conceito de Redes Complexas e sua relação para descrever Sistemas Complexos. Grafos são a base matemática para compreender Redes Complexas, e assim, apresentamos conceitos e definições necessários à introdução desta referida teoria. Como elemento motivados sugerimos algumas atividades plausíveis de serem realizadas por alunos do Ensino Médio. Algumas dessas atividades podem ser resolvidas manualmente, outras são resolvidas através de algoritmos, obtendo a resposta através do uso da tecnologia. Acreditamos que este trabalho contribui para melhorar o processo ensino-aprendizagem em nossas unidades escolares, além de servir de base para todos que desejarem melhorar seus conhecimentos em Teoria dos Grafos.

Palavras chave: Teoria de Grafos, Grafos na Educação Básica, Sistemas Complexos, Propostas Didáticas.

Complex Networks and Graphs: An Introduction with Proposes Activities for high school

Abstract

In this work, we intend to do an approach of the basic concepts of the Graph Theory in a way that it makes it well known in the regular school. Although it presents a diversity of applications in the most varied areas, it isn't used in the schools in our country, especially in elementary school. We formally approach the concept of Complex Systems and as they are in our daily life, we proceed with the presentation of the concept of Complex Networks and its relation to describe Complex Systems. Graphs are Math basis to understand Complex Networks, therefore, we present concepts and definitions that are necessary to the introduction of that theory. As a motivating element, we suggest some likely activities to be accomplished by High School students. Some of these activities may be solved manually, others are solved through algorithms, getting the result through the use of technology. We believe that this work contributes to improve the teaching/learning process in our schools, as well as to serve as a basis for all those who wish to improve their knowledge in Graphs Theory.

Keywords: Graph Theory, Graph in the Elementary School, Complex System, Proposed Activities.

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Pequena rede formada por seis vértices e nove arestas.	20
Figura 2.1 - Pontes de Königsberg.	25
Figura 2.2 - Grafo das pontes de Königsberg.	26
Figura 2.3 - Grafos rotulados.	27
Figura 2.4 – Multigrafo.	28
Figura 2.5 - Grafo ponderado.	28
Figura 2.6 – Grafo direcionado.	29
Figura 2.7 – Grafo nulo ou vazio.	30
Figura 2.8 – Confronto entre equipes.	30
Figura 2.9 – Confronto entre equipes.	31
Figura 2.10 – Subgrafos.	31
Figura 2.11 – Grafos direcionados e grafos não direcionados.	32
Figura 2.12 – Relação entre graus de um vértice e suas arestas.	33
Figura 2.13 – Exemplos de grafos simples.	34
Figura 2.14 – Exemplo de grafo completo.	35
Figura 2.15 – Grafo regular.	36
Figura 2.16 – Adjacência de vértices.	37
Figura 2.17 - Pseudografo e Matriz de adjacência	39
Figura 2.18 – Grafo simples e sua matriz de incidência.	39
Figura 2.19 – Tráfego aéreo.	40
Figura 2.20 – Passeios em grafos.	41
Figura 2.21 – Distâncias entre cidades.	43
Figura 4.1 – Ponto a ponto.	53
Figura 4.2 – Desafio I.	55
Figura 4.3 – Desafio II.	56
Figura 4.4 – Torneio de vôlei.	57
Figura 4.5 – Correios.	59
Figura 4.6 – Coleta de resíduos.	61
Figura A.1 - Representação das pontes de Königsberg.	67
Figura A.2 – Grafos eulerianos (G1), semieulerianos (G2) e não eulerianos (G3).	68
Figura A.3 – Exemplos de grafos eulerianos.	69
Figura A.4 – Exemplo de percurso euleriano.	70

Figura B.1 – Representação de redes aleatórias.	73
Figura B.2 – Distribuição de Poisson.	74
Figura B.3 – Rede Pequeno Mundo.....	76
Figura B.4 – Representação modelo Watts-Strogatz.....	77
Figura B.5 - Rede de auto estrada.....	78
Figura B.6 – Rede de tráfego aéreo.	78
Figura B.7 – Distribuição por lei de potência.....	79
Figura B.8 – Rede aleatória – falha acidental dos vértices.....	80
Figura B.9 - Rede livre de escala - falha acidental dos vértices.....	80
Figura B.10 - Rede livre de escala - ataque aos hubs.....	80

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Lista de adjacências.	37
Tabela 2.2 - Matriz de adjacência da Figura 2.16.	38
Tabela 2.3 - Matriz de adjacência - Tráfego aéreo.	40
Tabela 2.4 - Distância entre cidades.	44
Tabela 4.1- Quadro 1.	55
Tabela 4.2 - Quadro 2.	56

Sumário

1	Introdução.....	19
2	Conceitos elementares de Teoria dos Grafos	25
2.1	Definições.....	26
2.2	Conexidade.....	31
2.3	Graus e arestas.....	33
Teorema 1 (Euler)		34
2.4	Representação dos grafos no computador	36
2.5	Caminhos.....	41
2.6	Problemas de Caminho Mínimo.....	42
3	Modelos de grafos	48
3.1	Grafos de relacionamento.....	48
3.2	Grafos em epidemia	48
3.3	Internet	49
3.4	Grafos estruturas viárias.....	49
4	Grafos no Ensino Médio: propostas de atividades	50
4.1	Teoria dos Grafos e Parâmetros Curriculares Nacionais	50
4.2	Sugestões de atividades	53
Considerações Finais		63
	Referências	65
	Apêndice A.....	67
A.1	Grafos eulerianos.....	67
A.2.	Algoritmo de Hierholzer	70
	Apêndice B	73
B.1	Redes Aleatórias	73
B.2	Redes Mundo Pequeno	74
B.3	Modelo Watts e Strogatz	75
B.4	Redes livres de escala (Scale Free).....	77

1 Introdução

Devemos nos conscientizar de que o comportamento de muitas coisas ao nosso redor não pode ser estudado e caracterizado de forma isolada, pois muitas destas coisas estão conectadas e a interação entre as partes influencia o comportamento global. Assim sendo, surge naturalmente a necessidade de estudar como as coisas se conectam e a importância dessa conectividade para o problema em questão (MITCHELL, 2009). Por exemplo, de que forma um intrincado maquinário como o sistema imunológico se organiza para lutar contra uma doença, ou como independentes membros de uma economia, cada qual trabalhando para seu próprio sustento, interagem entre si, produzindo uma complexa estrutura global de mercados. Ninguém sabe exatamente como uma comunidade de organismos sociais – formigas, cupins, muitas abelhas e seres humanos – se aglomeram coletivamente para construir e elaborar estruturas que aumentam a probabilidade de sobrevivência (MITCHELL, 2009). Tais questões são tópicos de *Sistemas Complexos*, um campo interdisciplinar de pesquisa que busca entender como um grande número de entidades relativamente simples se auto organizam sem o auxílio de qualquer controle central, em um todo coletivo que cria maneiras, usa informações, e, em alguns casos evolui e aprende (MITCHELL, 2009).

Em um sistema complexo todas as partes interagem entre si para manter o todo e este por sua vez interfere na maneira como as partes interagem. Vivemos cercados por sistemas que são demasiadamente complicados (BARABÁSI, 2015).

Esses sistemas compostos por elementos ou componentes individuais, todos, por algum motivo ligados uns aos outros, têm despertado o interesse da comunidade científica em tempos atuais (NEWMAN, 2010).

Existem estudiosos que buscam compreender a natureza individual de cada componente; por exemplo, como um computador funciona, ou como um ser humano sente ou age quando exposto a determinadas situações. Outros se dirigem à natureza das conexões ou interações entre cada um de seus componentes, tais como, os protocolos de comunicação usados na internet ou a dinâmica das amizades, nos relacionamentos humanos (NEWMAN, 2010).

Porém, vale destacar um outro aspecto para esses sistemas de interação, às vezes negligenciado, mas quase sempre crucial para análise do comportamento do sistema: o padrão de suas conexões. Esse padrão pode ser representado como uma *rede* - uma representação simplificada que reduz um sistema a uma estrutura abstrata que informa apenas os princípios básicos de padrões destas conexões. Os componentes dos sistemas são os *vértices*, e as suas conexões são as *arestas*. Formalizando uma definição, pode-se caracterizar uma *rede* como “um conjunto de

vértices ou nós com conexões entre eles, denominados arestas” (NEWMAN, 2010). Vértices e arestas podem ser rotulados com informações adicionais de modo a identificar maiores detalhes da rede em questão.

O interesse na Teoria de Redes Complexas está na sua relação com diversas situações de nosso cotidiano, e na maneira como essa descreve uma larga variedade de sistemas complexos de alta importância tecnológica (BARABÁSI, 2015). Por exemplo, a Internet pode ser vista como uma rede complexa de roteadores e computadores ligados entre si por vários fios ou por *wireless* (sem fio), modas, manias e ideias se espalham pelas redes sociais, *World Wide Web* é uma enorme rede virtual de páginas conectadas entre si. Da infraestrutura de comunicações que integra bilhões de telefones celulares com computadores e satélites à nossa competência para raciocinar e compreender nosso mundo, movimentando de forma coerente bilhões de neurônios em nosso cérebro, tudo de alguma forma, estão conectados entre si (ALBERT-BARABÁSI, 2002). A heterogeneidade de aplicações da Teoria de Redes Complexas nas mais variadas disciplinas, indica o interesse dos pesquisadores, cada qual em sua área específica, contribuindo para o desenvolvimento desta teoria (NEWMAN, 2010).

Por descrever variadas situações presentes em nosso cotidiano, é interessante para o estudante do Ensino Médio tomar conhecimento sobre Redes Complexas, e mostrar como alguns desses modelos permeiam sua rotina diária, tal como a Internet e o *Facebook*. A partir daí despertar o interesse do educando para os estudos da Teoria de Grafos, pois essa é a base para analisar e compreender uma rede complexa. Grafos são usados para descrever conceitos matemáticos em redes complexas (COVEN, 2010).

A Teoria dos Grafos é um importante ramo da matemática discreta com aplicações em diversas áreas do conhecimento, tais como, Administração, Informática, Economia, Engenharia, Física, Química, Biologia e Ciências Sociais, entre outras. Em Matemática e Ciência da Computação, as redes são representadas por *grafos*, uma coleção de *vértices* ou *nós* ligados entre si através de *arestas* (NEWMAN, 2003). A Figura 1.1 é a representação de um grafo.

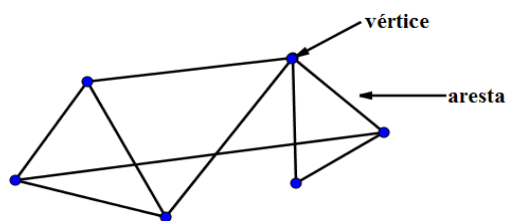


Figura 1.1 - Pequena rede formada por seis vértices e nove arestas.

Abordar Teoria dos Grafos a educandos da Escola Básica permitirá que esse reflita e melhore sua percepção para resolver problemas que não são comuns à grade curricular do Ensino Médio, por exemplo, como desenvolver um itinerário para um caminhão de coleta de resíduos de modo que este percorra todas as ruas de um bairro uma única vez ou, como minimizar o tempo de entrega de uma *pizza* num serviço de *delivery*. Grafos propiciam à estudantes situações vinculadas ao seu cotidiano, dá significado ao que se aprende na escola através da contextualização e da interdisciplinaridade, incentiva o raciocínio e potencializa sua capacidade para aprender.

Com isto exposto, o trabalho aqui desenvolvido tem como objetivo apresentar conceitos básicos sobre a teoria dos grafos para estudantes do Ensino Médio, almejando que estes façam a conexão entre teoria e aplicações a problemas do mundo real, bem como verificarem a importância dos grafos nas estruturas de redes complexas.

Existem outros motivos que justificam a introdução de grafos a estes estudantes. Os grafos constituem ferramentas simples, mas úteis em diversas situações, tal como na resolução de um problema. Ao longo de sua jornada estudantil, o aluno aprendeu que a interpretação de um problema pode ser modelada numa folha de caderno através de um desenho. Essa forma de modelagem enriquecem o conhecimento matemático, auxiliando-o na escolha de técnicas ou métodos adequados para obter a solução (MUNIZ JÚNIOR, 2007). Com a noção de pontos interligados por retas, a representação por grafos pode facilitar o entendimento e a resolução de problemas, pois, disponibilizam opções de modelagem utilizando um desenho composto por vértices e arestas. A partir daí, cabe ao aluno decidir como resolverá a questão: manualmente ou com o auxílio de um computador. A modelagem será eficiente a partir do instante em que o estudante tomar consciência de que está trabalhando com aproximações de situações reais (D'AMBRÓSIO, 1993).

Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea (BRASIL, 1998). Logo, outro relevante motivo para abordar Teoria dos Grafos com alunos do Ensino Médio, é que esta propicia a contextualização de variados fatos do cotidiano do estudante, tal como um serviço de “Disk Gás”, um serviço muito comum em diversas regiões de nosso país. Um cliente liga para um fornecedor em determinado local, e este realiza a entrega do botijão de gás no menor tempo possível. Dessa forma, como determinar uma rota de transporte que permita fazer esse percurso em um tempo mínimo? A contextualização propicia ao educando relacionar o que se aprende na escola (teoria) com o mundo real (prática). Quando nos referimos aos estudos da Matemática, há a

necessidade de considerar que longe, fora dos muros da Unidade Escolar os alunos terão à sua frente as mais diversas situações problemas e para chegarem a uma resposta, devem mobilizar conhecimentos e estratégias adquiridas ao longo de sua carreira estudantil (BRASIL, 1998).

A interdisciplinaridade é outro fator importante em Teoria dos Grafos, pois, a linguagem matemática também é aplicada em outras áreas de conhecimento, tais como a Física, a Química e a Biologia. A interdisciplinaridade propicia ao estudante observar um mesmo conteúdo através de perspectivas diferentes. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio destacam:

Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia (PCNEM, 1999, p. 88).

O estudo de grafos pode se relacionar com a Biologia, por exemplo. Suponha num determinado nicho ecológico, a relação presa-predador. Nessa circunstância, presa e predador são os vértices, e a relação de predatismo, a aresta.

É preciso ainda uma rápida reflexão sobre a relação entre Matemática e tecnologia (BRASIL, 1998). Nesse sentido a Teoria dos Grafos está de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, pois nas últimas décadas, as pesquisas sobre grafos vem se desenvolvendo alavancada pelo avanço de novas tecnologias computacionais, permitindo a resolução de problemas via algoritmos¹ com mais eficiência, rapidez e segurança. Em especial, problemas que buscam encontrar “caminhos mínimos” são resolvidos através de um algoritmo e, um dos mais conhecidos, é o algoritmo de Dijkstra (BOAVENTURA NETTO, 2009). Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do educando habilidades para selecionar informações, analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões. Também será exigido uma capacidade para avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações.

Tem-se neste trabalho o intuito de apresentar os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, porém, sabemos que tanto a rede estadual de ensino, quanto a rede municipal de educação não disponibilizam material relacionado ao ensino de grafos, contudo, o assunto grafos no Ensino Médio não é uma novidade. É possível encontrar uma grande variedade de trabalhos referentes a este tema disponíveis para leitura e pesquisa na Internet.

¹ Um algoritmo é um procedimento, aplicado em etapas repetitivas e com eventuais desvios lógicos (BOAVENTURA NETTO, 2009).

Entre alguns podemos citar a dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), de Adriana Priscila de Brito, apresentada Universidade Federal Rural de Pernambuco, no ano de 2014. Em sua dissertação a autora propõe a introdução da Teoria dos Grafos mostrando a conexão entre alguns conceitos desta teoria e a caracterização dos Poliedros Regulares. Aborda-se os Grafos Eulerianos, a fórmula de Euler para grafos planares ($v + f - e = 2$), entre outros. Por fim, apresenta uma proposta de sequência didática objetivando a introdução da Teoria de Grafos a educandos do Ensino Médio, mostrando a relação entre esta e os Poliedros Regulares.

Destaque também para Ivail Muniz Júnior, que durante o 39º Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, realizado em Fortaleza (CE), no ano de 2007, relata algumas atividades de Teoria dos Grafos realizadas com alunos do 3º ano do Ensino Médio do Colégio Pedro II, no Rio de Janeiro. Nestas atividades o autor aborda a Teoria dos Grafos juntamente com o uso de algoritmos para resolução de problemas, salientando a importância para o aluno lidar com a tecnologia no sentido de minimizar custos e maximizar recursos. Dentre os assuntos contemplados encontramos Ciclos Eulerianos, Ciclos Hamiltonianos, o Problema do Caminho Mínimo (Algoritmo de Dijkstra), o Problema do Caminho Crítico, Teorema de Festinger, dentre outros.

Por fim, vamos destacar o trabalho desenvolvido pelo professor Samuel Jurkiewicz por sua enorme contribuição à aprendizagem da Teoria dos Grafos, difundindo este conhecimento entre professores e alunos do Ensino Médio, por meio de cursos, oficinas e congressos por todo país. Destacamos sua enorme contribuição na realização deste trabalho através da apostila de sua autoria, *Grafos: Uma Introdução*, desenvolvida para Programa de Iniciação Científica, disponibilizada para leitura e pesquisa no *site* da OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

No desenvolvimento deste trabalho serão delineados caminhos para que a Teoria dos Grafos, mesmo que em seus aspectos básicos, possa ser abordada no Ensino Médio através da realização de algumas propostas de atividades. Para isso, descreveremos apenas como sugestões, uma sequência didática para realização das atividades, que pode ser (ou não) adotada em sala de aula. Porém, antes da apresentação das propostas de atividades, devemos descrever os assuntos que permeiam esse trabalho.

A Introdução aborda de maneira bem informal os conceitos de Sistemas Complexos e Teoria de Redes Complexas, e dá alguns exemplos da presença dessas em nosso cotidiano. O foco principal está na introdução da Teoria dos Grafos para alunos do Ensino Médio. Para isso são apresentadas algumas justificativas para abordagem desse tema a estudantes da Escola Básica. No Capítulo 2 (aqui consideramos a Introdução como sendo o Capítulo 1), destina-se à apresentação dos conceitos básicos em Teoria dos Grafos. Iniciamos com alguns aspectos históricos que deram impulso a essa teoria, destacando o problema das pontes de Königsberg, seguindo com o desenvolvimento de alguns conceitos básicos necessários para a sequência dos estudos.

