INSTITUTO FEDERAL
DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
São Paulo

PROFMAT

Vislumbrando uma “nova” abordagem para os números reais

Rodrigo Morozetti Blanco

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* em Matemática em Rede Nacional, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pelo Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca.

IFSP
São Paulo
2017

Catalogação na fonte
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B638v Blanco, Rodrigo Morozetti
Vislumbrando uma "nova" abordagem para os números reais / Rodrigo Morozetti Blanco. São Paulo: [s.n.], 2017.
143 f. il.

Orientador: Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2017.

1. Números Reais. 2. Números de Conway. 3. Complementaridade. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.

CDD 510

Rodrigo Morozetti Blanco

Vislumbrando uma “nova” abordagem para os números reais

Dissertação apresentada e aprovada em 04 de outubro de 2017 como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Prof. Dr. Rogério Ferreira da Fonseca
IFSP – Câmpus São Paulo
Orientador e Presidente da Banca

Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
IFSP – Câmpus São Paulo
Membro da Banca

Prof. Dr. Dermeval Santos Cerqueira
Faculdade de Tecnologia de Guarulhos – FATEC
Faculdades Metropolitanas Unidas - FMU
Membro da Banca

Aos que enfrentaram comigo essa batalha e que tenho orgulho de chamar de "meus": meus amigos, minha família, meu amor e meu caminho.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiro à vida que me apontou a direção antes mesmo de eu saber o quanto gostaria de realizar esse projeto.

Agradeço aos professores e à toda a equipe do Profmat pela dedicação e empenho, em especial ao meu orientador Rogério Ferreira da Fonseca pelo trabalho sobre um tema tão brilhante.

Agradeço aos colegas pelas tardes de estudo sem as quais essa trilha teria sido insuportável: Alessandra, Eder, Elizabeth, Etienne, Inay e Gabriela, muitíssimo obrigado. Agradeço também à Júlia pela disponibilidade incrível nas últimas etapas.

À Beatriz Abdalla, Fernando Vinícius, Regyane Abdalla, Roberta Morozetti, Roberta Peres, Rubens Lacerda e Sônia Morozetti pela graça alcançada.

RESUMO

Nesse trabalho é apresentada uma construção histórica do conceito de número, abordando suas diversas concepções desde os primeiros registros numéricos até os dias atuais. Com base nessa apresentação, faz-se uma discussão filosófica em torno da questão “o que é número”, contrapondo as construções tradicionais dos números reais de Cantor e Dedekind com uma mais moderna proposta por Conway. Por fim, sob o ponto de vista da complementaridade, defende-se as vantagens dessa abordagem mais recente na concepção do que vem a ser um número.

Palavras-chaves: Números Reais, Conway, Complementaridade

ABSTRACT

In this work, a historical construction of the concept of number is presented, approaching its diverse conceptions from the first numeric registers to the present day. Based on this presentation, a philosophical discussion is made around the "what is number" question, contrasting the traditional constructions of the Real numbers of Cantor and Dedekind with a more modern proposal by Conway. Finally, from the point of view of complementarity, the advantages of this more recent approach in the conception of what is a number is defended.

Keywords: Real Number, Conway, Complementarity

LISTA DE FIGURAS

Pág.

SUMÁRIO

Pág.

INTRODUÇÃO

Um dos debates mais presentes nesse trabalho é o conjunto de possíveis respostas para a questão “o que é número”, questão essa que permeia diversos ramos do saber, tendo aspectos diferentes para a Matemática, a História da Matemática, a Filosofia da Matemática e a Educação Matemática. Desse modo, o trabalho reúne algumas das diferentes respostas que foram dadas à essa pergunta ao longo da história contrastando-as com novas possibilidades de concepções numéricas.

Algumas questões naturalmente decorrentes da questão principal são: É possível definir o que é número de forma única? Existe espaço nos currículos brasileiros atuais para esse questionamento? O conceito de número real é o mesmo para professores e alunos de matemática?

Não se pretende aqui responder diretamente a essas questões, mas partindo do contexto histórico é possível abordar os debates filosóficos decorrentes das alterações no conceito de número ao longo do desenvolvimento humano e discorrer sobre como esses debates podem ser incrementados pela construção dos números reais feita por Jonh Horton Conway[1].

Conway é um matemático inglês da universidade de Princeton cujo trabalho sobre números ordinais e jogos combinatórios lhe permitiu afirmar que os números podem ser vistos como um caso particular de uma classe de jogos. Esse é um primeiro indício de que as questões motivadoras do presente trabalho podem ser respondidas de diferentes formas.

A abordagem de Conway resolve algumas das questões deixadas por seus predecessores na conceituação do que é número, como será visto ao longo do texto. As teorias apresentadas aos alunos de Matemática do ensino superior comumente se encerram nos trabalhos de Georg Cantor e Richard Dedekind ou em uma apresentação axiomática que postula a existência dos Reais como corpo ordenado completo. Em ambos os trabalhos, Cantor e Dedekind partem da existência dos racionais para definir os irracionais, sendo que o

[1] John Horton Conway nasceu em Liverpool no dia 26 de dezembro de 1937. Desenvolveu seus estudos superiores em Cambridge, realizando seu doutorado em 1964. Fez importantes contribuições em Teoria dos Números, Teoria dos Grupos e Teoria dos Jogos Combinatórios. Em 1981 foi eleito membro da Royal Society. Atualmente é professor na Universidade de Princeton.

primeiro propõe somas de sequências infinitas e o segundo propõe cortes que dividem os racionais em dois conjuntos disjuntos.

A principal crítica a esses trabalhos reside no salto epistemológico que é dado dos racionais para os irracionais, salto esse que não ocorre na construção dos inteiros a partir dos naturais ou na construção dos racionais a partir dos inteiros. Além disso, outras críticas podem ser pertinentes, como o fato de Dedekind afirmar que um número real (racional ou irracional) é um corte, sendo que a definição de corte depende de uma existência prévia dos racionais.

Outra crítica comum, de ordem didática, e que recai também sobre a apresentação axiomática, é que essas teorias parecem não ser suficientes para elaborar uma concepção do que vem a ser um número, já que se ocupam apenas de definir como esses números se relacionam entre si. Esse tipo de abordagem é o que se chama de abordagem *intensional*, onde apenas os aspectos intrínsecos ao objeto são contemplados, negligenciando-se seus aspectos *extensionais*, ou seja, as formas com que o objeto se manifesta em suas diversas aplicações.

Essa abordagem se torna ainda mais incompleta quando contrastada com a forma como os números são expostos aos alunos do ciclo básico, que desde os primeiros anos estudam o conceito de número a partir de “para que” ele serve: contar, medir, ordenar, comparar, codificar. Ao partir desse ponto de vista, os livros didáticos abarcam apenas os aspectos *extensionais* dos conceitos numéricos (e ainda assim não completam as aplicações desse objeto), aumentando a cisão entre os conceitos de número presentes no ciclo básico e no ensino superior.

Uma abordagem *complementar* seria então aquela onde o objeto que está sendo definido é construído simultaneamente por seus aspectos *intensionais* e *extensionais*. Na Matemática, a *complementaridade* atua de modo geral na interação entre as definições axiomáticas dos objetos e seus modelos de interpretação, se autorregulando. As descobertas feitas a partir da investigação do modelo podem aprimorar a axiomática tanto quanto o estudo dos axiomas pode auxiliar no desenvolvimento do modelo. Assim, buscar uma abordagem *complementar* na Matemática significa um esforço em não dissociar o conjunto de axiomas de seus modelos de interpretação.

Como será visto a seguir, o trabalho de Conway permite uma abordagem *complementarista*, justificando mais uma vez sua inclusão como uma nova forma de abordar os números reais a partir das perspectivas históricas e filosóficas citadas anteriormente. O presente trabalho, por ser de cunho teórico, não contempla experimentações didáticas, mas parte também de pressupostos de sala de aula, buscando desenvolver uma reflexão acerca das consequências das diferentes abordagens na construção do conhecimento do estudante de Matemática e de seus processos cognitivos. Com esse objetivo, o relatório desse trabalho é composto dessa introdução, seguida por quatro capítulos e as considerações finais.

O primeiro capítulo inicia com uma apresentação de como se espera que os números sejam apresentados nas escolas do ciclo básico no Brasil. Esse início visa ressaltar qual é a teoria vigente e quais as principais críticas didático-epistemológicas à essa abordagem tradicional. Desse ponto de vista, é possível também notar que o conceito de número não é fixo e não se manteve imutável ao longo da história, haja visto que a abordagem didática atual data de menos de sessenta anos.

Ao longo desse primeiro capítulo são apresentados os avanços na concepção de número, tanto no campo filosófico de sua compreensão teórica quanto no campo da Matemática, passando por diferentes definições de números naturais, inteiros, racionais e irracionais até o momento em que foi possível o desenvolvimento das teorias de Cantor e Dedekind, elaboradas em 1872 e que ainda hoje configuram papel central nas abordagens didáticas.

A formalização das teorias de Cantor e Dedekind aparece no segundo capítulo, sendo precedida pela compreensão do que era entendido por número àquela época, segundo o princípio de permanência (a partir do qual entende-se como números todos os elementos de conjuntos que pudessem ser construídos sobre os naturais). Apresenta-se então as formas axiomáticas das propriedades das operações de adição e multiplicação, bem como das relações de ordem e equivalência, para então construir os naturais pela axiomática de Peano e os outros conjuntos a partir destes, até a construção dos reais e dos complexos. Ao término dessa exposição torna-se possível enunciar as características de cada conjunto numérico como grupo, anel ou corpo e esboçar a continuidade do trabalho de Cantor na teoria dos conjuntos e na investigação dos números transfinitos.

No terceiro capítulo apresentam-se as correntes filosóficas que debateram acerca da definição de número, com enfoque para o intuicionismo e o logicismo, correntes que se mostraram mais fortes ao longo do século XIX. Com base nessa exposição, apresentam-se as correntes que cresceram no século XX, com destaque para a *complementaridade* de Niels Bohr e a aplicação dessa teoria na interação dos aspectos *intensionais* e *extensionais* dos objetos matemáticos, conforme defendida por Michael Otte.

No quarto capítulo apresenta-se a teoria de Conway e sua demonstração de que o número real pode ser representado por um jogo. Essa teoria é formada por uma generalização dos cortes de Dedekind que não parte da existência dos números racionais. Além disso constrói todos os números seguindo um processo único, evitando o salto epistemológico tradicionalmente encontrado entre os racionais e os irracionais. Por fim Conway contempla tanto os aspectos *intensionais* quanto os *extensionais* na definição de um objeto ao construir junto com seus axiomas uma classe de jogos que serve de modelo interpretativo de sua teoria.

Nas considerações finais procura-se vislumbrar as possíveis consequências didáticas e filosóficas dessa abordagem teórica na concepção tradicional do que é número e nas possíveis respostas para as questões motivadoras desse debate.

1 O CONCEITO DE NÚMERO AO LONGO DA HISTÓRIA

1.1 O número nos dias de hoje

O texto mais recente que estipula como os números devem ser expostos aos alunos nas escolas brasileiras está presente no documento *Base Nacional Curricular Comum (BNCC)*[2], que busca nivelar o conteúdo mínimo a ser apresentado nas escolas em todo o território nacional. O seguinte trecho é um dos recortes onde o conceito de número figura:

> Na perspectiva de que os alunos aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de tarefas, como as que envolvem medições, nas quais os números naturais não são suficientes para resolvê-las, indicando a necessidade dos números racionais tanto na representação decimal quanto na fracionária [...]. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. Cabe ainda destacar que o desenvolvimento do pensamento numérico não se completa, evidentemente, apenas com objetos de estudos descritos na unidade Números. (BRASIL - MEC, 2017, p. 225)

Esse texto deflagra algumas questões que têm sido discutidas no âmbito geral da matemática e específico da teoria dos números, dentre elas: a necessidade de contextualização dos conceitos abstratos como forma de ensino; a compreensão dos conjuntos numéricos como extensão dos números naturais; e o salto presente nessa compreensão ao passarmos dos racionais para os reais. Talvez o principal debate seja decorrente justamente do fato de que a compreensão atual do número como elemento de um conjunto ideal com determinadas características não tem relação direta com o surgimento do número natural, uma vez que este aparecera através de abstrações da vivência humana.

As decorrências dessa dicotomia no ensino da Matemática são inúmeras. A Matemática hoje apresentada nas escolas é tida como uma ciência estabelecida há milênios e sobre a qual nada mais pode ser criado ou questionado. Entretanto, essa visão rígida não é inerente ao conhecimento matemático, principalmente quando analisado desde os seus primórdios, mas se baseia em movimentos estruturais dessa disciplina que se difundiram a partir do século XIX e nortearam os currículos das escolas do século XX, ocasionando as sequências didáticas que vemos nos livros atuais.

---

[2] A *BNCC* é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da educação básica. A primeira versão foi disponibilizada para consulta pública entre outubro de 2015 e março de 2016. Atualmente encontra-se na terceira versão, mantendo seu caráter colaborativo. Referência nacional para a formulação dos currículos, esse documento visa contribuir para o alinhamento de outras políticas e ações, em âmbito federal, estadual e municipal, referentes à formação de professores, à avaliação, à elaboração de conteúdos educacionais e aos critérios para a oferta de infraestrutura adequada para o pleno desenvolvimento da educação.

> A educação formal é baseada na mera transmissão de explicações e teorias (ensino teórico e aulas expositivas) e no adestramento em técnicas e habilidades (ensino prático com exercícios repetitivos). Do ponto de vista dos avanços mais recentes de nosso entendimento dos processos cognitivos, ambas são totalmente equivocadas. (D'AMBROSIO, 2005, p. 117)

A crítica de D'Ambrosio se relaciona com a forma que o ensino das ciências tomou desde 1960 quando, como vemos em Godoy (2015, p. 120), "ocorreram mudanças significativas no ensino da matemática pela chegada ao Brasil das orientações do movimento internacional conhecido como *Matemática Moderna*", protagonizado pela comunidade internacional de matemáticos.

> A reforma do ensino de matemática aí gerada decorre de uma renovação do pensamento matemático iniciada no final do século XIX, que motivou, em meados do século passado, um grupo de matemáticos franceses, sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki, a redigir o tratado intitulado Élements de Mathemátiques, ambicionando "refundar a matemática", e que constituiu em pôr em evidência as grandes estruturas (álgebra, relação de ordem e topológica) com o intuito de tornar atividade dos matemáticos estudar as interações entre tais estruturas. (GODOY, 2015, p.9)

Ao compreender a matemática como um estudo de relações entre objetos, o grupo Bourbaki influenciou a Matemática mundial. Hoje, "a Matemática tem sido conceituada como a ciência dos números e das formas, das relações e das medidas, das inferências, e as suas características apontam para precisão, rigor, exatidão", afirma ainda D'Ambrosio (2005, p. 114), que é também um dos precursores de um movimento conhecido como Etnomatemática que, dentre outras coisas, sugere a contextualização social como essencial no estudo e no desenvolvimento da Matemática.

A sugestão de D'Ambrosio pode ser vista como um resgate. Segundo ele (2005, p. 114), ainda hoje "ser racional é identificado com dominar a matemática". Desmistificar essa ideia pode significar uma recuperação da importância dos aspectos *extensionais* dos objetos matemáticos. Em diversos períodos da história é possível perceber que parte do conhecimento matemático era indissociado das suas aplicações, existindo apenas a partir do uso prático de seus processos. De certa forma, a reestruturação proposta pelo grupo Bourbaki surgira com a função de ressaltar o que as diferentes matemáticas tinham em comum (ou seja, a relação entre os objetos), se sobrepondo às suas diversas trajetórias, que por sua vez provinham da própria diversidade de origens das estruturas que compõem a matemática atual.

> Os matemáticos do século XX desempenham uma atividade intelectual altamente sofisticada, que não é fácil de definir, mas boa parte do que hoje se chama de matemática deriva de ideias que originalmente estavam centradas nos conceitos de número, grandeza e forma. Definições antiquadas da matemática como uma "ciência do número e da grandeza" já não são válidas, mas sugerem as origens dos diversos ramos da matemática. (BOYER, 1974, p.1)

Roque (2012, p. 20) nos conta que a história como é comumente transmitida retrata uma matemática que veio da Europa e se difundiu pelas Américas a partir da colonização, tendo se originado na Grécia, sido traduzida pelos árabes e retornado à Itália pelos fugitivos de Constantinopla.

Essa linha de raciocínio excluiria de nosso estudo matemático tudo que foi desenvolvido pelos povos mesopotâmicos e que sabidamente não chegou aos gregos. “Isso indica que talvez não possamos falar de evolução de uma única matemática ao longo da história, mas da presença de diferentes práticas que podemos chamar de ‘matemáticas’ segundo critérios que também variam” (ROQUE, 2012, p. 20).

A visão da matemática como forma abstrata de pensamento talvez tenha sido a forma de colocar os diversos campos matemáticos ao redor de um ponto comum, que pertencia às suas diferentes manifestações: o estudo das relações e padrões. Entretanto, esse processo negligencia uma série de outros aspectos importantes do conhecimento matemático, como sua utilidade ao desenvolvimento social.

O conhecimento geométrico era o escopo principal da matemática grega, onde fora construído essencialmente a partir dos escritos de Euclides sobre conceitos primitivos e axiomas que, embora abstraídos da realidade, tornavam a geometria um estudo da relação entre os objetos geométricos. Esse processo coloca a Geometria em uma posição onde sua aplicação ao universo observável não é necessária para seu desenvolvimento.

A Álgebra por sua vez recebeu grandes influências orientais e não é à toa que nossos algarismos são chamados de hindu-arábicos. Os registros históricos mostram que essa parte da matemática surgiu primariamente através de “receitas” para resolução de problemas cotidianos, obtidos de situações reais generalizadas.

Nas escolas secundaristas do Brasil, a Aritmética, a Álgebra e a Geometria constituíam diferentes disciplinas até 1925, como afirma Godoy (2015, p. 119). Essa separação entre as disciplinas ressalta o quão diferentes foram seus caminhos históricos: enquanto a geometria permanecera séculos sem sofrer grandes alterações, a álgebra seguia sendo ampliada principalmente a partir das necessidades externas a ela, como as provenientes da Física, Engenharia ou Astronomia. Foi a partir do século XIX que o desenvolvimento geral da matemática passou a ser fomentado especialmente pelas buscas por rigor e formalização internas ao próprio escopo da disciplina.

> A matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas [...] que podem ter sido de natureza cotidiana (contar, fazer contas); relativos à descrição dos fenômenos naturais (por que um corpo cai?; por que as estrelas se movem?); filosóficos (o que é conhecer?; como a matemática ajuda a alcançar o

> conhecimento verdadeiro?); ou, ainda, matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). (ROQUE, 2012, p. 20)

Assim, o surgimento do número como ferramenta social, seu estudo dentro da geometria grega e sua expansão com o desenvolvimento da álgebra, tornaram-no um objeto de difícil definição. Suas diferentes nuances fomentaram a busca pela rigidez axiomática advinda do século XIX, que gerou o que ficou conhecido como aritmetização da análise, fundamentando todos os conjuntos numéricos com seus processos algébricos como sendo ampliações gradativas dos números naturais.

Novas questões surgem a partir daí: no âmbito filosófico, é possível compreender a Matemática como sendo uma ciência ora obtida da experiência, ora fruto apenas do pensamento humano? O que essas diferentes compreensões podem ocasionar nas metodologias de ensino? Ao defender que o ensino dessa disciplina depende tão fortemente de sua contextualização, como as novas teorias educacionais podem lidar com a ideia de que a Matemática deve se ocupar apenas das relações entre os objetos independentemente de sua estrutura e ainda assim fazer a transposição didática desses conteúdos?

Ao analisarmos o número como objeto inerente a quase todo conhecimento matemático, é de se esperar que tais questões resvalem também sobre esse conceito: É possível que haja dentro do currículo escolar espaço para o questionamento filosófico acerca do que vem a ser número? Quanto da compreensão do que é número por parte dos estudantes depende de sua apresentação socialmente contextualizada?

Uma das conclusões a que se pode chegar a partir dessas questões e dos pontos de vista históricos citados, é que “as matemáticas” permanecem passíveis de reformulações, já que as técnicas e conceitos hoje legitimados como verdadeiros foram questionados e reinterpretados muitas vezes ao longo da história.

De acordo com Dantzig (1970, pág. 44), “afirmações tidas como verdade durante séculos tiveram sua falsidade provada mais tarde, e até hoje existem problemas que desafiaram o poder dos maiores matemáticos e ainda permanecem sem solução”, como a Hipótese de Riemann sobre a distribuição dos números primos e o problema “P versus NP”, sobre a possibilidade de resolução de problemas matemáticos a partir de algoritmos computacionais.

Ao longo da história é possível encontrar não só exemplos de problemas que demoraram séculos para serem resolvidos (como o último teorema de Fermat) como também de questões que se mostraram insolúveis apesar dos inúmeros esforços a fim de demonstrar algo que parecia provável (como a quadratura do círculo apenas com régua e compasso).

Dentre tantos exemplos desses meandros do pensamento matemático, talvez um dos mais clássicos seja exatamente o caso da geometria plana euclidiana tal qual é ensinada até hoje nas escolas: embora essa geometria tenha sido construída, como vimos, de forma sólida e lógica sobre os postulados de Euclides por volta do século III a. C, esse trabalho fora questionado desde a Grécia antiga até o século XVII, quando, a partir da negação do postulado das paralelas, novas geometrias começaram a surgir.

Essas reconstruções de conceitos tão fundamentais parecem estar longe de terminar. A obtenção do conjunto dos números reais como um corpo ordenado completo que permanece em vigor tanto no ensino básico quanto no superior[3] passou por um longo caminho e sua forma atual foi estabelecida há menos de dois séculos.

Essa conceituação teve como consequência um grande número de discussões acerca dos significados dos números, principalmente por que, ao compreendê-los a partir de sua inclusão em conjuntos definidos apenas pelas relações características de seus elementos, a comunidade matemática passou a defini-los como entidades abstratas e que independiam de sua aplicação social. Essa caracterização numérica parte exclusivamente de seus aspectos *intensionais*, descartando suas características *extensionais*.

> A noção de intensão de termos matemáticos explicita as relações entre classes de objetos matemáticos, assim como suas relações estruturais. No entanto, tal noção não esgota a conceituação do objeto matemático em si [...]. A noção de extensão de termos matemáticos concerne à interpretação dos objetos matemáticos, assim como às aplicações, caracterizando modelos da teoria. Uma abordagem complementarista torna-se relevante em razão da impossibilidade de definir a realidade matemática independentemente de suas possíveis representações e da própria atividade cognitiva. (FONSECA, 2010, p. 79).

Esse debate nos mostra não só o quão errônea pode ser a impressão de que a Matemática é uma ciência essencialmente rígida como também o fato de que tal rigidez só foi possível por ter sido construída retroativamente. Assim, tanto historicamente quanto para fins didáticos, o conceito de número parece perder grande parte de seu sentido quando destacado de seus aspectos *extensionais*, ou seja, dos objetos aos quais ele se referencia. Mesmo nas outras áreas da Matemática, como a Álgebra ou a Geometria Analítica, o aspecto *extensional* dos números é parte fundamental de seu desenvolvimento e estudo.

Assim, embora a Aritmética possa ser compreendida a partir apenas das relações entre objetos, a teoria dos números (que se ocupa justamente de entender a natureza desses objetos

[3] Em geral, na Educação Básica não se fala em corpo ordenado completo, mas busca-se explorar os aspectos estruturais dos números, ressaltando-se algumas propriedades, entretanto a densidade e principalmente a completude são negligenciadas no ensino (Igliori e Silva, 2001).

que são ferramentas das outras áreas matemáticas) parece depender de modelos que concretizem e auxiliem no desenvolvimento de suas proposições.

> Não existem dois outros ramos na Matemática tão contrastantes quanto a aritmética e a teoria dos números. A grande generalidade e simplicidade de suas regras torna a aritmética acessível à mente mais obtusa. [...]. Por outro lado, a teoria dos números é, de longe, a mais difícil das disciplinas matemáticas. É verdade que a apresentação dos seus problemas é tão simples que até mesmo uma criança compreende o que está em questão. Mas os métodos usados são tão individuais que as mais estranhas habilidades e a maior perícia são exigidas para buscar a maneira correta de abordar o problema. Aqui a intuição tem campo livre. A maior parte das propriedades conhecidas foi descoberta por uma espécie de indução. (DANTZIG, 1970, p. 44)

A discussão entre aceitar ou não um raciocínio indutivo (em oposição ao dedutivo) como forma de verificação de uma verdade matemática era parte das discussões acadêmicas e filosóficas provenientes do século XVIII. Outra ideia bastante questionada na época vinha do conceito da partição de algo contínuo em elementos unitários adimensionais, os chamados infinitesimais, que seriam a base da definição dos números irracionais. Tais questionamentos evidenciavam a dificuldade geral em definir regras que valessem para um conjunto contínuo e infinito de números a partir de seus aspectos *intensionais*, já que o raciocínio analítico e dedutivo parecia insuficiente para lidar com o infinito. Por outro lado, explicar os números apenas por seus aspectos *extensionais* era justamente o tipo de atitude que havia levado a comunidade matemática à busca por rigor e exatidão.

De acordo com Boyer (p. 1), “Em certa época pensou-se que a matemática se ocupava do mundo que nossos sentidos percebem, e foi no século XIX que a matemática pura se libertou das limitações sugeridas por observações da natureza. ”

Boyer explicita aqui o caráter filosófico fundamental na discussão das definições matemáticas: a questão de se saber sobre quais bases a Matemática se desenvolve, se sobre conceitos aplicáveis ou absolutamente abstratos. Como exemplo, podemos citar o próprio número, que pode ser visto por vezes como uma abstração da realidade (o número 3 pode ser entendido como uma característica de todas as coleções de três elementos) e outras tantas vezes como algo definido matematicamente (o número 3 é o terceiro elemento do conjunto dos números naturais).

> Uma das questões que se considera fundamental em Filosofia da Matemática é saber se o conhecimento matemático (admitindo que exista) é empírico ou *a priori*. [...] O termo “empírico” significa “baseado na experiência” e a expressão “*a priori”* significa “passível de se obter antes da experiência”. (BARKER, 1969, p. 13)

Oscilando entre a aplicabilidade e a abstração, entre o empirismo e o conhecimento *a priori*, a Matemática foi se desenvolvendo, ora como um conjunto de invenções, ora como um conjunto de descobertas. Assim, embora o ponto e a reta pudessem ser considerados conceitos empíricos, obtidos da realidade por meio dos sentidos, o conhecimento geométrico independia dessa relação e poderia ser considerado um conhecimento desenvolvido *a priori.*

A busca pela resolução dessas questões foi a chave para que a Lógica, antes anexada apenas à Filosofia, fosse adaptada a uma linguagem simbólica abstrata e assim incorporada ao escopo da Matemática. O auge do conflito se deu mais exatamente no ano de 1900, no congresso internacional dos matemáticos, quando alguns dos novos nomes da Lógica expuseram suas ideias ao mundo acadêmico, se tornando os principais alvos da crítica dos então chamados de intuicionistas.

> Embora o grande matemático francês Henri Poincaré (conhecido como o último universalista) tenha escrito temas da filosofia da matemática desde 1893, ele não viria a abordar o assunto da lógica moderna até 1905. A atitude que ele expressara em direção à nova lógica era de hostilidade. Ele enfaticamente negou que seu desenvolvimento no quarto de século anterior tivesse gerado qualquer avanço e descartou tanto as ferramentas inventadas pelos primeiros lógicos quanto os fundamentos que eles buscavam. Seu ataque foi amplo: Cantor, Peano, Russell, Zermelo, Hilbert e todos que figuravam entre eles. (GOLDFARB, ano 1988, p. 61)[4]

Foi dessa nova compreensão dos processos matemáticos que culminou o movimento Bourbaki. A nova Matemática que a partir de então se constituiria de processos de construção lógica inteiramente fundamentados na teoria dos conjuntos influenciou os processos pedagógicos do mundo inteiro, invadindo as salas de aula do ciclo básico ao ensino superior, gerando outra série de críticas, agora não só sobre a Matemática em si, mas também sobre a educação matemática.

Foi a teoria formal de conjuntos numéricos tal qual Georg Cantor e Richard Dedekind a definiram; iniciada por William R. Hamilton, Niels Henrick Abel e August Louis Cauchy; unida à linguagem da lógica defendida por Bertrand Russel, e Alfred North Whitehead e seguida posteriormente por David Hilbert e outros; que permitiu a redefinição de cada conjunto e uma nova compreensão do significado de seus elementos.

Em seguida foi a lógica formal seguida de estudos de cunho filosófico como o de Gotlob Frege e do próprio movimento Bourbaki que validaram essas novas concepções, aplicando-as não só no conceito de número como também na busca pela compreensão geral das estruturas matemáticas a partir da teoria dos conjuntos. Esse novo modelo de raciocínio influenciou a educação matemática.

É a partir desse ponto que se encontra o escopo desse trabalho. Com base no estudo do conceito de número exposto por John H. Conway e da possível *complementaridade* entre seus aspectos *intensional* e *extensional*, além das críticas feitas aos modelos tradicionais de ensino,

[4] O texto original está em inglês. Esse trecho foi traduzido para o presente trabalho.

espera-se debater sobre as definições atuais do que é o número e suas possíveis consequências na construção didática desse conceito que é simultaneamente matéria prima e produto dos currículos presentes no ensino básico e superior.

O trabalho elaborado por John H. Conway defende a construção do número simultaneamente, por meio de conjuntos e classes de jogos, favorecendo a exploração de suas características *intensionais* e *extensionais*, indo ao encontro da proposta de D'Ambrosio acerca das contextualizações como forma de garantir a apropriação do conhecimento por parte do aluno, discutindo o uso da *complementaridade* como forma de ampliar a compreensão desses conceitos.

Para que isso seja possível, entretanto, é preciso primeiro compreender como o objeto número foi sendo formado a partir de inúmeras transformações ao longo dos séculos até atingir o modelo atual, com enfoque especial às teorias de Georg Cantor e Richard Dedekind, à organização dos conjuntos numéricos e à consequente separação do estudo dos números nos campos da teoria dos números e da análise.

Assim, antes que seja possível expor formalmente, mesmo que de forma resumida, o que hoje se entende por cada conjunto numérico, é desejável compreender melhor os caminhos que levaram até eles, bem como as bifurcações que decorreram desses caminhos.

1.2 Símbolos para representar quantidades

Os mais antigos registros escritos de algo que possa ser considerado matemática são provenientes da Mesopotâmia e do Egito. Dentre os objetos conhecidos talvez o mais famoso seja o *Papiro de Rhind* que data de 1650 a.C. Nele é possível encontrar uma série de problemas envolvendo representações numéricas, cálculos e proporções indicadas como somas de frações unitárias (com numerador 1).

Presume-se que tais "números" (entendidos aqui como símbolos para representar quantidades) tenham surgido muito antes, vindos da necessidade de contar e medir, que por sua vez deve ter surgido a partir da acomodação dos homens em comunidades. Quando o homem deixa de ser nômade e passa a estabelecer sociedades com moradia fixa, o senso de propriedade gera a necessidade da documentação e contagem das posses. Mesmo antes disso pode ter havido também a necessidade da contagem do tempo para compreender e prever fenômenos naturais, como estações do ano e marés.

> A princípio as noções primitivas de número podiam estar relacionadas com contrastes mais do que com semelhança: a diferença entre um lobo e muitos, a desigualdade de tamanho entre uma sardinha e uma baleia, a dissemelhança entre a

> forma redonda da lua e a retilínea de um pinheiro. Gradualmente deve ter surgido, da massa de experiências caóticas, a realização de que há analogias: e dessa percepção de semelhanças em número e forma nasceram a ciência e a matemática. (BOYER, 1974, p. 1)

Vale ressaltar ainda que a contagem não demanda obrigatoriamente a utilização de um sistema numérico. A correspondência biunívoca, ou “um a um”, nos permite saber se duas coleções possuem a mesma quantidade ou qual coleção possui mais elementos, sem que para isso seja preciso estabelecer um sistema de símbolos para representar cada quantidade. Assim, o surgimento dos sistemas numéricos não é contemporâneo da necessidade de contar, mas certamente deriva dessa necessidade.

