

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MOSAICOS: CONSTRUÇÃO ATRAVÉS DO GEOGEBRA  
E APLICAÇÕES PARA O ENSINO BÁSICO.**

Náyra Milla da Silva Santos

**Orientador:** Prof. Ma. Joilma Silva Carneiro

Feira de Santana

Outubro de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

**MOSAICOS: CONSTRUÇÃO ATRAVÉS DO GEOGEBRA  
E APLICAÇÕES PARA O ENSINO BÁSICO.**

Náyra Milla da Silva Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

**Orientador:** Prof. Ma. Joilma Silva Carneiro

Feira de Santana  
16 de Outubro de 2017

### **Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado**

S236m Santos, Náyra Milla da Silva  
Mosaicos : construção através do Geogebra e aplicações para o ensino  
básico / Náyra Milla da Silva Santos. - 2017.  
89 f.: il.

Orientador: Joilma Silva Carneiro.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Feira de  
Santana, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional,  
2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Mosaico (Geometria).  
3. Geometria – Processamento de dados. I. Carneiro, Joilma Silva, orient.  
II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:51(09)



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE NÁYRA MILLA DA SILVA SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos dezesseis dias do mês de outubro de dois mil e dezessete às 9:00 horas no Auditório da PPGM - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título “**Mosaicos: construção através do Geogebra e aplicações para o Ensino Básico**”, da discente **Náyra Milla da Silva Santos**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Joilma Silva Carneiro (Orientador, UEFS), Claudene Ferreira Mendes Rios (UNEB) e Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: Aprovada.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 16 de outubro de 2017.

Joilma Silva Carneiro

Profa. Msc. Joilma Silva Carneiro (UEFS)

Orientador

Claudene Ferreira Mendes Rios

Profa. Msc. Claudene Ferreira Mendes Rios (UNEB)

Márcia Braga de Carvalho Ferreira

Profa. Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UEFS)

Visto do Coordenador:

Haroldo Gonçalves Benatti  
Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

# Agradecimentos

Na caminhada, por vezes espinhosa do mestrado, esforço, dedicação e fé são imprescindíveis. Em alguns momentos esse caminho parece não ter fim, outros, são consumidos diante de tantas demandas. Escrever a dissertação foi a última etapa desse caminho, que possivelmente nos permitirá trilhar vários outros. Além disso, Deus cuidou de cada detalhe, assim como tive pessoas à minha volta que tornaram essa caminhada mais leve. Todos merecem meus agradecimentos.

Primeiramente, agradeço ao meu Deus lindo que, por muitas vezes, escutou minhas angústias e medos, me concedeu forças para continuar, guardou e livrou-me de todo mal. Confesso que sem Ele jamais teria chegado até aqui. Também, mostro gratidão aos meus pais pelo apoio e orações que foram e serão sempre fundamentais para mim, aos meus familiares que entenderam a minha ausência em vários momentos especiais durante esse caminho. Por muitas vezes, precisei fazer escolhas que nem sempre me deixaram felizes no momento, mas foram necessárias.

Retribuo o mesmo gesto aos meus amigos que me deram ouvidos e me incentivaram quando as minhas forças estavam se esgotando. Mesmo distantes fisicamente, não deixaram de cuidar de mim em oração. Em especial, agradeço a Cassinha e Alan, por terem me proporcionado um teto, muito aconchegante por sinal, nas muitas vezes que precisei, fazendo com que me sentisse em casa.

Não posso deixar de agradecer aos colegas que caminharam e compartilharam alegrias e angústias. Alguns precisaram fazer uma pausa durante o caminho, outros seguiram até o final. Em especial, agradeço a Silvio, Jorge e Eliene por todo apoio durante esses três anos e à Mirian, por ter me presenteado com o tema dessa dissertação.

Finalmente, reconheço com carinho os professores que partilharam seus conhecimentos durante esse processo, em especial, a professora Joilma Silva Carneiro, por ter aceitado orientar esse trabalho e ao professor Maurício de Araújo Ferreira por ter feito essa ponte. Agradeço também a CAPES, pelo apoio financeiro durante o curso.

Quando eu tinha apenas a certeza de querer escrever sobre mosaicos, a professora Joilma, com seus ricos direcionamentos, sugestões de leitura e apoio, permitiu que eu delimitasse o tema desse trabalho. Durante a escrita, suas observações e incentivos foram essenciais para que a elaboração chegasse a este formato, muito obrigada!

## Resumo

Este trabalho tem o objetivo de apresentar o estudo de mosaicos com aplicações para o ensino básico. Esse estudo torna-se ainda mais entusiasmante, quando fazemos o uso da Geometria Dinâmica, por isso construímos os mosaicos utilizando o GeoGebra. Mosaico, é um padrão que cobre inteiramente o plano sem superposição das figuras, nem espaços vazios entre elas, podendo ser estudado também a partir das operações de simetria que os deixam invariantes. Iniciamos o trabalho com algumas noções matemáticas para o estudo dos mosaicos bem como um pequeno histórico para em seguida definí-los. Identificamos qual grupo cristalográfico o mosaico pertence. Ao final dessa dissertação, apresentamos algumas questões com mosaicos que foram trabalhadas na OBM(Olimpíada Brasileira de Matemática), ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio), Vestibulares e resolvemos algumas questões para o Ensino Superior.

**Palavras-chaves:** mosaicos, grupos cristalográficos, GeoGebra, ensino básico.

## **Abstract**

The goal of this work is to present the study of mosaics with applications for the basic teaching. This study becomes even more exciting when we use the Dynamic Geometry, so we built the mosaics using GeoGebra. Mosaic, Is a pattern covering the plane entirely without overlapping figures, neither spaces between them, and it can also be studied from the symmetry operations that they leave invariants. We started the work with some mathematical notions for the study of the mosaics as well as a small historical to define them later. We identified which mosaic group belongs the mosaic. At the end of this dissertation, we present some questions with mosaics that were worked on OBM (The Brazilian Olympic mathematics), ENEM (High School National Exam), Entrance Exams and we have solved some questions for Higher Education.

**Keywords:** mosaics, crystallographic groups, GeoGebra, basic education.

# Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	viii
Introdução	1
<b>1 Noções preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Vetores no plano . . . . .	3
1.2 Espaços vetoriais . . . . .	5
1.3 Transformações no plano . . . . .	6
1.4 Transformações lineares no plano . . . . .	7
1.4.1 Reflexões . . . . .	9
1.4.2 Projeções . . . . .	11
1.4.3 Rotações . . . . .	12
1.4.4 Homotetias . . . . .	14
1.5 Isometrias no plano . . . . .	15
1.5.1 Translações . . . . .	16
1.5.2 Reflexões com deslizamento . . . . .	17
<b>2 Mosaicos</b>	<b>19</b>
2.1 Histórico . . . . .	19
2.2 Definição . . . . .	22
2.3 Grupos Cristalográficos . . . . .	32
<b>3 Construção de Mosaicos utilizando o GeoGebra</b>	<b>43</b>
3.1 Software GeoGebra . . . . .	43
3.2 Detalhes da construção . . . . .	44



<b>4</b>	<b>Aplicações de Mosaicos para o Ensino</b>	<b>56</b>
4.1	Aplicações para o Ensino Básico . . . . .	57
4.1.1	Questões da OBM . . . . .	57
4.1.2	Questões de Vestibulares e ENEM . . . . .	63
4.2	Questões para o Ensino Superior . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>77</b>
5.1	Trabalhos Futuros . . . . .	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

1.1	As coordenadas do vetor $u + v$ .	4
1.2	$\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$ em três casos, para diferentes valores de $\lambda$ .	5
1.3	O produto $\lambda \cdot \overrightarrow{OP}$ com $\lambda > 0$ e com $\lambda < 0$ .	5
1.4	Reflexão em torno do eixo $Ox$ .	10
1.5	Reflexão de $v = (2, 3)$ em torno do eixo $OX$ .	11
1.6	Projeção de $v$ sobre o eixo $Ox$ .	11
1.7	Projeção de $v = (3, 4)$ sobre o eixo $Ox$ .	12
1.8	Rotação de $v$ por $\theta$ .	12
1.9	Rotação de $v = (2, 5)$ por $\theta = 30^\circ$ .	14
1.10	Homotetia, com $a > 1$ .	14
1.11	Homotetia, com $0 \leq a < 1$ .	15
1.12	Homotetia, com $a < 0$ .	15
1.13	A translação determinada pelo vetor $v$ leva toda reta $r$ numa reta paralela e transforma o sistema $OXY$ no sistema $O'X'Y'$ , cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de, $OX$ e $OY$ .	17
1.14	O triângulo $A_1, B_1, C_1$ , imagem do triângulo $ABC$ pela reflexão em torno de $r$ com vetor de deslizamento $v$ .	18
1.15	A reflexão deslizante em torno de $r$ seguida da translação ao longo de $v$ é o mesmo que reflexão em torno de $s$ com deslizamento ao longo de $w$ .	18
2.1	Ruínas Romanas - Conímbriga	19
2.2	Birds - M.C. Escher	20
2.3	Os 15 Pentágonos descobertos até agora.	22
2.4	Mosaico (4,4,4,4) e Mosaico (3,3,3,3,3,3)	24
2.5	Mosaico (6,6,6)	24
2.6	Mosaico (3,12,12) e Mosaico (4,8,8).	26
2.7	Mosaico (4,6,12) e Mosaico (6,6,6).	26
2.8	Mosaico (3,4,6,4) e Mosaico (3,6,3,6).	27
2.9	Mosaico (4,4,4,4).	28
2.10	Mosaico (3,3,4,3,4) e Mosaico (3,3,3,4,4).	29

2.11	Mosaico (3,3,3,3,6). . . . .	29
2.12	Mosaico(3,3,3,3,3,3). . . . .	30
2.13	Mosaicos formados pelas mesmas figuras geométricas, porém, movimentos rígidos diferentes. Não são iguais. . . . .	30
2.14	Mosaico Especial. . . . .	31
2.15	Mosaico de Penrose. . . . .	32
2.16	Paralelogramo e Retângulo. . . . .	33
2.17	Rômbo e Quadrado. . . . .	33
2.18	Hexagonal ou Isométrica. . . . .	34
2.19	Célula geradora do mosaico tipo p1 e exemplo do mosaico tipo p1. . . . .	34
2.20	Célula geradora do mosaico tipo p2 e exemplo do mosaico tipo p2. . . . .	35
2.21	Célula geradora do mosaico tipo pm e exemplo do mosaico tipo pm. . . . .	35
2.22	Célula geradora do mosaico tipo pg e exemplo do mosaico tipo pg. . . . .	35
2.23	Célula geradora do mosaico tipo cm e exemplo do mosaico tipo cm. . . . .	36
2.24	Célula geradora do mosaico tipo pmm e exemplo do mosaico tipo pmm. . . . .	36
2.25	Célula geradora do mosaico tipo pmg e exemplo do mosaico tipo pmg. . . . .	36
2.26	Célula geradora do mosaico tipo pgg e exemplo do mosaico tipo pgg. . . . .	37
2.27	Célula geradora do mosaico tipo cmm e exemplo do mosaico tipo cmm. . . . .	37
2.28	Célula geradora do mosaico tipo p4 e exemplo do mosaico tipo p4. . . . .	37
2.29	Célula geradora do mosaico tipo p4m e exemplo do mosaico tipo p4m. . . . .	38
2.30	Célula geradora do mosaico tipo p4g e exemplo do mosaico tipo p4g. . . . .	38
2.31	Célula geradora do mosaico tipo p3 e exemplo do mosaico tipo p3. . . . .	39
2.32	Célula geradora do mosaico tipo p31m e exemplo do mosaico tipo p31m. . . . .	39
2.33	Célula geradora do mosaico tipo p3m1 e exemplo do mosaico tipo p3m1. . . . .	40
2.34	Célula geradora do mosaico tipo p6 e exemplo do mosaico tipo p6. . . . .	40
2.35	Célula geradora do mosaico tipo p6m e exemplo do mosaico tipo p6m. . . . .	40
2.36	Grupos que não possuem rotações. . . . .	41
2.37	Grupos que possuem rotação de ordem 2. . . . .	41
2.38	Grupos que possuem rotação de ordem 3. . . . .	42
2.39	Grupos que possuem rotação de ordem 4. . . . .	42
2.40	Grupos que possuem rotação de ordem 6. . . . .	42
4.1	Três triângulos e dois quadrados, depois, um decágono e dois pentágonos . . . . .	58
4.2	Três Animais - M.C. Escher . . . . .	76

# Introdução

Presentes no cotidiano, nas mais variadas formas (esculturas, casas, roupas, etc.), os mosaicos tornam-se atraentes não só pela sua beleza, como também pelo desafio dessa arte milenar em encaixar cada peça, independentemente do material, para montar o padrão, cobrir o plano e deixá-los ainda mais interessantes.

O primeiro tratamento matemático dado aos mosaicos deu-se por Joanes Kepler em seu livro *A Harmonia do Mundo* publicado em 1619, onde pontuou detalhes para pavimentar o plano com polígonos regulares ou não, sem sobreposições. Esses polígonos se encontram em um ponto e a soma dos ângulos nesse ponto é igual a quatro ângulos retos.

Para construir o mosaico é preciso definir uma célula primitiva, a partir da qual, através de transformações no plano, pavimenta-se o mesmo. Um mosaico tem dois vetores linearmente independentes, ao longo dos quais pode ser transladado sem mudança e ser classificado segundo tais transformações, em relação a um dos 17 grupos cristalográficos. Neste trabalho, nos limitamos em tratar dos mosaicos para o Ensino Básico.

O trabalho com mosaicos permite que alcancemos um dos objetivos da matemática, segundo o PCN, que é identificar características das figuras geométricas e perceber semelhanças e diferenças entre elas por meio de composição e decomposição, simetrias, ampliações e reduções.

Os estudos dos mosaicos sob o olhar da matemática, são recentes. Os polígonos são elementos de um mosaico, mas, nem todo conjunto de polígonos pavimenta o plano. Os mosaicos podem ser classificados, quanto aos tipos de polígonos que os compõem, em regular e semirregulares ou Arquimedianos. Existem 3 tipos de mosaicos regulares e 11 semirregulares.

Um polígono que atrai a atenção dos estudiosos sobre o tema é o pentágono. Sabe-se que o pentágono regular não pavimenta o plano. Atualmente, só 15 tipos de pentágonos irregulares pavimentam o plano. O 15º foi descoberto em 2015.

Além de contribuírem para essa descoberta, os avanços na tecnologia também contribuíram para novas formas de construção dos mosaicos através da Geometria Dinâmica. Um instrumento importante para a construção dos mosaicos é o GeoGebra. Com o passar dos anos, os recursos tecnológicos tendem a se tornarem mais acessíveis. Assim, muitas escolas já dispõem de laboratório de informática, que viabiliza esta construção e contribui

também para o ensino da Geometria.

Quanto à estrutura do trabalho, dividimos em quatro capítulos. No Capítulo 1, apresentamos noções preliminares. Iniciamos com a definição de vetores e espaços vetoriais para, em seguida, apresentarmos algumas transformações no plano. Falamos de reflexões, projeções, rotações e homotetias, que são transformações lineares, além das translações e reflexões com deslizamento, que são isometrias.

Construímos as figuras dos capítulos 1, 2, 3 e a maior parte do capítulo 4, utilizando o GeoGebra.

No Capítulo 2, temos um breve histórico dos mosaicos e sua definição sob o olhar da matemática. Exibiremos também os 17 grupos cristalográficos, suas características e alguns exemplos.

No Capítulo 3, indicamos os passos para a construção de um mosaico, apresentando um método de construção utilizando as transformações do Capítulo 1 e classificando os mesmos segundo o Capítulo 2.

No Capítulo 4, exibimos questões da OBM(Olimpíada Brasileira de Matemática), ENEM(Exame Nacional do Ensino Médio) e alguns vestibulares que envolvem mosaicos e os relacionam com algumas áreas da matemática. Além destas questões voltadas para o ensino básico, terminaremos apresentando alguns mosaicos para serem classificados quanto ao grupo cristalográfico.

No Capítulo 5, apresentamos algumas propostas de trabalhos futuros para um estudo mais detalhado dos mosaicos voltado para o ensino superior.

# Capítulo 1

## Noções preliminares

Neste capítulo, pontuaremos alguns resultados da Álgebra Linear que contribuirão no tratamento matemático dos mosaicos, um padrão que pode se repetir para preencher o plano e é capaz de ser transladado em pelo menos duas direções, correspondentes a dois vetores linearmente independentes, sem mudanças.

Seguiremos às abordagens feitas por [4], [5], [9], [6] e [10]. Os gráficos deste capítulo foram construídos utilizando o GeoGebra.

### 1.1 Vetores no plano

Os vetores no plano serão definidos como classes de equipolência de segmentos orientados. Quando nos referimos ao segmento de reta orientado  $AB$ , esta noção significará sempre que o sentido positivo de percurso vai da origem  $A$  para a extremidade  $B$ . O mesmo segmento, quando orientado no sentido oposto, será designado por  $BA$ .

**Definição 1.1.1.** Os segmentos de reta orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes, e escreve-se  $AB \equiv CD$ , quando eles:

1. Têm o mesmo comprimento;
2. São paralelos ou colineares;
3. Têm o mesmo sentido.

Quando os segmentos de reta orientados  $AB$  e  $CD$  são equipolentes, diz-se que eles representam o mesmo vetor  $v$ . Escreve-se então  $v = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Definição 1.1.2.** O vetor  $v = \overrightarrow{AB}$  é o conjunto de todos os segmentos de reta orientados que são equipolentes a  $AB$  (classe de equipolência de  $AB$ ).

Por extensão, admitiremos também que um ponto qualquer do plano representa o *vetor nulo*, ou *vetor zero*.

Em relação a um sistema de eixos ortogonais de origem  $O$ , fixado no plano, sejam  $A = (x, y)$  e  $B = (x', y')$ , os números  $\alpha = x' - x$  e  $\beta = y' - y$  chamam-se as coordenadas do vetor  $v = \overrightarrow{AB}$ . Escreve-se também  $v = (\alpha, \beta)$ . Muitas vezes é conveniente usar vetores colunas em vez de (ou além de) vetores linhas. Outra representação de  $v$  é  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ .

Definiremos a seguir a soma de dois vetores e o produto de um número real por um vetor.

Sejam  $u = \overrightarrow{AB}$  e  $v = \overrightarrow{CD}$  vetores dados. A partir de um ponto  $E$  arbitrário no plano, tomamos segmentos  $EP$  e  $PS$ , respectivamente, equipolentes a  $AC$  e  $CD$ . E pomos, por definição,  $u + v = \overrightarrow{ES}$ .

Se  $u = (\alpha, \beta)$  e  $v = (\alpha', \beta')$  são dados por suas coordenadas então  $u + v = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$ .

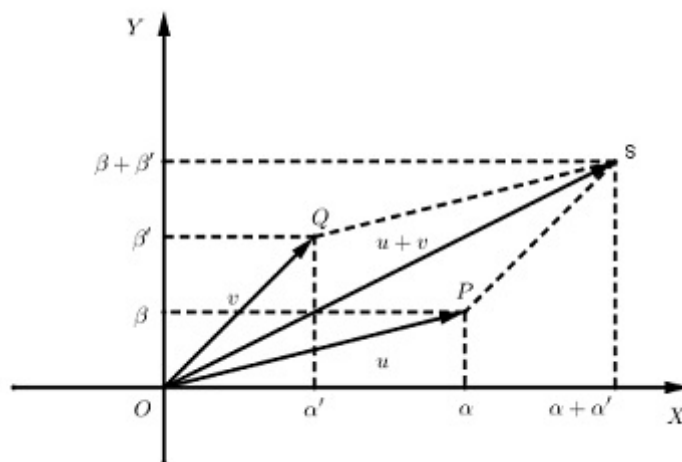


Figura 1.1: As coordenadas do vetor  $u + v$ .

Sabe-se que, dados dois pontos  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ , a expressão da distância  $d(P_1, P_2)$  em termos das coordenadas de  $P_1$  e  $P_2$  é:  $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Dados o número real  $\lambda$  e o vetor  $v = \overrightarrow{AB}$ , o produto  $\lambda.v = \lambda.\overrightarrow{AB}$  é, por definição, o vetor representado pelo segmento de reta orientado  $AB'$ , colinear com  $AB$ , com

$$d(A, B') = |\lambda|.d(A, B)$$

sendo os sentidos de  $AB$  e  $AB'$  iguais, quando  $\lambda > 0$  e opostos se  $\lambda < 0$ .

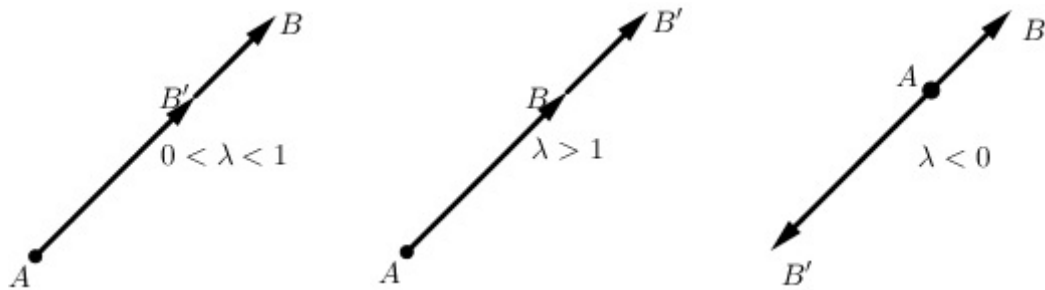


Figura 1.2:  $\overrightarrow{AB'} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$  em três casos, para diferentes valores de  $\lambda$ .

Se  $v = (\alpha, \beta)$  então  $\lambda \cdot v = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$ .

Seja  $OP$  o segmento orientado de origem  $O$  equipolente a  $AB$ , as coordenadas do ponto  $P$  são  $(\alpha, \beta)$  e  $P' = (\lambda\alpha, \lambda\beta)$ .

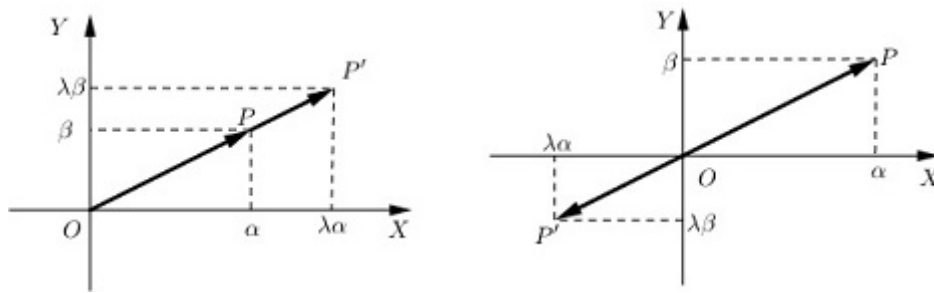


Figura 1.3: O produto  $\lambda \cdot \overrightarrow{OP}$  com  $\lambda > 0$  e com  $\lambda < 0$ .

Dados  $v = \overrightarrow{AB}$ , o vetor  $-v = \overrightarrow{BA}$  é chamado de *simétrico* ou *oposto* de  $v$ . Se  $v = (\alpha, \beta)$ , então  $-v = (-\alpha, -\beta)$ . Evidentemente,  $-v = (-1)v$ .

Diremos que um vetor  $v$  é *combinação linear* dos vetores  $v_1, \dots, v_n$  quando existirem números reais  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , tais que,

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

o vetor  $v = (\alpha', \beta')$  diz-se um *múltiplo* do vetor  $u = (\alpha, \beta)$ , quando existe  $k \in \mathbb{R}$ , tal que  $v = k \cdot u$ , isto é,  $\alpha' = k\alpha$  e  $\beta' = k\beta$ .

**Teorema 1.1.** *Se nenhum dos vetores  $u, v$  do plano é múltiplo do outro, então todo vetor  $w$  desse plano se escreve (de modo único) como combinação linear  $w = \lambda \cdot u + \mu \cdot v$ .*

**Demonstração** cf. [10]

## 1.2 Espaços vetoriais

**Definição 1.2.1.** Um espaço vetorial  $E$  é um conjunto, cujos elementos são chamados vetores, no qual estão definidas duas operações: a adição, que a cada par de vetores



$u, v \in E$  faz corresponder um novo vetor  $u + v \in E$ , chamado a soma de  $u$  e  $v$ , e a multiplicação por um número real, que a cada número  $\alpha \in \mathbb{R}$  e a cada vetor  $v \in E$  faz corresponder um vetor  $\alpha.v$ , ou  $\alpha v$ , chamado o produto de  $\alpha$  por  $v$ .