No Capítulo 3 são apresentados aos estudantes do Ensino Médio alguns modelos de grafos. Após estudar os conceitos iniciais desta teoria, apresentamos tais modelos de grafos com o intuito de os alunos perceberem o quanto esse assunto está presente nas mais variadas áreas. O Capítulo 4 destina-se a apresentação das propostas de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, seguindo com propostas de sequências didáticas, que podem ou não, serem seguidas pelo professor. Estas propostas são o foco de nosso trabalho, pois através delas os conceitos sobre Teoria dos Grafos vão sendo introduzidos de forma gradual, partindo dos conceitos mais simples até chegarmos a problemas que retratam o cotidiano das pessoas, conectando a matemática da sala de aula e situações do dia a dia no qual o aprendizado pode ser aplicado.

Por fim, nas considerações finais, finalizamos descrevendo nosso ponto de vista a respeito do trabalho aqui desenvolvido.

2 Conceitos elementares de Teoria dos Grafos

Poucos campos de pesquisa podem traçar seu nascimento para um único momento e o situar na história; um destes campos é a chamada Teoria dos Grafos, o andaime matemático por trás da ciência das redes. Suas raízes remontam a 1736 em *Königsberg*, a capital da Prússia Oriental, uma próspera cidade mercante da época.

Nesse ano o grande matemático e geômetra Leonhard Euler, visitou a cidade de *Königsberg*, na então Prússia Oriental (atualmente ela se chama Kaliningrado e fica em uma pequena porção da Rússia, entre a Polônia e a Lituânia). Ao chegar à cidade, Euler tomou conhecimento de um enigma matemático chamado Problema das Pontes de *Königsberg*, que embora parecesse simples, ainda não havia sido solucionado. As duas ilhas se ligavam ainda às margens por mais seis pontes ao todo, conforme Figura 2.1. O enigma consistia em encontrar o percurso para um passeio que partisse de uma das margens e, atravessando uma única vez cada uma das sete pontes, retornasse à margem de partida.

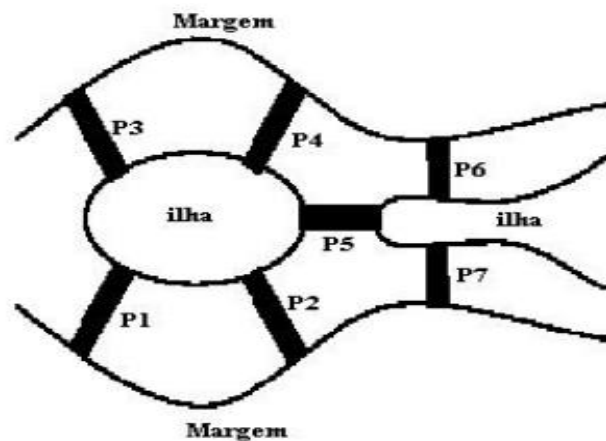


Figura 2.1 - Pontes de Königsberg.

Fonte: Extraído de Carvalho (2005).

Moradores da cidade passaram muitas horas tentando encontrar um caminho para tal solução. Euler também não encontrou a solução, porém, ele provou a impossibilidade de tal percurso, apresentando à Academia de Ciência Russa de São Petersburgo, no artigo “*Solutio Problematis ad geometriam situs pertinentes*”² um diagrama em que as faixas de terra representavam os vértices e as pontes, as arestas, ou seja, Euler utilizou um grafo, objeto matemático composto por pontos chamados *vértices* ou *nós*, e retas, chamadas de *arestas*. Este episódio deu origem

² Este é um dos artigos mais famosos de Euler - o problema da ponte de Königsberg. É frequentemente citada como o papel mais antigo tanto na topologia como na teoria dos grafos. De acordo com os registros, foi apresentado à Academia de São Petersburgo em 26 de agosto de 1735. Fonte: eulerarchive.maa.org/pages/E053.html

a grandes teorias matemáticas muito exploradas nos dias atuais. A Figura 2.2 é uma representação gráfica do que, hoje em dia, se chama um modelo de grafo.

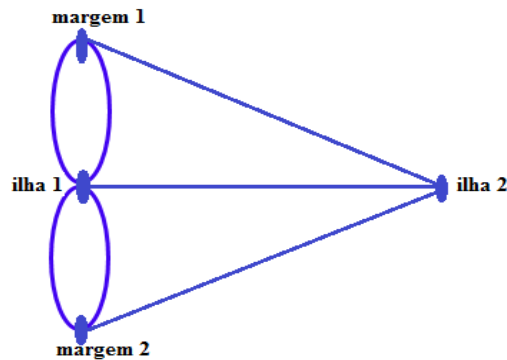


Figura 2.2 - Grafo das pontes de Königsberg.
Fonte: Adaptado de Jurkiewicz (2009).

As pontes de *Königsberg* é considerado como o primeiro problema envolvendo a *Teoria de Grafos*.

De maneira informal, um grafo é um conjunto de pontos e linhas. Os pontos são chamados *vértices* e as linhas são as *arestas*. De forma simplificada, para se obter um grafo é preciso definir quem são seus vértices e suas ligações entre si (arestas). Em um problema de circuitos elétricos, cada ponto de conexão é um vértice e cada componente é uma aresta. Em fórmulas químicas, cada átomo é um vértice e cada ligação entre dois átomos é uma aresta. No sistema de abastecimento de água de um município, as residências estão conectadas às centrais de distribuição de água através de uma rede de tubulações. Desta forma, as casas representam os vértices e as tubulações são as arestas.

Usando a linguagem atual de Teoria dos Grafos, Euler usou os vértices para representar cada massa de terra (margens ou ilhas) e as arestas para representar as pontes. Em homenagem a este grande matemático, trajetos de um grafo que passam uma única vez por todas as arestas, quando existem são chamados de *caminhos eulerianos* (BARABÁSI, 2015).

2.1 Definições

Nesta seção apresentamos alguns dos conceitos básicos da Teoria dos Grafos, necessários para o desenvolvimento deste trabalho, em que o rigor das demonstrações é mediado pelo nível de escolaridade no qual a implementação foi proposta. Esta seção foi elaborada a partir das seguintes referências bibliográficas: Boaventura Netto (2009), Bondy & Murty (1982), Carvalho (2005) e Jurkiewicz (2009).

Definição 2.1.1. Um *Grafo* é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \Psi_G)$ formada por um conjunto não vazio V de elementos chamados *vértices*, um conjunto E de elementos chamados *arestas* e

uma *função de incidência* $\Psi_G: E(G) \rightarrow V(G)$, que associa cada aresta de G a um par de elementos (não necessariamente distintos) de vértices de G .

Para compreender melhor esta definição, usaremos dois exemplos de *grafos rotulados* (veja Figura 2.3), grafos em que vértices ou arestas recebem um nome.

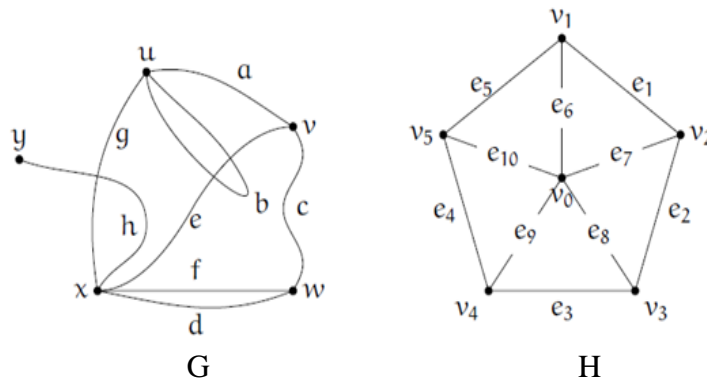


Figura 2.3 - Grafos rotulados.

Fonte: Extraído de Bondy & Murty (1982).

Considerando o grafo G , temos: $V(G) = \{u; v; w; x; y\}$; $E(G) = \{a; b; c; d; e; f; g; h\}$

A função de incidência será definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi_G(a) &= \{u, v\} & \Psi_G(b) &= \{u\} & \Psi_G(c) &= \{v, w\} & \Psi_G(d) &= \{x, w\} \\ \Psi_G(e) &= \{x, v\} & \Psi_G(f) &= \{x, w\} & \Psi_G(g) &= \{u, x\} & \Psi_G(h) &= \{x, y\} \end{aligned}$$

Grafo H : $V(H) = \{v_0; v_1; v_2; v_3; v_4; v_5\}$; $E(H) = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; e_7; e_8; e_9; e_{10}\}$

A função de incidência é definida como:

$$\begin{aligned} \Psi_H(e_1) &= \{v_1, v_2\} & \Psi_H(e_2) &= \{v_2, v_3\} & \Psi_H(e_3) &= \{v_3, v_4\} & \Psi_H(e_4) &= \{v_4, v_5\} \\ \Psi_H(e_5) &= \{v_5, v_1\} & \Psi_H(e_6) &= \{v_1, v_0\} & \Psi_H(e_7) &= \{v_0, v_2\} & \Psi_H(e_8) &= \{v_0, v_3\} \\ \Psi_H(e_9) &= \{v_0, v_4\} & \Psi_H(e_{10}) &= \{v_0, v_5\} \end{aligned}$$

Sempre que uma aresta $e \in E(G)$ interligar dois vértices u e v de $V(G)$, estes dois vértices serão denominados *vértices adjacentes* e, a aresta e é *incidente* em u , se u for uma extremidade de e . Sendo assim, notemos que a aresta (b) do grafo G tem uma particularidade, conecta um vértice a si mesmo. Uma aresta que conecta um vértice a si mesmo é chamada de *laço*. Além disso, percebemos também que o grafo G possui um par de vértices, x e w conectados por duas arestas, d e f . Daí temos:

Definição 2.1.2 - *Multigrafo* é um grafo em que pelo menos um par de vértices tem mais de uma aresta que os conecta, e estas são chamadas de arestas paralelas ou múltiplas. O grafo que representa o problema das pontes de *Königsberg* é a Figura 2.4, é um exemplo de multigrafo.

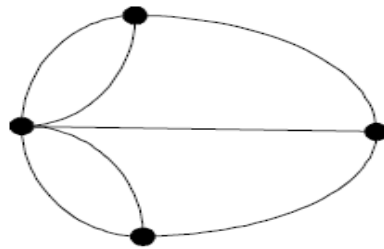


Figura 2.4 – Multigrafo.

Fonte: Extraído de Jurkiewicz (2009).

Salientamos que o importante num grafo não é a posição que os vértices ocupam e nem a distância que os separam em cada representação. O que importa é: “existem tais elementos (vértices), e alguns deles mantêm determinada relação que os conecta (arestas)”. Analisemos algumas propriedades do multigrafo da Figura 2.5.

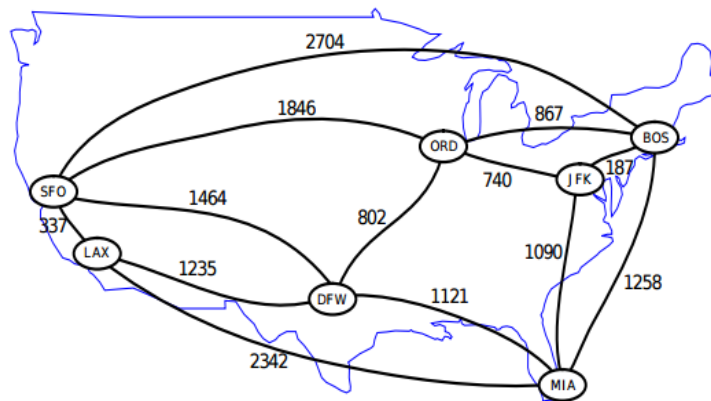


Figura 2.5 - Grafo ponderado.

Fonte: Extraído de <https://grafos.neocities.org>. (Acesso 17 set 2017).

Cada vértice deste multigrafo contém as iniciais do nome de alguns aeroportos dos Estados Unidos, também são atribuídos valores às arestas que conectam seus vértices, representando a distâncias entre eles. Esses valores chamaremos de *peso*, para então enunciarmos a seguinte definição:

Definição 2.1.3. *Grafo ponderado* é um grafo ao qual são atribuídos pesos (valores) às suas arestas.

Estes valores podem referir a diversas coisas, por exemplo: um grafo representando as cidades e as estradas que as interligam, os valores das arestas podem representar o comprimento, o tempo de direção, o limite de velocidade ou o custo do pedágio de cada estrada.

Seja em uma rodovia ou nas avenidas de uma cidade, há a necessidade de planejamento e organização do trânsito, assim, torna-se interessante que o grafo informe o sentido para o tráfego de veículos. Isso nos leva a próxima definição.

Definição 2.1.4 *Grafo direcionado*, também conhecido como *dígrafo*, é um grafo no qual cada aresta tem uma direção, iniciando em um vértice e finalizando em outro. As arestas, às vezes chamadas de *arestas direcionadas*, podem ser representadas utilizando-se *setas*.

O grafo da Figura 2.6 representa um grafo direcionado. Nesse grafo há a possibilidade de haver duas arestas conectando os mesmos dois vértices, mas em sentidos contrários, ou seja, eles conectam pares ordenados diferentes.

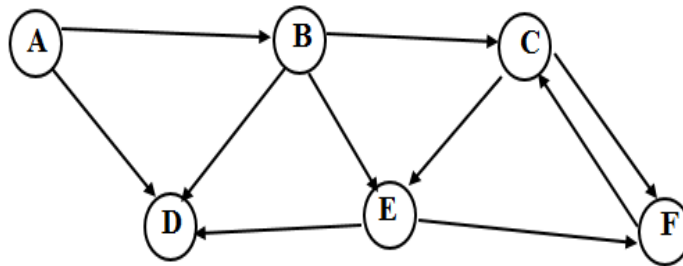


Figura 2.6 – Grafo direcionado.

Antes de prosseguirmos, precisamos estabelecer alguns conceitos da teoria dos grafos. Trata-se de ideias básicas que irão aparecendo ao longo do trabalho com noções teóricas mais complexas. Iniciaremos com os vértices.

Definição 2.1.5. A *Ordem* de um grafo indica a quantidade de vértices que ele possui. Falando de outra forma, é a quantidade de elementos do conjunto $V(G)$. A ordem de um grafo G pode ser representada pela notação $|V(G)|$.

Definição 2.1.6 Tamanho de um grafo refere-se ao número de ligações (arestas) que ele possui, ou seja, à quantidade de elementos do conjunto $E(G)$. Da mesma forma, representaremos o tamanho de um grafo pela notação $|E(G)|$.

Imagine um torneio de vôleibol em uma unidade escolar, com a participação de seis equipes: 6ºA, 6ºB, 7ºA, 7ºB, 8ºA e 8ºB. Antes de iniciado o torneio, não existe nenhum jogo realizado. Isto nos leva a conceituar um *grafo nulo* ou *vazio* como sendo um grafo que possui vértices, mas não possui arestas, ou seja, o conjunto $E(G)$ é vazio. A Figura 2.7 é um exemplo de grafo nulo ou vazio.

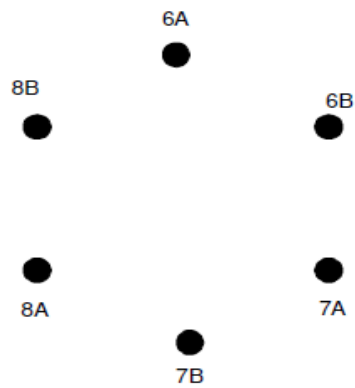


Figura 2.7 – Grafo nulo ou vazio.

Fonte: Extraído de Jurkiewicz (2009).

O grafo da Figura 2.8, mostra como foram os confrontos entre as equipes no torneio realizado. Ele representa uma descrição do nosso problema, portanto cada vértice e cada ligação do grafo tem um significado. Neste caso, o conjunto V dos vértices, representa o conjunto das turmas que participam do torneio. O conjunto E , das arestas, representam os jogos realizados. Relembrando que no grafo interessa identificar quem são os vértices e quais são as arestas que os conectam (ou não).

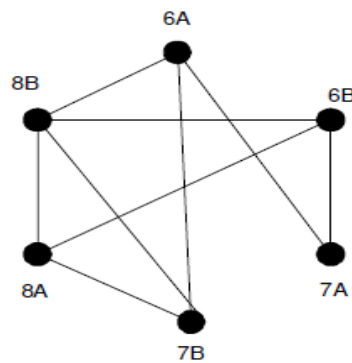


Figura 2.8 – Confronto entre equipes.

Fonte: Extraído de Jurkiewicz (2009).

O grafo da Figura 2.8 indica os jogos que já foram realizados, agora desejamos o grafo dos confrontos que ainda restam. Faremos um grafo com o mesmo conjunto de vértices, mas com as arestas que ainda faltam no grafo original. A Figura 2.9 (G') indica esse grafo.

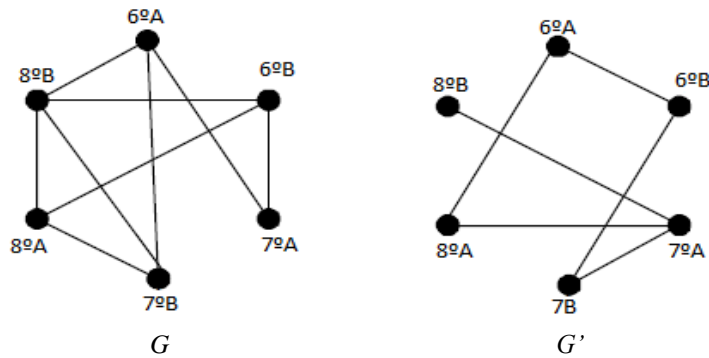


Figura 2.9 – Confronto entre equipes.

Fonte: Extraído de Jurkiewicz (2009).

Considerando o grafo G e o grafo G' na Figura 2.9, isso nos conduz a seguinte definição:

Definição 2.1.7 *Grafo complementar* G' é o grafo que contém as ligações (arestas) que não estão em G . É fácil perceber que $V(G) = V(G')$ e que $E(G) \cup E(G')$ inclui todas as arestas de G .

Abordaremos agora o conceito de subgrafo. De maneira informal podemos dizer que um subgrafo é um grafo que cabe dentro de outro. Formalmente, dizemos que o conjunto de vértices de um subgrafo H de $G = (V, E, \Psi)$ está contido no de G e que seu conjunto de ligações também está contido no de G (ou seja, $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$).

Definição 2.1.8 Um grafo H é um *subgrafo* de G (escrevemos $H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e Ψ_H é a restrição de Ψ_G para $E(H)$.