> O procedimento de contagem dá origem a um “número” que designa a quantidade de seres em uma determinada coleção. A definição de número implica, portanto, uma “abstração” em relação à qualidade dos seres que estão em cada coleção, para que apenas sua quantidade seja considerada. Tal definição de número [...] foi proposta durante o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, no séc. XIX. Mas isso não quer dizer que a noção de número praticada pelos mesopotâmicos fosse concreta. O exemplo histórico nos ajuda a compreender em que sentido o número pode ser entendido como uma abstração. (ROQUE, 2012, p.87)

Embora não possamos assim determinar em que momento se passou a representar por um mesmo símbolo duas coleções cuja característica comum era a de terem a mesma quantidade de elementos, é importante atentarmos ao fato de que já no antigo Egito o número era uma entidade abstrata que servia tanto para contar os dias como para contar escravos (ou seja, já exercia a função que futuramente será chamada de cardinal) e que fazia parte de um sistema lógico, com sintaxe e semântica.

É natural que os símbolos utilizados originalmente tivessem alguma relação intrínseca com a quantidade que representavam, como uma mão aberta naturalmente pode representar o número cinco. Entretanto, o fato de se utilizar um mesmo símbolo para representar diferentes coleções implica em uma abstração sutil, da qual se origina o pensamento matemático. Assim, para o tema que está sendo tratado, a história dos símbolos não é tão importante quanto a evolução dos sistemas simbólicos utilizados.

Para esse estudo, é necessário perceber que essa evolução não tardou a gerar na sintaxe dos números outra característica essencial: a ideia de ordem. Ao organizar as coleções em ordem crescente, surge implicitamente a ordenação dos números que representam as quantidades dessas coleções. Começa-se assim a construir um sistema de elementos discretos, onde cada número que represente coleções com uma unidade a mais do que as representadas pelo número anterior, esteja colocado exatamente à direita desse na organização crescente. Foi essa ideia de ordem que permitiu a origem das operações, pois além de representar quantidades (agora é possível fazer uma correspondência não mais biunívoca entre duas coleções, mas sim entre uma coleção e um símbolo do sistema numérico pré-estabelecido), o número ordinal permitia inferir qual coleção era maior, quão maior ela era e qual o tamanho de uma coleção resultante da adição ou subtração de duas coleções originais, bem como o tamanho da soma de várias coleções iguais ou de suas partições.

Nesse ponto já deve estar claro que o que está sendo descrito aqui é o que atualmente chama-se de conjunto dos números naturais com sua relação de ordem e suas quatro operações básicas. Faz sentido que esse objeto matemático que muitas vezes serve de átomo para tudo que pode ser considerado hoje como número receba esse nome ("número natural"), já que sua origem representa não só a capacidade natural humana de observar o mundo de forma analítica, encontrando padrões, abstraindo-os e sistematizando seu redor, como também passa a representar por conseguinte uma abstração de tudo que há no mundo natural, já que pressupõe que qualquer coisa da natureza poderia ser assim medida em unidades para então ser contada. É nesse sentido que o termo "número natural" será utilizado, mesmo que esse nome e suas características essenciais só tenham sido formalizados milênios depois.

Desse modo, analisando com olhos atuais, é possível perceber que esses símbolos possuíam características que até hoje são pertencentes à ideia de número: servem para contar, comparar e ordenar, seja quantidades inteiras ou partes de um inteiro. Entretanto, mesmo com a distância dos séculos, ainda é possível perceber que a existência do número traz em si alguns conceitos que são naturalmente difíceis de definir: afinal, o que é um inteiro?

Essa pergunta remete a questões filosóficas que envolvem o conceito de divisibilidade e multiplicidade, de partícula indivisível, de átomo, de unidade, da matéria da qual o universo é constituído. Uma unidade pode ser feita de partes? Se sim, cada parte é uma nova unidade? Existe um limite para esse fracionamento? Existe enfim uma unidade fundamental?

Uma consequência direta da ideia de ordem nos números naturais é a introdução do conceito de sucessão. Ao desenvolver o princípio de acrescentar de forma recorrente mais uma unidade a qualquer coleção gerando assim um novo símbolo, os primeiros calculistas imbuíram o número de uma característica que geraria debates por milênios: a ideia de que a sucessão leva ao infinito. Ocorre que, embora não seja tão estranho de se imaginar uma sequência de sucessões que leve ao infinito, essa ideia ganha outro aspecto quando aliada às partições dos inteiros.

Os tabletes babilônicos e os papiros egípcios se utilizavam de diferentes bases de contagem e ainda assim encontravam problemas semelhantes ao lidar com a divisibilidade. A contagem egípcia era decimal, enquanto a babilônica era hexadecimal e ambas continham, além de receitas para resolução de problemas, tábuas com resultados de operações. Nos registros babilônicos nota-se que, ao apresentar resultados de divisões, havia a impossibilidade de se registrar com uma representação finita o resultado de uma operação onde o divisor não era um divisor natural de 60, resultando no que hoje conhecemos como dízimas periódicas. Nos papiros egípcios o uso das frações corrigia essa impossibilidade sem recorrer a aproximações, mas deflagrava a primeira inconsistência na definição de número como objeto de contagem.

O termo "dízima periódica" utilizado aqui é claramente anacrônico e pertence exclusivamente ao sistema posicional do qual somos herdeiros. Ainda assim, seu uso é justificável para explicitar o que vem a seguir. Nosso sistema decimal posicional é decorrente da contagem. As características ordinais e cardinais dos números naturais que originaram a sucessão e as quatro operações básicas demandaram também um método de organização dos símbolos que permitisse levar essa sucessão ao infinito. Escolher uma base implica em estabelecer uma quantidade de unidades inteiras (dez, no nosso caso) para representar uma coleção satisfatória e então representar coleções de coleções de acordo com a posição (dez unidades para formar uma dezena, e assim por diante). Ao estender esse raciocínio para as partições percebe-se que nenhuma base é boa o suficiente.

Se quisermos dividir, por exemplo, um inteiro em três partes, não poderemos representar esse resultado utilizando divisões em potências de base 10. Por esse motivo, a fração $\frac{1}{3}$ passa a ser o número representante do resultado dessa divisão. Ocorre que ao dar às frações o status de número, faz-se necessário ampliar o conceito do que vem a ser número. Do ponto de vista da *complementaridade*, o que se está observando é que a definição de número vista até então por suas características *intensionais* não era suficiente para satisfazer seus aspectos *extensionais*, sendo necessário rever tal definição.

É preciso atentar para mais um detalhe que ajuda a esclarecer as similaridades e distinções entre as entidades que se acumulavam até aqui sob o conceito de número: embora as frações também possam ser ordenadas como nos números naturais (dadas duas frações distintas, sempre é possível saber qual é maior), não se pode confundir a ideia de ordenação com a ideia de consecutividade. Dados dois números naturais, é possível não só dizer qual dos dois é maior como também saber quantos "passos" é preciso dar partindo de um para chegar no outro, ou seja, é possível saber quantos outros elementos naturais existem entre quaisquer dois naturais dados. Já nas frações, embora exista também uma relação de ordem entre duas determinadas, não é possível definir o número de termos entre elas, uma vez que esse tipo de número não admite consecutividade. O que se esconde aqui é outra decorrência da ideia de infinito: o conceito de densidade, que será também pano de fundo para inúmeras questões futuras.

Ao tratar a divisão de um inteiro em tantas partes quanto se queira, os antigos calculistas invocaram de novo a recorrência e geraram um conceito de infinito ainda mais perturbador, por ser quase contraditório: o infinitamente pequeno. E é essa nova ideia de infinito que torna as frações ainda insuficientes para a resolução de todas as partições possíveis.

Tanto os egípcios quando os babilônicos apresentavam receitas para resolução de problemas que apresentavam resultados aproximados para medidas irracionais, reconhecendo a impossibilidade de encontrar com exatidão o comprimento da circunferência dado um diâmetro ou a medida do lado de um quadrado cuja área fosse um valor que, naquela base, não representava um quadrado perfeito.

Desse modo, pode-se supor que ambos os povos já lidavam com as limitações dos inteiros e de suas representações lineares em qualquer base para apresentar algumas medidas, racionais ou irracionais. Essas limitações deflagradas pelo uso de aproximações, entretanto, não representam necessariamente uma consciência do incomensurável. Afirmar que egípcios e mesopotâmicos possuíam uma aproximação para o π, por exemplo, seria anacrônico, uma vez que o comprimento da circunferência era aproximado a partir de uma receita que funcionava, mas que não abordava a ideia de uma razão constante entre o perímetro e o diâmetro do círculo (ROQUE, 2012, p.85).

Entretanto, embora a descoberta dos incomensuráveis e o pensamento matemático puramente abstrato sejam comumente atribuídos aos gregos, não se pode afirmar que tais ideias eram estéreis antes. Como veremos a seguir, a Grécia tem um papel fundamental não só na compreensão do número como também no pensamento matemático global, mas seria errôneo destituir dos povos antigos a capacidade de abstração. Roque (2012, p.90) enfatiza ainda que “é justamente por terem organizado suas práticas de modo sistemático, de forma a possibilitar sua transmissão, que se pode considerar que os mesopotâmicos e os egípcios criaram uma matemática, ou melhor, duas matemáticas”.

> As ferramentas, as técnicas e os métodos desenvolvidos por aqueles que fazem matemática podem corresponder a necessidades cotidianas ou inerentes às próprias práticas matemáticas. A separação entre a neutralidade das técnicas e a importância do contexto [...] é um dos traços que permeiam até hoje nossa visão da Matemática. Mas tal dicotomia é baseada em uma compreensão superficial do que seja um pensamento concreto ou abstrato, em que o concreto corresponde ao contexto externo, e o abstrato ao campo simbólico, interno à matemática. (ROQUE, 2012, p. 90)

É justamente esse conceito de que o abstrato deve ser separado da aplicação prática que caracteriza o pensamento grego. Essa percepção é condizente com o modelo de quem inventou o pensamento filosófico. Assim, embora não seja verdade que a matemática anterior à grega fosse desprovida de abstração, pode-se afirmar que o pensamento grego trouxe o caráter *a priori* para os estudos matemáticos, caráter esse que posteriormente ficou identificado com o abstrato, em contraposição ao epistemológico/concreto.

1.3 Números e grandezas para representar o universo

Dois dos nomes mais citados na matemática escolar vieram da Grécia: Tales (624 a.C – 548 a. C.), de Mileto e Pitágoras (580 a.C – 500 a.C.), de Samos, conterrâneos e contemporâneos. Uma diferença, entretanto, era crucial entre eles: enquanto Tales era um homem de negócios, Pitágoras era um profeta e místico. (BOYER, 1974, p. 34). A importância desse fato se dá por que decorre dessa diferença o tipo de abordagem que cada um dava aos seus estudos.

Atribui-se a Tales a resolução de uma série de problemas geométricos de ordem prática a partir de alguns preceitos comuns. Essa abordagem não seria diferente da egípcia não fosse o fato de o pensamento de Tales não ser retratado como regido por receitas, mas por princípios que serviam a receitas diferentes. Os feitos de Pitágoras, por sua vez, costumam ser relacionados a um tipo diferente de abstração, devido a sua crença na geometria e nos números figurados como formas de representar abstratamente todo o universo, tentando assim compreender a linguagem dos deuses impressa nas coisas observáveis.

Os registros históricos acerca de ambos são vagos e em sua maioria pertencem a uma época muito posterior a eles.

> Várias biografias de Pitágoras foram escritas na antiguidade, inclusive uma de Aristóteles, mas se perderam. Uma outra dificuldade para caracterizar claramente a figura de Pitágoras provém do fato de que a ordem que ele fundou era comunitária além de secreta [...]. É melhor, por isso, não falar da obra de Pitágoras, mas antes das contribuições dos pitagóricos. (BOYER, 1974, p. 36)

Embora os registros não nos permitam informar com precisão se tais matemáticos foram os criadores dos teoremas que levam seus nomes, sabe-se que o que se pretendia na escola pitagórica era uma busca por ganhar intimidade com cada número, entendendo sua forma e seus padrões, seu comportamento dentro do sistema numérico e só então supor o que isso poderia significar na vida cotidiana. Essa busca não vinha de uma visão abstrata do número como uma quantidade, mas de sua representação figurada, como os pontos na face de um dado. Viriam daí os primeiros estudos de padrões: pares e ímpares, números perfeitos, números triangulares, quadrados e pentagonais, a busca pelo padrão formado pelos números primos, a relação harmônica entre as frações e muitas outras características estudadas até hoje.

Não há também documentos que indiquem qual o legado da matemática egípcia para a grega, mas é possível identificar que o salto entre as receitas dadas nos antigos papiros e tabletes e os estudos que hoje conhecemos como teoremas de Tales e de Pitágoras está na associação do pensamento matemático ao caráter tipicamente grego da filosofia, onde o conhecimento buscava seu caráter epistemológico e as questões motivadoras de seu desenvolvimento provinham do próprio conhecimento e não mais das situações cotidianas.

Eis aqui um trecho em que os historiadores se dividem. A história comumente contada nos diz que os pitagóricos teriam elevado a abstração matemática a outro nível, já que os registros posteriores que os citam contam que suas descobertas na manipulação de figuras geométricas auxiliaram não só na resolução de diversos problemas como também em uma abordagem das questões matemáticas isenta de modelos de aplicação.

Esse relato tradicional leva à ideia de que eles estariam habituados a teoremas e demonstrações e teriam como deduzir a irracionalidade da diagonal de um quadrado de lado unitário a partir de seus conhecimentos sobre pares e ímpares.

> As circunstâncias que rodearam a primeira percepção da incomensurabilidade são tão incertas quanto a época da descoberta. Comumente se supõe que a percepção veio em conexão com a aplicação do teorema de Pitágoras aos triângulos isósceles. Aristóteles se refere a uma prova da incomensurabilidade da diagonal de um quadrado com seu lado, indicando que se baseava na distinção entre pares e ímpares (BOYER, 1974, pág. 10).

A filosofia da escola pitagórica entendia o número como linguagem universal e por isso concluía que deveria existir uma unidade a partir da qual fosse possível medir qualquer coisa. Decorre daí a ideia de que a descoberta ainda nessa época de segmentos incomensuráveis teria gerado um abalo nas crenças dos pitagóricos. Há lendas sobre esse período, que ficou conhecido como “crise dos incomensuráveis”, afirmando que a morte foi a sentença para quem demonstrou a incomensurabilidade de alguns segmentos, como era justamente o caso da proporção divina - ou razão áurea - presente no pentagrama que era símbolo da escola pitagórica.

Gonçalves e Possani (2009, p. 16) afirmam que “alguém que se disponha a estudar o episódio da descoberta dos incomensuráveis na Grécia Antiga encontrará em livros de história da matemática e de matemática duas visões contraditórias sobre o assunto”.

> A segunda versão da descoberta dos incomensuráveis é ainda hoje restrita quase que somente aos meios especializados da história antiga ou da história da matemática. Segundo ela, as fontes mais confiáveis para o estudo do assunto não trazem

> nenhuma evidência de uma crise, que não teria sido senão o resultado de uma leitura pouco rigorosa de fontes menos confiáveis. (GONÇALVES e POSSANI, 2009, p. 16)

Segundo essa outra versão, a incomensurabilidade não estava relacionada de forma alguma aos números irracionais. Para os pitagóricos, o estudo dos padrões numéricos era vinculado às figuras formadas pela organização das quantidades inteiras, como o padrão dos números quadrados e triangulares, centralizado em um tipo de aritmética de inteiros e sem relação com medidas de segmentos. Por outro lado, nos estudos geométricos, tratar dois segmentos como incomensuráveis pressupunha apenas a impossibilidade de medição de um sobre o outro, não havendo necessidade de relacionar cada segmento com um valor numérico racional ou irracional.

Para a geometria, encontrar um divisor comum a dois segmentos A e B era um processo de subtrair o menor (por exemplo, A) do maior (B), obtendo um resto que seria subtraído de A, obtendo dois novos segmentos que continuariam sendo subtraídos repetidas vezes até obter o divisor comum. Esse processo é idêntico ao algoritmo que Euclides expõe em seus *Elementos* para obtenção do divisor comum de dois inteiros. O que ocorre aqui é que, se os segmentos forem incomensuráveis, o procedimento não terá fim. Relacionar esse fato à descoberta dos irracionais seria certamente anacrônico.

> A possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis não teria representado, assim, nenhum tipo de escândalo ou crise nos fundamentos da matemática grega. Ao contrário, sua existência seria uma circunstância positiva, pois teria sido responsável pelo desenvolvimento de novas técnicas matemáticas para lidar com razões e proporções. (ROQUE, 2012, p. 122)

O pensamento geométrico já era conhecido antes de Tales e Pitágoras e foi amplamente desenvolvido depois deles. Entretanto, não temos como saber se os pitagóricos contribuíram para isso. A academia fundada por Platão de onde provém a filosofia tal qual a conhecemos hoje é posterior aos pitagóricos e parece ter sido a grande influenciadora do caráter teórico dado à matemática principalmente a partir dos livros de Euclides. Uma das grandes contribuições de Platão para a filosofia da matemática é a concepção de que os objetos matemáticos residem no mundo das ideias, de modo que quando desenhamos um quadrado, estamos vendo apenas uma representação do quadrado ideal.

Os estudos historiográficos mais recentes criticam essa tradição educacional difundida pelos neoplatônicos da antiguidade de que os pitagóricos teriam reformulado a matemática antes de Platão.

> ...a visão de que a matemática abstrata, que faz uso de demonstrações, foi uma invenção dos gregos, toma por base os Elementos de Euclides. Logo, seria anacrônico analisar o desenvolvimento da matemática antes de Euclides a partir de

> inferências lógicas. Não é certo que, nos primórdios da matemática grega, os argumentos respeitassem as pressuposições e derivassem suas conclusões a partir algum tipo de regra. (ROQUE, 2012, p. 99)

Desse modo, não parece certo atribuir aos pitagóricos o caráter lógico da matemática, mas é possível afirmar que mesmo antes de Euclides e seu método axiomático, a associação da matemática a um caráter religioso destacava o conhecimento matemático dos problemas cotidianos. Embora o estudo dos números na escola pitagórica fosse quase concreto (por tratá-los de forma figurada), esse tipo de estudo das relações que as quantidades estabeleciam entre si certamente abriu espaço para que os estudos posteriores trouxessem o número ao que é hoje.

Vale ressaltar que se passaram quase dois séculos do momento em que os gregos perceberam a incomensurabilidade até a publicação dos *Elementos* de Euclides. O trabalho de Euclides não foi apenas de reunir todo o conhecimento matemático da época, mas também de organizá-lo de forma estruturada, seguindo uma sequência lógica, agora sim respeitando o critério de abstração da Academia com o qual a matemática atual é identificada.

Outro ponto essencial que precisa ser notado no trabalho de Euclides é que ele é em sua maior parte geométrico, o que nos diz muito sobre a compreensão do número na época.

> A geometria grega da época não era aritmetizada, e essa proposta pode ser um reflexo do pensamento corrente, que Platão pretende expor e sistematizar, expandindo o universo da matemática para incluir nele o espaço abstrato. O que os números não permitem conhecer – o tamanho da linha sobre a qual construir um quadrado de área dupla – pode ser explicado por figuras: mostrar a linha [...]. Servimo-nos desse exemplo para enfatizar que uma das consequências mais importantes da descoberta dos incomensuráveis é a separação do universo das grandezas do universo dos números. Se não sabemos calcular, resta-nos mostrar. (ROQUE, 2012, p.147)

Apenas três dos treze livros que compõem os *Elementos* falam exclusivamente sobre números: VII, VIII e IX. Neles, Euclides trata da questão numérica da mesma forma que trata a geometria em seus outros livros: partindo de definições e axiomas e seguindo argumentos lógicos para apresentar suas conclusões.

A definição de número dada por ele era baseada na multiplicidade e divisibilidade, consonante com a visão de Aristóteles quando, sendo discípulo de Platão, escreveu a *Metafísica*. Para eles a unidade não era um número, mas uma entidade a partir da qual os números se originavam, sendo todos múltiplos da unidade. Também as frações não exatas não eram números, mas razões entre números. Assim, a divisibilidade compreendia que uma comparação entre 6 e 2, por exemplo, explicitava que 2 era "parte" do 6, mas a comparação entre 5 e 2 não concluía nada. Do mesmo modo, a razão entre 4 e 6 permitia concluir que 2 era “parte” comum de 4 e 6. Quando dois números não possuíam “parte” comum, eram ditos primos entre si.

Esse ponto de vista é muito semelhante à visão pitagórica de número. Desse modo, fica explícito que a matemática mais abstrata, distanciada dos problemas cotidianos, tratava os números como hoje trata a aritmética dos inteiros. As outras relações entre quantidades que resultavam em razões não inteiras ou em resultados irracionais eram estudadas geometricamente, mas não faziam parte da compreensão do conceito de número. A própria ideia de razão era difusa, não havendo uma definição para, por exemplo, a razão 5:2, já que esse tipo de proporção só seria tratado geometricamente e, para isso, precisaria ser comparada a outras duas razões, como 2:1 e 5:1.

Essa distinção gerava uma cisão entre o que Aristóteles chamava de pluralidade (números inteiros) e o que chamava de magnitude (racionais não inteiros e irracionais). Assim, do ponto de vista da *complementaridade*, pode-se dizer que tudo que era considerado pluralidade a partir de suas características *intensionais* podia ser contraposto por características *extensionais*. Essa *complementaridade* era garantida por um subterfúgio lógico: os modelos que gerassem resultados diferentes da definição dada para número, em vez de fomentarem um questionamento dessa definição, eram excluídos do grupo de modelos relacionados ao conceito. Em outras palavras, esse subterfúgio é semelhante ao que ocorre na parábola que conta que um matemático, ao encontrar um cisne negro conhecendo a definição de que todos os cisnes são brancos, afirma: “Isso não é um cisne”.

Como veremos a seguir, esse subterfúgio não poderia ser sustentado indefinidamente. Séculos depois a álgebra geométrica e a geometria analítica uniriam os diferentes modelos de aplicação numérica, tornando impossível seguir seus estudos sem uma redefinição do conceito de número. Muito antes disso, entretanto, algumas questões filosóficas já trariam argumentos para esse debate.

O livro V de Euclides era exclusivamente dedicado ao estudo de razões e proporções e sumariamente creditado a Eudoxo, discípulo de Platão. Traduzindo para a linguagem atual, a teoria das proporções de Eudoxo afirmava que quatro grandezas de mesma natureza (a, b, c e d) possuíam a mesma razão de proporção se, para todo m e n inteiros positivos, temos que:

- $ma < nb$ implica em $mc < nd$
- $ma > nb$ implica em $mc > nd$
- $ma = nb$ implica em $mc = nd$

Observando essa definição de proporção com olhos atentos, pode-se perceber que, sendo $b = d$, então temos necessariamente $a = c$. Em outras palavras, podemos afirmar não só que a razão a:b é igual à razão c:d como também que dadas duas razões, podemos saber qual é maior. Assim, a teoria das proporções de Eudoxo explicita exatamente a relação de ordem presente nos números racionais que serviria futuramente de base para a definição dos reais dada por Dedekind[5].

Essa comparação entre duas razões para saber qual é maior poderia ser interpretada como uma comparação entre o número de vezes que *b* cabe em *a* e o número de vezes que *d* cabe em *c*, mas esse tipo de interpretação fugia do modelo geométrico não algébrico da época, que mantinha as frações fora do escopo numérico. Independente disso, essa relação de ordem aproximava as frações do conceito de número, já que poderiam não só representar quantidades (apresentando uma similaridade com o número cardinal) como também apresentavam ordenação.

Ainda assim, essa separação entre números e magnitudes (ou grandezas) não resolvia todas as questões filosóficas da época:

> Os Pitagóricos tinham postulado que o número em toda sua pluralidade era a matéria básica dos fenômenos; esse atomismo numérico, lindamente ilustrado na geometria dos números figurativos, tinha sido atacado pelos seguidores de Parmênides [...]. Dentre os discípulos de Parmênides o mais conhecido foi Zeno que enunciou argumentos para provar a inconsistência dos conceitos de multiplicidade e divisibilidade. O método adotado por Zeno era dialético, antecipando Sócrates nesse modo indireto de argumento: partindo das premissas de seus oponentes, ele as reduzia ao absurdo. (BOYER, 1974, p. 55)

Segundo Parmênides, o mundo seria imutável, o espaço indivisível e o tempo permanente. Os paradoxos de Zeno buscavam mostrar que as coisas não poderiam ser divisíveis e muito menos ser formadas pela pluralidade de uma unidade indivisível. Ao supor a divisibilidade do tempo em instantes, Zeno concluía por exemplo que uma flecha lançada estaria em repouso em cada instante e, portanto, não poderia atingir seu alvo. Ao supor a divisibilidade do espaço, Zeno demonstrava que essa divisão gerava infinitos pedaços e, supondo que o tempo para percorrê-los seria também infinito, concluía que era impossível sair de um lugar e chegar a outro.

Os paradoxos de Zeno demonstravam por absurdo a divisibilidade do tempo e do espaço. O conhecimento científico de hoje resolve os dois paradoxos citados acima respectivamente a partir dos conceitos de velocidade instantânea e limite da soma das séries harmônicas. Assim, embora tais paradoxos não tivessem naquela época relação alguma com o

---

[5] Essa afirmação pode ser encontrada em LOPES (2006, p.2), onde podem ser vistas outras construções dos números reais. Para esse trabalho estudaremos apenas as construções de Cantor, Dedekind e Conway.

conceito de limite, os questionamentos levantados por eles foram os mesmos que motivaram os estudos relacionados ao limite e à divisão do contínuo.

Alguns historiadores defendem a tese de que a teoria das proporções de Eudoxo teria sido gerada como um estudo que buscava refutar as ideias de Parmênides e seus discípulos. A apresentação do tempo como linear e ao mesmo tempo instantâneo é uma ideia facilmente comparável à definição Euclidiana de reta como linha contínua, mas que pode ser dividida em pontos adimensionais. Ao relacionar o contínuo do tempo com o contínuo da reta e o instante adimensional com o ponto, Zeno concluíra que o movimento era algo impossível da mesma forma que Euclides concluíra que medidas de segmentos não poderiam ser representadas por números.

O legado desses questionamentos perdurou na discussão dos conceitos de continuidade e divisibilidade, nos conceitos de grandezas comensuráveis ou incomensuráveis e nos conceitos de números racionais e irracionais.

> Os pitagóricos tinham assumido que o espaço e o tempo podem ser pensados como constituídos de pontos e instantes; mas o espaço e o tempo têm também uma propriedade mais fácil de intuir do que de definir, conhecida como continuidade. Os elementos terminais, que constituíam uma pluralidade, de um lado eram supostos como possuindo as características da unidade geométrica – o ponto – e de outro como possuindo certas características de unidades numéricas. (BOYER, 1974, p. 55)

A dicotomia causada pela divisibilidade e incomensurabilidade, particularmente em se tratando do contínuo, estavam longe de ser resolvidas axiomaticamente. O que ocorreu em seguida foi o desenvolvimento de uma série de métodos matemáticos, muitos provenientes dos *Elementos*, mas que ampliavam o incômodo causado pela ausência de um número que representasse uma quantidade racional não inteira ou irracional, principalmente ao associar medidas de segmentos a valores numéricos.

O desenvolvimento de técnicas de resolução de problemas geométricos como os que seriam propostos por Arquimedes a seguir, carecia de interpretações aritméticas ou algébricas. A filosofia e a matemática teórica eram arte superior, ao passo que os cálculos da vida cotidiana compunham um conhecimento menor, das classes mais baixas. Entretanto, mesmo buscando se desvencilhar da aplicabilidade de suas descobertas à vida prática, o pensamento grego axiomático era campo fértil para contradições.

O chamado “método da exaustão”, que se baseava em inscrever e circunscrever polígonos em figuras curvas, aumentando o número de lados poligonais tanto quanto se queira até obter a linha limite, foi usado por Arquimedes para encontrar a área do círculo a partir de seu diâmetro (o que hoje entende-se como uma busca para aproximar o valor de π), estabelecendo assim a primeira aplicação geométrica do que hoje conhecemos como o conceito matemático de limite.

Ao demonstrar que algo que aumenta infinitamente (por exemplo o número de vértices de um polígono) pode ainda assim ser limitado (e tender continuamente a uma forma circular), Arquimedes tornara as ideias de infinito e de continuidade, mesmo abstratas, aplicáveis.

A Matemática havia chegado a um ponto do caminho repleto de bifurcações. Euclides, ao organizar todo o conhecimento da época em seus *Elementos*, reescrevera a geometria de forma axiomática, tornando suas técnicas irrefutáveis. A álgebra assumia então um papel de "álgebra geométrica", algo anterior à geometria algébrica atual e na qual os problemas que hoje seriam resolvidos por equações eram tratados através de construções mecânicas. A teoria dos números se mantinha estudando os padrões dos inteiros e de seus múltiplos e divisores, de modo que quaisquer outras entidades matemáticas, mesmo possuindo características comuns ao conceito de número, eram descaracterizadas se não pudessem representar quantidades no sentido mais concreto da palavra. Havia ainda a Astronomia, a Economia, a Mecânica, os estudos sobre movimento e sobre a trigonometria, além de inúmeras aplicações da matemática cotidiana, que se desenvolvia cada vez mais sem preocupações com axiomas e postulados e independente das questões filosóficas que decorriam de suas descobertas.

1.4 Números que não representam quantidades

A segunda metade do período da hegemonia grega foi fortemente marcado por intervenções militares. O intervalo de tempo conhecido como helenístico presenciou as guerras do Peloponeso, a expansão do império Macedônico e a ascensão de Alexandre Magno, que expandiu seus domínios até as proximidades da Índia, tendo conquistado o Egito e a Pérsia. A cidade de Alexandria se tornaria então o epicentro do conhecimento da época e sede de uma das mais importantes bibliotecas da história. O império Alexandrino fora responsável não só pela expansão da cultura grega como também pelo sincretismo das outras culturas que se desenvolviam ao redor de seu império.

Um dos nomes mais importantes da história dos números desse período veio dessa cidade. Diofanto é tido como um dos pais da Álgebra, principalmente por representar com abreviações os valores das grandezas que desejava desvendar, transformando a álgebra retórica das receitas encontradas nas tábuas e papiros antigos em uma álgebra sincopada (ROQUE, 2012, pp. 222 - 223).

A álgebra de Diofanto não pode ser ainda considerada simbólica, pois não era capaz de representar por símbolos tanto as incógnitas quanto os parâmetros, as variáveis e as operações. Entretanto, ele foi o primeiro matemático a reconhecer as frações como números e também a operar com números negativos, mesmo não os reconhecendo como quantidades reais. Ao tratar pelas mesmas propriedades tanto os números quanto as quantidades que se desejava descobrir, esse desenvolvimento primeiro da Álgebra trazia questionamentos sobre a interpretação dos resultados não naturais.

> A origem da regra dos sinais é atribuída geralmente a Diofantes[6] de Alexandria (fim do século III d.C). Esse autor não faz qualquer referência aos números negativos. No entanto, no início do Livro I da sua "Aritmética" (Diofantes), aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, ele escreve: "O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta". (GLAESER, 1985, p.10)

Desde Euclides havia a concepção de que magnitude e pluralidade eram conceitos distintos, absolutamente disjuntos, e que caracterizavam essencialmente a Geometria e a Aritmética. Seria papel da Álgebra criar uma ponte entre essas ciências, principalmente ao tratar a Geometria de forma métrica e a Aritmética de forma analítica. Tais tratamentos não tinham o caráter filosófico desejável para atingir o rigor matemático de Euclides, mas também é verdade que muita geometria havia sido e ainda era feita sem o rigor da régua e do compasso (inclusive por Arquimedes) e que o desenvolvimento da mecânica fomentado em grande parte pelas atividades militares havia sido campo fértil para o estudo de muitas aplicações geométricas que não figuravam nos *Elementos.* (GOMEZ, 1999, p. 91)

Assim, mesmo não sendo um estudo filosófico, principalmente por estar relacionado a questões concretas, o desenvolvimento da álgebra tornava inegável o fato de que existiam outras entidades no escopo matemático que se comportavam exatamente como os números: eram operáveis, suas operações mantinham as propriedades daquelas efetuadas entre naturais, eram ordenáveis e apresentavam um tipo de cardinalidade, já que serviam para referenciar quantidades.