Essas operações devem satisfazer para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $u, v, w \in E$ , as condições abaixo, chamadas os axiomas de espaço vetorial:

**Comutatividade:**  $u + v = v + u$ .

**Associatividade:**  $(u + v) + w = u + (v + w)$  e  $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$ .

**Vetor nulo:** Existe um vetor  $0 \in E$ , chamado vetor nulo, tal que  $v + 0 = 0 + v$  para todo  $v \in E$ .

**Inverso Aditivo:** Para cada vetor  $v \in E$  existe um vetor  $-v \in E$ , chamado o inverso aditivo, ou o simétrico de  $v$ , tal que  $-v + v = v + (-v) = 0$ .

**Distributividade:**  $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$  e  $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ .

**Multiplicação por 1:**  $1.v = v$ .

**Exemplo 1.2.2.** Para cada  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^n$  é um espaço vetorial com as operações usuais de multiplicação por escalar e de adição. Para  $n = 1$ , tem-se  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$  =reta numérica.  $\mathbb{R}^2$  é o plano euclidiano.

Definido vetor e o espaço vetorial, podemos definir vetores L.I.(Linearmente Independente) e L.D.(Linearmente Dependente)

**Definição 1.2.3.** Sejam  $v_1, \dots, v_n$  vetores em um espaço vetorial  $V$ . Dizemos que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são *linearmente independentes*, ou simplesmente *independentes*, se a equação

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

é satisfeita somente quando  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ . Caso exista algum  $a_i \neq 0$ , dizemos que os vetores  $v_1, \dots, v_n$  são *linearmente dependentes*, ou simplesmente *dependentes*.

**Exemplo 1.2.4.** Os vetores  $v_1 = (1, -1)$  e  $v_2 = (1, 1)$  são independentes, pois a equação

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0$$

equivalente à equação

$$a_1.(1, -1) + a_2.(1, 1) = (0, 0)$$

é satisfeita somente se  $a_1 = a_2 = 0$ .

### 1.3 Transformações no plano

**Definição 1.3.1.** Uma transformação  $T$  no plano  $\Pi$  é uma função  $T : \Pi \rightarrow \Pi$ , isto é, uma correspondência que associa a cada ponto  $P$  do plano outro ponto  $P_1 = T(P)$  do plano, chamado sua imagem por  $T$ .

**Exemplo 1.3.2.** Considere a aplicação  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Note que o vetor  $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  é transformado por  $T$  no vetor

$$p' = \begin{pmatrix} 3 + 4 \\ 3 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

A transformação  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  diz-se injetiva quando pontos distintos  $P \neq Q$  em  $\Pi$  têm sempre imagens distintas  $T(P) \neq T(Q)$ . Noutras palavras,  $T$  é injetiva quando  $T(P) = T(Q)$  implica  $P = Q$ .  $T$  diz-se sobrejetiva quando todo ponto  $P_1$  em  $\Pi$  é imagem de pelo menos um ponto  $P$ , ou seja, para todo  $P_1$  em  $\Pi$  existe  $P$  em  $\Pi$  tal que  $T(P) = P_1$ .

Uma transformação  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  chama-se bijetiva, quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva. Isso significa que para todo ponto  $P_1$  em  $\Pi$  existe um único ponto  $P$  em  $\Pi$  tal que  $T(P) = P_1$ . Uma transformação particular é a transformação identidade  $Id : \Pi \rightarrow \Pi$ . Por definição, tem-se  $Id(P) = P$  para todo  $P \in \Pi$ .

Uma vez que um sistema de coordenadas em  $\Pi$  tenha sido estabelecido, uma transformação  $T$  pode ser descrita por suas equações, isto é, pelas expressões das coordenadas  $(x_1, y_1)$  do ponto  $P_1 = T(P)$ , obtido pela aplicação de  $T$  ao ponto  $P = (x, y)$ . Algumas transformações do plano são também transformações lineares. Trataremos estas na seção 1.4 e uma outra parte, as que não são transformações lineares, na seção 1.5, que fala sobre isometrias.

## 1.4 Transformações lineares no plano

**Definição 1.4.1.** Sejam  $E, F$  espaços vetoriais. Uma transformação linear  $T : E \rightarrow F$  é uma correspondência que associa a cada vetor  $v \in E$  um vetor  $T(v) = T.v = Tv \in F$  de modo que valham, para quaisquer  $u, v \in E$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , as relações:

$$T(u + v) = Tu + Tv,$$

$$T(\alpha.v) = \alpha.Tv.$$

O vetor  $Tv$  chama-se a imagem (ou transformado) de  $v$  pela transformação  $T$ .

Podemos utilizar uma outra maneira para verificarmos se uma transformação  $T$  é linear. Dados  $u, v \in E$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha u) + T(\beta v) = \alpha.Tu + \beta.Tv.$$

Considerando a transformação  $T : E \rightarrow F$ , sendo  $E$  e  $F$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$  valem as seguintes propriedades para  $T$ .

$$P_1: T(0) = 0.$$

Demonstração: Como 0 é o elemento neutro da adição em  $T$ :

$$T(0) + 0 = T(0)$$

Como  $T$  é linear, temos:

$$T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$$

$$T(0) + 0 = T(0) + T(0)$$

Somando  $-T(0)$  a ambos os membros:

$$0 = T(0).$$

□

$$P_2: T(-u) = -T(u), \forall u \in E$$

$$T(u) + (-T(u)) = 0$$

Pela propriedade anterior,  $0 = T(0)$ . Como  $-u$  é simétrico de  $u$ , temos:

$$T(0) = T(u + (-u))$$

Como  $T$  é linear,  $T(u + (-u)) = T(u) + T(-u)$ . Logo,

$$T(u) + T(-u) = T(u) + (-T(u)).$$

Somando  $-T(u)$  a ambos os membros da última igualdade, teremos:

$$T(-u) = -T(u)$$

□

$$P_3: T(u - v) = T(u) - T(v), \forall u, v \in E.$$

$$T(u - v) = T(u + (-1)v)$$

Como  $T$  é linear,

$$T(u + (-1)v) = T(u) + (-1)T(v) = T(u) - T(v).$$

**Exemplo 1.4.2.** Seja  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , onde  $T(x, y) = (x - y, 0)$ , verificar se é uma transformação linear.

De fato, sejam  $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ,  $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ , temos que

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\
T(u+v) &= (x_1+x_2-(y_1+y_2), 0) \\
T(u+v) &= (x_1+x_2-y_1-y_2, 0) \\
T(u+v) &= (x_1-y_1, 0) + (x_2-y_2, 0) \\
T(u+v) &= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T(\alpha v) &= T(\alpha x_2, \alpha y_2) \\
T(\alpha v) &= (\alpha x_2 - \alpha y_2, 0) \\
T(\alpha v) &= \alpha(x_2 - y_2, 0) \\
T(\alpha v) &= \alpha T(v)
\end{aligned}$$

$\therefore T$  é linear.

As transformações lineares  $A : E \rightarrow E$  do espaço vetorial  $E$  em si mesmo, são chamados operadores lineares em  $E$ . Por sua vez, as transformações lineares  $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ , com valores numéricos, são chamados funcionais lineares.

Dentre os operadores lineares mais importantes em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , estão os que produzem reflexões, projeções, rotações e homotetias. A seguir, estudaremos alguns destes operadores no  $\mathbb{R}^2$ , segundo [4] e [8].

### 1.4.1 Reflexões

Consideremos o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , chamado de reflexão em torno do eixo  $Ox$ , que transforma cada vetor  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  em sua imagem simétrica em relação ao eixo  $Ox$ .

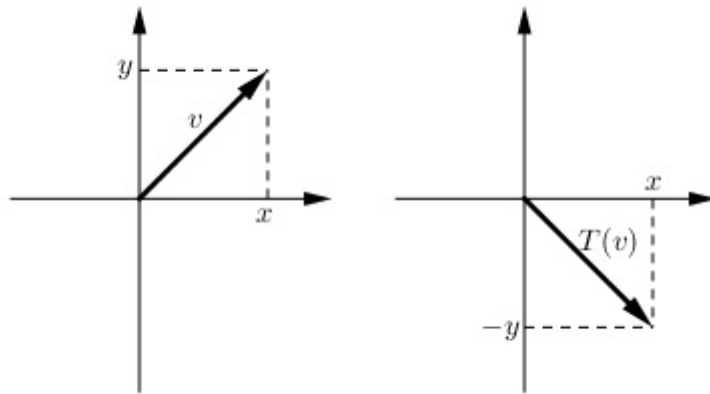


Figura 1.4: Reflexão em torno do eixo  $Ox$

Se escrevermos  $w = T(v) = (w_1, w_2)$ , obtemos as equações

$$w_1 = x = 1x + 0y, \quad w_2 = -y = 0x - 1y.$$

Assim, se  $\alpha$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , segue que

$$[T(v)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot [v]_\alpha.$$

Em geral, os operadores lineares de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  que levam cada vetor em seu simétrico em relação a alguma reta ou plano são chamados de reflexões. Abaixo, pontuaremos algumas das reflexões mais comuns em  $\mathbb{R}^2$ .

- Reflexão em torno do eixo  $Oy$ .

$$\text{Equação: } \begin{cases} w_1 = -x \\ w_2 = y \end{cases}$$

- Reflexão em torno da reta  $y = x$ .

$$\text{Equação: } \begin{cases} w_1 = y \\ w_2 = x \end{cases}$$

- Reflexão na origem.

$$\text{Equação: } \begin{cases} w_1 = -x \\ w_2 = -y \end{cases}$$

**Exemplo 1.4.3.** Considerando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(v) = (2, -3)$  é a reflexão de  $v = (2, 3)$  em torno do eixo  $Ox$ , pois,

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

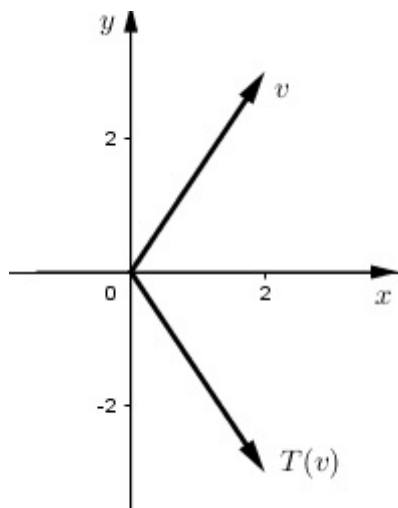


Figura 1.5: Reflexão de  $v = (2, 3)$  em torno do eixo  $Ox$ .

### 1.4.2 Projeções

Consideremos o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que transforma cada vetor  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  em sua projeção ortogonal sobre o eixo  $Ox$ .

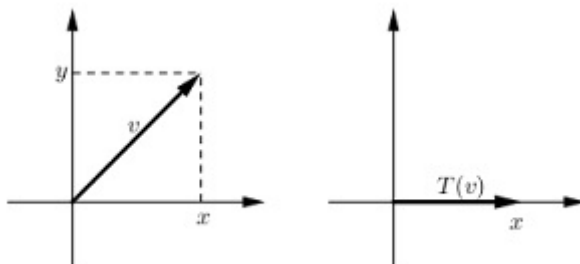


Figura 1.6: Projeção de  $v$  sobre o eixo  $Ox$ .

Se escrevermos  $w = T(v) = (w_1, w_2)$ , obteremos as equações

$$w_1 = x = 1x + 0y, \quad w_2 = 0 = 0x + 0y.$$

Assim, se  $\alpha$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$[T(v)]_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [v]_\alpha.$$

Uma projeção de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  é um operador linear que transforma cada vetor em sua projeção ortogonal sobre alguma reta ou algum plano que passa pela origem. Nos limitaremos a apresentar essas projeções no  $\mathbb{R}^2$ .

- Projeção sobre o eixo  $Oy$ .

$$\text{Equação: } \begin{cases} w_1 = 0 \\ w_2 = y \end{cases}$$

**Exemplo 1.4.4.** Considerando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(v) = (3, 0)$  é a projeção de  $v = (3, 4)$  sobre o eixo  $Ox$ , pois

$$T(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

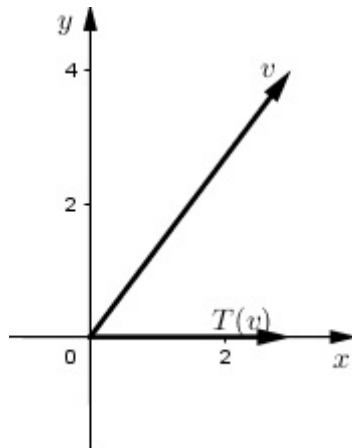


Figura 1.7: Projeção de  $v = (3, 4)$  sobre o eixo  $Ox$ .

### 1.4.3 Rotações

Consideremos o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que gira cada vetor  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  de um ângulo fixado  $\theta$ .  $T$  é chamado de rotação por  $\theta$  em  $\mathbb{R}^2$ . Os ângulos são positivos se gerados por rotações no sentido anti-horário e negativos se gerados por rotações no sentido horário.

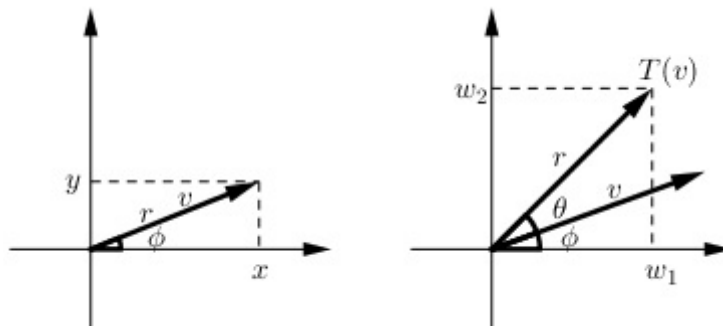


Figura 1.8: Rotação de  $v$  por  $\theta$ .

Se escrevermos  $w = T(v) = (w_1, w_2)$ , analisando os triângulos retângulos formados na figura acima, temos que

$$\cos\phi = \frac{x}{r}, \quad \text{sen}\phi = \frac{y}{r},$$

daí

$$x = r\cos\phi, \quad y = r\text{sen}\phi$$

e

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{w_1}{r}, \quad \text{sen}(\theta + \phi) = \frac{w_2}{r},$$

daí

$$w_1 = r\cos(\theta + \phi), \quad w_2 = r\text{sen}(\theta + \phi),$$

onde  $r$  denota o comprimento de  $v$  e  $\phi$  denota o ângulo entre  $v$  e o eixo  $Ox$  positivo no sentido anti - horário. Aplicando identidades trigonométricas temos

$$w_1 = r\cos\theta\cos\phi - r\text{sen}\theta\text{sen}\phi$$

$$w_2 = r\text{sen}\theta\cos\phi + r\cos\theta\text{sen}\phi$$

substituindo  $r\cos\phi$  por  $x$  e  $r\text{sen}\phi$  por  $y$ , temos

$$w_1 = x\cos\theta - y\text{sen}\theta$$

$$w_2 = x\text{sen}\theta + y\cos\theta.$$

Assim, se  $\alpha$  denota a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , obtemos

$$[T(v)]_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot [v]_\alpha.$$

**Exemplo 1.4.5.** Considerando o operador linear  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T(v) = \left( \sqrt{3} - \frac{5}{2}, 5\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right)$

é a rotação de  $v = (2, 5)$  por  $\theta = 30^\circ$ .

De fato, a partir da matriz de  $T$  relativa à base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , substituindo  $\theta$  por  $30^\circ$ , atribuindo os valores do seno e cosseno de  $\theta$  e depois multiplicando essa matriz por  $v$ , temos:

$$T(v) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{5}}{2} \\ \frac{5\sqrt{3}}{2} + 1 \end{bmatrix}$$



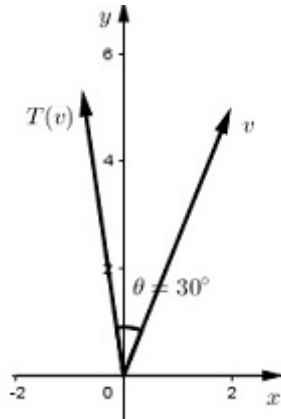


Figura 1.9: Rotação de  $v = (2, 5)$  por  $\theta = 30^\circ$ .

#### 1.4.4 Homotetias

A multiplicação por escalar de um vetor em  $\mathbb{R}^2$  e em  $\mathbb{R}^3$ , dependendo do valor do escalar, produz no vetor uma dilatação, contração ou inversão. Podemos representar estes efeitos geométricos por meio de operadores lineares. De fato, o operador linear  $T_a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , dado por  $T_a(v) = av$ , em que  $a \in \mathbb{R}$  e  $v \in \mathbb{R}^2$ , dilata  $v$ , se  $a > 1$ ; contrai  $v$ , se  $0 \leq a < 1$ ; inverte o sentido de  $v$ , se  $a < 0$ . No caso particular de  $a = -1$ , o operador linear  $T_a$  é chamado de reflexão em torno da origem.

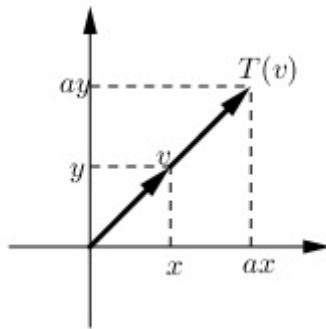


Figura 1.10: Homotetia, com  $a > 1$ .

**Exemplo 1.4.6.** Considerando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T_a(v) = a.v$  com  $a = 2$  e  $v = (1, 1)$ , temos que  $T_a(v) = 2(1, 1) = (2, 2)$  representa uma dilatação na direção de  $v = (1, 1)$ .

**Exemplo 1.4.7.** Considerando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T_a(v) = a.v$  com  $a = \frac{1}{2}$  e  $v = (1, 1)$ , temos que  $T_a(v) = \frac{1}{2}(1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  representa uma contração na direção de  $v = (1, 1)$ .

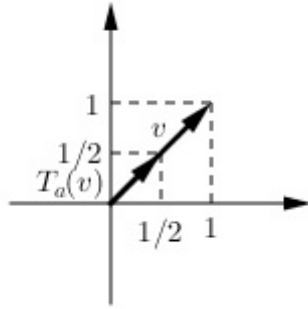


Figura 1.11: Homotetia, com  $0 \leq a < 1$ .

**Exemplo 1.4.8.** Considerando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $T_a(v) = a.v$  com  $a = -2$  e  $v = (1, 1)$ , temos que  $T_a(v) = -2.(1, 1) = (-2, -2)$  é uma homotetia. Como  $a < 0$ , o sentido do vetor foi invertido.

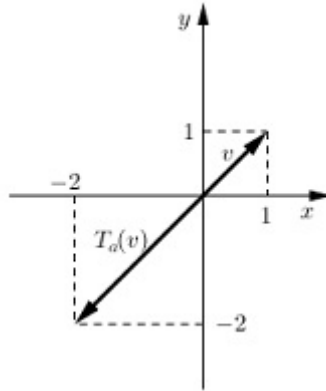


Figura 1.12: Homotetia, com  $a < 0$ .

## 1.5 Isometrias no plano

**Definição 1.5.1.** Uma isometria do plano  $\Pi$  é uma transformação  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  que preserva distâncias. Mais precisamente,  $T$  é uma isometria quando se tem

$$d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$$

para quaisquer pontos  $P, Q$  no plano  $\Pi$ .

Estabeleceremos algumas propriedades fundamentais desse tipo de transformações segundo [9].

*Toda isometria  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  é injetiva.*

Com efeito, se  $T(P) = T(Q)$ , então

$$d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0,$$

logo,  $P = Q$ .

Sejam  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria e  $P, Q$  pontos distintos de  $\Pi$ . Se  $T(P) = P_1$  e  $T(Q) = Q_1$ , então transforma todo ponto  $R$  do segmento  $PR$  num ponto  $R_1$  do segmento  $P_1Q_1$ .

Com efeito, com o  $R$  pertence ao segmento  $PQ$ , temos

$$d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q).$$

Sendo  $T$  uma isometria, temos  $d(P_1, Q_1) = d(P, Q)$ ,  $d(P_1, R_1) = d(P, R)$  e  $d(R_1, Q_1) = d(R, Q)$ . Logo,

$$d(P_1, Q_1) = d(P_1, R_1) + d(R_1, Q_1).$$

Portanto  $R_1$  pertence ao segmento de reta  $P_1Q_1$ .

*A imagem de uma reta  $r$  por uma isometria  $T$  é uma reta  $r_1 = T(r)$ .*

Sejam  $P, Q$  pontos distintos de  $r$  e  $P_1 = T(P)$ ,  $Q_1 = T(Q)$  suas imagens por  $T$ . Chamamos de  $r_1$  a reta que passa pelos pontos  $P_1$  e  $Q_1$ . Dado qualquer outro ponto  $R$  na reta  $r$ , afirmamos que sua imagem  $R_1 = T(R)$  deve pertencer à reta  $r_1$ . Para visualizarmos melhor, suponhamos que  $Q$  esteja entre  $P$  e  $R$ , isto é, que  $Q$  pertença ao segmento  $PR$ . Então,  $Q_1$  está no segmento de reta  $P_1R_1$ , logo  $R_1$  pertence à reta  $r_1$  que liga  $P_1$  a  $Q_1$ . Mostramos assim que, os pontos da reta  $r$  são transformados pela isometria  $T$  em pontos da reta  $r_1$ .

*Uma isometria transforma retas paralelas em retas paralelas.*

Se  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  é uma isometria e as retas  $r, s$  do plano  $\Pi$  são paralelas, suas imagens  $r_1 = T(r)$  e  $s_1 = T(s)$  devem ser paralelas, pois se existisse um ponto  $P_1$  ao mesmo tempo em  $r_1$  e em  $s_1$  teríamos  $P_1 = T(P)$ , com  $P$  em  $r$  e  $P_1 = T(Q)$ , com  $Q$  em  $s$ . Sendo  $T$  injetiva, isso obrigaria  $P = Q$ , e então as retas  $r$  e  $s$  teriam um ponto  $P = Q$  em comum, contradizendo o fato de que são paralelas.

*Uma isometria preserva quaisquer ângulos.*

Sejam  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  uma isometria e  $ABC$  um triângulo retângulo em  $A$ . Dado qualquer ângulo  $\widehat{BAC}$ , sejam  $A_1 = T(A)$ ,  $B_1 = T(B)$  e  $C_1 = T(C)$ . Os triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$  têm lados iguais pois  $T$  preserva distâncias. Logo, têm ângulos iguais.

Existem apenas quatro tipos de isometrias  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  do plano  $\Pi$ , além da função identidade, a saber: translação, rotação, reflexão e reflexão com deslizamento. As rotações e reflexões foram exibidas na seção anterior, pois as mesmas também são transformações lineares. Serão exibidas em seguida as translações e as reflexões deslizantes.

### 1.5.1 Translações

A translação  $T_v : \Pi \rightarrow \Pi$ , determinada pelo vetor  $v$ , é a transformação que leva cada ponto  $P$  do plano  $\Pi$  no ponto  $T_v(P) = P + v$ . Como sabemos, se  $v = \overrightarrow{AB}$  então  $P + v = Q$  é o ponto tal que o segmento orientado  $PQ$  é equipolente a  $AB$ .

Se, num dado sistema de eixo ortogonais, as coordenadas de  $v$  são  $(\alpha, \beta)$  então, para cada ponto  $P = (x, y)$  tem-se  $T_v = (x + \alpha, y + \beta)$ . Lembrando que, quando  $\alpha = \beta = 0$ ,  $T_v$  é linear.

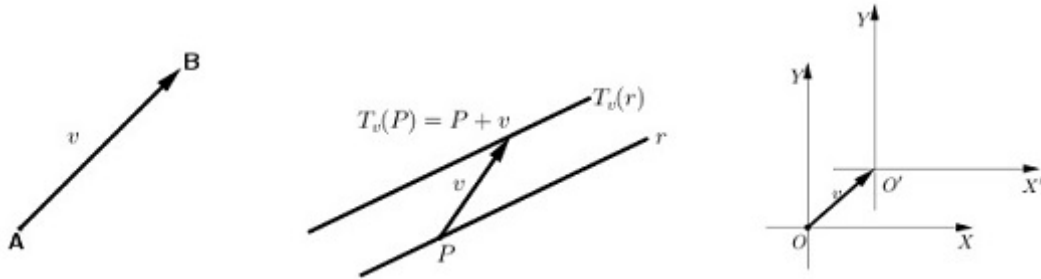
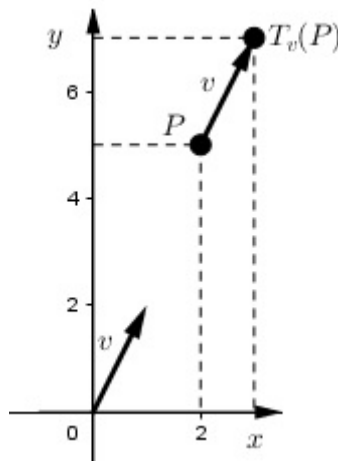


Figura 1.13: A translação determinada pelo vetor  $v$  leva toda reta  $r$  numa reta paralela e transforma o sistema  $OXY$  no sistema  $O'X'Y'$ , cujos eixos são paralelos a, e têm o mesmo sentido de,  $OX$  e  $OY$ .