A figura 2.10 mostra os exemplos de um grafo G com alguns subgrafos.

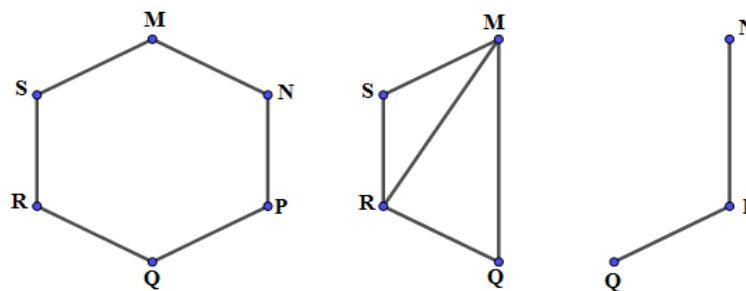


Figura 2.10 – Subgrafos.

Fonte: Adaptado de Jurkiewicz (2009).

2.2 Conexidade

Já sabemos que existem grafos direcionados e grafos não direcionados. Prosseguindo, façamos uma análise da Figura 2.11.

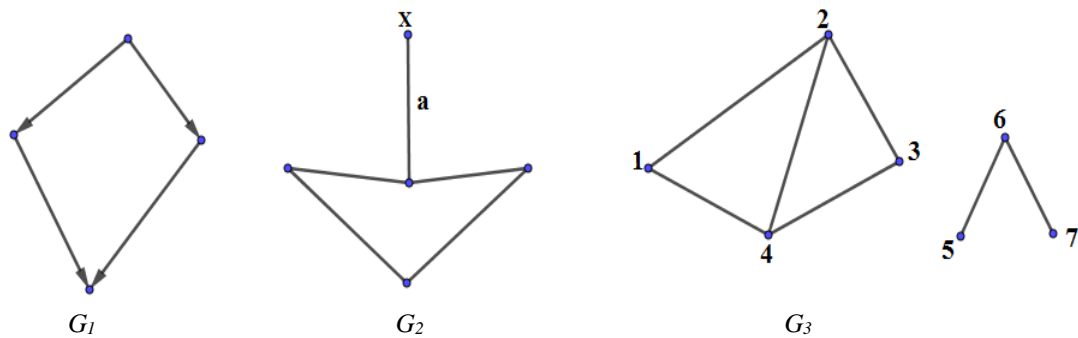


Figura 2.11 – Grafos direcionados e grafos não direcionados.

Fonte: Adaptado de Boaventura Netto (2009).

Temos dois grafos, em que o grafo G_1 é direcionado e o outro G_2 é não direcionado. Vamos nos referir ao grafo G_1 mais adiante, porém observe G_2 : não interessa de qual vértice se inicie, há sempre uma possibilidade de se alcançar os outros vértices. Semelhante a caminhar pela rua: não existe contramão. Desta forma, qualquer par de vértices é unido por um percurso ou caminho. Na Figura 2.11, o grafo G_3 equivale a um único grafo composto por duas partes, os rótulos mostram que todos os vértices são elementos de um mesmo conjunto, que possui 7 vértices. Neste último grafo, observe que não podemos atingir um vértice a partir de outro: veja que partindo de 5 não é possível atingir 3 (vice-versa). Não existe um caminho entre esses vértices. Nestas circunstâncias o grafo G_3 é dito *não conexo* ou *desconexo*. Os grafos G_1 e G_2 são ditos conexos. Esta propriedade, um grafo ser ou não ser conexo, se chama *conexidade*.

Definição 2.2.1. *Grafo conexo* é um grafo que tem a seguinte propriedade: para cada par s e t , é possível encontrar um caminho com origem s e destino t .

Perceba que o subgrafo na Figura 2.10 (b) é conexo, enquanto o subgrafo na Figura 2.10(c) é desconexo. De qualquer forma, eles ilustram dois processos de obtenção de subgrafos. O subgrafo em 2.10 (b) é obtido por deleção de vértices, ou seja, eliminam-se alguns vértices e todas as arestas incidentes nesses vértices. O subgrafo em 2.10 (c) é obtido por deleção de arestas, onde simplesmente se eliminam algumas arestas. É possível que se deletem todas as arestas de um vértice sem deletá-lo; o vértice resultante é um vértice isolado, e o subgrafo resultante também é desconexo.

Em um grafo não direcionado conexo, sempre se pode ir de um a outro vértice, atravessando arestas. Se porventura, uma aresta for indispensável a este processo, tal aresta é dita uma *ponte* do grafo. Observe a aresta a no grafo G_3 (Figura 2.11), sem ela não se alcança o vértice X , portanto implica na perda da conexidade em um grafo.

2.3 Graus e arestas

A definição 2.1.1 informa que um grafo é formado por um conjunto de pontos denominados vértices, e por um conjunto de arestas ligando pares de vértices. A seguir serão dadas algumas definições relacionando vértices e arestas.

Definição 2.3.1. *Grau* de um vértice v em um grafo G indica a quantidade de arestas de G incidente em v .

Indicaremos o grau de um vértice $v \in V$ por $d(v)$. Num grafo simples (que não seja multigrafo nem tenha laços), com v vértices, o maior grau possível de um vértice é $v - 1$. Ocorre quando o vértice se conecta a todos os demais vértices do grafo.

Dentre os graus de todos os vértices de G , o menor grau é chamado *grau mínimo de G* (denotado por $\delta(G)$) e o maior grau é dito *grau máximo de G* (denotado por $\Delta(G)$). Os laços devem ser contados duas vezes no grau do vértice que o contém. Em um grafo orientado podemos distinguir o grau do vértice entre dois semigraus: o *semigrau exterior* $d^+(v)$ que é o número de arcos que partem de v e o *semigrau interior* $d^-(v)$ que é o número de arcos que chegam a v . Temos que $d^+(v) + d^-(v) = d(v)$.

Para enunciarmos um importante teorema que mostra a relação existente entre graus e arestas de um grafo, faremos primeiramente uma análise da Figura 2.12, pois essa auxiliará na compreensão deste teorema.

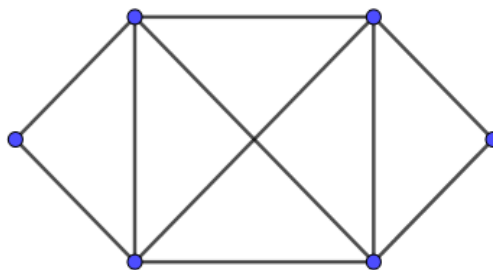


Figura 2.12 – Relação entre graus de um vértice e suas arestas.
Fonte: Adaptado de Jurkiewicz (2009).

Analisando o grafo da Figura 2.12, observa-se que existem 10 arestas interligando seus vértices, somando o grau de todos os seus vértices, temos uma soma igual a 20. Perceba que a soma dos graus de um grafo é sempre o dobro do número de arestas. Este resultado não pode ser coincidência. Vejamos o seguinte teorema:

Teorema 1 (Euler) - A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre igual ao dobro do número de suas arestas.

Isto significa que, para todo grafo $G(V; E; \Psi)$, temos:

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2.E \quad (2.1)$$

em que $|E|$ representa o número de arestas do conjunto $E(G)$.

Demonstração: A demonstração é um tanto simples. Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes. De modo que o teorema fica verificado.

Antes de enunciarmos o Corolário 1, precisamos da definição a seguir.

Definição 2.3.2. Um grafo G é dito *simples* se não possui laço ou arestas múltiplas.

A Figura 2.13 mostra três modelos de grafos simples.

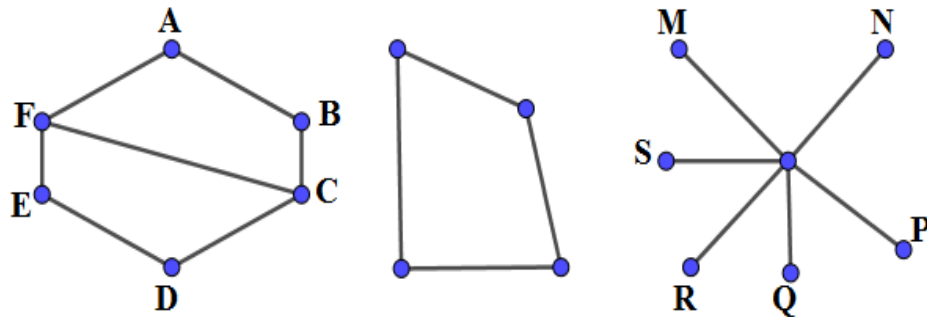


Figura 2.13 – Exemplos de grafos simples.

Agora é possível enunciar o seguinte corolário:

Corolário 1. Num grafo simples, a quantidade de vértices de grau ímpar é um número par.

Demonstração: Consideremos o grafo $G = (V, E, \Psi)$. Vamos denotar por d_i o grau do vértice i , assim, pelo teorema 1(Euler), temos:

$$2.E = \sum_{i \in N} d_i = \sum_{i \in N/d_i \text{ par}} d_i + \sum_{i \in N/d_i \text{ ímpar}} d_i \quad (2.2)$$

Separamos o somatório em duas parcelas, a primeira contendo os graus pares e a segunda os ímpares. Nota-se que a primeira parcela é par, mas, como a soma das duas parcelas é par, (igual a $2.E$), implica que a segunda parcela também é par. Perceba que, para ter uma soma de parcelas ímpares, resultando em um número par, devemos ter um número par de parcelas, concluindo assim a demonstração.

Certos grafos possuem propriedades tão características que se torna importante apresentá-los. É o caso de nosso próximo resultado.

Definição 2.3.3. *Grafo completo* é um grafo, direcionado ou não, em que todo par de vértices é ligado por uma aresta.

A Figura 2.14 é um exemplo de grafo completo.

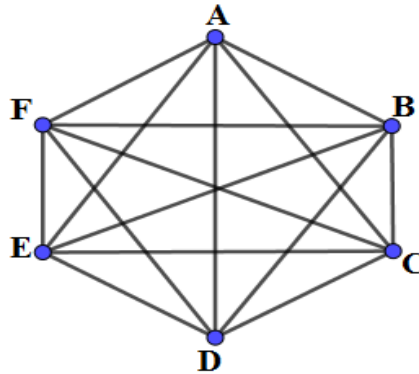


Figura 2.14 – Exemplo de grafo completo.
Fonte: Adaptado de Jurkiewicz (2009).

Observe a Figura 2.14 e note que todos os vértices do grafo possuem o mesmo grau, $d(v) = v - 1$. Em outras palavras, temos o seguinte:

Geralmente, um grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Podemos dizer que a Figura 2.14 é K_6 .

Um resultado importante para grafos completos está relacionado ao número de suas arestas.

Proposição 1. Um grafo completo com v vértices tem $E = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$ arestas.

Demonstração. Pelo teorema 1, a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre igual ao dobro do número de suas arestas. Se o grafo é completo, pela definição 2.3.3, cada vértice tem grau igual a $v - 1$. Como temos v vértices, a soma dos graus será dada por $v \cdot (v - 1)$. Mas, pelo teorema 1, temos essa soma igual a $2 \cdot E$. Assim, $2 \cdot E = v \cdot (v - 1)$, portanto, $E = \frac{v \cdot (v-1)}{2}$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1. Numa escola será realizado um torneio de futebol de salão, e cada equipe jogará com todas as demais uma única vez. Desta forma, quantos jogos serão realizados neste torneio?

Resolução: Percebe-se que esta situação pode ser representada por meio de um grafo. Basta enxergar cada equipe como sendo um vértice e cada jogo realizado como sendo uma aresta. Como cada equipe joga uma única vez com todas as demais, pode-se concluir que este grafo é

um grafo completo. Daí, podemos determinar a quantidade de jogos realizados pelo número de arestas do grafo completo de 10 vértices. Isto é:

$$|E| = \frac{v \cdot (v-1)}{2} \rightarrow |E| = \frac{10 \cdot (10-1)}{2} \rightarrow |E| = \frac{10 \cdot 9}{2} \quad \therefore |E| = 45$$

Concluindo: serão realizados 45 jogos neste torneio.

Na sequência de grafos completos, vamos em seguida introduzir mais um conceito.

Definição 2.3.4. Um grafo é *regular* (de grau k , ou ainda k -regular) quando todos os seus vértices têm o mesmo grau (k).

A Figura 2.15 mostra um grafo 3-regular, isto é, todos os vértices têm grau 3.

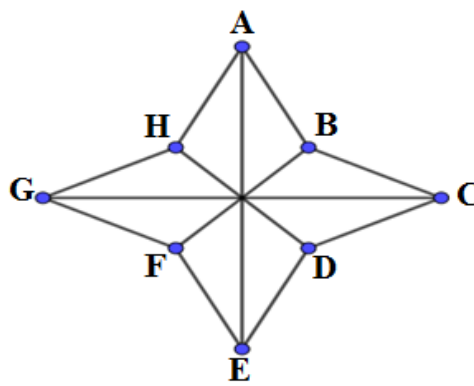


Figura 2.15 – Grafo regular.

2.4 Representação dos grafos no computador

Para utilizar grafos, precisamos saber como eles podem ser representados. Temos feito isso com esquemas gráficos, mas convém lembrar que na resolução dos modelos se usam computadores, que não entendem desenhos. Uma maneira de se organizar os dados referentes a um grafo de modo que eles possam ser introduzidos em um computador, consiste em informar para cada vértice, quais outros vértices estão relacionados a ele (ou adjacentes a ele). A seguir a definição para vértices adjacentes.

Definição 2.4.1. *Vértices adjacentes* são dois vértices conectados por uma mesma aresta.

Observe o grafo da Figura 2.16, para cada um de seus vértices descobrir quais outros vértices estão ligados a ele.

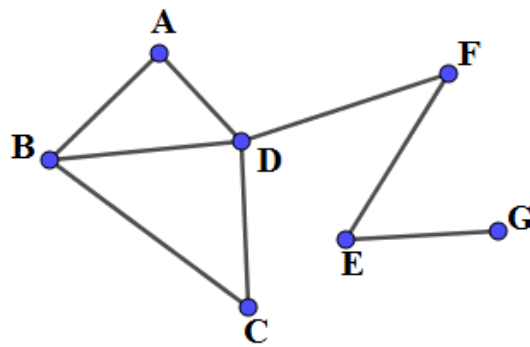


Figura 2.16 – Adjacência de vértices.

A tabela 2.1 mostra a lista de adjacência de cada vértice da Figura 2.16.

Tabela 2.1: Lista de adjacências.

Vértices	Vértices adjacentes
A	B , D
B	A , C , D
C	B , D
D	A , B , C , F
E	F , G
F	D , E
G	E

Esta lista de vértices e de seus vértices adjacentes, chama-se *lista de adjacência*. Ela indica as relações de adjacências entre os vértices. Em cada vértice há um número de arestas incidindo sobre a mesma, estas arestas são *incidentes* ao vértice, e o número de arestas incidentes sobre um vértice v determina o *grau* do vértice v , simbolizado por $d(v)$, conforme visto na definição 2.3.1.

Uma das formas mais comuns de informar uma estrutura de grafo para um computador é através de matrizes. As matrizes são tabelas nas quais dispomos elementos em linhas horizontais e em colunas verticais. Este é um assunto familiar para o aluno a partir do segundo ano do Ensino Médio, auxiliando-o a uma leitura e interpretação, bem como realizar alguns cálculos relacionados às matrizes. Abaixo a definição para matrizes dada por Iezzi *et al* (2013).

Definição 2.4.2. Seja m e n números naturais não nulos. Uma matriz do tipo ou formato $m.n$ (ou simplesmente $m \times n$) é uma tabela de $m.n$ números reais dispostos em m linhas (filas horizontais) e n colunas (filas verticais).

Para a definição de matriz de adjacência, temos:

Definição 2.4.3. Quando rotulamos os vértices de um grafo podemos associar a ele uma matriz chamada de *matriz de adjacência* do grafo. Para um grafo com n vértices (pontos) a matriz de adjacência é uma matriz quadrada do tipo $n \times n$ cujos elementos a_{ij} são definidos pela lei:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{quando o vértice } i \text{ está ligado ao vértice } j \\ 0, & \text{quando o vértice } i \text{ não está ligado ao vértice } j \end{cases}$$

Uma matriz de adjacência de um grafo é baseada na ordem escolhida para os seus vértices. Por essa razão, há $n!$ matrizes de adjacência diferentes para um grafo com n vértices, pois existem $n!$ ordenações diferentes de n vértices. A matriz de adjacência de um grafo simples é simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$, pois ambos os elementos são 1 quando v_i e v_j são adjacentes e ambos os elementos são 0 caso contrário, além disso, cada elemento a_{ii} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ também é 0, pois não possui laços.

Abaixo a representação da matriz de adjacência referente a Figura 2.16 obedecendo a ordem alfabética dos vértices.

Tabela 2.2 - Matriz de adjacência da Figura 2.16.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	1	0	0	0
B	1	0	1	1	0	0	0
C	0	1	0	1	0	0	0
D	1	1	1	0	0	1	0
E	0	0	0	0	0	1	1
F	0	0	0	1	1	0	0
G	0	0	0	0	1	0	0

Matriz de adjacência também pode representar grafos não orientados com laços e arestas múltiplas. Quando o grafo possui laços e arestas múltiplas denomina-se *pseudografo*. Um laço em um vértice a_i é representado por 1 na posição $(i; i)$. Na posição $(i; j)$, será representado por 2 se duas arestas ligam os vértices a_i e a_j desta matriz, ou melhor, será igual a n , se n arestas ligam os vértices a_i e a_j desta matriz. Todos os grafos não orientados possuem matrizes de adjacência simétricas. A Figura 2.17 representa um pseudografo e sua matriz de adjacência com os vértices ordenados.

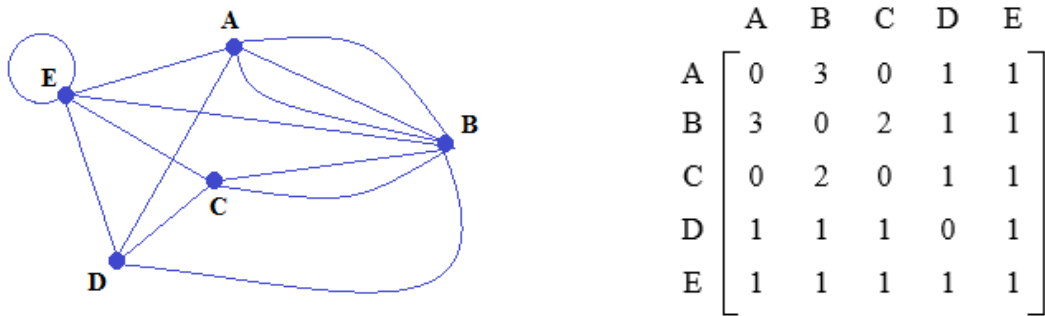


Figura 2.17 - Pseudografo e Matriz de adjacência

Outra maneira para representar grafos é através da matriz de incidência.