Nesse ponto do estudo faz-se necessário uma pausa que nos permita analisar de forma crítica os dados históricos desse período. As designações mais atuais marcam o fim do período helenístico a partir do início do Império Romano, creditando a isso uma mudança no dogma do pensamento filosófico que durou até a queda de Constantinopla, marcando assim o fim da Idade Antiga (ou Antiguidade) e o início da Idade Média. Essa nova era, não raro

---

[6] Glaeser utiliza o nome "Diofantes" como variante para "Diofanto". Nesse texto seguiremos o padrão de Dantzig, mantendo a grafia "Diofanto".

denominada de Idade das Trevas, seria marcada por uma ausência total de pensamento científico que teria sido encerrada pelo Renascimento.

Sobre a Idade Média, Roque (2012, p.25) ressalta que “esse período foi visto como uma época estacionária, a ‘idade das trevas’, marcada pelo dogmatismo religioso, pelo misticismo e pelo abandono do raciocínio físico”. A autora nos lembra que essa conceituação foi dada *a posteriori* e que por isso sugere uma visão depreciativa, proveniente justamente daqueles que, vivendo no renascimento, se consideravam na Idade da Razão.

O trecho abaixo serve de exemplo do ponto de vista a partir do qual tradicionalmente esse período é tratado:

> O pensamento grego estava apenas emergindo de um estado plástico quando se instalou o período de decadência. Nesses dias decadentes da cultura helênica duas pessoas destacaram-se. Ambos viveram no séc. III da nossa era, ambos nasceram em Alexandria, ambos espalharam as sementes de novas teorias [...]. Os “porismas” de Papo anteciparam a Geometria Projetiva, e os problemas de Diofanto prepararam o terreno para a moderna teoria das equações [...]. Mas Diofanto foi o último lampejo de uma vela que se apagava. Sobre o mundo ocidental estendeu-se a longa noite da Idade Média. As sementes da cultura helênica estavam destinadas a germinar em solo estrangeiro. (DANTZIG, 1970, p. 81)

Esse tratamento histórico retroativo tradicional pouco reconhece como essencial o desenvolvimento algébrico que ocorreu profundamente no período helenístico e em parte da idade média, vindo não só de Diofanto como também das culturas externas à Europa. O solo estrangeiro citado por Dantzig se refere aos povos árabes, chineses e indianos, cujo desenvolvimento científico traria conceitos revolucionários que seriam de suma importância para a matemática Europeia futura. Entretanto, retomando os dogmas filosóficos gregos, é necessário notar que tais ideias eram apresentadas por meio da resolução de problemas cotidianos, sendo assim caracterizadas - de acordo com o pragmatismo grego - como atividade intelectual menor.

Sendo a história contada sempre pelas classes dominantes e tendo a sociedade renascentista a intenção de se distanciar do período anterior, considerado bárbaro, é compreensível que o seu legado histórico busque associar a Idade da Razão ao pensamento filosófico rigoroso de Platão, fundado na busca pela verdade. Assim, justifica-se que o movimento de resgate da cultura grega que sugeria o protagonismo contínuo da Europa no desenvolvimento científico propusesse, em prol do conhecimento filosófico puro, uma negligência de tudo que se desenvolvera de forma prática. Essa atitude era consonante com a exaltação do antigo pensamento grego (presente na matemática Euclidiana) e do atual renascimento europeu da razão se sobrepujando às ciências dos outros povos, de característica predominantemente empírica. (ROQUE, 2012, pp. 20 – 23)

Vale ressaltar aqui que o pano de fundo desse debate nos remete novamente às discussões acerca do tipo de conhecimento que a matemática representa, se empírico ou *a priori*. O que esse período nos mostra é que o movimento reflexivo entre a teoria e a prática aparecendo como corresponsáveis no desenvolvimento de novas abordagens das matemáticas indica a importância da *complementaridade* na compreensão de tais saberes. Roque (2012, p. 214) nos lembra que “o mais importante na história da matemática árabe é o fato de ela ser exemplar para mostrar que a separação entre teoria e prática não é produtiva quando se deseja compreender as transformações ocorridas na matemática medieval”. Assim, a matemática hindu-arábica serve como exemplo do quanto os aspectos *extensionais* dos conceitos desenvolvidos funcionam como processo de elaboração e reelaboração contínua dos aspectos *intensionais*.

A matemática desenvolvida no oriente nesse período era composta por estudos aplicados (como os astronômicos, por exemplo) onde se misturavam elementos da matemática grega com técnicas próprias da matemática já desenvolvida naquela região, o que incluía o estudo do calendário e o sistema posicional decimal. Desses tratados, o mais antigo que chegou até nós foi escrito por Aryabhata. Era todo escrito em versos e de difícil compreensão, tendo sido amplamente comentado e explicado por um autor de nome Bhaskara I[7] em 629 d.C. Na mesma época, outro tratado famoso seria escrito por Brahmagupta, tendo resultados significativos no conceito de número.

> O aspecto mais inovador [do tratado de Aryabhata] é a sistematização das técnicas de cálculo, que constituem uma prática chamada “ganita”, concebida como o estudo dos métodos de cálculo em geral [...]. Um tratado astronômico contemporâneo do comentário de Bhaskara I foi escrito pelo astrônomo Brahmagupta, em 628. Um dos capítulos matemáticos de seu tratado é dedicado completamente à “ganita”. [...] Contudo, havia também um capítulo dedicado a um outro tipo de matemática que compreendia análises envolvendo o zero, os negativos e os positivos, as quantidades desconhecidas...” (ROQUE, 2012, p. 239).

Roque (2012, p. 247), em sua análise crítica dos relatos históricos tradicionais, ressalta que “entre os séculos VIII e XII a cidade de Bagdá era um dos maiores centros científicos do mundo, e seus matemáticos tinham conhecimento tanto das obras gregas quanto das orientais”. O principal nome da matemática dessa época foi Al-Khwarizmi, autor do *Tratado sobre o cálculo da al-jabr e al-muqabala* que consistia em um estudo sistemático da resolução de equações lineares e quadráticas.

[7] Esse Bhaskara é frequentemente chamado de Bhaskara I, para diferenciá-lo do outro Bhaskara, mais famoso, que viveu no século XII e a quem é associado, no Brasil, o método de resolução das equações quadráticas. (ROQUE, 2012, p. 238).

Assim, a maior parte do desenvolvimento algébrico ocorrido nos primeiros séculos da nossa era veio dos árabes, de onde provêm também as palavras álgebra, algarismo e algoritmo, adaptadas do livro de Al-Khwarizmi. No campo da teoria dos números, os avanços gerados pela nova álgebra foram incontáveis.

O sistema numérico hindu continha um símbolo para representar o nada, que hoje chamamos de zero e que é a peça chave do sistema posicional, a partir do qual era possível contar até infinito com uma quantidade finita de algarismos, tornando o infindável um pouco mais acessível. Os árabes já haviam estudado o conceito do zero e o desenvolvimento dos números inteiros negativos, simétricos aos naturais, com a função de representar dívidas e faltas. Sabe-se também que os chineses utilizavam bastões de cores diferentes para representar quantidades presentes ou faltantes.

Embora os antigos babilônicos utilizassem um símbolo para representar casas vazias na numeração, a noção do zero como um número só surge quando ele se relaciona com a operação da subtração, como 1 – 1 = 0. Determinar a origem do zero é um trabalho tão complexo quanto contar a história dos números, pois seria necessário compreender os diversos contextos aos quais ele se relaciona. (ROQUE, 2012, p. 56).

> Durante séculos os matemáticos se impressionaram com o zero absoluto, abaixo do qual nada se poderia conceber. Isto os impediu de manejar com facilidade o zero origem, marcado arbitrariamente sobre um eixo orientado. Muitos são os autores a afirmar que "nada poderia ser mais imóvel que a imobilidade". Para descobrir, a partir daí, o conceito de velocidade negativa, foi necessária toda uma construção intelectual, que só seria verdadeiramente possível muito depois. (GLAESER, 1985, p. 6)

O nascimento do zero como representante da quantidade nula é um marco na história dos números, não só por permitir uma compreensão mais específica da relação de ordem entre os positivos e negativos como também por colocar algo anterior à unidade no escopo numérico. Lembrando que a unidade grega não era vista como um número, mas como uma entidade a partir da qual as pluralidades se constroem, é possível perceber que a concepção do zero e dos opostos aos naturais permitiria a inclusão não só dos negativos como também das quantidades entre zero e um no estatuto de número. Essa nova concepção abriria espaço simultaneamente para construção dos dois primeiros conjuntos que se estendem para além dos naturais: os inteiros e os racionais.

> A introdução conceitual dos números relativos foi um processo surpreendentemente lento. Durou mais de 1500 anos, da época de Diofantes aos nossos dias! Durante todo esse tempo, os matemáticos trabalharam com números relativos, tendo deles apenas uma compreensão parcial, com espantosas lacunas. (GLAESER, 1985, p.4)

Foi próximo à época do Renascimento que a civilização Europeia retomou seu desenvolvimento científico, tendo tido contato com grande parte dos conhecimentos desenvolvidos em outras terras a partir dos fugitivos de Constantinopla, das cruzadas, e do intercâmbio cultural de alguns matemáticos expoentes. Um dos livros mais conhecidos do período pré-renascentista foi o *Liber Abaci*, escrito por Leonardo Fibonacci em 1202. Foi nesse período que surgiram as primeiras escolas como as conhecemos hoje e os livros de cálculo (como o *Liber Abaci*, livro do ábaco) consagraram pela Europa o sistema numérico indo-arábico que utilizamos.

As primeiras universidades (Paris, Oxford e Bolonha) se originariam ao longo desse século XII, contendo em seus currículos a geometria Euclidiana, a filosofia Platônica e a mecânica Aristotélica, além das técnicas algébricas de cálculo. Entre os séculos XII e XIV esse conhecimento foi amplamente difundido abrindo espaço para que, como ocorre naturalmente no mundo acadêmico, novas teorias começassem a surgir.

Com a Idade da Razão, as ciências voltariam a crescer na Europa de forma significativa, impulsionadas por uma busca constante de novas tecnologias e uma série de questionamentos acerca dos conhecimentos tradicionais envolvendo o movimento, a Mecânica, a Astronomia e a forma do sistema solar. A nova concepção numérica e a difusão do conhecimento a partir das escolas e das universidades deixavam claro que a concepção antiga de quantidade e magnitude como objetos distintos estava chegando ao fim.

1.5 Novas definições acerca do conceito de número

Dentre as novas teorias geradas nas universidades, a mais importante para o estudo sobre os números viria dos italianos Girolamo Cardano (1501 – 1576), Niccolo Fontana, conhecido como Tartaglia, (1500 – 1557) e Lodovico Ferrari (1522 – 1565) cujos trabalhos apresentaram pela primeira vez cálculos utilizando raízes quadradas de números negativos, utilizados na formulação de um método para resolução de equações do terceiro grau. Seu conterrâneo Rafael Bombelli (1526 – 1572) foi quem conseguiu utilizar o método e realmente operar com essas raízes, dando origem ao que seriam os números imaginários. Foi também Bombelli quem primeiro descreveu uma medida incomensurável como uma soma de frações contínuas, exemplificado a seguir:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

A partir do trabalho de Bombelli, que também reuniu os métodos de resolução dos diferentes tipos de equações quadráticas em uma única fórmula, teria início a álgebra simbólica, marcada pelo livro *Introdução à arte analítica* do francês François Viète (1540 – 1605). O pensamento matemático da época podia então ser visto como uma releitura da matemática grega, baseado no Humanismo Aristotélico[8], agora amplamente desenvolvido, englobando os mais diversos campos.

Essa retomada do pensamento grego se dava de forma contraditória, partindo de um campo geométrico bem definido por Euclides e contrastando com o desenvolvimento de uma série de técnicas de cálculo sem qualquer preocupação com um método axiomático.

Um sinal claro do rompimento com os axiomas aritméticos presentes em Euclides é a definição dada por Simon Stevin (1540 – 1620), que afirma que “número é aquilo pelo qual se explica a quantidade de alguma coisa". Stevin afirma ainda que não existe essa distinção entre os racionais, os irracionais, os inteiros ou quaisquer outros, havendo entre os números uma tal excelência e coerência que com eles era possível medir qualquer coisa. (GLAESER, 1985, p. 12)

> Ele não se preocupa em provar que os números decimais "rompidos" (isto é, fracionários), irracionais, etc., intervêm efetivamente como símbolos de medida. Ele chega a refutar a tese de Euclides, para o qual a unidade não seria um número. Todavia o número negativo isolado não está em sua lista. Ele nada afirma sobre seu direito de existir como símbolo de quantidade. Que significa este silêncio? (GLAESER, 1985, p. 13)

A definição de número dada por Stevin denota que a notação decimal unia a unidade às suas partes, comensuráveis ou não com ela, por mais contraditório que isso possa parecer. A nova representação numérica derrubava a resistência grega em separar quantidades de grandezas. Entretanto, os avanços acadêmicos - principalmente algébricos - estavam à frente dessas novas definições, que por sua vez negligenciavam os negativos e sequer citavam os complexos.

A compreensão de número como forma de contar elementos de um conjunto não se aplicava aos números negativos e tão pouco às frações, embora essas também fossem chamadas de números. A ideia de número como medida de um segmento sobre a unidade não se aplicava aos incomensuráveis. Os números imaginários, por sua vez, tinham uma aplicação puramente algébrica, sem qualquer relação com a geometria ou com qualquer outra ideia minimamente concreta. Ainda assim o modelo de pensamento grego (abstrato, axiomático) era premissa para a álgebra simbólica (que geraria a análise) e, posteriormente, para o estudo dos infinitesimais (que geraria o cálculo), ampliando a demanda por novas definições.

---

[8] A corrente filosófica aristotélica e sua concepção de número serão retomadas posteriormente.

Dantzig (1970, p. 84) explica que “o ponto crucial na história da Álgebra foi um ensaio feito no final do século XVI por um Francês, Viète, que escreveu sob o nome latino de Franciscus Vieta”. A proposta de Viète incluía basicamente o uso de vogais para representar magnitudes desconhecidas e consoantes para magnitudes dadas. Embora existam debates sobre a paternidade da Álgebra (se Diofanto, Al-Khwarizmi, Cardano ou Viète), vale ressaltar que esse uso simbólico permitiu que essa área se desvencilhasse das ambiguidades típicas da fala humana e se aproximasse de uma linguagem mais linear, se encaminhando para uma disciplina mais abstrata e generalizadora.

> Existe uma clara analogia entre a história da Álgebra e a da Aritmética. Nesta, como vimos, a humanidade lutou por milhares de anos com uma numeração inadequada por falta de símbolos para o nada. Na outra, a ausência de uma notação geral reduziu a Álgebra a uma coleção de regras aleatórias para a solução de equações numéricas. Assim como a descoberta do zero criou a aritmética de hoje, a notação literal introduziu uma nova era na história da Álgebra. (DANTZIG, 1970, p. 85)

Sabe-se que tanto o zero quanto o uso de notações gerais para quantidades desconhecidas têm sua origem nos primórdios matemáticos. O que Dantzig coloca aqui são a formalização e expansão do uso desse conteúdo academicamente, permitindo uma revolução científica consonante com o que hoje consideramos como ciência e que seria formalizada por Decartes alguns anos depois.

Essa revolução na linguagem algébrica alterava o tipo de raciocínio matemático, uma vez que para operar com quantidades desconhecidas deixa-se de lado o pensamento geométrico sintético de construção da solução dos problemas para admitir-se um pensamento analítico de observação do que ocorre com a solução caso ela exista.

Essa alteração permitiu muitos outros avanços: o uso da trigonometria independente do triângulo retângulo gerou as fórmulas de prostaférese, também publicadas por Viète e amplamente utilizadas pela astronomia, ciência em grande ascensão. Na Inglaterra, John Napier (1550 – 1617) desenvolvia outro método de transformação de produtos em somas: os logaritmos. Uma série de livros dessa época se apresentam recheados de tabelas com números representando logaritmos, senos, cossenos e tangentes com aproximações de muitas casas decimais sem haver um questionamento acerca da possibilidade de esses números apresentarem ou não uma representação finita. Os matemáticos lutavam por aproximações pertinentes, inclusive para o π, mas não sabiam afirmar se essa busca atingiria um valor exato ou se esse valor, escrito em notação decimal ou na forma de frações contínuas, se estenderia até o infinito.

O problema das infinidades havia sido resgatado dos debates gregos, mas era discutido aqui com um rigor bastante distante do processo axiomático. Dantzig (1970, p. 120) ressalta que “os métodos improvisados, inaugurados por Kepler e Cavalieri, tiveram continuação, apenas com um pretenso refinamento de Newton e Leibiniz, de Waliis, o inventor do símbolo da infinidade, dos quatro Bernoulli, de Euler, de d’Alembert”.

Os estudos astronômicos, mecânicos e físicos propunham utilidades para o infinito, mas passavam longe do debate filosófico e da busca por definições consistentes:

> Eles tratavam com os infinitésimos como sendo fixos ou variáveis, segundo as exigências do problema; manipulavam aleatoriamente as sequências infinitas, faziam malabarismos com os limites, tratavam séries divergentes como se estas obedecessem a todas as regras de convergência. Definiam seus termos vagamente e usavam seus métodos livremente, e a lógica de seus argumentos era construída de modo a adaptar-se aos ditames de sua intuição. (DANTZIG, 1970, p.120)

A inauguração dos tais métodos improvisados citada anteriormente se refere ao *Astronomia Nova*, publicado em 1609 por Johannes Kepler onde formula, de forma intuitiva, a ideia de que o eixo com extremos entre um planeta e o sol varre áreas iguais em intervalos de tempos iguais. Essa afirmação, embora aparentemente simples, remonta aos antigos paradoxos do movimento e à divisão do contínuo em partes adimensionais que podem ser somadas. Intuitivamente soa como dizer que a soma de muitos nadas resulta em alguma coisa. Fazendo o caminho inverso, o conceito do valor infinitesimal viria a tratar da divisão de uma grandeza dimensionada em infinitas grandezas que não tem dimensão alguma.

Foi isso que fez Bonaventura Cavalieri, quando publicou em 1635 sua *Nova geometria dos indivisíveis contínuos*, dando força ao conceito de uma partícula infinitesimal que pode ser tão pequena quanto se queira. O princípio de Cavalieri afirma que os volumes de dois sólidos estão a uma determinada razão se as áreas das secções paralelas à base feitas a uma mesma altura nos dois sólidos mantêm sempre essa mesma razão. As secções sucessivas citadas aqui conectam o princípio desenvolvido por Cavalieri à questão da partícula infinitesimal. O conceito de infinitésimo começava a relacionar a álgebra e a aritmética com a geometria.

Em 1629, Pierre de Fermat (1601 – 1665) já havia escrito um tratado chamado *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos*, relacionando equações e lugares geométricos. Em 1637 René Descartes (1596 – 1650) publicou seu *Discurso sobre o método*, onde um dos apêndices se chamava *A geometria* e cuja primeira seção chamava-se *Como os cálculos de aritmética se relacionam com as operações de geometria*. Essas publicações dariam início ao que hoje chamamos de Geometria Analítica, relacionando de forma bilateral expressões algébricas e construções geométricas.

Embora na Geometria pudesse não ser um grande problema o fato de o lado e a diagonal de um quadrado representarem segmentos incomensuráveis (já que tal característica não interfere na construção da figura), isso pode se tornar mais complicado quando se tenta descrever o problema de forma analítica, e ainda mais complicado quando se deseja representar essas medidas como coordenadas no plano.

O *Discurso sobre o método* propunha, além disso, uma série de questões filosóficas acerca do que poderia ou não ser considerado um conhecimento novo. Esse livro se tornaria, com o tempo, o modelo de pensamento científico, colocando a lógica dedutiva que era a base do pensamento matemático como essencial na busca pela verdade.

> Para [o matemático] existe uma analogia chocante entre [o conjunto dos racionais] e o conjunto de pontos numa linha reta. Aqui também o conjunto estende-se indefinidamente em ambas as direções. Aqui também ele pode dizer qual de dois elementos está à direita. Aqui também ele encontra a propriedade da compacidade[9]; pois entre dois pontos quaisquer ele pode introduzir um terceiro, não importando a proximidade entre eles. (DANTZIG, 1970, p.101)

Desse modo, quando cada relação e cada operação envolvendo duas variáveis passam a ser representadas por uma figura geométrica e cada ponto dessa figura passa a ser expresso por um par de números, os significados do que é número e de quais números serão usados para representar a incomensurabilidade, bem como os significados das relações intrínsecas ao conceito de número (como a divisibilidade, multiplicidade, continuidade ou completude, densidade, incomensurabilidade, senso de infinitude, etc.) passam a ser questões problemáticas que demandam definições atentas.

Demoraria um século para que essas definições começassem a surgir e antes delas serem formuladas, ainda com o pensamento cartesiano sendo disseminado entre as ciências, outra ideia não tão definida de quantidade se faria presente. O domínio da religião perdia suas forças e teorias cristãs como o geocentrismo ruíam em 1687, quando Isaac Newton publicou o *Philosophiae naturalis principia mathematica*, onde descreve as leis para o movimento dos corpos que são estudadas até hoje como as três leis de Newton. A base que fundamentava sua teoria era em grande parte sintética e construída geometricamente, mas os argumentos utilizados provinham do que Newton havia chamado de análise infinita e que era o que hoje conhecemos como cálculo infinitesimal.

Newton já havia enunciado seu teorema binomial há mais de dez anos, a partir do qual seria possível trabalhar com somas de séries infinitas construídas com expoentes irracionais. Antes disso acontecer, entretanto, a paternidade do cálculo seria discutida. O alemão Gottfried Wilhem Leibniz desenvolveria ideia semelhante e praticamente simultânea, publicando em

---

[9] Em uma definição superficial, pode-se dizer que um conjunto é compacto sobre alguma propriedade quando, aplicada essa propriedade, ela pode também ser aplicada para todos os seus subconjuntos. Entretanto, a ideia evocada aqui por Dantzig se relaciona principalmente com o que entendemos por conjunto denso.

1684 *Um novo método para máximos e mínimos, e também para tangentes, que não é obstruído por quantidades irracionais*, demonstrando assim seu domínio sobre os conceitos base do cálculo: o contínuo infinitesimal (que não é obstruído por quantidades irracionais), a ideia de limite (obtida pela redução sistemática dos máximos e ampliação dos mínimos) e o conceito de derivada (pelo método das tangentes).

Newton e Leibniz tinham entendido que a análise tratava de grandezas contínuas, tais como comprimentos e áreas, ao passo que a teoria dos números tratava do conjunto discreto dos números naturais e suas aplicações. (BOYER, 1974, p. 404). A influência dessas novas concepções numéricas pode ser analisada a partir do que Newton publicou em sua *Aritmética Universal*, em 1707.

> ...entendemos por número menos uma coleção de unidades e mais uma relação abstrata de uma quantidade qualquer com uma outra de mesma espécie, que consideramos como a unidade. O número é de três espécies: o inteiro, o fracionário e o surdo. O inteiro é medido pela unidade, o fracionário por um submúltiplo da unidade; o surdo é incomensurável com a unidade. (NEWTON, 1707, apud COUSQUER E., 1984, p. 168[10])

Newton definiu ainda os números positivos como sendo maiores do que nada e os negativos como sendo menores do que nada. Essa descrição, com toda sua dose de matemática intuitiva, explicita tanto a capacidade de Newton (e dos matemáticos de sua época) de compreender a diferença essencial entre os diversos aspectos que um número pode obter quanto a ausência de importância que davam para o rigor dessas definições (no sentido contemporâneo). Nota-se aqui também que os imaginários ainda não faziam parte do que era considerado número e não havia clareza sobre a irracionalidade do π e de uma série de valores usados por aproximação, como as funções trigonométricas e os logaritmos.

Entretanto era a primeira vez na história da matemática em que era possível encontrar uma definição que reunia todos os tipos de grandezas sob o mesmo estatuto de número (que passaremos a chamar de números reais, mesmo que tal conjunto ainda não esteja definido) e ao mesmo tempo as separava em classes de acordo com as relações que eram capazes de estabelecer entre si e com a realidade ao seu redor, ou seja, entre seus aspectos *intensionais* e *extensionais*.

1.6 O que é número afinal?

A partir do século XVII o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal e da Geometria Analítica levava o conhecimento matemático para um campo cada vez mais abstrato. Albert

---

[10] Tradução feita do francês pelo autor

Girard (1595 – 1632) havia publicado em 1629 um tratado onde relacionava as soluções de equações polinomiais com seus coeficientes, explicitando sua ideia de que o valor da raiz aqui é menos importante do que o padrão de comportamento das raízes como um todo.

Girard havia generalizado as soluções negativas e imaginárias e enunciado o teorema fundamental da álgebra, garantindo ao menos uma raiz complexa ou real para equações com coeficientes complexos ou reais. O estudo geral das resoluções de equações, de forma abstrata e sem relação com problemas aplicáveis, gerava uma série de resultados que careciam de interpretação.

Ao utilizar a relação de igualdade entre as raízes de uma função e a variável x, tornou-se habitual a construção de expressões do tipo abaixo, onde o x representa um número sobre o qual pouca coisa está definida.

$$ax + b = c \rightarrow x = \frac{(b - c)}{a}$$

$$ax^2 + bx + c = d \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(d - c)}}{2a}$$

Esse estudo das raízes explicita o fato de que existe uma relação direta entre os racionais e as equações de grau 1 (como citado acima), permitindo então supor que exista uma relação entre os reais e as equações de graus maiores, tornando latente não só a noção da existência de um campo muito maior de números irracionais do que racionais como também a possível relação entre números, equações e curvas geométricas.

O estudo das relações entre grandezas levara os matemáticos a questões perturbadoras que a própria Matemática, ao longo de seu desenvolvimento, se encarregaria de responder. Onde inserir os irracionais no conjunto formado pelas frações de inteiros, que representam de forma tão compacta toda a reta? Além disso, será possível garantir que qualquer equação apresente sempre soluções geométricas, sejam comensuráveis ou incomensuráveis com a unidade? Será também possível fazer o caminho inverso, ou seja, será que qualquer número possui uma representação geométrica e uma equação algébrica que o determine? O infinitésimo pode ser considerado uma quantidade? Qual a diferença entre o zero e algo cujo limite é zero? Como conjuntos infinitos podem ter quantidades diferentes de elementos?

A relação tríplice formada entre as resoluções de equação, os números e a reta era carregada de conceitos que não estavam completamente definidos, mas que pareciam óbvios. Essa obviedade aparente não se confirmava nos cálculos e ressaltava o quanto é necessário ter cautela ao lidar com o óbvio. Hoje sabemos não só que a densidade dos racionais é diferente da completude dos reais, como também que existem números irracionais que são transcendentes, ou seja, não servem de solução a nenhuma equação algébrica. Esse conhecimento, entretanto, ainda estava longe de ser desenvolvido.

Embora fosse possível supor que não seria necessário demonstrar o que é obviamente observável, a questão remete novamente ao problema filosófico central das questões matemáticas. Se partimos apenas do observável, ela se torna empírica e exclusivamente aplicável. Entretanto, se se deseja fazer uma matemática abstrata e considerada como epistemológica, desenvolvida *a priori*, a exemplo da geometria grega, torna-se necessária a definição prévia de cada elemento que venha a servir de base para novos conhecimentos. E não era isso que vinha acontecendo.

> Até o advento do cálculo, a matemática era uma ciência das quantidades. No século XVII, o trabalho sobre curvas, relacionava quantidades geométricas. Já a partir do século XVIII muitos matemáticos começaram a considerar que seu principal objeto era a função. Essa mudança foi descrita da seguinte forma por Jaques Hadamard[11]: "O ser matemático, em uma palavra, deixou de ser o número: passou a ser a lei de variação, a função. A matemática não apenas foi enriquecida por novos métodos; foi transformada em seu objeto". (ROQUE, 2012, p.344)

Os membros da família Bernoulli (ao menos doze homens com esse sobrenome fizeram avanços em diferentes áreas da Matemática) e muitos outros matemáticos passaram a utilizar o Cálculo como ferramenta para soma de séries infinitas, gerando expressões conhecidas até hoje, por exemplo, a série de Taylor e a série de Maclaurin.

Leonhard Euler (1707 – 1783), um dos maiores responsáveis pela notação matemática utilizada até hoje devido à sua escrita concisa e aplicada da mesma forma a diversos ramos do conhecimento, formalizou as frações contínuas de Bombelli e mostrou que as frações contínuas finitas representavam números racionais, enquanto que as infinitas representavam números irracionais.

Além de colocar, de certa forma, ambos os tipos de números como entes de natureza similar, foi Euler também quem desenvolveu o conceito de logaritmo e concluiu a existência do número *e* como base do logaritmo natural, provando-o como irracional e estudando a existência de logaritmos de números negativos, que não poderiam existir entre os números reais e que seriam mais tarde de grande contribuição na aplicação dos números complexos.

Entretanto, como podemos ver em Boyer (1974, p. 329), "Euler se deliciava com as relações entre a teoria dos números e sua desleixada manipulação de séries infinitas. Sem se preocupar com os perigos que espreitam atrás das séries alternadas, ele obteve resultados

[11] Segundo bibliografia da autora: J. Hadamard, "Le calcul fonctionnel", tradução dela própria.

como $\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$...", que hoje sabe-se não ser convergente para o valor verdadeiro de π.

Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), em contrapartida, afirmou em 1759 que a representação dos incomensuráveis feita não por valores exatos, mas por aproximações tão próximas quanto se queira, ocorria por que os matemáticos estendiam a denominação de número aos incomensuráveis. D'Alembert questionava também o conceito de limite, dizendo que uma coisa não pode ao mesmo tempo ser zero e ser uma quantidade e afirmava também que as quantidades negativas representavam uma falsa posição, mas não havia sentido em colocar uma quantidade como sendo menor que zero (GLAESER, 1985, p. 73). Foi com essa visão crítica que se esforçou em demonstrar teoremas que haviam sido enunciados sem muito rigor, como o teorema fundamental da álgebra, de Girard.

Havia uma insegurança crescente em continuar chamando de número tantos os inteiros quanto as variáveis das equações, os pontos dos planos e os limites das somas de séries infinitas e era a primeira vez que um matemático verbalizava tal insegurança, questionando o que poderia ou não ser chamado de número e quais operações resultavam em coisas que poderiam ser chamadas de quantidades.

> Veio então o período crítico: Abel e Jacobi, Gauss, Cauchy e Weirestrass e finalmente, Dedekind e Cantor, sujeitaram toda a estrutura a uma análise profunda, eliminando o vago e o ambíguo. E qual foi o resultado líquido dessa reconstrução? Bem, ela condenou a lógica dos pioneiros, mas justificou sua fé. (DANTZIG, 1970, p. 125)

O fato é que mesmo após muita análise a maior parte da Matemática que havia se desenvolvido "na fé" acabaria sendo confirmada. Embora os infinitesimais parecessem improváveis, os questionamentos de D'Alembert não eram o suficiente para negar seu uso, mesmo notando que se comportavam como Zeno os previra: ora como contínuos ora como partículas indivisíveis. Os infinitesimais, o cálculo e a análise continuariam a fazer parte da Matemática, precisando apenas passar por um refinamento, que começava a acontecer.

> A importância dos processos infinitesimais para as exigências práticas da vida técnica dificilmente pode ser exagerada. Praticamente todas as aplicações da Aritmética à Geometria, Mecânica, Física e até mesmo Estatística envolvem tais processos direta ou indiretamente [...]. Expulse-se o processo infinito e a Matemática pura e aplicada será reduzida ao estado em que era conhecida dos pré-pitagóricos. (DANTZIG, 1970, pp. 125, 126)

Um dos matemáticos mais influentes que se ocupou de buscar provas mais convincentes de alguns teoremas tidos como verdades na época foi Carl Friederich Gauss (1777 – 1855), conhecido hoje como o príncipe da Matemática. Ainda adolescente foi um dos questionadores do quinto postulado de Euclides e futuramente daria início ao ramo da

Geometria Diferencial, uma aplicação do Cálculo no estudo de superfícies geométricas que poderia ser desenvolvido inclusive em geometrias não-euclidianas, ou seja, aquelas que não consideram o quinto postulado. Dentre inúmeros avanços no crescimento da Matemática, veio também dele uma interpretação geométrica dos números complexos, desenvolvendo o que ficou conhecido como plano de Argand-Gauss.

