INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E
TECNOLOGIA DE SÃO PAULO

MARCELO ALEXANDRE TORRES DO ESPÍRITO SANTO

ASPECTOS DE DUAS DEMONSTRAÇÕES DO PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

SÃO PAULO
2017

MARCELO ALEXANDRE TORRES DO ESPÍRITO SANTO

ASPECTOS DE DUAS DEMONSTRAÇÕES DO PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo como requisito parcial para a conclusão do curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), sob supervisão do Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho.

São Paulo
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237a Santo, Marcelo Alexandre Torres do Espirito
Aspectos de duas demonstrações do pequeno teorema de fermat / Marcelo Alexandre Torres do Espirito Santo. São Paulo: [s.n.], 2017.
69 f. il.

Orientador: Henrique Marins de Carvalho

() - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2017.

1. Provas. 2. Demonstrações. 3. Pequeno Teorema de Fermat. 4. Artesanato. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD

Autoria: Marcelo Alexandre Torres do Espírito Santo

Título: Aspectos De Duas Demonstrações Do Pequeno Teorema De Fermat

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo como requisito parcial para a conclusão do curso Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Os componentes da banca examinadora, abaixo listados, consideram este trabalho aprovado.			
	Nome	**Instituição**	**Assinatura**
1	Dr. Henrique Marins de Carvalho	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo	
2	Dr. Rogério Ferreira da Fonseca	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - Campus São Paulo	
3	Dr. Carlos Ricardo Bifi	Fatec - Faculdade de Tecnologia de São Paulo – Itaquera, Secretaria da Tecnologia de São Paulo.	

Data da aprovação: 04 de outubro de 2017

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo sopro de vida, que nos permite amar, lutar por nossos sonhos, buscar o conhecimento, sofrer, crescer intelectualmente e humanamente a cada dia, além de todas as outras coisas que a vida tem a nos oferecer.

A toda minha família que me apoiou e compreendeu os momentos difíceis dessa longa jornada de estudos, trabalho e ausências do seio familiar.

Ao meu filho Heitor e minha esposa Nair que acompanharam diariamente e de perto as longas jornadas de estudo, trabalho e as partidas para o IFSP principalmente aos sábados.

Ao meu sogro que sempre apoiou e acreditou no sucesso deste mestrado, mas que infelizmente faleceu antes do fim desta jornada.

A todos os professores do IFSP, sem exceção, que me acompanharam durante todas as disciplinas com extremo profissionalismo, competência e empenho para que o objetivo final fosse alcançado.

Ao IFSP por oferecer seus recursos e aderir ao programa PROFMAT, propiciando assim uma formação pública de qualidade e gratuita entre as poucas que há na capital, principalmente com uma oferta de vagas para os professores da rede pública.

À CAPES por apoiar e credenciar a SBM na expansão nacional do programa PROFMAT e pelo incentivo financeiro nesta formação voltada para a melhoria da educação pública.

A SBM que idealizou o programa PROFMAT buscando, juntamente com o IMPA, melhorar a matemática nacional em todos os níveis de ensino e em diferentes redes de ensino.

Ao meu orientador Dr. Henrique Marins de Carvalho e à banca avaliadora pelo enriquecimento intelectual, profissional e pessoal nesta pesquisa, além das necessárias horas gastas por estes profissionais para a realização final desta dissertação.

RESUMO

Esta dissertação é parte dos requisitos para obtenção do título de mestre no programa PROFMAT (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) realizado no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (Campus São Paulo). Em consonância com a proposta deste referido programa que prima por uma matemática acadêmica rebuscada, que eleve o nível do professor da educação básica para que o mesmo possa levar novas propostas enriquecedoras para a sala de aula e agregar ao currículo básico, o presente trabalho uniu um resultado fundamental da teoria dos números, o Pequeno Teorema de Fermat, em sua apresentação formal a uma versão alternativa do mesmo, encontrada na análise combinatória devida a Julius Petersen, que pode ser representada de forma lúdica por colares em uma turma de educação básica, estabelecendo, assim, relações entre a matemática acadêmica e a da sala de aula da educação básica. Para tanto, a literatura listada nas referências bibliográficas buscou esboçar o que chamamos de matemática através de suas provas, teoremas, corolários, axiomas e seus aspectos filosóficos, sem esgotar o tema por motivos, por exemplo, da matemática ser uma construção milenar, mas que permitiu ao menos estruturar a importância dos objetos estudados. Assim, o trabalho versa primeiramente sobre os aspectos filosóficos e estruturais de provas e demonstrações em geral, em seguida aborda a demonstração do Pequeno Teorema de Fermat sob um ponto de vista formal e histórico e, finalmente, é apresentada uma atividade lúdica, utilizando artesanato com miçangas que pretende unir a matemática sofisticada superior do Pequeno Teorema de Fermat à matemática elementar do ensino médio fundamentada apenas no princípio fundamental da contagem.

Palavras-chave: Provas, demonstrações, Pequeno Teorema de Fermat, artesanato.

ABSTRACT

This dissertation is part of the requirements to obtain the master's degree in the PROFMAT program (Professional Master's in Mathematics in National Network) held at the Federal Institute of Education, Science and Technology of São Paulo (Campus São Paulo). In line with the proposal of this program, which is based on an advanced academic mathematics, that elevates the level of the teacher of basic education so that it can take new enriching proposals for the classroom and add to the basic curriculum, this work has united a fundamental result From the theory of numbers, Fermat's Little Theorem, in its formal presentation to an alternative version of the same, found in the combinatorial analysis due to Julius Petersen, that can be playfully represented by collars in a basic education class, thus establishing relationships between academic mathematics and that of the basic education classroom. For this, the literature listed in the bibliographical references sought to sketch what we call mathematics through its proofs, theorems, corollaries, axioms and their philosophical aspects, without exhausting the theme for reasons, for example, of mathematics being a millenarian construction, at least structure the importance of the objects studied. Thus the work first deals with the philosophical and structural aspects of proofs and demonstrations in general, next it approaches the demonstration of the Small Theorem of Fermat from a formal and historical point of view and finally is presented a ludic activity using crafts with beads that it intends to unite the higher sophisticated mathematics of Fermat's Little Theorem with elementary high school mathematics based only on the fundamental principle of counting.

Keywords: Proofs, demonstrations, Fermat's Little Theorem, craftsmanship.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A motivação pessoal desta dissertação surge a partir de dois aspectos:

O primeiro aspecto se deve ao intuito de relacionar a matemática estudada durante o mestrado com a matemática da docência na educação básica, o estudo do Pequeno Teorema de Fermat nas duas versões apresentadas nesta dissertação sugeriu uma possibilidade de relacionar ambos os níveis de ensino.

O segundo aspecto está relacionado à discrepância que há entre a matemática da educação básica e a matemática do ensino superior. Equanto esta última foi constituída ao longo da história desde a Grécia antiga com os Elementos de Euclides, de forma axiomática e é assim estudada até os dias atuais de forma sistemática nos cursos superiores de matemática, o mesmo não ocorre com a educação básica, pois a mesma é tratada de forma elementar, com características apenas de aplicação, com vistas, por exemplo, à resolução de exercícios para o Enem. Assim, o caráter motivacional aqui implícito é tentar harmonizar os dois níveis de ensino, de modo que a matemática não passe a servir apenas como aplicação, mas sim exerça o seu papel no desenvolvimento lógico dedutivo de qualquer estudante, quando estudada também sob o aspecto axiomático desde a educação básica.

As explicações de propriedades de objetos matemáticos e das relações que estabelecem entre si são frequentes no desenvolvimento das matemáticas em diversas culturas e períodos históricos, com reflexo na matemática atualmente presente no ambiente escolar. Em virtude dessa constância quase inquestionável nos trabalhos acadêmicos e livros didáticos, as demonstrações matemáticas são, muitas vezes, percebidas como elementos tão básicos que são omitidos detalhes sobre suas características e sobre o processo de suas elaborações.

Neste trabalho, tomaremos o Pequeno Teorema de Fermat como tema norteador para discorrer sobre a importância das demonstrações matemáticas no âmbito da Matemática de forma ampla e no ensino de Matemática, com vistas para a Educação Básica. Antecipando as questões a respeito do teorema que recebe o nome do célebre matemático francês, a primeira seção contempla definições e classificações relativas ao objeto “demonstração matemática”.

O significado de uma demonstração matemática no processo de construção dos conhecimentos foi influenciado pela evolução da coletânea de proposições que, ao longo do tempo, constituiu o corpo teórico que chamamos de Matemática. Apresentaremos algumas tentativas de esclarecer o que é, portanto, uma *demonstração* indicando as influências e consequências filosóficas dessas opções, por exemplo, nas definições de vários termos auxiliares que se fazem necessárias (*teorema*, *axioma*, entre outros).

Tratada a pergunta “o que é uma demonstração? ”, um próximo passo é identificar seus aspectos constituintes e classificar as diversas demonstrações em função de características comuns; assim são tratadas as categorias de demonstração por absurdo, analítica, contrapositiva, as que são feitas com apoio em figuras e aquelas que se valem do princípio da indução finita. Esta seção não pretende o esgotamento do assunto, mas tão somente apresentar ao leitor a abrangência que podem assumir os estudos que tomem as demonstrações matemáticas como objeto de interesse.

Na segunda seção do texto, passamos ao enunciado do Pequeno teorema de Fermat, fazendo uso da simbologia atual e, em seguida, indicamos a demonstração proposta por Leonhard Euler em 1736, com auxílio das propriedades aritméticas por ele estudadas. Apesar de serem autores não pouco frequentes nos textos matemáticos, devido às suas contribuições em diversas áreas, julgamos válida a apresentação de breves anotações biográficas de Fermat e Euler, principalmente para permitir a avaliação do tratamento dado por cada um desses matemáticos ao teorema em questão, influenciados pelos contextos sociais em que estavam inseridos.

Uma demonstração de um dado teorema, por mais rigorosa e bem aceita pela comunidade dos matemáticos, não impede a busca por outras possibilidades de mostrar a validade do enunciado. Isso nos leva à terceira seção, em que apresentamos outra demonstração, com base em propriedades combinatórias, devida ao dinamarquês Julius Petersen. Para ilustrar a estratégia de demonstração de Petersen, são associadas imagens de colares feitos de miçangas coloridas e mesmo o teorema é renomeado, de forma pitoresca para “teorema dos colares”.

Nas subseções desta última etapa do estudo, apresentamos elementos da carreira de Julius Petersen com detalhes de sua formação acadêmica e de suas realizações nas áreas de Física e Teoria dos Números, e sugerimos um roteiro de uma aula destinada a estudantes do Ensino Médio, empregando a demonstração de Petersen para o pequeno teorema de Fermat como tema gerador de comentários e reflexões sobre o papel das demonstrações na Matemática.

1. O QUE É DEMONSTRAÇÃO?

"A riqueza da humanidade reside também em sua diversidade. Ela deve ser protegida em todos os seus aspectos – cultural, biológico, filosófico, espiritual. Para isso a tolerância, a opinião do outro, as recusas das verdades definitivas devem ser sempre lembradas.".

(Texto de uma das medidas aprovadas na Conferência dos Prêmios Nobel, reunida no palácio do Eliseu – Paris.)

1.1 O que é demonstração? Definição e reflexão

O objetivo deste primeiro capítulo é estabelecer uma base conceitual para o nosso objeto de estudo e aplicação o Pequeno Teorema de Fermat, a reflexão se dará acerca do ente demonstração, pois como é sabido na matemática, as demonstrações fundamentam os teoremas e os teoremas por sua vez fundamentam a própria matemática. O intuito é também resgatar para a matemática elementar a importância de conceitos de uma matemática axiomática com axiomas, definições, teoremas, corolários, etc. Além disso, este capítulo sugere o quanto é importante a matemática em sua apresentação axiomática, pois aqui é descrito como a matemática se construiu historicamente e filosoficamente dessa maneira e justifica, portanto, o anseio de harmonizar o estudo da matemática em todos os níveis de ensino respeitando suas origens e potencialidades de forma ampla, não se limitando apenas aos aspectos elementares e à aplicação tal como são considerados nos níveis básicos de ensino, mas ampliando para um discussão axiomática.

Morais Filho (2013) desenvolveu um estudo sobre o ente matemático *demonstração*, estudo este sobre o qual nos valemos neste primeiro capítulo, e defende a tese de que demonstração e teorema são aspectos totalmente relacionados, sendo evidente, desde os primeiros contatos com a matemática avançada, que a mesma está repleta de teoremas, definindo, assim, teorema:

> Um teorema é uma sentença matemática válida, cuja validade é garantida por uma demonstração matemática. Convém, logo a princípio, fixar a ideia de que teoremas e demonstrações estão sempre intimamente ligados. Os resultados de qualquer descoberta matemática, por mais elementar que possa ser, são apresentados por meio de teoremas. Os teoremas fazem parte da linguagem matemática, por isso é muito importante estudá-los. (MORAIS FILHO, 2013, p. 104).

Já Nagafuchi e Batista (2012, p.1) salientam que uma reflexão acerca da pergunta “o que é demonstração? ” Pode ser alcançada ou abordada por diversas vertentes, logo, não coube naquela pesquisa – nem cabe neste trabalho – um compromisso com a resposta exata para tal pergunta, mas refletir em busca de contribuições para o ensino da matemática, além, é claro, do próprio avanço no domínio da matemática.

Para tanto, um bom recurso é estabelecer uma abordagem das demonstrações, do ponto de vista filosófico assim como Nagafuchi e Batista (2012, p.1) o fizeram. Isso é reforçado quando Barker (1976, p.28) ressalta que desde a Grécia antiga a matemática tem sido uma grande fonte de temas filosóficos, sendo relevante abordar sob uma perspectiva filosófica o conhecimento a priori e o conhecimento a posteriori ou empírico, para que seja possível compreender melhor conceitos como prova ou demonstração.

Nagafuchi e Batista (2012, p.1) atentam para a perspectiva popular que observa a prova (outro termo usado para o conceito designado por demonstração) como tema central na matemática, e ressaltam o fato da prova estar no cerne do desenvolvimento epistemológico e histórico da matemática. Tais conceitos corroboram um cenário em que são indissociáveis a matemática e as demonstrações ou provas.

De fato, Nagafuchi e Batista (2012) destacam:

> A despeito de sua importância para a Matemática, por vezes a prova se torna a atividade nuclear no ensino de diversas disciplinas que se encontram nos programas curriculares de cursos superiores de matemática. Um motivo que, sozinho, torna suficiente, e também necessária, a inclusão de uma discussão aprofundada do tema entre os educadores matemáticos. (NAGAFUCHI e BATISTA, 2012, p. 1)

Morais Filho (2013, p.105) destaca a estrutura e os elementos de um teorema na forma: “se P então Q”, em que P é denominado hipótese e Q é denominado tese do teorema. Afirma que as hipóteses são indispensáveis para o teorema e devem ser utlizadas no demonstrar, em conjunto com a tese, que, além de aparecer no enunciado do teorema, é a conclusão que se deve deduzir na demonstração, cujo processo lógico está envolvido. Resume assim:

> Um teorema é uma sentença matemática cuja validade é garantida por uma demonstração matemática. Quando conveniente, para descobrir a (s) hipótese (s) e a tese do teorema, o escrevemos em sua forma condicional. Se H (hipótese), então T (tese). (MORAIS FILHO, 2013, p. 104).

Nagafuchi e Batista (2012, p.2) defendem o estudo de prova e demonstrações no âmbito da educação matemática, haja vista o crescente número de pesquisas internacionais no aprendizado e no ensino de provas e demonstrações, e que tal avanço teve ênfase entre as décadas de 80 e 90, período no qual o ensino de provas e demonstrações foram incluídos no currículo da educação básica em países como Estados Unidos, Canadá e Inglaterra.

Direcionados pelo tema “o que é demonstração? ” Nagafuchi e Batista (2012, p.3) avançam na análise do significado dos termos prova e demonstração conforme um dicionário de língua portuguesa comum, um dicionário de termos filosóficos e, finalmente, um dicionário de termos matemáticos, sendo que nos três ambas as palavras assumem papéis quais sinônimos. Destaca-se que no dicionário de língua portuguesa a abordagem é mais superficial um tanto quanto distinto de suas características na matemática. No dicionário de termos filosóficos há mais profundidade em relação ao papel que estas palavras assumem na matemática, pois prova tem um significado mais abrangente incluindo o próprio significado da palavra demonstração. Por fim, no dicionário de termos matemáticos, os termos prova e demonstração assumem significados similares, são sinônimos, sendo isso constatado também em outros idiomas.

Morais Filho (2013, p.196) assume que os termos *mostrar*, *demonstrar* e *provar* são sinônimos e destaca que, embora o leitor não perceba, verbos como *encontrar*, *exibir*, *construir* e *resolver,* também portam respostas tais como as encontradas em demonstrações matemáticas e, provavelmente, grande parte das pessoas que estudam matemática já demonstraram algum resultado. Acrescenta que, apesar dessa semelhança, em determinadas situações, é possível encontrar sentidos diferentes nas palavras prova e demonstração, já que prova pode ser associada à evidência de um fato, ou seja, não necessariamente uma sequência lógico-dedutiva de argumentos ou demonstração.

Como Nagafuchi e Batista (2012, p.4) ressaltam, dentro da própria matemática existem subdivisões, e neste caso o que se deseja é entender os significados de provas ou demonstrações para a matemática tomada como ciência teórica, não interessando, por exemplo, suas aplicações em outras áreas.