Definição 2.4.4. Considere G um grafo não orientado com n vértices e m arestas, seja $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ os seus vértices e $e_1, e_2, e_3, \dots, e_m$ as suas arestas, então a *matriz de incidência* é a matriz $n \times m$ definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a aresta } e_j \text{ é incidente em } v_i, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A Figura 2.18 mostra um grafo simples e sua representação por uma matriz de incidência.

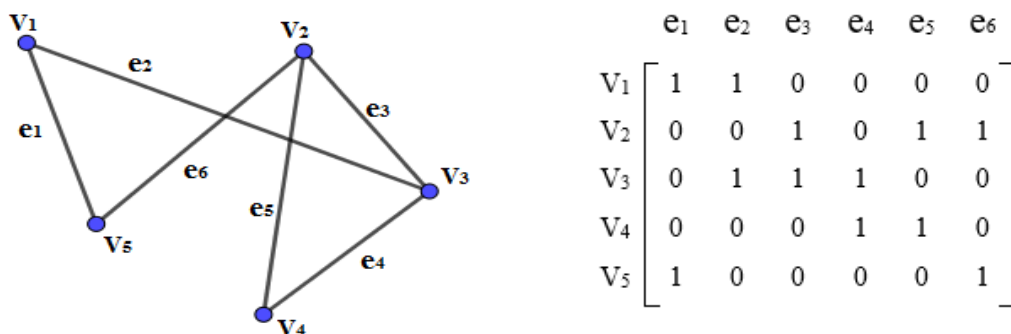


Figura 2.18 – Grafo simples e sua matriz de incidência.

Matrizes de incidência também podem ser usadas para representar grafos com arestas múltiplas e laços. As arestas múltiplas são representadas na matriz de incidência usando colunas como elementos idênticos, pois estas arestas são incidentes ao mesmo par de vértices. Os laços são representados usando uma coluna com exatamente um elemento igual a 1, correspondendo ao vértice que é incidente deste laço.

Uma situação que evidencia o poder de síntese da linguagem das matrizes é o tráfego aéreo existente entre determinadas cidades. A Figura 2.19 ilustra parte desse tráfego aéreo entre algumas cidades brasileiras, mostrando quando existe voo direto entre duas cidades operado por certa companhia aérea de uma para outra e vice-versa. Por exemplo, há uma reta ligando

as cidades de Fortaleza e Salvador o que significa que essa empresa aérea tem voo direto de Fortaleza para Salvador e vice-versa. Já as cidades de Recife e João Pessoa não são conectadas, isto significa que não existe voo direto de Recife para João Pessoa pela companhia aérea considerada e nem de João Pessoa para Recife.

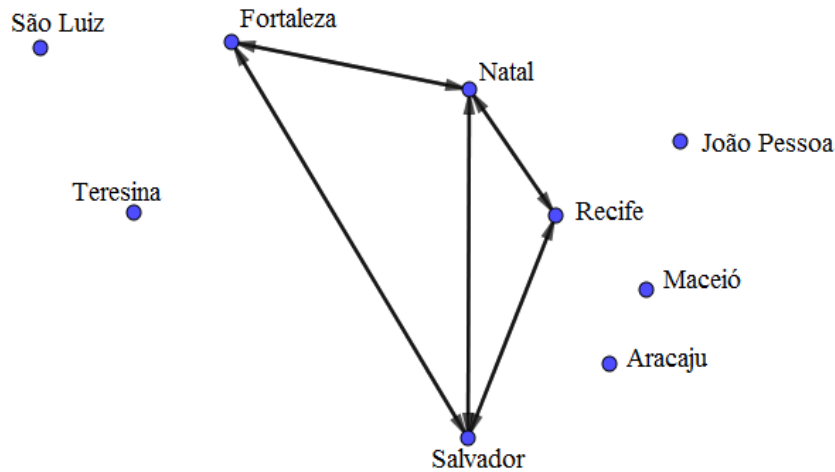


Figura 2.19 – Tráfego aéreo.

Fonte: Adaptado de Dante (2014).

Podemos usar a matriz de adjacência para resumir todas as informações que podem ser obtidas a partir da Figura 2.19.

Tabela 2.3 - Matriz de adjacência - Tráfego aéreo.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Essa matriz de adjacência resume as informações contidas no grafo da Figura 2.19, pois quando um elemento a_{ij} dessa matriz é igual a 1, significa que há voo direto operado por esta companhia, da cidade i para a cidade j e vice-versa.

Além de verificar se há voos entre duas cidades, a Teoria dos Grafos também propicia maneiras para determinar rotas mais curtas e trajetos mais eficientes para realização dos percursos entre as cidades. Para tal estudo há a necessidade de abordar os conceitos a seguir.

2.5 Caminhos

Neste momento, abordaremos alguns conceitos de subgrafos que determinam trajetos, ou seja, uma conexão entre vértices do grafo. Iniciemos com as definições.

Definição 2.5.1. Um *Passeio* (ou *percurso*) de comprimento $K \geq 1$ em um grafo G , é uma sequência $P = (u_0, u_1, u_2, \dots, u_k)$ de vértices (não necessariamente distintos) de G tal que u_{i-1} é adjacente a u_i para $1 \leq i \leq k$. O passeio P é dito *fechado* se $u_0 = u_k$, podemos chamar o passeio fechado de *circuito*.

A Figura 2.20(a) representa um passeio e a Figura 2.20(b), um circuito.

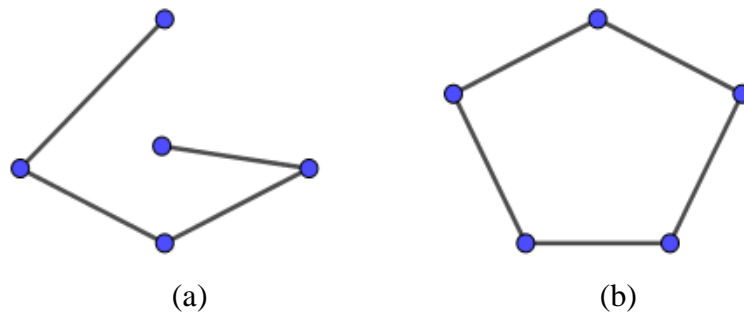


Figura 2.20 – Passeios em grafos.

Sabendo o que é um percurso em um grafo, podemos a partir desse definir o que é um caminho em um grafo.

Definição 2.5.2. Um *caminho* em um grafo é um passeio tal que todos os seus vértices são distintos.

É imediato, pela definição 2.5.2 que todo caminho é um passeio, porém, nem todo passeio é um caminho. Também não é difícil compreendermos que se há um passeio entre dois vértices de um grafo, então também há um caminho entre eles. Isto nos leva ao seguinte teorema:

Teorema 2. Se houver um passeio do vértice y ao vértice z no grafo G , onde y não é igual a z , então há um caminho em G com primeiro vértice y e último vértice z . Ou seja, se há um passeio entre dois vértices de um grafo, existe também um caminho entre os mesmos.

Demonstração:

Chame o passeio yz de $C_1 = x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_n, x_n$. Faça $y = x_0$ e $z = x_n$. Se os vértices $x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_n, x_n$ são todos distintos entre si, então C_1 e não há o que provar. Caso contrário, selecione um vértice que aparece duas vezes, faça $x_i = x_j$, onde $i < j$. Agora faça $C_2 =$

$x_0, a_1, x_1, a_2, \dots, a_{j+1}, x_{j+1}, \dots, a_n, x_n$. Desta forma, C_2 é um passeio de y para z e é mais curto do que C_1 . Se C_2 não contém vértice repetido, será necessariamente um caminho. Caso contrário, selecione um vértice repetido e proceda conforme acima. Novamente um passeio mais curto será construído.

Este procedimento terá fim num dado instante, devido cada passeio ser menor do que o anterior e o comprimento não pode ser inferior a 1. Logo, para alguns k , C_k não pode ser reduzido em comprimento. Portanto, C_k não contém vértice repetido e é necessariamente caminho.

Problemas relacionados a caminhos são comuns em Teoria dos Grafos, surgem em diversas situações cotidianas motivadas pela necessidade em se descobrir rotas mais rápidas, percursos mais curtos e gastos mínimos entre outros. Surgem então os problemas de caminho mínimo.

2.6 Problemas de Caminho Mínimo

Em uma situação qualquer, tal como consultar um mapa, à primeira vista, parece que *achar um caminho* é algo que dispensa maiores atenções, ou qualquer outro tipo de explicação. Veja o exemplo: somos turistas em certa cidade e queremos ir a um outro lugar, a um ponto turístico, a uma outra cidade, ou a um outro lugar dentro da mesma cidade. Teremos apenas que decidir o modo de transporte a utilizar – carro, ônibus, metrô, trem ou mesmo a pé. Tal simplicidade é enganosa, a menos que nossa procura de caminho envolva apenas um prazeroso passeio por uma trilha, ou em um parque.

Em situações reais, em nosso dia a dia, a questão não é tão simples assim, pelo fato que deslocamentos custam dinheiro, tal consideração nos leva a considerar os *custos* e imaginar um modo de gastar a menor quantia possível. Se o passeio for a pé pela cidade, não necessitaremos nos preocupar com a “mão” das ruas, ao passo que utilizando um carro, isto influenciará no itinerário a seguir.

Pode ocorrer também que tenhamos que *passar obrigatoriamente por um ou mais lugares*, antes de se atingir o ponto desejado. Poderá haver *várias alternativas* de destino, tais como, locais de diversão, compras ou outro desejo qualquer. A decisão final passa por diversas considerações, em geral relacionadas às distâncias e à expectativa do trânsito em tal percurso. Para realizar tal escolha, precisaremos de mais opções para escolha de *mais de um* caminho mínimo.

Podemos lidar com uma situação mais complicada, se considerarmos uma empresa de transporte que atenda a diversas cidades, ou uma empresa que tenha contrato para realizar coleta

de resíduos em determinada região, com certeza haverá interesse em conhecer um caminho de “menor custo” para utilizá-las em seus trajetos. Nessas circunstâncias, o objetivo básico em questão, na *linguagem de grafos*, via de regra, consiste em encontrar o *caminho*, um itinerário de menor custo possível, entre dois vértices quaisquer de um grafo G , direcionado ou não.

Pelo exposto acima, é fácil perceber a existência de diversas situações nas quais se deseja calcular a distância, ou o comprimento do caminho entre dois nós de um grafo. Para o conceito de distância deve-se considerar algumas restrições, tais como, ser associada a números não negativos, além de satisfazer as propriedades a seguir:

- i) $d(u, v) \geq 0$ e $d(u, v) = 0$ se e somente se $u = v$;
- ii) $d(u, v) = d(v, u)$;
- iii) $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$;

onde u, v, w são nós de um grafo (LIPSCHUTZ, 2011).

O problema do caixeiro viajante, por exemplo, busca um caminho dentro do grafo de conexões entre os vértices, em que estes vértices representam as cidades a serem visitadas, passando pelas mesmas uma única vez. Os *caminhos* têm interesse especial em problemas que envolvam transporte e fluxos, vejamos um exemplo. O grafo da Figura 2.21 representa as cidades de uma região e suas respectivas distâncias (em quilômetros):

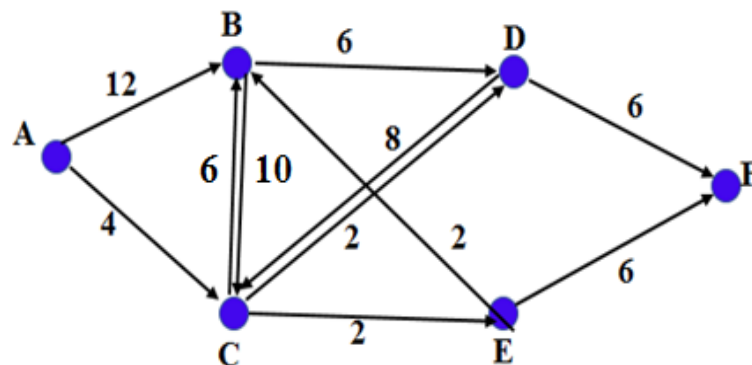


Figura 2.21 – Distâncias entre cidades.

Fonte: Adaptado de Boaventura Netto (2009).

Note que, por motivos de direção das estradas, o grafo não é simétrico. Uma distribuidora de peças de automóveis está se instalando na cidade A e gostaria de saber qual a menor distância até cada uma das cidades bem como os percursos correspondentes. Qual caminho oferece uma trajetória de menor comprimento?

Um dos algoritmos que soluciona este problema (e até hoje não se encontrou forma melhor) foi criado por Edsger Wybe Dijkstra³, em 1952. O *algoritmo de Dijkstra* pode ser descrito da seguinte forma:

“Procuramos a cidade mais próxima de A. Depois, sucessivamente, procuramos entre as cidades não visitadas aquela que tem a menor distância desde A, diretamente ou passando por alguma cidade já visitada, anotando sempre o percurso escolhido” (BOAVENTURA NETTO, 2009, p. 38).

Aqui vale destacar um fato interessante no desenvolvimento das Ciências Exatas, o desenvolvimento de uma teoria que auxilia no desenvolvimento outras teorias. No momento o que estamos estudando foi desenvolvido há algum tempo atrás, e atualmente ainda continua oferecendo soluções, e com o desenvolvimento da informática a ideia de uma solução para um problema sofre modificações. Agora em vez de se buscar um valor, um número, uma resposta (o que em muitos casos é necessário), procuramos um algoritmo, ou seja, uma série de procedimentos que nos conduzam à solução. A vantagem é que, se o problema for muito extenso, é possível programar um computador para que este realize tal algoritmo.

Iniciaremos a tarefa com o auxílio de uma tabela que identifica as distâncias entre os vértices. Para os vértices não ligados denotaremos a distância como infinita, ou suficientemente grande para não interferir no algoritmo. Usaremos o valor 1000 para representar o “infinito”.

Tabela 2.4 - Distância entre cidades.

	A	B	C	D	E	F
A	0	12	4	1000	1000	1000
B	1000	0	6	6	2	1000
C	1000	10	0	1000	2	1000
D	1000	1000	8	0	1000	6
E	1000	2	1000	1000	0	6
F	1000	1000	1000	1000	1000	0

Fonte: (BOAVENTURA NETTO, 2009, p. 38)

Inicialização: A distância de A para todos os vértices é marcada como 1000 (infinito), exceto para o próprio A (distância zero). Marcamos A com um asterisco, porque ele é o nosso ponto

³ Dijkstra nasceu em 1930, na cidade de Roterdã - Holanda, e morreu em 2002. Foi um cientista de computação e recebeu o *Turing Award* de 1972 por suas contribuições fundamentais na área de linguagens de programação.

de partida. A linha “Anterior” fica vazia, porque ainda não mensuramos a distância entre o vértice A e os demais vértices.

	A*	B	C	D	E	F
Distância	0	1000	1000	1000	1000	1000
Anterior	-	-	-	-	-	-

Pergunta: Que cidades posso alcançar diretamente a partir de A? Qual a distância até elas?

Resposta: B, com distância 12 (o que é menor do que 1000); mudamos para 12.

C, com distância 4 (o que é menor do que 1000); mudamos para 4.

Assinalamos essas respostas e suas conclusões em nossa tabela. Mais ainda, observe que a distância até C (4 unidades) não pode ser melhorada, pois a alternativa seria passar por B (12 unidades) e já teríamos “estourado” a distância. Isso quer dizer que não precisamos voltar a examinar o vértice C. Ele será *fechado* (com um asterisco *) e será o próximo ponto de partida a ser considerado.

	A*	B	C*	D	E	F
Distância	0	12	4	1000	1000	1000
Anterior	-	A	A	-	-	-

Pergunta: Que cidades posso alcançar diretamente a partir de C? Se passarmos por C qual a distância de A até elas?

Resposta: B, com distância $4 + 10 = 14$ (maior do que 12, então ficamos com 12), e E, com distância $4 + 2 = 6$ (menor do 1000, então mudamos para 6).

Para o vértice E trocamos a distância 1000 pelo valor 6, para o vértice B mantemos a distância (12) e o seu antecessor (A). O vértice não marcado com menor distância é E. Pelo mesmo critério, sua distância até A não poderá ser melhorada. Ele será fechado e será o início da próxima etapa.

	A*	B	C*	D	E*	F
Distância	0	12	4	1000	6	1000
Anterior	-	A	A	-	C	-

Pergunta: Que cidades posso alcançar diretamente a partir de E? Passando por E qual a distância de A até ela?

Resposta: B, com distância $6 + 2 = 8$ (menor do que 12, então mudamos para 8), e F, com distância $6 + 6 = 12$ (menor do que 1000, então mudamos para 12).

Prosseguindo com todas essas análises, obteremos a tabela final (todos marcados com asteriscos) permite recuperar as distâncias e os percursos. Para esta questão o melhor percurso é A – C – E – B.

Para terminar, vamos ver como fica o algoritmo, expresso formalmente.

1. Atribua valor zero à estimativa da distância mínima do vértice A (vértice inicial) e infinito às demais estimativas;
2. Atribua um valor qualquer aos precedentes (o precedente de um vértice B é o vértice que precede B no caminho de distância mínima de A para B);
3. Enquanto houver vértice aberto:
 - Seja C um vértice ainda aberto cuja estimativa seja a menor dentre todos os vértices abertos;
 - Feche o vértice C;
 - Para todo vértice D ainda aberto que seja sucessor de C faça:
 - Some a estimativa do vértice C com o custo do arco que une C e D;
 - Caso esta soma seja melhor que a estimativa anterior para o vértice D, substitua-a e anote C como precedente de D.

Problemas de caminho mínimo são típicos em Teoria dos Grafos, entre alguns podemos citar o problema do carteiro chinês, que consiste basicamente em realizar o trajeto mais eficiente em determinado percurso, tal percurso é passível de ser modelado por um grafo de ruas de um bairro. O problema em si usa os resultados de Euler para grafos ditos “eulerianos”⁴, como estratégia para minimizar as vias que seriam repetidas (no caso, seriam a de menor extensão) quando se pretende cobrir o trecho de forma completa – como em um serviço de entrega de correspondências, por exemplo.