Em 1801, Gauss publicou *Disquisitiones Arithmeticae*, revisitando todo o trabalho de Fermat, Euler, Lagrange e Legendre na teoria dos números. A essa época Joseph Loui Lagrange (1736 – 1813) havia desenvolvido novos estudos sobre diferenciação enquanto Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) havia provado a irracionalidade de π e Adrien Marie Legendre (1752 – 1833) havia afirmado que não era possível obter esse valor como resultado de equações com coeficientes racionais. Surgiria daí o conceito de números transcendentes, previsto por Lagrange como aqueles que não são obtidos por solução de equações algébricas. O trabalho de Gauss unido ao de August Luis Cauchy (1789 – 1857) serviria então de base para todo o desenvolvimento posterior da álgebra.

> Cauchy num ponto diferia muito de Gauss: corria a publicar assim que conseguia qualquer resultado. Talvez seja essa uma das razões pelas quais a principal característica da matemática do século XIX – a introdução do rigor – é atribuída a Cauchy mais do que a Gauss, apesar do alto nível de precisão lógica que Gauss exigiu de si mesmo. [...] O nome de Cauchy aparece hoje ligado a muitos teoremas sobre séries infinitas pois, apesar de alguns esforços por parte de Gauss e Abel, foi em grande parte através de Cauchy que foi despertada a consciência dos matemáticos para a necessidade de vigilância com relação à convergência. (BOYER, 1974, p. 379)

A maior contribuição de Cauchy foi ter conseguido (quase que simultaneamente com Bernard Bolzano (1781 – 1848)) determinar as condições necessárias e suficientes para que uma série pudesse ser considerada convergente. Em 1810 Bolzano havia escrito sua *Contribuição para uma apresentação da matemática mais bem fundamentada* e em seus artigos posteriores se preocupara em definir de formas diferentes o que considera como sendo um número e o que considera como sendo uma grandeza, discutindo mais uma vez os tipos de números e se todos os tipos mereciam mesmo ser chamados como tal. Cauchy, por sua vez, havia conseguido pioneiramente desenvolver uma aritmética que envolvesse inclusive as quantidades negativas, que ainda sofriam resistências no universo acadêmico. O critério de Cauchy viria a ser definitivo para a revisão das somas feitas de forma pouco rigorosa por seus predecessores e seria a partir desse critério que se tornaria possível diferenciar as sequências cuja soma resultava em um número racional daquelas que resultavam em outro tipo de número, um trabalho similar ao das frações contínuas finitas e infinitas.

Esses trabalhos e os que decorreram deles foram os passos fundamentais para que Richard Dedekind (1831 – 1916) e Georg Cantor (1845 – 1918) descrevessem as primeiras definições axiomáticas do que seria o conjunto dos números reais, marcando de vez a história das discussões sobre a definição de número[12].

Alguns anos depois da formalização dos números reais por Dedekind e das discussões filosóficas que a seguiram, Felix Klein (1849 – 1925) chamaria esse período de "aritmetização da análise". Klein foi um grande geômetra capaz de unir as geometrias euclidianas e não euclidianas sob a mesma égide, que ele chamou de Geometria Projetiva. Seus estudos foram de grande contribuição para a teoria dos grupos ao organizar as geometrias e agrupá-las de acordo com as transformações que poderiam ser feitas respeitando um determinado conjunto de axiomas.

> A obra de Klein num certo sentido é um clímax adequado para a "idade heroica da geometria[13]", pois ele ensinou durante meio século e tão contagioso era seu entusiasmo que algumas figuras do fim do século dezenove profetizaram que não só a geometria, mas finalmente toda a matemática viria a ser contida na teoria dos grupos. (BOYER, 1974, p. 400)

A intenção de Klein era mesmo unificar os aspectos contínuos e discretos da Matemática sob o conceito de grupo, mas isso só poderia ter sido imaginado por ele devido ao trabalho pregresso de definição axiomática dos conjuntos, que foi justamente o que ele chamou de aritmetização: o esforço em construir todo o universo dos números incluindo o contínuo sobre as bases discretas dos naturais e de suas operações aritméticas.

Esse processo deriva naturalmente de uma busca por transformar todo o desenvolvimento matemático que havia acontecido de forma espontânea em um conhecimento estruturado *a priori*, como era o caso da geometria. Os desafios ali eram saber sobre quais bases esse conhecimento seria construído, quais seriam os axiomas e postulados logicamente necessários para esse desenvolvimento e como construir os irracionais a partir deles. Betrand Russel (1872 – 1970) expõe esse desafio:

> Como todos os termos que são definidos o são por meio de outros termos, é claro que o conhecimento humano deve sempre se contentar em aceitar alguns termos como inteligíveis sem definição, de maneira a ter um ponto de partida para suas definições (RUSSEL, 2007, p. 20).

O ponto de partida seria o conjunto dos naturais e seriam necessárias muitas publicações posteriores às de Cauchy para que esse trabalho se desenvolvesse. Entre Cauchy e

[12] Outros importantes matemáticos se ocuparam de formalizar a construção desse conjunto, como Charles Méray (1835 – 1911) e Karl Weierstrass (1815 – 1897). Para o presente trabalho, os estudos serão concentrados em Cantor e Dedekind. Para saber mais sobre outras construções, consultar LOPES, 2006.

[13] Boyer chama o séc. XIX de "idade heroica da geometria" por ser esse o período principal de desenvolvimento das geometrias não euclidianas e de dimensões superiores.

Cantor o conjunto dos complexos viria a ser estudado por William Rowan Hamilton (1805 – 1865) e Hermann Hankel (1839 – 1873) e só depois de Dedekind é que Giuseppe Peano (1858 – 1932) definiria os naturais como o conjunto formado pela unidade e seus sucessores.

Essa nova estrutura matemática tornaria possível colocar os irracionais como uma construção feita sobre os racionais, podendo assim definir todos os números como formas de extensão dos conceitos fundamentais de unidade e sucessão, formando uma definição de número logicamente aceitável e aparentemente sem empirismo se não relacionarmos o conceito de unidade com fatos observáveis. O que será exposto a seguir é a ordem cronológica dos trabalhos que fizeram parte desse processo de aritmetização, para que então seja possível apresentar a definição axiomática de número e as discussões filosóficas decorrentes dessa definição, levantando os pontos fortes e fracos desse novo sistema lógico.

Após o trabalho de Cauchy em 1810, se destaca o ano de 1818, quando Niels Henrik Abel (1802 – 1829) entra em contato com o *Disquisitiones* de Gauss. Abel observa que o teorema binomial de Newton havia sido provado para potências racionais por Euler, mas não para potências irracionais e logo se dispõe a elaborar tal prova. Em 1822 dá sua contribuição mais fundamental para a Matemática com a publicação do artigo *Sobre a resolução algébrica de equações* onde ele concluía que não era possível haver um método algébrico para resolução de equações polinomiais de grau maior que quatro. Foi desse trabalho e do trabalho de Évariste Galois (1811 – 1832) que surgiu a teoria dos grupos, que mais tarde seria a base para a teoria moderna dos conjuntos.

Em 1831 Augusto de Morgan (1806 – 1871) escreve *Elementos de Aritmética*, dando um tratamento filosófico para o conceito de número e abrindo caminho para que a lógica, até então ferramenta da filosofia, viesse a fazer parte do pensamento matemático, gerando a lógica simbólica. Esse era o passo que faltava para que a álgebra e a análise pudessem receber o tratamento axiomático que começava a se delinear e assim os conjuntos numéricos pudessem ser escritos como construções lógicas sobre postulados bem definidos.

Em 1833 Hamilton demonstrou que a álgebra dos complexos era perfeitamente construída por operações realizadas entre pares de números reais, formalizando assim a teoria dos complexos em acordo com sua representação no plano de Argand-Gauss. Esse método de representação a partir de um conjunto “menor” permitiu que se criasse também uma relação entre a álgebra dos racionais e operações de pares de inteiros, definindo o conjunto dos racionais a partir de uma série de conceitos que seriam chamados de princípio de permanência, citado mais adiante.

Em 1844 Joseph Liouville (1809 – 1882) constrói uma classe de números não algébricos, formalizando a existência dos números transcendentes. Seu trabalho seria essencial para a comprovação futura da transcedentalidade do π e do e, colocando fim a um problema geométrico milenar, o da quadratura do círculo.

No mesmo ano Hermann Grassmann (1809 – 1877) publica sua *Teoria das grandezas extensivas*[14], diferenciando os conhecimentos matemáticos em *intensionais* ou *extensionais*, de acordo com a forma como são construídos. Em 1856 Grassman publica *Os fundamentos da análise*, e demonstra que grande parte dos fatos da aritmética poderia ser demonstrada a partir da indução e da ideia de sucessor. Essas seriam as ideias básicas para a futura construção da definição formal dos números naturais feita por Peano.

Hankel se basearia então na definição cada vez mais axiomática da aritmética para diferenciar o conceito de número (tratado pela teoria dos números) do conceito de quantidade contínua (tratado pela análise), que ele chamaria de “números puramente intelectuais”, explicitando que considerava essas quantidades filosoficamente descoladas da realidade. A partir da obra de Hankel, todos os obstáculos referentes à teoria dos números seriam ultrapassados, principalmente devido a seu ponto de vista filosófico, a partir do qual os números podiam ser imaginados mesmo sem exemplos práticos que os expliquem (GLAESER, 1985, p. 32).

A base para que Hankel fizesse essa separação era o próprio princípio de permanência, citado anteriormente. Com esse mecanismo lógico tornara-se finalmente possível a construção dos conjuntos dos inteiros e racionais (positivos e negativos) de maneira formal.

> Formularei esse princípio numa definição:
> Uma coleção de símbolos infinita em número será chamada de *corpo numérico*, e cada elemento individual dele de *número*,
> *Primeiro*: Se entre os elementos da coleção podemos identificar a sequência de *números naturais*;
> *Segundo*: Se podemos estabelecer critérios de grau que nos permitam dizer se dois elementos quaisquer são iguais ou, se não o forem, qual é o maior.; esses critérios reduzem-se ao critério natural quando os dois elementos forem *números naturais*;
> *Terceiro*: Se para dois elementos quaisquer da coleção podemos imaginar um esquema de *adição* e *multiplicação* que tenha as propriedades comutativa, associativa e distributiva das operações naturais com esses nomes e que se reduzirá a essas operações naturais quando os dois elementos forem *números naturais*. (DANTZIG, 1970, p. 90)

O germe do trabalho de Hankel estava nas ideias de Hamilton por que, da mesma forma que este construíra a álgebra dos complexos sobre pares de reais, ele havia tornado possível demonstrar que os pares de números inteiros (a, b) podiam representar todas as

[14] Essa teoria será vista com mais profundidade em outro momento, ao debatermos sobre a construção dos reais dadas por Dedekind e sua continuação apresentada por John H. Conway.

frações $\frac{a}{b}$ e essas seriam reduzidas aos inteiros (e consequentemente aos naturais) quando a fosse múltiplo de b. Com essa construção era possível também concluir que dadas duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, podemos saber se são iguais ou qual é maior apenas comparando $a \cdot d$ e $b \cdot c$ e que é possível descrever operações de adição e multiplicação de frações que tenham as propriedades comutativa, associativa e distributiva e que geram resultados iguais quando efetuadas entre frações aparentes ou entre seus representantes inteiros.

Dantzig (1970, p. 90) lembra “que a extensão do domínio numérico vai a complexidades cada vez maiores. Mas essa extensão não é arbitrária; oculta no próprio mecanismo do esquema generalizador está uma ideia diretora e unificadora”, que é justamente o princípio da permanência. Essa construção tornava os racionais uma extensão dos inteiros da mesma forma que os complexos formavam uma extensão dos reais.

Hankel defendera então que a análise deveria continuar estudando as quantidades contínuas, deixando os racionais e inteiros para a teoria dos números. Hankel questionava se este sistema de números estaria completo e concluíra que nunca seria possível estendê-lo aos números reais, uma vez que podem existir outras operações além das citadas em seu princípio, como, por exemplo, os logaritmos (LOPES, 2006, pp. 4 - 5).

Independente disso, essa era a primeira vez na história da Matemática que se definia número de forma axiomática, como um conhecimento destacado da realidade sensorial. Para completar o processo de aritmetização faltaria apenas estender essa definição para os irracionais, negando o conceito desenvolvido por Hankel de que quantidades contínuas eram de natureza totalmente distinta do que ele entendia por número. Essa negação viria de um professor seu, Weierstrass.

Foi Weierstrass quem definiu “quantidades numéricas” como sendo uma classe de números infinitos que podia ser escrita como uma espécie de soma de infinitas razões. Ao igualar o limite da soma quando o número de termos tende ao infinito à própria soma, indicando assim que a soma infinita era apenas uma maneira diferente de escrever o próprio número, o alemão colocou os irracionais na mesma estrutura algébrica dos racionais.

Foi baseado nas somas de Weierstrass (e em todos os trabalhos pregressos) que Cantor desenvolveu sua definição de racionais e irracionais em 1872. A leitura feita por Dedekind é um pouco diferente, mas quando ambos descreveram suas versões do conjunto que passou a ser chamado de números reais, foi possível demonstrar logicamente que haviam construído a mesma estrutura matemática.

Esse processo de transformação da Matemática em uma ciência analítica haveria de gerar muitas discussões futuras. A própria concepção de que todos os conjuntos eram derivados dos números naturais não era satisfatória para alguns matemáticos, uma vez que teoricamente nada poderia ser afirmado analiticamente sobre um conjunto infinito. Para os intuicionistas era também absurdo definir números naturais como um conjunto que não fosse obtido de forma empírica. Ainda assim, isso não impediu os logicistas de seguir com suas definições.

Um dos maiores defensores da axiomatização, Russel (2007, p. 21), conta que "tendo reduzido toda a matemática pura tradicional à teoria dos números naturais, o passo seguinte em análise lógica foi reduzir essa teoria ela própria ao menor conjunto de premissas e termos indefinidos de que era possível derivá-las. Esse trabalho foi levado a cabo por Peano", que foi quem construiu axiomaticamente uma definição para os naturais em 1889, baseado num processo chamado de indução completa.

Cantor havia classificado os naturais como um tipo de infinito diferente dos Reais, que ele chamou de enumerável, resolvendo a questão da dicotomia entre os tipos diferentes de números. Aparentemente o passo de indução completa era logicamente tão satisfatório quanto qualquer raciocínio analítico baseado em dedução, de modo que estava enfim satisfeita a vontade dos logicistas de produzir uma aritmetização total da análise baseada na construção de todos os números a partir dos axiomas de Peano. Nos anos que se seguiram, embora as discussões acerca das implicações filosóficas desse processo fossem crescentes, essa concepção de número permaneceu (e permanece) sendo a única academicamente aceita.

Nos capítulos seguintes serão apresentadas as formas axiomáticas dos conjuntos e as discussões filosóficas decorrentes destes, para que se possa enfim abordar a teoria de John H. Conway e suas próprias implicações no conceito de número.

2 APRESENTAÇÃO AXIOMÁTICA DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 Os conceitos primitivos do princípio de permanência.

O final do séc. XIX foi fundamental para a teoria dos números. O trabalho de Hankel trazia o conceito de corpo numérico baseado no princípio de permanência, incluindo os números inteiros e racionais nesse conceito e excluindo os irracionais e complexos, que seriam incluídos mais tarde. O que se expõe nesse item do trabalho é a base do método de ampliação gerado por esse princípio, partindo dos naturais em direção aos inteiros e racionais.

Segundo Hankel, só poderiam ser chamados de números os elementos de um corpo numérico, corpo esse que ele define como sendo um conjunto com as seguintes características: possui infinitos elementos; contém os números naturais; é ordenado; possui as operações de adição e multiplicação com suas propriedades (comutativa, associativa e distributiva) e essas se mantém quando restringidas aos naturais.

Ressalta-se que Hankel considera como primitivas a ideia de número natural, a noção de conjunto como coleção de elementos, bem como o conceito de coleção infinita. Foi preciso o passar dos anos para que esses termos fossem por sua vez definidos axiomaticamente reduzindo a base da construção dos conjuntos numéricos a uns poucos elementos primitivos concebidos na linguagem natural e no senso comum. Assim, de Hankel até os dias de hoje, a forma de se expressar matematicamente sofreu uma série de transformações, o que torna necessário ressaltar que os conceitos listados a seguir são anacrônicos, estando mais próximos do que hoje é visto nas universidades do que dos escritos daquela época.

Apenas para fins didáticos, consideremos de forma intuitiva o conjunto dos números naturais, simbolizado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, munido também de suas operações de adição e multiplicação com seus símbolos convencionais, representadas respectivamente por “+” e “·”. Convém ressaltar que os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 0 não são números em si, mas são antes símbolos que representam os números.

A ideia que está por trás do conceito de números naturais e que será apresentada posteriormente é baseada apenas na noção de que qualquer coleção unitária pode ser representada pelo número um, simbolizada por “1” e que, ao incluir nessa coleção outro elemento, ela será representada pelo número dois, chamado de sucessor do um e simbolizado por “2”, ação que pode ser repetida indefinidamente. A recursão implícita na frase “repetida indefinidamente” é que nos leva ao conceito indutivo de infinito, construído apenas sobre a existência da unidade e da sucessão, que gera todos os naturais.

As operações de adição e multiplicação nesse conjunto, uma vez realizadas entre os nove primeiros elementos, podem ser levadas ao infinito com base nos seus algoritmos e no sistema posicional dos algarismos hindu-arábicos, que requer o uso do símbolo “0” como marcador de posições vazias, não sendo ele ainda considerado um símbolo de número. Com essas ideias prévias, as definições do conjunto $\mathbb{N}$ e de suas operações podem ser dadas posteriormente às construções que serão feitas a seguir, sem perda de generalidade.

Desse modo, podemos definir uma operação como uma combinação feita entre dois elementos de um conjunto gerando um terceiro elemento. Quando uma operação tem a característica de, ao ser realizada entre quaisquer dois elementos a e b do conjunto, gerar um terceiro elemento c do mesmo conjunto, dizemos que esse conjunto é fechado para essa operação. Como é sabido (ainda que não demonstrado), os algoritmos citados acima são sempre alimentados por naturais e geram naturais, podendo-se concluir o fechamento de $\mathbb{N}$ para a soma e para o produto. As propriedades das operações podem ser então definidas.

Dados três elementos quaisquer a, b e c de um conjunto que possua uma operação (representada aqui pelo símbolo +), dizemos que:

- A operação + é associativa se $(a + b) + c = a + (b + c)$
- A operação + é comutativa se $a + b = b + a$

Além disso, dadas duas operações (por exemplo, + e ·), dizemos que:

- A operação · é distributiva em relação à operação + se $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Desse modo, considerando novamente os números naturais como descritos acima, bem como as operações de adição e multiplicação definidas nesse conjunto pelos algoritmos citados, podemos observar que ambas são associativas e comutativas e que a multiplicação é distributiva em relação à adição, fatos que não serão demonstrados.

Veremos a seguir o que significa uma relação. Para fins ilustrativos, vamos considerar também conhecidas duas relações entre números naturais: a igualdade, simbolizada por “=” e a minoração/majoração, simbolizada por “<”. De forma intuitiva, diremos que um número natural é igual a outro se ambos simbolizarem o mesmo tipo de coleções, ou seja, coleções com as mesmas quantidades. Além disso, um número natural será dito menor que o outro se as coleções que ele representa são anteriores no processo recursivo de construção das quantidades.

Desse modo, uma relação pode ser definida como uma atividade que, embora também seja aplicada a dois elementos, não gera um terceiro elemento, mas sim uma comparação, uma qualidade de um elemento em relação ao outro. As funções de uma variável, por exemplo, formam um caso específico de relação: ao afirmar que $y = 2x$ com x e y números naturais, estamos criando uma relação de ℕ em ℕ, comparando as variáveis x e y e dando uma qualidade do elemento y em relação ao elemento x (nesse caso, a qualidade conhecida como "dobro").

Uma relação é considerada de equivalência se for reflexiva, simétrica e transitiva. Respectivamente, em linguagem simbólica, temos que a relação “#” é uma relação de equivalência em um conjunto se, para todo *a*, *b* e *c* no conjunto, tem-se:

- *a* # *a*
- *a* # *b* implica em *b* # *a*
- *a* # *b* e *b* # *c* implicam em *a* # *c*

Novamente considerando os naturais como foram descritos, definimos a relação “=” como uma relação de equivalência. Além disso, para todos *a* e *b*, se *a* for um número natural e $a = b$, então *b* também é um número natural. Isto é, os números naturais são fechados em sua igualdade.

Uma relação será considerada de ordem (estrita) quando for assimétrica, transitiva e irreflexiva. Respectivamente, em linguagem simbólica, temos que a relação # é de ordem estrita em um conjunto se, ao ser aplicada entre elementos *a*, *b* e *c* do conjunto, respeita as seguintes propriedades:

- Se *a* # *b*, não pode ocorrer *b* # *a*
- Se *a* # *b* e *b* # *c*, então *a* # *c*
- Consequentemente, nunca pode ocorrer a # a

Assim, podemos concluir que a relação “<” é uma relação de ordem restrita em ℕ, podendo ser aplicada a quaisquer elementos do conjunto. A relação “maior”, simbolizada por “>” e sendo definida de modo que se $a < b$, então $b > a$, também se torna assimétrica, transitiva e irreflexiva, formando uma nova relação de ordem em ℕ (a ordem decrescente).

Note que a existência de uma relação de ordem que permita comparar dois elementos de um conjunto não significa que todo o conjunto respeita a mesma ordem. Define-se então um conjunto ordenado como aquele que, tendo uma relação de equivalência e outra de ordem estrita, ocorre exclusivamente uma das três possibilidades abaixo sempre que dados dois elementos *a* e *b* desse conjunto:

- Ou $a < b$
- Ou $a > b$ (ou seja, $b < a$)

- Ou $a = b$

Essa caracterização, chamada de tricotomia[15], garante à relação de ordem o título de relação de ordem total. Um conjunto ordenado é aquele que possui uma relação de ordem total, como observamos em $\mathbb{N}$.

Além disso, as definições da adição, da multiplicação e das relações de ordem e equivalência vistas nesse conjunto geram algumas condições, que são as consequentes características que a relação de ordem mantém com as operações entre quaisquer três números naturais a, b e c:

- Se $a < b$, então $a + c < b + c$
- Se $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$
- A adição admite a propriedade cancelativa: se $a + c = b + \mathrm{c}$, então $a = b$.
- A multiplicação admite a propriedade cancelativa: se $a \cdot c = b \cdot \mathrm{c}$, então $a = b$.

Unindo isso às propriedades das operações, temos o ideário que, aplicado à definição de número natural e à construção das operações + e ·, completa a base dos conceitos primitivos de Hankel.

2.2 O princípio de permanência nos conjuntos $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

A ampliação dos naturais para os inteiros requer um passo delicado, que reside em uma imprescindível redefinição do zero. A partir dessa redefinição, passa-se a utilizar o símbolo "0", chamado zero, como sendo o (único) elemento neutro da adição, tal que:

- $a + 0 = a$ para todo a natural. Consequentemente,
- Sendo a um número natural, $x + a = a$ implica em $x = 0$.

É importante notar que essa definição é coerente com o algoritmo da adição e com a utilização já explicitada do 0 como símbolo separador de casas do sistema decimal. Entretanto, embora essa nova definição sugira alguma redundância em relação ao que já se sabia sobre o zero, suas consequências demonstram sua delicadeza.

A unicidade do elemento neutro só pode ser demonstrada quando aplicada a um novo conjunto que contenha os naturais e o zero, que seja munido da adição e da relação de ordem entre naturais, considerando ainda, além do princípio de permanência, a definição de que 0 <

---

[15] Alguns autores utilizam a relação de ordem ampla (≤, lê-se: menor ou igual) no lugar da relação de ordem estrita. Nesse caso, ela deve ser reflexiva, antissimétrica e transitiva e o conjunto possui ordem total quando ocorre exclusivamente $a \leq b$ ou $b \leq a$ (dicotomia).

n para todo *n* em $\mathbb{N}$. Assim, embora hoje o zero possa ser considerado um número natural, sua inclusão nesse conjunto não pode ser imediata. É a sua caracterização como elemento neutro da adição que permite a definição axiomática do "elemento oposto" e, por conseguinte, da operação de subtração. A subtração é que se torna responsável por colocar o zero como resultado da operação 1 – 1, tornando-o então antecessor do 1.

Quando Peano define posteriormente os naturais, opta por iniciar os elementos de contagem pelo número 1. Sabe-se que o trabalho de Peano, sendo posterior ao de Hankel, ocorre após a construção dos inteiros, indicando que o zero seria um elemento de $\mathbb{Z}$ e não de $\mathbb{N}$. Porém, sendo visto como o antecessor do um e como o neutro da adição, o zero adquire a característica dos outros naturais, obtendo ordinalidade e cardinalidade, podendo então ser nomeado como o natural representante das coleções vazias.

Hoje a distinção entre a concepção natural ou inteira do zero parece não trazer consequências significativas às construções dos conjuntos, visto que pela definição de número dada por Hankel, qualquer ente pode ser considerado número desde que faça parte de um corpo numérico com determinadas características. Entretanto não se podem diminuir as consequências de natureza filosófica desse debate, que dizem respeito ao tipo de matemática que se está criando. Afirmar que não há distinção entre a inclusão do 0 em $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ implica em concordar que os objetos matemáticos se definem apenas pelas relações que estabelecem entre si e não pelas relações que estabelecem com a realidade de onde são absorvidos e onde podem ser aplicados.

A inclusão do zero como número natural torna-se então anacrônica. Muitos autores fazem uma releitura dos axiomas de Peano iniciando a contagem em 0 e não em 1, tendo então que incluir, entre as primeiras demonstrações, a multiplicação por zero e suas consequências na relação de ordem dos produtos. Após o desenvolvimento mais amplo da teoria dos conjuntos iniciada em Cantor, o zero passa a ser o representante da cardinalidade do conjunto vazio, o que permite novas abordagens na axiomatização de Peano e auxilia a linguagem da construção dos inteiros como pares de naturais e dos racionais como pares de inteiros.

As discussões filosóficas acerca da conceituação numérica dada por Hankel e da consequente disputa de pertinência e aplicações do zero serão discutidas posteriormente. Entretanto é necessário reter a atenção nesse ponto como forma de lembrar que a ausência do debate filosófico transformaria a construção dos inteiros (e de todos os outros conjuntos) em um exercício estéril de imaginação, o que não é verdade. Retomando a história, observa-se que a maior parte das ampliações do conceito de número (e dentre elas está o aparecimento dos negativos) surgiu da álgebra e de sua busca por significados dos resultados de equações resultantes muitas vezes de problemas práticos.

Assim, do ponto de vista algébrico, a redefinição do zero apresenta uma nova possibilidade de resolução de equações, como será exposto a seguir. Para isso, deve-se lembrar que, dados três números naturais a, b e c, com $a < b$, tem-se $a + c < b + c$, condição que permanece válida quando $c = 0$ (definido como elemento neutro da adição), mesmo c não sendo natural. Desse modo, quando lidamos com uma operação do tipo $a + x = b$, temos algumas possibilidades para x:

- Se $a = b$, temos $a + x = a$, concluindo que $x = 0$
- Se $a < b$, temos $a + x < b + x$. Sendo $b < b + x$, temos $0 < x$, sendo x um natural.
- Analogamente, por fim, se $a > b$, temos $x < 0$ e, portanto, não natural.

Os matemáticos lutaram durante os séculos contra esse tipo de resultado em suas equações, embora a operação de subtração continuasse sendo efetuada. Define-se da seguinte maneira a operação de subtração como inversa da adição, simbolizada por "–":

- $b – a = x$ se, e somente se, $a + x = b$,

Com base nessa definição e nas observações algébricas acima, conclui-se que os naturais não são fechados para a subtração, havendo então a necessidade de definição de um conjunto que contenha, além do zero, os resultados não naturais dessa operação.

Definem-se então os números negativos da seguinte maneira:

- Para todo a natural, chama-se $(-a)$ o elemento oposto de a, tal que $a + (-a) = 0$.

Chamaremos esses números opostos aos naturais de inteiros negativos e o conjunto que contém os naturais, o zero e os opostos dos naturais de conjunto dos inteiros, denotado por $\mathbb{Z}$. Esse conjunto é claramente infinito e contém os naturais, restando ver como respeita as outras condições do princípio de permanência, iniciando na relação de ordem:

- Dados dois naturais distintos a e b, se $a < b$ então $-b < -a$.

Além disso, como devem continuar valendo as propriedades da adição e sua relação com a ordenação, deve ser possível afirmar que:

- Se $a < b$, então $a + (-c) < b + (-c)$ para a, b, e c em $\mathbb{N}$.

Substituindo a por 0 e sabendo que $0 < n$ para todo n em $\mathbb{N}$ e que $a + (-a) = 0$, conclui-se (de forma a garantir essa propriedade), que:

- $a > 0$ se, e somente se $(-a) < 0$.

Assim, sejam a, b e c elementos de $\mathbb{Z}$, tem-se:

- Se $a < 0$ e $0 < b$, temos diretamente $a < b$.
- Se a e b são maiores que zero (positivos), utiliza-se a relação de ordem dos naturais.
- Se a e b são menores que zero (negativos), seus opostos serão naturais e, observando a ordem de seus opostos pode-se concluir a ordem dos negativos.

Conclui-se assim que o conjunto é totalmente ordenado. Vejamos como ficam as operações. Para quaisquer a, b, e c naturais, por consequência das definições anteriores, temos:

- O oposto do oposto de a é o próprio a: $-(-a) = a$
- O elemento oposto é único para todo a: dado x tal que $x + a = 0$, $x = (-a)$
- O zero não admite oposto, ou é seu próprio oposto: $(-0) = 0$
- O zero é neutro também para a adição com inteiros negativos: $(-a) + 0 = -a$

Importante ressaltar que a unicidade do oposto garante que o conjunto formado, além de possuir uma relação de ordem total, é fechado para a relação de equivalência. Ou seja, se a é inteiro e $a = b$, então b é inteiro.

Embora tenhamos usado o símbolo “+” até agora como a adição de naturais, essa operação passa a se estender aos inteiros negativos: já vimos que o uso do zero como elemento neutro funciona para os negativos; a soma $(-a) + b$ pode ser interpretada como $b - a$, sendo a subtração já definida; além disso, a soma entre negativos $(-a) + (-b)$ pode ser dada pelo oposto da soma $a + b$, ou seja, $(-a) + (-b) = -(a + b)$.

Assim, a adição permanece comutativa, associativa e fechada no conjunto $\mathbb{Z}$. Além disso, a relação entre a ordem e a soma permanece, assim:

- Se $a < b$, então $a + c < b + c$ para a, b, e c em $\mathbb{Z}$.
- Vale a propriedade cancelativa: se $a + b = a + c$, então $b = c$ para a, b, e c em $\mathbb{Z}$,

A maior parte das conclusões a que chegamos aqui partindo das definições não foram e não serão demonstradas[16] evitando-se assim perder a fluidez que nos leva ao objetivo final de analisar as consequências na forma de construção dos conjuntos numéricos. O que conseguimos até aqui é concluir que o conjunto dos inteiros possui a mesma operação de adição dos naturais e que quando aplicada aos números inteiros maiores que zero resulta

[16] As demonstrações das propriedades das operações no conjunto dos inteiros, bem como os casos de multiplicidade e divisibilidade que gerarão posteriormente os racionais não serão expostos por fugirem ao escopo do trabalho. Para o leitor interessado recomenda-se consultar esses elementos em MILIES, César P.; COELHO, Sônia P. **Números**: Uma introdução à Matemática. São Paulo: Ed. USP, 2006.

exatamente na adição em $\mathbb{N}$, como era desejável pela proposta de Hankel. Além disso, a operação $b - a$ resulta em um natural quando $b > a$, em zero quando $b = a$ e em um inteiro negativo quando $b < a$, o que torna o conjunto $\mathbb{Z}$ fechado para a subtração.