O que se deseja, então, é entender os desdobramentos em ramificações de uma matemática composta por postulados, axiomas, teoremas, corolários e definições, ou seja, entender a definição teórica de demonstração ou prova. Entendendo a matemática como uma árvore com ramificação e galhos, ou seja, afastando da matemática o caráter empirista, construindo uma ciência teórica, e de conhecimentos a priori, que não depende do experimento.

Barker (1976, p. 14) afirma que uma das questões que se considera fundamental em filosofia da matemática é saber se o conhecimento matemático é empírico ou a priori, além disso, afirma que a distinção entre as duas espécies de conhecimento nem sempre foi claramente conhecida.

Assim, o autor esclarece que ”empírico” significa “baseado na experiência” e a expressão “a priori” significa “possível de obter antes da experiência” e mostra, com diversos exemplos, que conhecimento empírico é o conhecimento que requer justificação da experiência, ou seja, depende da experiência sensorial, pois só se pode afirmar sobre a cor de pássaros no ato de visualizar os pássaros, ou então crer no relato de alguém que viu tais pássaros.

No entanto, conhecimento a priori não depende de aspectos sensoriais, ou seja, conhecimento a priori é o tipo de conhecimento que não depende da justificação pela experiência.

Para exemplificar, Barker (1976) separa o conhecimento a priori e conhecimento empírico em dois exemplos. Disciplinas como Física, Biologia e História estão pautadas em questões relativas ao conhecimento empírico, devem estar assentadas nas observações, em oposição matérias a como lógica, que tem preocupação com o conhecimento a priori das regras que governam a validade dos argumentos. Assim, a lógica não necessita das observações para atingir suas conclusões.

Em seguida, questiona se a matemática seria uma ciência de conhecimentos a priori como a lógica, ou com conhecimentos a posteriori ou empíricos como a Física. Se não for empírico, em que se fundamentaria a matemática? Ou seria a Matemática uma ciência fundamentada nos conhecimentos empíricos e a priori?

Na filosofia da Matemática há escolas que defendem uma e outra fundamentação e ainda é possível encontrar alternativas híbridas entre empirismo e normativismo e além desta discussão não estar encerrada, há ainda outra questão posterior acerca dos dois tipos de raciocínio, do raciocínio dedutivo e do raciocínio indutivo.

Barker (1976, p.16) define que “dedução é raciocínio em que se pode saber, a priori, que, não havendo erro lógico e sendo verdadeiras as premissas, a conclusão também terá de ser verdadeira, assim, dedução e conhecimento a priori estão intimamente relacionados. ”

Exemplo de raciocínio dedutivo, dadas duas premissas:

- Primeira premissa: todo homem é mortal.

- Segunda premissa: Sócrates é homem.

- Conclusão: Sócrates é mortal.

Assim partimos de premissas verdadeiras e universais e concluímos uma particularidade também verdadeira por meio de raciocínio lógico.

Contrastando com a dedução, a indução é um raciocínio em que a conclusão obtida expressa uma conjetura empírica muito mais ampla do que a expressa pelos dados, ou seja, não se pode saber a priori se a conclusão terá de ser verdadeira se os dados forem verdadeiros.

Exemplo de raciocínio indutivo:

-Bem-te-vi-vi é um pássaro que voa,

- Pica-pau é um pássaro que voa,

- Cegonha é um pássaro que voa;

- bem-te-vi, pica-pau e cegonha são pássaros que voam, logo, todos os pássaros voam.

Este raciocínio permite, em determinadas situações, estimar um fato geral baseado em fatos particulares, ou seja, o que se busca com o conhecimento empírico e indutivo é uma generalização de particularidades, para tanto há uma margem de erro que deve ser estimada ou pelo menos considerada.

Continuando a segmentar os ramos do conhecimento, até aqui o conhecimento está separado em conhecimento a priori do raciocínio dedutivo com fundamentação lógica, e conhecimento a posteriori ou empírico do raciocínio indutivo com fundamentação na análise. Na sequência, os filósofos costumam se preocupar com o conhecimento do ponto de vista analítico e sintético.

Barker (1976, p. 18) ressalta que a separação do conhecimento em dois ramos, a saber analítico e sintético, se deve ao filósofo alemão Immanuel Kant (1724-1804), e para tanto Kant se valeu da noção de juízo.

Barker, ainda tratando da questão do juízo, diz que

> Kant descrevia o ato mental de formular juízo como um ato de ligação de conceitos, reunidos na consciência. Segundo essa maneira de ver, alguém que sabe serem todos os solteiros pessoas não-casadas reuniu, em sua consciência, o conceito de solteiro e o de não casado (ligando-os da maneira que a Lógica denomina universal e

> afirmativa). De modo análogo, alguém que saiba que nenhum gato voa, reuniu, em sua consciência, o conceito de gato e o conceito de voar (tornando a conexão universal e negativa). (KANT apud BARKER, 1976, p.19)

Barker (1976, p. 19) apresenta o conceito de analítico e sintético fazendo uma analogia com princípios da Química: a síntese é o ato de colocar juntas coisas que estavam incialmente separadas e diferentes, já a análise é o ato de isolar de alguma coisa um de seus componentes, e segue exemplificando que o juízo segundo o qual nenhum gato voa é exemplo de juízo sintético, pois nada há, no conceito de gato, que exclua intrinsecamente o voar. Já o exemplo ou juízo segundo o qual todos os solteiros são não casados é exemplo de um tal juízo analítico porquanto o conceito de não-casado é exemplo de um tal juízo analítico porquanto o conceito de não-casado é parte intrínseca do conceito de ser solteiro.

O período que retrata a origem do conceito de demonstração se refere à Grécia antiga e ao antigo Egito. No antigo Egito a mensuração de terras tinha papel fundamental no cotidiano, uma vez que anualmente as enchentes do rio Nilo invadiam as terras de plantio apagando as limitações das propriedades, sendo obrigatório anualmente a demarcação das terras. Porém, no antigo Egito tal mensuração e demarcação se baseavam predominantemente no aspecto empírico, ou seja, na prática e na experimentação, tudo que funcionasse com frequência mesmo que não fosse demonstrado, mas constatado empiricamente ou indutivamente, seria tomado como prática regular mesmo que funcionasse apenas por aproximação. Como exemplo, eles aproximavam áreas de paralelogramos a áreas de retângulos que tivessem mesma base e mesma altura, muitas vezes, atribuíam as discrepâncias à imprecisão dos instrumentos e não ao fato de tal conceito matemático não ter sido provado, importando somente a praticidade.

Já os gregos absorveram o que os egípcios eram capazes de fazer, e assimilaram, portanto, o caráter empírico dos egípcios, e à arte de medir a terra atribuíram o nome de Geometria. Porém os gregos não apreciavam a geometria como os egípcios, apenas do ponto de vista utilitarista, mas admiravam o conhecimento pelo conhecimento, admiravam o saber teórico, e procuravam gradativamente encontrar demonstrações dedutivas rigorosas das leis acerca do espaço, que governavam as leis práticas da geometria. Platão e Pitágoras, por exemplo, valorizavam o saber teórico da geometria profundamente, comparavam, inclusive a geometria à metafísica e à religião. Além desses, Euclides 300 a.c. apresentou em sua obra *Os Elementos* um apanhado de todo o conhecimento relatado por seus precursores, tornando sua obra uma das mais influentes sobre o pensamento ocidental. Até o sec. XIX, *Os Elementos* não foi apenas o livro texto de geometria, como também representou o modelo daquilo que o pensamento científico devia ser.

Barker relata como Euclides iniciou e procedia na construção do primeiro modelo do que seriam futuramente as demonstrações matemáticas:

> Em primeiro lugar, ele sempre enuncia as suas leis em forma universal. Não examina as propriedades de uma determinada linha ou figura realmente; examina, ao contrário, as propriedades que todas as linhas ou figuras de tal ou qual espécie devem ter. Não apenas isso. Formula as leis de modo a torná-las rigorosas e absolutas--nunca são dadas como simples aproximações. Diz, por exemplo, que a soma dos ângulos de qualquer triangulo é sempre igual a dois ângulos retos; não diz tratar-se de um resultado aproximado ou usualmente verdadeiro--põe a asserção como algo rigorosa e absolutamente verdadeiro. O que é mais importante, Euclides não se limita a enunciar um grande número de leis geométricas; demonstra-as. (BARKER, 1976, p. 28).

Uma demonstração (pelo menos no sentido comum da palavra) é uma cadeia de raciocínios que nos permite asseverar uma conclusão, mostrando que ela decorre logicamente de certas premissas sabidamente verdadeiras. Fica assim claro que Euclides assenta suas primeiras demonstrações sobre premissas inicialmente verdadeiras, logicamente não havendo demonstração deste modo sem premissas verdadeiras. Isso esclarece a forma como *Os Elementos* de Euclides foi escrito, baseado em premissas geométricas válidas, se constroem outras premissas geométricas também válidas.

Para evitar uma demonstração cíclica, em que leis geométricas deduzem outras leis geométricas baseadas nas primeiras leis geométricas, e vice-versa, Euclides estabelece que as primeiras leis nas quais se basearia as demonstrações são chamadas postulados, e as conclusões ou demonstrações obtidas dos postuladas seriam chamadas de Teoremas ou Proposições. Com os cinco postulados de Euclides, é possível estabelecer o modelo "hipótese, então tese", utilizado usualmente no ato de demonstrar uma proposição.

Os cinco postulados de Euclides são:

> 1. Uma linha reta pode ser traçada de um para outro ponto qualquer.
>
> 2. Qualquer segmento finito de reta pode ser prolongado indefinidamente para construir uma reta.
>
> 3. Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual a dada distância.
>
> 4. Todos os ângulos retos são iguais entre si.
>
> 5. Se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então as outras duas retas se cruzam, quando suficientemente prolongadas, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos. (BARKER, 1976, p.30)

Barker (1976, p.31) destaca que basta observar os cinco postulados de Euclides para perceber que o pensamento grego dedutivo difere muito da postura empírica e indutiva do Egito antigo. Em nenhum momento Euclides se preocupa com algum problema concreto, ou tenta singularizar. Além disso, uma reta ideal, ou triângulo, ou qualquer que seja o conceito teórico da geometria não tem existência no mundo real.

Para Euclides, além dos cinco postulados, também estavam definidos cinco axiomas, embora axiomas e postulados hoje em dia sejam tratados quase como sinônimos. Para ele havia diferença entre postulados e axiomas. Ainda, conforme Euclides, postulados tratavam propriamente de temas ligados à geometria, ao passo que axiomas são mais genéricos e estão ligados ao tratamento de grandezas, sendo grandezas uma noção útil a outras matérias e não somente à geometria. São estes os axiomas de Euclides:

1. Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se parcelas iguais forem adicionadas a quantias iguais, os resultados continuarão sendo iguais.
3. Se quantias iguais forem subtraídas das mesmas quantias, os restos serão iguais.
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
5. O todo é maior do que as partes. (BARKER, 1976, p.33)

Para os gregos, provavelmente, a diferença entre axioma e postulados estava relacionada à credibilidade recebida pelas pessoas que dominassem tais temas, ou seja, se a pessoa dominasse os postulados estaria apta ao estudo da geométrica, caso contrário, não, mas ainda poderia estar apta ao estudo de outras áreas teóricas como Aritmética, Biologia, Música, etc., bastando para tal que compreendesse os axiomas, caso não dominasse os axiomas, não estaria apta a nenhuma área do conhecimento teórico

Segundo Barker (1976, p.33) Euclides faz questão de definir claramente os termos que serão utilizados em suas demonstrações, pois desse modo ganha-se clareza e há a garantia de que os termos estão adequadamente definidos e não há o risco de cair em falácias lógicas durante a demonstração. Assim, não há o risco de se demonstrar algo com um número maior de premissas que o previamente determinado, ou seja, aqui fica claro o método dedutivo hipótese então tese.

Assim como Euclides, Morais Filho (2013, p.152) estabelece o que seriam noções primitivas e axiomas, tais definições, axiomas e noções primitivas se fazem necessárias para evitar círculos viciosos, como em dicionários linguísticos, ou seja, se faz necessário estabelecer pontos de partida, entes que não carecem de serem demonstrados, bastando suas definições, ou enunciar axiomas, que seriam as ideias primitivas nas quais, por lógica dedutiva, se demonstram os teoremas. Deste modo na matemática moderna sempre fica claro os pontos de partida, mesmo que sejam teoremas, mas fica claro o que seria usado como hipótese, sejam eles definições, axiomas, teoremas, etc. que seriam usados para mostrar outro teorema. Assim sempre cabe a pergunta onde começar, qual é a definição ou axioma inicial. Para tanto Morais Filho define:

> Axioma ou postulado é uma sentença matemática que não é uma definição e é aceita como válida, sem precisar ser demonstrada. Bem diferente do que ocorre com os teoremas – precisam de demonstração -, os axiomas ou postulados não precisam ser demonstrados e são apresentados realmente como decretos. Entretanto, como as noções primitivas, esses "decretos" não surgem de opiniões pessoais isoladas, são frutos da experiência, da observação e, também, de um certo "consenso coletivo". (MORAIS FILHO, 2013, p. 154).

Este modelo de inferências, axiomas, definições e lógico-dedução que se assemelha ao modelo Euclidiano para a Geometria é chamado modelo axiomático moderno. É neste modelo que se assenta grande parte da matemática moderna, sendo assim definido:

> Um modelo axiomático é um conjunto finito de noções primitivas, de axiomas e de regras de inferência, usados para definir objetos e deduzir teoremas.
>
> Nas definições se utilizam as noções primitivas ou outras definições previamente feitas. Nas demonstrações dos teoremas podem se utilizar as definições, as noções primitivas, os axiomas, as regras de inferências e os teoremas previamente demonstrados. (MORAIS FILHO, 2013, p. 157).

Assim em uma demonstração axiomática, o que se busca é uma construção indubitável ou inquestionável, que se assenta em entes primitivos, ou seja, há um ponto de partida, tal ponto de partida é um consenso geral, são eles axiomas, definições, teoremas ou lemas primitivos que servem de ponto de partida para um teorema principal. É importante que o sistema axiomático seja consistente, ou seja, não seja possível deduzir informações contraditórias do mesmo, pois sistema axiomático consistente é aquele cujas deduções são claras, precisas e inconfundíveis.

Outro ponto fundamental no modelo axiomático é que a partir dele é possível ser capaz de se construir uma teoria bem fundamentada e livre de contradições, tal construção está fundamentada em um rigor lógico inconfundível. Além disso, não há necessidade de qualquer teoria prévia ou conhecimentos prévios acerca da teoria a ser desenvolvida, tudo fica bem organizado e sabe-se o que depende de quê.

Mas além dos axiomas e postulados, também são pontos de partida para as demonstrações de Euclides as definições que são apresentadas no início do primeiro livro dos Elementos.

Barker (1976) ressalta que atualmente há escolhas a se tomar para constituir um sistema geométrico. A primeira escolha cabe a lista de termos e conceitos, em seguida, a de axiomas, notando que atualmente axiomas e postulados são sinônimos. Assim, nomes como Hilbert ou Oswald Veblen constituíram sistemas geométricos distintos, para tanto, as escolhas de conceitos ou termos e axiomas foram distintas. Atualmente as escolhas distintas são perfeitamente legítimas, notando que quanto menor o número de elementos escolhidos mais elegante torna-se a demonstração ou sistema geométrico.

Além disso, ressalta que os modernos estudiosos buscam constantemente demonstrações mais elegantes e econômicas. Quanto menor ou mais econômica for a lista dos termos primitivos e axiomas de uma demonstração, mais elegante se torna a demonstração. Em contrapartida se o sistema for muito econômico em seus axiomas e termos primitivos, torna-se inviável a conclusão das demonstrações.

Para a maioria dos pensadores a geometria era um conhecimento de caráter a priori, não empírico. Platão reforçava que nossas experiências com os entes geométricos se davam apenas no campo das ideias, sendo impossível dessa maneira colher evidências por meio dos sentidos sensoriais, afastando de vez uma leitura empírica da geometria.

Além de ser um conhecimento a priori, a geometria é um conhecimento sintético:

> Há outro ponto de relevo, na questão do status dos postulados e teoremas de Euclides, que teria sido aceito pela maioria dos pensadores, pelo menos até o século XIX. Eles diriam que os postulados de Euclides, assim como grande parte dos importantes teoremas que de tais postulados seriam dedutíveis, constituem verdades a priori dotadas do tipo de conteúdo que, no jargão filosófico, as tornaria princípios sintéticos e não analíticos. (BARKER, 1976, p. 43).

É possível, portanto, entender que o conhecimento sintético está diretamente relacionado com a geometria e ao conhecimento a priori, já, o conhecimento analítico está diretamente relacionado com a lógica e conhecimento indutivo.

A nobreza intelectual do caráter sintético dado à geometria foi denominada por Rene Descartes apud Barker (1976, p.45) como “ver” com os “olhos da razão”, ou seja, trata-se de uma penetração racional, com uma conotação quase mística. Além de Descartes, Platão também via a geometria com uma mística, que é exemplificada em uma determinada situação na qual

Platão pede a Sócrates que chame um jovem escravo, sem instrução, para resolver um problema de geometria. Sem instruir o jovem, apenas fazendo perguntas, Sócrates conduz o jovem à resposta correta. Em seguida Sócrates esclarece tal fato baseado na preexistência das almas, crendo ele que fez o jovem se recordar de conhecimentos geométricos que tinha antes de nascer. Platão, assim como Sócrates, acreditava que antes de nascer a alma humana assumia um diferente estado metafísico no qual era possível contemplar linhas perfeitas, ângulos perfeitos, figuras perfeitas, etc., ou seja, antes do nascimento a alma humana esteve exposta à geometria teórica e, nesta vida, é possível relembrá-la, tratando-se, portanto, de um conhecimento a priori que independe da experiência, e se apresenta de uma forma sintética partindo do particular para o geral.