Situações típicas da Teoria dos Grafos são capazes de proporcionar por meio de uma estratégia didática por parte dos professores, o desenvolvimento de habilidades importantes e desejáveis para alunos do Ensino Médio, tais como: modelar problemas por meio de grafos, explorar a

⁴ Sobre Grafos Eulerianos consultar o Apêndice A.

questão verificando se essa possui ou não possui solução, havendo solução, quantas soluções possíveis existem, aluno também pode conjecturar sobre as condições gerais para uma determinada solução.

Após abordar alguns conceitos iniciais desta teoria, é aconselhável apresentar aos estudantes do Ensino Regular alguns modelos de grafos e suas aplicações no dia a dia. Isto será realizado no capítulo a seguir.

3 Modelos de grafos

Os grafos podem representar uma variedade enorme de situações, propiciando uma análise detalhada do problema em questão e auxiliando em tomadas de decisões. Por esses motivos serão apresentados alguns modelos de grafos em alguns campos de estudo.

3.1 Grafos de relacionamento

Pode-se usar modelos de grafos para representar diversas relações entre pessoas, grupos, organizações, comunidades, sociedades, etc. Por exemplo, um grafo simples pode indicar se duas pessoas se conhecem, ou seja, se elas têm algum tipo de relacionamento entre si. Cada pessoa é representada por um vértice, e uma aresta não direcionada é usada para unir duas pessoas que tenham algum tipo de relacionamento. Um grafo simples também informa se existe relações comerciais entre duas empresas. Cada empresa é representada por um vértice, e uma aresta não direcionada é usada para conectar duas empresas caso essas mantenham relações comerciais entre si. Uma das coisas mais interessantes de se observar em um grafo de relacionamento são suas diferentes interpretações para arestas, veja por exemplo: uma aresta pode representar amizade entre indivíduos, mas ela também pode representar relações profissionais, trocas de bens, comunicação, relações românticas ou sexuais, ou até mesmo outros tipos de conexões (NEWMAN, 2010).

3.2 Grafos em epidemia

Além de sua importância para estudos sociais, compreender a estrutura desses grafos é importante também para os epidemiologistas, uma vez que estes podem dar informações sobre a propagação de alguma epidemia. A comunidade científica tem desempenhado um importante papel no sentido de compreender e prever o exato caminho que esses agentes patogênicos seguem, e como eles se propagam (BARABÁSI, 2015).

O vírus HIV, o patógeno responsável pela AIDS, propaga-se principalmente através das relações sexuais. Conseqüentemente, analisando um grafo de relacionamento sexual é possível identificar as pessoas que se relacionaram sexualmente entre si. O conhecimento da estrutura de um grafo de contato sexual permite obter informações importantes sobre as estratégias a serem adotadas por agentes de saúde pública, para que os mesmos possam adotar medidas que auxiliem na erradicação de doenças sexualmente transmissíveis e, em especial, o *HIV* (LATORA *et al*, 2006).

3.3 Internet

A *Internet* é uma rede global de conexões de dados que conecta computadores e outros sistemas de informações em conjunto. Nesta os vértices são computadores e as arestas são conexões entre eles, através de cabos de fibra óptica ou linhas telefônicas, ou *wireless* (sem fio). Um fato curioso é que, embora a *Internet* seja uma rede artificial e cuidadosamente projetada, não sabemos exatamente qual é a sua estrutura, já que foi construída por muitos grupos diferentes de pessoas com um conhecimento limitado das ações de cada um e um pequeno controle centralizado (NEWMAN, 2010).

Podemos destacar uma série de razões práticas pelas quais podemos nos interessar pela estrutura da rede da *Internet*. A função da Internet é o transporte de dados entre computadores (e outros dispositivos) em diferentes partes do globo, isto é feito dividindo os dados em pedaços ou pacotes e transmitidos de vértice para vértice através da rede até chegarem ao seu destino. Conhecendo a estrutura do grafo que modela a rede, podemos abordar muitas questões de relevâncias práticas: como escolher a rota pela qual os dados são transportados? A rota mais curta é necessariamente a mais rápida? Se não, então, qual é, e como encontrá-la? O que acontece quando um vértice ou uma aresta falha (o que eles fazem com alguma regularidade)? Como podemos elaborar esquemas para encaminhar falhas? (NEWMAN, 2010).

3.4 Grafos estruturas viárias

Em grandes cidades como, por exemplo, São Paulo ou Rio de Janeiro, que possuem uma variedade gigantesca de ruas e caminhos, como é possível descobrir o menor trajeto entre dois pontos? Os grafos são indicados para modelar estruturas viárias em qualquer cidade, os vértices representam as intersecções entre as ruas ou avenidas, e as arestas são as avenidas ou ruas da cidade. Arestas não direcionadas indicam avenidas (ou ruas) de duplo sentido para o tráfego de veículos, já as arestas direcionadas indicam avenidas de sentido único para o tráfego. Quando surge no mesmo grafo arestas não direcionadas e arestas direcionadas, essas indicam a presença de avenidas tanto de mão única como de sentido duplo para trafegar.

No próximo capítulo serão abordadas algumas sugestões de atividades passíveis de serem aplicadas a estudantes do Ensino Médio, com o objetivo de introduzir os conceitos iniciais da Teoria dos Grafos e suas aplicações.

4 Grafos no Ensino Médio: propostas de atividades

Diversos problemas do nosso cotidiano podem ser modelados através da Teoria dos Grafos, disponibilizando ao aluno recursos para resolução de problemas relacionados ao seu dia a dia, como por exemplo, o serviço de entrega de correspondências pelo correio, no qual se busca um itinerário que permita fazer a entrega no menor tempo possível. Pela facilidade em conectar o que se aprende na sala de aula às situações além dos muros escolares, consideramos que a introdução à Teoria dos Grafos é um caminho para aproximar o aprendizado matemático da sala de aula aos problemas do cotidiano do aluno.

Salientamos também que nas *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* encontram-se alguns indicativos para a abordagem de grafos neste nível de escolaridade.

No ensino médio, o termo “combinatória” está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos. Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver. Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler: dado um conjunto de sete ilhas interligadas por pontes, a pergunta que se coloca é: “Partindo-se de uma das ilhas, é possível passar pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez?” Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo (BRASIL, 2006, p.94).

Seguindo essas orientações, disponibilizaremos nesta seção algumas propostas de atividades voltadas para estudantes da Escola Básica, tendo como foco principal a apresentação dos conceitos iniciais sobre a Teoria dos Grafos. Porém, antes de apresentarmos tais atividades, mostraremos como esse assunto (grafos) está inserido nas propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

4.1 Teoria dos Grafos e Parâmetros Curriculares Nacionais

Nesta seção serão apresentados alguns argumentos que justificam a introdução do ensino de Teoria dos Grafos para alunos do Ensino Médio, e como este tema se encaixa nas orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), desenvolvido pela Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação (MEC).

Quando nos referimos aos Parâmetros Nacionais para o ensino da Matemática no Ensino Médio, vale destacar que é desejável que a abordagem dos temas não esteja concentrada apenas no tratamento formal da disciplina, mas que desenvolva atividades mostrando a articulação entre os saberes matemáticos e outras disciplinas e campos de atuação. Ou seja, com o advento dos

Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino da Matemática no Ensino Médio fica sugerido que ensino da Matemática não deve estar direcionado apenas ao estudo teórico, deve entre outras, capacitar o educando para compreender e atuar no mundo em variados contextos da realidade que o cerca. Isto é, quando nos referimos aos estudos da Matemática, há a necessidade de considerar que longe, fora dos muros da Unidade Escolar os alunos terão à sua frente as mais diversas situações problemas e para chegarem a uma resposta, devem mobilizar conhecimentos e estratégias adquiridas ao longo de sua carreira estudantil (BRASIL, 2006).

A Teoria de Grafos não é conteúdo específico (obrigatório) para o educando do Ensino Médio em contraste, por exemplo, com a Trigonometria ou a Análise Combinatória, que são conteúdos obrigatórios a este nível de escolaridade. Porém, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL 2002, p. 23-25), para a área da Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, priorizam como meta três grandes competências que devem ser desenvolvidas até o final deste ciclo:

- i) **Representação e comunicação**, na qual o educando desenvolve sua capacidade leitora, interpretativa e produção de textos.

Esta competência se encaixa em Teoria dos Grafos, pois, considerando apenas como exemplo o problema das pontes de Königsberg, houve a necessidade de uma análise do problema, e mesmo sem encontrar uma solução, os habitantes da cidade seguiram discutindo o enigma. Neste ponto, o aluno pode expressar seu raciocínio para resolução do problema antes mesmo de conhecer um método, foi o que ocorreu com os moradores de Königsberg antes de conhecerem a técnica desenvolvida por Euler, e para desenvolver essa técnica usou-se de uma representação (grafo) e da comunicação.

- ii) **Investigação e compreensão**, esta competência está relacionada à criatividade e à persistência na busca por soluções, o aluno tenta resolver e explica quais procedimentos seguiu, quais teoremas ou algoritmos foram utilizados. Na apresentação e discussão com outros alunos aumenta ainda mais o leque de suas percepções e compreensão.

Neste sentido a Teoria dos Grafos disponibiliza uma série de problemas que auxiliam no desenvolvimento de habilidades importantes para estudantes do Ensino médio, como por exemplo, modelar problemas através de um grafo, analisar questões focando a existência ou a não existência de soluções, e conjecturar sobre as condições para resolução de um problema. Entre alguns problemas podemos citar

a determinação de trajetos mais curtos e eficientes, objetivando economia de recursos e de tempo (BOAVENTURA NETTO, 2009).

- iii) **Contextualização**, permite levantar situações muito motivadoras para o aluno, permitindo que ele reflita sobre questões do mundo que o cerca.

Nesse contexto, os grafos estão repletos de situações que representam muitos problemas do mundo real que podem ser trabalhados e resolvidos por maneiras diferentes. Por exemplo, descobrir a rota mais econômica para um caminhão de coleta de resíduos, melhor percurso para entrega de botijões de gás à domicílio no menor tempo possível, otimização de custos na distribuição de produtos ou mercadorias em uma empresa. Salientamos que já existem algoritmos desenvolvidos para solucionar problemas desta natureza, entre alguns podemos citar o algoritmo de Dijkstra ou o algoritmo de Floyd (BOAVENTURA NETTO, 2009).

Os estudos de grafos podem ser amplamente explorados em diversas áreas do conhecimento, entre elas: Biologia quando se estuda as conexões entre dois neurônios, Tecnologia ao se elaborar uma rede de transmissão de energia, Química ao se estudar as ligações entre átomos, Física quando se estuda as Leis de Kirchhoff e na Matemática pode ser explorada na geometria plana, no cálculo das diagonais de um polígono, em matrizes quando representamos um grafo por sua matriz de adjacência, só para citar alguns exemplos. Temos um tema interdisciplinar, e de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (2000), para o Ensino Médio:

A interdisciplinaridade deve ir além da mera justaposição de disciplinas e, ao mesmo tempo, evitar a diluição delas em generalidades. O conceito de interdisciplinaridade fica mais claro quando se considera o fato trivial de que todo conhecimento mantém um diálogo permanente com outros conhecimentos, que pode ser de questionamento, de confirmação, de complementação, de negação, de ampliação, de iluminação de aspectos não distinguidos (PCN, 2000, p. 75).

Embora não exista material amplamente divulgado sobre Teoria dos Grafos, e também pelo fato de tal matéria não estar incluída na grade de formação acadêmica dos professores em diversas instituições de ensino superior, incluir um trabalho com o tema exigirá então uma certa “dose” de ousadia e determinação por parte do professor que deseja apresentar uma prática docente consistente e satisfatória aos alunos.

Na próxima seção apresentaremos propostas de atividades plausíveis de serem desenvolvidas com estudantes do Ensino Médio.

4.2 Sugestões de atividades

Apresentaremos nesta seção uma sequência de atividades plausíveis de serem apresentadas aos alunos na Educação Básica com abordagem dos conceitos iniciais da Teoria dos Grafos. As propostas de atividades têm como objetivos despertar no educando a curiosidade e o interesse pela Teoria dos Grafos.

4.2.1 Atividade 1

Objetivos Gerais: explorar os conceitos iniciais da Teoria dos Grafos, tais como as noções de vértices, arestas, adjacência e percurso.

Objetivos específicos: que o aluno relacione cada ponto como sendo um vértice, e a reta que conecta dois pontos (vértices), como sendo uma aresta. Descubra também que, dois vértices ligados pela mesma aresta, são considerados vértices adjacentes.

Público alvo: por ser simples e desafiadora, esta atividade pode ser proposta a estudantes do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Tempo para realização da tarefa: duas horas/aula de 50 minutos cada uma.

Desenvolvimento da aula: dividir a sala em grupos de no máximo três alunos, desta forma, seus integrantes podem discutir estratégias a serem seguidas no intuito de solucionar a questão. Utilizarão apenas caderno e lápis.

Tarefa: O aluno deve passar o lápis por todos os pontos da Figura 4.1 sem levantar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho.

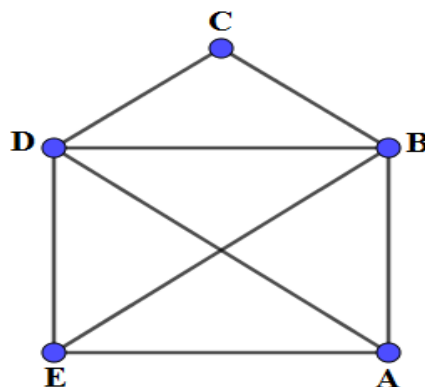


Figura 4.1 – Ponto a ponto.

Fonte: adaptado Jurkiewicz (2009).

Após realizar a tarefa o aluno responderá aos seguintes itens:

- Qual sequência de letras você seguiu?
- Por qual ponto você iniciou?

- c) Em qual ponto terminou?
- d) Refaça a tarefa seguindo uma sequência diferente da anterior.
- e) Qual sequência obteve agora?
- f) Por onde iniciou?
- g) Em qual ponto terminou?

Discussão após a tarefa: o professor pode indagar os alunos sobre alguns aspectos da atividade. Vejamos:

- i) quais são as regras apresentadas no enunciado do problema?
- ii) quais são os dados fornecidos para a realização da atividade?
- iii) existe alguma restrição?
- iv) existe alguma condição para que o problema seja resolvido?

Avaliação: através de uma sondagem durante a realização da tarefa, verificar se o aluno já compreende os conceitos propostos pela atividade.

4.2.2 Atividade 2

A atividade 2 está dividida em duas partes. Na primeira parte o aluno deve realizar duas tarefas basicamente idênticas, mudando apenas o formato da figura. Na segunda parte, a partir de uma situação familiar ao aluno (torneio esportivo), o aluno deverá usar um modelo de grafo para resolver a questão.

Primeira parte da atividade 2

Objetivo geral: abordar conceitos elementares de teoria dos grafos, tais como, grau de cada vértice, soma dos graus de cada vértice, quantidade de arestas, número de vértices de grau ímpar.

Objetivos específicos: identificar vértices e arestas de um grafo. Descobrir a relação existente entre a soma dos graus de um vértice com o número de arestas. Através de uma análise mais detalhada perceber quando um grafo é euleriano

Público alvo: esta atividade pode ser realizada por estudantes do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Tempo para realização das duas tarefas iniciais: sugerimos duas horas/aula de 50 minutos cada uma.

Desenvolvimento da aula: esta atividade pode ser desenvolvida de forma individual ou em duplas, utilizando apenas caderno e lápis.

Tarefa 1: Dada a Figura 4.2, analisá-la, em seguida, preencher o quadro da Tabela 4.1 com as informações solicitadas.

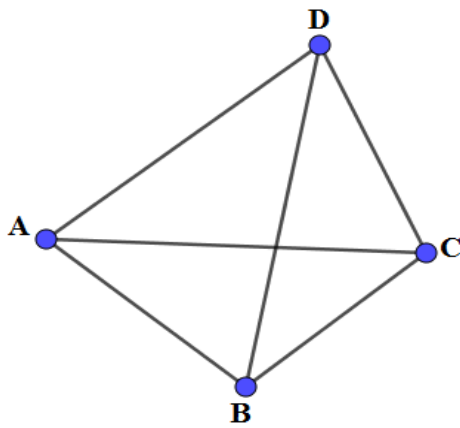


Figura 4.2 – Desafio I.

Tabela 4.1- Quadro 1.

Vértice	Grau
A	
B	
C	
D	
Nº de arestas	
Vértices com grau ímpar	

Após preencher o quadro 4.1 responda: é possível visitar todos os vértices passando por todas as arestas uma única vez? Justifique.

Tarefa 2: Dada a Figura 4.3, analisa-la, em seguida preencher o quadro da Tabela 4.2 com as informações solicitadas.

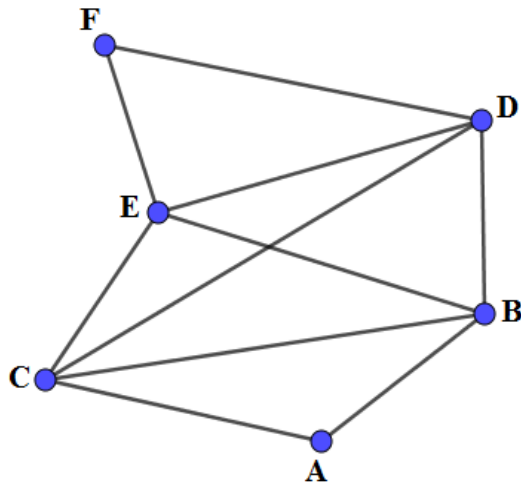


Figura 4.3 – Desafio II.

Tabela 4.2 - Quadro 2.

Vértice	Grau
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
Nº arestas	
Vértices com grau ímpar	

Após preencher o quadro 4.2 responda: é possível visitar todos os vértices passando por todas as arestas uma única vez? Justifique.

Discussão após realização das duas tarefas:

i) você classificaria os dois grafos dessa atividade em euleriano ou semieuleriano? Justifique.

ii) é possível descobrir uma relação entre a soma dos graus de cada vértice e o número de arestas? Explique.