Não fosse a necessidade do princípio de permanência, essa conclusão seria o suficiente para resolver o problema algébrico fonte dessa investigação. Entretanto, cada novo objeto matemático não pode ser analisado unicamente a partir do problema que o gerou, tendo também de ser analisado a partir das relações que desenvolve com seus pares. Resta então verificarmos o que ocorre com a multiplicação em $\mathbb{Z}$, para o que se torna necessário enunciar o seguinte:

Como $0 \cdot a + 0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a$, pelo cancelamento, temos $0 \cdot a = 0$. Visto o que ocorre na multiplicação por zero, pode-se concluir que o produto de inteiros admite a seguinte “regra de sinais”:

- $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

Note que a operação “·” utilizada acima também se refere ainda à multiplicação como conhecemos entre naturais. Os elementos simbolizados com a e b são elementos de $\mathbb{N}$, sendo $(-a)$ e $(-b)$ seus opostos, ou seja, inteiros negativos. Dadas essas propriedades, a operação se estende agora para todo o conjunto $\mathbb{Z}$.

Assim, esse conjunto se encontra também fechado para a multiplicação, que permanece associativa, comutativa e distributiva em relação a adição, como era de se esperar. Ao observar esses fatos, se torna imprescindível rever a interação entre a multiplicação e a relação de ordem que afirma que “se $a < b$, então $a \cdot c < b \cdot c$, para a, b, e c naturais”. Note que, se c é um inteiro tal que $c > 0$, então c é natural. Logo, pela relação de ordem dos inteiros, temos:

- Dados a, b e c inteiros, se $c > 0$, $a < b$ implica em $a \cdot c < b \cdot c$

Por outro lado, se $c < 0$, então $0 < (-c)$, ou seja $(-c)$ é natural. Novamente, pela relação de ordem dos inteiros e lembrando que $a \cdot (-c) = -(a \cdot c)$ e $b \cdot (-c) = -(b \cdot c)$, temos:

- Dados a, b e c inteiros, se $c < 0$, $a < b$ implica em $a \cdot c > b \cdot c$.

Além disso, para $c = 0$, $a \cdot c = b \cdot c$ independente dos valores de a e de b. Logo, a multiplicação em $\mathbb{Z}$ admite condicionalmente a propriedade cancelativa:

- Se $a \cdot \mathrm{b} = a \cdot \mathrm{c}$, com $a \neq 0$, então $b = c$.

Essa última proposição completa a axiomatização de $\mathbb{Z}$ como um corpo numérico (de acordo com a definição dada por Hankel), suprindo a necessidade de um conjunto que seja fechado também para a subtração, além da multiplicação e da adição. Mas, voltando à álgebra, é ainda a necessário significar os resultados das equações do tipo $b \cdot x = a$.

Note-se que para $a = 0$ e $b = 0$, a equação é verdadeira para qualquer valor de x. Para $b = 0$ e $a \neq 0$, não existe valor de x que torne a equação verdadeira. Por fim, quando $b \neq 0$, a equação transforma x em um número que resulta da divisão de a por b.

O estudo da multiplicidade de inteiros é secular. Os caminhos percorridos pela operação inversa da multiplicação diferem muito daqueles percorridos pela inversa da adição. Enquanto a subtração resultava em números que, por ausência de significados *extensionais*, eram constantemente negligenciados, a divisão produzira um estudo profundo sobre múltiplos, divisibilidade, números primos e decomposições.

Por esse ponto de vista, pode-se afirmar que a construção de um novo conjunto que englobe as razões é mais fácil de ser aceita do que a construção anterior, já que esses resultados foram compreendidos como números muito antes das quantidades negativas. Entretanto, a divisão é mais difícil de definir do que a subtração, já que o estudo da divisibilidade gerou um tipo de divisão de inteiros que difere significativamente da divisão dos racionais[17].

A diferenciação entre os dois escopos da divisão não será tratada aqui. No momento será preciso apenas observar que, na equação $b \cdot x = a$, sendo a e b números inteiros com b não nulo, três coisas podem ocorrer:

- Se a for múltiplo de b (incluindo $a = b$), existe um m em $\mathbb{Z}$ tal que $m \cdot b = a$. Nesse caso, x é um número inteiro tal que $x = m$.
- Se a for menor que b, chamaremos x de $\frac{a}{b}$.
- Se a for maior que b, mas não seu múltiplo, podemos escrever $a = m \cdot b + r$, sendo m em $\mathbb{Z}$ tal que $m \cdot b$ é o maior múltiplo de b menor do que a. Nesse caso, r será menor do que b e diremos que $x = m + \frac{r}{b}$.

Note que, nos dois últimos casos, as razões simbolizadas por $\frac{a}{b}$ e $\frac{r}{b}$ possuem o dividendo menor que o divisor. Chamam-se essas razões de frações próprias, sendo o dividendo chamado de numerador e o divisor de denominador. O uso das frações próprias como representantes de números soluciona a questão algébrica das equações $b \cdot x = a$.

[17] Ver nota anterior.

Resta determinarmos um conjunto que as contenha e, para que possam ser chamadas de números, que respeite o princípio de permanência. Constrói-se então o conjunto dos racionais, denotado por $\mathbb{Q}$ e definido como $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a$ e b em $\mathbb{Z}$, $b \neq 0\}$. Vejamos como os elementos desse conjunto se relacionam.

Já vimos que quando $a < b$ obtemos uma fração própria. Quando $a \geq b$ (a maior ou igual a b), temos dois casos. Se a for múltiplo de b, a fração obtida representa um número inteiro. Por fim quando a não for múltiplo de b, a fração obtida é do tipo $m + \frac{r}{b}$, simbolizada por $m\frac{r}{b}$, chamada de número misto. Além disso, de acordo com a regra de sinais vista no conjunto dos inteiros, a fração $\frac{a}{b}$ é positiva se, e somente se a e b possuírem o mesmo sinal, sendo negativa caso ocorra o contrário.

De forma divergente àquela observada nos inteiros, a definição dos elementos de $\mathbb{Q}$ não torna subentendida sua relação de equivalência. Vamos enunciá-la considerando a relação "=" do conjunto $\mathbb{Z}$, e duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ em $\mathbb{Q}$:

- As frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ serão ditas equivalentes com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se $a \cdot d = c \cdot b$.

Com base nessa definição, conclui-se que a relação "=" é uma relação de equivalência fechada no conjunto dos racionais, já que é reflexiva, simétrica e transitiva, fato de fácil demonstração. Além disso é importante ressaltar que, dada uma fração $\frac{a}{b}$ negativa, consideraremos sempre que a é negativo e b é positivo (caso ocorra o contrário, basta substituir essa fração pela sua equivalente, com os sinais trocados).

Veremos como fica então a relação de ordem e as operações de adição e multiplicação, a partir da relação "<" e das operações "+" e "·" conhecidas nos inteiros:

- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ se, e somente se, $a \cdot d < c \cdot b$.
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Nota-se que, no caso de ocorrer $c = d$, o produto como foi descrito gera uma fração equivalente à $\frac{a}{b}$, o que torna a fração $\frac{c}{d}$ um elemento neutro da multiplicação. No caso de $c = 0$, a adição acima também gera uma fração equivalente à $\frac{a}{b}$, sendo $\frac{c}{d}$, nesse caso, um elemento neutro da adição. Como o conjunto admite elementos negativos, ficam pressupostas a presença de elemento oposto e a definição da subtração. Além disso, a multiplicação por zero resulta em zero e, quando d = 1, a adição gera um número misto. Por fim, quando b = d = 1 simultaneamente, ambas as operações se reduzem às operações entre inteiros.

A forma de construção dessas operações as torna associativas e comutativas, garantindo também a distributividade da multiplicação sobre a adição e a regra de sinais para o produto. Além disso é coerente com alguns aspectos já vistos, como por exemplo a ordenação total do conjunto (tricotomia), a relação de ordem do produto e da soma e a propriedade do cancelamento. Assim, dados três racionais $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$:

- Ocorre exclusivamente $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, ou $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
- $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implica em $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$
- $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ se, e somente se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- Se $\frac{e}{f} > 0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implica em $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} < \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$
- Se $\frac{e}{f} < 0$, $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ implica em $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} > \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$
- Se $\frac{e}{f} = 0$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 0$ para quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} = \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$ com $\frac{e}{f} \neq 0$ implica em $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

O conjunto dos racionais, além de ser fechado para a divisão, difere do conjunto dos inteiros principalmente pelo fato de que um mesmo elemento é agora representado por uma classe de frações. Ainda assim se somamos ou multiplicarmos qualquer fração equivalente a $\frac{a}{b}$ com qualquer fração equivalente a $\frac{c}{d}$ obteremos como resultados frações equivalentes a, respectivamente, $\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$ e $\frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Essas observações decorrentes das definições garantem a relação dos elementos do novo conjunto com outras características previamente observadas. O elemento neutro da multiplicação (que até então era representado pelo número natural 1) passa agora a ser representado por qualquer fração $\frac{a}{b}$ tal que $a = b$. Já o elemento neutro da adição passa a ser representado por qualquer fração $\frac{a}{b}$ tal que $a = 0$.

Um último elemento precisa ainda ser definido: o elemento inverso. Ao garantir a existência do inverso multiplicativo no conjunto $\mathbb{Q}$, determina-se enfim que tal conjunto é fechado para as quatro operações básicas (considerando que a definição das operações anteriores garante que a adição, a subtração e a multiplicação de racionais gera outro racional). Assim, dado um racional $\frac{a}{b}$, é possível observar que o produto $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a}$. Esse produto, como possui numerador e denominador idênticos, é igual ao elemento neutro da multiplicação, o que permite concluir que $\frac{b}{a}$ é inverso de $\frac{a}{b}$ e que a operação de divisão entre dois racionais *r* e *r*' gera outro racional, que pode ser encontrado multiplicando-se *r* pelo inverso de *r*'.

Outro ponto a ser observado é que, sendo *x* um racional $\frac{a}{b}$ e tendo a e b um divisor *m* em comum, pode-se reescrever ambos como $a = m \cdot p$ e $b = m \cdot q$, com q não nulo. Assim, $x = \frac{m \cdot p}{m \cdot q} = \frac{m}{m} \cdot \frac{p}{q} = 1 \cdot \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$. Esse cancelamento é chamado de simplificação das frações, que é uma forma de encontrar frações equivalentes.

O objetivo de ressaltar essas características é atentar para o fato de que a descrição de um novo conjunto não só é motivada por aspectos externos ao conjunto como também deve envolver uma coerência entre seus aspectos *intensionais* e *extensionais*. Dito isso, visando aprofundar o estudo dos números, vale retomar a teoria das proporções de Eudoxo, presente no livro V dos *Elementos* de Euclides e que apresentava uma ordenação de frações.

Segundo o matemático grego, quatro grandezas de mesma natureza (*a*, *b*, *c* e *d*) possuíam a mesma razão de proporção se, para todo *m* e *n* inteiros positivos, temos que:

- $ma < nb$ implica em $mc < nd$
- $ma > nb$ implica em $mc > nd$
- $ma = nb$ implica em $mc = nd$

Essa afirmação, embora equivalha a dizer que "$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se $a \cdot d = c \cdot b$", difere em um detalhe: Eudoxo não exige que *a*, *b*, *c* e *d* sejam inteiros, já que usou sua definição apenas em aplicações geométricas que a mantinham válida para segmentos incomensuráveis. Ao observar esse detalhe, ressalta-se que os racionais não eram o suficiente para cobrir as medidas de todos os segmentos de retas, explicitando a demanda por outro tipo de número que, de acordo com essa observação, mantém de alguma forma as características dos racionais.

Tais características se resumem principalmente à capacidade de exprimir grandezas e de manter uma ordenação. A ideia implícita na definição de Eudoxo sobre a proporcionalidade dos quatro elementos *a*, *b*, *c* e *d*, como ressaltado por Roque (2012, p. 197) "é a de que, expandindo (ou contraindo) os dois primeiros de certa quantidade, os dois outros também serão expandidos (ou contraídos) da mesma quantidade".

> Com essa definição, a comparação de razões adquire um caráter geométrico. Os objetos matemáticos, na época [de Euclides], podiam ser números, grandezas, razões entre números e razões entre grandezas. A homogeneidade desses objetos só existirá

> quando a razão entre duas grandezas quaisquer puder ser identificada a um número, o que só será possível muitos séculos mais tarde, com a definição dos números reais. (ROQUE, 2012, p.197)

Assim, a nova demanda é por descrever esse novo tipo de número, que pode representar qualquer grandeza, a partir do princípio de permanência. Foi esse o trabalho proposto por Dedekind e Cantor.

2.3 As abordagens de Dedekind e Cantor na construção de $\mathbb{R}$

Sendo a potenciação uma operação de repetição de multiplicações, é possível concluir que não só os racionais como também os inteiros e naturais são fechados para a potência. Entretanto, retomando as construções dos conjuntos anteriores, observa-se que o conjunto $\mathbb{Q}$, mesmo sendo fechado para as quatro operações básicas e para a potenciação, não é suficiente para representar todos os resultados algébricos, já que a equação $x^2 = a$ não apresenta solução em nenhum dos conjuntos vistos quando a não é um quadrado perfeito (ou uma razão de quadrados perfeitos).

A equação $x^2 = 2$, por exemplo, pode representar a busca pela medida da diagonal do quadrado de lado 1. Partindo desse ponto, se poderia supor que o desafio agora seria o de encontrar um conjunto fechado para a operação inversa da potenciação. Entretanto, ao buscar números que representem medidas para qualquer segmento, nota-se que é preciso uma quantidade muito maior de representações do que aquelas que sejam resultados da radiciação de racionais.

> A determinação da diagonal de um quadrado e da circunferência de um círculo revelaram a existência de novos entes matemáticos para os quais não se encontrava lugar no domínio racional. A inadequação da aritmética racional foi então obrigatoriamente provada. Uma análise posterior mostrou que os processos algébricos em geral eram igualmente inadequados. Assim, ficou clara a inevitabilidade de uma extensão do campo numérico. (DANTZIG, 1970, p. 127).

Quando Dantzig afirma que “os processos algébricos eram igualmente inadequados” se refere principalmente à noção de que o número π (entre outros), além de irracional, era transcendente, não podendo ser determinado nem mesmo por equações algébricas. Por outro lado, o mesmo número possuía representação geométrica, sendo o comprimento da circunferência de diâmetro unitário. Isso mostra que o salto dos racionais para os reais é maior do que os saltos dos naturais para os inteiros ou dos inteiros para os racionais, pois surge de um processo mais abrangente do que o algébrico.

Foi assim que Dedekind, em seu *Essays on the theory of numbers*, após enunciar que o conjunto $\mathbb{Q}$ possuía as características de um corpo numérico, passa a comparar os números com os pontos da reta. O autor ressalta (1901, p.5)[18] que “outra característica do sistema dos racionais é ainda mais importante; podemos exprimi-la ao dizer que esse sistema forma um domínio bem ordenado de uma dimensão que se estende infinitamente para ambos os lados”.

Dedekind segue seu trabalho afirmando que o uso de ideias geométricas, externas à Aritmética, embora didaticamente eficiente, não supria a necessidade de demonstrar algebricamente a relação entre os racionais e a reta. Assim ele inicia a lista de características presentes nos racionais e que podem ser comparadas às noções de ponto:

- Dado um racional, qualquer outro racional distinto dele só pode ser menor ou maior que ele;
- Se um racional é maior do que outro e esse é maior do que o terceiro, então o primeiro é maior do que o terceiro;
- Dados dois racionais distintos, há uma infinidade de racionais entre eles;
- Por fim, cada racional divide o conjunto dos racionais em dois subconjuntos, sendo um formado pelos números menores que o racional dado e o outro formado pelos números maiores que o racional dado. Esses conjuntos são tais que todos os elementos de um são menores que qualquer elemento do outro. O próprio racional dado pode ser o menor elemento do subconjunto majoritário ou o maior elemento do conjunto minoritário.

Essa caracterização dos racionais é facilmente comparável às características do ponto, sendo a relação de desigualdade associada à ideia de que dados dois pontos distintos um só pode estar à esquerda (menor) ou à direita (maior) do outro. Assim como no conjunto descrito, um ponto divide a reta em duas semirretas onde todos os pontos da semirreta da esquerda estão à esquerda de qualquer ponto da semirreta da direita, sendo que o ponto dado pode ser pertencente à uma ou à outra, exclusivamente.

Essa é a ideia fundamental da teoria dos cortes de Dedekind. Para finalizar sua comparação, basta determinamos na reta um ponto origem que se relacione com o zero do conjunto $\mathbb{Q}$ e definirmos, a partir dessa origem, um segmento unitário cuja distância ao zero se relacione com a unidade do conjunto $\mathbb{Q}$. Assim, conclui-se que a cada número racional corresponde um ponto da reta. O problema dos irracionais surge justamente da percepção de que a recíproca não é verdadeira, sendo necessário determinar que outros números correspondem aos pontos da reta que não se relacionam com nenhum racional.

---

[18] As citações do livro “*Essays*...” são traduções livres feitas para o presente trabalho.

> Se nós tentarmos dar seguimento, aritmeticamente, a todos os fenômenos em uma linha reta, o domínio dos racionais é insuficiente e se torna absolutamente necessário que o instrumento $\mathbb{Q}$, construído pela criação dos racionais, seja essencialmente incrementado pela criação de novos números, de forma que o domínio dos números obtenha a mesma completude, ou como costuma-se dizer, a mesma *continuidade* da reta. (DEDEKIND, 1901, p. 9)

A ideia geradora dos números Reais é a noção de completude. Assim, uma vez determinada a necessidade de criar um conjunto numérico que fosse capaz de ter correspondência biunívoca com os pontos da reta, a preocupação de Dedekind foi a de criar um sistema que garantisse para esse conjunto o princípio de permanência. Esse sistema é o que ele chamou de cortes.

Dedekind define um corte como uma separação do conjunto dos racionais em dois subconjuntos disjuntos A_1 e A_2 de forma que todos os números a_1 do conjunto A_1 sejam menores que qualquer número a_2 do conjunto A_2. Tal corte passa a ser designado pelo par (A_1, A_2). Ressalta-se que todo número racional r pode ser representado por um corte quando r é o maior elemento de A_1 ou o menor elemento de A_2.

Uma vez definido o que é um corte, é possível notar que nem todo corte representa um número racional. Por exemplo, se dividirmos o conjunto dos racionais por um corte (A_1, A_2) tal que A_2 contenha todos os números cujo quadrado seja maior que 2 e A_1 contenha todos os outros números, é possível demonstrar que não há maior elemento em A_1 nem menor elemento em A_2.

De fato, em linguagem atual, definimos A_2 como o conjunto dos números racionais a_2 tais que $a_2 > \sqrt{2}$ e A_1 como o conjunto dos números racionais a_1 tais que $a_1 \leq \sqrt{2}$. Se houvesse um racional a_1 máximo, ele seria igual a $\sqrt{2}$, que não é racional. Por outro lado, sabemos não haver racional a_2 mínimo, pois sempre é possível encontrar uma aproximação melhor por excesso para $\sqrt{2}$.

Dedekind demonstra esse fato para um número genérico D que não seja quadrado perfeito, para enfim concluir a incompletude dos racionais. Enuncia então a criação de um número irracional a, definido por esse corte:

> ...sempre que temos de lidar com um corte (A_1, A_2) produzido por um número que não seja racional, nós criamos um novo, um número *irracional*, que nós consideramos completamente definido por esse corte (A_1, A_2); devemos dizer que esse número a corresponde a esse corte, ou ainda que produz esse corte. (DEDEKIND, 1901, p. 15)

Essa afirmação de Dedekind, de que o número irracional corresponde ou produz o corte, pode ser bastante controversa quando se tenta definir o que é número. O número é a entidade que produz o corte ou o corte é que define o que é o número? Essa é uma das questões que foram amplamente abordadas nos debates posteriores acerca da natureza dos números e será retomada futuramente. No momento a preocupação de Dedekind era apenas garantir que o conjunto de todos os cortes (produzidos por racionais ou irracionais) seguia o princípio de permanência.

Com o objetivo de evitar aqui alguma possível contradição na exposição do trabalho de Dedekind, ressalta-se que todo corte (A_1, A_2) agora pode ser identificado por um número, seja ele racional ou irracional. Assim, representaremos os cortes por a^*, b^*, c^*, etc., de modo que $a^* = (A_1, A_2)$, $b^* = (B_1, B_2)$, $c^* = (C_1, C_2)$, etc. Consideraremos também que quando $a^* = (A_1, A_2)$ é produzido por um racional, diremos que é um corte racional identificado pelo número a, sendo a o menor elemento de A_2 (chamado de supremo[19] de A_1) ou o maior elemento de A_1 (chamado de ínfimo de A_2). Por fim, lembrando que A_1 e A_2 são subconjuntos não vazios de $\mathbb{Q}$ formados de maneira que todo elemento de A_1 é menor que qualquer elemento de A_2, diremos que se $a^* = (A_1, A_2)$ não é produzido por um número racional, então é um corte irracional identificado pelo número α, que por sua vez não é elemento nem de A_1 nem de A_2 (pois são subconjuntos de $\mathbb{Q}$), mas é simultaneamente supremo de A_1 e ínfimo de A_2.

Desse modo, o próximo passo seria demonstrar que dados dois cortes a^* e b^* (formados por racionais ou irracionais) ocorre a tricotomia:

- Ou $A_1 = B_1$, sendo então $A_2 = B_2$, de modo que $a^* = b^*$. (Sendo os cortes identificados com irracionais $\alpha = \beta$ ou com racionais $a = b$)
- Ou existe um único elemento de A_1 ausente em B_1, (portanto presente em B_2), sendo esse elemento necessariamente o maior de A_1 e o menor de B_2, o que torna a^* e b^* cortes racionais identificados por a e b tais que $a = b$;
- Ou por fim, se existe mais de um elemento em A_1 que seja ausente em B_1, então há infinitos elementos em A_1 ausentes em B_1. Nesse caso, temos necessariamente a desigualdade $a^* > b^*$ (Sendo os cortes identificados com irracionais $\alpha > \beta$ ou com racionais $a > b$)
- Os outros casos são análogos, levando à conclusão de que $b^* = a^*$ ou $b^* > a^*$.

Uma vez definida a relação de ordem e demonstrada a tricotomia entre cortes, Dedekind garante as propriedades que tais relações devem ter: a igualdade é reflexiva, simétrica e transitiva enquanto a desigualdade é irreflexiva, antissimétrica e transitiva. Por

---

[19] Um número é supremo de um conjunto se é a menor cota superior desse conjunto, ou seja, se todos os elementos do conjunto são menores do que ele e nenhum outro número com essa característica é menor do que ele. Analogamente, o número é ínfimo de um conjunto se é sua maior cota inferior.

fim, mostra que o conjunto de todos os cortes, chamado agora de números Reais, é um conjunto contínuo de uma dimensão (como a reta). Qualquer separação desse conjunto em dois subconjuntos não vazios disjuntos U_1 e U_2 de modo que todo elemento de U_1 seja menor que qualquer elemento de U_2 é necessariamente produzida por um único número, racional ou irracional, que será supremo de U_1 ou ínfimo de U_2.

Esse teorema, chamado teorema do completamento, é demonstrado usando o fato de que a separação do conjunto $\mathbb{R}$ em U_1 e U_2 garante a existência e unicidade de um corte $a^* = (A_1, A_2)$ tal que todo elemento de A_1 está em U_1 e todo elemento de A_2 está em U_2. Assim, ele demonstra a propriedade da continuidade (de que todo número produz um corte e números diferentes produzem cortes diferentes), restando então definir as operações "+" e "·" em $\mathbb{R}$.

A adição de dois cortes a^* e b^* é dada por um terceiro par de conjuntos (C_1, C_2) tal que C_1 contém todo elemento $c \leq a_1 + b_1$, com a_1 elemento de A_1 e b_1 elemento de B_1. C_2 contém então todos os outros racionais que não estão em C_1. Note que o par (C_1, C_2) cobre todos os racionais produzindo uma separação em dois subconjuntos disjuntos e não vazios. Além disso, os seguintes casos podem ocorrer:

- Se a^* e b^* são cortes racionais identificados por a e b, indica-se a como elemento de A_1 e b elemento de B_1, de modo que C_1 tem elemento máximo $a + b$ que é ínfimo de C_2, tornando o par (C_1, C_2) um corte racional. (A escolha de incluir a como elemento de A_1 e b elemento de B_1 é arbitrária e não implica perda de generalidade, já que o corte não se altera quando se inclui a em A_1 ou em A_2.)
- Se a^* ou b^* são cortes irracionais, então C_1 tem um supremo que é ínfimo de C_2, tornando o par (C_1, C_2) um corte irracional.

Nota-se que o corte $o^* = (O_1, O_2)$ com O_1 contendo todos os racionais estritamente negativos é identificado com o 0 e que ao realizar a soma $(A_1, A_2) + (O_1, O_2) = (C_1, C_2)$ obtém-se um corte onde o supremo de C_1 é o supremo de A_1, sendo $c^* = a^*$. Desse modo, o corte o^* é o elemento neutro da adição no conjunto dos cortes. Com essa definição conclui-se que o conjunto dos reais possui uma operação + que carrega as características da adição dos racionais, sendo comutativa, associativa e com elemento neutro.

Uma vez definido o elemento neutro da adição, para que o conjunto dos reais seja verdadeiramente contínuo, é preciso definir o elemento oposto, ou seja, o corte $-a^*$ tal que $a^* + (-a^*) = o^*$. Define-se esse elemento como o corte (A_1', A_2') tal que A_1' contenha todos os racionais $-r$ tais que r seja um número superior de A_1, mas não o seu supremo. Dessa forma, a soma $(A_1, A_2) + (A_1', A_2')$ gera um corte (B_1, B_2) tal que B_1 contém apenas números negativos, mas não possui o zero, sendo esse seu supremo. Logo, (B_1, B_2) = o*, o que garante que (A_1', A_2') tal como foi definido é o oposto de (A_1, A_2).

Tendo definido o zero e o elemento oposto, a subtração pode ser enunciada de modo que $a^* - b^* = c^*$ quando $a^* = c^* + b^*$. Essa operação é a mesma que $a^* + (-b^*)$ e gera o corte c^* que existe e é único. Por fim, é preciso observar que, sendo a^*, b^* e c^* cortes com $a^* > b^*$, tem-se necessariamente $a^* + c^* > b^* + c^*$. Além disso, se $a^* + c^* = b^* + c^*$, então $a^* = b^*$.

O raciocínio desenvolvido até aqui segue a proposta de demonstrar numa sequência de passos a ordenação, a tricotomia, a adição e suas propriedades, bem como sua operação inversa e a relação entre a soma e a ordenação. Para completar a demonstração de que o conjunto dos reais forma um corpo numérico, é preciso ainda definir a multiplicação e demonstrar suas propriedades (elemento neutro, comutatividade, associatividade, distributividade, regra de sinais, relação de ordem dos produtos e cancelamento), ressaltando que a divisão é garantida pela existência do inverso multiplicativo. Em sua publicação, Dedekind evita essas demonstrações:

> Assim como a adição é definida, também o podem ser as outras operações da aritmética básica, ou seja, as diferenças, os produtos, os quocientes, a potências, as raízes, os logaritmos, e dessa forma chegamos à prova real de teoremas (como por exemplo $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), o que pelo meu conhecimento nunca foi estabelecido antes. (DEDEKIND, 1901, p. 22)

Para esse estudo, nos limitaremos a definir o produto de dois cortes a^* e b^* como sendo um terceiro corte c^* tal que C_1 contém todo elemento $c \leq a_1 \cdot b_1$, com a_1 elemento de A_1 e b_1 elemento de B_1. C_2 contém então todos os outros racionais que não estão em C_1. Esse corte existe e é único, garantindo todas as propriedades do produto e servindo de base para a definição do elemento inverso e da divisão.

Assim, Dedekind completa sua teoria: compara os racionais com cortes da reta, demonstrando que os cortes seguem o princípio de permanência. Demonstra que nem todos os cortes são produzidos por racionais, chama os outros cortes de irracionais e cria um conjunto que contém todos os cortes, racionais e irracionais, mostrando que esse conjunto é um corpo ordenado completo e contínuo.

O autor finaliza a primeira parte de seu livro com uma seção chamada *Análise Infinitesimal*, onde ressalta a importância da definição de um conjunto contínuo de números para o estudo dos infinitésimos. Utilizando o teorema da completude dos reais, explica que demonstrar a continuidade é equivalente a demonstrar os teoremas que afirmam que "se uma variável x cresce indefinidamente, mas não ultrapassa uma cota superior, então x converge para um limite" e "se uma variável x cresce de modo que, dado um δ positivo qualquer, a variação de x fica menor do que δ a partir de algum ponto, então x converge para um limite".

A relação entre os irracionais e a análise infinitesimal é indissolúvel. A inclusão dos irracionais no estatuto de número gera necessariamente o debate sobre a possibilidade de um número ser um processo infinito, além de apenas uma representação de ordem, ou de quantidades, ou ainda de razões de quantidades. Na segunda parte de seu livro, Dedekind (1901, p. 31) exprime suas ideias cobre a conceituação do que é número, afirmando que considera o "conceito numérico totalmente independente das noções e intuições sobre o espaço e o tempo, considerando-o um resultado imediato das leis do pensamento".

Tal afirmação é consonante com o pensamento de sua época e com a construção feita por Cantor, que é contemporânea à dele. A diferença principal entre Dedekind e Cantor é que o primeiro parte da ideia geométrica da continuidade e conclui os processos infinitesimais, enquanto o segundo segue um caminho inverso, chegando basicamente às mesmas conclusões. O próprio Dedekind reconhece a similaridades entre os trabalhos.

> Enquanto escrevo esse prefácio (20 de março de 1872), acabo de receber o interessante artigo *Ueber die Ausdehung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*, de G. Cantor (*Math Annalen, Vol. 5*), pelo qual eu devo ao engenhoso autor minha sincera gratidão. De acordo com minha leitura superficial, o axioma apresentado na Seção II do artigo, excetuando a forma de apresentação, está de acordo com o que eu designei na Seção III como a essência da continuidade. (DEDEKIND, 1901, p. 3)

A diferença entre os trabalhos dos dois autores reside principalmente na abordagem de três concepções distintas da noção de ponto. A primeira delas parece adaptar-se melhor a nossa ideia intuitiva de continuidade, concebendo o ponto como um elemento gerador que, em seu movimento, descreve a linha. As outras duas podem ser resumidas como "a marca deixada por uma reta quando recai sobre outra" ou "a extremidade de um segmento". (DANTZIG, 1970, p. 128),

A noção de ponto como intersecção de duas retas é a que se fez presente nos cortes de Dedekind. Como veremos a seguir, a ideia de Cantor se relaciona com o conceito de que todo segmento de reta se estende até um ponto limite (sendo esse limite a sua extremidade), concluindo assim que séries limitadas que não convergem para racionais só podem convergir para irracionais.

O trabalho de Cantor possui também uma diferença algébrica em relação ao de Dedekind, pois além de interpretar os racionais como razão de dois inteiros, os relaciona com sua representação decimal, cuja escrita finita (no caso dos decimais exatos) ou infinita (no caso das dízimas periódicas) pode ser organizada como a soma dos elementos de uma determinada sequência.

Assim, antes de seguir nossa exposição, pode ser útil apresentarmos algumas ideias prévias. Sabemos que qualquer fração pode ser representada utilizando o sistema decimal posicional como uma soma de frações decimais. Assim, podemos representar $\frac{5}{4}$ como $\frac{1}{1}+\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$ ou 1,25. Essa soma pode ser escrita como a soma dos elementos da sequência a_n = $\frac{1}{1},\frac{2}{10},\frac{5}{100},\frac{0}{1000},\frac{0}{10000}$, ... que possui os três primeiros termos previamente definidos e $a_n = 0$ para $n > 3$.