Morais Filho (2013) sugere que para o iniciante demonstrar é importante entender claramente o enunciado do teorema, ou seja, saber destacar a (s) hipótese (s) e a tese. Quando estes não estiverem claros de início, é interessante um exercício mental para conseguir fazê-lo, ou seja, separar os elementos da hipótese dos elementos da tese para, assim, compreender melhor o que se quer demonstrar. Como curiosidade, o autor destaca que um mesmo teorema pode possuir inúmeras demonstrações diferentes, como exemplo, o teorema de Pitágoras, que possui demonstrações por Leonardo da Vinci e James Abram Garfield.

Se o teorema “se P então Q” for verdadeiro e passível de ser demonstrado, assim como seu recíproco “se Q então P” for também verdadeiro e passível de ser demonstrado, estamos diante de um “se, e somente se” e sua demonstração é feita justamente como dito: P se, e somente se, Q, inicialmente toma-se P como hipótese e se deduz a tese Q e reciprocamente depois se toma Q como hipótese e se deduz P como tese.

Outra característica das demonstrações é a generalização de casos particulares, ou seja, observa-se um fato particular para alguns elementos e busca-se uma forma algébrica genérica para qualquer caso. Morais Filho (2013) esclarece que a maior parte dos teoremas do Ensino Fundamental já se apresenta em sua forma mais genérica, mas nada impede uma análise mais detalhada do leitor, ou seja, buscar novas demonstrações, casos particulares, etc.

Morais Filho esclarece que é importante o leitor estar familiarizado com alguns elementos acerca de teoremas. São eles:

> i) Corolário que nada mais é do que um teorema consequência de outro teorema recém provado;
>
> ii) Lema que seria um teorema auxiliar ou preparatório para o principal que se deseja provar;

> iii) Proposição é um teorema que não é central no tema estudado;
>
> iv) Teorema de existência e unicidade, são teoremas que garantem existir pelo menos um elemento que satisfaz determinada propriedade, ou garante existir um único elemento que satisfaz determinada propriedade. (MORAIS FILHO, 2013, p. 126).

Assim como Euclides se preocupou, na Geometria, em estabelecer axiomas, postulados e definições para finalmente abordar demonstrações dedutivas, é fundamental em qualquer área da matemática entender o significado de definições matemáticas para fazer uso das mesmas no ato de demonstrar.

Segundo Morais Filho (2013, p.134) é importante definir para se demonstrar, pois para mostrar que um número é primo, precisamos saber qual é a definição de número primo e o número em questão deve gozar das características de um número primo, para demonstrar que uma função é sobrejetiva precisamos saber qual é a definição de função sobrejetiva e o objeto em questão deve possuir as propriedades de uma função sobrejetiva. São justamente os fatos, características ou propriedades que são usados para se definir matematicamente um objeto.

Definir é dar nomes a objetos matemáticos, mediante determinadas propriedades interessantes que possuam e que os caracterizem. Esses nomes devem constituir de uma única palavra, como triângulo, ou de uma frase curta, como números primos entre si.

Definições devem evitar ambiguidades, ser claras e sucintas, classificar e distinguir plenamente o objeto definido, devem evitar círculos viciosos (o objeto A define o objeto B e vice-versa). Em resumo, um objeto matemático é definido por certas propriedades e apenas esse objeto matemático possui essas propriedades (MORAIS FILHO, 2013, p.137).

Assim, para se demonstrar, é preciso ter em mente o que é a hipótese, o que define a hipótese, o que é a tese, o que define a tese, ou seja, é necessário ter clareza na definição de cada objeto matemático envolvido na demonstração.

Assim fica claro que o modelo lógico dedutivo dos gregos difere muito do modelo empirista dos babilônicos e egípcios. Talvez o primeiro grego a dar início à preocupação com este modelo lógico dedutivo foi Tales de Mileto (625-546 a.C), mas o mais próximo do modelo ideal axiomático realmente se deu no modelo Geométrico de Euclides (300-260 a.C).

Cabe salientar um adendo: quando se demonstra é importante saber assumir convenções matemáticas, ou seja, saber estabelecer dentro da matemática certas normas que serão usadas posteriormente, normalmente essas normas nascem de necessidades práticas, tais como: assumir se o algarismo zero é natural ou não, ou definir o fatorial de zero como sendo um e assim por diante. As convenções também ajudam a conter o exagero do formalismo, por exemplo, se é desejado calcular a área de um triângulo e se compreende como triângulo os três segmentos de reta, entende-se que tal área será nula, já se convencionarmos como área desejada a região triangular formada pelos três segmentos de reta, o cálculo se torna mais natural.

Barker (1976) observa que o modelo tem funcionado bem no cotidiano para a geometria, mas quando se trata dos números as coisas não são bem assim, de fato:

> Tem sido comum, desde os tempos de Euclides, apresentar a geometria na forma de um sistema axiomático. Alguns outros modos de apresentar a Geometria foram adotados pelos matemáticos modernos, o critério axiomático, no entanto, continuou a ser utilizado, de modo amplo, servindo para apresentar a matéria aos principiantes. A nossa matemática dos números, porém, não tem sido tradicionalmente organizada em forma axiomática. A Aritmética, a Álgebra do colégio, bem como certos tópicos da análise, digamos cálculo diferencial e integral, foram, de hábito, apresentados na forma de coleções de regras de computação e não na forma de sistemas axiomatizados de leis. A diferença deve-se a uma espécie acidente histórico. Nasce do fato de a nossa moderna matemática dos números ter-se originado da matemática dos babilônios, hindus e árabes, não da matemática dos gregos. Os gregos trataram em verdade, de problemas numéricos, dando-lhes, entretanto, interpretações geométricas; em outras palavras, ao cogitarem de uma questão acerca da grandeza comparativa de dois números, os gregos tratariam do problema como se fora um problema acerca dos comprimentos de duas linhas ou acerca das áreas de duas figuras. (BARKER, 1976, p. 77).

O que difere o tratamento axiomático dado à geometria e à forma de lidar com os números está diretamente relacionado com os povos que contribuíram para o desenvolvimento destas duas áreas do conhecimento matemática. Como citado acima, os gregos principalmente Euclides deram um tratamento axiomático e lógico dedutivo à geometria, enquanto isso, com os números, o desenvolvimento se deu de uma forma um tanto diferente, foram os babilônios, hindus e árabes que deram surgimento na matemática o que hoje chamamos de álgebra, introduziram símbolos e letras, regras de cálculo, e esta simbologia permitiu tratar a matemática algébrica de uma maneira mais abstrata e eficiente do que era para os gregos. Os babilônicos, hindus e árabes não se preocupavam tanto com demonstrações nem com a organização dos seus registros de cálculos, logo não se preocupavam em apresentá-los de uma forma axiomática.

No entanto, a geometria da Idade Média continuou a ser ensinada da forma axiomatizada como Euclides idealizou. Já a matemática dos números passou a ser ensinada como uma coleção, comparativamente desconexa, de leis e de regras de calcular, porém isto está sendo gradualmente mudado, uma das metas da matemática do século vinte era a axiomatização de outros setores da matemática. (BARKER, 1976, p 78).

Talvez o método axiomático dedutivo da geometria grega e o analítico algébrico da matemática babilônica, hindu e arábica tenham delineado grande parte das dificuldades que nossos alunos encontram ao estudar matemática, uma vez que ambos os modos são em essência totalmente diferentes.

Finalmente está ficando claro o que é uma demonstração matemática, em que se baseiam seus métodos, sua origem, áreas em que ainda avançam, mas a propósito qual é o motivo pelo qual se torna necessário o ato de demonstrar. E a resposta tem tudo a ver com a palavra conjectura, ao se entender o significado de conjectura, já se dá um grande passo para saber o que significa uma demonstração e para que serve.

Morais Filho (2013) apresenta algumas sentenças matemáticas para introduzir o assunto e discutir sobre, são elas:

> Sentença 0: Toda garota brasileira de 17 anos usa batom.
>
> Sentença 1: Todo número na forma $n^2 + n + 41$, para n$\geq$ 0 é um número primo,
>
> Sentença 2: Qualquer número da forma $991n^2 + 1$, para n natural, n$\geq$ 1, não é um quadrado perfeito (isto é, não é da forma k^2, para algum k natural).
>
> Sentença 3: um número par maior que 2 pode ser escrito como a soma de dois números primos.
>
> Sentença 4: Log_7 10 é um número irracional. (MORAIS FILHO, 2013, p. 176).

Todas as sentenças acima podem ser chamadas conjecturas, uma vez que sua escrita se baseia na desconfiança de alguma delas possa ser verdadeira, no entanto, não se sabe se alguma delas é verdadeira, o que se tem é uma suposição de que alguma o seja, mas enquanto não houver uma prova que testifique a veracidade do que se está escrito, chamamos cada uma das sentenças de conjectura.

Na sentença (0), por exemplo, mesmo que uma multidão de garotas de 17 anos apareça em nossa frente utilizando batom, não há garantia de que todas que não vieram também usam batom, e como é impossível verificar se todas as garotas usam batom, basta que uma apareça não usando batom para que nossa conjectura de que todas usam batom falhe, na verdade, essa única garota que verificamos não usar batom é chamada de contraexemplo para a conjectura (0).

Na sentença (1), se o investigador confiar em seus testes terá que testar todos os números naturais de 1 até 39 e ainda assim será verdadeira a sentença. No entanto, se ele insistir e testar para na natural 40 verá que a sentença falha, ou seja, o resultado da operação será um número natural não primo, falhando a conjectura.

Já na sentença (2), a investigação é um tanto quanto mais árdua, pois o investigador terá que testar todos os números naturais até:

N=12.055.735.790.331.359.447.442.538.767 para finalmente a conjectura falhar.

Assim, até aqui é possível perceber que uma sentença é válida se apresentar um teorema que ateste sua afirmação, e será falsa bastando para isso apresentar um único contraexemplo, mas o difícil é encontrar tal contraexemplo, ou, no caso, demonstrar a autenticidade da afirmação.

Morais Filho (2013, p.178) destaca um bom exemplo na sentença (3), conhecida como Conjectura de Goldbach, para a qual ainda não se consegue apresentar um contraexemplo na qual a sentença é falsa, nem se consegue apresentar uma demonstração comprovando sua autenticidade. Finalmente a sentença (4) é verdadeira e possui uma teoria clara na qual é possível demonstrar sua veracidade.

Nas sentenças estudadas, o autor deixa claro dois termos matemáticos importantíssimos em nossa jornada para entender o que é uma demonstração e são eles:

> Contraexemplo: Na matemática quando é possível encontrar um exemplo que satisfaz a hipótese, mas contraria (não cumpre) a tese de uma sentença implicativa ou condicional, esse exemplo é chamado contraexemplo.
>
> Conjectura: Uma conjectura matemática é uma afirmação para a qual ainda não se dispõe de uma demonstração que comprove sua validade, ou de um contraexemplo para garantir que ela não é válida. Numa conjectura, alguém emite sua opinião sobre algum resultado e afirma sua convicção de que determinado fato é válido ou não, Como essa pessoa não consegue provar a opinião que deu, cabe à comunidade matemática encontrar uma demonstração ou um contraexemplo para a opinião emitida. É claro que para chamar uma sentença de conjectura deve-se ter bastante desconfiança da veracidade do que se está afirmando. (MORAIS FILHO, 2013, p. 178).

Aqui está um grande salto no aprendizado de matemática de uma pessoa: durante o ensino médio são propostos uma série de exercícios ou atividades pedindo para resolver questões, encontrar raízes, etc. Nestes exercícios, sabe-se exatamente o que fazer, entretanto, ao longo da vida acadêmica você vai encontrar uma série de exercícios que não serão apresentados desse jeito e, diante de um resultado afirmado que você não sabe ser válido, só há duas alternativas: demonstrá-lo ou encontrar um contraexemplo para ele. Essa busca envolve tentativas, erros e acertos. O trabalho e a experiência vão lhe ensinar com esse método. (MORAIS FILHO, 2013, p. 179).

A intuição é um ingrediente importante na busca de demonstrações, mas é falha, pois se mal utilizada pode-se enganar, imaginação e visão geométrica também devem ser desenvolvidos. Além disso, cabe ressaltar que um único contraexemplo é suficiente para demonstrar que um resultado não é válido, no entanto, não importa o número de exemplos dados, mesmo assim, não seria suficiente para provar que tal resultado é válido, ou seja, um contraexemplo é uma maneira de demonstrar que um resultado é falso.

Morais Filho ressalta que resultados lógicos dados por vacuidade demonstram o poder da lógica e do conjunto vazio, veja o seguinte exemplo:

> Sentença 1: Todo quadrado de três lados tem área igual a 2013;
>
> Sentença 2: um número positivo menor do que 1 é divisível por 9;
>
> É possível perceber que nos dois casos acima embora esquisitos a lógica formal funciona. Por vacuidade. (MORAIS FILHO, 2013, p.184).

Enfim, demonstrar é ir além do observar, ou simplesmente aceitar que determinados fatos funcionam, é preciso avançar mais, é preciso demonstrar diferentemente das ciências empíricas. É necessário utilizar resultados anteriores, definições, axiomas etc., e encadear tudo de forma lógico dedutiva.

O que se precisa é de uma estrutura se H então T, ou seja, se vale determinada hipótese H, ou até mesmo várias hipóteses no plural, o que se deseja é mostrar por raciocínios lógico dedutivos, que as validades das premissas valem logicamente se todos forem verdadeiros implicando na veracidade da tese T.

Além disso, uma demonstração não é apenas uma sequência de premissas lógicas, e sim composta de duas partes, sua estrutura lógica, como definida anteriormente, e sua apresentação, que é a maneira como ela foi redigida, sendo assim, não se deve escrever uma lista de proposições. (MORAIS FILHO 2013, p 193).

Morais Filho (2013) nos diz que, para redigir e deduzir uma demonstração, o matemático tem ao seu dispor os seguintes itens que podem ser utilizados quantas vezes forem necessárias:

> 1.Hipótese (s);
>
> 2.Axiomas;
>
> 3. Definições;
>
> 4. Teoremas já demonstrados;
>
> 5.Os passos da demonstração, previamente provados;
>
> 6. Regras de inferência e as técnicas de demonstração. (MORAIS FILHO, 2013, p. 193).

Além disso, as demonstrações têm características bastante particulares:

> Demonstrar é um ato de persuasão, de convencimento, baseado em argumentações lógico-dedutivas, por isso é tão importante (também) saber redigi-las para outras pessoas entenderem o que foi feito. Ninguém deve acreditar em um fato matemático, mas deve ser convencido por meio de uma demonstração de que ele é válido. Muitas vezes esse convencimento é para você mesmo, mas, na maioria das vezes, a demonstração é para convencer outra pessoa da validade do fato.
>
> As demonstrações são como rituais indispensáveis, usados para provar resultados matemáticos, o que garante a validade deles, mesmo os que a princípio possamos não acreditar, nem aceitar ou não sermos capazes de dar uma opinião decisiva sobre eles. (MORAIS FILHO, 2013, p. 195).

Morais Filho (2013, p. 196) destaca que não há matemática sem demonstrações, as demonstrações compõem parte da estrutura lógica essencial do que é constituída a Matemática e da maneira como a Matemática funciona. No entanto, lamenta a postura de muitos livros didáticos e até mesmo professores que simplesmente eliminam as demonstrações da educação básica, muitas vezes substituindo o ato de demonstrar por frases ou palavras genéricas do tipo é fácil ver, é possível verificar ou observar, etc.

O mesmo autor declara que esta atitude dentro da matemática seria o mesmo que professores de língua portuguesa deixarem de falar de verbos ou professores de química deixarem de falar de elementos químicos, uma vez que, como dito, demonstrações matemáticas estão no cerne desta ciência lógico dedutivista.

No entanto, há de se ter prudência quando se fala de demonstrações matemáticas, pois é claro que não se deve, na educação básica, sair demonstrando todo e qualquer teorema sem antes observar se cabe à etapa de ensino em questão, ou se os alunos estão preparados para os termos envolvidos naquela demonstração.

1.2 Tipos e métodos de demonstração

Demonstrar está entre o que há de mais engenhoso na matemática, pensar de onde surgem as ideias que permitem as demonstrações, por si só, já podem se tornar um exercício engenhoso de matemática. Por outro lado, entender e conhecer os métodos de demonstrar pode ser visto como o que há de mais belo na matemática.

Morais Filho (2013) destaca:

> Um método de demonstração adequado para provar determinado resultado depende do resultado em si, da existência de uma teoria eficaz para atacar o problema em questão e, muitas vezes, de uma escolha possível e pessoal do tipo de argumentação que poderá ser usada naquela demonstração. (MORAIS FILHO, 2013, p. 200).

A diversidade teórica encontrada nas demonstrações torna a matemática mais bela, pois um teorema famoso como o de Pitágoras, por exemplo, possui pelo menos 370 demonstrações diferentes. Assim, um teorema, por qualquer que seja, está repleto de argumentos que o cercam, muitas vezes complexos, outras vezes ingênuos, outras vezes engenhosos, mas sempre contundentes, e em casos como o teorema de Pitágoras, desde que usemos argumentos lógicos e verdadeiros, poderemos chegar a um mesmo resultado por inúmeros caminhos diferentes, em outros casos pode existir uma única demonstração por enquanto, ou até mesmo nenhuma demonstração, apenas uma conjectura, mas o ato de demonstrar enriquece a matemática de maneira única.