Avaliação: verificar se o aluno compreendeu os conceitos de grau de um vértice, cálculo do número de arestas a partir da soma dos graus de todos os vértices. Observar se o aluno sabe identificar um grafo euleriano.

Segunda parte da atividade 2

Dentro da unidade escolar é comum gincanas esportivas em determinados períodos do ano letivo. Cada sala inscreve suas equipes nas modalidades que estão sendo oferecidas, tais como futebol de salão, vôlei e *handball*. O confronto entre as equipes é organizado pelos componentes do grêmio estudantil em conjunto com os representantes de salas. É interessante que o aluno descubra que um modelo de grafos pode fornecer informações que auxiliam no desenvolvimento dos jogos.

Objetivo geral: Simulando um torneio esportivo contextualizar uma situação que faz parte do calendário escolar do aluno.

Objetivos específicos: Relacionar cada vértice como sendo uma equipe participante do torneio. Identificar quantos jogos cada equipe já realizou, bem como descobrir quais equipes ainda não jogaram entre si. Por fim, calcular quantos jogos serão realizados.

Público alvo: esta atividade pode ser realizada por estudantes do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Tempo para realização dessa tarefa: São sugeridas duas horas/aula de 50 minutos cada uma.

Desenvolvimento da aula: esta atividade pode ser desenvolvida em grupos com no máximo 3 alunos, permitindo que troquem informações entre si. Sugerimos o uso de cartolina para realização desta atividade, desta forma o aluno poderá expor a tabela de jogos do torneio.

Tarefa 3 Para a realização dos jogos estudantis em uma unidade escolar, seis equipes se inscreveram para o torneio de vôlei, 1º A, 1º B, 2º A, 2º B, 3º A e 3º B. O grafo da Figura 4.4 indica quais equipes já jogaram entre si.

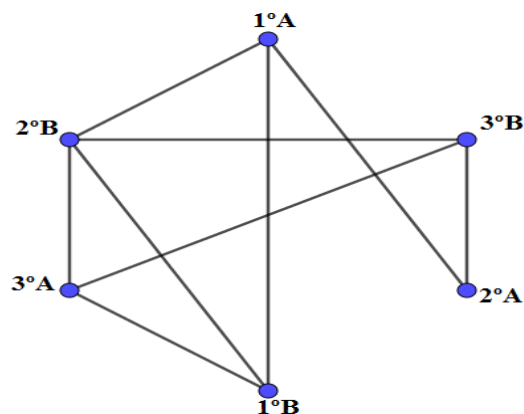


Figura 4.4 – Torneio de vôlei.

Analisar o grafo da Figura 4.4 e responder aos itens abaixo.

- a) Quais são os vértices do grafo? Represente-os na forma de conjuntos.
- b) Quais são suas arestas? Indique-os na forma de conjuntos.
- c) Quais são as arestas incidentes sobre o vértice $1^{\circ}A$?
- d) Indique o grau de cada um dos vértices.
- e) Qual é a soma de todos os graus?
- f) Qual é o número de arestas?
- g) O que você observou nos valores encontrados dos dois últimos itens? Será que é coincidência?

Discussão após realização das tarefas.

- i) analisando o grafo da Figura 4.4, é possível descobrir quantos jogos já foram realizados?
- ii) e quantos jogos ainda restam até o final do campeonato?

Avaliação: através de uma sondagem durante a realização da tarefa, verificando os procedimentos do aluno na realização do exercício, e se esse já compreende os conceitos propostos pela atividade.

4.2.3 Atividade 3

É comum os serviços de entrega via correios em qualquer cidade do nosso país. Vale observar que um carteiro quando inicia seu trabalho em determinado bairro, ele não percorre a mesma rua duas vezes. Tal percurso pode ser modelado através de um grafo. Veja a atividade a seguir.

Um carteiro, deslocado para trabalhar em uma região que não conhecia, representada pela Figura 4.5, quer descobrir um percurso para entrega das correspondências diárias em que, saindo do posto dos Correios, passe por todas as ruas, nunca passe por trecho de rua (entre duas esquinas consecutivas) pelo qual já tenha passado e, quando realizar a última entrega, já esteja voltando ao posto inicial. Para tal região, isto é possível?

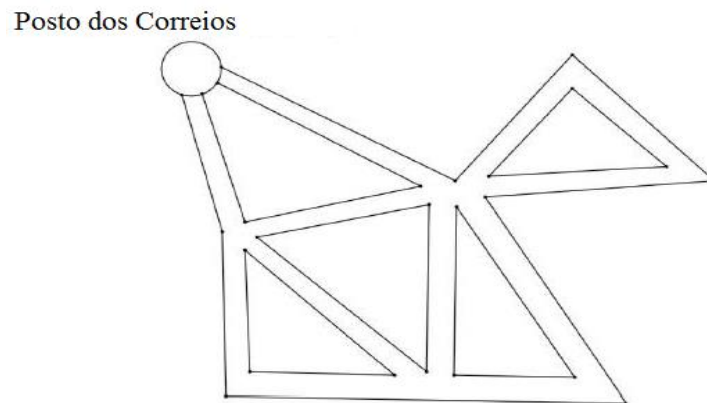


Figura 4.5 – Correios.
Fonte: Extraído de Jurkiewicz (2009).

Objetivo geral: propiciar ao aluno situações do mundo real, e esse perceber que muitos problemas do cotidiano podem ser modelados através de grafos.

Objetivos específicos: capacitar o aluno para compreender e estruturar problemas do mundo real através de um grafo, no problema em questão, reconhecer que cada esquina representa um vértice e cada rua, uma aresta.

Público alvo: esta atividade pode ser realizada por estudantes do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Tempo para realização dessa tarefa: são sugeridas duas horas/aula de 50 minutos cada uma.

Desenvolvimento da aula: esta atividade será dividida em duas aulas de 50 minutos cada uma. Para a primeira aula, utilizando a folha do caderno, sugerir ao educando que estruture o mapa acima através de um grafo. Na segunda aula, conduzir a turma para a sala de informática e orientá-los a realizar uma pesquisa sobre problemas do mundo real que podem ser modelados através de grafos.

Discussão após realização da tarefa.

- i) após representar o problema através de uma estrutura de grafo, escrever a sequência de pontos (esquinas), em ordem, para representar a solução que o grupo encontrou para esta situação. Quantas sequências diferentes foram encontradas?
- ii) após pesquisa na Internet solicitar que os alunos exponham os resultados encontrados.

Avaliação: verificar através de uma sondagem durante a realização da tarefa eventuais dúvidas que possam surgir, verificar a participação de cada aluno na atividade.

4.2.4 Atividade 4

Dados da Prefeitura do Município de São Paulo, diz que a cidade gera, em média, 18 mil toneladas de lixo diariamente. Desse total, 10 mil toneladas diárias são resíduos domiciliares. Diariamente é percorrida uma área de mais de 1.500 km² e estima-se que mais de 11 milhões de pessoas são beneficiadas pela coleta (PMSP). O percurso a ser realizado pelo veículo coletor de resíduos, de modo que este realize o trabalho no menor tempo possível, pode ser idealizado através de um grafo.

Objetivo geral: a partir de um modelo do mundo real, o aluno descobrir que existem informações importantes numa estrutura de grafos, entre eles o custo e o tempo.

Objetivo específico: a partir da análise de uma situação real, o estudante decidir sobre o melhor percurso a ser realizado por um caminhão coletor de resíduos, visando economia de custo e do tempo para realização da tarefa.

Público alvo: esta atividade pode ser realizada por estudantes do 1º, 2º e 3º ano do Ensino Médio.

Tempo para realização dessa tarefa: sugerimos três horas/aula de 50 minutos cada uma.

Desenvolvimento da atividade: I) realizar a primeira aula na sala de informática, alunos organizados em duplas, solicitar que realizem uma pesquisa sobre a produção de resíduos em seu município, e a localização dos aterros sanitários que recebem estes resíduos. Registrar as informações obtidas no caderno.

II) para a segunda aula, novamente em duplas, responder às questões solicitadas no problema.

III) para a terceira aula, na sala de informática, propor que os alunos utilizem um algoritmo para descobrir o menor percurso a ser realizado pelo caminhão coletor. Apresentar o menor caminho encontrado.

Tarefa

Um caminhão parte de um aterro sanitário A, realiza a coleta de resíduos em cinco bairros distintos e retorna ao ponto de partida. Todos os bairros estão interligados entre si por alguma rua ou avenida. O grafo da Figura 4.6 indica as possibilidades para os trajetos do caminhão coletor, informa o tempo de deslocamento, em minutos, entre os bairros. Por questões de economia, deseja-se determinar um trajeto que possa ser realizado no menor tempo possível.

Com base nessas informações, responda.

- Qual o grau de cada vértice?
- Quantas arestas este grafo possui?
- Considerando que o percurso $ABCDEFA$ e $AFEDCBA$ são simétricos, isto é, representam o mesmo valor para a variável *tempo*. Considere também que o motorista demore 90 segundos para analisar cada percurso possível, descartando a sua simétrica, determine o tempo mínimo necessário para o motorista verificar todos os trajetos possíveis.

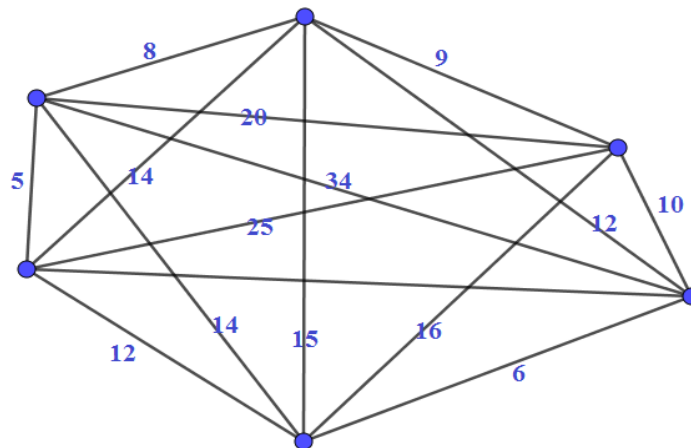


Figura 4.6 – Coleta de resíduos.

Discussão após realização da tarefa.

Discutir sobre a importância de modelos matemáticos em problemas de otimização de custos. Relacionar a situação proposta nesta atividade com caminhos euleriano. Pode até ser sugerido, como forma de aprofundamento, que observem a área de Pesquisa Operacional e seu papel na resolução de problemas de otimização.

Avaliação: verificar através de uma sondagem durante a realização da tarefa, a participação de cada aluno na atividade, responder a eventuais dúvidas dos estudantes.

4.2.5 Atividade 5

Na contextualização de problemas, o modelo matemático adotado pelo aluno lhe permitirá obter respostas para a questão a ele associado. A modelagem permite simplificar uma realidade com a qual pretendemos trabalhar, construída de modo a conter informações que mais nos interessam e de forma que permita obter as respostas de que necessitamos. A próxima tarefa conduz o aluno a desenvolver um modelo de grafo para obter as respostas.

Objetivo geral: a partir de uma situação de sala de aula e utilizando um modelo de grafo, o aluno deverá elaborar sua respectiva matriz de adjacência.

Objetivo específico: analisando a matriz de adjacência, o estudante perceber que esta resume todas as informações contidas no grafo que a originou.

Público alvo: esta atividade deverá ser desenvolvida com alunos do 2º e 3º ano do Ensino Médio, pois esses já possuem conhecimento sobre matizes.

Tempo para realização dessa tarefa: sugerimos duas horas/aula de 50 minutos cada uma.

Desenvolvimento da atividade: sugerimos que os alunos utilizem cartolina para representar seus respectivos grafos e matrizes de adjacência. Explicar aos alunos que neste modelo, cada estudante faz trabalho consigo mesmo, em termos de grafos cada estudante fará uma curva iniciando nele e voltando para ele.

Atividade:

“Cada aluno da sala deve elaborar uma lista contendo o nome dos colegas com quem já realizou trabalhos juntos”.

Discussão após realização da tarefa.

Explicar por que a matriz de adjacência de um grafo é uma matriz simétrica.

Avaliação: verificar através de uma sondagem durante a realização da tarefa, a participação de cada aluno na atividade, auxiliar os alunos no caso de eventuais dúvidas.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos um texto introdutório abordando de forma simples e concisa os conceitos básicos da Teoria dos Grafos, de forma que possa ser utilizado por alunos do Ensino Médio. Esses conceitos foram apresentados por meio de exemplos e resolução de atividades, mostramos a variedade de aplicações desta referida teoria. As atividades foram desenvolvidas gradualmente de forma que uma servisse de base para a próxima, contribuindo para que iniciantes no assunto consigam compreender e aplicar grafos na resolução de problemas.

Neste trabalho consideramos como ponto positivo a abordagem de situações condizentes com o cotidiano do aluno, tal como o torneio esportivo, plausível de ser modelado através de um grafo. Pela maturidade adquirida ao longo dos anos, o discente do Ensino Médio está capacitado para compreender e aplicar esta teoria na resolução de problemas. Outra vantagem deste trabalho está na abordagem de situações não tão comuns ao cotidiano do estudante, conduzindo-o à reflexão e a conjecturar sobre possíveis soluções. Um exemplo é o problema das pontes de Königsberg, marco inicial da Teoria dos Grafos. Também destacamos como fator positivo a conexão entre grafos e outras áreas de estudo, e até mesmo com a própria matemática. Através do exemplo em que abordamos voos diretos entre algumas capitais de nosso país, mostramos a conexão entre grafos e Matrizes. Um fator negativo que apontamos neste trabalho reside no fato da não abordagem de alguns conceitos e definições, entre eles os conceitos de Grafos Bipartidos, Isomorfismo, Árvore e Ciclos Hamiltonianos.

Frisamos também que as Redes Complexas são a base para compreensão e análise de um Sistema Complexo, porém para compreendermos tanto um, quanto o outro, precisamos nos desenvolver na Teoria dos Grafos, a base matemática para representar as redes. Futuramente, caso o estudante do Ensino Médio queira iniciar sua jornada em Sistemas Complexos, já terá adquirido um certo conhecimento a respeito desses sistemas.

Esperamos com o desenvolvimento deste trabalho aguçar a curiosidade dos alunos, professores ou simplesmente leitores, a se aprofundarem nos estudos desta fascinante teoria. Estamos cientes de que as pesquisas em Teorias dos Grafos não findam por aqui, logo, deixamos espaços para aprimoramento deste trabalho, seja por sugestões de novas atividades ou abordagem de conceitos não contemplados até aqui, de forma a contribuir para o enriquecimento do ensino da matemática em nossas unidades escolares.

Referências

- ALBERT, Réka.; BARABÁSI, Albert-Lászlo. **Statistical Mechanics of Complex Networks**. Department of Physics, University of Notre Dame, Indiana: The American Physical Society, 1982.
- BARABÁSI, Albert-Lászlo.; Réka, Albert. **Emergence of Scaling in Random Networks**. Science, v. 286, p. 509-512, 1999.
- BARABÁSI, Albert-Lászlo. **Network Science**. Networksciencebook, 2015. Disponível em: < [Http://barabasi.com/networksciencebook/](http://barabasi.com/networksciencebook/)> acesso em 12 fev. 2017.
- BOAVENTURA NETTO, Paulo Oswaldo.; JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos: Introdução e Prática**. São Paulo: Editora Blucher, 2009.
- BONDY, John Adrian.; MURTY, U. S. R. **Graph Theory with Applications**. Canadá: University of Waterloo, Fifth Printing, 1982.
- BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, p. 23-32, 2002.
- BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, v. 2, p. 69-96, 2006.
- BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, p. 40-42, 1998.
- BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, p. 4-16, 2000.
- COVEN, Reuven.; HAVLIN, Shlomo. **Complex Networks – Structure Robustness and Function**. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

JÚNIOR, Ivail Muniz. **Encontrando, minimizando e planejando percursos: Uma introdução à Teoria dos Grafos no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado. Prof. Orientador: D.Sc. Samuel Jurkiewicz. CEFET-RJ, 2007.

LATORA, Vito.; NYAMBA, André.; SIMPORE, Bahiré.; DIANE, Sandwidi.; SYLVÉRE, Bukiki.; MUSUMECI, Salvatore. **Network of Sexual Contacts and Sexually Transmitted HIV Infection in Burkina Faso.** Journal of Medical Virology, v.78, p.724–729, 2006.

LIPSCHUTZ, Seymour.; LIPSON, Marc. **Álgebra Linear.** 4. ed. São Paulo: Bookman, 2001.

MITCHELL, Melanie. **Complexity: A Guided Tour.** Oxford: Oxford University Press, 2009.

MILGRAM, Stanley.; **The Small World Problem.** Psychology Today, v.1, nº 1, p. 61-67, 1967.

NEWMAN, Mark E. J.; **Networks: An Introduction** – University of Michigan and Santa Fé Institute, United States: Oxford University Press Inc., 2010.

NEWMAN, Mark E. J.; **The Structure and Function of Complex Networks.** SIAM Review. V. 45, n. 2, p. 167-

STROGATZ, Steven H.; **Exploring Complex Networks.** Insight Review Articles. Nature256. 20 jan. 2003. v. 8. p. 271, março 2001. Disponível em: www.nature.com acesso 02 ago.17.

VARELLA, Drauzio.; **Drauzio Entrevista: Doenças e Sintomas.** Entrevista: Esquizofrenia. Publicado em 11 Jan. 2012. Disponível em <https://drauzioarella.com.br/letras/e/esquizofrenia> Acesso 21 abril 2017.

Apêndice A

Em geral, problemas relacionados a transportes está associado à necessidade de encontrar trajetos de menor comprimento, proporcionando desta forma economia de tempo e dinheiro. Problemas como esses podem ser modelados através dos grafos eulerianos, é o que estudaremos no item a seguir.

A.1 Grafos eulerianos

Voltando ao primeiro problema de teoria dos grafos, quando da visita de Euler à cidade de *Königsberg*. O grafo associado ao problema é o da Figura A.1.