A translação  $T_v$  transforma toda figura  $F$  numa figura  $T_v(F) = F'$ , cujos pontos  $P + v$  são obtidos transladando-se os pontos  $P$  de  $F$  pelo mesmo vetor  $v$ .

**Exemplo 1.5.2.** Considerando  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , com  $T_v = (x + \alpha, y + \beta)$ ,  $v = (1, 2)$  e  $P = (2, 5)$ , temos que  $T_v(P) = (1 + 2, 2 + 5) = (3, 7)$  é a translação de  $P = (2, 5)$  segundo  $v = (1, 2)$ .



### 1.5.2 Reflexões com deslizamento

Chama-se assim, a transformação do plano que consiste na reflexão em torno de uma reta  $r$  seguida de uma translação ao longo de um vetor  $v$ , paralelo a  $r$ .

Se  $T$  é uma isometria que consiste na reflexão em torno da reta  $r$  seguida da translação ao longo do vetor  $v$  (não necessariamente paralelo a  $r$ ), podemos obter outra reta  $s$  e

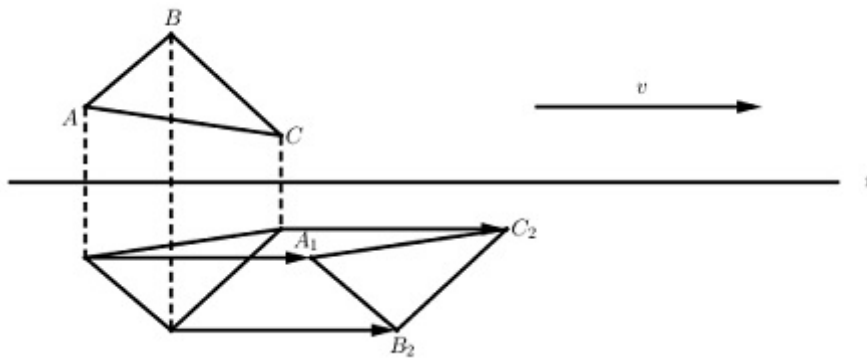


Figura 1.14: O triângulo  $A_1, B_1, C_1$ , imagem do triângulo  $ABC$  pela reflexão em torno de  $r$  com vetor de deslizamento  $v$ .

outro vetor  $w$ , este agora paralelo a  $s$ , de tal modo que  $T$  é a reflexão com deslizamento determinada pela reta  $s$  e pelo vetor  $w$ .

Para isso, tomemos um sistema de eixos ortogonais  $OXY$  onde  $OX$  coincide com  $r$ . Se  $v = (a, b)$ , então  $T$  transforma o ponto arbitrário  $P = (x, y)$  em

$$T(P) = (x + a, -y + b).$$

**Exemplo 1.5.3.** Sejam  $s$  a reta horizontal de equação  $y = \frac{b}{2}$  e  $w = (a, 0)$ . A reflexão com deslizamento em torno da reta  $s$  com vetor  $w$  transforma o ponto arbitrário  $P = (x, y)$  em

$$(x, b - y) + (a, 0) = (x + a, -y + b),$$

logo, coincide com  $T$ .

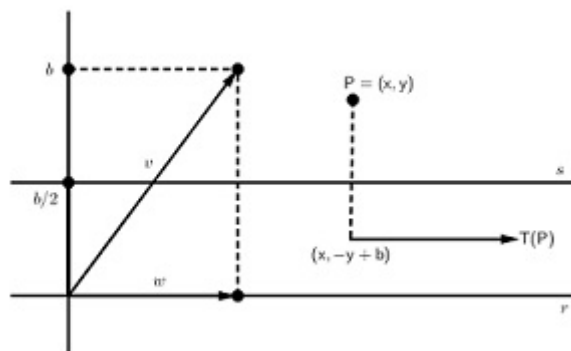


Figura 1.15: A reflexão deslizante em torno de  $r$  seguida da translação ao longo de  $v$  é o mesmo que reflexão em torno de  $s$  com deslizamento ao longo de  $w$ .

## Capítulo 2

# Mosaicos

### 2.1 Histórico

Os mosaicos são produzidos desde a antiguidade, não há consenso quanto à data exata em que esta arte surgiu. Segundo [3], os primeiros mosaicos foram feitos pelos sumérios, mas estiveram presentes também em outras civilizações, como a grega, egípcia, romana entre outras. Em cada cultura, o mosaico teve seu lugar. Começando pelas residências de pessoas ricas e influentes, depois igrejas e arquitetura em geral, até tornar-se popular e poder ser encontrado em qualquer lugar, presente em pisos, tapetes, móveis, recobrimento de paredes, ruas e outros suportes. No Brasil, foram introduzidos pelos portugueses, que receberam esse legado dos mouros e ampliaram suas técnicas. Um dos materiais mais usados para montar os mosaicos foi o azulejo, fazendo de Portugal uma referência para tal arte. Em meio a tantos exemplos, destacaremos os mosaicos das Ruínas Romanas de Conímbriga, datados do século II d.C..



Figura 2.1: Ruínas Romanas - Conímbriga

Com a colonização portuguesa, aos poucos, os mosaicos ganhavam espaço aqui no Brasil. Por conta da baixa qualidade dos materiais, pouco temos de exemplares. Os pisos mais antigos são os da casa do arquiteto Grandjean de Montigny, na Gávea e os

pisos em mármore e madeira do solar da Marquesa de Santos, resultado da vinda da Missão Artística Francesa em 1816, quando a arte se desenvolveu e passou para as casas palacianas da Côrte. A partir daí, foi ganhando cada vez mais espaço na arquitetura bem como em outras áreas, não sendo mais limitado por temas, como as calçadas em mosaicos ondulado de Copacabana no Rio de Janeiro. Boa parte desses trabalhos foram criados por artistas europeus. Mesmo assim, existiram e ainda existem muitos mosaicistas brasileiros de grande importância: Rodrigo de Haro, Di cavalcante, Marcello de Melo, entre outros.

Segundo [1], a península Ibérica foi invadida e dominada em 712 d.C. pelos mouros vindos do norte da África, permanecendo ali por vários séculos. Sua expulsão definitiva da península se deu no século XIV(em Portugal) e XV(na Espanha). Nas suas construções, os mouros apresentavam vários padrões de simetria, nunca relativos a seres vivos, em razão de preceitos religiosos. O mais famoso legado mouro é o palácio de Alhambra, em Granada na Espanha. Além de ter servido como fortaleza, o palácio apresenta arquitetura e decorações artísticas belíssimas.

Nesse magnífico palácio, são encontrados em seus painéis decorativos os padrões de simetria possíveis, que por muito tempo foi tema de debate. Muitos matemáticos não concordavam com a ideia dos 17 grupos cristalógraficos estarem presentes nos mosaicos de Alhambra. Tal palácio influenciou o artista Maurits Cornelis Escher, que frequentou a Faculdade de Arquitetura e Artes de Haarlem, mas não concluiu seus estudos. Abandonou a mesma depois de algumas experiências adquiridas com suas viagens. Ficou conhecido pelas suas xilogravuras, por executar transformações geométricas em suas obras, pela busca do preenchimento regular do plano e perspectiva. Mesmo não sendo matemático seus trabalhos estão ligados à matemática. Hoje, fala-se muito em mosaicos tipo Escher.



Figura 2.2: Birds - M.C. Escher

O astrônomo Johannes Kepler, no seu livro *A Harmonia do Mundo*, publicado em 1619, foi o primeiro a tratar matematicamente dos mosaicos. Ele pontua em seus trabalhos, detalhes essenciais sobre preencher todo o plano usando polígonos regulares, diferentes ou não, bem como respeita o fato de que essas figuras se encontrem em um ponto e a soma

dos ângulos nesse ponto seja igual a quatro ângulos retos, sem haver sobreposições das mesmas. Mostrou também que existem apenas onze maneiras para tal preenchimento. Apesar de ser uma arte bem antiga e bem desenvolvida, os estudos sobre os mosaicos sob o olhar da Matemática são recentes. Foram intensificados há aproximadamente um século atrás, tendo muitos aspectos para serem desenvolvidos. Nos últimos anos, foram descobertos um conjunto finito de ladrilhos com os quais se faz uma quantidade infinita de mosaicos aperiódicos.

Um polígono que atrai a atenção dos estudiosos sobre o tema é o pentágono. Com o regular não podemos pavimentar o plano, porém, com alguns irregulares sim. Atualmente, só 15 tipos de pentágonos irregulares pavimentam o plano. A busca por esses pentágonos foi iniciada pelo matemático alemão Karl Reinhardt, que em 1918 descobriu cinco classes de pentágonos. Até 1968, muitos pensavam que esta lista estava completa quando R. B. Kershner encontrou mais três e Richard James elevou esse número para nove em 1975. No mesmo ano, uma dona de casa, Marjorie Rice, que havia lido sobre essas descobertas desenvolveu sua própria notação, encontrando mais quatro. Em 1985, Rolf Stein encontrou o décimo quarto.

O 15º foi descoberto recentemente em 2015, depois de 30 anos. A equipe contou com os seguintes professores: Casey Mann, Jennifer McLoud-Mann e David Von Derau. Os dois primeiros são professores associados da Universidade de Washington, em Bathell, Estados Unidos, o último um aluno recém-formado da mesma universidade.

Não pode ser exibido um final para a história dos mosaicos, pois muito ainda precisa ser provado. O professor Casey Mann, cuja área de pesquisa é Geometria Discreta (em particular revestimento do plano e nós de rede) afirmou em uma entrevista publicada no site The Guardian (disponível em: <https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/aug/10/attack-on-the-pentagon-results-in-discovery-of-new-mathematical-tile>. Acesso em 4 de Junho de 2017) que: “Eu sou muito cauteloso para fazer previsões se há ou não mais tipos de pentágonos para serem encontrados, mas, não encontramos nenhuma evidência que evite que mais sejam encontrados, espero ver mais alguns. À medida que enumerações computadorizadas forem retomadas, também espera-se a reunião de dados suficientes para começar a fazer previsões específicas que possam ser testadas”. Só resta acompanhar os passos para essas novas descobertas.



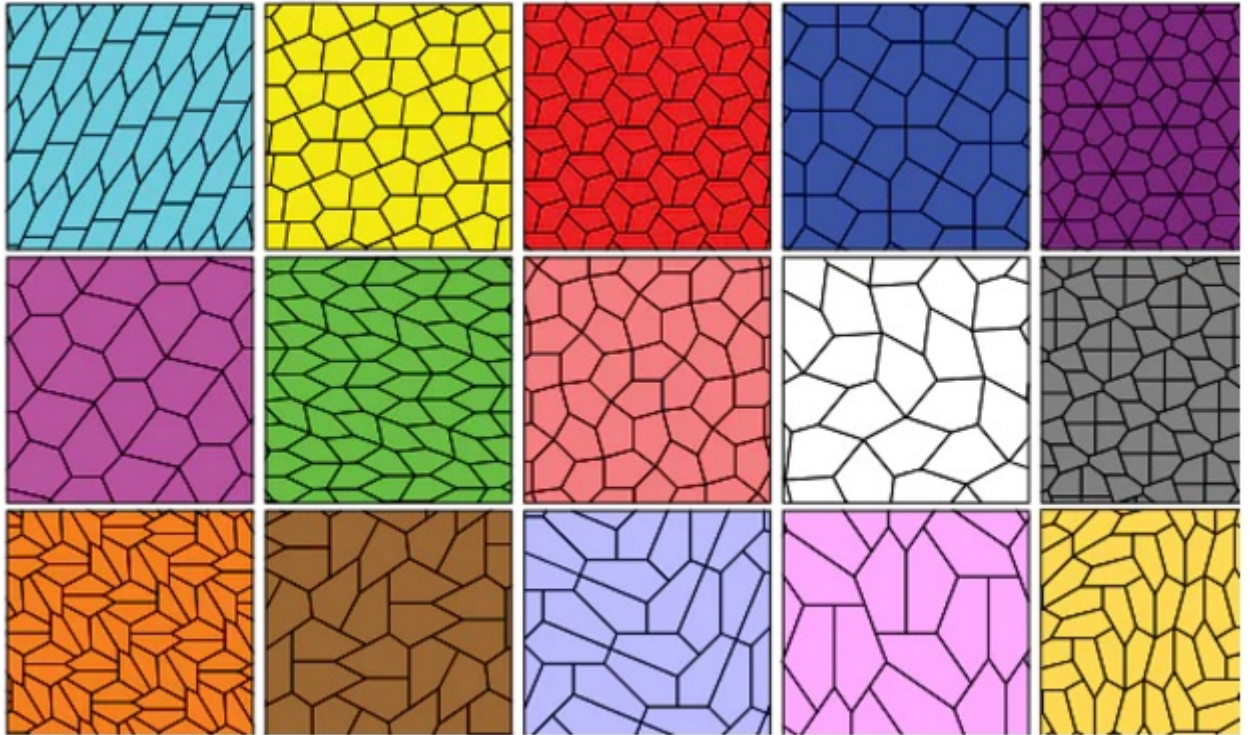


Figura 2.3: Os 15 Pentágonos descobertos até agora.

## 2.2 Definição

Segundo o dicionário Aurélio, um mosaico é um desenho ou decoração com peças planas de pedra, cerâmica, vidro, etc. Sob o olhar da arte, é uma composição de imagens em que os mosaicistas utilizam fragmentos de materiais coloridos ou não e preenche algum tipo de superfície que expressam ideias.

Pode-se encontrar mosaicos em casas, roupas, acessórios, esculturas, calçadas, etc. Por serem duradouros, são chamados de pinturas para eternidade. A nível de Brasil, um dos mosaicos mais famosos, é o Calçadão de Copacabana, na cidade do Rio de Janeiro, que representa as ondas do mar. Ele é o primeiro feito de pedras portuguesas no Brasil e idealizado pelo então prefeito Paulo Frontin, no início do século passado.

Matematicamente falando, definiremos mosaicos segundo [2].

**Definição 2.2.1.** Um mosaico é um padrão que pode se repetir para preencher o plano e que é periódico ao longo da direção de duas direções linearmente independentes (correspondentes a dois vetores linearmente independentes).

Um mosaico tem dois vetores linearmente independentes  $t_1$  e  $t_2$ , ao longo dos quais pode

ser transladado sem mudança. Em outras palavras, é um padrão que cobre inteiramente o plano sem superposição das figuras, nem espaços vazios entre elas.

Quando falamos na construção de mosaicos, pensamos logo em juntar algumas peças coloridas ou não. Mesmo soando fácil do ponto de vista artístico, em alguns casos, combinar polígonos que atendam a condição de preencher totalmente o plano, não é nada trivial, inclusive exige muita imaginação geométrica e pode ser estudada em termos de operações de simetria.

Os polígonos, são elementos de um mosaico, mas, nem todo conjunto de polígono preenche totalmente o plano. Pensando inicialmente nos regulares, quando os colocamos ao redor de um ponto, se os mesmos se ajustarem bem, formará o mosaico. Os mosaicos desta seção foram construídos utilizando o GeoGebra.

Segundo Barbosa(1993), se o polígono é regular e tem  $n$  lados, seu ângulo externo  $e = \frac{360^\circ}{n}$  e o ângulo interno atende à seguinte condição:  $i + e = 180^\circ$ . Supondo que  $k$  desses polígonos se ajustem ao redor de um ponto, temos que:  $k \cdot i = 360^\circ$  ou  $k = \frac{360^\circ}{i}$  (\*), como  $i + e = 180^\circ$  e  $e = \frac{360^\circ}{n}$ , temos:

$$\begin{aligned} i &= 180^\circ - e \\ i &= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \\ i &= \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} \\ i &= \frac{180^\circ(n-2)}{n}, \text{ substituindo em (*),} \\ k &= \frac{360^\circ}{\frac{180^\circ(n-2)}{n}} \\ k &= \frac{2n}{n-2} \end{aligned}$$

Se um ou dois polígonos ao redor de um ponto forem posicionados, não se conseguirá preencher todo o plano, daí,  $k \geq 3$ .

$$\begin{aligned} \frac{2n}{n-2} &\geq 3 \\ 2n &\geq 3n - 6 \\ n &\leq 6 \end{aligned}$$

Analisando cada caso possível, temos:

- Para  $n=6$ , temos  $k=3$ ;
- Para  $n=5$ , temos  $k = 3,333\dots$ . Como  $k$  é inteiro, concluímos que pentágonos regulares não podem ser ajustados ao redor de um ponto.

- Para  $n=4$ , temos  $k=4$ ;
- Para  $n=3$ , temos  $k=6$ .

Os mosaicos formados por um tipo só de polígono regular, é chamado de mosaico regular. Portanto, existem apenas três mosaicos regulares: 6 triângulos equiláteros  $(3,3,3,3,3,3)$ , 4 quadrados  $(4,4,4,4)$  e 3 hexágonos  $(6,6,6)$ .

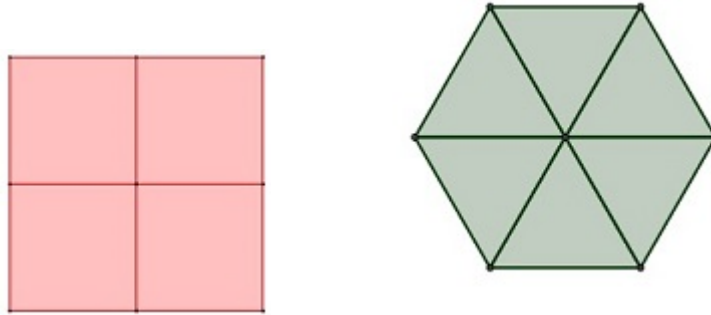


Figura 2.4: Mosaico  $(4,4,4,4)$  e Mosaico  $(3,3,3,3,3,3)$

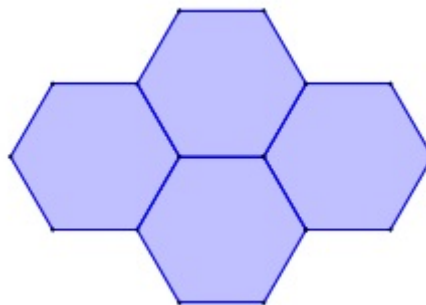


Figura 2.5: Mosaico  $(6,6,6)$

Há também os mosaicos Arquimedianos ou semirregulares. São aqueles formados por polígonos regulares, não necessariamente iguais. A escolha destes dará um pouco mais de trabalho visto que, mesmo sendo diferentes precisam atender à condição de preencher o plano sem sobreposições. Serão analisados cada caso separadamente, tendo como base os estudos de Barbosa(1993).

Sendo  $k$  o número de polígonos incidindo em cada vértice, conclui-se que o maior valor de  $k$  é dado por:  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ , que corresponde a seis triângulos equiláteros e o menor valor 3, como foi visto anteriormente. Assim,  $3 \leq k \leq 6$ .

Caso  $k = 3$ : (3 polígonos regulares em cada vértice) Sendo  $m$ ,  $n$  e  $p$  número de lados de cada um dos três polígonos que incidem no mesmo vértice, a soma dos ângulos internos

ao redor desse ponto é dada por:

$$\frac{(m-2).180^\circ}{m} + \frac{(n-2).180^\circ}{n} + \frac{(p-2).180^\circ}{p} = 360^\circ$$

$$\frac{m-2}{m} + \frac{n-2}{n} + \frac{p-2}{p} = 2$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Supondo, sem perda de generalidade, que  $m \leq n \leq p$ , substituindo  $n$  e  $p$  por  $m$  em (1), temos que:  $3 \leq m \leq 6$ . Por outro lado, de (1), temos:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{p} = \frac{(m-2)}{2m} \quad (3)$$

Substituindo em (3)  $p$  por  $n$ , teremos:

$$n \leq \frac{4m}{(m-2)} \quad (4)$$

A partir das equações acima, atribuindo valores para  $m$ , lembrando que  $3 \leq m \leq 6$ , teremos as seguintes combinações de três polígonos:

k=3	m	n	p
	3	7	42
	3	8	24
	3	9	18
	3	10	15
	3	12	12
	4	5	20
	4	6	12
	4	8	8
	5	5	10
	6	6	6

Tabela 2.1: Combinações possíveis para três polígonos.

Mas, de todas essas combinações, os únicos tipos possíveis de mosaicos semirregulares, são: (3,12,12), (4,6,12), (4,8,8) e (6,6,6), os outros não podem se estender para formar um

mosaicos.

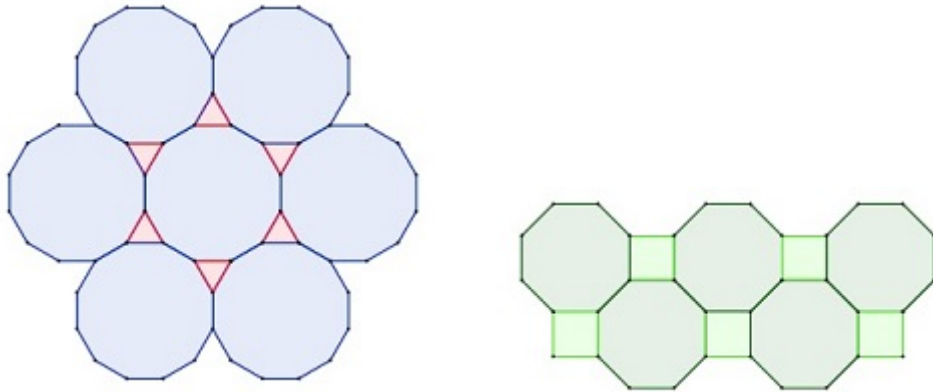


Figura 2.6: Mosaico (3,12,12) e Mosaico (4,8,8).

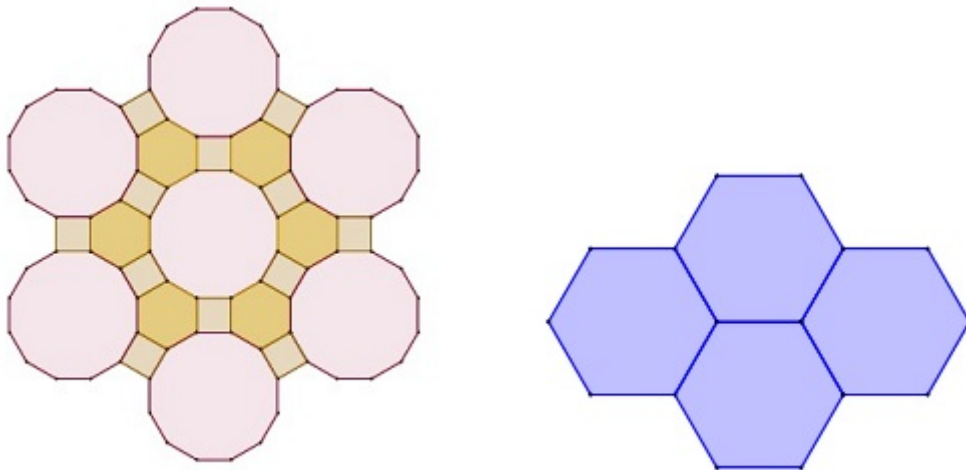


Figura 2.7: Mosaico (4,6,12) e Mosaico (6,6,6).

Caso  $k = 4$ : (quatro polígonos regulares em cada vértice) De maneira análoga, sendo  $m$ ,  $n$ ,  $p$ , e  $q$  o número de lados de cada um dos quatro polígonos, que incidem no mesmo vértice, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (5)$$

Supondo novamente sem perda de generalidade, que  $m \leq n \leq p \leq q$ , substituindo  $n$ ,  $p$  e  $q$  por  $m$ , temos que  $m \leq 4$ . Como  $m \geq 3$ , temos apenas duas possibilidades:  $m = 3$  e  $m = 4$ .

Da equação (5), temos:  $\frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{m-1}{m}$  (6).

Substituindo,  $p$  e  $q$  por  $n$ , teremos  $n \leq \frac{3m}{(m-1)}$  (7).

Fazendo às substituições de  $m$  em (6) e (7), por 3 e 4 respectivamente, termos  $n = 3$  e  $n = 4$ . Usando o mesmo procedimento em (5), teremos os possíveis valores para  $p$  e  $q$ . Na tabela abaixo, teremos todas as combinações possíveis.

k=4	m	n	p	q
	3	3	4	12
	3	3	6	6
	3	4	3	12
	3	4	6	12
	3	4	4	6
	4	4	4	4

Tabela 2.2: Combinações possíveis para quatro polígonos.