Morais Filho (2013, p.201) aconselha, para aqueles que se iniciam no mundo das demonstrações, a buscar aumentar o repertório de demonstrações, ou seja, as demonstrações não são todas iguais, mas devido à dificuldade em seus diversos tipos, pode se ganhar tempo ou economizar esforços utilizando técnicas já experimentadas anteriormente, pois demonstrar requer erros, acertos, experiências, tentativas, etc.

Morais Filho destaca também:

> Em verdade um bom começo é conhecer detalhadamente as demonstrações de diversos resultados e, ao se deparar com algum outro resultado que se deseja demonstrar, tentar empregar alguma das ideias, técnicas ou procedimentos dessas demonstrações conhecidas. Ao tentar demonstrar um fato, não tenha medo de imitar uma demonstração conhecida! É também assim que se aprende. Há quem chame, sofisticadamente, esse procedimento de ***demonstração por analogia*** (MORAIS FILHO, 2013, p. 201).

Além da experiência como citado anteriormente, através do contato com outros materiais, é importante que aquele que se propõe a demonstrar exercite sua intuição, seu caráter inventivo, enfim, é fundamental pôr a mente para funcionar.

Morais Filho (2013, p. 202) acrescenta que uma demonstração não está pronta sem uma redação final bem redigida, é importante respeitar até mesmo as normas gramaticais comuns, pois não adianta ser apressado, sair demonstrando tudo diretamente, sem ler, reler e refletir sobre o que está se demonstrando.

Além disso, é importante ler bons livros e tentar absorver as boas técnicas de demonstração dos grandes autores, isso tudo é importante, pois tão importante quanto a ideia que está por trás de uma demonstração é conseguir transmitir esta ideia para o leitor da demonstração, para que o mesmo a entenda com clareza e sem dúvidas.

Não há receitas mirabolantes para se saber demonstrar, nem técnicas prontas, é sim necessário dedicação e transpiração para se alcançar os resultados esperados, tem sido assim há centenas e centenas de anos, mesmo para aqueles acima da média, não há bons resultados sem dedicação ao extremo.

Morais Filho fornece um roteiro para se demonstrar que merece ser destacado:

> 1. Destaque os resultados matemáticos que aparecem no resultado.
>
> Conheço todos os elementos que compõem o resultado? Sei a definição matemática de cada um deles? Estou apresentando uma notação e definições adequadas para atendê-los e para serem usadas posteriormente na demonstração?
>
> 2. O que quero provar?
>
> Diante do resultado a ser demonstrado, muitas vezes, vemos algumas pessoas perdidas, sem ao menos saberem dar o primeiro passo. Primeiramente, é necessário entender o que se quer demonstrar. Não importa quantas vezes seja necessário repetir a pergunta anterior, só continue quando respondê-la sem titubear. É necessário compreender plenamente o resultado, antes de ensaiar qualquer tentativa de prová-lo.
>
> 3. Escreva separadamente a conclusão que quer chegar e o que tem a sua disposição para começar a demonstração, nesse item entram a (s) hipótese (s).
> 4. É possível verificar que o resultado é válido para alguns exemplos? Posso detectar algumas propriedades ou características comuns nesses exemplos, que sejam fundamentais para o resultado funcionar? Essas propriedades ou características podem ser usadas na demonstração?
> 5. A tese fornece algum indício de como começar a demonstração, nunca a perca de vista.
> 6. Antes de começar a desenvolver a demonstração: Conheço a demonstração de algum resultado semelhante?
> 7. Caso conheça algum resultado semelhante: Posso utilizar a técnica de demonstração que conheço para esse resultado? É preciso introduzir algum elemento auxiliar, extra, que me ajude nesse sentido?

> 8. É necessário reenunciar o resultado de modo a torná-lo mais simples de ser manipulado, com algum caso particular do original, de forma a me dar mais argumentos para fazer a demonstração?
> 9. Esboce um esquema de demonstração (ao menos mentalmente) levando em conta todas as respostas às perguntas anteriores. O resultado depende de casos particulares? É preciso dividir a demonstração em alguns casos distintos? Preciso usar demonstrações diferentes em cada caso?
> 10. Ao longo da demonstração, tome toda cautela para não usar raciocínios ou definições erradas, muita atenção, também, com as falsas deduções.
> Analise cada passo dado. Siga uma cadeia de raciocínio lógico. Deixe claro onde está usando cada hipótese.
> Caso a demonstração seja longa demais, é conveniente dividi-la em passos ou teoremas mais curtos (lemas, teoremas ou corolários); siga todas as dicas anteriores para cada um desses passos ou teoremas.
> 11. Escreva a demonstração. Esse passo é tão importante quanto fazer a demonstração. Conclua a redação da demonstração, ressaltando que chegou na dedução da tese.
>
> Terminada a demonstração, é necessário analisá-la criticamente. O que pode ser muito enriquecedor para o aprendizado. Todos os dados disponíveis foram usados? Há algum supérfluo? O resultado admite generalização? O método pode ser aplicado para outros resultados? Quais? (MORAIS FILHO, 2013, p. 203).

Efetuados todos estes passos, o último é finalizar a demonstração com siglas como C.Q.D. (ou como queríamos demonstrar), ou simplesmente c.q.d., ressaltando que, antigamente o mesmo era feito em latim Q.E.D, (Quod Erat Demonstrandum), cuja tradição remonta a obra de Euclides. Atualmente costumam com a mesma finalidade utilizar o símbolo ■ (MORAIS FILHO, 2013, p. 205).

Basicamente Morais Filho (2013, p.208) classifica as demonstrações em dois grandes grupos: das demonstrações diretas e das demonstrações indiretas, sendo que no grupo das demonstrações indiretas estão inclusas as demonstrações por redução a um absurdo e as demonstrações utilizando a contrapositiva. Dentro destes grupos citados de demonstrações estão os procedimentos mais uteis e gerais de demonstrações, que são eles: 1. Demonstrações utilizando a forma de representar um objeto matemático. 2. Demonstrações com auxílio de figuras. 3. Demonstrações usando o princípio de indução finita.

O primeiro modo de demonstração já foi comentado, é o que remete aos princípios de demonstrações de Euclides, em seu livro *Os Elementos*, são as demonstrações diretas, que a partir de definições, postulados, axiomas e outros teoremas, seguindo premissas lógicas e verdadeiras, chegamos em uma verdade absoluta, no caso, a Tese do teorema por meio de passos lógico dedutivos.

1.3 Demonstração por contrapositiva.

Morais Filho (2013, p.220) mostra, a seguir, que é importantíssimo, nas demonstrações, saber negar na matemática, principalmente pelas demonstrações por redução a um absurdo e pelas demonstrações por contrapositiva. Por exemplo negar uma demonstração do tipo Se hipótese H então tese T, basta que tenhamos a Hipótese H e a tese falhe para um único elemento, ou seja, Se H então ~T[1]. Ainda, no teorema de Pitágoras, bastaria que existisse um único triângulo retângulo que não tivesse o quadrado da hipotenusa igual à soma dos quadrados dos catetos para negar a veracidade do teorema, o que de fato não ocorre, assim, a negação de se H hipótese então tese T, é o mesmo que existir pelo menos um elemento que satisfaz a hipótese H, mas não cumpre a tese T.

Ainda falando de negações, é importante entender um pouco sobre as tautologias, embora tautologias sejam sentenças sempre verdades em qualquer situação e, como estamos interessados em provas por contra positivas ou por redução a um absurdo, o oposto das tautologias nos interessa bastante nas negações, por exemplo, uma sentença do tipo P/\~P[2] é sempre falsa independentemente do valor lógico de P, ou seja, é o oposto de uma tautologia, pelo princípio do terceiro excluído, estamos diante de um absurdo.

Como citado anteriormente, existem grupos de demonstrações inclusive o mais tradicional, o da demonstração direta que, baseada em premissas verdadeiras, deduz uma conclusão também verdadeira, mas a demonstração direta nem sempre funciona para todos os casos a se demonstrar, logo, é necessário recorrer a outros métodos de demonstração, sendo o primeiro que vamos destacar aqui é o método de demonstrar por contrapositiva.

Um exemplo clássico que Morais Filho (2013, p.247) usa para isso é o seguinte: “se n é um número natural e n^2 é natural e par, então n também é par”.

Dado que “se n^2 é par, então n é par”, a contrapositiva de tal afirmativa é a condicional: “se n é ímpar, então n^2 é ímpar”; ou seja, para se construir uma contrapositiva, o que se faz é

---

[1] O símbolo ~ é utilizado em lógica para negar uma sentença e sua leitura corrente é ”não”, por favor, leitor sempre que aparecer esse símbolo entenda como negação de uma dada sentença, seja ela verdadeira ou falsa.
[2] O símbolo ∧ é utilizado em lógica para indicar a conjunção simultânea de duas afirmações e lê-se “e”, quando estas afirmações são opostas e não podem ocorrer simultaneamente como o operador sugere que estamos diante de uma contradição.

inverter hipótese e tese, e não só isso, também é necessário negar a hipótese e a tese, assim, se hipótese H então tese T, a contrapositiva seria, se não tese $\sim T$ então não hipótese $\sim H$.

O fato mais importante ao se trabalhar com contrapositivas, se deve a ambas as sentenças serem equivalentes, ou seja, é indiferente provar a afirmação original quanto provar sua forma contrapositiva. Tal resultado muitas vezes facilita as demonstrações matemáticas enormemente, pois é interessante observar como a forma contrapositiva de uma sentença muitas vezes se torna mais amigável que a sentença original.

Morais Filho (2013, p.286) elucida que, muitas vezes, embora a forma contrapositiva seja mais interessante para se demonstrar, o enunciado apresenta a afirmação tradicional, pois a forma tradicional pode ser a mais tradicional e elegante, cabe ao leitor ficar atento para demonstrar e observar se a forma contrapositiva pode realmente ficar mais fácil e viável e para tanto usá-la.

É interessante observar que: como as afirmações, se hipótese H então tese T e se não tese $\sim T$ então não hipótese $\sim H$ são equivalentes, podemos juntar as duas demonstrações para provar uma demonstração por absurdo do tipo $H \wedge \sim H$, já que ambas as sentenças originais e contrapositivas coexistem e são equivalentes.

Pela equivalência de afirmações contrapositivas temos:

"Se n^2 é par, então n é par", se e somente se, "se n é ímpar, então n^2 é ímpar"

O que se quer provar é: "Se n^2 é par, então n é par"

Mas pela equivalência de sentenças matemáticas, provaremos:

"Se n é ímpar, então n^2 é ímpar"

Logo, tomemos n ímpar como hipótese e tentemos chegar a tese n^2 é ímpar:

$$n = 2k + 1 \Longrightarrow$$

$$n^2 = (2k + 1)^2 \Longrightarrow$$

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Longrightarrow$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Longrightarrow$$

$$n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \Longrightarrow$$

$$n^2 = 2m + 1$$

com m$=(2k^2 + 2k) \in \mathbb{Z}$

$\therefore Se\ n$ é $ímpar, então\ n^2$ é $ímpar\ se, e\ somente\ se, Se\ n^2$é $par\ então\ n$ é par■

1.4 Demonstração por absurdo

A demonstração feita acima, é comumente utilizada como lema para demonstrar a irracionalidade da raiz quadrada de 2.

De fato, a demonstração da irracionalidade de 2 é dado como exemplo por Morais Filho (2013, p.248) e será nosso segundo tipo de demonstração indireta, a demonstração por redução a um absurdo, ou ainda, demonstração por absurdo, demonstração por contradição, reductio ad absurdum.

Em geral, o que se faz em uma demonstração por redução a um absurdo do tipo se H hipótese então T tese é supor temporariamente que a tese T seja falsa, ou seja, Se H hipótese então ~T não tese e daí por passagens lógico dedutivas verdadeiras se encontra um absurdo do tipo Q/\~Q chamado absurdo ou contradição, logo, para se chegar a uma conclusão absurda em passagens corretas o erro só pode estar no início ao supor que a T tese não fosse verdadeira, ou seja, supor que o que realmente valia era a não tese ~T, portanto, a verdade está no que se desejava provar se H hipótese então T tese.

O que se deseja demonstrar é que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Ou, em linguagem mais formal, temos:

Se $x \in \mathbb{R}, x > 0$ e $x^2 = 2$ então $x \notin \mathbb{Q}$

Vamos supor, por absurdo, (provisoriamente) que a nossa tese seja falsa, ou seja, vamos supor que $x \in \mathbb{Q}$, mas se $x \in \mathbb{Q}$ então x pode ser escrito na forma $x = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{Z}$ e primos entre si, ou seja, em sua forma irredutível.

Assim

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow 2q^2 = p^2$$

Desta última igualdade pela unicidade da decomposição em fatores primos podemos concluir que ambos os lados da igualdade são divisíveis por 2, portanto, p^2 é par e pelo lema anterior p também deve ser par, logo $p = 2k$, com k inteiro, e substituindo p em:

$$2q^2 = p^2 \Longrightarrow$$

$$2q^2 = (2k)^2 \Longrightarrow$$

$$2q^2 = 4k^2 \Longrightarrow$$

$$q^2 = 2k^2$$

Desta última igualdade pela unicidade da decomposição em fatores primos podemos concluir que ambos os lados da igualdade são divisíveis por 2, portanto, q^2 é par e pelo lema anterior que q também deve ser par, logo $q = 2z$, com z inteiro, o que contraria nossa hipótese de p e q serem primos entre si, pois ambos possuem o fator primo 2 em sua decomposição, e assim, chegamos em uma situação de absurdo do tipo $Q \wedge \sim Q$. ■

Não há uma metodologia infalível que determine quando se deve usar o método direto de demonstração ou o método indireto, o melhor caminho a seguir é a prática de várias tentativas de se demonstrar.

1.5 Demonstração analítica

Com o surgimento da álgebra e da análise, o método sintético dedutivo deu espaço ao método analítico algébrico no qual manipulamos a tese provisoriamente sem perdê-la de vista até construirmos nossas hipóteses com mais clareza, as quais no processo de trás para frente deduzirão a tese.

Morais Filho (2013, p.270) também usa um exemplo clássico para demonstrar o método analítico, ele demonstra a desigualdade entre as médias geométricas e aritméticas, como segue, Teorema:

Se x e y são números reais positivos, então $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

O que se faz neste caso é manipular a tese, não com certeza de sua veracidade, mas sim com dúvida, porém, a manipulação busca alcançar a hipótese de trás para a frente para depois ser possível reverter os passos. Vejamos:

$$? : \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \Longrightarrow$$

$$? : 2\sqrt{xy} \leq x + y \Longrightarrow$$

$$? : 4xy \leq (x+y)^2 \Longrightarrow$$

$$? : 4xy \leq x^2 + 2\,x\,y + y^2 \Longrightarrow$$

$$? : 0 \leq x^2 - 2\,x\,y + y^2 \Longrightarrow$$

$$! : 0 \leq (x-y)^2$$

Como chegamos a uma verdade absoluta que contém as hipóteses iniciais, basta escrever tudo de trás para frente:

$$x \text{ e } y \text{ são números reais positivos} \Longrightarrow$$

$$0 \leq (x-y)^2 \Longrightarrow$$

$$0 \leq x^2 - 2\,x\,y + y^2 \Longrightarrow$$

$$4xy \leq x^2 + 2\,x\,y + y^2 \Longrightarrow$$

$$4xy \leq (x+y)^2 \Longrightarrow$$

$$2\sqrt{xy} \leq x + y \Longrightarrow$$

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \;\blacksquare$$

Nesse tipo de demonstração é importante não perder a tese de vista, verificar se todas as etapas são reversíveis para que, no momento da dedução, seja possível se reescrever tudo de trás para frente sem problemas, até novamente encontrarmos a tese no seu devido lugar, deduzida da hipótese que, no caso, era uma desigualdade totalmente válida e seguida de premissas também válidas.

1.6 Demonstração da existência

A maneira mais básica de se demonstrar a existência de algum ente matemático é apresentar tal elemento diretamente ou construí-lo; a esse modo de demonstração, chamamos de demonstração construtiva, mas muitas vezes a construção de tal exemplo não é tarefa fácil e, novamente, a demonstração por redução a um absurdo se torna um método interessante para tal demonstração, basta, para tal, supor a inexistência provisória de tal objeto, se tal objeto realmente existir encontraremos nas deduções lógicas alguma contradição, ou seja, o objeto matemático procurado com certeza existe, embora não tenha sido construído um exemplo para o mesmo.

Morais Filho apresenta um exemplo clássico da existência de um conjunto que satisfaz hipótese e tese da seguinte sentença. Em qualquer festinha, existem pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos na festa.

> H: Existe uma festinha com mais de duas pessoas.
>
> T: Pelo menos duas dessas pessoas têm o mesmo número de amigos na festinha.
>
> ~T: Todas as pessoas na festinha têm um número diferente de amigos nessa festinha.
>
> Demonstração: consideremos n pessoas ($n \geq 2$) na festinha. Suponhamos, por absurdo, que cada convidado tenha um número diferente de amigos na festa (negação da tese ~T). Temos a seguinte possibilidade para o número de amigos de um convidado: {0, 1, 2, ..., n-1} (não estamos contando que alguém seja amigo de si mesmo). Digamos, sem perda de generalidade, que o convidado, chamado A1, tenha 0 amigos na festinha, que o convidado, chamado A2, tenha 1 amigo, que o convidado chamado A3 tenha 2 amigos, e assim por diante. Seguindo esse raciocínio para todos os convidados, finalizaremos com o convidado An, que tem n-1 amigos na festa. Logo ele é amigo de todos os outros convidados presentes, em particular, do convidado A1, que não tem amigos na festa. Absurdo! Logo nossa suposição inicial é falsa, logo, o que vale é a negação da negação da tese, ou seja, vale a tese de que existem pelo menos dois convidados com o mesmo número de amigos na festa. C.Q.D. (MORAIS FILHO, 2013, p. 315).