Sabemos também que uma classe de frações equivalentes possui representação decimal única. Além disso, dada uma fração formada por inteiros primos entre si (ou seja, a fração mais simples de sua classe), pode ocorrer que o denominador possua em sua fatoração um primo que não seja divisor de 10. Nesse caso, a fração não pode ser escrita como uma soma finita de frações decimais, sendo necessário acrescentar sempre uma nova casa decimal na representação.

Felizmente essa representação é sempre periódica, como por exemplo, a da fração $\frac{4}{11}$ = $\frac{36}{100}+\frac{36}{10000}+\frac{36}{1000000}$... Seguindo o caminho inverso, podemos dizer que a sequência dada por $a_n = \frac{36}{100},\frac{36}{10000},\frac{36}{1000000},... = \frac{36}{10^{2n}}$ gera a série $\frac{36}{100}+\frac{36}{10000}+\frac{36}{1000000}+$... que converge para o número racional $\frac{4}{11}$.

Dito isso, podemos definir formalmente o que é uma sequência de Cauchy. Dada uma sequência a_n qualquer, ela será dita de Cauchy se, para qualquer δ positivo, existe sempre um n_0 a partir do qual é possível encontrar m e n naturais maiores que n_0 tais que $|a_n - a_m| < \delta$. Em outras palavras, uma sequência é de Cauchy quando a diferença entre dois de seus termos diminui de tal forma que, escolhendo um número tão pequeno quanto se queira, é possível encontrar nessa sequência dois termos cuja diferença seja menor do que o número escolhido.

Particularmente, qualquer sequência constante possui $|a_n - a_m| = 0$, sendo assim uma sequência de Cauchy. Outra particularidade interessante é que qualquer sequência do tipo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ com $-1 < q < 1$ também é de Cauchy, sendo conhecida como progressão geométrica convergente. As progressões geométricas desse tipo geram séries do tipo a_n, $(a_n + a_{n+1})$, $(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})$, ..., que também são sequências de Cauchy cujo limite é definido por $\frac{a_1}{1-q}$. Desse modo, qualquer número racional pode ser escrito como limite de uma sequência.

Ocorre, entretanto, que existem ainda incontáveis números cuja representação decimal é infinita e não periódica. De fato, é possível imaginar infinitos números que se queira escrever sem uma repetição decimal periódica. Esses números são formados por sequências infinitas de frações decimais que seguem o critério de Cauchy. De fato, toda sequência de racionais convergente é de Cauchy.

O uso de frações contínuas já havia ressaltado alguma semelhança na forma de escrever números racionais e irracionais como sequências. O uso dos processos infinitesimais já havia levado os matemáticos a concluir que toda sequência convergente era de Cauchy. Entretanto, Cantor ressaltou que não era possível definir que uma sequência é convergente para um número se esse número não podia ser estipulado.

Com esse pensamento, Cantor enunciou que, sendo convergente toda sequência de Cauchy formada apenas por números racionais, essa convergência pode ocorrer de duas maneiras: ou seu limite é um número racional e, nesse caso, a sequência é representada pelo próprio número; ou seu limite não é um número racional e, nesse caso, a sequência determina um número irracional.

Nota-se que o raciocínio desenvolvido por Cantor se assemelha ao de Dedekind ao utilizar os conhecidos números racionais e sua insuficiência na resolução de algumas questões para definir a existência dos irracionais. Assim como Dedekind, a ideia de Cantor é postular que existe um conjunto formado por todas as sequências de Cauchy, que algumas sequências se identificam pelos racionais (sendo então equivalentes a eles) e as outras se identificam com irracionais (sendo também equivalente a eles).

O trabalho de Cantor se destaca nesse ponto principalmente por que Dedekind define os cortes como sendo gerados pelos racionais para então dizer que os cortes são os próprios números. Cantor pula essa etapa, já que o limite de uma sequência convergente não é gerado por um número, mas é o próprio número. Em outras palavras, como exemplificado anteriormente, uma sequência de racionais pode ser apenas uma maneira elaborada de reescrever um número racional.

Com base nessa ideia, antes de definir os irracionais, o trabalho de Cantor se ocupou em demonstrar que todas as formas de escrever um mesmo racional são equivalentes. Assim, a sequência constante $\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \ldots$ (que claramente é de Cauchy) equivale à sequência $\frac{36}{100}, \frac{3636}{10000}, \frac{363636}{1000000}, \ldots$ (que é a série gerada pela soma dos elementos de uma progressão geométrica, sendo também de Cauchy), de modo que ambas são iguais à $\frac{4}{11} = 0{,}363636\ldots$

Utilizaremos o símbolo (a_n) para representar sequências e a_n para representar cada elemento da sequência. Uma vez que as sequências são formadas por racionais, é simples definir as operações entre sequências, como $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, $(a_n) – (b_n) = (a_n – b_n)$, ou $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$. A divisão não pode ser definida da mesma maneira por que nem sempre é possível encontrar um termo $\frac{a_n}{b_n}$, já que pode ocorrer $b_n = 0$ para algum n. É importante observar que essas operações entre (a_n) e (b_n) (sendo ambas de Cauchy) geram novas sequências de Cauchy, ou seja, que as sequências de racionais cujo n-ésimo termo é $a_n + b_n$, $a_n – b_n$ e $a_n \cdot b_n$ também são convergentes. Essas conclusões não serão demonstradas, mas claramente levarão à verificação das propriedades das operações quando definirmos o conjunto dos reais.

Cantor enuncia então que duas sequências (a_n) e (a'_n) são equivalentes, se para qualquer δ positivo, existe sempre um n_0 a partir do qual para todo $n > n_0$ tem-se $|a_n – a'_n| < \delta$. Em outras palavras, $(a_n) = (a'_n)$ se a sequência formada pelos módulos das diferenças entre os termos a_n e a'_n de mesma posição em ambas as sequências converge para zero.

Com essa definição estabelece-se uma relação de equivalência (reflexiva, simétrica e transitiva) entre sequências de Cauchy de números racionais, podendo-se afirmar que o conjunto de todas essas sequências é fechado para essa relação. Resta então enunciar que o conjunto de todas as sequências de Cauchy é um corpo ordenado que contém os racionais. Chamam-se irracionais os limites das sequências que não convergem para um racional.

A partir desse ponto fica determinado o conjunto de todas as sequências (a_n), de Cauchy, formadas por números racionais. Além disso, dada a relação de equivalência desse conjunto, chamaremos de $[a_n]$ a classe de equivalência que contém a sequência (a_n). O limite de todas as sequências dessa classe será identificado também pelo símbolo $[a_n]$, podendo ser racional ou irracional. Chamaremos de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais) o conjunto de todos os $[a_n]$.

Antes de enunciarmos propriamente a adição e a multiplicação em $\mathbb{R}$ (visto que só descrevemos como ocorrem as operações entre sequências), é preciso definir o elemento neutro e a relação de ordem. O elemento neutro da adição, ou o zero do conjunto, deve ser representado pelo zero dos racionais. Dessa forma, pode-se concluir que a sequência $o_n = 0, 0, 0, \ldots$ (ou qualquer outra que equivalha a essa) representa a classe de equivalência do elemento neutro. Para simplificar a notação, chamaremos de (0), (1), etc. as sequências constantes formadas por racionais, sendo [0], [1], etc. os símbolos de suas classes de equivalência, cujos limites são, respectivamente, 0, 1, etc.

Para definir a relação de ordem, é preciso determinar primeiro quando uma sequência é positiva e quando é negativa. Diremos que uma sequência $(a_n) \neq (0)$ é estritamente positiva quando é possível determinar um racional r positivo e um natural n_0 a partir do qual tem-se $a_n \geq r$ para todo $n > n_0$.

Analogamente, uma sequência $(a_n) \neq (0)$ é estritamente negativa quando é possível determinar um racional r positivo e um natural n_0 a partir do qual tem-se $a_n \leq -r$ para todo $n > n_0$. Resta afirmar que, dada uma sequência positiva, todas as sequências de sua classe serão positivas. Dada uma sequência negativa, todas as sequências de sua classe serão negativas. Por fim, dadas duas sequências (a_n) e (b_n), dizemos $(a_n) > (b_n)$ se, e somente se a sequência $(a_n – b_n)$ for estritamente positiva.

Uma vez determinada a relação de ordem entre sequências, torna-se possível enumerar todas as características que fazem de $\mathbb{R}$ um corpo. Dados $[a_n]$, $[b_n]$ e $[c_n]$ números reais, podemos definir a adição e sua inversa:

- $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$ determina a soma de $[a_n] + [b_n]$. Ou seja, substituindo (a_n) ou (b_n) por uma sequência de sua classe, a soma se mantém. Além disso, $[a_n + b_n]$ também é elemento de $\mathbb{R}$. A adição é comutativa e associativa.
- $[0]$ é elemento neutro da adição de $\mathbb{R}$.
- Sendo $(a_n) > [0]$, todas as sequências de sua classe também serão. Temos então $[a_n] > [0]$.
- Sendo $(a_n) < [0]$, todas as sequências de sua classe também serão. Temos então $[a_n] < [0]$.
- Ocorre exclusivamente $[a_n] > [0]$, $[a_n] < [0]$ ou $[a_n] = [0]$.
- Todo $[a_n]$ admite um oposto $-[a_n]$ tal que $[a_n] + \{-[a_n]\} = 0$.
- Dados $[b_n]$ e $[c_n]$ existe um único $[a_n]$ em $\mathbb{R}$ tal que $[b_n] + [c_n] = [a_n]$.
- $(a_n) – (b_n) = (a_n – b_n)$ determina a subtração $[a_n] – [b_n]$. Ou seja, substituindo (a_n) ou (b_n) por uma sequência de sua classe, a diferença se mantém.
- $[a_n] – [b_n] = [c_n]$ se, e somente se $[b_n] + [c_n] = [a_n]$
- $\mathbb{R}$ é fechado para a adição e para a subtração: $[a_n] + \{-[b_n]\} = [a_n] – [b_n] = [a_n – b_n]$.

Dados $[a_n]$ e $[b_n]$ número reais, podemos definir a multiplicação:

- $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$ determina o produto $[a_n] \cdot [b_n]$. Ou seja, substituindo (a_n) ou (b_n) por uma sequência de sua classe, o produto se mantém. Além disso, $[a_n \cdot b_n]$ também é elemento de $\mathbb{R}$. A multiplicação é comutativa, associativa e distributiva sobre a adição.

- Se $[a_n]$ e $[b_n]$ são ambas positivas ou ambas negativas, temos $[a_n \cdot b_n]$ positiva. Se apenas uma delas for negativa, temos $[a_n \cdot b_n]$ negativa. Se ao menos uma delas for nula, temos $[a_n \cdot b_n] = [0]$.
- $[a_n] \cdot [1] = [a_n]$, ou seja, $[1]$ é elemento neutro da multiplicação.

Dados $[a_n]$, $[b_n]$ e $[c_n]$ número reais, podemos definir a relação de ordem:

- $(a_n) > (b_n)$ implica em $[a_n] > [b_n]$. Ou seja, substituindo (a_n) ou (b_n) por uma sequência de sua classe, a ordem se mantém.
- Ocorre exclusivamente $[a_n] > [b_n]$, $[a_n] < [b_n]$ ou $[a_n] = [b_n]$. Ou seja, o conjunto é totalmente ordenado. A relação de ordem é irreflexiva, transitiva e assimétrica.
- Se $[a_n] > [b_n]$, então $[a_n] + [c_n] > [b_n] + [c_n]$
- $[a_n] + [c_n] = [b_n] + [c_n]$ se, e somente se, $[a_n] = [b_n]$
- Se $[a_n] > [b_n]$, e $[c_n] > 0$, então $[a_n] \cdot [c_n] > [b_n] \cdot [c_n]$
- Se $[a_n] > [b_n]$, e $[c_n] < 0$, então $[a_n] \cdot [c_n] < [b_n] \cdot [c_n]$
- $[a_n] \cdot [c_n] = [b_n] \cdot [c_n]$ com $[c_n] \neq 0$ ocorre se, e somente se, $[a_n] = [b_n]$

Por fim, podemos enunciar o inverso multiplicativo. Dada uma sequência de Cauchy de racionais (a_n) que não pertença à classe $[0]$, é possível afirmar que existe um racional r positivo e um natural n_0 a partir do qual tem-se $|a_n| \geq r$ para todo n a partir de n_0, ou seja, (a_n) é positiva ou negativa. Definimos (b_n) como sendo a sequência formada por $b_n = \frac{1}{a_n}$ para $n > n_0$ e $b_n = 0$ para $n \leq n_0$. Ressalta-se que (b_n) também é uma sequência de Cauchy de racionais. Desse modo, temos $(a_n) \cdot (b_n) = (1)$, igualdade que se mantém quando substituímos (a_n) ou (b_n) por outra sequência de sua classe de equivalência. Temos então:

- Para todo $[a_n]$ em $\mathbb{R}$, existe um único $[b_n]$ em $\mathbb{R}$ tal que $[a_n] \cdot [b_n] = [1]$. Logo, o conjunto é fechado para a divisão.

Com isso conclui-se que o conjunto dos Reais determinado por Cantor segue o princípio de permanência. Em particular, observa-se que para cada r racional existe um elemento $[r]$ real que equivale a ele. Se observarmos que as operações de adição e multiplicação, bem como a relação de ordem, se mantém quando selecionamos elementos $[r]$ em $\mathbb{R}$ para aplicá-las, pode-se dizer assim que existe em $\mathbb{R}$ uma cópia do conjunto $\mathbb{Q}$, isomorfa ao próprio conjunto. Diremos, entretanto, que o conjunto $\mathbb{Q}$ está contido em $\mathbb{R}$.

A continuação do trabalho de Cauchy consiste em demonstrar para seu conjunto o teorema da completude, que garante que os elementos reais formam um contínuo. Para isso, vamos considerar que $\mathbb{R}$ é um conjunto denso (dados dois elementos distintos, é sempre possível encontrar outro elemento entre eles) e é arquimediano (dados dois elementos distintos, é sempre possível multiplicar o menor deles por um terceiro para que o produto supere o maior deles).

Com base nesses dois princípios, Cantor determina o teorema dos intervalos encaixantes, que consiste em determinar a existência de uma única menor cota superior (supremo) para todo subconjunto de $\mathbb{R}$ limitado superiormente (raciocínio análogo para cotas inferiores em subconjuntos limitados inferiormente).

Uma forma de enunciar esse teorema consiste em considerar o conjunto $\mathbb{R}$ como um espaço métrico (à exemplo da comparação de Dedekind entre os reais e a reta), sendo a medida de cada intervalo de $\mathbb{R}$ com extremos α e β (sendo α e β números reais) numericamente igual à $|\alpha - \beta|$. Uma vez considerada essa característica, segue que:

- Seja $\alpha = [a_n]$ uma classe de equivalência de sequências tal que (a_n) é monótona não decrescente.
- Seja $\beta = [b_n]$ uma classe de equivalência de sequências tal que (b_n) é monótona não crescente.
- Determina-se a escolha arbitrária de α e β de tal forma que cada elemento a_n é menor que cada elemento b_n e os intervalos $|a_n - b_n|$ formam uma sequência que converge para zero.

Desse modo, os números α e β (sendo os limites das sequências) convergem um para o outro, ou seja, é possível afirmar que existe um único número real pertencente a todos os intervalos gerados por $|a_n - b_n|$ conforme n aumenta.

Uma interpretação geométrica desse teorema consiste em considerar que, se dividirmos a reta em segmentos de medida x_i com extremidades A_i e B_i de medidas cada vez menores, mantendo a propriedade de que o segmento $A_{i+1}B_{i+1}$ deve estar contido no segmento A_iB_i, então teremos que a medida x_i tende à zero e existe um único ponto pertencente a todos os intervalos A_iB_i.

Esse último teorema garante a completude dos reais ao passo que, dado um real qualquer, é possível determinar duas sequências que convirjam para ele por falta e por excesso.

2.4 A reorganização dos números em conjuntos

Os esforços de Dedekind e Cantor em superar a incapacidade dos racionais para resolver uma série de questões não havia sido em vão. Os resultados de seus trabalhos levaram a teoria dos números a outro patamar, ampliando os horizontes e permitindo que outras teorias de enorme importância na matemática moderna se desenvolvessem. Algumas das consequências desses trabalhos serão tratadas mais adiante. No momento, é preciso ressaltar dois pontos que permaneciam encobertos mesmo após a inclusão dos irracionais e racionais num mesmo conjunto.

O primeiro ponto surge ao olharmos para as fundações do conjunto $\mathbb{R}$. Ambas as teorias dos irracionais se baseavam na existência dos racionais, que haviam sido construídos sobre os inteiros e naturais, que por sua vez ainda não haviam sido axiomatizados. Assim, o passo seguinte seria logicamente reduzir os naturais e suas operações a alguns conceitos primitivos que pudessem ser descritos a partir da linguagem natural e do senso comum, trabalho realizado por Peano.

O segundo ponto surge ao olharmos para os limites do conjunto $\mathbb{R}$. Retomando o desenvolvimento histórico é possível lembrar que o desenvolvimento dos reais havia partido de uma demanda que ia além da álgebra, envolvendo também a geometria. O estudo da geometria analítica e das funções carecia de interpretações para resultados numéricos como o π e os valores de x tais que $x^2 = a$, quando a não era um quadrado perfeito. Os reais, mesmo sendo um conjunto contínuo que era capaz de conter números transcendentes como o π, ou seja, números que iam além do que aqueles que configuravam resultados algébricos, ainda assim não eram capazes de conter respostas para todas as equações do tipo $x^2 = a$, deixando de lado aquelas em que a era um número negativo.

A impossibilidade de que o quadrado de um número real seja negativo está baseada na relação de ordem. A ordem dos números negativos exige que o produto de dois negativos resulte em um positivo: $(-a) \cdot (-b) = (a \cdot b)$. Desse modo, ao multiplicar os dois termos de uma desigualdade por um número negativo, a desigualdade deve se inverter para que a operação de multiplicação gere um produto coerente com a ordem de seus termos. Assim:

- Se $a > 0$, multiplicando os dois termos por a, tem-se $a \cdot a > 0 \cdot a \rightarrow \ a^2 > 0$
- Se $a < 0$, o sinal da desigualdade se inverte, de modo que $a \cdot a > 0 \cdot a \rightarrow \ a^2 > 0$

Como chega-se ao mesmo resultado das duas formas, e sabendo que o caso $a = 0$ gera $0^2 = 0$, conclui-se que qualquer número real quando elevado ao quadrado resulta em um número não negativo.

A resposta para a radiciação de negativos residia nos números complexos, cujas relações algébricas já haviam sido descritas a partir dos reais, antes mesmo desses elementos serem compreendidos como números. Unindo esse trabalho ao de Peano, estavam resolvidos os fundamentos e os horizontes dos reais, finalizando a instrumentação necessária para que a matemática futura descrevesse os conjuntos de forma encadeada, tal qual são apresentados nos dias atuais.

O que se apresenta nesse item é essa construção atual, partindo dos axiomas de Peano e seguindo uma linha quase homogênea dos naturais ($\mathbb{N}$) aos complexos ($\mathbb{C}$). Vamos primeiro definir o conjunto $\mathbb{N}$ a partir dos cinco axiomas de Peano, enumerados a seguir:

- 1 é um número natural.
- Todo número natural possui um sucessor que também é um número natural.
- 1 não é sucessor de nenhum número
- Números diferentes possuem sucessores diferentes
- Se um conjunto contém o 1 e admite a propriedade de conter o sucessor de qualquer um de seus elementos, esse conjunto é o conjunto dos números naturais, denotado por $\mathbb{N}$.

Fica claro que esses conceitos se referem à explicação dada anteriormente sobre o fato do conjunto $\mathbb{N}$ estar baseado na ideia do 1 e da sucessão que pode ser aplicada recursivamente até o infinito. O último axioma (conhecido como princípio da indução) garante o que Russel chamaria depois de hereditariedade, ou seja, afirma que a função sucessor ocorre de modo que o próximo elemento herde as características do anterior, tornando-se também um número natural.

Desse modo, o que está sendo definido aqui é o significado dos naturais a partir do senso comum de unidade e sucessão, garantindo um tipo de infinito que Cantor chamara de enumerável e sobre o qual falaremos adiante. A menos da ideia do infinito, os outros dois conceitos citados aqui (a saber: unidade e sucessor) são bastante presentes no senso comum, o que os torna fáceis de compreender embora não tão fáceis de definir.

A ideia de unidade, que pode ser vista informalmente como algo íntegro com princípio e fim bem definidos e que sirva de mônada para uma construção maior, é um conceito filosoficamente bastante discutível e de certa forma essencial para a compreensão do significado de número, de tal modo que o debate sobre sua definição se estendeu para muito além do trabalho de Peano.

Já a ideia de sucessão está intuitivamente ligada ao "que vem imediatamente depois na contagem", uma definição problemática devido ao fato que, sendo a contagem feita a partir do conjunto $\mathbb{N}$ (que estamos tentando definir), se torna recursiva. Utilizando um ponto de vista mais atual, é quase imediato imaginar a sucessão como uma função injetora (já que o primeiro elemento não está na imagem da função), $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, que leva cada número natural ao número seguinte e seria modernamente descrita como $f(x) = x + 1$. Entretanto ainda é preciso encontrar uma forma de utilizar essa ideia sem fazer uso do conceito "+"que ainda não foi definido.

Não obstante, essa compreensão não se faz absolutamente necessária para o trabalho de construção dos naturais e, consequentemente, das operações de adição e multiplicação e também dos conjuntos seguintes. Peano afirma apenas que existe um elemento, que classificaremos como um "número natural" e que tem por definição não ser sucessor de ninguém. Como todos os seus sucessores são também naturais, está definido o conjunto. Mesmo sem saber o que é esse algo, ou o que é sucessão, basta determinarmos um elemento de origem e uma relação que chamaremos de sucessão e teremos então a garantia de que essa origem com todos os seus sucessores formarão o conjunto $\mathbb{N}$.

Uma característica importante da apresentação feita por Peano é que ao declarar que todo número tem sucessor e que números diferentes tem sucessores diferentes ele define o que é um conjunto discreto. Essa característica é primordial nos Naturais, sendo ela que permite que qualquer conjunto discreto seja identificado com $\mathbb{N}$ de forma biunívoca.

Outro fator notável é que essa forma de introduzir os números se assemelha intencionalmente com a apresentação da Geometria Euclidiana, definindo elementos primitivos e estabelecendo relações entre eles. De acordo com esse método, os modelos utilizados para representar esses elementos primitivos ficam em segundo plano, sendo de menor importância. Assim, a teoria de Peano define um conjunto que pode ser perfeitamente representado pelo conjunto {1, 2, 3, 4, ...}, sendo esse apenas um modelo bem conhecido do que seriam os números naturais.

Esse tipo de abordagem define o caminho que a matemática vinha seguindo no final do séc. XIX e início do séc. XX. O trabalho que Cantor desenvolveu posteriormente a seus intervalos encaixantes seria consonante com esse pensamento, permitindo que a teoria dos conjuntos chegasse ao que é hoje, abrindo caminho para toda a linguagem atual utilizada na construção dos conjuntos numéricos. Alguns elementos dessa teoria, listados abaixo, são necessários para o que será exposto a seguir.

- A ideia de conjunto como coleção de elementos é um conceito primitivo.
- Um conjunto vazio não possui elementos.
- Um conjunto unitário possui um único elemento.
- Dois conjuntos são iguais se possuem exatamente os mesmos elementos.
- Os conjuntos podem ser finitos ou infinitos. Um conjunto finito pode ser definido reunindo todos os seus elementos separados por vírgulas. Já um conjunto infinito pode ser definido por uma propriedade que deve ser satisfeita por todos os seus membros.
- Dado um número x e um conjunto A, escrevemos $x \in A$ quando x pertence ao conjunto A e $x \notin A$ caso x não pertença ao conjunto.
- Caso todo o elemento do conjunto A pertença também ao conjunto B, diremos que "A é subconjunto de B", denotado por $A \subset B$.
- Denotamos por $A \cup B$ o conjunto que contempla simultaneamente todos os elementos dos conjuntos A ou B.
- Denotamos por $A \cap B$ o conjunto que contempla apenas os elementos que pertencem simultaneamente aos conjuntos A e B.

As possibilidades de combinações dessa lista de definições geram a complexa teoria dos conjuntos que, unida aos escritos de Peano e às construções feitas anteriormente, torna possível chegar à construção encadeada de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{C}$.

Com base nessa teoria, afirma-se que o sucessor de um conjunto x, simbolizado por $s(x)$, é dado por $s(x) = x \cup \{x\}$. Reescreve-se então os primeiros axiomas de Peano:

- Existe um número natural, chamado de zero, simbolizado por 0, identificado com o conjunto vazio, simbolizado por $\emptyset$ (ou seja, $0 = \emptyset$).
- Pela definição de sucessor, todo conjunto possui um sucessor. Afirma-se então que todo sucessor de um número natural é um número natural (ou seja, se x é natural, $s(x) = x \cup \{x\}$ também é natural).
- Com base na definição de sucessor, nota-se que o conjunto $\emptyset$ não é sucessor de nenhum conjunto (ou seja, não existe x tal que, $s(x) = \emptyset$).
- Também com base na definição de sucessor, nota-se que números naturais diferentes possuem conjuntos sucessores diferentes (ou seja, se $s(a) = s(b)$, então $a = b$).
- Um conjunto A é um conjunto sucessor quando $0 \in A$ e vale a condição: $n \in A \Rightarrow s(n) \in A$. Assim, um conjunto sucessor A deve conter o sucessor de qualquer elemento de A.

Assim, define-se axiomaticamente[20] que existe um conjunto sucessor que contém o 0 e o sucessor de cada um de seus elementos, sendo esse o conjunto $\mathbb{N}$. As bases do segundo, terceiro e quarto axiomas podem ser demonstradas pela definição de sucessor. Quando acrescidas da informação de que o sucessor de um natural também é natural, garante-se que todos os naturais estarão presentes no conjunto e que o conjunto dos naturais é único, não incluindo nenhum elemento não natural. Assim, a teoria dos conjuntos permite reduzir os axiomas à duas definições (primeiro elemento e sucessor) e à afirmação de que existe o conjunto sucessor infinito.

Embora Peano tenha iniciado os naturais pelo 1, a opção de colocar o 0 como primeiro elemento facilita a utilização da linguagem de conjuntos, podendo utilizar como princípio o conjunto vazio. Com base nessa definição, podemos obter o número 1 como o sucessor do conjunto vazio, o 2 como o sucessor do 1, e assim recursivamente:

$1 = s(\emptyset) = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

$2 = s(1) = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$; ou ainda $2 = \{\emptyset, 1\}$.

Se fizermos isso indefinidamente, será possível observar que um número natural é definido como o conjunto dos números naturais menores que ele e se relaciona com a quantidade de elementos presente nesse conjunto.

Além disso, a relação de equivalência é imediata, sendo reflexiva, simétrica e transitiva. A relação de ordem pode facilmente ser definida ao afirmar-se que dados a e b naturais, $a < b$ se, e somente se $s(a) \subset s(b)$. Segue a apresentação das operações entre a e b no conjunto.

Define-se a adição "+" em $\mathbb{N}$ de modo que:

- $a + 0 = a$
- $a + s(b) = s(a + b)$

Define-se a multiplicação "·" em $\mathbb{N}$ de modo que:

- $a \cdot 0 = 0$
- $a \cdot s(b) = a + a \cdot b$

Essas definições, construídas de forma recursiva, garantem as propriedades comutativa e associativa de ambas as operações, além da distributiva de · sobre +. Além disso, garantem o zero como neutro da adição e seu sucessor como o neutro da multiplicação. Se, ao invés de

[20] Esse axioma é conhecido como Axioma da Infinitude e é uma parte controversa do trabalho de Cantor, que será tratada posteriormente.

definirmos a primeira parte das operações partindo do zero, o fizéssemos partindo do 1 (como fizera Peano), teríamos $a + 1 = s(a)$ e $a \cdot 1 = a$, garantindo as mesmas propriedades.

O fato das operações serem definidas a partir da sucessão garante o fechamento do conjunto para essas operações, bem como a relação de ordem da soma e do produto, de modo que $a < b$ implique em $a + c < b + c$ para todo c natural e $a \cdot c < b \cdot c$ para todo c natural maior que 0. Além disso, se definirmos as operações antes de definir a relação de ordem, temos que $a < b$ se, e somente se existir um c natural tal que $b = a + c$.

Com isso ficam definidos todos os critérios que seriam necessários para a inclusão dos conjuntos numéricos no princípio de permanência. Vejamos como essas inclusões podem ser feitas utilizando a teoria dos conjuntos.

Define-se $\mathbb{Z}$ como o conjunto dos números inteiros, sendo um inteiro dado por qualquer par de naturais (a, b). A relação de igualdade é definida de modo que $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a + d = b + c$. Nessa construção, caracteriza-se cada número inteiro como sendo a diferença entre dois naturais, chamados aqui de a e b.

Desse modo, se $b > a$, tem-se que o número inteiro (a, b) equivale a um natural c tal que $a + c = b$, de onde conclui-se que, se $b = a$, o par (a, a) representa o número 0. Isso garante que há nos inteiros um conjunto isomorfo a $\mathbb{N}$, garantindo que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$. Além disso, se $b < a$, o par (a, b) representa um número negativo chamado de oposto de (b, a).

Essas definições prévias permitem a construção da relação de ordem, da adição e do produto:

- $(a, b) < (c, d)$ se, e somente se, $(a + d) < (b + c)$
- $(a, b) + (c, d) = (b + c, a + d)$
- $(a, b) \cdot (c, d) = (b \cdot c + a \cdot d, b \cdot d + a \cdot c)$

As consequências dessas definições são a regra de sinais e a relação de ordem entre somas e entre produtos. Para garantir que essas operações se reduzam às já conhecidas quando escolhemos dois naturais dentre os elementos de $\mathbb{Z}$, é preciso antes perceber que dados dois inteiros (a, b) e (a', b') tais que $(a, b) = (a', b')$, tem-se necessariamente:

- $(a, b) + (c, d) = (a', b') + (c, d)$ para todo (c, d) inteiro;
- $(a, b) \cdot (c, d) = (a', b') \cdot (c, d)$ para todo (c, d) inteiro; valendo as recíprocas.

Conclui-se então a construção do conjunto dos inteiros afirmando-se, como foi feito para os naturais, que dado um número inteiro seu sucessor também é inteiro. Como os inteiros contém o zero, os naturais e seus opostos, garante-se que esse conjunto existe, é único e não contém nenhum elemento não inteiro.

Essa construção dos inteiros é similar à dos racionais como pares de inteiros, que pode também ser escrita na forma de par ordenado (a, b) em vez da forma de fração $\frac{a}{b}$. A construção dos reais, por sua vez, não pode ser feita dessa maneira, uma vez que pressupões a existência de números que não são obtidos por operações entre racionais. Eis aí um ponto onde fica explícito que o salto dos racionais para os reais é maior do que os outros saltos entre conjuntos. Por fim, pode-se fazer a construção dos complexos como pares de reais, como está demonstrado a seguir.

Sabe-se que os complexos surgiram como forma de resolver equações algébricas que resultavam em raízes quadradas de números negativos, sendo a raiz quadrada de -1 chamada de unidade imaginária, representada pelo símbolo i e transformando a raiz quadrada de qualquer número negativo na forma $b \cdot i$.

Assim, qualquer número complexo pode aparecer na forma $z = a + b \cdot i$, de onde conclui-se que pode ser descrito de forma única por seus parâmetros a e b, sendo imaginário puro quando $a = 0$ e apenas real quando $b = 0$. O conjunto $\mathbb{C}$ pode então ser definido axiomaticamente como um corpo onde cada elemento é um número complexo z representado por um par (a, b) de números reais, onde a é denominado parte real e b é denominado parte imaginária. A relação de equivalência nesse conjunto é dada de forma que escolhidos dois elementos $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$ de $\mathbb{C}$, tem-se $z_1 = z_2$ se, e somente se $a = b$ e $c = d$.