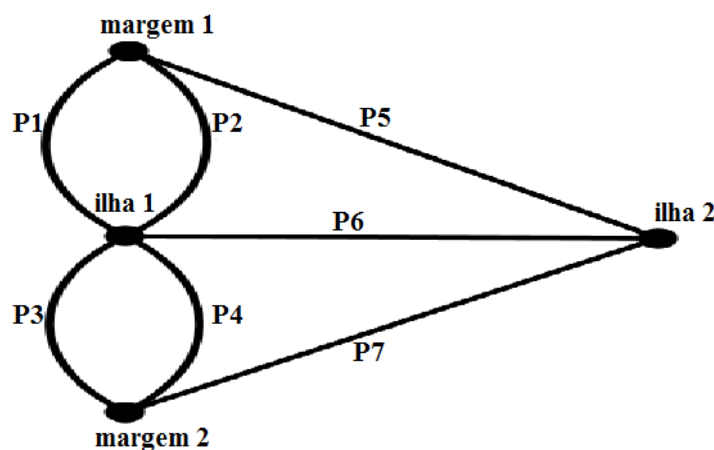


Figura A.1 - Representação das pontes de Königsberg.
Fonte: Adaptado Jurkiewicz (2009).

Euler verificou que para realizar o passeio da forma que os cidadãos da cidade desejavam, passando uma única vez em cada ponte, não seria possível, devido os quatro vértices do grafo possuírem grau ímpar. Euler deu uma solução geral, formulando um teorema. Porém, demonstrou apenas uma parte do teorema: o “somente se” (existe o percurso fechado, se não houverem graus ímpares no grafo). O “se” foi provado mais de 100 anos depois, por um estudante alemão chamado Hierholzer. Para apresentar este teorema, iniciemos por um lema simples, porém necessário.

Lema A.1 Se todo vértice de um grafo G , (não necessariamente simples), tem grau maior ou igual a 2, então G contém um ciclo (JURKIEWICZ, 2009).

Demonstração: Se G contém laços ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois, automaticamente, G contém um ciclo. Consideramos, portanto, apenas os grafos simples. A partir de um vértice v_0 , qualquer, iniciamos nossa trilha chegando a um vértice v_n qualquer. Alcançando esse vértice v_n poderá ocorrer o seguinte: estamos visitando esse vértice pela

primeira vez e desta forma seguimos o passeio ou, esse vértice v_n já foi visitado completando assim um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado.

Definição A.1.1. Um grafo com m arestas é dito euleriano se existe uma trilha fechada de comprimento m em G ; em outras palavras, se podemos percorrer cada aresta uma e só uma vez partindo de um vértice e a ele retornando. Se o grafo não é euleriano mas tem uma trilha aberta de comprimento m , ele é dito semieuleriano (JURKIEWICZ, 2009).

A Figura A.2 é uma representação de grafos eulerianos, semieulerianos e não eulerianos.

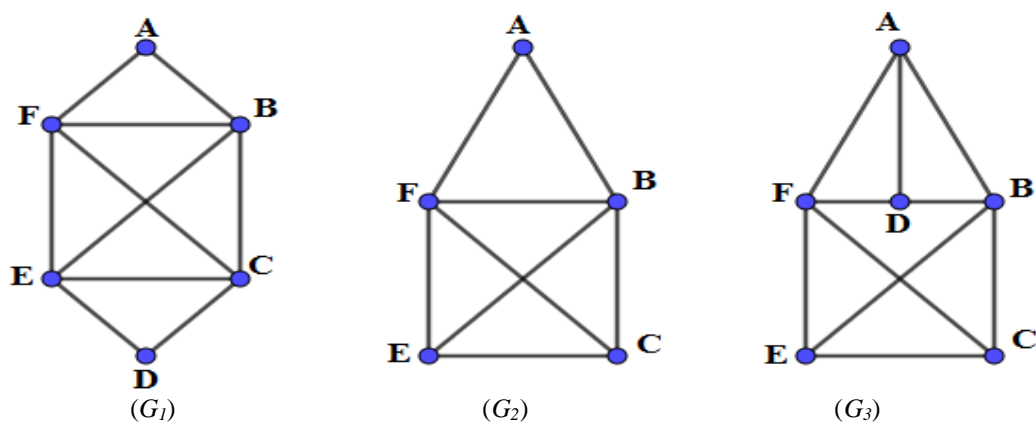


Figura A.2 – Grafos eulerianos (G_1), semieulerianos (G_2) e não eulerianos (G_3).
Fonte: Adaptado Jurkiewicz (2009).

Da Figura a.2, é possível observar que G_1 é euleriano (a trilha pode ser $a-b-c-d-e-f-a-d-b-e-a$), G_2 é semieuleriano (a trilha pode ser $a-e-b-d-c-b-a-d-e$) e G_3 não é euleriano, nem semieuleriano.

Problemas que usam grafos eulerianos são comuns em jogos matemáticos. Um problema típico é quando pretende-se desenhar algo (ou passar por um labirinto) sem retirar o lápis do papel e sem passar pelas linhas já desenhadas. Em outras palavras, podemos desenhar um grafo euleriano (ou melhor, uma representação gráfica dele) sem retirar o lápis do papel e retornando ao ponto inicial. Num grafo semieuleriano começamos num ponto e terminamos em outro.

Agora vamos ao teorema de Euler:

Teorema A.1 (Teorema de Euler). Um grafo conexo G , (não necessariamente simples), é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par (JURKIEWICZ, 2009).

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponhamos que G tenha uma trilha fechada de comprimento m . Cada vez que a trilha passa por um vértice utiliza duas novas arestas, uma na chegada e outra na saída. Logo, o grau de cada vértice deve ser obrigatoriamente par.

(\Leftarrow) usaremos indução sobre o número de arestas m do grafo. Por vacuidade, o teorema é válido quando $m = 0$. Suponhamos que o teorema seja válido para todos os grafos com menos do que m arestas. Sendo G conexo, todos os vértices têm grau maior do que 2, pois os graus são pares. Pelo lema anterior, G contém um ciclo (que é uma trilha fechada). Dentre todas as trilhas fechadas em G escolhemos uma trilha T com comprimento máximo. Se T tem comprimento m , o teorema está provado. Caso contrário, consideramos o grafo H resultante da retirada das arestas de T . Como retiramos um número par de arestas de cada vértice de T , e todos os vértices do grafo tem grau par (pela hipótese), pelo menos uma das componentes de H tem um vértice em comum com T e tem todos os vértices com grau par. Pela hipótese de indução, H tem uma trilha fechada que passa por todos os vértices de H , e podemos formar uma trilha fechada maior concatenando T com a trilha em H . Mas isto contraria a maximalidade na escolha de T (JURKIEWICZ, 2009).

Um aspecto muito interessante dessa prova é que ela sugere um algoritmo para identificar um circuito euleriano, esse é conhecido como Algoritmo de Hierholzer. Podemos dar uma ideia do funcionamento do algoritmo e do motivo pelo qual ele funciona. Considere, como exemplo, o grafo da figura A.3.

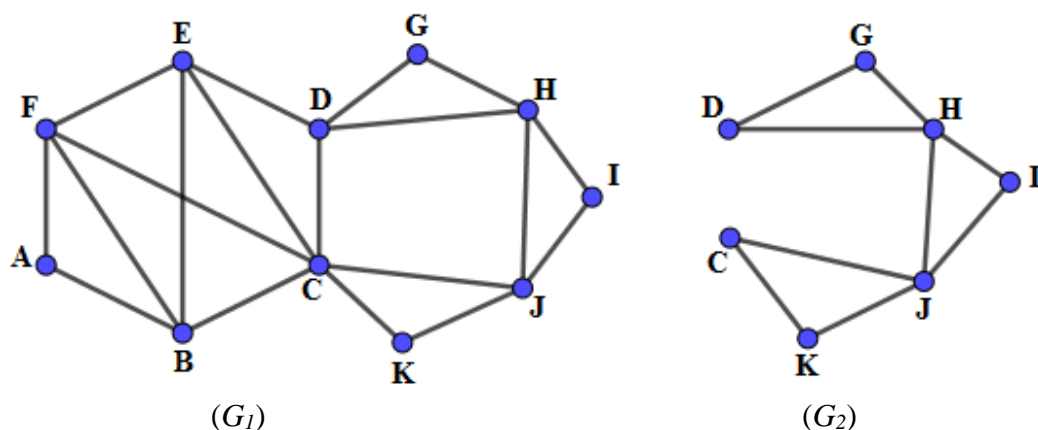


Figura A.3 – Exemplos de grafos eulerianos.

Fonte: Adaptado Jurkiewicz (2009).

Considere o grafo G_1 , iniciando nossa trilha pelo vértice A poderíamos percorrer $ABFCEDCBEFA$ chegando a um beco sem saída. Repare que os graus eram todos pares e a retirada de um ciclo (grafo G_2) subtrai sempre números pares dos graus. O grafo restante (G_2), também tem vértices com grau par. Este resto pode ser percorrido pela trilha fechada $DGHIJKJHD$. Basta agora incluir essa trilha na trilha inicial onde está o vértice D , e finalmente teremos a seguinte trilha $ABFCED (DGHIJKJHD) DCBEFA$. A Figura A.4 indica essa trilha.

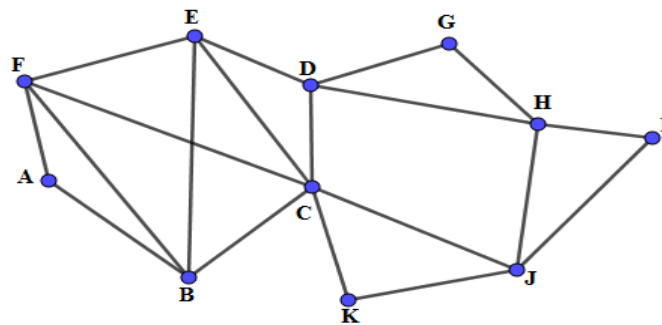


Figura A.4 – Exemplo de percurso euleriano.
Fonte: Adaptado Jurkiewicz (2009).

Como esse circuito $ABFCED (DGHIJKJHD) DCBEFA$ cobre o grafo inteiro, não é preciso recomeçar o processo, já temos um circuito euleriano.

Para a determinação de um circuito euleriano existe a possibilidade do uso de um algoritmo, esse é conhecido como o algoritmo de Hierholzer.

A.2. Algoritmo de Hierholzer

- (1) escolha um vértice x qualquer do grafo G ;
- (2) trace uma cadeia TI qualquer com arestas de G ;
- (3) delete as arestas percorridas pela cadeia TI , obtendo o grafo $G \setminus TI = G_1$;
- (4) Caso G_1 ainda tenha o mesmo vértice x , trace outra cadeia partindo de x com arestas de G_1 ; repita este passo até que o vértice x seja retirado (ou seja, até que $d(x) = 0$).
- (5) Caso ainda restem vértices em algum G_i , pela conectividade, com certeza algum desses vértices já foi usado nos passos (2) - (4). Parta desse vértice e retome o passo (4).
- (6) O algoritmo segue até que $V(G_n) = \emptyset$. A cadeia euleriana é resultado da união das cadeias traçadas (BOAVENTURA NETTO, 2009).

Já se passaram mais de 280 anos e ainda se discute a respeito desse problema (Pontes de Königsberg). Verdadeiramente, se sua única utilidade fosse apenas encontrar caminhos em pontes, este já estaria esquecido há muito tempo, porém, há diversas situações nas quais existem

o interesse em se achar um percurso que passe por um grande número de usuários uma única vez e retornando ao local de partida, por exemplo, pelas ruas de um bairro temos serviços de correios, coleta de resíduos, conta de luz, água e telefone, e até mesmo entrega de pizzas, e outros mais.

Um problema interessante ligado ao conceito de grafo semieuleriano é o Problema do Carteiro Chinês. Imagine um carteiro cuja tarefa é percorrer um roteiro todo dia. O problema consiste em identificar esse roteiro de maneira a minimizar a distância total percorrida. Tal situação pode ser representada por um grafo onde as arestas correspondem às ruas e os vértices correspondem aos cruzamentos. Se o grafo for euleriano, a solução consiste simplesmente em achar um percurso euleriano. Porém, caso o grafo não seja de Euler, então algumas arestas terão que ser repetidas. A maneira clássica de resolver este problema é acrescentando arestas artificiais ao grafo original de forma a obter um novo grafo $G' = (V, E')$. Isto deve ser feito de maneira que as arestas artificiais acrescentadas transformem todos os vértices de grau ímpar de G , em vértices de grau par. As arestas artificiais correspondem aos eventuais percursos repetidos de custo mínimo entre pares de vértices de grau ímpar. As situações de otimização de custos, são em geral, representadas por grafos valorados. Esses grafos indicam o que se deseja otimizar, por exemplo, distância, tempo, etc., resultando na repetição de itinerários parciais, de modo a gerar um itinerário único, que será um percurso euleriano (BOAVENTURA NETTO, 2009). Por exemplo, se o problema for de coleta de resíduos em determinada região, em que o caminhão deve partir de uma certa localidade e a ela retornar após cumprir com sua tarefa, surge então a necessidade em se determinar:

- a) o roteiro que torne mínima a distância percorrida pelo veículo;
- b) a extensão total do percurso dentro da zona.

Tal situação pode ser solucionada transformando-se o grafo original (caso não seja um grafo de Euler) em um grafo euleriano.

Apêndice B

Nesta seção apresentaremos alguns modelos clássicos de redes complexas.

B.1 Redes Aleatórias

No início dos anos 60, dois matemáticos húngaros, Paul Erdős e Alfred Rényi deram uma importante contribuição para o desenvolvimento das chamadas Redes Aleatórias. Em homenagem a esses matemáticos, uma rede aleatória também recebe o nome de Rede de Erdős-Rényi (BARABÁSI, 2015).

O modelo de rede proposto por esses dois matemáticos baseia em probabilidade para criar as redes. A rede inicia com n vértices sem nenhuma conexão e a partir daí, arestas não direcionadas são sequencialmente adicionadas de forma aleatória dentre os n vértices da rede em construção, com uma probabilidade p entre todos os pares possíveis de vértices na rede. Não existe nenhum critério que dê preferência a escolha de um vértice em relação aos outros. Logo, todas as ligações têm uma mesma probabilidade de ocorrerem, isto faz com que a maioria dos vértices tenham aproximadamente o mesmo número de arestas. A Figura B.1 representa algumas realizações de redes aleatórias com 100 vértices para diferentes probabilidades p .

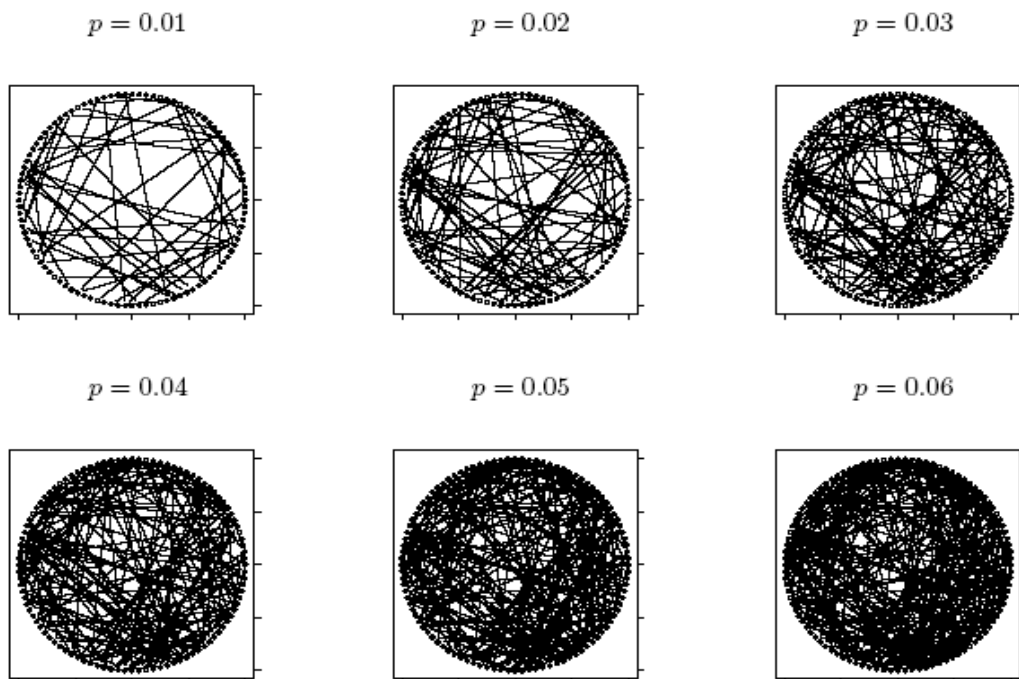


Figura B.1 – Representação de redes aleatórias.

Fonte: Extraída de <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA> acesso abril 2017.

Diferentes realizações de um grafo aleatório com n vértices e probabilidade p fixos darão origem a diferentes estruturas de redes. O grau esperado para um vértice qualquer da rede, é dado pela equação $\langle k \rangle = p(n - 1)$ (NEWMAN, 2003), sendo k a representação do número

médio de arestas que cada vértice possui, uma vez que cada ligação conecta dois vértices. A probabilidade de um dado vértice estar conectado a exatamente k outros vértices e não a qualquer um dos outros vértices é:

$$p(k) = p^k(1-p)^{n-1-k} \quad (\text{B.1})$$

Como existem $\binom{n-1}{k}$ maneiras diferentes de escolhas para k outros vértices, então a probabilidade de estar conectado a exatamente k outros vértices é:

$$p(k) = \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{n-1-k} \quad (\text{B.2})$$

Resultando assim, em uma distribuição de grau que segue a *distribuição binomial*. Em muitos casos existe interesse nas propriedades de grandes redes, de modo que n assume valor muito alto. Muitas redes possuem um grau médio que é aproximadamente constante quando a rede se torna muito grande. Considerando uma rede aleatória de Erdős-Rényi, quando n se torna muito grande, ou seja, quando $n \rightarrow \infty$, a distribuição de grau pode ser aproximada por uma distribuição de *Poisson* (NEWMAN, 2003):

$$p(k) = e^{-\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!} \quad (\text{B.3})$$

A Figura B.2 representa um gráfico mostrando a distribuição de graus seguindo a lei de Poisson.

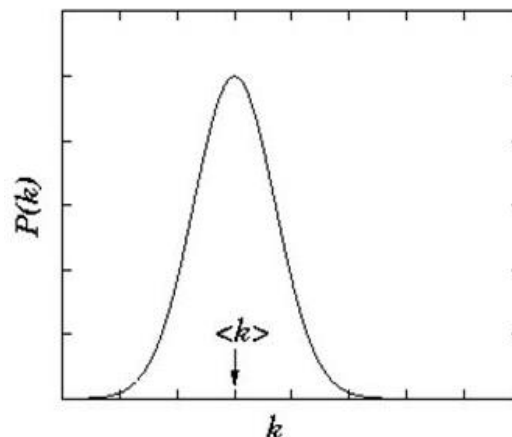


Figura B.2 – Distribuição de Poisson.