Assim, ficou demonstrado que existe pelo menos duas pessoas com o mesmo número de amigos na festa.

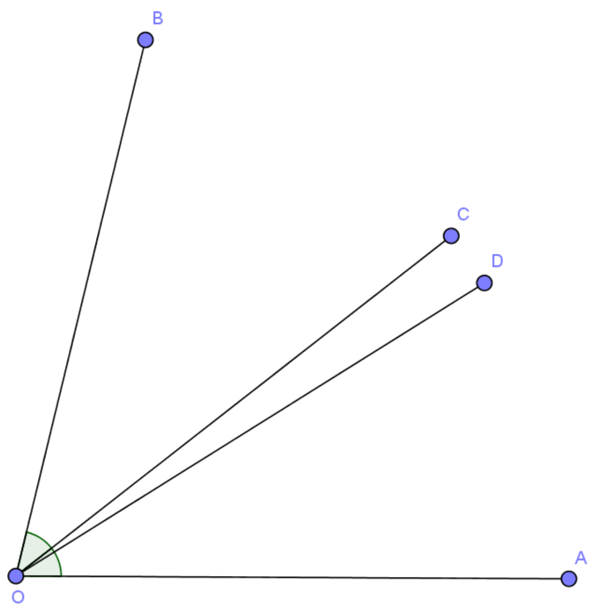
1.7 Demonstração da unicidade.

A afirmação de que existe um único elemento com determinada propriedade matemática pode ser provada de duas maneiras distintas.

A primeira forma de demonstrar é chamada de demonstração de unicidade direta e é feita da seguinte maneira: supõe-se a existência de dois elementos que gozem de tal propriedade, porém, como o elemento é realmente único, o que se encontra no processo lógico dedutivo é uma afirmação que diz que ambos os elementos são, na verdade, os mesmos elementos, nos levando a admitir a unicidade de tal elemento.

A segunda forma de demonstrar, chamada demonstração de unicidade indireta, é feita da seguinte maneira: supõe-se provisoriamente por absurdo a existência de dois elementos distintos que gozem de tal propriedade, porém caso o elemento seja realmente único, o que se encontra no processo lógico dedutivo é uma contradição, ou seja, encontramos uma afirmação que diz que ambos os elementos supostos diferentes no início são, na verdade, um mesmo e único elemento.

Exemplo, demonstração da unicidade da bissetriz de um ângulo:



$$H\colon \overline{OC} \text{ é } bissetriz\ do\ \angle A\hat{O}B\ e\ \angle A\hat{O}C \equiv \angle C\hat{O}B$$

$$T\colon \overline{OC} \text{ é } a\ \text{única}\ bissetriz\ do\ \angle A\hat{O}B$$

$$\sim T\colon \overline{OD} \text{ é } \ outra\ bissetriz\ do\ \angle A\hat{O}B$$

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que exista $\overline{OD}\ outra\ bissetriz\ do\ \angle A\hat{O}B.$

Suponha também, sem perda de generalidade, que o ângulo $\angle A\hat{O}D$ seja menor que $\angle A\hat{O}C.$

E como suposto anteriormente:

$$\angle A\hat{O}D < \angle A\hat{O}C\ (I)$$

Consequentemente:

$$\angle B\hat{O}C < \angle B\hat{O}D\ (II)$$

Mas $\overline{OD}$ também é bissetriz, por negação da tese, logo:

$$\angle A\hat{O}D \equiv \angle D\hat{O}B\ (III).$$

Usando (III) em (II):

$$\angle B\hat{O}C < \angle A\hat{O}D\ (IV)$$

Juntando (I) e (IV):

$$\angle B\hat{O}C < \angle A\hat{O}D < \angle A\hat{O}C\ (V)$$

Por transitividade em (V) chegamos a um absurdo!

$$\angle B\hat{O}C < \angle A\hat{O}C$$

Pois por hipótese tínhamos $\angle C\hat{O}B \equiv\ \angle A\hat{O}C$ já que $\overline{OC}$ é bissetriz.

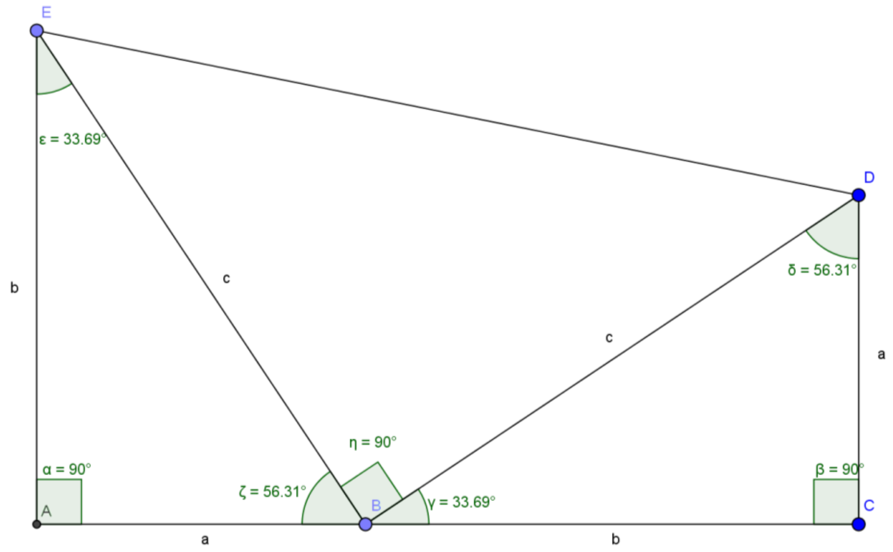
Portanto, o que vale é a negação da negação da tese, ou seja, a própria tese de que $\overline{OC}$ é a $\acute{u}nica\ bissetriz\ do\ \angle A\hat{O}B$ C.Q.D.

1.8 Demonstração apoiada em figuras

Morais Filho (2013, p.305) destaca que embora figuras sejam muito úteis em demonstração de teoremas, é preciso ficar atento a dois pontos, no mínimo: o primeiro é que, dada uma concepção de matemática que valoriza a prática discursiva, uma figura sozinha não demonstra nada, ela pode servir de fonte de inspiração, pode nortear o teorema, mas de maneira nenhuma se apresenta uma figura como demonstração.

O segundo ponto importante ao se trabalhar com figuras em demonstrações, é tomar cuidado para não se enganar com detalhes causados por erros na figura, uma vez, que por imprecisão de instrumentos, nunca será possível encontrar a figura ideal (aquela que só pertence ao mundo platônico das ideias), logo, uma figura mal desenhada pode levar àquele que exercita a demonstração ao erro.

Um exemplo interessante de demonstração apoiada em uma figura é a demonstração do teorema de Pitágoras atribuída ao ex-presidente americano James Garfield.



Essa figura pode ter sua área calculada de duas maneiras distintas e se obter a mesma área, a primeira é pelo cálculo de três triângulos retângulos e somadas estas áreas, obteremos a mesma área de um trapézio de bases a, b e altura $(a + b)$.

Assim temos:

$$\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right) x (a+b)$$

Fazendo as devidas simplificações, encontra-se:

$$a^2 + b^2 = c^2 \blacksquare$$

Este exemplo deixou claro como figuras podem ser muito úteis em demonstrações matemáticas, mas, como dito anteriormente, há ressalvas quanto a considerar somente as figuras como uma estratégia demonstrativa.

1.9 Demonstração apoiada em indução finita.

Como já comentado, nas ciências naturais normalmente o empirismo impera, ou seja, se determinado fato é observado inúmeras vezes na natureza, já se afirma, com algum grau de certeza, que aquele fato é verdadeiro para todo o sempre; por exemplo: chegamos a uma cidade e vemos uma sequência de taxis pretos e logo inferimos que todos os taxis daquela cidade são pretos.

Na Matemática, no entanto, se determinados números gozam de certa propriedade, não podemos assumir que uma infinidade deles também goze desta propriedade, a não ser nas situações em que é possível utilizar o chamado Princípio de Indução Finita, usualmente aplicado às demonstrações de propriedades de números naturais.

Morais filho (2013) esclarece como funciona o principio de indução finita:

> Suponha que se deseje provar determinada propriedade envolvendo números, a qual chamaremos $P(n)$. Para este fim, basta verificar a validade de $P(1)$, e mostrar que, se $P(k)$ é válida para algum número natural $k \geq 1$, então $P(k+1)$ também é válida. O processo anterior garante a validade de $P(n)$ para todo número natural n $\in \mathbb{N}$. De fato, se $P(1)$ é válida, $P(2) = P(1+1)$ é válida. Como $P(2)$ é válida, resulta $P(3) = P(2+1)$ ser válida. Como $P(3)$ é válida, resulta $P(4) = P(3+1)$ ser válida, e assim por diante. (MORAIS FILHO, 2013, p. 315).

Muitas vezes a propriedade só começa a ser válida a partir de um $n_0 > 1$ que é chamado caso base, por exemplo $P(n)\colon 2^n > n^2$, só é válida para n_0 a partir de 3.

Vejamos um exemplo de demonstração utilizando o principio de indução finita:

$$P(n)\colon 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, \text{ Se } r \neq 1$$

$i)$Verificação de $P(1)$:

$P(1)$é válida,pois:

$$P(1) = \frac{1-r^{1+1}}{1-r} = \frac{1-r^2}{1-r} = \frac{(1-r)*(1+r)}{1-r} = 1 + r = 1 + r^1$$

ii) Hipótese de indução:

Supor $P(k)$ verdadeira para algum $k > 1$

$$P(k)\colon 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{k-1} + r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}, \text{ Se } r \neq 1$$

$iii)$ O que se quer mostrar:

Queremos mostrar que $P(k+1)$ vale, ou seja,

$$P(k+1)\colon 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k + r^{k+1} = \frac{1-r^{k+2}}{1-r}, \text{ Se } r \neq 1$$

A parte mais sutil da demonstração é a passagem da hipótese de indução para o caso k+1:

$$1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k + r^{k+1} = (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^k) + r^{k+1} =$$

$$\frac{1 - r^{k+1}}{1 - r} + r^{k+1} = \frac{1 - r^{k+1} + r^{k+1}(1 - r)}{1 - r} =$$

$$\frac{1 - r^{k+1} + r^{k+1} - r^{k+2}}{1 - r} = \frac{1 - r^{k+2}}{1 - r} \blacksquare$$

2. O PEQUENO TEOREMA DE FERMAT.

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein.

2.1 Teorema e prova devida a Euler

O objetivo deste segundo capítulo é analisar nosso objeto de aplicação o Pequeno Teorema de Fermat em uma de suas demonstrações clássicas acadêmicas devida Leonhard Euler, de posse dessa demonstração estabeleceremos no terceiro capítulo uma relação de aplicação do Pequeno Teorema de Fermat para uma turma de ensino médio. Este capítulo também tem como finalidade contextualizar historicamente a descoberta ou conjectura do Pequeno Teorema de Fermat pelo francês Pierre de Fermat até o ponto que o Pequeno Teorema de Fermat realmente obtém o estatus de teorema, graças a demonstração do suíço Leonhard Euler faz quase um século de transição.

Serpa (2011, p.2) apresenta em linguagem moderna de aritmética modular o teorema e a primeira demonstração do pequeno teorema de Fermat devida a Euler.

Antes de apresentarmos a versão clássica da demonstração de Leonhard Euler, achamos necessária a inclusão do lema a seguir, pois o mesmo torna a leitura da demonstração mais fluente e didática, uma vez que Euler trata algumas passagens de maneira elementar, inclusive a de finição de número binomial é omitida durante a demonstração e foi aqui incluída com os mesmos objetivos que do lema.

Lema:

Seja p um número primo, temos:

$$\binom{p}{k} \equiv 0 \ (mod\ p)$$

Para $0 < k < p$.

De fato:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!\,(p-k)!} \Rightarrow$$

$$p! = k!\,(p-k)!\binom{p}{k} \Rightarrow$$

$$p/p! \Rightarrow$$

$$p\ /\ k!\,(p-k)!\binom{p}{k} \Rightarrow$$

$$ou\ \ p/k!\ \ ou\, p/(p-k)!\, ou\, p/\binom{p}{k}$$

Mas os fatores de $k!$ e $(p-k)!$ são todos menores que p primo, portanto nenhum deles são divisíveis por p, logo p tem que dividir o número binomial como segue:

$$p/\binom{p}{k} \Rightarrow$$

$$\binom{p}{k} \equiv 0\ (mod\ p)$$

Para $0 < k < p$. ■

Demonstração:

O Pequeno Teorema de Fermat, seja *p* um número primo e *a* um inteiro arbitrário não divisível por p, então:

$$p \text{ divide } (a^{p-1} - 1) \Rightarrow$$

$$a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$$

Demonstração:

Do teorema binomial resulta:

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1} a^{p-1} + \binom{p}{2} a^{p-2} + \cdots + \binom{p}{p-1} a^1 + 1 \Rightarrow$$

$$(a+1)^p \equiv a^p + 1(\ mod\ p) \quad (1)$$

Pois, de fato:

$$\binom{p}{k} \equiv 0\ (mod\ p) \qquad\qquad (2)$$

Para $0 < k < p$. Com p primo.

Subtraindo $(a+1)$ de ambos os membros da congruência (1)

$$(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a(\ mod\ p) \quad (3)$$

Por indução, verifica-se, em primeiro lugar, que, p divide $1^p - 1$

Suponha que p divide $a^p - a$.

Logo, por (3) p divide $(a+1)^p - (a+1)$

Isto completa a prova por indução matemática que:

$$a^p \equiv a \ (mod\ p) \qquad (4)$$

Assim, multiplicando-se ambos os membros dessa última congruência (4) pelo inverso multiplicativo de a *(mod p),* obtém-se o resultado da forma clássica:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p) \qquad (5)$$

Onde a e p são primos entre si, isto é, $mdc\ (a,p)\ = 1.$■

Serpa (2011, p.2) ressalta que a forma (4) do Pequeno Teorema de Fermat é mais geral, pois nela não há a necessidade de $mdc\ (a,p)\ = 1$, ou seja, a pode ser um número natural qualquer, no entanto, ambas as formas (4) e (5) são equivalentes em termos do Pequeno Teorema de Fermat.

2.2 Quase um século entre descoberta e prova.

Eves (2004, p.391) relata que da descoberta por Fermat de seu pequeno Teorema até a sua primeira demonstração devida a Euler há um intervalo de quase um século. De fato, a primeira menção ao Pequeno Teorema de Fermat foi feita pelo próprio Fermat em uma carta que data de 18 de outubro de 1640 endereçada a Frénicle de Bessy, na qual diz não incluir a demonstração por receio que a mesma fosse muito longa e a demonstração de Leonhard Euler foi feita em 1736.

Gonçalves e Haddad (2009, p.93) fizeram uma tradução comentada para a língua portuguesa de um importante texto "*Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio*", de Leonhard Euler, lido perante a Academia de Ciências de São Petersburgo em 1736 e publicado em 1741 nos seus anais, contendo uma demonstração do chamado pequeno teorema de Fermat, um resultado fundamental em teoria dos números.

Ademais, Gonçalves e Haddad (2009, p.94) salientam que embora a prova acadêmica seja creditada a Euler, há um manuscrito com prova completa não datado de Leibniz e, portanto, anterior à prova e período de atividade de Euler, porém tal manuscrito só foi descoberto postumamente.

Cabe ressaltar, que Gonçalves e Haddad (2009, p.94) destacam o emprego dado à palavra indução por Euler, pois, diferente da indução matemática repleta de deduções lógicas, a indução a que se refere Euler está relacionada a ser induzido ao erro, por tomar como verdadeiro, atividades intuitivas ainda não provadas.

Tal preocupação dos autores se deve justamente ao fato de que Fermat muitas vezes induziu, na acepção própria da palavra, teoremas sem antes prová-los. Gonçalves e Haddad (2009, p.94) relatam que embora Euler destaque o valor criativo que a atitude indutiva tem para a matemática, é preciso ter cautela com tal atitude e, além disso, ele critica severamente a falta de provas completas em parte da obra de Fermat.

Um fato importante destacado por Gonçalves e Haddad (2009, p.94) é perceber que a obra de Euler sobre o Pequeno Teorema de Fermat constitui um pilar no qual se assenta a mudança dos padrões de rigor para a álgebra e teoria dos números, de fato, Euler deu importantes contribuições no sentido de organizar grandes áreas do conhecimento matemático.

> Nesse sentido, o texto de Euler parece ser um testemunho de um ponto de inflexão importante na história da teoria dos números e da álgebra, que, à época da escrita, ainda se encontravam distantes dos padrões de rigor próprios da tradição geométrica, que viriam a se tornar predominantes. (GONÇALVES E HADDAD, 2009, p.94)

De fato, as críticas às provas incompletas de Fermat já se dão no primeiro parágrafo da leitura de Euler:

> Por vezes, muitos teoremas aritméticos de Fermat foram exibidos para o público, mas sem demonstrações, nos quais, se verdadeiros fossem, não só estariam contidas propriedades notáveis dos números, mas também a própria ciência dos números, que grandemente é vista exceder os limites da análise, fortemente seria promovida. Por mais, entretanto, que esse insigne geômetra mantivesse, a respeito de grande número de teoremas que propôs, ou poder demonstrá-los ou pelo menos estar certo da verdade deles, ainda em lugar nenhum, o quanto me consta, expôs as demonstrações. Ora, o grande Fermat parece ter compreendido a maior parte de seus teoremas numéricos por indução, tanto que ele parecia abrir as propriedades que deviam ser extraídas quase por via única desse modo. Mas em verdade quão pouco pode ser atribuído às induções nesse assunto, (como) eu poderia mostrar por muitos exemplos; desses, todavia, seja suficiente trazer um único produzido pelo próprio Fermat. (GONÇALVES E HADDAD, 2009, p.94)

Para exemplificar suas críticas, Euler cita outro fato que ele próprio esclareceu a respeito de Fermat, no qual Fermat acreditava ser primo todo número da forma $2^{2^n} + 1$. Mesmo que todos os números dessa forma menores que 100000 sejam primos, Euler já havia mostrado que o quinto número de Fermat não era primo, de fato, $2^{2^5} + 1$ =4 294 947 297 não é primo, pois é divisível por 641.