Dessas, apenas (4,4,4,4) pavimenta o plano. Analisando a 2ª possibilidade (3,3,6,6), percebemos que a mesma não pavimenta o plano sozinha, mas, podemos ter a seguinte configuração (3,6,3,6) ao redor de um ponto, que pavimenta o plano sozinha. Analisando a 5ª possibilidade (3,4,4,6), reorganizando os polígonos, tem-se que a configuração (3,4,6,4) pavimenta o plano sozinha. Percebemos assim que a ordem dos polígonos em torno do vértice é importante.

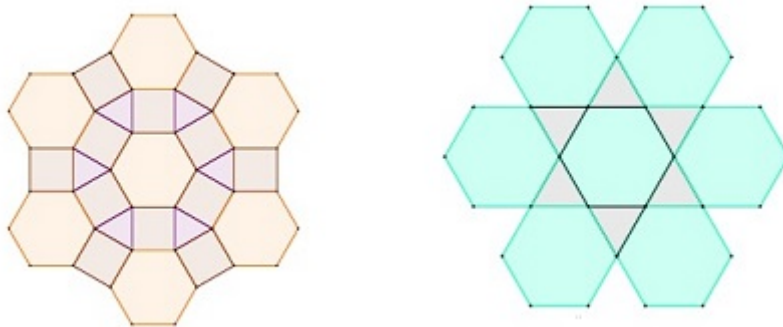


Figura 2.8: Mosaico (3,4,6,4) e Mosaico (3,6,3,6).

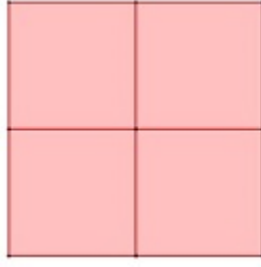


Figura 2.9: Mosaico (4,4,4,4).

Caso  $k = 5$ : (cinco polígonos regulares em cada vértice) Sejam os polígonos regulares com  $m, n, p, q$  e  $r$ , lados incidindo no mesmo vértice. Daí, temos a seguinte soma:

$$\frac{(m-2)180^\circ}{m} + \frac{(n-2)180^\circ}{n} + \frac{(p-2)180^\circ}{p} + \frac{(q-2)180^\circ}{q} + \frac{(r-2)180^\circ}{r} = 360^\circ$$
, resolvendo esta soma temos:

$$\begin{aligned} \frac{(m-2)}{m} + \frac{(n-2)}{n} + \frac{(p-2)}{p} + \frac{(q-2)}{q} + \frac{(r-2)}{r} &= 2 \\ \frac{5mnpqr - 2(npqr + mpqr + mnpr + mnpq)}{mnpqr} &= 2mnpqr \\ \frac{-2(npqr + mpqr + mnpr + mnpq)}{mnpqr} &= -3mnpqr \\ \frac{npqr}{mnpqr} + \frac{mpqr}{mnpqr} + \frac{mnqr}{mnpqr} + \frac{mnpr}{mnpqr} + \frac{mnpq}{mnpqr} &= \frac{3mnpqr}{2mnpqr} \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} &= \frac{3}{2} \quad (8). \end{aligned}$$

Supondo  $m \leq n \leq p \leq q \leq r$ , sem perda de generalidade, a partir da equação (8), temos  $m \leq \frac{10}{3}$ , mas,  $m \geq 3$ , logo  $m$  só pode assumir o valor 3.

Substituindo  $p, q$  e  $r$  por  $n$  em (8), obtemos o valor único  $n = 3$ . De maneira análoga, encontramos os valores possíveis para  $p, q$  e  $r$ , conforme tabela abaixo.

k=5	m	n	p	q	r
	3	3	3	3	6
	3	3	3	4	4

Tabela 2.3: Combinações possíveis para cinco polígonos.

Todas as combinações acima, pavimentam sozinhas o plano. Além dessas, temos a combinação (3,3,4,3,4) que também pavimenta sozinho o plano.

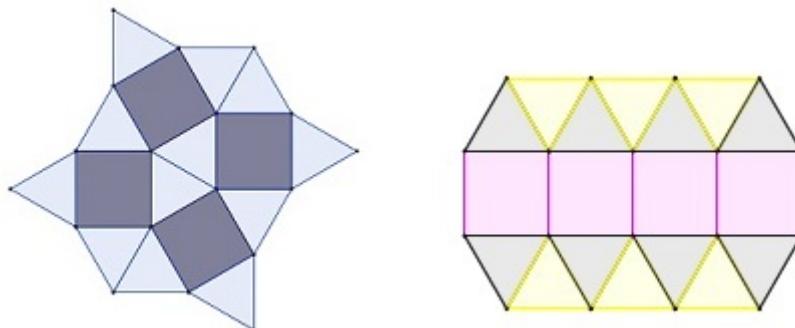


Figura 2.10: Mosaico (3,3,4,3,4) e Mosaico (3,3,3,4,4).

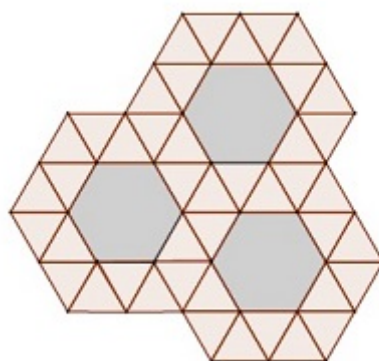


Figura 2.11: Mosaico (3,3,3,3,6).

Caso  $k = 6$ : (seis polígonos regulares em cada vértice). Como nos casos anteriores:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 2$$

De maneira análoga, fazendo as substituições, veremos que único tipo possível é (3,3,3,3,3,3).



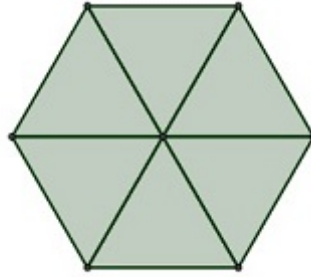


Figura 2.12: Mosaico(3,3,3,3,3,3).

Diante do que foi discutido, podemos afirmar que temos três tipos de mosaicos regulares e oito tipos semirregulares no plano euclidiano (no plano hiperbólico há mais, porém, nossos estudos se limitará ao plano euclidiano).

Os mosaicos abordados são considerados periódicos, ou seja, podemos transladá-los em direções não paralelas distintas, a uma determinada distância, de modo que, depois, essas transformações se sobreponham com o mosaico original. O fato de dois mosaicos serem formados pelas mesmas figuras geométricas, não os tornam iguais. Dois mosaicos são considerados iguais quando têm a mesma quantidade de eixos de simetria e foi formado pelo mesmo movimento rígido, seja translação, reflexão ou rotação.

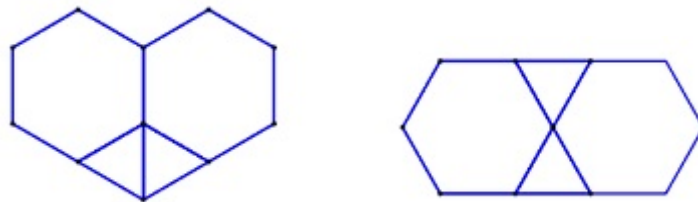


Figura 2.13: Mosaicos formados pelas mesmas figuras geométricas, porém, movimentos rígidos diferentes. Não são iguais.

O fato de serem periódicos, permite que qualquer peça ou um bloco maior do mosaico seja apanhado para preencher todo o plano, porém, há uma quantidade finita de possibilidades pra colocarmos essas peças no plano todo de forma simétrica. O cristalógrafo russo Evgraf S. Fedorov mostrou em 1891, que existem somente dezessete possibilidades, são os 17 grupos cristalográficos. Fica limitado apenas a enumerar a qual grupo os mosaicos semirregulares pertencem, mas um estudo completo desses grupos pode ser encontrado no livro *Symmetry of Crystals* de E.S. Fedorov.

Se não for cumprido certas regras na definição dos mosaicos, será obtida uma quantidade de pavimentações periódicas ou não. Isso se deve à formalização precisa dos mosai-

cos, permitindo aos matemáticos estudarem essas novas estruturas. Um exemplo disso é o pentágono. Apesar de não haver pavimentações regulares e não regulares com pentágonos regulares, existem com pentágonos não regulares. Existem também as pavimentações com quadriláteros, trapézios e hexágonos. Lembrando que: se o polígono tem números de lados  $n = 5$  ou  $n = 6$ , então pavimentam o plano em casos especiais e se é convexo e a pavimentação é lado-lado, o número de lados é  $n \leq 6$ .

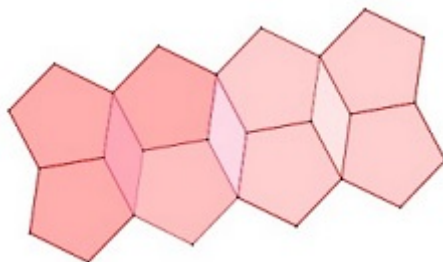


Figura 2.14: Mosaico Especial.

Quando o grupo de simetria de um mosaico não tem pelo menos duas translações não paralelas, eles são considerados não periódicos ou aperiódicos. Por muitos anos, acreditou-se que este fato seria impossível. Um exemplo de mosaico aperiódico são os mosaicos de Penrose.

São chamados assim, pois, foram descobertos pelo físico inglês, Roger Penrose em 1974. Um conjunto formado por dois polígonos, que são chamados de dardo e pipa, obtidos de um losango de ângulo agudo igual a  $72^\circ$  e lado igual ao número de ouro  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Uma regra simples para formar esse mosaico é a do encaixe, colocando vértices de mesma cor sempre juntos. Na figura abaixo, as peças amarelas são as setas e as peças azuis, os dardos.

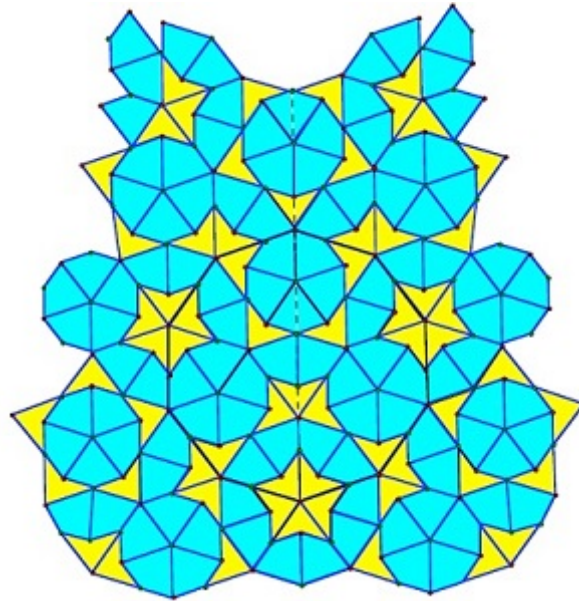


Figura 2.15: Mosaico de Penrose.

## 2.3 Grupos Cristalográficos

Os mosaicos também podem ser estudados a partir de operações de simetrias que os deixam invariantes. Nos limitaremos apenas em indicar a qual grupo de simetria um determinado mosaico pertence.

No capítulo 1, foi pontuado as transformações no plano que permitem mover um motivo de tal forma que ele permaneça invariante para então construímos o mosaico. A partir dessas transformações, pode-se classificá-los quanto ao grupo cristalográfico. Nesta seção, serão definidos os 17 grupos cristalográficos e suas características segundo os estudos de [15] e [16] e exemplos de [17].

Em 1891, Evgraf Stepanovich Fedorov, um cristalógrafo russo, desenvolvendo estudos de cristalografia, classificou o grupo de padrões no plano e no espaço, encontrou 230 grupos para o caso tridimensional e a partir desses grupos, demonstrou a existência de 17 grupos no plano, que é o nosso objeto de estudo. Esse resultado só foi divulgado no meio matemático nos anos 20 do século passado, através dos trabalhos de Niggli e Polya. Por causa de sua origem, são denominados grupos cristalográficos.

**Definição 2.3.1.** Um grupo de isometrias  $W$  é chamado de grupo cristalográfico ou grupo de papel de parede se, e somente se, o subgrupo de todas as translações de  $W$  é gerado por duas translações linearmente independentes.

Antes de enumerarmos os 17 grupos, definiremos uma ferramenta útil para distinguir os diferentes mosaicos, que são os reticulados.

**Definição 2.3.2.** Sejam  $\beta = v_1, \dots, v_n$  um conjunto de vetores em  $\mathbb{R}^n$  linearmente independentes sobre  $\mathbb{R}$ , com  $m \leq n$ . Chamamos de reticulado de dimensão  $m$  o conjunto do  $\mathbb{R}^n$  da forma

$$\Lambda_\beta = \{x \in \mathbb{R}^n; x = \sum a_i v_i, \quad a_i \in \mathbb{Z}\}$$

O conjunto  $\beta$  é a base desse reticulado.

Nos limitaremos ao  $\mathbb{R}^2$ . Para maiores detalhes dos reticulados, ver [19], e detalhes relacionados aos grupos de simetria, ver [18].

Para cada padrão podemos construir um reticulado. Como todo reticulado é geometricamente uniforme, basta tão somente partirmos de um ponto  $x$  qualquer e considerarmos as imagens  $y$  desse ponto, por meio de todas as translações que levam  $x$  em  $y$ .

Os cinco tipos de reticulados que existem nos 17 grupos são:

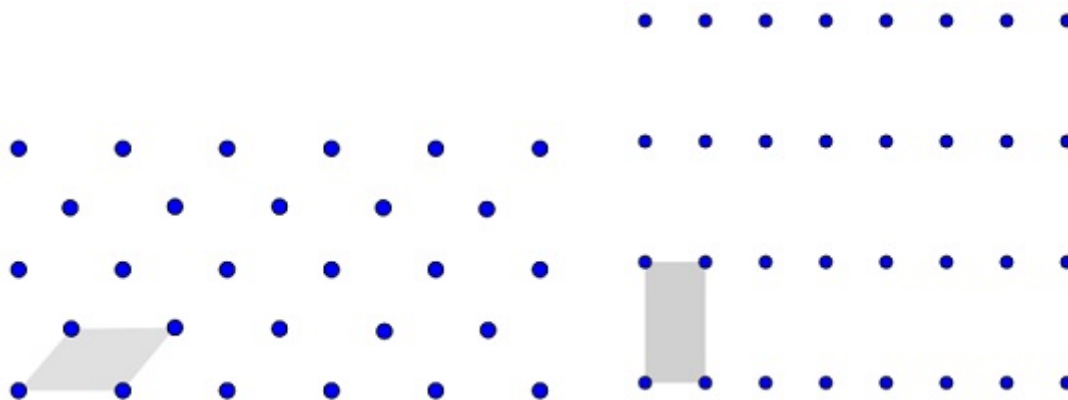


Figura 2.16: Paralelogramo e Retângulo.

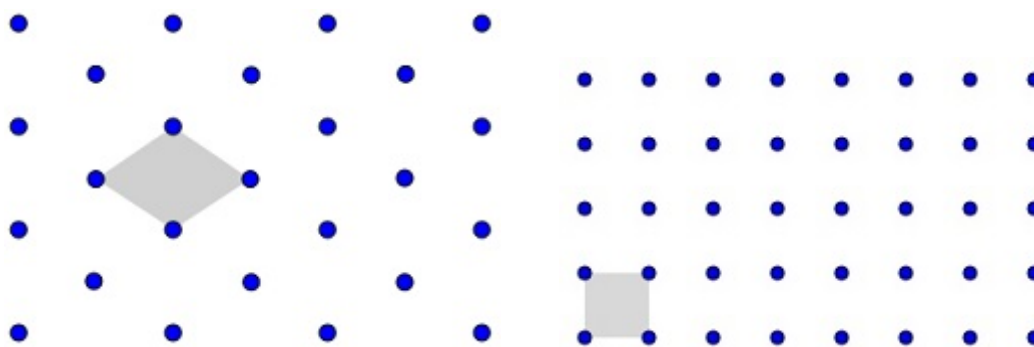


Figura 2.17: Rômbico e Quadrado.

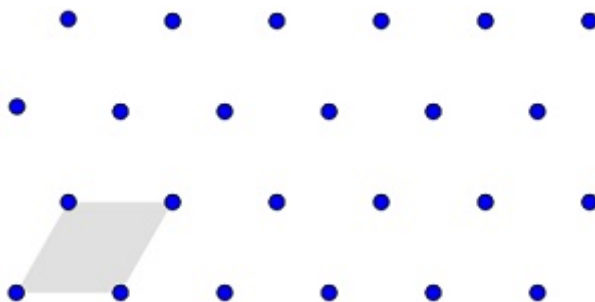


Figura 2.18: Hexagonal ou Isométrica.

Construído o reticulado, determinamos um paralelogramo chamado de célula primitiva, cujos vértices são pontos do reticulado. É comum escolher a célula de modo que os centros de rotação de maior ordem fiquem em seus vértices, porém em dois casos ( $cm$ ,  $cm$ ) encontram - se centrados. Os eixos de reflexão são paralelos a um ou dois lados da célula primitiva. Descreveremos em seguida as características de cada grupo, baseadas nos trabalhos de [20] e [15]. Utilizaremos a notação internacional.

Nas notações, analisando da esquerda para direita:  $p$  ou  $c$  está relacionado ao paralelogramo fundamental, se o mesmo é primitivo ou centrado;  $n$  é o inteiro que corresponde à maior ordem dos centros de rotação, será 1, 2, 3, 4 ou 6;  $m$  indica eixos de reflexão e  $g$  eixos de reflexão deslizante; o número 1 no final, indica a inexistência de reflexões.

**p1** Este é o grupo de simetria mais simples. Não tem rotações, nem reflexões, nem reflexões deslizantes. Possui apenas translações. Seu reticulado é o paralelogramo.

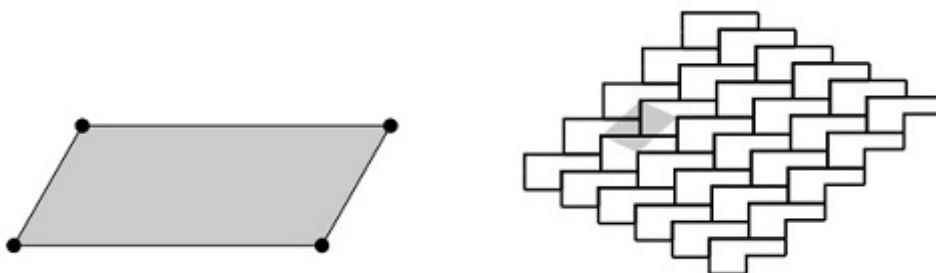


Figura 2.19: Célula geradora do mosaico tipo p1 e exemplo do mosaico tipo p1.

**p2** O grupo difere do anterior, pois, inclui rotações de ordem 2, rotações de  $180^\circ$ . Não contém reflexões, nem reflexões deslizantes. Seu reticulado é o paralelogramo.

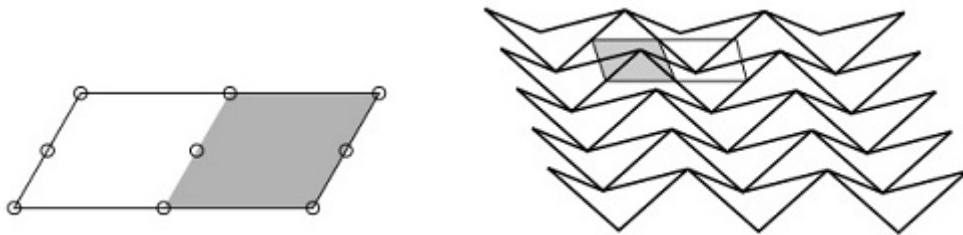


Figura 2.20: Célula geradora do mosaico tipo p2 e exemplo do mosaico tipo p2.

**pm** Este é o primeiro grupo que contém reflexões. Os eixos de reflexão são paralelos a um eixo de translação. Não possui rotações nem reflexões deslizantes. Seu reticulado é retangular.

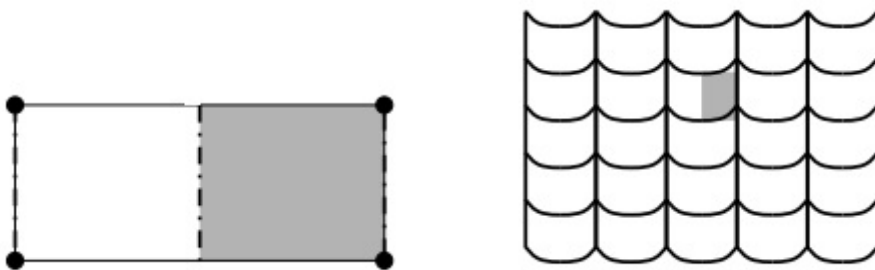


Figura 2.21: Célula geradora do mosaico tipo pm e exemplo do mosaico tipo pm.

**pg** O grupo contém reflexões deslizantes. A direção da reflexão deslizante é paralela a um dos eixos de translação e perpendicular ao outro eixo de translação. Não há rotações nem reflexões regulares. Seu reticulado é retangular.

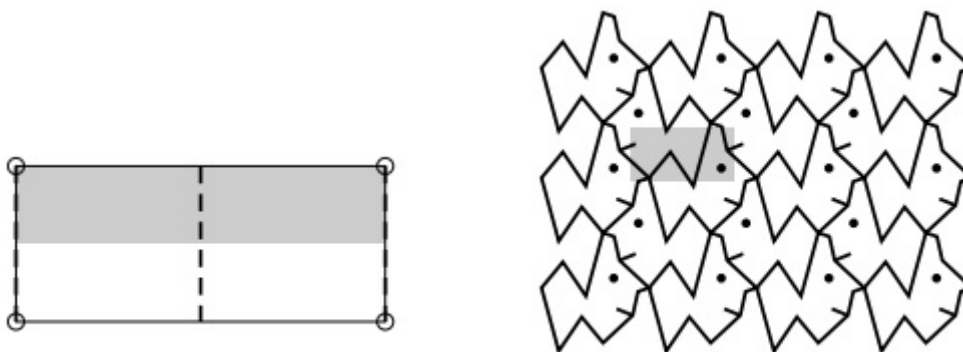


Figura 2.22: Célula geradora do mosaico tipo pg e exemplo do mosaico tipo pg.

**cm** O grupo contém reflexões e reflexões deslizantes com eixos paralelos. Não há rotações nesse grupo. Seu reticulado é rômboico.

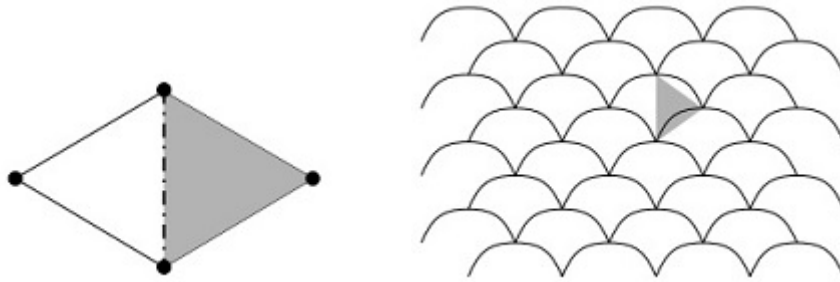


Figura 2.23: Célula geradora do mosaico tipo cm e exemplo do mosaico tipo cm.

**pmm** O grupo contém reflexões cujos eixos são perpendiculares. Não contém reflexões deslizantes, mas, contém rotações de ordem 2, com centros situados nas interseções dos eixos de reflexão. O reticulado é retangular.



Figura 2.24: Célula geradora do mosaico tipo pmm e exemplo do mosaico tipo pmm.

**pmg** O grupo possui reflexões e uma rotação de ordem 2. Os centros de rotações não estão nos eixos de reflexão. O reticulado é retangular.

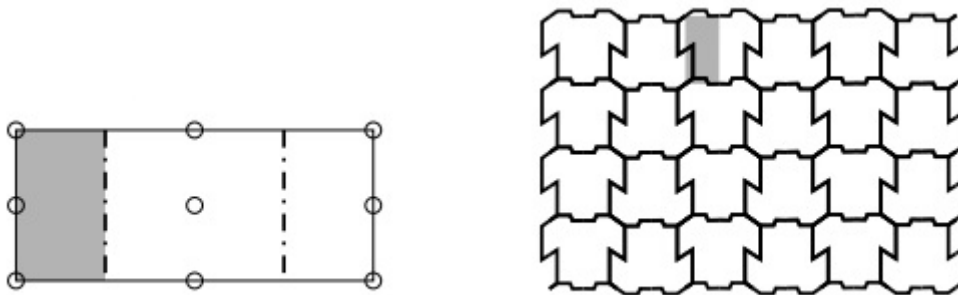


Figura 2.25: Célula geradora do mosaico tipo pmg e exemplo do mosaico tipo pmg.