Sejam $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ e $z_3 = (e, f)$ com a, b, c, d, e, f números Reais, definem-se para esse conjunto as seguintes operações de adição e multiplicação:

- $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$
- $z_1 \cdot z_2 = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c)$

Sendo a adição, subtração e multiplicação de reais previamente definidas, tem-se que essas operações são associativas e comutativas, valendo também a distributiva da multiplicação sobre a adição. É preciso ainda verificar se esse conjunto contém os números naturais e se essas operações se reduzem às operações habituais quando aplicadas aos naturais. Para tanto, consideremos que um número complexo z representa um número real quando sua parte imaginária é nula, ou seja, quando é da forma (a, 0). Desse modo, se a for natural, z representará um número natural. Aplicando as operações a dois números desse tipo, temos:

- $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0)$

- $(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 - 0 \cdot b) = (a \cdot b, 0)$

É possível observar que, sendo a e b números naturais e sendo + e · as operações habituais desse conjunto, os resultados da adição e multiplicação entre esses números resultarão respectivamente em $(a + b)$ e $(a \cdot b)$, cujas representações nos complexos serão exatamente as apresentadas, $(a + b, 0)$ e $(a \cdot b, 0)$, como era de se esperar.

Embora tudo pareça estar seguindo de forma a verificar todas as condições de Hankel, o conjunto dos complexos não é ordenado, como será exposto a seguir. Para isso, é preciso notar primeiro que as definições de operações como foram dadas são coerentes com o conceito do número imaginário.

Sendo $i = 0 + 1 \cdot i = (0, 1)$ e $-1 = 1 + 0 \cdot i = (-1, 0)$, nota-se que $i^2 = -1$:

- $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$

O ponto crítico, entretanto, está justamente no uso da potenciação. Como vimos no conjunto dos reais e nos conjuntos anteriores, a definição da relação de ordem leva à conclusão de que dados três elementos a, b e c de um corpo numérico com $c > 0$, tem-se $a \cdot c > b \cdot c$, o que leva à conclusão de que o quadrado de um número em um corpo numérico ordenado é sempre positivo. Qualquer relação de ordem desenvolvida entre complexos determinaria critérios para obter um número c positivo e, ao pressupor $a \cdot c > b \cdot c$, chegaria a uma contradição com o fato de se ter $i^2 = -1$.

A principal consequência dessa falha na inclusão dos complexos no princípio de permanência se relaciona novamente com as definições do que é número. Lembrando que Hankel havia definido que algo só poderia ser chamado de número se fosse elemento de um corpo numérico que deveria (dentre outras coisas) necessariamente ser ordenado, concluiríamos que os complexos não são números.

O que ocorre atualmente é que a classificação dos números, após o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, haveria de ser novamente alterada. Hoje chama-se Monoide qualquer estrutura algébrica munida de uma operação binária associativa com elemento neutro. Quando o conjunto contém elementos inversíveis da operação, ele se torna um Grupo. Se essa operação for comutativa, o conjunto é um Grupo Abeliano. Nota-se que os naturais formam um Monoide (comutativo) para a adição e para a multiplicação, mas não um Grupo pois não é fechado para as operações inversas. Os inteiros, por sua vez, formam um Monoide (comutativo) para a multiplicação e um Grupo Abeliano para a adição. O conjunto que tem essas duas características, quando possui distributiva da multiplicação sobre a adição, é chamado de Anel (comutativo se o Monoide for comutativo ou não-comutativo se o Monoide não o for).

Essa classificação de conjuntos é importante por que extrapola os conjuntos numéricos. O conjunto das matrizes quadradas de determinada ordem *n*, por exemplo, é um Anel não-comutativo pois representa um Monoide (não-comutativo) para a multiplicação e um Grupo Abeliano para a adição. Por fim, um Corpo é um Anel comutativo (ou seja, ambas as operações são comutativas) com inverso multiplicativo (além do inverso aditivo). Ou seja, os conjuntos dos racionais, dos complexos e dos reais são Corpos numéricos. A diferença entre tais corpos reside na incompletude dos racionais (embora denso) que não ocorre no contínuo dos reais, que por sua vez formam um Corpo ordenado completo, diferente dos complexos que, como pares de reais, também possuem completude, mas formam um Corpo completo não ordenado.

A ausência de ordenação do conjunto $\mathbb{C}$ é condizente com sua representação geométrica no plano de Argand-Gauss da mesma forma que a ordenação do conjunto $\mathbb{R}$ é condizente com sua representação geométrica na reta, explicitando suas naturezas distintas. Como veremos adiante, a completude presente nos complexos e nos reais garante para esses conjuntos um tipo de infinito distinto do infinito presente nos naturais, inteiros e racionais.

2.5 Mais um tipo de número: os transfinitos.

Os caminhos percorridos pela Matemática frequentemente acontecem em espiral. Os problemas que demandam novos estudos comumente originam teorias que, ao serem aplicadas na resolução de tais problemas, deflagram novos questionamentos que até então permaneciam adormecidos. O estudo do contínuo e as novas concepções de número, embora respondessem às questões geradoras de seus desenvolvimentos, trariam para a Matemática uma série de novas empreitadas na compreensão do material do qual essa ciência é feita.

De acordo com o que foi exposto, a ampliação dos conjuntos numéricos surgiu principalmente de uma demanda algébrica, excetuando a construção dos reais que pressupunha também uma completude geométrica capaz de satisfazer, além dos resultados algébricos, suas representações no plano. A solução para o contínuo havia sido encontrada no estudo do infinito, envolvendo assim o Cálculo e a Análise.

Retomando pela última vez o processo histórico que foi percorrido até aqui, é preciso lembrar que não só os números como toda a Matemática vinha sendo reformulada desde o século XVIII. Com o advento da análise infinitesimal, o estudo da Matemática se concentraria no desenvolvimento de relações e funções, se distanciando da Aritmética e do número, que até então eram o escopo central dessa ciência. No século XIX o próprio conceito de função começava então a ser reformulado, ganhando um nível ainda maior de abstração.

Amigo de Dedekind, o matemático Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) havia estudado as somas de sequências infinitas, que haviam sido previamente desenvolvidas por Brook Taylor (1685 – 1731), sendo seguido por Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) e, como já exposto, por Cauchy. O foco de Dirichlet eram as séries de Fourier, formadas por aproximações trigonométricas para funções gerais, envolvendo parâmetros que eram obtidos por integração de funções seno e cosseno.

Ao pesquisar as condições que uma função deveria satisfazer para ser integrável, Dirichlet terminaria por criar uma função cujo comportamento era completamente contraintuitivo. Sua função era definida de modo que a imagem de x seria 0 se x fosse racional e 1 caso contrário. Essa função era descontínua em todos os pontos, não podendo ser integrável ou derivável em nenhum intervalo, e impossível de ser descrita por uma única sentença ou representada por uma série de Fourier.

Ao propor tal desafio, o matemático trazia à luz o desconhecimento geral sobre a distribuição dos racionais e irracionais e alterava também o conceito de função, que até então era visto como uma sentença algébrica formada por duas variáveis. Mesmo não tendo ainda a abordagem atual relacionada ao produto cartesiano entre dois conjuntos, a função de Dirichlet deixava de lado a necessidade de representação algébrica para inaugurar o conceito de função como conjunto de pares ordenados onde para cada valor da variável x há uma imagem y que corresponde a ele.

> A predominância do ponto de vista conceitual em matemática, que abriu caminho para a abordagem conjuntista, foi estimulada por Dirichlet. Mas essa tendência seria reforçada por Riemann e Dedekind. Ambos se dedicaram mais diretamente à compreensão das teorias matemáticas sem recurso a representações externas. Segundo eles, os novos objetos matemáticos deviam ser definidos por suas características internas e admitidos como princípios da teoria. Essa ausência de referência externa pode ser vista como a inauguração de uma nova fase de abstração, que transformará definitivamente a matemática em matemática “pura”. (ROQUE, 2012, p. 460)

Desse modo, no campo da teoria dos números, a mudança de foco da Matemática ia em direção à Álgebra, se deslocando da Aritmética. Ao desenvolver a aplicação dos complexos no plano no início do séc. XIX, Gauss iniciara o processo de construção do conceito mais abstrato de número, que não precisaria mais ser algo representante de uma quantidade. Essa nova forma de conceituação é que seria a base da teoria de Hankel, que unida aos trabalhos de Hamilton e de Gauss formalizaria a existência dos complexos.

A associação de cada ponto (a, b) do plano a um único número z, não só explicita a impossibilidade de ordenação desses números, como simboliza a natureza distinta do conjunto que os contém, em comparação com o conjunto $\mathbb{R}$. O trabalho de Hamilton com os complexos traria para a matemática o conceito de vetor, utilizando a representação polar dos complexos e diferenciando o plano cartesiano do plano de Argand-Gauss. Assim, embora os reais e os complexos sejam chamados de números, e mesmo havendo em $\mathbb{C}$ uma cópia isomorfa de $\mathbb{R}$, os dois tipos de números são entidades matemáticas utilizadas para representar grandezas diferentes, sendo os reais utilizados para grandezas escalares e os complexos utilizados para grandezas vetoriais.

No último quarto de século, a matemática “pura” mostrava ser a única matemática do futuro. As grandezas escalares e vetoriais podiam ser ambas chamadas de números por que o estudo das relações entre os elementos de uma teoria era suficiente para definir que tipo de elemento era esse. Essa nova abordagem partindo dos aspectos *intensionais* de cada campo havia aberto espaço para o surgimento das geometrias não euclidianas, quebrando paradigmas milenares.

O estudo dos reais seria então um fator de reunião e reencontro entre os números e as funções, auxiliando na compreensão da distribuição dos racionais e irracionais ao longo da reta, permitindo novas interpretações sobre o conceito de continuidade de funções, raízes, limites, derivações e integrações. Entretanto, Cantor se detivera sobre outras questões, focando no estudo acerca da organização dos números, da natureza dos elementos e das relações que esses elementos estabeleciam, seja entre pares do mesmo conjunto, seja entre pares de conjuntos distintos.

Assim, o matemático se dedicara ao desenvolvimento da teoria dos conjuntos, classificando-os em finitos ou infinitos, de modo que os primeiros podiam ser descritos a partir da listagem de seu conteúdo, enquanto os outros haviam de ser descritos a partir de uma característica que fosse comum a todos os seus elementos. É esse o ponto de vista que define os naturais como o conjunto que contém a unidade e todos os números obtidos pela sucessão.

A possibilidade de que se pode afirmar algo sobre conjuntos infinitos não era bem aceita por uma grande corrente de matemáticos da época. O raciocínio indutivo era tido como um subterfúgio de lógica circular, garantindo apenas que algo seria infinito se pudesse ser feito infinitas vezes. Questões filosóficas acerca das dicotomias entre raciocínio empírico ou *a priori*, analítico ou sintético, dedutivo ou indutivo eram inflamadas constantemente, e ainda assim o infinito permanecia entranhado nos estudos numéricos.

Ao diferenciar os dois tipos de conjuntos, Cantor chegara a um método de contagem, partindo de uma abordagem do conceito de cardinalidade. Em conjuntos discretos e finitos, é possível contar a quantidade de seus elementos relacionando cada um deles a um elemento natural ordinal. Dois conjuntos com a mesma quantidade de elementos possuíam assim a mesma cardinalidade. A relação entre x e y na qual as funções tinham se transformado permitiria a identificação entre essa contagem e a função bijetora.

A partir dessa concepção, pode-se afirmar que dois conjuntos possuem a mesma cardinalidade quando existe uma correspondência biunívoca entre seus elementos, ou seja, quando é possível estabelecer entre eles uma função bijetora. Essa correspondência independe da ordem que os elementos possuem no conjunto, de modo que a ordinalidade e a cardinalidade dos números ficam explicitamente distintas, sendo características independentes.

Assim, no caso de conjuntos infinitos (sejam infinitos discretos como os inteiros, contínuos limitados como o intervalo [0,1] ou infinitos contínuos como os complexos), mesmo não sendo possível determinar a quantidade de seus elementos, ainda é possível dizer quando dois deles possuem a mesma cardinalidade. Com base nesse princípio, Cantor demonstra que existe uma bijeção entre os naturais e os números pares, assim como entre eles e os números ímpares.

A cardinalidade de um conjunto infinito passa assim a ser considerada como a potência desse infinito. A demonstração de que o conjunto $\mathbb{N}$ possuía a mesma cardinalidade que um subconjunto seu faria com que Cantor redefinisse esse tipo de coleção, percebendo que um conjunto é infinito se, e somente se, possui a mesma potência de algum subconjunto próprio. Além disso, é possível agora demonstrar que não só o infinito dos inteiros possui a mesma potência do infinito natural como até mesmo a densidade dos racionais possui essa mesma potência, fato que só pode ser demonstrado sabendo que a cardinalidade independe da ordenação dos elementos.

Ao dar continuidade a seus estudos, Cantor notou que a cardinalidade dos números algébricos também era a mesma dos naturais, fornecendo um infinito de mesma potência. Por outro lado, isso não ocorria com os irracionais, de modo que os reais tinham de possuir uma potência maior. Com isso Cantor conclui que também os transcendentes possuem uma potência superior à dos Naturais.

O estudo dessas potências daria então origem a novos números, chamados de transfinitos e detentores de uma álgebra própria. Os transfinitos são construídos de forma que sua cardinalidade é distinta de sua ordinalidade, como pode ser visto na sequência de passos a seguir:

- Cantor chama de ω o número que indica o maior número natural, ou seja, o infinito enumerável.
- Se organizarmos os naturais de forma a contar primeiro os ímpares e depois os pares, teremos 1, 3, 5, ... 2, 4, 6, ..., chegando à ω duas vezes.
- Ao elaborar essa ordenação, encontra-se um ordinal ω · 2 que é o mesmo ordinal que encontramos ao ordenar os inteiros começando pelos positivos e em seguida ordenando os negativos.
- Independente disso, todos os ordinais ω, ω + 1, ω + 2, ..., ω · 2, ... possuem a mesma cardinalidade, pois são enumeráveis (não formam o contínuo dos reais) e possuem uma relação biunívoca com o conjunto $\mathbb{N}$.
- Essa cardinalidade foi chamada por Cantor de $\aleph_0$, que é o número cardinal associado ao ordinal ω e determina a potência dos conjuntos enumeráveis.

Desse modo, os transfinitos mostram ser números que possuem cardinalidade e ordinalidade distintas e que apresentam uma álgebra muito peculiar, onde ω + 1 difere de 1 + ω e onde $\frac{\aleph_0}{2} = \aleph_0$. A potência do conjunto das partes de $\mathbb{N}$ seria então $\aleph_1$, que por sua vez é também a potência dos números Reais, fato esse que é condizente com a teoria dos cortes de Dedekind.

A continuação do trabalho de Cantor seria então descobrir se havia um infinito maior que todos os infinitos, uma vez que é possível determinar $\aleph_2$como sendo a potência do conjunto das partes de $\mathbb{R}$ e seguir esse processo indefinidamente. Além disso, Cantor procurava demonstrar que não haviam potências de infinito intermediárias entre $\aleph_0$ (chamado de infinito enumerável) e $\aleph_1$(chamado de infinito contínuo).

Cantor perderia sua sanidade mental antes de responder a essas questões, mas seu trabalho serviria de alicerce para que nomes expoentes da lógica defendessem a refundamentação total da Matemática, buscando livrar-se da linguagem natural e reescrevendo todos os teoremas e estruturas existentes a partir de axiomas bem definidos e erguidos sobre a teoria dos conjuntos. Esse levante seria o estopim para que os intuicionistas criticassem os novos rumos da Matemática, reclamando de volta os aspectos *extensionais* e a busca pelas aplicações dos estudos matemáticos à realidade que podia ser absorvida por nossos sentidos, o que não ocorreria enquanto lidassem com processos infinitos.

Nesse contexto, Frege escreveria os *Fundamentos da Aritmética*, buscando simultaneamente definir o que seriam os números naturais e compreender a natureza dos números em geral:

> Quando um conceito que serve de base a uma importante ciência oferece dificuldades, torna-se tarefa irrecusável investigá-lo de modo mais preciso e superar estas dificuldades, em particular porque dificilmente conseguiríamos esclarecer totalmente os números negativos, fracionários e complexos enquanto nossa compreensão dos fundamentos do edifício global da aritmética fosse ainda defeituosa. (FREGE, 1992, p. 30)

O ano de encerramento do século XIX seria o ápice da batalha entre os lógicos e os intuicionistas, representados principalmente por Hilbert e Poincaré, respectivamente. Em sua palestra no congresso internacional dos matemáticos de 1900, Hilbert afirmou que não deveria haver espaço na Matemática para intuição, elaborando uma lista de problemas que a Matemática deveria resolver de forma dedutiva, baseada em axiomas livres de qualquer noção de verdade "natural", satisfazendo apenas a exigência de ser logicamente compatível. (DOXIADIS, 2010, pp. 145 – 150)

Um dos problemas propostos por Hilbert era o desenvolvimento de uma linguagem capaz de julgar de forma consistente qualquer afirmação como verdadeira ou falsa. A resolução desse problema seria a meta de Russel, que se uniria a Whitehead na busca de Frege pela verdade, desenvolvendo uma linguagem lógica simbólica que pudesse representar a realidade livre de contradições. Nesse período Peano faria a fundamentação definitiva dos Naturais e seguiria na busca de uma axiomatização completa da matemática.

Os intuicionistas perderiam aos poucos a potência de sua voz. A linguagem da Lógica seria erguida sobre a teoria dos conjuntos, uma vez que toda a matemática começava a se organizar pela relação entre objetos, que por sua vez eram caracterizados de acordo com as peculiaridades que os definiam. A busca, entretanto, seria barrada pela percepção de Russel de que não podia existir o "conjunto que continha todos os conjuntos que não continham a si mesmos". O paradoxo de Russel seria a prova que Cantor precisava para se livrar da busca por um conjunto que contivesse todos os outros. Seria também um duro golpe em todos que, como Frege, buscavam fundamentar a matemática inteira na teoria dos conjuntos.

Frege estaria terminando sua segunda edição dos *Fundamentos da Aritmética* quando recebeu a carta de Russel contendo sua descoberta. O paradoxo tornava toda a fundamentação de Frege inconsistente. Um sistema é dito completo se qualquer afirmação pode ser julgada por ele e é dito consistente se o veredito gerado por esse julgamento nunca é contraditório. A elaboração de uma linguagem que forme um sistema completo e consistente, entretanto, depende de uma metalinguagem, uma vez que ela própria precisa ser definida em outros termos. Alguns anos depois, Kurt Friedrich Gödel (1906 – 1978) demonstraria que qualquer sistema seria sempre ou incompleto ou inconsistente.

Antes disso, Russel defenderia a teoria dos tipos como forma de contornar seu paradoxo e a teoria dos conjuntos seria abordada por Ernst Zermelo (1871 – 1953), propondo uma axiomática que fosse capaz de contornar algumas dificuldades acerca dos conjuntos infinitos. Alguns anos depois esse trabalho seria retomado por Adolf Fraenkel (1891 – 1965), criando o que ficou conhecido como teoria dos conjuntos de Zermelo- Frankel (ZF).

Essa teoria admite o axioma do infinito que, como citado, declara a existência de um conjunto que contém o zero e os seus sucessores e, portanto, define axiomaticamente a existência do infinito enumerável. Hoje é uma axiomática que substitui a de Cantor, agora chamada de "teoria ingênua dos conjuntos". Em sua forma mais conhecida, essa nova teoria possui um adendo chamado de axioma da escolha, formando a teoria ZFC (Zermelo-Frankel-Choice).

Foi a partir dessas novas abordagens conjuntistas que se chegou ao cenário que, como citado no início do capítulo anterior, ficaria conhecido como MMM, Movimento da Matemática Moderna, gerado pela disseminação entre as instituições de ensino das publicações de Nicolas Bourbaki.

> A imagem de que a matemática é um saber axiomatizado baseado nas noções de conjunto e estrutura foi popularizada por Nicolas Bourbaki, a partir de 1939 [...]. "Bourbaki" é o pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses dos anos 1930 cujo objetivo era elaborar livros atualizados sobre todos os ramos da matemática, que pudessem servir de referência para estudantes e pesquisadores. (ROQUE, 2012, p. 473)

A disseminação do método axiomático e da abordagem conjuntista através da educação matemática, atingindo os cursos de formação de professores e todo o ciclo básico, seria o principal combustível para o debate acerca da necessidade de relações *intensionais* e *extensionais* entre objetos matemáticos, argumentando em favor da *complementaridade*. As possíveis abordagens filosóficas acerca da questão "o que é número? ", em especial nos aspectos didáticos, podem gerar severas críticas ao método axiomático e ao ensino atual. No capítulo seguinte serão expostas tais abordagens filosóficas em paralelo aos possíveis incrementos que podem ser obtidos a partir dos números de Conway.

3 O CONCEITO FILOSÓFICO DE NÚMERO

3.1 Realismo, nominalismo e conceitualismo

A Matemática, bem como a Filosofia, é uma ciência que se debruça sobre a realidade e suas formas de interpretação. A relação entre essas duas ciências não pode ser minimizada, de modo que falar sobre uma filosofia da matemática implica necessariamente em escolher um recorte. Desse ponto de vista, fica claro que uma apresentação completa do desenvolvimento desse ramo do pensamento se mostraria demasiado longa, sendo esse estudo insuficiente para realizá-la (o que tampouco é a intenção).

Há muito que a Matemática deixou de ser uma ciência dos números e das formas. O desenvolvimento das relações entre esses signos, munido das operações aritméticas, das construções geométricas e da análise, transformou o estudo matemático em algo muito mais abrangente, um tanto mais abstrato e certamente mais relacional do que objetivamente concreto. Desse modo, mesmo a teoria dos números pode ser abordada sob diversos aspectos filosóficos que se distanciam gradualmente de um estudo sobre quantificações.

O questionamento acerca da natureza do número remeteria o curioso a um estudo minucioso de Platão e Aristóteles, só para citar alguns nomes gregos. Não se pretende aqui ir tão longe ou tão a fundo: esse capítulo se aterá às correntes mais recentes que se debruçaram sobre a teoria dos números, focando na disputa entre intuicionistas e logicistas citada no fim do capítulo anterior. Tal disputa pode ser, de certa forma, comparada à reflexão filosófica intensa da Idade Média sobre o que seriam os *universais*, conceito da metafísica[21] relacionado à nossa forma de agrupar diferentes objetos sob o mesmo signo.

Uma forma (talvez simplória) de definir os *universais* é entende-los como entidades abstratas de múltipla realização, a exemplo da vermelhidão, da solidez ou da beleza. Tais características se manifestam pluralmente na realidade observável, fazendo com que, ao nos relacionarmos com um objeto, possamos dizer se é vermelho, belo ou sólido. A corrente filosófica que defendia a existência dos *universais* (concebidos como objetos reais), ficou conhecida como realismo. Em oposição ao realismo, surgia o nominalismo que defendia a ideia de que tais entes não existiam de forma independente, sendo apenas nomes dados de forma particular às características de um ou outro objeto.

---

[21] A metafísica é um dos principais ramos da filosofia e se ocupa das questões existenciais, das categorias básicas do ser e da totalidade do universo. Embora a matemática se relacione com diversos ramos da filosofia, a pergunta “o que é número” pode ser melhor abordada se inserida no campo da metafísica.

Dentro da mesma corrente podem haver divergências, já que além da compreensão do que é o objeto estudado há também o debate sobre como se dá o acesso a esse objeto. Platão e Aristóteles eram ambos realistas, embora diferissem na forma de compreender o acesso que temos aos *universais*: para Platão, os *universais* seriam entes que existem em algum lugar fora do espaço-tempo e se manifestavam nas coisas observáveis. Para Aristóteles, entretanto, tais entes seriam criados por nossa capacidade de abstração.

> Platão e Aristóteles legaram-nos duas perspectivas modelares para a compreensão da natureza dos objetos matemáticos, e nosso modo de acesso a eles. Na de Platão a figura geométrica e o número são vistos como formas puras a que ascendemos por meio exclusivo da razão, sem nenhum concurso dos sentidos. Já Aristóteles não acreditava na independência das formas matemáticas e preferia vê-las simplesmente como aspectos do mundo real, a que temos acesso por um processo de abstração necessariamente fundado na experiência. (SILVA, 2004, p. 1)

Assim, mesmo crendo na existência do número como entidade, o realismo não era assertivo quanto à sua natureza. O nominalismo, por sua vez, não podia crer nessa existência pura, se atendo apenas à ideia do número como característica pontual desse ou daquele objeto. De acordo com essa corrente, os conceitos matemáticos seriam variáveis de acordo com quem os enuncia, não sendo possível um desenvolvimento lógico e coerente da teoria dos números.

> O nominalismo, entendido como teoria que nega o valor ideal e autônomo da Matemática, reduzindo-a à interpretação ou tradução mental de realidades e relações concretamente existentes, é insuficiente para justificar a natureza e a existência de conceitos matemáticos. A teoria dos números não pode ser interpretada exclusivamente por uma visão nominalista. (FONSECA, 2010, p. 106)

Além do realismo e do nominalismo, uma terceira corrente se difundiu na Idade Média acerca desse assunto: o conceitualismo, que embora acreditasse na existência real dos *universais*, os entendia como criações do espírito humano e não como pré-existentes fora dele. Essa terceira corrente compunha o debate da época acerca dos conceitos numéricos. De forma grosseira pode-se dizer que, na teoria dos números, o logicismo é afluente do realismo platônico, enquanto o intuicionismo decorre do conceitualismo.

Para os realistas platônicos, ascendíamos aos números por meio da razão, *a priori*. Para os realistas aristotélicos, esse acesso seria empírico. Para os logicistas, as leis da matemática eram analíticas. Para os conceitualistas, eram sintéticas. Partindo desse ponto de vista e com o objetivo de compreender como o número era interpretado por logicistas (partindo do realismo platônico e seguindo até o formalismo de Hilbert) e intuicionistas (partindo do conceitualismo de Kant até o construtivismo de Brower)[22], faz-se primeiro necessário um olhar para algumas concepções criadas previamente, a saber: empirismo e apriorismo, indução e dedução, análise e síntese.

---

[22] Os trabalhos de Immanuel Kant e Luitzen Egbertus Jan Brower serão melhor citados adiante

3.2 Métodos de acesso ao conhecimento

Como já foi visto, empírico é aquilo obtido pela experiência sensorial, enquanto *a priori* é o que pode ser desenvolvido sem a necessidade da experiência. Entretanto, não é possível identificar um conhecimento empírico como sendo simplesmente aquele "abstraído" da experiência, já que a abstração é um processo mental pouco definido. Por exemplo, não se pode afirmar que o tipo de conhecimento obtido ao abstrair a quantidade "dois" de um par sapatilhas vermelhas é do mesmo tipo daquele obtido ao abstrair-se, do mesmo par, a "vermelhidão".

Tais abstrações diferem pelo fato de que a cor pode ser entendida como uma característica própria do objeto, diferentemente do número. O conceito de número, já nesse exemplo, mostra sua natureza difícil de se obter. Assim, um fato empírico pode ser melhor definido como aquele cuja justificativa de sua veracidade só pode ser dada pela observação da realidade sensorial.

É nesse sentido que o número (de acordo com algumas correntes de pensamento) pode ser entendido como um fato *a priori*, pois pode ser definido por processos mentais para só então ser aplicado ao mundo objetivo (par de sapatilhas), não necessitando dele para ser verdadeiro. Já a compreensão empírica do número exigiria que todo conceito numérico derivasse de modelos reais.

> A perspectiva platônica é o modelo de todas as versões realistas da filosofia da matemática, reconhecíveis por distinguirem nitidamente o mundo matemático do mundo empírico. A aristotélica, por sua vez, é a versão prototípica das filosofias empiristas da matemática, caracterizadas por negarem-lhe um domínio próprio supra-empírico. O calcanhar de Aquiles das filosofias realistas é o problema do acesso: como percebemos, com a razão apenas, o mundo matemático, sem o concurso dos sentidos? O empirismo, por seu lado, tropeça na questão epistemológica: se os juízos matemáticos são afinal juízos sobre o mundo empírico, ainda que considerado por um aspecto particular, por que eles não estão sujeitos quanto à justificação - como de fato não estão - ao testemunho dos sentidos? (SILVA, 2004, p. 1)

Immanuel Kant (1724 – 1804) fora um filósofo prussiano de grande contribuição para a filosofia e, em particular, para a filosofia matemática, sendo um dos principais defensores do conceitualismo. Seus tratados acerca das formas pelas quais elaboramos o que nos é dado empiricamente ou *a priori* foram definitivas na compreensão atual do que consideramos como pensamento analítico, sintético, dedutivo ou indutivo.

De acordo com Kant, as formas de pensamento analíticas são caracterizadas por aquelas em que um enunciado é obtido de forma dedutiva pela particularização de um conceito anterior, esse mais geral. As sintéticas, por sua vez, são caracterizadas por aquelas em que o enunciado é obtido de forma indutiva pela reunião de conceitos anteriores. Seguem dois exemplos:

- Se “A” é um conceito que sempre admite a propriedade “p” (dizemos p(A) é verdade para todo A), sendo “a” um caso particular de “A”, então certamente “a” admite a propriedade “p”. Nessa explanação, a veracidade de p(a) é uma dedução lógica de p(A), sendo a conclusão obtida da premissa de forma analítica.
- Seja “B” um conceito que não admite a propriedade “p” (dizemos p(B) é falso). Sabendo que p(A) é verdade para todo A, pode-se sintetizar as duas informações para obter a conclusão de que “nenhum B é A”.

Barker (1969, pp. 20, 21) ressalta que, segundo Kant, o raciocínio analítico produz enunciados que são verdadeiros em virtude exclusiva de sua construção lógica. Nesse sentido, mesmo a análise sendo importante na compreensão de vários conceitos, não seria capaz de infligir desenvolvimentos científicos, por não afirmar nada de novo: apenas conclui algo que logicamente já era tido como verdade. O raciocínio sintético, por outro lado, é mais eficaz no desenvolvimento científico, pois pode enunciar novos conhecimentos, como pode-se notar ao estudar o segundo dos exemplos anteriores.

No exemplo, o enunciado “nenhum B é A” não poderia ser concluído apenas da observação de que “B não admite a propriedade p”. É preciso também afirmar que “p(B) é falso *para todo* B”. Mas como se pode afirmar isso? Se essa afirmação puder ser deduzida da definição de B, pode se dizer de forma equivalente que B é o nome de todo elemento que não admite a propriedade p. Nesse caso, dizer “nenhum B é A” é uma conclusão analítica, deduzida da definição de A e de B. Nenhum conhecimento novo foi criado. Por outro lado, se “p(B) é falso para todo B” não puder ser deduzido da definição de B, então é uma afirmação capaz de sintetizar um conhecimento novo (nenhum B é A). Entretanto, como a verdade dessa afirmação pode ser garantida?

Em geral o conhecimento sintético é indutivo e empírico: ao observar muitos casos particulares de B e notando que em todas as observações não ocorre p(B), por indução, conclui-se que p(B) nunca é verdade. Porém, se todos os raciocínios sintéticos fossem dessa natureza, todas as ciências (e a Matemática em especial) seriam resultado de observações e generalizações, sendo sempre baseadas em experiências particulares e tendo pouco caráter de verdade lógica.

Ocorre, entretanto, que nem todo raciocínio sintético é indutivo ou empírico. O método axiomático presente na Geometria euclidiana, um dos focos do trabalho de Kant, apresenta alguns enunciados que são sintetizados a partir dos axiomas, mas que não formam de maneira nenhuma um conhecimento empírico (já que não precisam ser verificados na realidade) ou indutivo (já que são construídos por deduções lógicas e definições particulares, não por generalizações).

> Que dizer, no entanto, dos juízos sintéticos *a priori*? Aqui estava, no parecer de Kant, a origem dos profundos problemas filosóficos. Suponhamos haver um conhecimento *a priori* (isto é, não justificável pela experiência sensorial) e sintético (isto é, não justificável pela conexão intrínseca dos conceitos empregados – ou seja, não justificável pela maneira de entender os termos empregados). Esse conhecimento teria de ser justificado por algum peculiar "terceiro elemento". Seria, além disso, de grande importância compreender de que maneira esse conhecimento poderia ser obtido. Para Kant, era na Matemática que se encontravam os mais claros exemplos de tal conhecimento sintético *a priori*. (BARKER, 1969, p. 22)

A distinção entre sintético e analítico nem sempre é precisa e a própria teoria dos números pode atestar isso. Considere-se, por exemplo, a afirmação "todo número multiplicado por zero resulta em zero". Uma forma de compreender esse enunciado como analítico, ou seja, como sendo verdadeiro apenas por sua estrutura lógica, seria definir número como "tudo aquilo que multiplicado por zero resulta em zero". Entretanto, ao supor tal definição, seríamos obrigados a concluir que o infinito não é um número, já que o produto entre zero e infinito é indeterminado.