Fonte: Extraído de www.dcc.ufmg.br/~virgilio acesso 23 abril 2017.

B.2 Redes Mundo Pequeno

O fenômeno mundo pequeno foi primeiramente observado por Stanley Milgram, um psicologista social da Universidade de *Harvard* nos Estados Unidos. Milgram, em 1967,

realizou uma experiência para estudar o conceito de mundo pequeno. Durante o experimento para avaliar o grau de ligação entre as pessoas, Milgram enviou 160 cartas para pessoas escolhidas aleatoriamente no estado do Nebraska e do Kansas e estas deveriam fazer esta carta chegar ao seu destinatário, um corretor da cidade de Boston. Estas pessoas deveriam enviar as cartas diretamente ao corretor caso o conhecessem, ou enviar a uma pessoa que ele julgasse ser capaz de enviar ao destinatário em Boston. A maioria das cartas não chegaram ao seu destino, todavia, Milgram descobriu que as 42 cartas que chegaram ao destinatário passaram em média por 5,5 intermediários (MILGRAM, 1967). Essa experiência sugere que a distância entre dois componentes de uma rede de interações sociais é pequena, de aproximadamente “*seis graus de separação*” (MILGRAM, 1967).

Neste experimento Milgram não deu tanta atenção à distância entre duas pessoas na sociedade americana, desta forma, pode-se considerar os “seis graus de separação” como sendo um limite superior, pois existem diversos caminhos com distâncias menores (BARABÁSI, 2003). Ou seja, podemos considerar que talvez houvessem percurso com distâncias menores que fizessem as cartas chegarem aos destinatários das cartas, e que os próprios participantes desta pesquisa desconheciam.

B.3 Modelo Watts e Strogatz

Quando falamos de mundo pequeno, estamos simplesmente nos referindo ao fato de que no caso da existência de uma rede com um elevado número de vértices, ainda assim, há um caminho relativamente pequeno entre dois vértices quaisquer da rede. Apesar da facilidade para se trabalhar matematicamente as redes aleatórias, este modelo torna-se irreal para muitos casos, devida a completa ausência de estrutura local. Veja, a chance de duas pessoas de um mesmo local de trabalho se conhecerem é muito maior que a chance de duas pessoas escolhidas ao acaso se conhecerem.

Quando estudamos redes complexas, podemos medir essa chance através do coeficiente de aglomeração C , este mede a probabilidade de dois primeiros vértices adjacentes de um mesmo vértice estarem conectados entre si. Em uma rede aleatória os valores de C e p são os mesmos, pois não existem ligações com maior privilégio que outras. Porém, quando se analisa diversas redes reais, C é muito maior que p , implicando num padrão altamente concentrado, tendendo a formar pequenas quantidades de conexões em cada vértice. Isto faz com que as redes propostas por Erdős-Rényi não sejam as ideais para representar modelos de redes do mundo real. Assim, *Watts e Strogatz* (NEWMAN, 2003), propuseram um modelo semelhante ao de Erdős e Rényi, no qual grande parte das conexões são estabelecidas entre vértices mais próximos, apresentando-se como um mundo pequeno. Para esse modelo, a distância média entre dois vértices quaisquer de uma rede muito grande não será maior que um pequeno número de vértices. Um exemplo real do modelo proposto por Watts e Strogatz são as

Redes Sociais, em que a maior parte de seus componentes estão relativamente próximos uns aos outros, exemplos: pessoas que frequentam um mesmo clube, colegas de trabalho, moradores de um mesmo bairro que são amigos de seus amigos. Existe a possibilidade de conexão com pessoas que estão muito longe, em outros estados ou até mesmo países, tal como amigos de infância ou até mesmo algum parente. A Figura B.3 representa um exemplo de rede pequeno mundo, mostrando relacionamentos próximos bem como relacionamentos distantes.

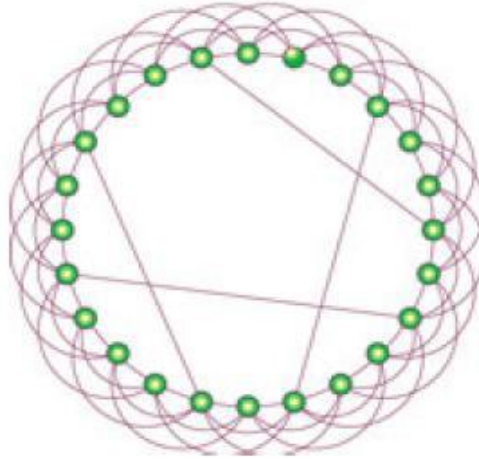


Figura B.3 – Rede Pequeno Mundo.

Fonte: Extraída de Strogatz (2001).

Para se obter o modelo proposto por Watts-Strogatz deve-se seguir um processo de interpolação entre uma rede regular com formato de um anel e uma rede aleatória. Desta forma, considere n o número de vértices e k um número par, o modelo proposto por Watts-Strogatz inicia seguindo os seguintes passos (ESTRADA, 2015).

1. Distribua todos os vértices em um anel circular;
2. Conecte todos os vértices com seus primeiros $k/2$ vizinhos mais próximos no sentido horário, repita novamente com seus $k/2$ vizinhos mais próximos no sentido anti-horário;
3. Com probabilidade p , reconecte algumas destas arestas no grafo circular obtido anteriormente.

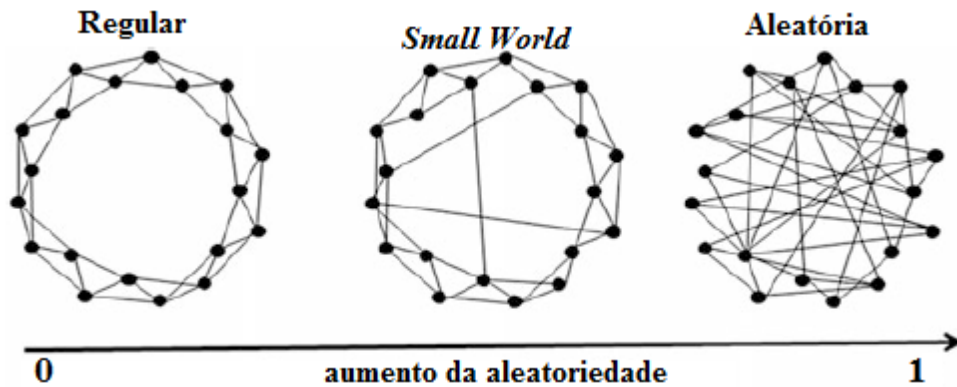


Figura B.4 – Representação modelo Watts-Strogatz.
Fonte: Adaptado de Ernesto (2015)

A Figura B.4, mostra que tal modelo está entre a completa regularidade e a aleatoriedade.

B.4 Redes livres de escala (*Scale Free*)

Em 1998, o físico Albert-Laszlo Barabási ao avaliar dados empíricos sobre redes do mundo real, a *Internet*, por exemplo, conseguiu determinar algumas características próprias deste tipo de rede. Particularmente foi observado que uma destas características se desviava dos padrões do que era esperado no crescimento de sistemas aleatórios, tais como os propostos por Erdős e Rényi ou os modelos Watts-Strogatz. A característica observada (BARABÁSI, 1999), foi a distribuição de graus em uma rede de mundo real. Notou-se que muita rede do mundo real segue adequadamente uma lei de potência (BARABÁSI, 1999), em contraste com a expectativa de uma distribuição de Poisson, como ocorre com os modelos de Erdős-Rényi e o modelo de Watts-Strogatz.

Diversos sistemas tais como uma rede ou a *World Wide Web* são redes com uma topologia complexa. Albert Réka Albert-Lászlo Barabási ao analisarem a *World Wide Web* perceberam a presença de poucas páginas altamente conectadas, em contrapartida, a existência de um pequeno número de páginas com um valor elevado de relacionamentos (BARABÁSI, 1999). Essa característica implica em redes com poucos vértices altamente conectados, denominados *hubs* e muitos vértices apresentando poucas conexões. Um *hub* é um vértice com uma grande quantidade de conexões (BARABÁSI, 2003).

Em redes aleatórias a maioria dos vértices têm comparativamente o mesmo grau, e mais, a inexistência de *hubs*. Já nas redes livre de escala os *hubs* não são apenas tolerados, mas são esperados. A Figura B.5 ilustra a presença de *hubs* em uma rede de autoestrada dos Estados unidos da América.

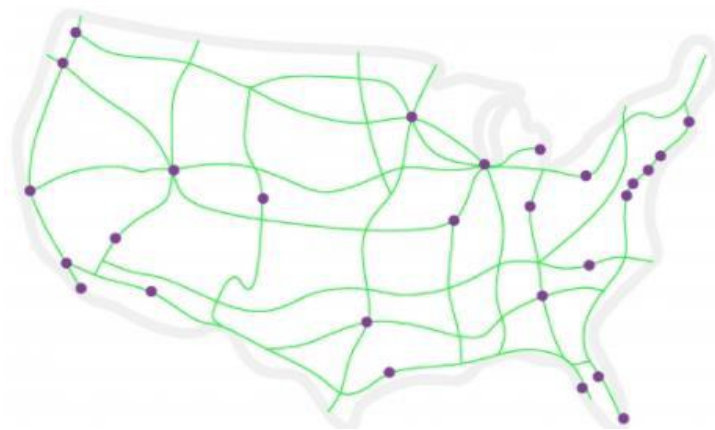


Figura B.5 - Rede de auto estrada.
Fonte: Extraída de Barabási (2015).

A Figura B.5 mostra uma rede de auto estrada na qual os vértices são as cidades e as arestas são as autoestradas. Não há cidades com centenas de autoestradas e nenhuma cidade está desconectada de um sistema de rodovias.

Numa rede com a distribuição de grau dada por uma lei de potência, muitos nós possuem poucas conexões, e um pequeno número de nós altamente conectados. A Figura B.6, mostra uma rede livre de escala (rede de tráfego aéreo), em que os nós são os aeroportos e as arestas são as rotas de voos entre eles. Muitos aeroportos apresentam uma pequena quantidade de voos, temos também poucos aeroportos com uma grande quantidade de voos, conectando muitos pequenos aeroportos.



Figura B.6 – Rede de tráfego aéreo.
Fonte: Extraída de Barabási (2015).

Devido à sua representação topológica estas redes são denominadas *Redes Livres de Escala* ou *Scale Free* (BARABÁSI, 2015), em outras palavras, a distribuição de probabilidade para o grau

dos vértices seguem uma lei de potência. O gráfico da Figura B.7 representa uma distribuição de grau dada por lei de potência.

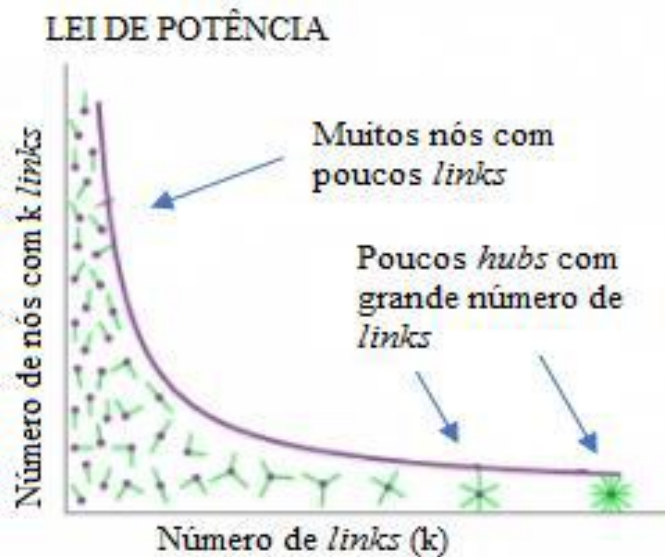


Figura B.7 – Distribuição por lei de potência.

Fonte: Extraído de Barabási (2015).

O exemplo mais antigo de rede livre de escala, provavelmente seja a rede Price de citações em trabalhos científicos (NEWMAN, 2003). Mais recentemente, tem sido observado uma série de redes que seguem a lei de potência para as distribuições de grau, isto é, as redes livres de escala surgem em variados contextos incluindo outras redes de citação, a *World Wide Web* (WWW), a *Internet*, sistemas de tráfego aéreo, redes metabólica, graficos de chamada de telefone e até a rede humana de contatos sexuais (LATORA *et al*, 2006).

Com essas observações, contrariando o que acontece nas redes aleatórias e nas redes pequeno mundo, o grau dos vértices não tem um valor definido, portanto, os nós não apresentam uma escala característica de conectividade.

Vértices que apresentam elevado grau de conectividade são denominados de polos (Hubs). Em caso de ataque, do tipo direcionado, a retirada desses polos comprometeria seriamente a topologia da rede. *Robustez* é a característica de uma rede de resistir a ataques. Pela característica em manter a funcionalidade da rede, as redes livres de escala são muito robustas quanto à remoção aleatória de alguns de seus vértices ou ligações (COVEN, 2010).

As seguintes figuras: Figura B.8, Figura B.9 e Figura B.10 ilustram uma comparação para possíveis falhas nos vértices de uma rede aleatória e numa rede livre de escala, para uma melhor compreensão, foram removidos os mesmos vértices. Na última ilustração, a consequência de um ataque dirigido aos hubs de uma rede livre de escala.

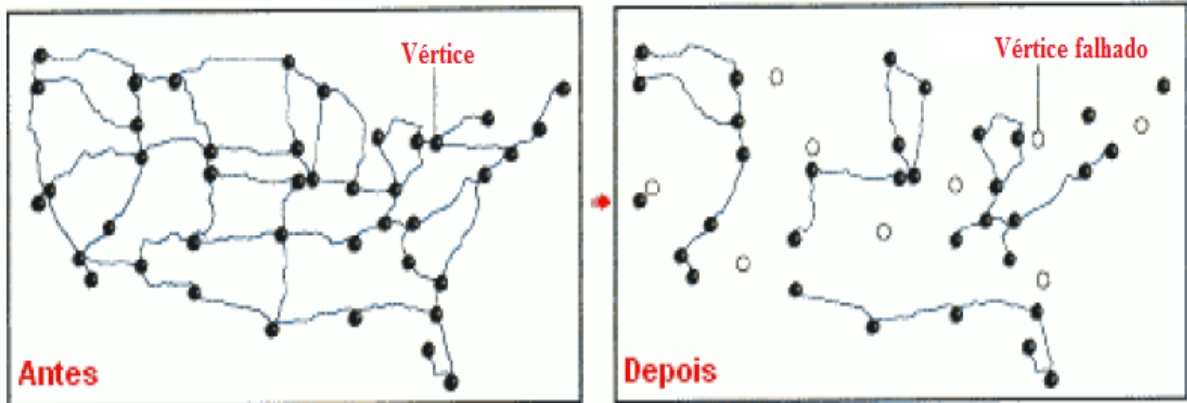


Figura B.8 – Rede aleatória – falha acidental dos vértices.

Fonte: Extraído de <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA> acesso 14 abril 2017.

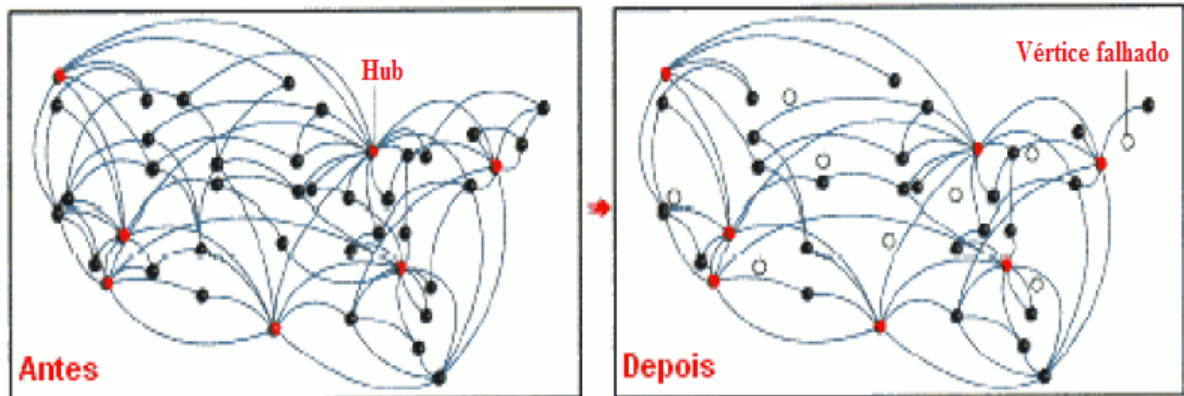


Figura B.9 - Rede livre de escala - falha acidental dos vértices.

Fonte: Extraído de <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA> acesso 14 abril 2017.

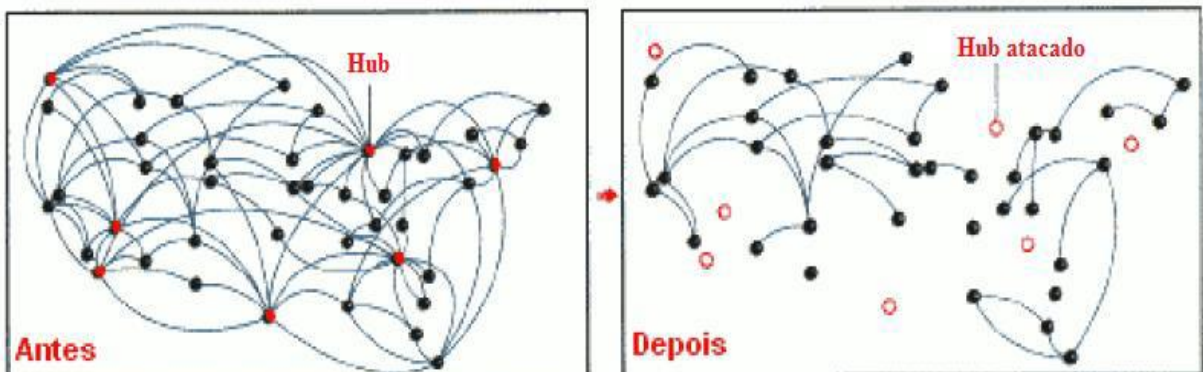


Figura B.10 - Rede livre de escala - ataque aos hubs.

Fonte: Extraído de <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA> acesso 14 abril 2017.