**pgg** Não contém reflexões, mas, apresenta reflexões deslizantes e rotações de grau 2. Existem eixos perpendiculares pra as reflexões deslizantes e os centros de rotação não estão nesses eixos. O reticulado é retangular.

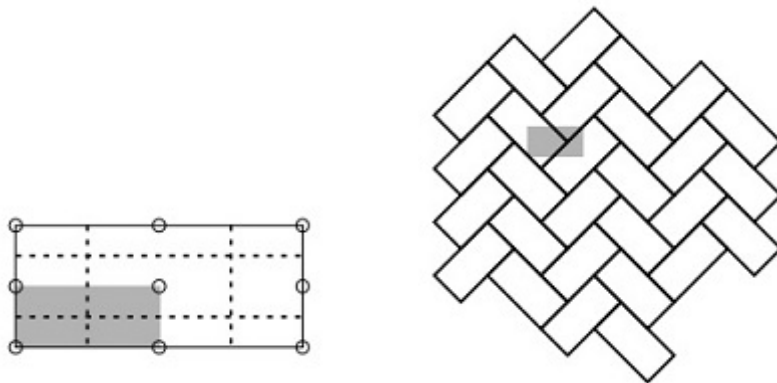


Figura 2.26: Célula geradora do mosaico tipo pgg e exemplo do mosaico tipo pgg.

**cmm** Este grupo possui eixos de reflexão perpendiculares, assim como o grupo  $pmm$ , e tem rotações de ordem 2. Alguns centros de rotações estão sobre os eixos de reflexão. Seu reticulado é rômboide.

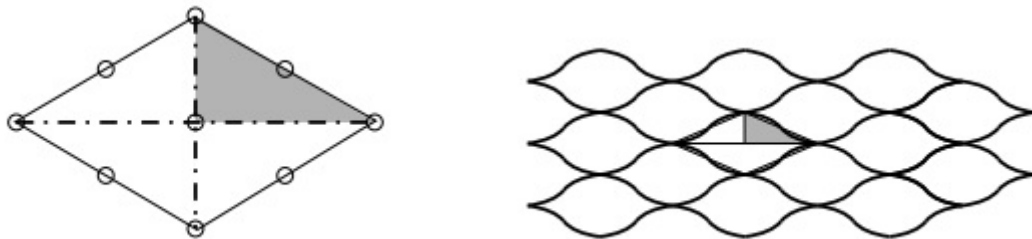


Figura 2.27: Célula geradora do mosaico tipo cmm e exemplo do mosaico tipo cmm.

**p4** É o primeiro grupo com uma rotação de ordem 4, de  $90^\circ$ . Possui também rotações de ordem 2. Não tem quaisquer reflexões, apenas rotações e translações. O reticulado é quadrado.

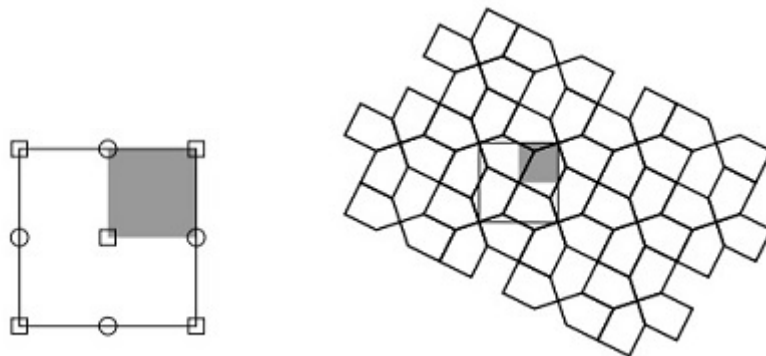


Figura 2.28: Célula geradora do mosaico tipo p4 e exemplo do mosaico tipo p4.



**p4m** Difere do último grupo apenas pelas reflexões que contém. Todos os centros de rotações estão nos eixos de reflexão. Seu reticulado é quadrado.

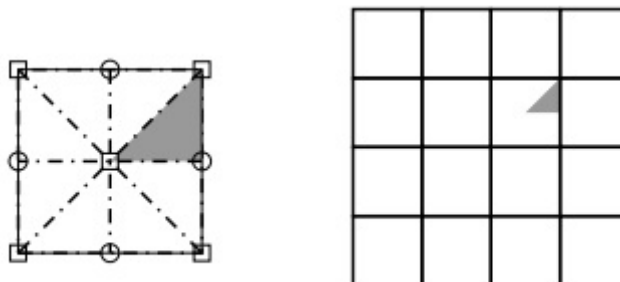


Figura 2.29: Célula geradora do mosaico tipo p4m e exemplo do mosaico tipo p4m.

**p4g** Contém reflexões, rotações de ordem 2 e 4, mas, os eixos de reflexão são perpendiculares e nenhum dos centros das rotações de ordem 4 estão nos eixos de reflexão. O reticulado é quadrado.

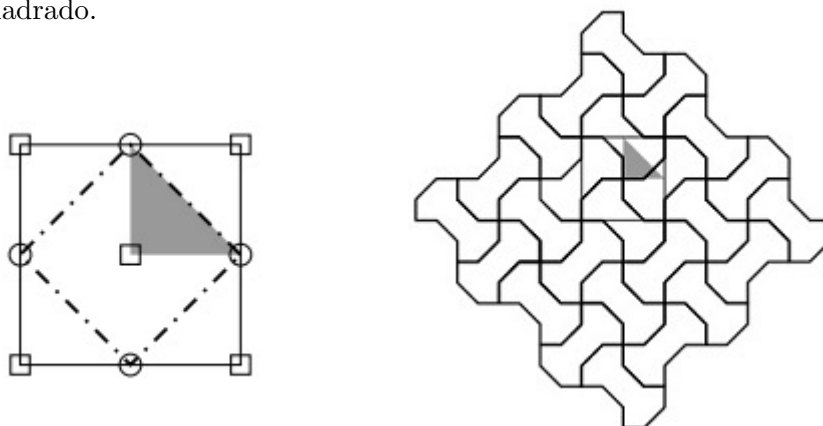


Figura 2.30: Célula geradora do mosaico tipo p4g e exemplo do mosaico tipo p4g.

**p3** É o primeiro que contém rotações de grau 3,  $120^\circ$  e o primeiro cujo reticulado é hexagonal. Não há reflexões nem reflexões deslizantes.

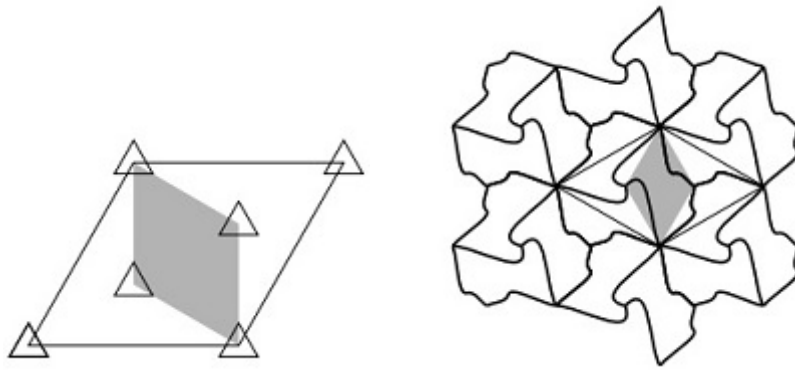


Figura 2.31: Célula geradora do mosaico tipo p3 e exemplo do mosaico tipo p3.

**p31m** Este grupo contém reflexões e rotações de ordem 3. Alguns dos centros de rotação estão nos eixos de reflexão. O reticulado é hexagonal.

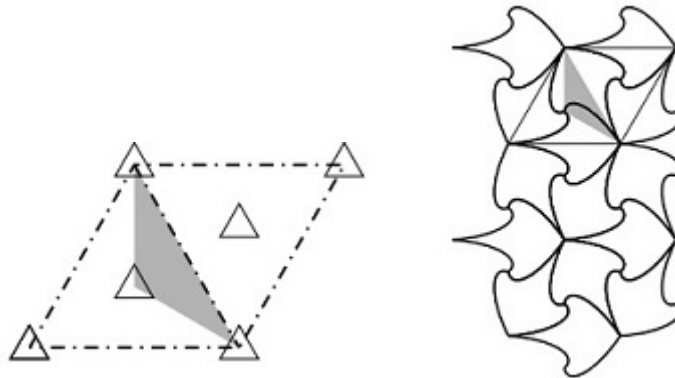


Figura 2.32: Célula geradora do mosaico tipo p31m e exemplo do mosaico tipo p31m.

**p3m1** Este grupo é semelhante ao último. Possui reflexões e rotações de ordem 3, mas, para este grupo, todos os centros de rotação estão nos eixos de reflexão. O reticulado é hexagonal.

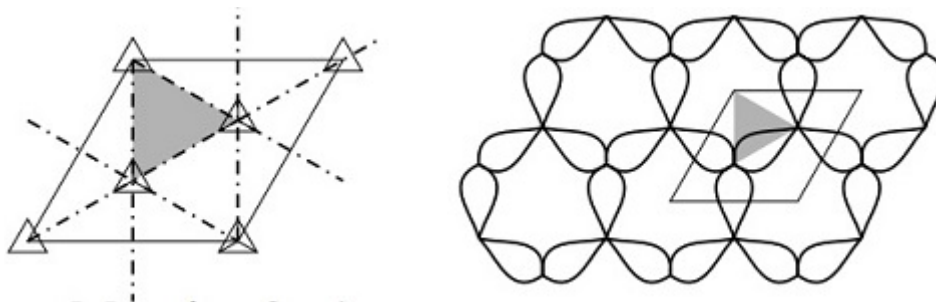


Figura 2.33: Célula geradora do mosaico tipo  $p3m1$  e exemplo do mosaico tipo  $p3m1$ .

**$p6$**  Este grupo possui rotações de ordem 6,  $60^\circ$ . Também possui rotações de ordem 2 e 3, mas, não possui reflexões. Seu reticulado é hexagonal.

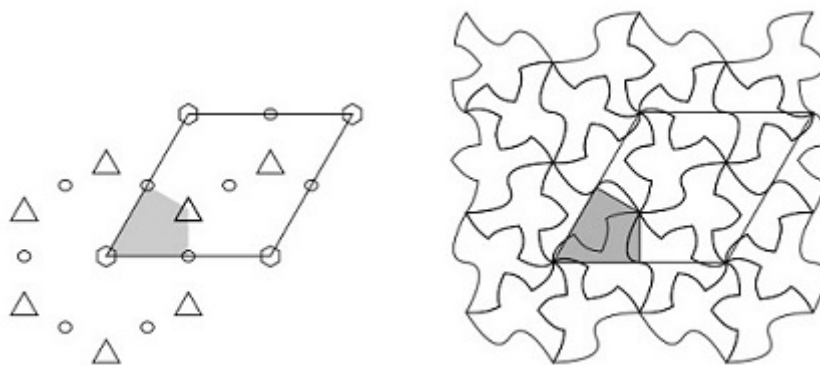


Figura 2.34: Célula geradora do mosaico tipo  $p6$  e exemplo do mosaico tipo  $p6$ .

**$p6m$**  Este é o grupo mais complicado, além de possuir rotações de ordem 2, 3 e 6, possui também reflexões. Todos os seus centros de rotação estão em eixos de reflexão. O reticulado é hexagonal.

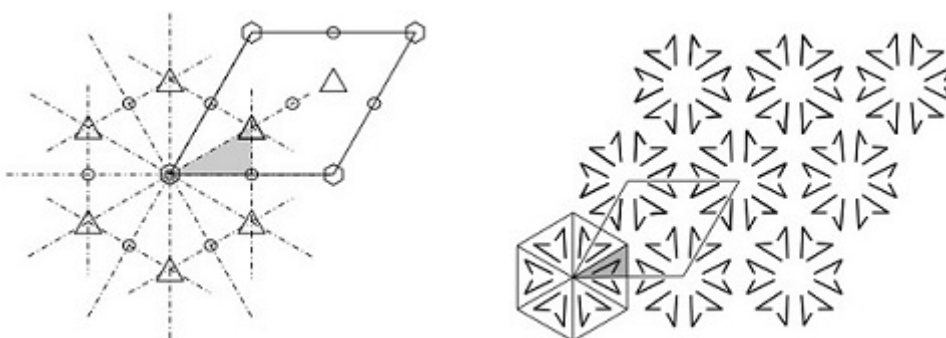


Figura 2.35: Célula geradora do mosaico tipo  $p6m$  e exemplo do mosaico tipo  $p6m$ .

No capítulo 4, quando formos resolver algumas aplicações de mosaicos ao ensino básico e superior, faremos a classificação de alguns mosaicos, segundo as transformações que os

deixaram invariantes, pontuando a qual grupo pertence. O fato de podermos identificar a qual grupo um mosaico pertence, nos auxiliará na sua construção através do GeoGebra. Abaixo segue o algoritmo apresentado por David W. Farmer segundo [15], que resume as principais características dos grupos cristalográficos. Construímos o algoritmo utilizando o GeoGebra.

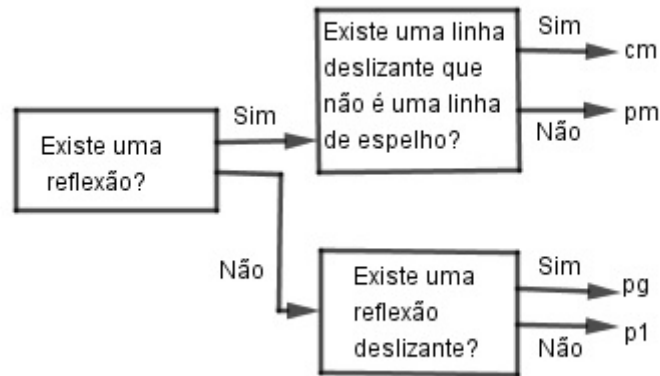


Figura 2.36: Grupos que não possuem rotações.

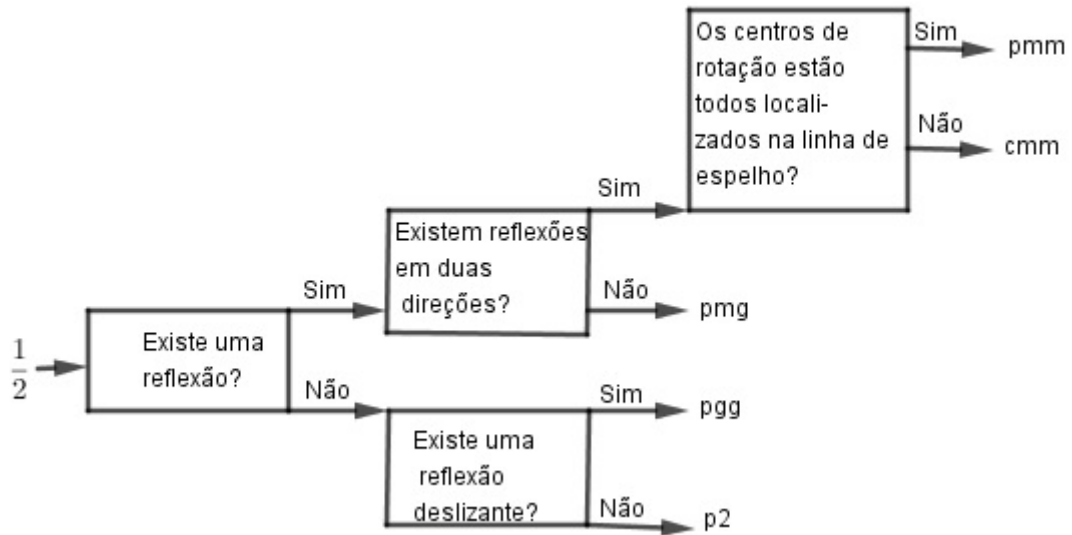


Figura 2.37: Grupos que possuem rotação de ordem 2.

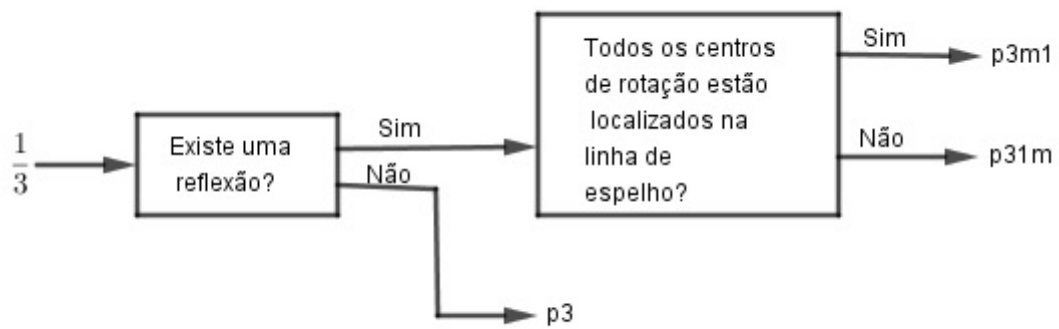


Figura 2.38: Grupos que possuem rotação de ordem 3.

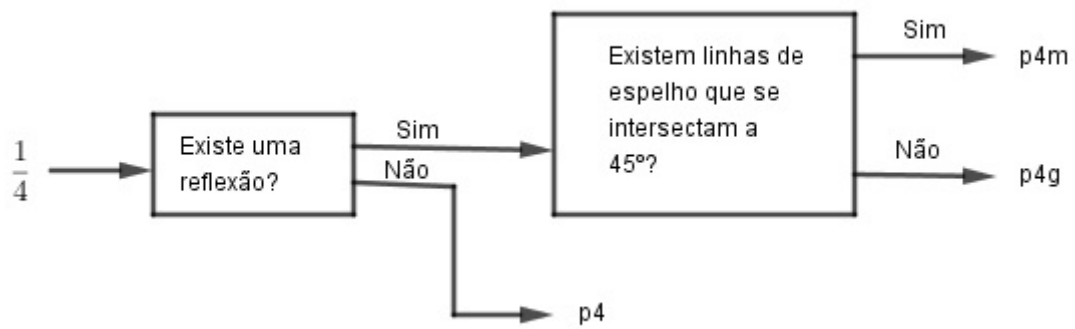


Figura 2.39: Grupos que possuem rotação de ordem 4.

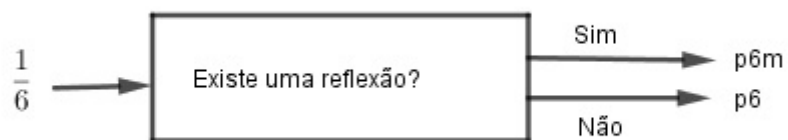


Figura 2.40: Grupos que possuem rotação de ordem 6.

## Capítulo 3

# Construção de Mosaicos utilizando o GeoGebra

### 3.1 Software GeoGebra

Em meio a um contexto onde a tecnologia além de expandir-se, tornou-se acessível à maioria das pessoas, a escola não poderia ficar à parte. Muitas disciplinas foram beneficiadas por essas tecnologias.

Na Matemática, uma das áreas que mais se beneficiou foi a Geometria, através dos softwares de Geometria Dinâmica que possibilitou ao aluno criar e experimentar objetos geométricos. Trabalhar com mosaicos permite que essa interação na Matemática aconteça. O GeoGebra é um exemplo desses softwares.

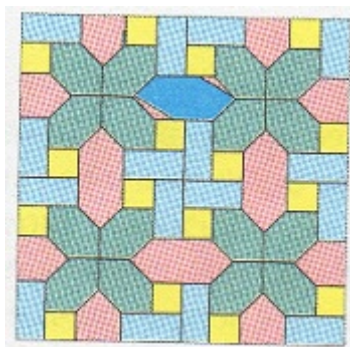
O GeoGebra é um software de matemática dinâmica, idealizado por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburgo, Salzburg, Áustria, desenvolvido para o ensino e aprendizagem da matemática. Pode ser baixado gratuitamente do site oficial [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) e instalado em computadores com sistema operacionais diversos, bem como em aparelhos celulares e tablets.

Ele reúne recursos de álgebra e geometria em um único ambiente, sendo essencial não só para a matemática, mas, para outras áreas do conhecimento nos vários níveis de ensino. Além da parte didática, podem ser criadas ilustrações profissionais.

O fato de ser um software gratuito, disponível também em português, nos atraiu. A maioria dos mosaicos deste trabalho foram construídos no GeoGebra. Quando mosaicos são construídos, lida-se quase que simultaneamente com álgebra e geometria. O GeoGebra facilita esse processo além de torná-lo prazeroso. A construção de alguns estão detalhados na próxima seção onde métodos diferentes para cada construção são utilizados. A ideia de montar um tutorial surgiu a partir do momento que não encontramos nenhum que relacione a construção dos mosaicos e as transformações no plano em nossas pesquisas.

## 3.2 Detalhes da construção

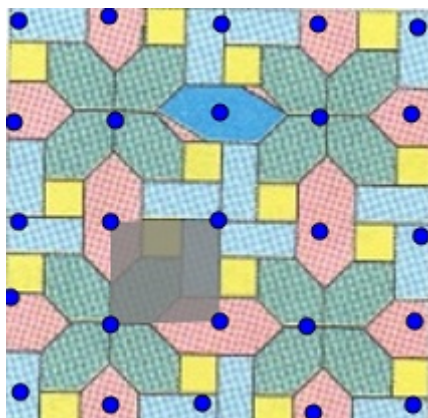
1. Construa o mosaico abaixo no GeoGebra.



### Resolução:

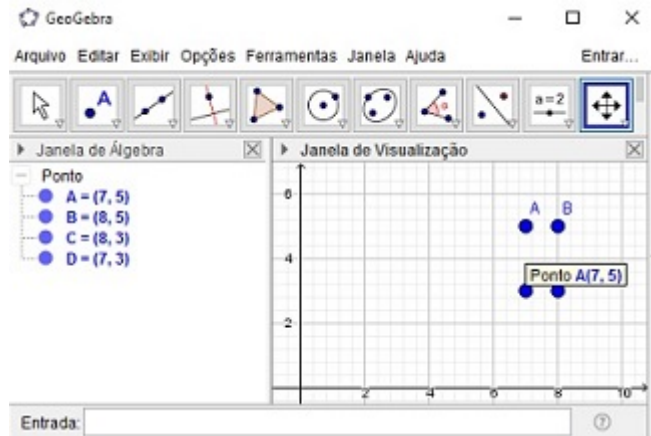
**Passo 1:** Na opção editar do GeoGebra, selecione a opção inserir imagem de arquivo e escolha o mosaico.

**Passo 2:** Selecione a opção ponto e clique sobre a imagem para construir o reticulado de acordo com a Definição 2.3.2, e identifique a célula primitiva. Nesse caso o reticulado é quadrado.

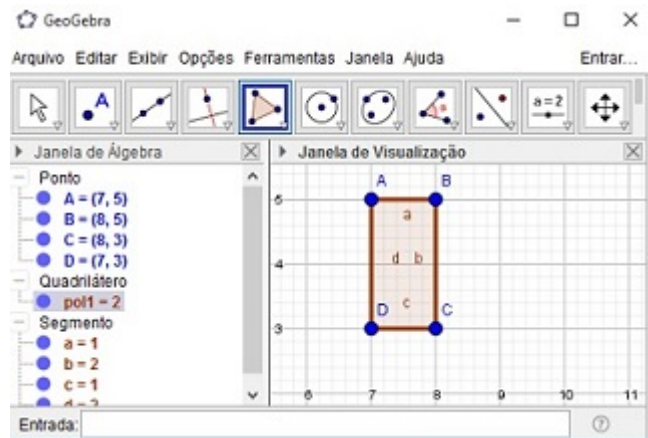


**Passo 3:** Abra uma nova janela do GeoGebra e construa a célula primitiva formada por: 1 quadrado, 1 retângulo, 2 trapézios e um hexágono. Siga os procedimentos abaixo.

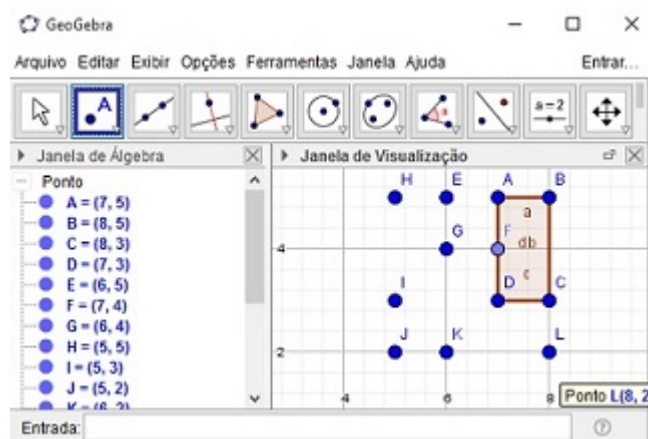
- (a) Selecione a opção ponto, em seguida clique sobre a janela de visualização determinando quatro pontos, para em seguida construir o retângulo. Sugiro a escolha dos seguintes pontos:  $A = (7, 5)$ ,  $B = (8, 5)$ ,  $C = (8, 3)$  e  $D = (7, 3)$ .