Finalmente Euler destaca que não se deve mais dar crédito a pensamentos indutivos e sim confiar em teoremas e provas matemáticas e, assim, fica cravado na história, não só neste momento como em outros, como, por exemplo, a demonstração do chamado último teorema de Fermat feita pelo matemático inglês Andrew Willes, 358 anos após sua formulação original. Fermat relata que já o havia provado, mas por falta de espaço nas margens do livro em que fazia anotações não seria possível registrá-lo ali, neste exemplo citado do Último Teorema de Fermat é notório o quanto afirmações não fundamentadas em demonstrações não passam de meras conjecturas, não importa as quanto emblemáticas, intrigantes ou significativas sejam.

Outro fato curioso nos escritos de Euler sobre o Pequeno Teorema de Fermat é que antes de fazer a demonstração da maneira que se inicia este capítulo por indução matemática, ele mostra exemplos numéricos passíveis de uma generalização, ou seja, Euler não é rigoroso a ponto de apresentar uma prova final imediatamente, no sentido de rigor atual, não, ele descreve quase que mostrando o processo de descoberta como encontrou aquela demonstração, fazendo exemplos para números pequenos para depois utilizar o principio de indução matemática. Assim o rigor de hoje sugere que a generalização é mais importante que o particular, logo, as demonstrações atualmente são apresentadas costumeiramente imediatamente em sua forma genérica sem exemplos particulares. De fato, Gonçalves e Haddad (2009) relatam:

> Até esse ponto, a exposição de Euler indica a possibilidade de aplicar os mesmos procedimentos para demonstrar a validade da proposição para uma base qualquer. Essa indicação de uma possibilidade de demonstrar a generalidade é presente também nos textos de aritmética da Antiguidade, como nos Elementos de Euclides. A partir desse ponto do texto, porém, Euler aborda a problemática da demonstração por outro mecanismo, que é o “método peculiar” que ele mencionou no parágrafo 1. Como se pode ver do texto que segue, tal método peculiar é o princípio da indução finita, com aplicação da indução na variável a. (GONÇALVES e HADDAD, 2009, P.98)

A maneira com que Fermat e Euler agiram em relação à Matemática, à formulação de teoremas e suas demonstrações não é meramente relacionada com suas características pessoais, mas foi influenciada pelo cenário histórico em que viveram. Fermat presenciou uma matemática europeia do século XVII, ainda bastante subordinada à Escolástica, enquanto Euler, vivendo no século XVIII, estudou e atuou na matemática que se valeu dos resultados dos trabalhos do próprio século XVII e passou a exigir cada vez mais o rigor como aspecto relevante.

Assim, é possível perceber realmente uma construção teórica ao longo do tempo, aqueles que são predecessores padeceram da falta de experiência histórica, já os sucessores se valeram do árduo trabalho já realizado. Podemos ilustrar isso com a célebre frase de Isaac Newton: "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes".

Para entender um pouco melhor esses grandes matemáticos podemos recorrer a uma breve biografia para uma reflexão acerca da vida e obra de ambos.

2.3 Pierre de Fermat

Eves (2011, p.389) destaca que Fermat foi contemporâneo de René Descartes e ambos fundamentaram simultaneamente, no século XVII, a geometria analítica e, este trabalho simultâneo, embora tenha gerado controvérsias, pode ser constatado postumamente ao analisar as obras de ambos. Uma carta de Fermat, datada de 1636, endereçada a Roberval, relata que os trabalhos de Fermat sobre geometria analítica já datavam de sete anos.

Eves (2011, p.389) compara a metodologia de trabalho de Descartes e Fermat, pois, enquanto Descartes costumava partir do lugar geométrico e então encontrar a equação, Fermat partia da equação e então estudava o lugar geométrico em questão, sendo esses os dois aspectos recíprocos do princípio fundamental da geometria analítica. Comparadas as notações utilizadas, Fermat usou a notação de Vieté e por isso apresentava uma aparência um tanto arcaica se comparada aos trabalhos de Descartes.

Eves (2011) destaca a indefinição da data de nascimento de Pierre de Fermat:

> Segundo um registro aparentemente confiável, Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne, perto de Toulouse, a 17 de agosto de 1601. Sabe-se que morreu em Castres ou Toulouse a 12 de janeiro de 1665. Em sua laje tumular, originalmente na igreja dos agostinianos em Toulouse e depois transferida para o museu local, consta a data precedente como a da morte de Fermat, com 57 anos de idade. Devido a esse conflito de datas costuma-se escrever (1601? -1665) para nascimento e morte de Fermat. De fato, por várias razões, seu ano de nascimento, a julgar pelas informações de vários escritores, varia de 1590 a 1608. (EVES, 2011, p. 389)

Eves (2011, p.390) relata que Fermat foi filho de um comerciante de couro e recebeu sua educação inicial em casa e aos 30 anos foi trabalhar como conselheiro do parlamento, em Toulouse, ou seja, não era matemático de ofício, pelo contrário, dedicou seu tempo vago à matemática como um passatempo, não publicava muito, mas mantinha correspondência com grandes matemáticos de sua época. O discreto advogado francês enriqueceu tantos ramos da matemática que é considerado o maior matemático francês do século XVII.

Eves (2011, p.390) nos diz que o que é mais importante com relação ao pequeno teorema de Fermat, foi o próprio Fermat considerado o fundador da moderna teoria dos números influenciado pela Aritmética de Diofanto:

> Dentre as variadas contribuições de Fermat à matemática, a mais importante é a fundação da moderna teoria dos números. Neste campo a intuição e o talento de Fermat eram extraordinários. Sua atenção para a teoria dos números provavelmente foi despertada pela tradução latina da Aritmética de Diofanto, feita por Bachet de Méziriac em 1621. Muitas das contribuições de Fermat ao assunto se deram na forma de enunciados e notas escritos nas margens do exemplar que tinha do trabalho de Bachet. Em 1670, cinco anos após sua morte, esse material foi incorporado numa nova, mas infelizmente muito mal impressa, edição da Aritmética, publicada por um dos filhos de Fermat, Clément-Samuel. Muitos dos teoremas enunciados por Fermat mostraram-se depois verdadeiros. (EVES, 2011, p. 390)

Eves (2011, p.391) elenca uma lista de nove teoremas propostos por Fermat que fazem parte da teoria dos números, começando a lista com o pequeno teorema de Fermat, e o nono item contém o último teorema de Fermat:

> 1. Se p é primo e a é primo com p, então $a^{p-1} - 1$ é divisível por p.
>
> 2. Todo primo ímpar pode ser expresso como a diferença de dois quadrados de uma, e uma só, maneira. $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$
>
> 3. Um primo da forma $4n + 1$ pode ser representado como a soma de dois quadrados. Por exemplo, $5 = 4 + 1$, $13 = 9 + 4$, $17 = 16 + 1$, $29 = 25 + 4$. O primeiro enunciado desse teorema é de Fermat e figura em uma carta a Mersenne, datada de 25 de dezembro de 1640. A primeira demonstração publicada desse resultado, incluindo a unicidade da representação, é de Euler e data de 1754.
>
> 4. Um número primo de forma $4n + 1$ é apenas uma vez a hipotenusa de um triângulo retângulo de lados inteiros; seu quadrado é duas vezes; seu cubo é três vezes; e assim por diante.
>
> 5. Todo inteiro não negativo pode ser representado como soma de no máximo quatro quadrados. Esse difícil teorema foi demonstrado por Lagrange em 1770.
>
> 6. A área de um triângulo retângulo de lados inteiros não pode ser um quadrado perfeito inteiro. Esse resultado também foi estabelecido por Lagrange posteriormente.
>
> 7. Há uma única solução inteira de $x^2 + 2 = y^3$ e apenas duas de $x^2 + 4 = y^3$. Esse problema foi lançado como um desafio aos matemáticos ingleses. A solução da primeira equação é $x = 5, y = 3$ e as soluções da segunda são $x = 2, y = 2$ e $x = 11, y = 5$.
>
> 8. Não existem inteiros positivos x, y, z tais que $x^4 + y^4 = z^2$.
>
> 9. Não existem inteiros positivos x, y, z, n, onde $n > 2$, de modo que $x^n + y^n = z^n$. (EVES, 2011, p. 391)

Fermat enunciou este nono item nas margens de seu exemplar de Aritmética de Diofanto, e ficou conhecido como o último teorema de Fermat, no qual enunciava dizendo que era impossível separar uma potência qualquer em duas potências de mesma ordem, exceto para o caso $n = 2$ que recai no teorema de Pitágoras.

Em um décimo item da lista anterior, Eves (2011, p.392) também elenca a conjectura de Fermat já citada neste texto $2^{2^n} + 1$, como apenas uma conjectura, pois é falsa e não pode ser provada, como Euler descreve em seu texto.

Eves (2011, p.392) relata que em 1879 foi encontrado, em uma biblioteca de Leyden, entre os manuscritos de Christian Huygens, um escrito no qual Fermat descreve um método geral o qual ele pode ter usado para fazer muitas de suas descobertas. É conhecido como método da descida infinita, e é particularmente útil para resultados negativos, para provar que uma certa relação envolvendo inteiros é impossível, assuma provisoriamente o contrário, que ela pode ser satisfeita para algum conjunto de inteiros positivos, em seguida, assuma que ela possa satisfeita para um conjunto menor, e assim sucessivamente, mas como inteiros positivos não podem decrescer infinitamente, chegamos a um absurdo, logo a suposição inicial é insustentável, logo, a suposição inicial é impossível.

Eves (2011, p.393) relata que a correspondência entre Fermat-Pascal também levou à fundação de outra área da matemática, a ciência da probabilidade, e o problema motivador, para o desenvolvimento de tal área, foi o problema da divisão de pontos: “Determine a divisão das opostas de um jogo de azar entre dois jogadores igualmente hábeis, supondo-se conhecido o marcador no momento da interrupção e o número de pontos necessários para ganhar o jogo. ”

As correspondências históricas entre Fermat e Pascal sobre problemas de pontos serviram de base para que, em 1657, Christian Huygens (1629-1695) escrevesse o primeiro tratado formal sobre o assunto probabilidades. Cita Eves (2011):

> Foi a melhor exposição sobre a teoria das probabilidades até o aparecimento, em 1713, da Ars Conjectandi de Jakob Bernoulli (1654-1705), que continha uma reimpressão do trabalho anterior de Huygens. Após esses esforços pioneiros, vemos o assunto ser levado à frente por matemáticos como Abraham De Moivre (1667-1754), Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph Louis Lagrange (1736-1813), Pierre-Simon Laplace (1749-1827) e tantos outros. (EVES, 2011, p. 394)

São realmente impressionantes as contribuições que Fermat deu à Teoria dos números e também a outras áreas como acaba de ser exposto. Além disso, Fermat também teve importantíssima contribuição no cálculo de infinitésimos estudando problemas de máximo e mínimo.

Dessa forma, fica claro que esse ilustre matemático foi fundamental no desenvolvimento histórico da matemática e, se houve equívocos em seus trabalhos, tal fato é inerente ao processo de aprendizado, só a experiência é capaz de antever equívocos e, no caso de Fermat, embora experiente matemático, faltou experiência no ineditismo de seu trabalho, ou seja, Fermat era um experiente matemático, mas seus interesses em pesquisa eram inéditos para ele e para sua época, logo, equívocos seriam inevitáveis até a solidificação do que acabara de descobrir pelos matemáticos que viriam após seus trabalhos.

2.4 Leonhard Euler

Eves (2011, p.471) relata que Leonhard Euler era suíço, nascido na Basileia, em 1707, logo no início do século XVIII. Ao contrário de Fermat, Euler era matemático de oficio, embora Euler tenha uma breve passagem pela teologia, foi na matemática que encontrou seu caminho.

A formação de Leonhard Euler também foi mais concisa em relação à matemática que a formação de Fermat, pois o pai de Euler foi aluno de Jakob Bernoulli e conseguiu que seu filho Euler tivesse aulas logo cedo com Johann Bernoulli, fazendo com que cedo, aos 20 anos, em 1927, Euler entrasse no mundo acadêmico indicado pelos irmãos Daniel e Nicolau Bernoulli, que pertenciam à Academia de São Petersburgo, recém-criada por Pedro, o Grande. (EVES 2011, p.471).

Eves (2011, p.471) continua relatando que a ascensão matemática de Euler foi realmente muito rápida, pois Daniel foi pouco tempo depois para a Basileia em seu país assumir a cadeira de Matemática, vindo a assumir a cabeça da universidade de Matemática de São Petersburgo, ainda muito jovem. Por 14 anos Euler dignificou a academia de São Petersburgo, mas após esse período, continuou a expansão de sua experiência aceitando o convite de Frederico, o Grande, para assumir a academia de Berlim na qual permaneceu por 25 anos. Porém, Euler tinha um perfil modesto que não agradava a Frederico e, além disso durante todo esse período, Euler continuou cativado pela academia de São Petersburgo recebendo pensão da mesma. Tudo isso o levou a aceitar o convite de Catarina, a Grande, para retornar a São Petersburgo, em 1766, onde ficaria pelos dezessete anos finais de sua vida.

Eves (2011, p.472) compara Euler a Beethoven, pois, ao retornar a São Petersburgo, Euler infelizmente ficou cego do olho direito, mas, assim como Beethoven não deixou de compor quando ficou surdo, Euler também não deixou de produzir quando ficou cego, pelo contrário, manteve extrema capacidade produtiva mesmo depois da cegueira. Euler foi ajudado por um secretário que anotava suas expressões verbais ou registros anotados em um quadro grande com giz, mas tal fato só foi possível realmente pela extrema capacidade de calcular e concentração inabalável de Euler.

Chan e Norrish (2012, p.3) destacam que Goldbach, em 1729, pediu a Euler que desse uma olhada nos escritos de Fermat, isso o levou a estudar os trabalhos de Fermat, em especial os que remetiam à teoria dos números que, como dito, havia sido fundada por Fermat. Em 1736, Euler apresentou a primeira prova do pequeno teorema de Fermat que era basicamente a mesma que Leibniz não publicou utilizando o teorema binomial. Em 1747, Euler apresentou uma nova versão da demonstração ainda utilizando indução matemática e, finalmente, em 1758, publicou uma terceira versão de demonstração para o pequeno teorema de Fermat, porém, desta vez, não utilizou o teorema binomial, nem indução matemática.

Ao todo, Euler produziu 530 trabalhos e deixou uma série de manuscritos que enriqueceram as publicações da Universidade de São Petersburgo por mais 47 anos.

Dentre estas 530 produções, figura um resultado muito comum da matemática básica a relação de Euler para poliedros convexos onde $v - a + f = 2$, ou seja, o número de vértices subtraído do número de arestas e acrescentado o número de faces, sempre seria igual a dois.

Eves destaca a capacidade de escrita de Euler e como essa característica peculiar influenciou os matemáticos seguintes:

> Euler foi um escritor magistral, caracterizando-se seus livros pela grande clareza, riqueza de detalhes e abrangência. Entre eles, figuram com destaque: Introductio in analysin infinitorum de 1748, em dois volumes, que alcançou grande prestígio; Institutiones calculi differentialis de 1755, uma obra extremamente rica e o aparentado Institutiones calculi integralis, em três volumes (1768-1774). Esses livros, mais outros de mecânica e álgebra, superando trabalhos da mesma natureza, serviram para modelar o estilo, a notação e o alcance de muitos dos livros dos cursos superiores atuais. Os livros de Euler alcançaram pronunciada e longa popularidade e ainda hoje são uma leitura muito agradável e proveitosa. A enorme fertilidade de ideias de Euler é deveras surpreendente, não sendo de admirar, portanto, que muitos dos grandes matemáticos posteriores a ele admitiram ter recebido sua influência. (EVES, 2011, p. 474)

Mas assim como os equívocos de Fermat fizeram parte do processo da descoberta, Euler também cometeu equívocos em sua busca pelo novo. Alguns trabalhos de Euler representam o formalismo do século XVIII, ou seja, da manipulação sem os devidos cuidados, da convergência e da existência matemática envolvendo processos infinitos. Eves (2011, p.474) afirma que Euler era descuidado no uso de séries infinitas, aplicando a elas, muitas vezes, leis válidas apenas para somas finitas. Considerando as séries de potências como polinômios de grau infinito, ele imprudentemente estendia a elas as propriedades bem conhecidas de polinômios finitos. Frequentemente, Euler, em meio aos seus descuidos, chegava a resultados profundamente verdadeiros, mas talvez agraciado pela sorte, algo semelhante ao que ocorrera com Fermat em suas conjecturas.