- (b) Selecione a opção polígono, em seguida clique sobre  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  e  $A$ , nessa ordem ou em uma outra que te permita formar um retângulo.



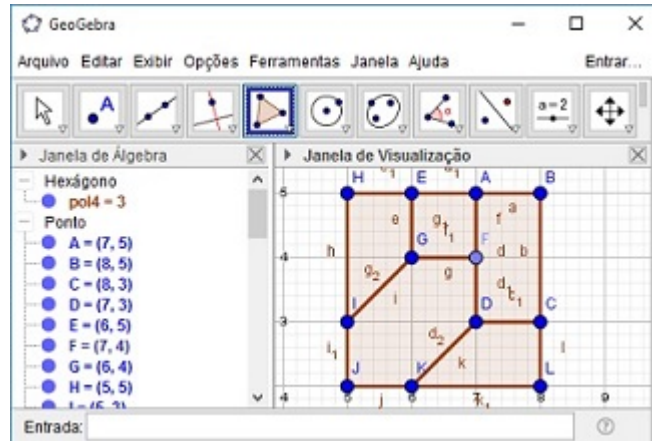
- (c) Selecione a opção ponto, clique sobre a janela de visualização e determine mais oito pontos:  $E = (6, 5)$ ,  $F = (7, 4)$ ,  $G = (6, 4)$ ,  $H = (5, 5)$ ,  $I = (5, 3)$ ,  $J = (5, 2)$ ,  $K = (6, 2)$  e  $L = (8, 2)$ .



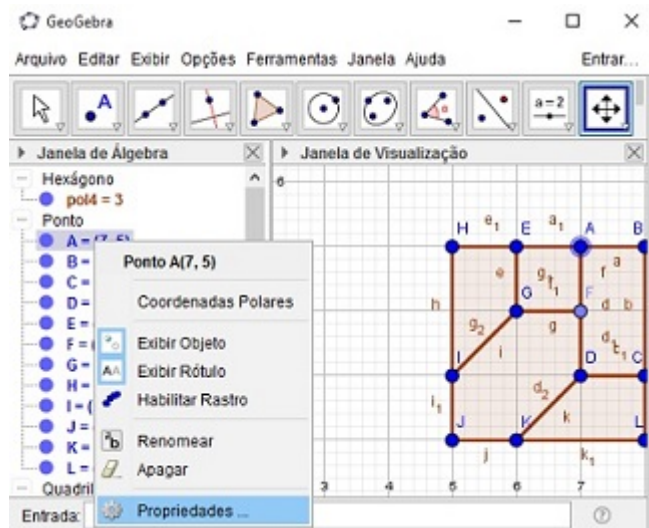
- (d) Selecione a opção polígono novamente e clique nos seguintes pontos, para construir os polígonos restantes:



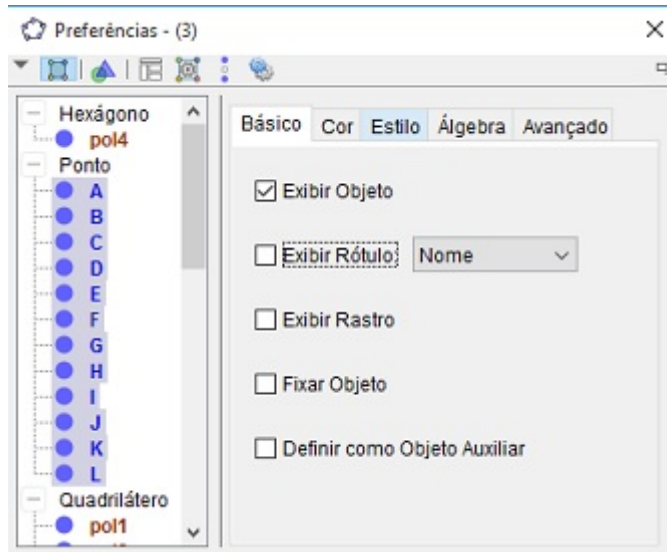
- i.  $A, E, G$  e  $F$ , teremos o quadrado.
- ii.  $E, H, I$  e  $G$ , teremos o trapézio 1.
- iii.  $F, G, I, J, K$  e  $D$ , teremos o hexágono.
- iv.  $C, D, K, L$  e  $C$ , teremos o trapézio 2.



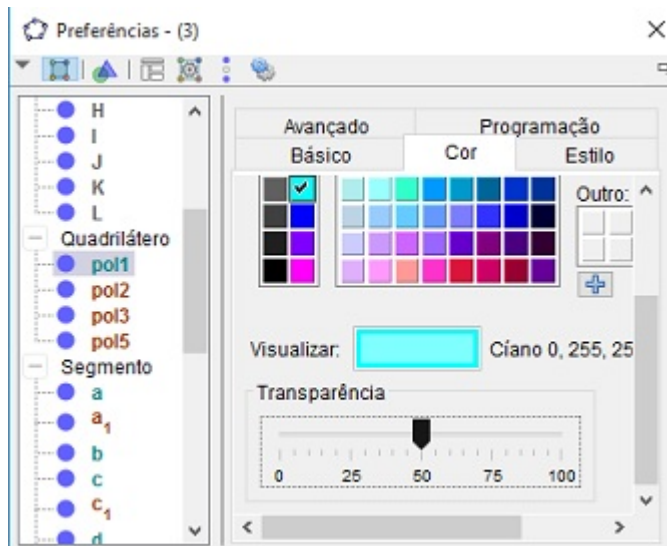
- (e) Na janela de álgebra, clique com o botão direito sobre o ponto  $A$  e selecione a opção propriedades. A janela de preferências será aberta e os polígonos serão formatados.



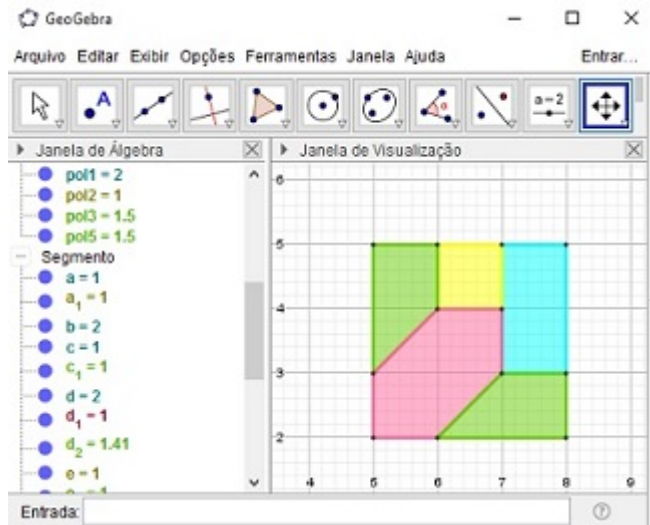
- (f) Clique sobre o ponto  $A$ , em seguida com a tecla shift ativada, clique sobre o ponto  $L$ , selecionando assim todos os pontos. Em seguida:
- i. Desative a opção exibir rótulo.



- ii. Clique sobre a aba cor e escolha uma da sua preferência, clicando sobre a mesma.

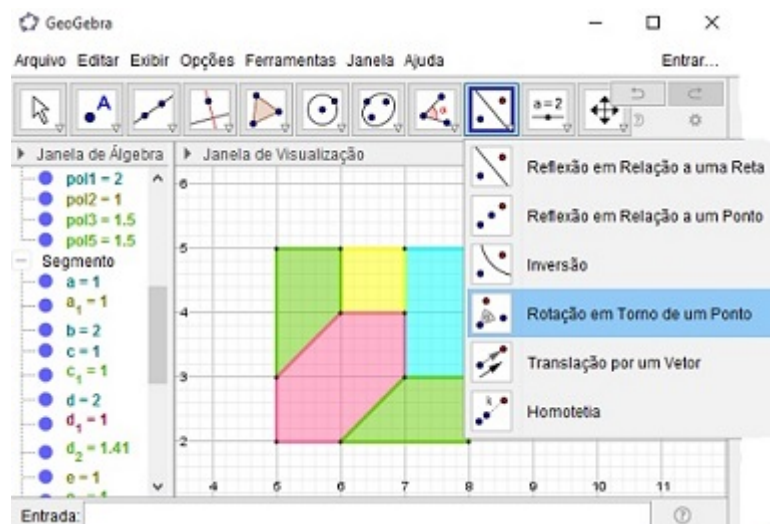


- iii. Ainda na janela de preferências, selecione os polígonos, utilizando o procedimento anterior e desative a opção exibir rótulos. Faça o mesmo para os segmentos.
- iv. Clique em cada polígono separadamente, selecione a aba cor e escolha uma. Caso queira tons mais escuros ou mais claros, use a opção transparência. Usamos a opção 50. Lembre-se que os trapézios precisam ser da mesma cor.

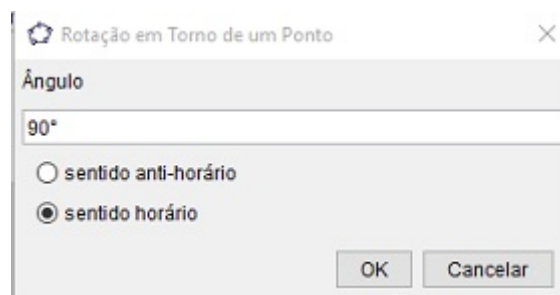


**Passo 4:** Na janela de álgebra, clique sobre o ponto B para exibí-lo novamente.

**Passo 5:** Selecione a opção rotação em torno de um ponto. Em seguida, clique sobre um dos polígonos, depois sobre o ponto B.

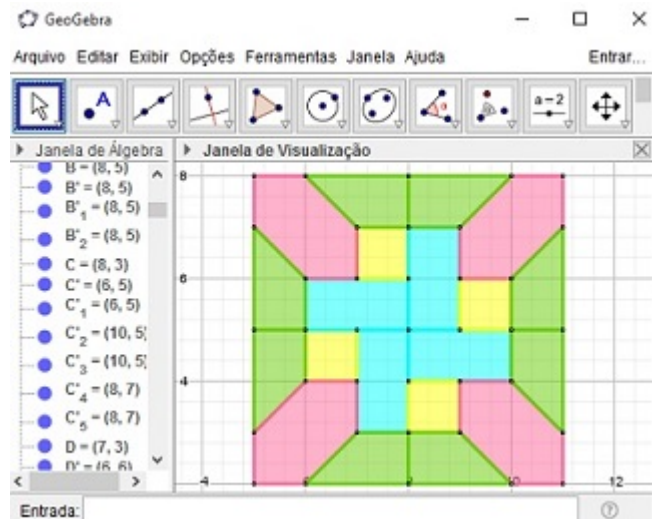


Aparecerá uma janela. Escolha o ângulo de  $90^\circ$  e o sentido horário, em seguida clique em ok. Repita o procedimento para todos os polígonos da célula primitiva, rotacionando sempre em torno de B.

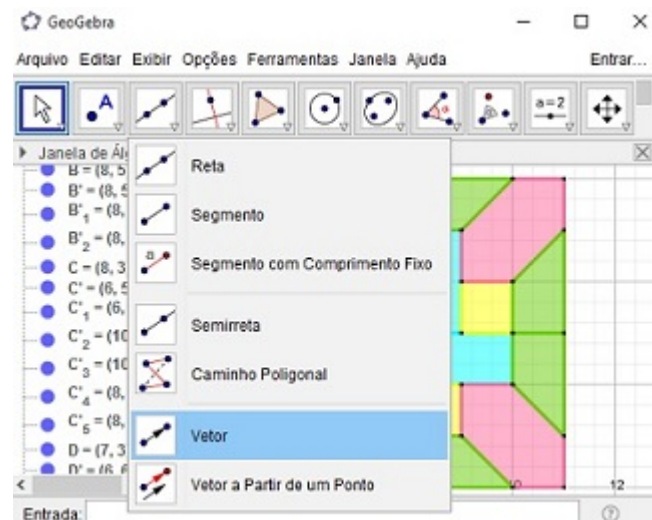


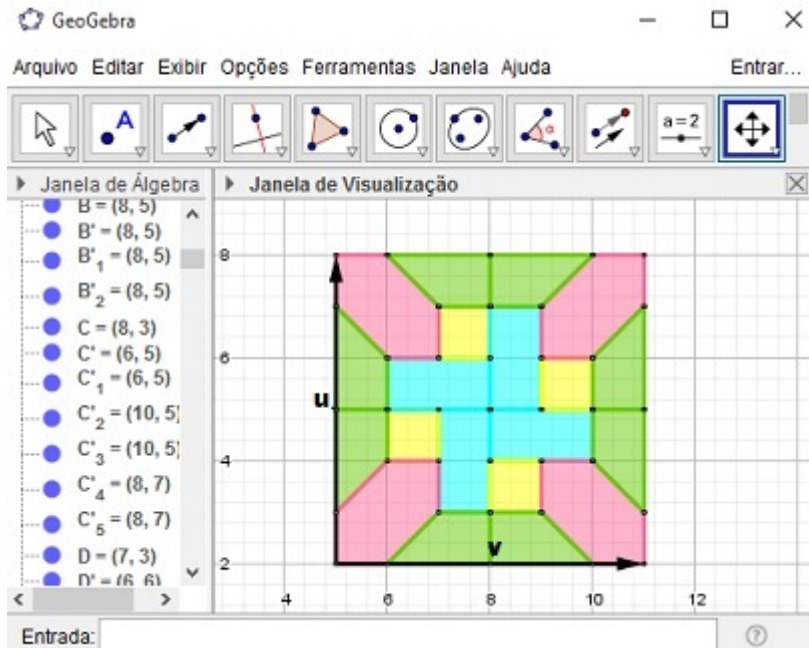
**Passo 6:** Use os mesmos procedimentos do passo 5, porém, com rotações de  $90^\circ$  no sentido anti-horário.

**Passo 7:** Use os mesmos procedimentos do passo 5, porém, com rotações de  $180^\circ$  no sentido anti-horário.

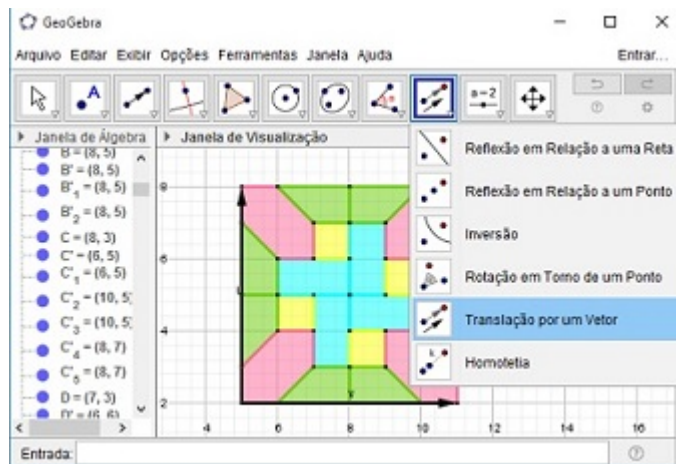


**Passo 8:** Selecione a opção vetor e clique sobre os pontos  $J$  e  $J'$ . Com a opção vetor ainda selecionada, clique sobre os pontos  $J$  e  $J'$ , os vetores não podem ser paralelos.

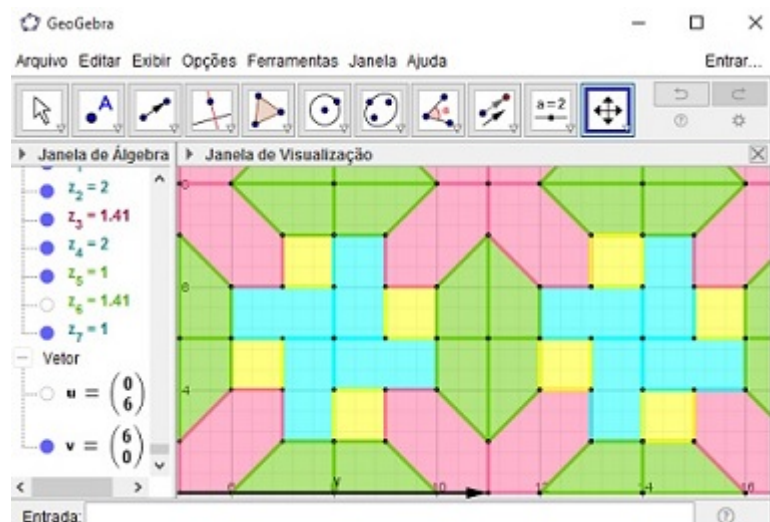




**Passo 9:** Selecione a opção translação por um vetor, clique em um polígono e depois no vetor  $u$ . Repita o procedimento para todos os polígonos.



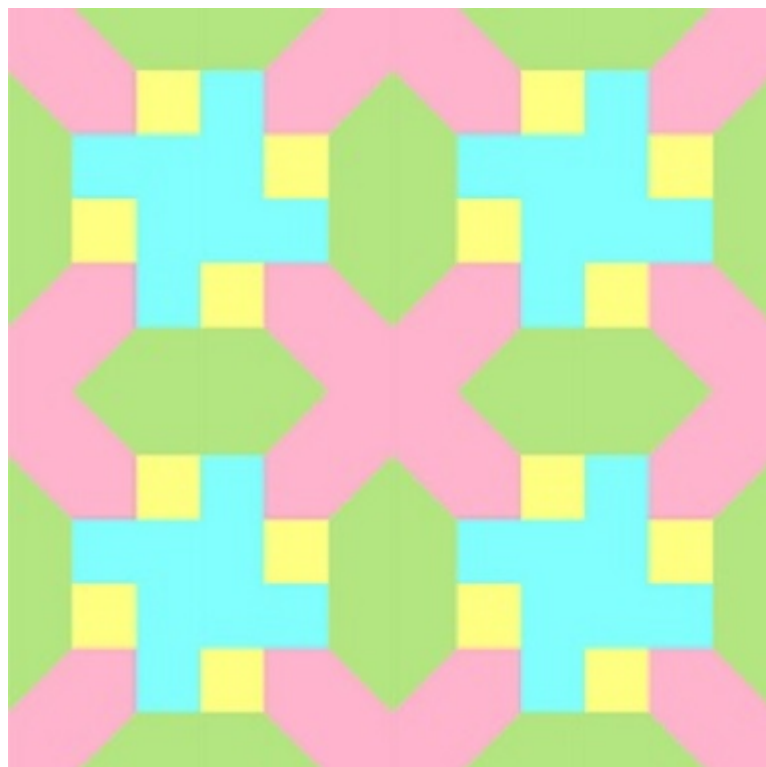
**Passo 10:** Mesmo procedimento do passo 9, porém, translate cada polígono pelo vetor  $v$ .



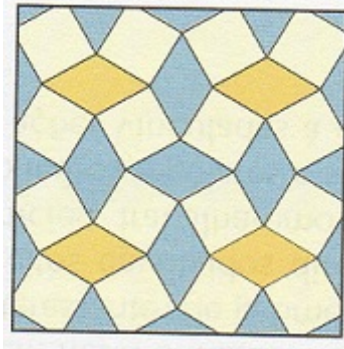
**Passo 11:** Na janela de álgebra, clique sobre o ponto relacionado a cada vetor, ocultando os mesmos.

**Passo 12:** Na janela de álgebra, clique com o botão direito sobre um ponto e selecione a opção propriedades. Em seguida, selecione todos os pontos, utilizando o procedimento do item e), passo 3, desmarque a opção exibir objetos. Faça o mesmo processo para os segmentos, desmarcando a opção exibir objetos.

Seguidos os passos, o mosaico estará construído. A partir da construção, percebe-se que o mosaico, conforme a Seção 2.3 do Capítulo 2, pertence ao grupo  $p4$ . Sem reflexões, apenas com rotações de ordem 2 e 4, bem como translações.

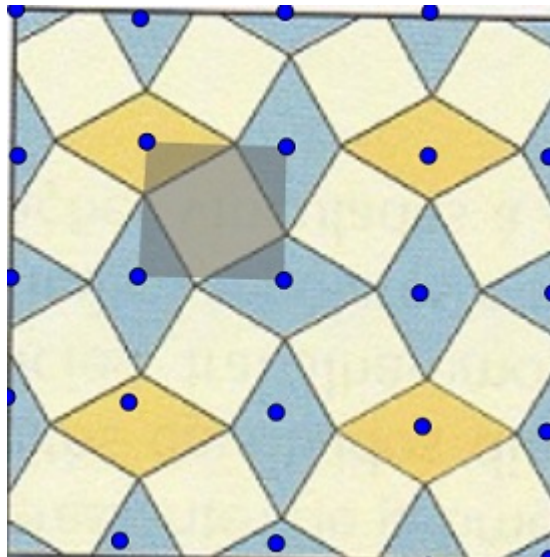


2. Construa o mosaico abaixo no GeoGebra.



**Resolução:**

**Passo 1:** Construa o reticulado e identifique a célula primitiva.



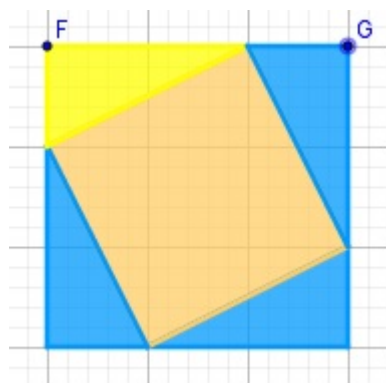
**Passo 2:** Construa a célula primitiva e verifique quais transformações são usadas para montar o nosso motivo.

A célula primitiva é formada por 4 triângulos e 1 quadrado, que poderão ser construídos utilizando os procedimentos utilizados no Exemplo 1.

- (a) Construa um triângulo retângulo.
- (b) Sobre a hipotenusa do triângulo retângulo construa o quadrado.
- (c) Construa triângulos retângulos sobre os lados do quadrado, sendo que, cada lado do quadrado será a hipotenusa do triângulo.

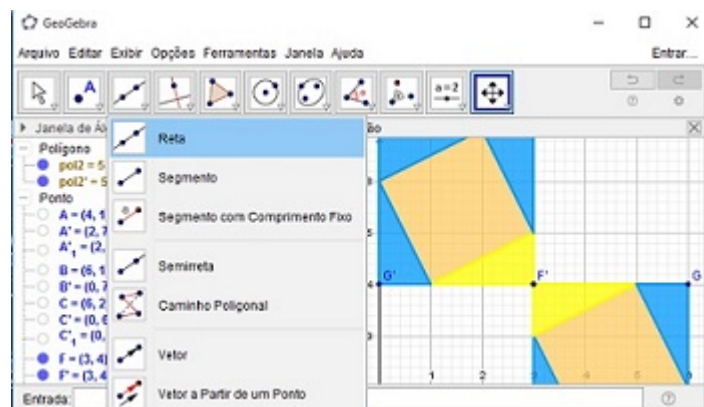
**Passo 3:** Na janela de álgebra, clique com o botão direito sobre um polígono e selecione a opção propriedades. Na janela de preferências, selecione os pontos e desative a opção exibir rótulo. Faça os mesmos para os polígonos e segmentos.

**Passo 4:** Ainda na janela de preferências, clique sobre o nome do polígono na aba cor e escolha uma. O tom da cor é dado selecionado na opção transparência, escolhemos para essa construção 75.



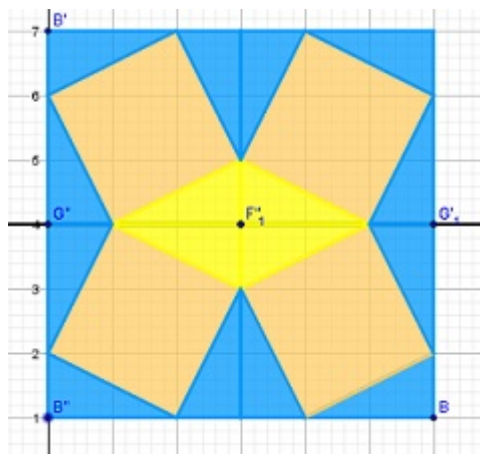
**Passo 5:** Selecione a opção rotação em torno de um ponto e rotacione cada polígono em torno do ponto  $F$ , clicando sobre o polígono depois no ponto, pelo ângulo de  $180^\circ$  no sentido anti-horário.

**Passo 6:** Selecione a opção reta, em seguida clique sobre os pontos  $F$  e  $G$ .



**Passo 7:** Selecione a opção reflexão em relação a uma reta, que fica no mesmo ícone da rotação em torno de um ponto, em seguida clique sobre o polígono e depois sobre a reta. Repita o procedimento para cada polígono.