É bem verdade que esse estudo, que anacronicamente pode ser visto como imprudente de séries infinitas por Euler, culminou com o estudo de funções, já que na época não havia sequer a definição formal de função:

> Apesar de terem pesquisado inúmeras relações funcionais, Leibniz e Newton não explicitam o conceito de função em suas obras. A falta de um termo geral para exprimir quantidades arbitrárias, que dependem de outra quantidade variável, motivou a definição de função, expressa pela primeira vez em uma correspondência entre Leibniz e Johann Bernoulli. No final do século XVII, Bernoulli já empregava essa palavra relacionando-a indiretamente a "quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes". Tal concepção é a mesma que temos em mente quando associamos uma função à expressão f(x) = x + 2, por exemplo. Temos aí uma quantidade indeterminada x, que é suposta variável, e uma constante, no caso, 2. (ROQUE, 2014, p. 298)

Roque destaca as contribuições de Euler para a criação do estudo de funções e da análise matemática e da própria definição de função:

> Foi com Euler que o Cálculo passou a ser visto como uma teoria das funções, tidas como algo diferente de curvas. A ideia de que a análise matemática é uma ciência geral das variáveis e de suas funções exerceu grande influência sobre a matemática do século XVIII, a partir da publicação de sua Introductio in analysin infinitorum (Introdução à análise infinita), editada em 1748. Logo no início do livro, Euler situa a função como a noção central da matemática e propõe a definição: Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes. (ROQUE, 2014, p. 299)

Em obras anteriores Euler já havia dado definições para variável e constante bem próximas das que temos hoje. Segundo ele, constante é uma quantidade definida que possui sempre um mesmo e único valor, e variável, definida como uma quantidade indeterminada que pode possuir qualquer valor.

Enfim, qualquer literatura seria insuficiente ao tentar descrever as contribuições que Euler deu para a matemática de sua e subsequente época, pois realmente foi um matemático brilhante que conseguiu lapidar joias como as de outros grandes matemáticos, incluindo Fermat.

Euler teve, ainda, um papel importante no início de um movimento que culminaria com a matemática do rigor, delineou ou sugeriu diretrizes para organizar muitos trabalhos na matemática de sua época, como o estudo de infinitésimos, que acabou culminando com a análise moderna e a matemática do rigor, na qual tudo deveria ser provado e baseado em teoremas que sustentassem resultados intuídos.

3. DE COLARES AO PEQUENO TEOREMA DE FERMAT

"Se queremos progredir, não devemos repetir a história,
mas fazer uma história nova".

Mahatma Gandhi

3.1 Uma experiência lúdica.

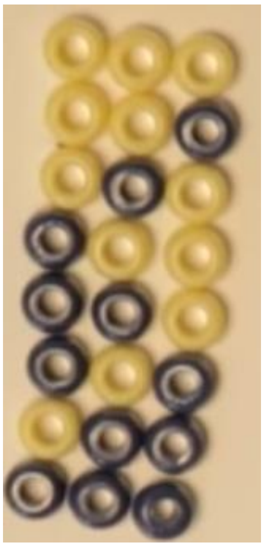
Neste capítulo é apresentado uma demonstração alternativa do Pequeno Teorema de Fermat que tem como objetivo relacionar a matemática acadêmica com a prática na docência da educação básica, além disso, é apresentado um plano de aula como sugestão de aplicação do Pequeno Teorema de Fermat para uma turma de ensino médio com arientações de aplicação e finalmente uma breve biografia do matemático responsável pela demonstração aqui estuda que se utiliza apenas de conceitos elementares e material concreto.

Serpa (2011, p.2) apresenta uma versão ao teorema dos colares, de Julius Petersen (1839-1910), e fala de p caixas coloridas por a cores dispostas em círculo, o que equivale a um colar com p pérolas. Bishop (2008, p.3) chama de prova combinatória e reforça que se trata de uma prova que requer apenas conhecimentos elementares, fato que abre uma porta para o ensino do Pequeno Teorema de Fermat na Educação Básica, pois esta abordagem faz uso apenas do Principio Fundamental da Contagem e de uma abordagem concreta com artesanato, ou até mesmo com ilustração ou imaginação de colares ou peças de bijuterias.

Há, na videoteca da *Khan Academy*, um vídeo denominado Pequeno Teorema de Fermat, que sugere uma representação de colares, brincos, ou qualquer outra bijuteria feita com miçangas para enunciar e demonstrar o Pequeno Teorema de Fermat, utilizando apenas o Princípio Fundamental da Contagem.

Para começar é escolhido $p = 3$ miçangas e $a = 2$ cores, para cada uma das três miçangas é possível escolher duas cores, pelo Principio Fundamental da Contagem há duas cores para a primeira miçanga, duas cores para a segunda miçanga e duas cores para a terceira miçanga, isto é, $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ diferentes correntes possíveis de ser construídas, duas monocromáticas e seis coloridas:

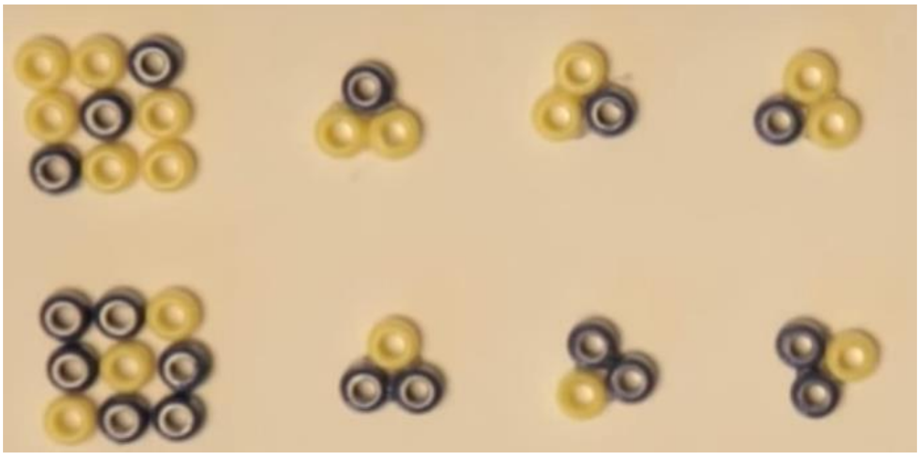
Fig 1 Total de correntes 3 miçangas e 2 cores.



Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Fechando cada uma das oito correntes, obtemos oito colares, porém teremos dois grupos de colares iguais, com exceção dos monocromáticos, a menos de rotação:

Fig 2 Dois grupos de colares



Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Assim, temos:

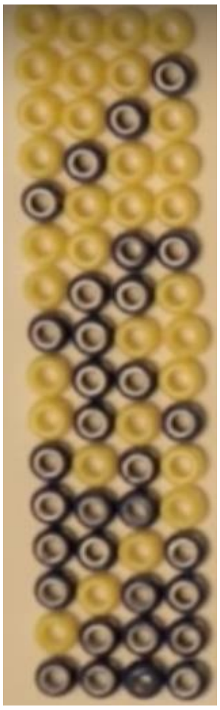
$$3 \text{ divide } (2^3 - 2)$$

$$p \text{ divide } (a^p - a)$$

Pois teremos dois grupos onde os colares serão iguais a menos de rotações. É interessante notar desde já que o que possibilitou a divisão dos colares pelo número primo p=3, foi justamente a escolha de p=3 miçangas (número primo de miçangas), pois vemos que o primeiro agrupamento de correntes com apenas uma miçanga preta produziu três rotações distintas, assim como o segundo agrupamento que possui duas miçangas pretas também proporcionou três rotações distintas, ou seja, agrupamentos de três em três são divisíveis por três, justificaremos e generalizaremos isso com mais detalhes quanto tratarmos de p=5, mas antes disso veremos que se a escolha do número p de miçangas não for primo como três o Pequeno Teorema de Fermat falha, vejamos a seguir se tomarmos p=4 composto.

Se passarmos para $p = 4$ miçangas e continuarmos com a = 2 cores, obteremos, pelo Princípio Fundamental da Contagem, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ correntes possíveis:

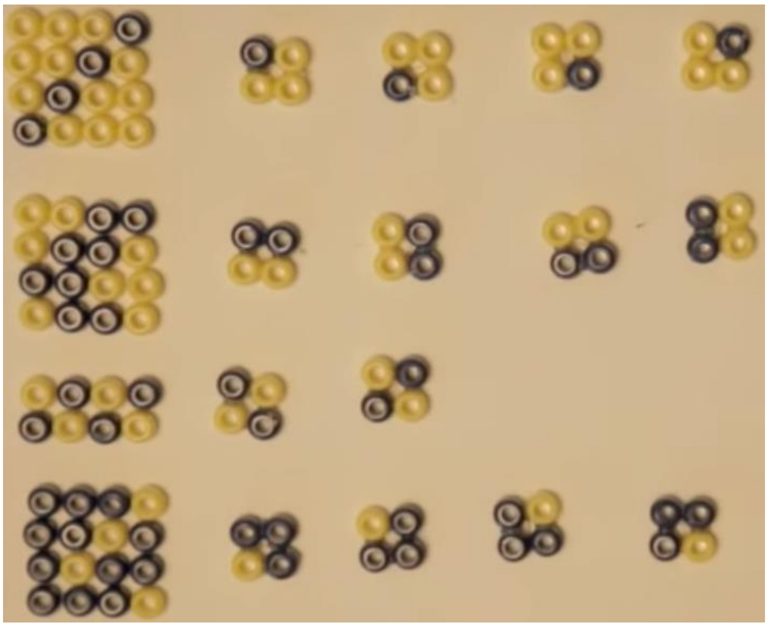
Fig 3 Total de correntes 4 miçangas e 2 cores



Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Porém, como agora o número de miçangas $p = 4$ não é primo, não formaremos grupos iguais de mesmo estilo como com p =3 (primo), excluindo as duas monocromáticas, temos:

Fig 4 Grupo incompleto, 4 não é primo.



Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

De fato, agora temos:

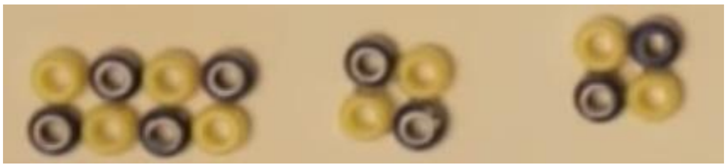
$$4 \text{ não divide } 14$$

$$4 \text{ não divide } (16-2)$$

$$4 \text{ não divide } (2^4-2)$$

$$p \text{ não divide } (a^p-a)$$

Fig 5 Ciclo curto, unidade de repetição.



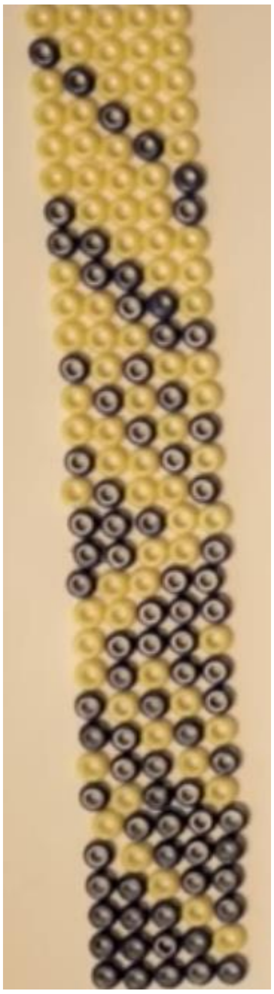
Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Esse fato ocorre, pois 4 (composto) forma uma figura simétrica em relação às rotações possíveis, além disso, um dos grupos é formado por uma unidade de repetição, devido à divisibilidade do número quatro, que pode ser quebrado em duas unidades idênticas que precisam de apenas duas rotações para cumprir o ciclo, basta imaginar um corte vertical no colar do agrupamento menor (Fig 5), esse corte produzirá duas peças idênticas chamadas unidades de repetição, rotacionando ambas as peças, por exemplo, no sentido anti-horário vemos que a peça da direita substitui a peça da esquerda em apenas dois movimentos, assim como a peça da esquerda substitui a da direita, havendo portanto um encurtamento de ciclo de quatro para dois movimentos, podemos assim concluir que nem todos os agrupamentos são de quatro em quatro, impossibilitando a divisão por p=4, fato que não ocorre com o primo 3 que é indivisível e forma agrupamentos de três em três divisíveis por três.

Já para o novo passo com $p = 5$ miçangas e $a = 2$ cores, novamente como o primo 3, teremos uma divisão em grupos iguais.

De fato, comecemos por construir todas as correntes possíveis, e teremos, ao todo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ correntes possíveis:

Fig 6 Total de correntes 5 miçangas e 2 cores.



Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Excluindo as duas fileiras monocromáticas, teremos trinta peças que podem ser divididas por 5, formando 6 grupos de colares iguais a menos de rotação, de fato:

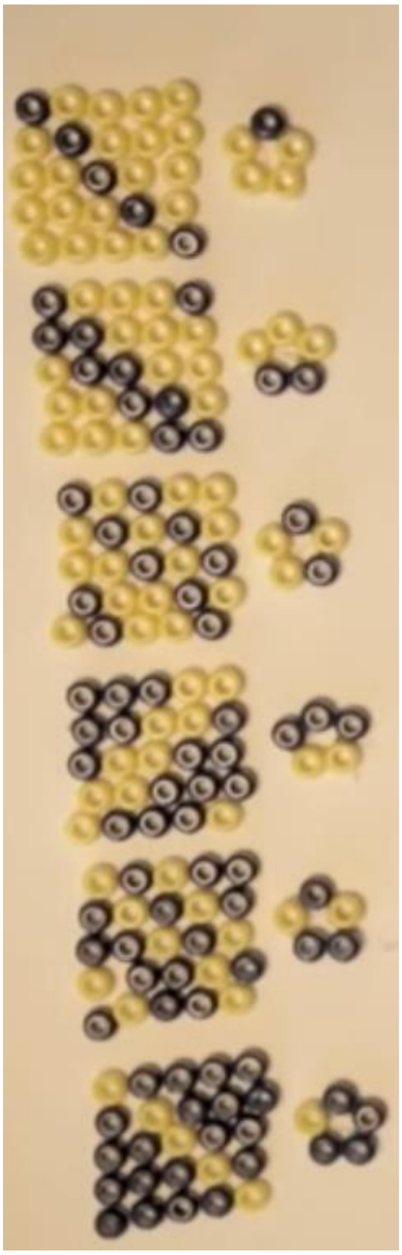
$$5 \text{ divide } (30)$$

$$5 \text{ divide } (32 - 2)$$

$$5 \text{ divide } (2^5 - 2)$$

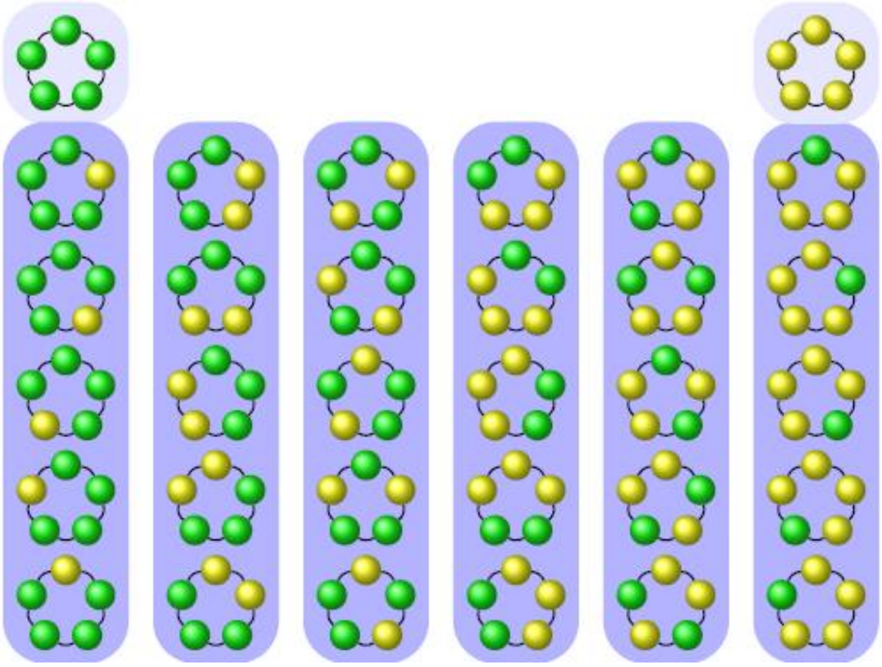
$$p \text{ divide } (a^p - a)$$

Fig 7 Seis grupos de colares



Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Fig 8 Rotação, seis grupos de colares multicoloridos



Fonte: Chan e Norrish (2012)

Observando a (Fig. 8) percebe-se 32 colares, excluindo os monocromáticos restam 30 colares multicoloridos e como visto 5 divide 30 resultando em 6, o número 6 representa os 6 agrupamentos que diferem por configurações de cores e estão destacados em azul escuro na (Fig.8), dentro de cada agrupamento o que difere os colares são suas rotações e vemos que as mesmas são de 5 em 5, possibilitando, portanto, a divisão por 5. Novamente aqui a escolha do número p de miçangas foi de um número primo 5, assim como ocorrera em p=3, fica visível na (Fig. 8) a assimetria de números primos o que confirma sua propriedade aritmética de indivisibilidade, impossibilitando, portanto, o encurtamento do ciclo p por peças de idênticas de repetição assim como ocorrera com o número composto p=4, logo o ciclo de fato será de p em p possibilitando a divisibilidade por p confirmando o Pequeno Teorema de Fermat.