**Passo 8:** Depois de construir o motivo, selecione a opção vetor, e clique nos pontos  $B'$  e  $B''$ , depois nos pontos  $B''$  e  $B$ , construindo os vetores  $u$  e  $v$ , respectivamente.

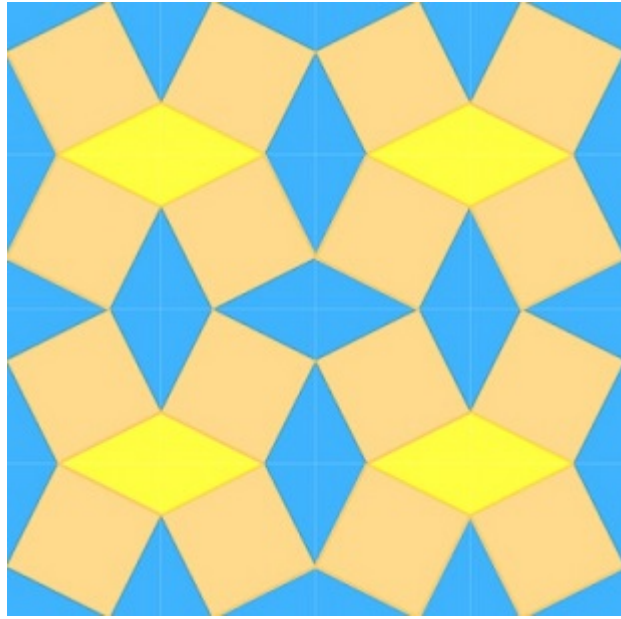
**Passo 9:** Selecione a opção translação por um vetor, clique em um polígono e depois no vetor  $u$ . Repita o procedimento para todos os polígonos.

**Passo 10:** Mesmo procedimento do passo 9, porém, translate cada polígono pelo vetor  $v$ .

**Passo 11:** Na janela de álgebra, clique sobre o ponto relacionado a cada vetor, ocultando os mesmos.

**Passo 12:** Na janela de álgebra, clique com o botão direito sobre um ponto e selecionar a opção propriedades. Em seguida, selecione todos os pontos, utilizando o procedimento do item e), passo 1 do exemplo anterior, desmarque a opção exibir objetos. Faça o mesmo processo para os segmentos, desmarcando a opção exibir objetos.

Seguidos os passos, o mosaico estará construído. A partir da construção, percebe-se que o mosaico, segundo a Seção 2.3 do Capítulo 2, pertence ao grupo  $p4g$ . Há reflexões, cujos eixos são perpendiculares e rotações de ordem 2 e 4 (seu centro de rotação não está sobre os eixos de reflexão, por isso não citamos a mesma na construção), bem como translações.



## Capítulo 4

# Aplicações de Mosaicos para o Ensino

Neste capítulo veremos algumas aplicações de mosaicos para o Ensino Básico, tendo como base a teoria do Capítulo 1 e do Capítulo 2.

Por muitas vezes apresentamos uma matemática que parece inalcançável para muitos de nossos alunos. Nos preocupamos com o rigor das definições e demonstrações (que não são menos importantes) e deixamos de fazer a ponte entre essa teoria e a realidade. Esquecemos que em muitas atividades ligadas às mais variadas áreas como música, medicina, engenharia, informática, comunicações entre outras, a matemática é indispensável, seja para ordenar, quantificar, interpretar, etc.

O trabalho com mosaicos atende também às finalidades propostas pelo PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) e PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) para o ensino da matemática, pois, estabelece conexões entre diferentes temas matemáticos e o conhecimento de outras áreas do currículo, utiliza recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos, bem como desenvolve as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica na busca de soluções para problemas, tornando o ensino da matemática mais atraente.

Mostraremos que os mosaicos podem ser aplicados desde o ensino fundamental ao ensino médio. Neste trabalho, resolvemos questões com mosaicos que foram trabalhados na OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) e em alguns vestibulares. Apesar do nosso foco ser o ensino básico, resolveremos algumas voltadas para o ensino superior. Abaixo, seguem essas aplicações. Os mosaicos desta seção, foram construídos utilizando o GeoGebra.

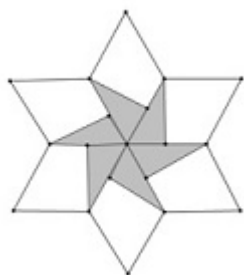
## 4.1 Aplicações para o Ensino Básico

### 4.1.1 Questões da OBM

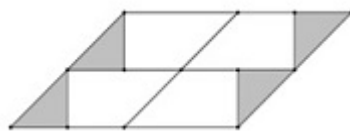
1. (N1-1ª Fase) A figura mostra a superfície pintada de um azulejo em forma de losango.



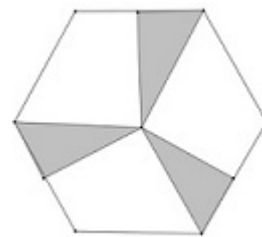
Dos cinco padrões abaixo, apenas um não pode ser montado com cópias desse azulejo. Qual é esse padrão?



(a)



(b)



(c)



(d)



(e)

#### Resolução:

Segundo a Definição 2.2.1, para montarmos um padrão, devemos utilizar transformações no plano que mantenham o motivo invariante. No Capítulo 1, exibimos estas transformações.

A partir da translação ou rotação do azulejo dado, conseguimos montar as figuras das alternativas a), b), c) e d). Na alternativa e), não é possível obter os dois losangos da parte inferior da figura, a partir de translações ou rotações, portanto é a alternativa correta.

2. (N2-2ª Fase)

- (a) Complete a tabela abaixo, lembrando que a soma de todos os ângulos internos de um polígono regular de  $n$  lados é  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .

$n$	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	$180^\circ$	$60^\circ$
4	$360^\circ$	$90^\circ$
5		
6		
8		

Dizemos que três ou mais polígonos regulares se encaixam se é possível colocá-los em torno de um vértice comum, sem sobreposição, de modo que cada lado que parte desse vértice é comum a dois desses polígonos. Na figura vemos dois exemplos de polígonos que se encaixam.

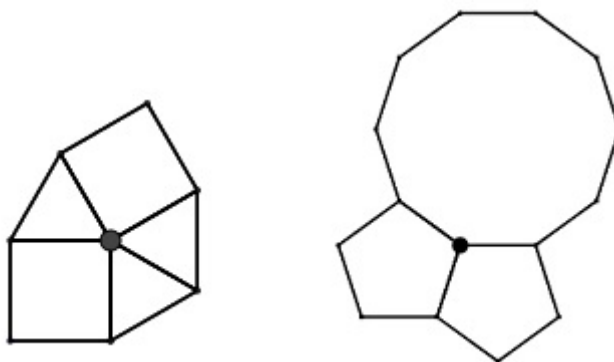


Figura 4.1: Três triângulos e dois quadrados, depois, um decágono e dois pentágonos

- (b) Um quadrado e dois octógonos (polígonos regulares de oito lados) se encaixam? Justifique sua resposta.
- (c) Um triângulo equilátero, um heptágono (polígono regular de sete lados) e um outro polígono se encaixam. Quantos lados tem esse polígono?

**Resolução:**

- (a) Utilizando a fórmula citada no enunciado, temos:

n	Soma dos ângulos internos	Ângulo interno
3	$180^\circ$	$60^\circ$
4	$360^\circ$	$90^\circ$
5	$540^\circ$	$108^\circ$
6	$720^\circ$	$120^\circ$
8	$1080^\circ$	$135^\circ$

(b) Não, pois a soma dos ângulos internos em um de seus vértices é maior que  $360^\circ$ :

$$108^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 315^\circ$$

(c) Sabemos que uma das condições para pavimentarmos um plano é que a soma dos ângulos internos em um de seus vértices seja  $360^\circ$ . Sabemos também, que os ângulos internos de um heptágono medem aproximadamente  $128.57$ , daí,

$$60^\circ + 128.57^\circ + x = 360^\circ$$

$$x = 171.43^\circ$$

Utilizando a fórmula dada na letra a) e lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono regular também pode ser encontrada multiplicando o valor de cada ângulo interno pela quantidade de lados, temos:

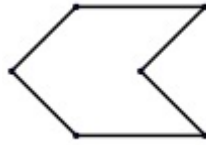
$$(n - 2).180^\circ = (171.43).n$$

$$180n - 171.43n = 360^\circ$$

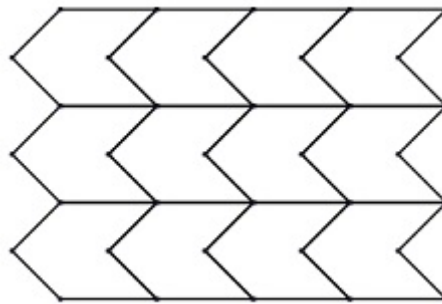
$$n = 42$$

Assim, o polígono procurado tem 42 lados.

3. (N1-3ªFase) Considere o polígono P de 6 lados.



Com cópias de P, podemos cobrir todo o plano, sem sobreposições, como mostrado a seguir.



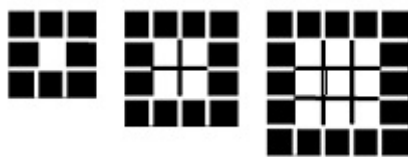
Existe um polígono de 13 lados com o qual é possível cobrir todo o plano com suas cópias, sem sobreposições? Caso seja possível, apresente um polígono. Caso não seja, diga o porquê.

**Resolução:**

Segue uma das possibilidades, solução de Wallace J. Inocêncio, encontrada na revista Eureka, número 22:



4. (N1-1ªFase) Com azulejos quadrados brancos e pretos todos do mesmo tamanho, construímos os seguintes mosaicos.



A regra para se construir estes mosaicos é a seguinte: inicialmente formamos um quadrado com 1 azulejo branco cercado por azulejos pretos; e em seguida, outro quadrado, este com 4 azulejos brancos, também cercado por azulejos pretos; e assim sucessivamente. Com 80 azulejos pretos, quantos azulejos brancos serão necessários para se fazer uma sequência de mosaicos como esta?

- (a) 55
- (b) 65
- (c) 75
- (d) 85
- (e) 100

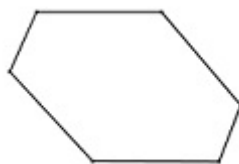
**Resolução:**

A partir do enunciado, chegamos às seguintes relações:

Quadrados brancos	Quadrados pretos
1	8
$2^2$	12
$3^2$	16
$4^2$	20
$5^2$	24

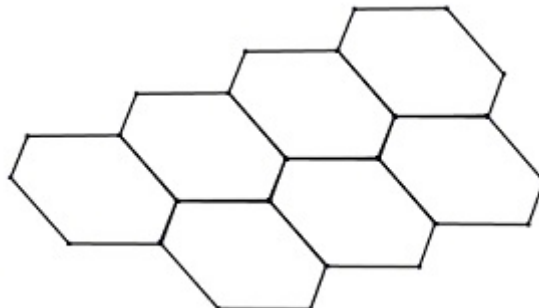
Assim, precisaremos de  $1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$ , alternativa e.

5. (N1-3ª Fase) Considere o seguinte hexágono:





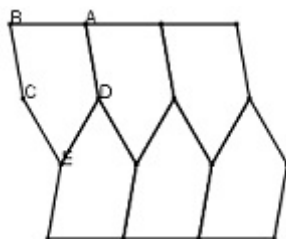
Com cópias desse polígono podemos cobrir todo o plano sem sobreposições, como mostra a figura a seguir.



- (a) É possível cobrir o plano com cópias de um pentágono regular? Observação: um polígono é regular quando todos os seus lados são de mesma medida e todos os seus ângulos internos são iguais.
- (b) Seja ABCDE um pentágono com todos os lados iguais e tal que a medida do ângulo interno nos vértices A e B são  $m(\hat{A}) = 100^\circ$  e  $m(\hat{B}) = 80^\circ$ . Mostre como é possível cobrir todo o plano com cópias desse pentágono, sem sobreposições.

**Resolução:**

- (a) Não. A partir do que foi discutido na Seção 2.2 do Capítulo 2 é possível colocar 3 pentágonos regulares ao redor de um ponto, mas se colocarmos 4, haverá sobreposição. Analisando pela soma dos ângulos, veremos que  $4 \cdot 108^\circ = 432^\circ > 360^\circ$ .
- (b) Com a ajuda do GeoGebra podemos montar esse mosaico.

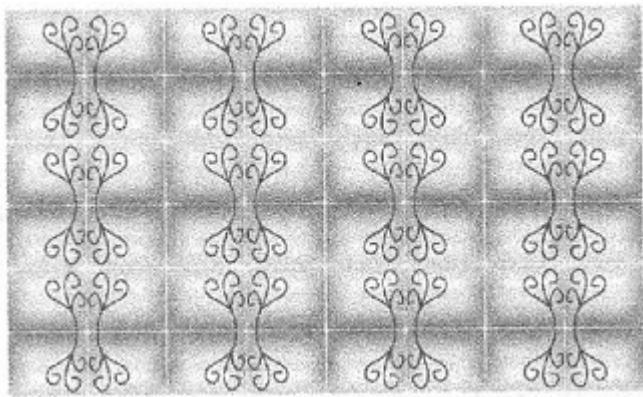


A partir da imagem fica mais fácil visualizar a parte algébrica. Como  $m(\hat{A}) = 100^\circ$  e  $m(\hat{B}) = 80^\circ$ , temos que:  $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ$ , logo  $\overline{BC}$  e  $\overline{AD}$  são paralelos, tornando o quadrilátero ABCD um paralelogramo. Segundo o enunciado, todos

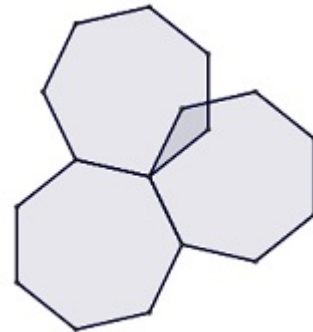
os lados do pentágonos são iguais, assim,  $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EC}$ , logo, o triângulo ECD é equilátero. Assim, a soma dos ângulos em um dos vértices desse mosaico é  $160^\circ + 140^\circ + 60^\circ = 360^\circ$ , sendo possível cobrir todo o plano.

#### 4.1.2 Questões de Vestibulares e ENEM

- (ENEM-2002) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras a seguir.



(a) Ladrilhos retangulares pavimentando o plano.



(b) Heptágonos regulares não pavimentam o plano.

A tabela a seguir mostra a relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

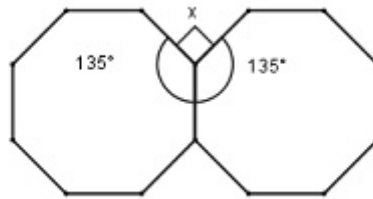
Nome	Ângulo interno
Triângulo	$60^\circ$
Quadrado	$90^\circ$
Pentágono	$108^\circ$
Hexágono	$120^\circ$
Octógono	$135^\circ$
Eneágono	$140^\circ$

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um:

- (a) triângulo
- (b) quadrado
- (c) pentágono
- (d) hexágono
- (e) eneágono

**Resolução:**

Para essa questão, precisamos lembrar que a soma dos ângulos internos ao redor de um dos vértices do ladrilho, precisa ser igual a  $360^\circ$ . Como já foi escolhido o octógono, a soma dos ângulos dos outros precisa ser igual a  $225^\circ$ . Temos a seguinte configuração:



$$135^\circ + 135^\circ + x = 360^\circ$$

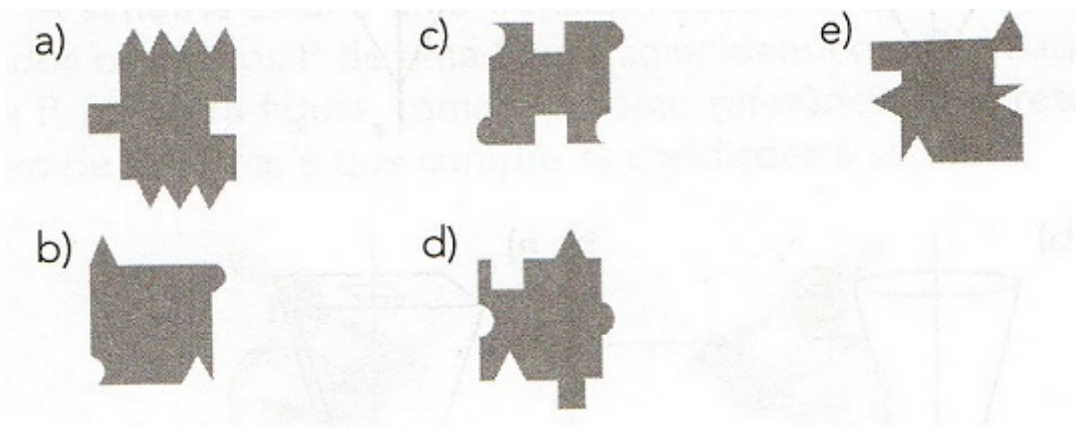
$$x = 90^\circ$$

Logo, a alternativa correta é a letra b.

2. (ENEM-2009) Uma das expressões artísticas mais famosas associadas aos conceitos de simetria e congruência é, talvez, a obra de Maurits Cornelis Escher, artista holandês cujo trabalho é amplamente difundido. A figura apresentada a seguir, de sua autoria, mostra a pavimentação do plano com cavalos claros e cavalos escuros, que são congruentes e se encaixam sem deixar espaços vazios.



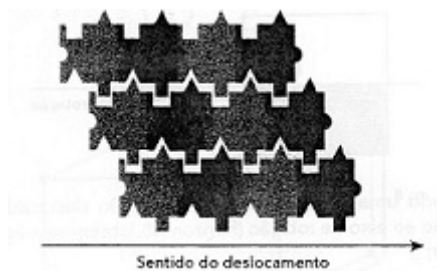
Realizando procedimento análogos aos feitos por Escher, entre as figuras a seguir, aquela que poderia pavimentar um plano, utilizando - se peças congruentes de tonalidades claras e escuras é:



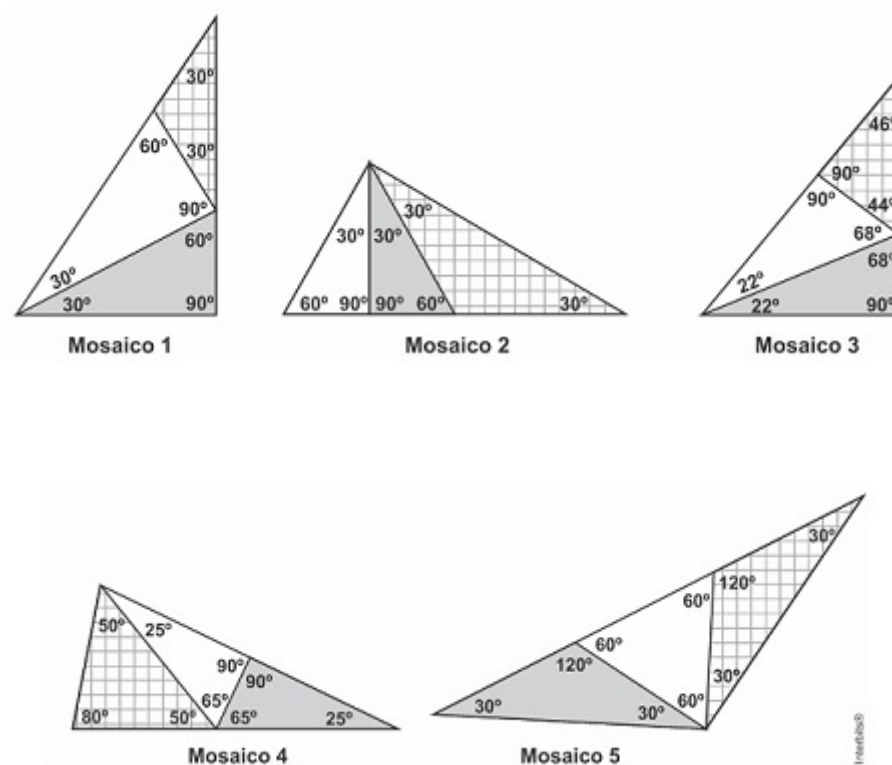
**Resolução:**

Quando nos referimos à pavimentação de um plano, precisamos lembrar que não podemos deixar espaços vazios nem sobrepor figuras.

A pavimentação do plano feita por Escher se deu através de movimentos de translação. Daí, analisando as alternativas, a única figura que pode pavimentar o plano só com movimentos de translação é a *d*. Uma outra maneira de resolvermos a questão é tentar pavimentar o plano com as figuras correspondentes à cada alternativa.



3. (ENEM-2016) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o:

- (a) 1
- (b) 2
- (c) 3
- (d) 4
- (e) 5

**Resolução:**

No mosaico 2, os triângulos  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$  são congruentes e o triângulo  $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$  é isósceles.

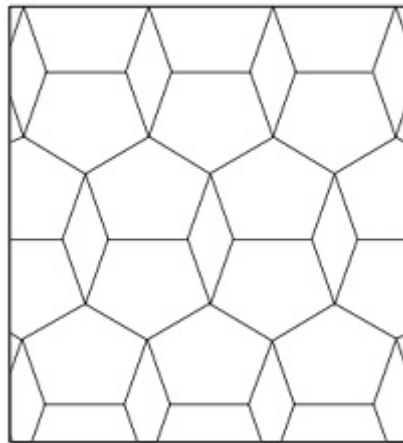
No mosaico 1, o triângulo  $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$  é isósceles, mas os triângulos  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

não são congruentes.

No mosaico 3, os triângulos  $22^\circ$ ,  $68^\circ$ ,  $90^\circ$  são congruentes, mas o triângulo  $44^\circ$ ,  $46^\circ$ ,  $90^\circ$  não é isósceles.

Nos mosaicos 4 e 5 não é possível formar um triângulo retângulo com as três peças. Assim, o mosaico que tem essas características, é o 2. Alternativa b.

4. (Enceja-MEC) Um artista criou um mosaico utilizando pentágonos regulares e losangos, dispostos como mostra a figura.



Para recortar as peças do mosaico, o artista precisa conhecer a medida dos ângulos das figuras.

Sabendo - se que cada ângulo interno de um pentágono regular mede  $108^\circ$ , os ângulos internos dos losangos devem medir

- (a)  $18^\circ$  e  $162^\circ$
- (b)  $30^\circ$  e  $150^\circ$
- (c)  $36^\circ$  e  $144^\circ$
- (d)  $54^\circ$  e  $126^\circ$
- (e)  $36^\circ$  e  $126^\circ$

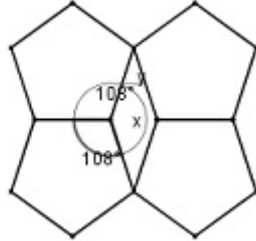
**Resolução:**

Lembrando que a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice em um ladrilho é  $360^\circ$ , descobrimos o valor de um dos ângulos do losango. Para o outro valor, como todo losango também é um paralelogramo, temos que, os ângulos adjacentes são suplementares, sua soma resulta em  $180^\circ$ .

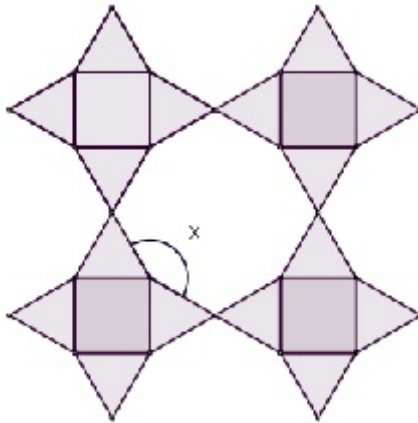
$$2 \cdot 180^\circ + x = 360^\circ$$

$$x = 144$$

Como  $x + y = 180^\circ$ , temos que  $y = 36$ . Assim, a alternativa correta é a letra c.



5. Observe o mosaico, formado por triângulos equiláteros congruentes e quadrados.



A medida, em graus, do ângulo  $x$  assinalado é igual a

- (a)  $105^\circ$
- (b)  $115^\circ$
- (c)  $120^\circ$
- (d)  $135^\circ$
- (e)  $150^\circ$

**Resolução:**

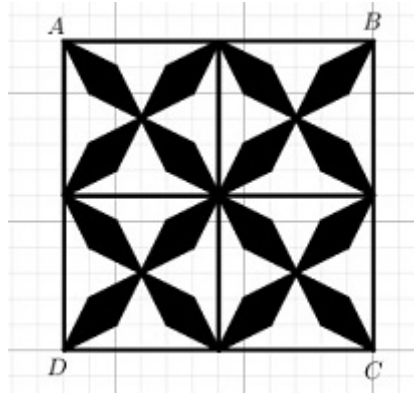
Usando o mesmo procedimento e conceitos das questões anteriores temos:

$$90^\circ + 60^\circ + 60^\circ + x = 360^\circ$$

$$x = 150^\circ$$

Alternativa correta, letra e.

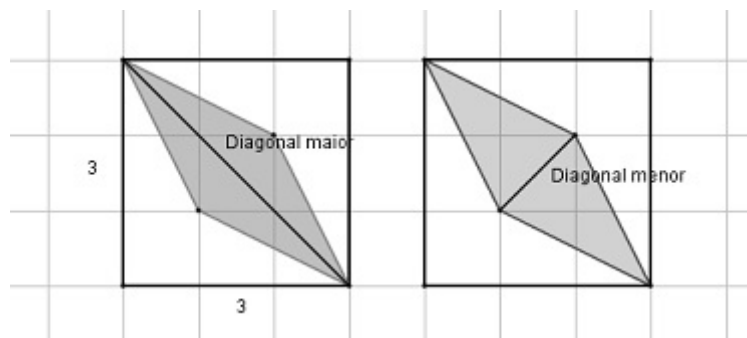
6. (VUNESP) O mosaico da figura abaixo, foi desenhado em papel quadriculado 1x1. A razão entre a área da parte escura e a área da parte clara, na região compreendida pelo quadrado ABCD, é igual a



- (a)  $\frac{1}{2}$
- (b)  $\frac{1}{3}$
- (c)  $\frac{3}{5}$
- (d)  $\frac{5}{7}$
- (e)  $\frac{5}{8}$

**Resolução:**

A parte escura do mosaico é formado por losangos congruentes, mais precisamente 16 no quadrado ABCD. Uma das maneiras de encontrarmos as áreas desses losangos é utilizando a fórmula  $\frac{D \cdot d}{2}$ . Analisando um losango separadamente, temos:



Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$3^2 + 3^2 = D^2$$



$$D = 3\sqrt{2}$$

$$1^2 + 1^2 = d^2$$

$$d = \sqrt{2}$$

Substituindo temos:

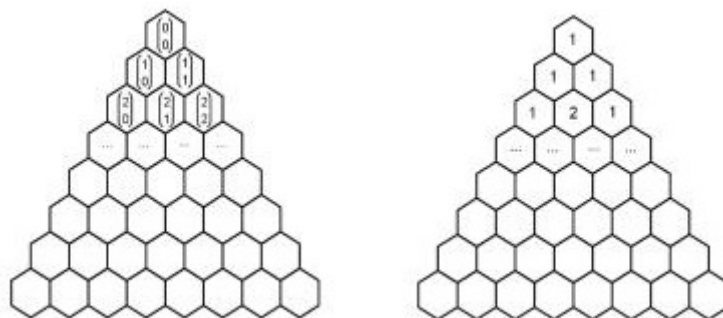
$$A_l = \frac{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$A_l = 3u.a.$$

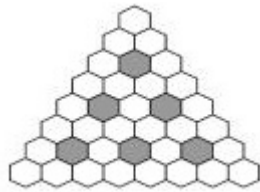
Multiplicando por 16, temos a área escura igual a 48 u.a.. A área do quadrado ABCD, vale 144 u.a., para encontrarmos a área clara, basta subtraírmos 48 de 144. Assim,  $\frac{A_E}{A_C}$  será  $\frac{48}{96}$ , simplificando,  $\frac{1}{2}$ , alternativa a.

7. (UECE) A arte de mosaico teve seu início aproximadamente em 3500 a.C. e seu apogeu no século VI d.C., durante o Império Bizantino. O mosaico consiste na formação de uma figura com pequenas peças (pedras, vidros etc.) colocadas sobre o cimento fresco de uma parede ou de um piso. No Brasil, o mosaico foi utilizado, entre outros, por Candido Portinari, Di Cavalcanti e Tomie Ohtake em diversas obras. Ele ainda é utilizado, principalmente na construção civil em imensos painéis, na decoração de piscinas e em pisos e paredes dos mais diversos ambientes.

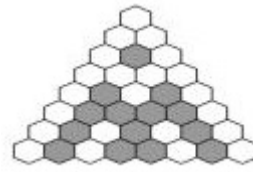
Admirador dessa arte, um famoso milionário contratou um renomado artista para decorar o piso de sua casa de campo com mosaicos. Inspirado nos trabalhos de Escher, o artista decidiu construir o mosaico colorindo os números do triângulo de Pascal (veja as figuras abaixo) que são múltiplos de dois. O triângulo de Pascal é constituído pelos termos binomiais  $\binom{n}{p} = C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ .



Completando o triângulo de Pascal [...] colorindo os múltiplos de 2, obtém-se a figura idealizada pelo artista, representada na alternativa:



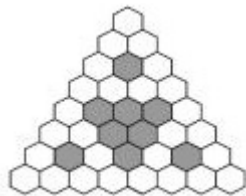
(c)



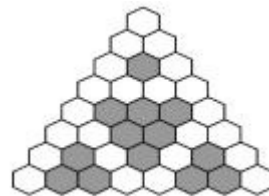
(d)



(e)



(f)



(g)

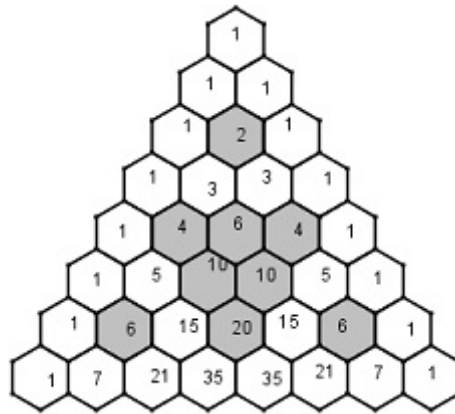
### Resolução:

Diferente das questões anteriores, onde calculávamos ângulos e áreas, vamos calcular os termos binomiais do triângulo de Pascal analisando cada linha.

O triângulo de Pascal foi descoberto pelo matemático chinês Yang Hui e posteriormente várias de suas propriedades foram estudadas por Blaise Pascal. É um triângulo numérico infinito formado pelos coeficientes binomiais.

Toda linha começa e termina por 1 e em uma mesma linha, os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais. Utilizando estas propriedades reduziremos nossas contas, chegando a seguinte situação:

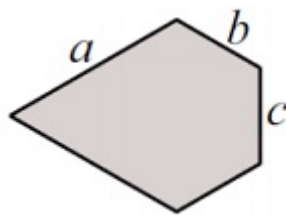
Alternativa *f*.



8. (INSPER) Observe o mosaico a seguir.



As peças que foram usadas para construí-los são idênticas e têm a forma a seguir.



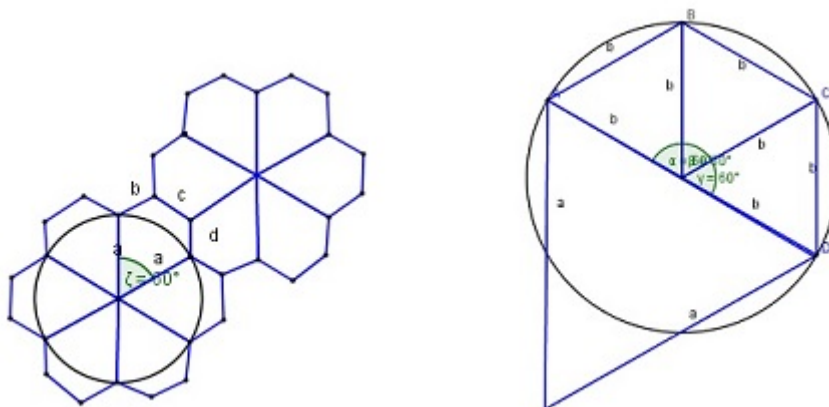
A relação entre as medidas  $a$ ,  $b$  e  $c$  é

- (a)  $a = 2b$  e  $b = c\sqrt{2}$
- (b)  $a = b\sqrt{3}$  e  $b = c\sqrt{2}$
- (c)  $a = 3b$  e  $b = c$
- (d)  $a = 2b$  e  $b = c$

$$(e) \quad a = b\sqrt{3} \text{ e } b = 2c$$

**Resolução:**

Ao analisarmos o mosaico da questão, percebemos que a partir de algumas peças, formamos “flores”. Em cada “flor”, podemos inscrever um círculo, cujo raio será igual a  $a$ , sendo dividido em seis arcos congruentes, medindo  $60^\circ$  cada. A figura abaixo, baseadas nas imagens de [21], mostra que o fato de podermos encaixar as “flores”, temos:  $b = c = d$ .



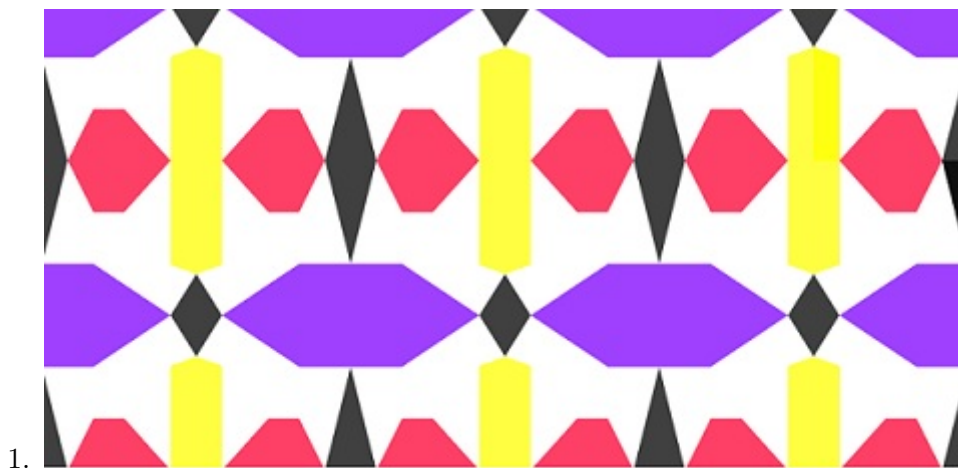
Separando uma peça desse mosaico, veremos que a mesma poderá ser decomposta em um triângulo e um trapézio. O triângulo é isósceles ( $a$  é raio), com um ângulo de  $60^\circ$ , logo, também é equilátero. O triângulo e o trapézio têm um lado em comum. Sendo este lado em comum, o diâmetro de uma circunferência, os ângulos  $A\hat{O}B = B\hat{O}C = C\hat{O}D = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ . Teremos assim, mais três triângulos equiláteros, logo,  $a = 2b$ . Alternativa d.

## 4.2 Questões para o Ensino Superior

Podemos pavimentar o plano com mosaicos de forma periódica, através das transformações no plano. Podemos usar uma transformação apenas ou combinar algumas delas. A partir das transformações usadas (ou da transformação usada) classificamos o mosaico segundo um dos 17 grupos de simetrias, chamados também de grupos cristalográficos.

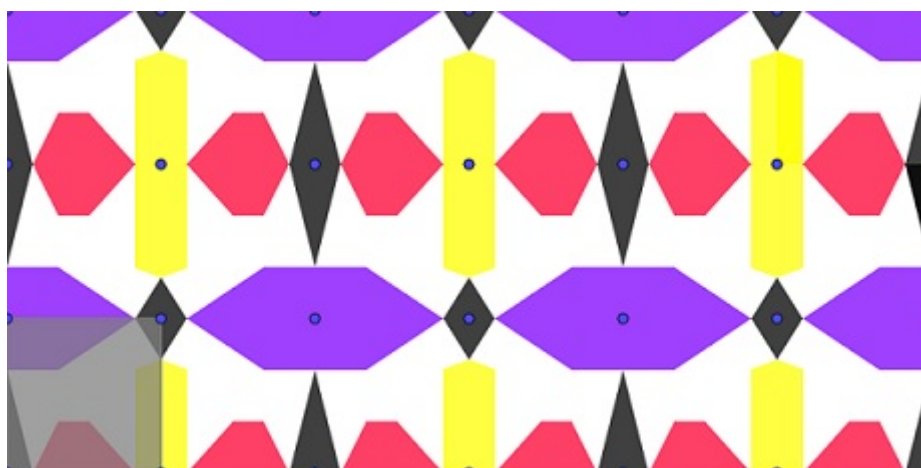
As aplicações dos mosaicos voltadas ao ensino superior não se resumem apenas aos grupos de simetria. Tem aplicações na álgebra linear e na álgebra abstrata, mas, um dos objetivos desse trabalho é podermos identificar a qual grupo cristalográfico um mosaico pertence.

Analise os mosaicos abaixo (os dois primeiros, construímos utilizando o GeoGebra), identificando a qual grupo cristalográfico os mesmos pertencem.

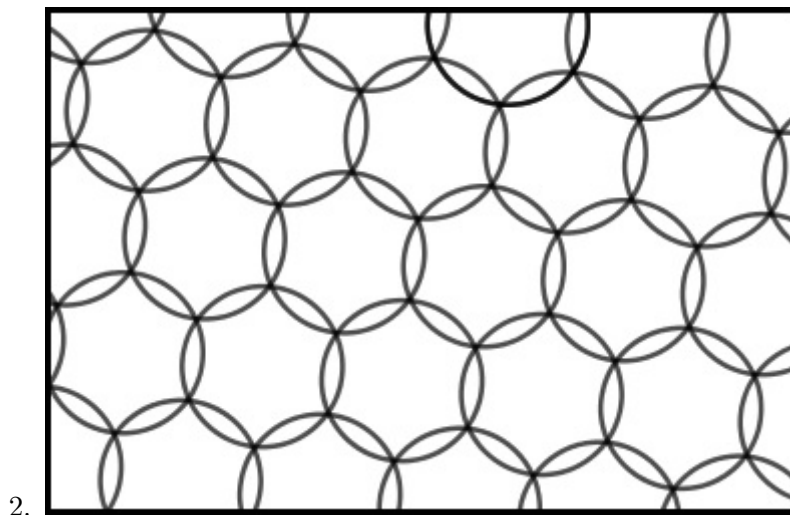


**Resolução:**

O primeiro passo é construir o reticulado, como vimos na Seção 2.3 do Capítulo 2. Construído o reticulado, quadrado para esse mosaico, identificaremos a nossa célula primitiva.



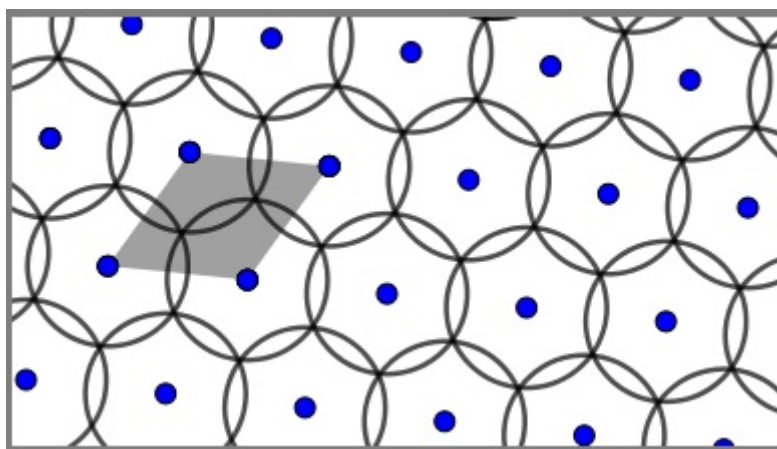
A partir da célula primitiva, percebemos que para construir o nosso motivo, precisaremos realizar rotações de ordem 2 e reflexões em relação a uma reta (eixos de reflexão). Percebemos também que esses eixos de reflexão são perpendiculares. Logo, conforme a Seção 2.3 do Capítulo 2 o mosaico pertence ao grupo  $p4g$ .



**Resolução:**

Diferente do mosaico anterior, não é formado por polígonos, mas, os passos para análise continuam os mesmos.

Construímos o reticulado, hexagonal ou isométrico, e identificamos nossa célula primitiva.



A partir da nossa célula primitiva, precisaremos realizar rotações de ordem 2, 3 e 6, para construirmos o nosso motivo. O mosaico também apresenta reflexões. Logo, pertence ao grupo  $p6m$ .

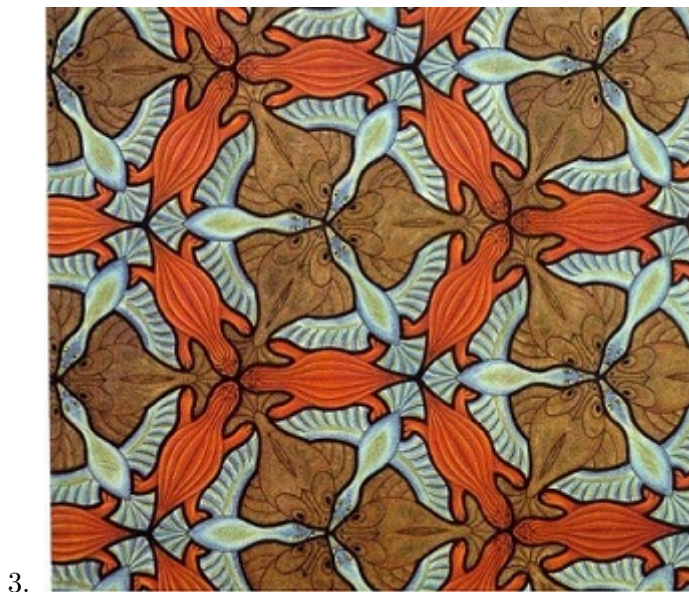
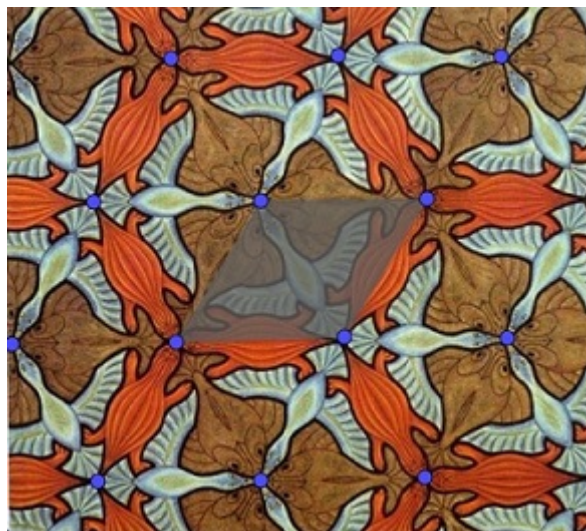


Figura 4.2: Três Animais - M.C. Escher

Construímos o reticulado, nesse caso, hexagonal e identificamos nossa célula primitiva.

Esse não é um mosaico feito por figuras geométricas, logo, precisamos escolher uma célula primitiva, que nos permita construir um motivo, a partir das transformações no plano, em que todas as imagens, ou parte delas, estejam na célula.



O mosaico contém reflexões e rotações de ordem 3, sendo que os centros de rotação estão sobre os eixos de reflexão. Logo, pertence ao grupo  $p3m1$ .

## Capítulo 5

# Conclusão

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre os mosaicos, sob o olhar da matemática. Para tanto, pontuamos alguns assuntos como vetores, espaços vetoriais e transformações no plano, que nos auxiliaram na construção dos mosaicos bem como na resolução de questões que envolvem os mesmos. Realizamos também um breve estudo sobre os grupos cristalográficos, nos limitando a definir e citar cada um deles.

As tecnologias educacionais nos permitem desenvolver atividades investigativas, baseadas em construções e transformando o fazer matemático dos estudantes. Segundo [22], a descoberta de padrões ou singularidades entre representações de objetos matemáticos propulsiona a produção de sentidos matemáticos. Assim, a representação dos objetos matemáticos através dos mosaicos dão direcionalidade à aprendizagem matemática, permitindo através da sua construção com o GeoGebra, que essa aprendizagem aconteça à partir de experimentações com tecnologia. Diante do estudo apresentado é essencial para o professor de matemática pensar em como modificar as atividades que temos em função de novas possibilidades de softwares como o GeoGebra, que mantém possível o estudo de conteúdos de forma mais próxima ao que era feito com lápis e papel.

Um ponto relevante desse trabalho foi a busca por aplicações dos mosaicos para o ensino básico. Encontramos aplicações em conexão com os seguintes conteúdos do ensino básico: geometria plana, trigonometria, análise combinatória, entre outros. Além das aplicações, analisamos alguns mosaicos para então classificá-los quanto aos grupos cristalográficos.

Outro ponto relevante desse trabalho foi o uso do GeoGebra para construção dos mosaicos, bem como as figuras do Capítulo 1, tornando-o ainda mais agradável.

Diante de tais estudos, percebemos o quão vasto são os mosaicos e a gama de possibilidades para conexões com as mais variadas áreas da matemática em todos os níveis de ensino. Nos limitamos ao ensino básico. Um estudo voltado ao ensino superior, requer uma abordagem matemática mais elaborada.



## 5.1 Trabalhos Futuros

- Pode-se trabalhar com as questões das Olimpíadas Internacionais de Matemática envolvendo mosaicos.
- Desenvolver atividades relacionadas ao curso de Estruturas Algébricas, através dos grupos de simetria e ao curso de Álgebra Linear por meio dos reticulados, bem como aplicações as Transformações Lineares.
- Realizar um mini-curso, para trabalhar as transformações no plano por intermédio da construção dos mosaicos utilizando o GeoGebra, a partir dos estudos do Capítulo 3.
- Efetuar um estudo mais aprofundado dos grupos cristalográficos.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, Ruy Madsen. *Descobrimdo Padrões em Mosaicos*. São Paulo: Atual, 1993.
- [2] ROUSSEAU, Christiane e SAINT-AUBIN, Yvan. *Matemática e Atualidade volume 1*. Rio de Janeiro: SBM, 2015.
- [3] BOYER, Carl B. *História da Matemática: tradução: Elza F. e Edgard B.*. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.
- [4] FERNANDEZ, Cecília S e HEFEZ, Abramo. *Introdução à Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: SBM, 2016 (Coleção PROFMAT).
- [5] LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [6] POOLE, David. *Álgebra Linear: uma introdução moderna*. São Paulo: Cengage Learning, 2016.
- [7] KEPLER, Johannes. *The Harmony of the World, volume 209*. Translated into English with an introduction and Notes by: E. J. Aiton, A.M. Duncan e J. V. Field. By the American Philosophical Society, 1997.
- [8] BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia e WETZLER, Henry G. *Álgebra Linear*. 3.ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [9] LIMA, Elon Lages e CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Coordenadas no plano*. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção do Professor de Matemática).
- [10] LIMA, Elon Lages. *Isometrias*. Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- [11] ALVES, Sérgio e DALCIN, Mário. *Mosaicos no plano*, R.P.M. n° 40, São Paulo: SBM, 1999.
- [12] SALLUN, Elvia Mureb. *Ladrilhamentos*. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/matematica/textos/ladrilhamentos.pdf> . Acesso em: 20. jan. 2017.

- [13] SANTOS, Reginaldo J. *Introdução ao Latex*. Disponível em: <http://www.mat.ufmg.br/regi/topicos/intlat.pdf> . Acesso em: 10. abr. 2017.
- [14] BACALHAU, Fernando Marques. *Isometrias do Plano e Simetria*. 2012. 61 p. Dissertação (Mestrado em Matemática para professores). Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012.
- [15] MENDONÇA, José Américo Vieira. *Padrões Geométricos na Azulejaria*. 2007. 153 p. Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática e Engenharia, Universidade da Madeira, Funchal, 2007.
- [16] PACHECO, Miriam. *Mosaicos Planares y Grupos Cristalográficos*. Disponível em: <http://revista.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10987> . Acesso em: 14. ago. 2017.
- [17] MASIP, Ramon. *Resum classificació mosaics*. Disponível em: <http://www.xtec.es/rmasip1/pdfs/resum.pdf> . Acesso em: 27. ago. 2017.
- [18] ARMSTRONG, M. A.. *Groups and Symetry*. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [19] PEIXOTO, Camila N.. *Politopos de Gosset e os grupos de Coxeter  $E_n$* . 2010. Dissertação (Mestrado em Matemática). Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 2010.
- [20] JOYCE, David E.. *The 17 plane symmetry groups*. Disponível em: <http://www2.clarku.edu/djoyce/wallpaper/seventeen.html> . Acesso em: 13. ago. 2017.
- [21] GOUVEIA, Maria A. C.. *Resolução da prova de matemática, vestibular 2014.2, INSPER*. Disponível em: <http://www.anchietaba.com.br/portal/canaldamatematica/resolucao/RESOLUÇÃO%20DA%20PROVA%20DE%20MATEMÁTICA%20DO%20VESTIBULAR%202014-2.pdf> . Acesso em: 22. maio. 2017.
- [22] GADANIDIS, George; BORBA, Marcelo Carvalho e SILVA, Ricardo S. Rodrigues. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento*. Autêntica Editora, 2014.