Fig. 9 p=6 a=3

Fonte: Print Screen Vídeo KhanAcademy PTF

Se tomássemos a=3 cores e p=6 número composto de miçangas falharia o Pequeno Teorema de Fermat, pois teríamos colares hexagonais tricolores e estes colares assim como p=4 miçangas composto e a=3 cores possuem unidades de repetição, basta ver a (Fig.9) o colar já está dividido em duas unidades de repetição, pois 6 é divisível por 2, a parte de baixo já foi rotacionada em três movimentos passando sua peça preta passa pelo amarelo, verde e preto da peça de cima, mostrando finalmente a coincidência das peças, o mesmo poderia ser feito com a peça de cima que coincidiria com a peça de baixo, mostrando, portanto, um encurtamento de três unidades de movimento no ciclo p quando o que interessaria para p=6, seriam agrupamentos de 6 em 6 para possibilitar a divisão por 6, como um destes agrupamentos é menor que 6 impossibilita a divisão por 6 falhando o Pequeno Teorema de Fermat.

É possível perceber que o número a de cores não interfere no tamanho dos ciclos e sim o número p de miçangas, uma vez que o ciclo de rotação é determinado pelo número de peças no colar, se for primo, o número p de miçangas permitirá um ciclo assimétrico que não pode ser subdividido em ciclos menores, assim será possível subdividi-lo em grupos de iguais colares, como ocorrera com $p = 5$ e $p = 3$, com relação às cores que estiverem no colar, independente do número de cores, ele terá que girar um número p de vezes, logo, o Pequeno Teorema de Fermat realmente estará representando nos colares, desde que o número p de miçangas seja primo e o número a de cores seja qualquer número natural.

Portanto:

$$p \ divide \ (a^p - a)$$

3.1.1 Plano de aula: Pequeno Teorema de Fermat

A seguir apresentamos como sugestão um plano de aula direcionando a aplicação do Pequeno Teorema de Fermat segundo a versão do Dinamarquês Julius Petersen para uma turma de ensino médio.

No entanto é interessante observar desde início possíveis dificuldades que possam ser enfrentadas durante a aplicação dessa versão do Teorema para um turma numerosa de alunos, é preciso preparar um grande quantidade de material que deve ser escolhida criteriosamente, se as miçangas serão unidas por cola quente ou por fio de nylon, a distribuição do material em grupos deve observar a quantidade de cores que cada colar possuirá, pois devido o principio multiplicativo envolvido entre a quantidade de cores e de miçangas o resultado tem resultado em crescimento exponencial o que pode dificultar ainda mais o trabalho,aumentando significativamente a complexibilidade do trabalho.

Dependendo da dificuldade da turma é importante não ultrapassar o número de $p = 5$ miçangas e $a = 2$ cores, como sugerido nas etapas anteriores detalhadas desse trabalho, pois com estas etapas e a ilustração do vídeo sugerido já se pode perceber com detalhes a precisão do Pequeno Teorema de Fermat segundo sua representação por colares e proporcionar aos alunos até mesmo um sugestão para o desenvolvimento em um grupo coletivo maior por parte do protagonismo dos estudantes e desenvolver colares maiores e verificar em etapas sucessivas a veracidade intuitiva embutida nessa demonstração.

Neste estudo é possível entender também o conceito de número primo e suas características de indivisibilidade, sua importância dentro do próprio Teorema, estuda-se também nessa demonstração o conceito do princípio fundamental da contagem, por isso é importante revisar estes conceitos antecipadamente.

Com relação a distribuição de material é possível utilizar-se de materiais descartáveis como copos ou pratos plásticos, rolos de nylon ou uma quantidade adequada de pistolas de cola quente segundo a quantidade de alunos da turma.

É importante também sugerir uma pesquisa antecipada de materiais que possam esclarecer melhor conceitos históricos, de aplicabilidade e a importância do Pequeno Teorema de Fermat na versão de Julius Petersen para a matemática como um todo para um melhor envolvimento e interesse por parte dos alunos neste estudo.

CONTEÚDO: Apresentação elementar do Pequeno Teorema de Fermat.

PÚBLICO ALVO: Alunos do ensino médio regular ou da educação de jovens e adultos.

JUSTIFICATIVA: Na educação básica o aluno tem pouco contato com demonstrações matemáticas devido à dificuldade que estas apresentam, ficando a maior parte das demonstrações a cargo da Educação Superior, logo, ter a oportunidade de apresentar o Pequeno Teorema de Fermat à Educação Básica de forma elementar é uma oportunidade única que, no mínimo, representa uma experiência especial.

OBJETIVOS GERAIS: Apresentar o Pequeno Teorema de Fermat de forma elementar aos alunos da Educação Básica, enriquecer o conceito demonstração na Educação Básica, apresentar aspectos históricos do Pequeno Teorema de Fermat.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS: Enriquecer o currículo da educação básica que carece de resultados sofisticados da matemática superior.

METODOLOGIA:

- Aula expositiva utilizando sala multimídia e data show.
- Diálogos professor-aluno, aluno-professor e aluno-aluno.
- A problematização será divulgada oral e literalmente através do retroprojetor.
- Reproduzir em peças de artesanato as construções mencionadas na seção 3.1
- Investigar as regularidades das peças construídas e relacioná-las com o Pequeno Teorema de Fermat.

MATERIAIS DE APOIO: Computador, Data show, vídeos da KhanAcademy sobre o Pequeno Teorema de Fermat, cadernos para anotações, peças de bijuteria.

AVALIAÇÃO: Exercícios, participação, interesse, envolvimento, trabalhos individuais e coletivos.

3.2 Julius Peter Christian Petersen

O autor da curiosa demonstração do pequeno teorema de Fermat utilizando recursos de combinatória, foi Julius Petersen que nasceu em Soro na Dinamarca, em 1839, e faleceu também na Dinamarca, em Copenhagen, em 1910, Matemático de vida dura e difícil, pois enfrentou muitos obstáculos, mas por amor à matemática alcançou destaque.

Segundo O'Connor e Robertson (2006, p.1), seus pais foram Jens Petersen, cujo ofício era tintureiro, e sua mãe, Anna Catharina Petersen. Um fato curioso é que desde a infância teve um amigo que morava na mesma rua e que também se tornaria matemático: Hieronymus Georg Zeuthen, e viria a se dedicar à geometria das seções cônicas, superfícies algébricas e da história da matemática.

O'Connor e Robertson (2006, p.1) relatam que Julius Petersen primeiro frequentou uma escola privada em Soro, em seguida, em 1849, ele entrou na Soro Academy School, e foi nesse colégio que seu interesse pela matemática começou. Era apaixonado pela resolução de problemas, e durante muito tempo se dedicou ao clássico problema da trissecção do ângulo, utilizando apenas régua e compasso, segundo palavras do próprio Julius Petersen:

> A matemática, desde o momento em que comecei a aprendê-la, tomou todo o meu interesse, e a maior parte do meu trabalho consistia em resolver problemas meus e de meus amigos, e na busca da trissecção do ângulo, um problema que teve uma grande influência em todo o meu desenvolvimento. (O'CONNOR E ROBERTSON, 2006, p. 01)

O'Connor e Robertson (2006, p.1) relatam que embora a família humilde tenha tentado de tudo para educá-lo, em 1854, foi abrigado a deixar o estudo, pois seus pais não podiam continuar a mantê-lo. Após isso, foi trabalhar de aprendiz de mercearia em Kolding com seu tio, que após um ano, aproximadamente, faleceu e deixou algum dinheiro a Petersen, que retornou a Soro, em 1856, ingressou na faculdade de tecnologia de Copenhagen e, em 1860, iniciou no curso de Engenharia Civil.

Além disso, O'Connor e Robertson (2006, p.1) relatam que Petersen conseguiu lecionar em uma prestigiada escola privada de 1859 a 1871, e acumulava outros empregos de ensino em tempo parcial para garantir seu sustento. Em 1862, foi admitido na Universidade de

Copenhagen, para, então, estudar matemática, em um período de sua vida em que já estava casado e possuía três filhos, sendo obrigado a trabalhar de seis a sete horas por dia durante seis dias na semana para sustentar não somente a si próprio, mas também sua família também. Era considerado um bom professor de matemática, mas trabalhar no ensino lhe representava um problema, pois parecia incapaz de controlar os alunos.

O'Connor e Robertson (2006, p.1) acrescentam que, em 1866, Julius Petersen obteve o título de mestre, e resolveu permanecer na universidade para o seu doutorado. Em 1867, recebeu medalha de ouro pelo trabalho sobre equilíbrio de corpos flutuantes e, finalmente, obteve seu título de doutorado em 1871. Fato curioso é que ainda era influenciado pela matemática que o influenciara durante a infância, tais como os problemas que podem ser resolvidos com régua e compasso. Sua tese de doutorado recebeu o título: *Equações que podem ser resolvidas por raízes quadradas, com aplicação para a resolução de problemas usando régua e compasso*.

O'Connor e Robertson (2006, p.1) relatam que após a concessão do doutoramento de Julius Petersen, o mesmo foi apontado como conferencista da faculdade de tecnologia de Copenhagen e, em 1877, foi apontado como professor de matemática da Universidade de Copenhagen, e teve como colega de trabalho seu amigo de infância Hieronymus Georg Zeuthen.

O'Connor e Robertson (2006, p.1) relatam que Julius lecionou na escola de oficiais do exército de 1881 a 1887, e escreveu uma série de textos escolares e de graduação, que receberam aclamação internacional, apesar de serem difíceis para todos, com exceção de alunos excepcionais. Em 1863, Julius publicou *Trigonometria plana e esférica*, três anos mais tarde, publicou seus métodos e teorias para a solução de problemas de construção geométrica em várias edições e línguas. Este trabalho objetivava tornar sistemática a resolução geométrica de problemas, mas as construções geométricas que ele considerava eram sempre as de régua e compasso.

O'Connor e Robertson (2006, p.1) destacam que a pesquisa de Julius foi uma ampla variedade de tópicos que variam de álgebra, teoria dos números, geometria, análise, equações diferenciais e mecânica, publicou a teoria das equações algébricas em 1877, escreveu uma série de livros didáticos baseados em cursos que tinha dado no colégio de tecnologia: um em geometria plana em 1877, um sobre estática em 1881, um sobre cinemática em 1884 e um sobre dinâmica em 1887.

Convém acrescentar que O'Connor e Robertson (2006, p.1) relatam que Julius também escreveu sobre física matemática, economia matemática e um panfleto sobre criptografia. Seu trabalho sobre economia começou em 1871 e buscava uma melhor forma de redistribuir os bens a fim de beneficiar os trabalhadores. Em outro trabalho, estudou aspectos de política social, pois estava entusiasmado com essas questões e se uniu a um comitê para apoiar Georg Brandes, mas por curta duração. Brandes foi um crítico e erudito dinamarquês que assumiu a tarefa de libertar a Dinamarca de seu isolamento cultural e provincialismo com ideias progressistas voltadas para a reforma da sociedade.

Petersen ingressou na Sociedade Econômica Nacional, traduziu textos de economia e desenvolveu seus próprios estudos de economia, em 1872, e os publicou a partir de 1874; mudando drasticamente de tema, publicou, em 1875, um panfleto sobre criptografia, além do ineditismo do tema em seus trabalhos, também houve ineditismo da língua ao publicar o texto em francês. O'Connor e Robertson (2006, p.1) destacam que Julius jamais voltou à criptografia, e que seu trabalho mais relevante foi em geometria. Um artigo que ele escreveu, em 1891 (*Die Theorie der regulären Graphs*), marca o nascimento da teoria dos grafos.

O'Connor e Robertson (2006, p.1) destacam que na última parte da carreira de Petersen ele trabalhou com teoria da função, nos quadrados latinos e na teoria dos números. Petersen trabalhou em outras áreas além da matemática pura, pois foi membro da seguradora Hafnia, membro fundador da sociedade dinamarquesa de matemática, que surgiu em 1873, permanecendo um membro ativo da sociedade por anos. Além disso, em 1887, foi nomeado membro da comissão de educação para as escolas, na qual era um inspetor de educação no âmbito do Ministério da Educação.

Julius Petersen se sentiu tão satisfeito com suas vitórias, que pôde dizer: *"Quando, ao longo da vida, você obteve honra e dinheiro para se divertir, o que mais você pode pedir! "*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa faz menção ao fato de que há indícios de falhas no ensino de demonstrações matemáticas na educação básica, ou seja, livros e professores de matemática chegam a omitir as demonstrações dos alunos da educação básica. Entretanto, a pesquisa também relata e mostra, de uma forma sucinta, o quanto a matemática superior é fundamentada teórica e filosoficamente nos preceitos das provas e demonstrações matemáticas, cujos fatos contribuem para um fato inevitável: um distanciamento entre o ensino da matemática superior com suas provas, demonstrações e teoremas e a matemática da educação básica que trabalha com resultados mais elementares. Pode ser um tanto prejudicial o contato tardio dos alunos com o ente demonstração, ou seja, somente no ensino superior, talvez sendo este o motivo da inclusão das demonstrações matemáticas na educação básica em países como Estados Unidos da América, Canadá e Inglaterra. Com relação a estas primeiras considerações, uma sugestão de continuidade para a pesquisa seria aprofundar na problemática do ensino das demonstrações matemáticas na educação básica brasileira, avançar na fundamentação teórica e filosófica das demonstrações matemáticas e averiguar os resultados obtidos por países que introduziram o ensino de demonstrações matemáticas na educação básica.

Uma questão importante que surge com a pesquisa devida à ênfase dada ao ente demonstração, seria: por que as demonstrações são tão importantes para a o ensino de matemática? O que se conseguiu nesta pesquisa, de forma sintetizada, foi mostrar que as provas, demonstrações e teoremas são parte central dessa ciência abstrata que se construiu a partir desses citados entes desde a Grécia antiga. Além disso, enquanto resultados brilhantes passaram centenas de anos apenas como conjecturas, quando são demonstrados, assumem, para a eternidade, o título de teorema e passam a fazer parte de uma estrutura lógica e bem estruturada denominada matemática. Nomes expressivos, como Leonhard Euler, com seus trabalhos, testificam como teoremas são importantes, eternos, indubitáveis e inquestionáveis para a estrutura axiomática da matemática. Segue como sugestão de continuidade nas pesquisas, um aprofundamento teórico da importância das demonstrações para a matemática, para o ensino de matemática e para o ensino como um todo, uma vez que o ato de demonstrar é unicamente pertencente à matemática, entre todas as ciências.

A proposta que esta pesquisa adotou, assumindo que haja uma distância entre a matemática superior e a básica, para tentar diminuir a mesma, foi apresentar um tema sofisticado, como o Pequeno Teorema de Fermat, de forma elementar na versão do

Dinamarquês Julius Petersen, em sua matemática combinatória com os colares e miçangas, pois o Pequeno Teorema de Fermat é um resultado importante da matemática superior, que possui uma versão compreensível, em nível básico, através de Julius Petersen, e que pode levar o jovem que tem uma experiência lúdica, como a retratada nessa pesquisa nas séries iniciais, a fazer mais ligações ou conexões quando tiver contato com a matemática superior do que aquele aluno que jamais teve contato com a mesma. Ou seja, mesmo que alguns teoremas estejam inacessíveis aos alunos da Educação Básica, é importante buscar alternativas que tragam experiências no âmbito das demonstrações matemáticas, em suas diversas apresentações, a fim de enriquecer a formação dos alunos para tudo, desde sua realização pessoal até sua melhor compreensão do mundo acadêmico. E como sugestão para continuidade de pesquisa, é buscar novas alternativas para a demonstração de teoremas, não tão elementares, de uma forma acessível à Educação Básica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARKER, Stephen F, **Filosofia da Matemática**. 2ª Edição, Rio de Janeiro: Zahar, (1976).

BISHOP, ROBERT E. **On Fermat's Little Theorem**. preprint, 2008.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., (1974).

CHAN, Hing-Lun; NORRISH, Michael. **A string of pearls: proofs of Fermat's Little Theorem.** In: International Conference on Certified Programs and Proofs. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

DICKSON, Leonard Eugene. **History of the theory of numbers: Vol. 1: Divisibility and primality**. Carnegie Institution of Washington, Nº 256, 1919.

EVES, Howard Whitley. **Introdução à história da matemática**. 4ª edição, Campinas: Unicamp, (2004).

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa; HADDAD, Thomas Augusto Santoro. **"Demonstração de certos teoremas referentes a números primos", de Leonhard Euler: tradução e comentários.** Revista Brasileira de História da Matemática, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 93-99, abr. (2009).

GONÇALVES, Carlos Henrique Barbosa; HADDAD, Thomas Augusto Santoro. **Refletindo sobre três séculos de Leonhard Euler.** Revista Brasileira de História da Matemática, Rio Claro, v. 9, n. 17, p. 01-06, abr. (2009).

MORAIS FILHO, Daniel Cordeiro de. **Um convite à Matemática**. 2ª Edição, Rio de Janeiro: SBM, (2013).

NAGAFUCHI, Thiago; BATISTA, Irinéa de Lourdes. **O que é demonstração? Aspectos filosóficos**. 2008.

O'CONNOR, John Joseph; ROBERTSON, Edmund Frederick. **Biografia de Julius Peter Christian Petersen.** St Andrews: Universidade de St Andrews. (2006) Artigo disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Petersen.html. Acessado em março/2017.

ROONEY, Anne. **A História da matemática. Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M. Books do Brasil Editora Ltda, (2012).

ROQUE, Tatiana. **História da matemática. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, (2012).

ROQUE, Tatiana; DE CARVALHO João Bosco Pitombeira. **Tópicos de História da matemática.** Rio de Janeiro: SBM, (2012).

SERPA, Maria Cristina Gonçalves Silveira de. **Do Pequeno Teorema de Fermat às Famílias gerais de congruências**. (2011). Artigo

Vídeo Pequeno Teorema de Fermat disponível em: https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/cryptography/random-algorithms-probability/v/fermat-s-little-theorem-visualization acessado em março/2017.