Por outro lado, se supomos tal enunciado como sintético, deve-se estuda-lo a partir das definições de número, zero e produto. Assim, ao assumir que o infinito é um número, todo o sistema precisa ser revisto e o enunciado deve ter seu início alterado para, por exemplo, "todo número real...". Ao manifestar-se o desejo de incluir os números infinitos no estatuto de número, torna-se imprescindível uma revisão do que se considera por número, de modo a garantir que o infinito possa ser construído a partir dessa definição.

Como veremos adiante, a discussão sobre a natureza do conhecimento matemático está intimamente ligada à visão do número como conceito desenvolvido ora sinteticamente, ora analiticamente, podendo ser proveniente do/aplicado ao universo empírico, ou ainda desenvolvido independente desse.

3.3 O tipo de conhecimento matemático

Kant via na Geometria um profundo manancial de estudo. O que seria, por exemplo, a triangularidade? Na Geometria, a triangularidade é baseada nos conceitos primitivos de reta e plano que, de acordo com Euclides, geram o quinto postulado. O enunciado desse postulado é logicamente equivalente à afirmação de que "a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos”, que por sua vez pode ser equivalente à definição de triângulo como a região interna do plano formada pelo encontro de três retas não paralelas duas a duas, desde que entendamos o plano da maneira tradicional euclidiana.

O quinto postulado pode ser um enunciado sintético *a priori*. É construído sobre conceitos prévios e é verdadeiro de acordo com uma interpretação (não necessariamente empírica) do que vem a ser uma reta. Compreender esse enunciado como empírico seria assumir que a definição de linha reta só pode ser tida como verdade por termos visto muitas linhas retas. Essa não é a melhor atitude mental, principalmente por que hoje é sabido que outras interpretações de reta são possíveis[23], tornando falso o quinto postulado e gerando novas compreensões de qual é a forma de um plano e do que vem a ser um triângulo. Isso não necessariamente faz com que o sistema de axiomas de Euclides seja inconsistente.

> A confusão nessa matéria surge, com frequência, em virtude do fato de se supor que sendo verdadeiros os postulados de alguma Geometria não-euclidiana, então não podem ser verdadeiros todos os postulados da Geometria de Euclides. As pessoas que pensam assim imaginam que as Geometrias euclidianas e não-euclidianas são incompatíveis, de modo que não podem ser ambas corretas. Isso é um engano. Pessoas que pensam assim não compreendem, com nitidez, o fato que os postulados de uma Geometria só chegam a ser verdadeiros ou falsos ao receberem uma específica interpretação; não percebem, de maneira nítida, que um conjunto de postulados, não-interpretados, puros, nem é verdadeiro, nem falso. (BARKER, 1969, p. 72).

Dessa forma é preciso compreender com clareza o que significa um axioma. Para Euclides o axioma poderia ser visto como uma verdade irrefutável, mas não existiam em sua época, obviamente, as geometrias não-euclidianas. O trabalho de Felix Klein sobre as geometrias projetivas seria determinante para concluir que as geometrias não euclidianas só seriam consistentes se a euclidiana também o fosse. Assim, após o desenvolvimento da lógica e ainda hoje, os axiomas passam a ter o caráter ressaltado por Hilbert no fim do século XIX: formam um conjunto de conceitos capaz de construir um sistema consistente, ou seja, a partir dos quais é possível produzir enunciados nunca contraditórios e cuja veracidade é deduzida logicamente dos axiomas.

Desse ponto de vista, os axiomas não precisam ser verdadeiros por si só. Se forem verdadeiros sob alguma interpretação de seus termos, então os enunciados verdadeiros construídos sobre eles serão verdadeiros para tal interpretação, e os falsos serão também

[23] O conceito de reta euclidiano foi sustentado por séculos e usado na definição de movimento dada por Newton em suas explanações sobre o comportamento do mundo físico. É também o conceito cotidiano mais usual, mantendo-se presente no currículo do ciclo básico e cuja veracidade pode ser dada de forma intuitiva. Entretanto, o desenvolvimento de geometrias avessas ao quinto postulado permitiram novas concepções de funcionamento universal, servindo de base para a teoria da relatividade e para toda a visão de mundo de Einstein. Essas novas geometrias (de Riemann e de Bolyai – Lobachevsky) supõem outras definições do que venha a ser uma reta, definições essas que se mostram verdadeiras em diversos estudos físicos.

falsos para essa interpretação. Por outro lado, se os axiomas forem falsos sob alguma outra interpretação, nada poderá ser concluído a partir deles.

É nesse sentido que se entende o desenvolvimento *a priori* da matemática: os axiomas formam enunciados puros, que não precisam ser verificados em termos empíricos para serem considerados verdadeiros ou falsos. Desse modo, os enunciados construídos sobre eles também não serão empíricos.

O exemplo da Geometria explicita a necessidade de se colocar o número de forma clara como conceito primitivo, ressaltando que a veracidade de tal conceito não deve depender exclusivamente de empirismo. Caso o fosse, reduziríamos a teoria dos números e a aritmética ao que nossos sentidos podem obter, o que excluiria do estatuto de número não só os infinitos como também os irracionais ou complexos. Frege esclarece esse ponto:

> Recentemente G. Cantor introduziu os números infinitos em uma obra notável. Estou inteiramente de acordo com ele quanto à crítica à ideia de que em princípio apenas os números finitos poderiam ser admitidos como efetivamente reais. Sensivelmente perceptíveis espaciais, não o são nem estes, nem as frações, nem os números negativos, irracionais e complexos, e se chamamos de efetivamente real o que produz efeitos nos sentidos, ou ao menos o que produz efeitos que podem ter como consequências próximas ou remotas percepções sensíveis, então decerto nenhum desses números é efetivamente real. Mas também não necessitamos absolutamente de tais percepções como fundamentos para a demonstração de nossos teoremas. (FREGE, 1992, p. 98)

Nota-se então que, mesmo sendo Frege um dos precursores do logicismo (decorrente do realismo platônico) e, portanto, contrário ao intuicionismo (simpático ao conceitualismo kantiano), ainda assim, ele e Kant negavam a hipótese nominalista de que os números eram simples abstrações desse ou daquele objeto, concordando não só com a existência do número como entidade real como com a visão de que a Matemática era um conhecimento *a priori*.

Tendo por base tais conceitos prévios, nota-se que o desenvolvimento matemático tende a se distanciar da experiência cotidiana, a ponto de ser considerado *a priori* mesmo por correntes em oposição. Isso não exclui, entretanto, o fato de que os conceitos matemáticos são aplicáveis a situações percebidas pelos nossos sentidos, o que lhes dá um caráter, para não dizer empírico, ao menos atrelado a alguma justificativa externa.

O problema do acesso, entretanto, é ainda mais atual. O debate acerca do caráter analítico ou sintético da matemática decorre da questão sobre o matemático ser descobridor ou criador de ideias. Se os números são obtidos de forma sintética, pode-se dizer que o matemático os cria. Caso contrário, os descobre via análise. A seguir serão expostos os aspectos sob os quais logicistas e intuicionistas entendiam o número, para então apresentar as decorrências dessas correntes e propor ainda outras questões.

3.4 A natureza do número

Conforme o exposto, o enunciado citado anteriormente (“todo número multiplicado por zero resulta em zero”) só pode ser estudado se o conceito de número estiver bem definido. Só com uma definição clara é possível compreender se os complexos, os irracionais e os transfinitos podem ou não configurar um tipo de número.

Esse ponto de vista remete à história do cisne negro: sabendo serem todos os cisnes aves brancas, ao deparar com um cisne negro, a ciência diria: “isso não é um cisne”. Essa é a única atitude possível a ser tomada quando se entende o enunciado “todos os cisnes são brancos” como sendo uma verdade axiomática analítica, ou seja, quando se entende que a cor branca faz parte da definição do que é cisne. Outra abordagem, entretanto, levaria a outro rumo: vendo um cisne negro e considerando-o digno do estatuto de cisne, a ciência pode dizer: “há cisnes brancos e negros”, voltando assim sua atenção para a questão “o que define então um cisne? ”.

O problema do cisne negro é comumente citado na matemática como um caso de estudo de provas e refutações ou de atitudes possíveis acerca de eventos improváveis. No contexto lógico, o caso se assemelha à questão sobre o número. As definições encontradas ao longo da história precisaram ser continuamente revisitadas de forma a englobar os novos entes numéricos. Após a inclusão de negativos, irracionais, complexos e transfinitos no estatuto de número, a partir do trabalho de Cantor, restava aos matemáticos responder essa questão.

> A questão: o que é o número um? ou: o que significa o sinal 1? receberá frequentemente como resposta: ora, uma coisa. E se fazemos então notar que a proposição "O número um é uma coisa" não é uma definição, porque há em um lado o artigo definido, no outro o indefinido, e que ela apenas afirma que o número um pertence às coisas, mas não que coisa seja, seremos talvez convidados a escolher uma coisa qualquer que desejemos chamar de um. Contudo, se cada um tivesse o direito de entender o que quisesse por este nome, a mesma proposição a respeito do um significaria coisas diferentes para diferentes pessoas; tais proposições não teriam nenhum conteúdo comum [...]. Ora, não é vergonhoso para a ciência estar tão pouco esclarecida acerca de seu objeto mais próximo, e aparentemente tão simples? Tanto menos poder-se-á dizer o que seja número. (FREGE, 1992, pp. 29 - 30)

A axiomática de Peano, embora apresentasse um conjunto de axiomas para os quais o conhecido conjunto dos naturais formava um modelo, não definia o que vinha a ser o número. Frege se colocaria nessa busca com afinco, se valendo de severas críticas às concepções filosóficas pré-existentes.

> O número não é, da mesma maneira que a cor, o peso e a dureza, abstraído das coisas, não é, no mesmo sentido, uma propriedade das coisas. Resta a questão de saber sobre o que algo é enunciado por meio de uma indicação numérica. O número não é algo físico, mas tampouco algo subjetivo, uma representação. O número não

> surge por anexação de uma coisa a outra. Nem a doação de um nome após cada anexação faz alguma diferença. (FREGE, 1992, p. 74)

Com essas palavras, Frege refuta qualquer possibilidade de empirismo e critica a ideia kantiana de que a matemática seria formada por síntese. De fato, Frege considerava contraditório que algo pudesse ser desenvolvido sinteticamente e *a priori.* Discordando de que a análise só era capaz de criar tautologias, defendia a matemática como ciência *a priori* e analítica. Essa seria a base do logicismo, que se esforçava para construir axiomas que formalizassem a Matemática como ciência pura, não dependendo de qualquer noção vinculada ao senso comum.

Em contrapartida, alguns matemáticos que compartilhavam princípios kantianos negavam qualquer possibilidade de formalização completa, defendendo que a lógica não prescindia a intuição e suas verdades só eram atestadas por que concordavam com as noções intuitivas preestabelecidas. Luitzen Egbertus Jan Brower (1881 – 1966) se basearia no conceitualismo kantiano que via os números como criações da mente para fundamentar o intuicionismo e combater o logicismo.

> Do ponto de vista do Intuicionismo, devemos dispor de uma demonstração construtiva de qualquer enunciado matemático a propósito dos números, antes de estarmos autorizados a dizer que sabemos da verdade desse enunciado. Se o enunciado afirma a existência de pelo menos um número de tal ou qual espécie, devemos saber como construir ou computar esse número, usando apenas um número finito de fases. (BARKER, 1969, p.101)

Desse modo, embora os intuicionistas pudessem conceber como válida a indução de Peano e a infinitude dos números naturais (pois qualquer número por maior que fosse era construído por um número finito de “passos”), não poderiam aceitar os infinitesimais, os transfinitos e outros processos como a demonstração de Cantor sobre a incapacidade de enumerar os irracionais. O *infinito potencial* dos naturais (que pode ser atingido recursivamente) era aceitável, mas o *infinito atual* presente na afirmação de que no intervalo real [0,1] há infinitos números (tantos quanto na reta real inteira) se mostrava um conceito de natureza bastante distinta.

Outros conceitos decisivos no desenvolvimento matemática eram negados pelo intuicionismo. O princípio do terceiro excluído, que afirma que uma proposição é ou verdadeira ou falsa, não podia ser aceito por haver proposições não passíveis de construção intuitiva; da mesma forma, o axioma da escolha da teoria de Zermelo-Fraenkel, que serviria de base para inúmeras demonstrações posteriores, até hoje não é aceito em matemáticas construtivas.

Um dos principais defensores do intuicionismo foi Jules Henri Poincaré (1854 – 1912), cujos trabalhos em Física, Filosofia e Matemática (incluindo as geometrias não euclidianas) lhe dariam o título de último universalista. Ele defendia a intuição matemática como essencial ao desenvolvimento dessa ciência, considerando ainda essa habilidade como sendo diferente da intuição comum, essa sim ligada à imaginação e à subjetividade. Para ele o logicismo não era capaz de afirmar nada, uma vez que a compreensão dos enunciados lógicos dependia da intuição para julgar se se tratavam de afirmações verdadeiras ou falsas. A despeito da importância de Poincaré, o desenvolvimento e a fixação dos transfinitos em trabalhos posteriores se encarregariam de frear o Intuicionismo.

> O Intuicionismo – a mais influente das formas da Filosofia conceitualista do número – mutila, assim, de modo considerável, a Matemática clássica, rejeitando alguns de seus métodos de raciocínio e abandonando alguns de seus axiomas. A Filosofia que sustenta o Intuicionismo teria atrativos bastantes para compensar essas perdas? Não, por certo. (BARKER, 1969, p. 104)

Além disso, os logicistas se mantinham trabalhando sobre a teoria dos conjuntos finitos e infinitos, buscando o formalismo analítico e desconsiderando a hipótese de o número ser um enunciado sintético, criado exclusivamente pela mente. Para Frege o número seria então um ente real, abstrato, não observável por nossos sentidos e para o qual ascendemos por meio da razão.

Essa visão se assemelha ao conceito platônico de realismo, mas Frege acreditava que a análise das manifestações próprias do número, por meio da lógica, era capaz de gerar uma definição precisa do que vem a ser esse objeto. Vejamos como ele define os números 0 e 1:

> O número 0 pertence a um conceito se nenhum objeto cai no seu âmbito [...]. O número 0 pertence a um conceito se a proposição “a não pode ser abrangido por um tal conceito” é verdadeira universalmente qualquer que seja a [...]. O número 1 pertence ao conceito F se a proposição “a não está compreendido em F” não é verdadeira universalmente, qualquer que seja a, e se as proposições “a está compreendido em F” e “b está compreendido em F” se segue universalmente que a e b são idênticos (FREGE, 1992, pp. 93 - 94).

Russel e Whitehead, seguindo a linha de Frege, desenvolveriam com afinco a lógica simbólica como fundamento de todo conceito matemático, dando corpo ao logicismo. Crescia em paralelo a corrente formalista[24] proposta por Hilbert, que tinha como objetivo a construção do conhecimento matemático *a priori* sobre uma linguagem que formasse por si só um sistema completo e consistente, livre de interpretações. Segundo ele, os axiomas não precisariam ser verificados como verdadeiros ou falsos se o sistema construído sobre eles não gerasse contradições.

---

[24] O Formalismo é uma corrente filosófica que prioriza a forma sobre o conteúdo. O formalismo matemático proposto por Hilbert defendia que apenas as relações entre axiomas deveriam ser levadas em consideração na construção lógica do conhecimento, descartando-se seu significado *extensional*.

> Uma teoria axiomático-dedutiva interpretada pode ou não ser formal, mas uma teoria não interpretada é sempre formal, pois se os termos da teoria não significam nada, só podemos manipulá-los mediante um sistema dado de regras explícitas. A axiomatização que Hilbert apresentou em 1899 da geometria nos *Grundlagen der Geometrie* [*Os fundamentos da Geometria*] era desse tipo, uma teoria não interpretada e formal. Enquanto Euclides apresentava definições dos termos “ponto”, “reta” e “plano” (e axiomas, ou postulados, como verdades evidentes referentes a esses termos), Hilbert apenas considerava três distintos conjuntos de objetos, que chamava de pontos, retas e planos (mas que poderia chamar do que quisesse). (SILVA, 2007, p. 186)

O trabalho de Russel em prol do logicismo difere do formalismo de Hilbert justamente no ponto das teorias não interpretadas. Russel não concordava que a natureza dos objetos citados nos axiomas não era importante. Em seu trabalho, ressalta que qualquer progressão discreta satisfaz os axiomas de Peano e que o objetivo dessa axiomática não era descrever um conjunto qualquer, mas sim o conjunto já conhecido dos números naturais. De fato, se entendermos “0” como sendo “dois” e “sucessor” como sendo “metade”, teremos a progressão 2, 1, ½, ... que satisfaz os cinco axiomas.

> Esse ponto, isto é, que “0” e “número” e “sucessor” não podem ser definidos por meio dos cinco axiomas de Peano, devendo ser compreendidos independentemente, é importante. Queremos que nossos números não meramente verifiquem fórmulas matemáticas, mas que se apliquem de maneira correta a objetos comuns. (RUSSEL, 2007, p.26)

Como será exposto mais adiante, a preocupação de Russel em definir número, zero e sucessor, visando criar uma ponte entre os axiomas de Peano e a noção intuitiva de números naturais, remete ao conceito de *complementaridade*. Mas essa não era a ideia de Russel no momento. Uma vez definidos os elementos que seriam a base da construção de todos os números, Russel se ocupa de definir o que são relações, o que é a similaridade entre relações e o que são relações de ordem. Esses conceitos seriam essenciais para distinguir os números ordinais dos cardinais e também para conceituar o infinito como o conjunto que possui similaridade com algum subconjunto próprio.

A lógica de Russel permanece encadeada na construção dos transfinitos como representantes de números. Da mesma forma ele define as operações. Quanto aos racionais, irracionais, negativos e complexos, ele afirma:

> Um dos erros que atrasaram a descoberta de definições corretas nessa região é a ideia comum de que cada extensão de número incluía as espécies anteriores como casos especiais. Pensava-se que, ao lidar com números inteiros positivos e negativos, os números inteiros positivos podiam ser identificados com os números inteiros originais, sem sinal. Assim, também, pensava-se que uma fração cujo denominador fosse 1 podia ser identificada com o número natural que é seu numerador. (RUSSEL, 2007, p. 85)

Com base nesse princípio, passa a definir $+m$, $-m$ e m/n como relações entre números. Define por fim (2007, p. 96) os números reais a partir dos cortes de Dedekind: “um ‘número real' é um segmento da série de razões em ordem de magnitude. Um 'número irracional' é um segmento da série de razões que não tem nenhuma fronteira. Um 'número real racional' é um segmento da série de razões que tem uma fronteira".

O trabalho dos logicistas seguia aparentemente em direção ao sucesso de sua empreitada até a descoberta do paradoxo de Russel. Tal enunciado mostrava que a teoria dos conjuntos de Cantor não era consistente e que suas bases poderiam levar a contradições. Tal inconsistência levara Cantor a desistir de sua busca pelo maior de todos os conjuntos e Frege a inserir no prólogo de seu trabalho o adendo de que esse paradoxo poderia ruir os fundamentos de sua Aritmética.

A inconsistência da teoria dos conjuntos levaria a matemática a novos rumos. Por negar o princípio do terceiro excluído, o intuicionismo não era prejudicado pela presença de paradoxos, de modo que os intuicionistas viam a inconsistência como um reforço para sua tese. Poincaré defenderia a tese dos impredicativos (enunciados que geram paradoxos causados por autorreferência), buscando a exclusão de teorias que contivessem afirmações desse tipo.

Contra eles, Hilbert afirmaria: "ninguém irá nos tirar do paraíso que Cantor criou para nós", propondo assim uma revisão de quais princípios conjuntistas eram afetados pelo paradoxo. A atitude de revisão da estrutura lógica sobre a qual se construía a Matemática pura, cada vez mais distante de aplicabilidades, abriria espaço para teorias que contornassem os paradoxos, como a teoria dos tipos de Russel e a nova teoria dos conjuntos de Zermelo-Fraenkel, construindo assim o perfil da Matemática dos anos seguintes.

3.5 Desdobramentos filosóficos no século XX

Com a virada do século novas linhas de pensamento se fariam a cada ano mais presentes. De certo modo é possível afirmar que, desde Descartes, as ciências ditas exatas vinham se sobressaindo às ciências humanas, como a filosofia. Mesmo Frege (1992, p. 29) afirmara em seu livro que as questões filosóficas não eram de interesse da maior parte dos matemáticos. Ainda assim a filosofia sobrevivia aos avanços tecnológicos da nova era, incrementando seus pontos de vista.

Antes do século XX as principais questões da filosofia da Matemática eram acerca de quais eram os objetos dessa ciência e de como tínhamos conhecimento deles. Na busca por essas respostas, os intuicionistas haviam atrelado o número às restrições da cognição humana, descaracterizando vários aspectos *intensionais* desse objeto, como por exemplo o infinito atual. Os formalistas, por sua vez, ao descolar os objetos matemáticos de suas representações, ignoravam seus aspectos *extensionais*. Com essa abordagem, a questão passaria a ser sobre como saber se os enunciados matemáticos eram verdadeiros sem colocá-los sob o julgamento epistemológico.

Mais uma vez, uma perspectiva global dos rumos da filosofia após o embate dos logicistas e intuicionistas se tornaria impraticável nos limites desse trabalho. Entretanto, alguns nomes podem ser importantes para a compreensão do conceito de *complementaridade* entre *intensão* e *extensão* de objetos matemáticos, conceito esse que servirá de base para analisarmos finalmente as influências do trabalho de Conway na conceituação do número.

Um grande filósofo do início do século passado, Edmund Gustav Albrecht Husserl (1859 – 1938), desenvolvera a fenomenologia defendendo a ideia de que os objetos matemáticos são criações da consciência atreladas à capacidade da experiência humana, de modo que se adequam a essa experiência.

> Tanto para Husserl quanto para Platão a matemática refere-se a formas ideais. Mas se para Platão essas formas têm independência ontológica, para Husserl não necessariamente. Podemos vê-las assim se assim quisermos, mas podemos também vê-las, como faria Aristóteles, como simples aspectos do mundo real, dependentes dele. Além disso, Husserl abre a possibilidades de que essas formas sejam simplesmente criadas por nós para dar conta da diversidade da experiência, simplesmente como formas possíveis. (SILVA, 2004, p. 3)

Husserl argumenta a favor de uma ideia chamada redução fenomenológica. Segundo essa ideia, um círculo seria a figura obtida quando, após inúmeras constatações de casos de figuras circulares, o observador realizasse a redução dessas observações às suas características invariantes. O mesmo pode ser aplicado ao conceito de número natural, onde o dois é um fenômeno que descrevemos por redução fenomenológica a partir de nossa observação de vários casos onde ocorre o par. Restaria então analisarmos qual seria o invariante pertencente a todos os tipos de números.

Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889 – 1951), a princípio um seguidor de Russel, mudaria radicalmente seu ponto de vista sobre a lógica ao afirmar que a matemática era apenas uma linguagem vazia, um grupo de regras combinadas com as quais a humanidade pressupunha representar a estrutura da realidade, mas sem compromisso com a mesma. Com essa visão filosófica, Wittgenstein ignorava a questão do acesso e enxergava a matemática como desprovida da pretensão de ter seus enunciados julgados como verdadeiros ou falsos. Para ele, o significado das coisas do mundo não era acessível por nenhuma linguagem criada pela mente humana.

Essas novas abordagens explicitavam as novas questões filosóficas: afinal, as verdades matemáticas, construídas logicamente, eram realmente irrefutáveis? Ou tais verdades se alteravam quando os matemáticos se deparavam com novas manifestações fenomenológicas? Ou ainda, será possível que os enunciados matemáticos não digam nada sobre a realidade, não podendo nunca ser verificados ou falseados?

Outro grande nome do século XX, Charles Sander Pierce (1839 – 1914), se debruçaria sobre essas questões desenvolvendo o falibilismo, segundo o qual não existem verdades e certezas absolutas, mas apenas teses que precisam (e podem) ser expostas a refutações. Segundo o pensamento de Pierce, o conhecimento nunca é completo e absoluto, mas sim provisório e parcial, caminhando assintóticamente em direção à verdade. Sua tese se baseia na ideia de que todo conhecimento depende de verificação epistemológica para ser considerado verdadeiro, de modo que sua veracidade não pode ser absoluta uma vez que está vinculada à parcialidade e falibilidade do observador.

É nesse cenário que surge a *complementaridade*, apresentada pela primeira vez por Niel Bohr (1885 – 1962). Embora Bohr fosse químico, sua teoria seria aplicável aos diversos ramos das ciências.

> Considerando a situação em 1927, em termos de tese, naquela época estava claro que a física tinha herdado teses opostas do período “clássico” (antes de 1900) e do período quântico (após 1900). Uma tese importante do período anterior era a continuidade, embora existisse lado a lado com a visão atomística da matéria. Uma tese importante do período mais recente foi a descontinuidade, embora existisse lado a lado com a teoria da onda de propagação eletromagnética e das teorias mais recentes associadas com De Broglie e Erwin Schrödinger. [...] A proposta de Bohr, de 1927, era, em sua essência, a de que devíamos tentar não acomodar as dicotomias, mas descobrir a *complementaridade* das representações dos eventos nessas duas linguagens tão diferentes. (HOLTON, 1984, p.50)

Um ponto merece destaque na visão *complementarista*: por essa vertente, os polos ditos complementares não representam apenas uma dualidade que pode ser observável em um fenômeno (seja por oposição ou por consecutividade), mas mais que isso, possuem papel significativo na construção do fenômeno em si. É na interação do par complementar que o objeto se define, sendo assim gradativamente construído. A análise de um elemento do par gera questões e definições que interferem no outro elemento, formando assim, por *complementaridade*, a totalidade do fenômeno.

Com o passar das décadas, a empreitada formalista de construção da Matemática axiomática ficava cada vez mais distante. Mais precisamente em 1931, o formalismo seria irrevogavelmente derrubado pelo teorema da incompletude apresentado por Kurt Gödel, concluindo que um sistema consistente não pode ser completo. Nessa mesma década o logicismo e a nova teoria dos conjuntos seriam defendidos pelo movimento Bourbaki, desenvolvendo uma reestruturação didática dos livros de matemática e da organização dessa disciplina no ensino superior.

A história depende de certo distanciamento para ser escrita e quanto mais próximos do presente estão os acontecimentos, mais turvos estes se tornam. Assim, embora novas abordagens filosóficas continuassem surgindo, o pensamento lógico cartesiano permanecia com a palavra final nas buscas pela verdade científica. Como veremos mais adiante, a construção dos números de Conway pode contribuir significativamente nas abordagens numéricas em nível superior, mas aparentemente a relevância desse trabalho ainda será colocada à prova do tempo.

Seguindo na mesma direção de Pierce, Karl Popper (1902 – 1904) desenvolveria a ideia da falseabilidade, segundo a qual só poderia ser chamada de ciência a teoria que fosse falseável, ou seja, aquela que fosse desenvolvida sobre conceitos que pudessem ser refutados e cujas refutações pudessem ser testadas. Nesse sentido, pode-se notar que o criacionismo, por exemplo, não pode ser considerado ciência por não ser possível testar sua falsidade.

Já na segunda metade do século, Imre Lakatos (1922 – 1974) se basearia na falseabilidade Popperiana para desenvolver o quase-empirismo, trazendo a leitura de que a falseabilidade era responsável por fazer com que novas teorias se sobrepujassem às antigas, balizando e aperfeiçoando a teoria original. Como exemplo, vemos que a negação do quinto postulado havia trazido um novo olhar sobre a geometria, sem que as novas teorias descartassem as antigas. Na teoria dos números, a ocorrência de novos tipos de números havia propiciado o desenvolvimento de toda a teoria dos conjuntos, de Cantor à ZFC.

Talvez seja importante nesse momento retomar as definições de *intensão* e *extensão* aplicadas a objetos matemáticos, ideias que haviam sido utilizadas por Grassmann e Hamilton em seus trabalhos sobre números complexos com suas representações vetoriais. Para Hamilton, os aspectos *intensionais* de um conceito são formados pelo conjunto de significados que determinam esse conceito, ou seja, suas definições corretas; já os aspectos *extensionais* são formados pelo conjunto de modelos aos quais o conceito se aplica, por *extensão,* de forma verdadeira.

Assim, o próprio desenvolvimento da Matemática passou, ao longo dos séculos, a se tornar fonte de conhecimento matemático. O trabalho de Hamilton sobre complexos era formado por um par de representações, onde de um lado figuravam as expressões algébricas envolvendo números complexos e do outro um sistema geométrico de quatro dimensões onde as operações algébricas representavam transformações no espaço. Ressalta-se, para fins filosóficos, que o par *intensão*/*extensão* não está diretamente relacionado ao par matemático formado por ciência pura/aplicada, principalmente por que a *extensão* de um sistema axiomático pode ser um modelo de aplicação que não envolva necessariamente as experiências epistemológicas. No caso de Hamilton, por exemplo, a *extensão* vinha de uma geometria de quatro dimensões epistemologicamente inconcebível, mas formava ainda assim uma interação com os aspectos *intensionais* da sua teoria.

No último quarto do século XX, o Movimento da Matemática Moderna implantado nos currículos começava a mostrar alguns resultados insatisfatórios e novas teorias curriculares como a etnomatemática começavam a surgir. É dessa época a publicação do livro de Conway sobre números e jogos, cujo conteúdo será apresentado no capítulo seguinte. Nesse mesmo período, as críticas filosóficas à visão conjuntista e formalista da matemática ganhavam corpo quando Michael F. Otte[25] defendeu seu doutorado desenvolvendo seus estudos sobre a *complementaridade* e sua aplicação ao saber e fazer matemáticos.

Partindo da visão de Pierce de que as verdades científicas se relacionam mais com a interpretação de fenômenos do que com os fenômenos em si, Otte encara a dualidade estabelecida pelo par formado entre a matemática-linguagem e matemática-atividade como ligadas justamente pela capacidade social de interpretarmos os objetos matemáticos de acordo com o contexto em que se inserem. Assim, os sistemas axiomáticos formais e não interpretados formam apenas uma unidade do dual, sendo as interpretações do sistema responsáveis pela formação do par complementar.

> Assim, Otte encontra na teoria semiótica do cientista e filósofo Charles Sanders Peirce os pressupostos teóricos ao desenvolvimento de sua perspectiva semiótica ao pensamento sobre *Complementaridade*, não menos porque, segundo Otte, foi Peirce quem genialmente reformulou a epistemologia kantiana em termos semióticos. Alicerçado nessas perspectivas e bases filosóficas é que Otte constrói sua teoria sobre *Complementaridade* à análise e interpretação do desenvolvimento do Conhecimento Matemático. (ARRUDA et al, 2015, p. 3)

A semiótica (estudo da relação entre signos, significantes e significados em uma linguagem simbólica) pode ser aplicada à Matemática não por que essa seja uma linguagem, mas por que, em vez de tratar dos objetos observados, trata de como simbolizamos esse objeto, à exemplo das reduções fenomenológicas. Arruda (2015, p. 3) nos lembra que "a matemática não se refere ao mundo empírico, mas sim a nossas atividades neste mundo empírico. Ela é uma meta-ciência das ciências, de si mesma, e da tecnologia".

---

[25] Michael Otte é Doutor em Matemática pela Universidade de Goettingen (1967) pela Universitaet Munster (Westfaelische-Wilhelms) (1972). Atualmente é docente do Programa de Pós-graduação Universidade Bandeirantes, São Paulo. Seus trabalhos sobre a *complementaridade* dos aspectos *extensionais* e *intensionais* de objetos matemáticos nortearam a abordagem filosófica feita sobre o trabalho de John H. Conway.

Assim, a Matemática fica em algum lugar entre as ciências aplicadas e a lógica formal, essa sim vazia de significado quando não interpretada. A matemática, mesmo em seus sistemas não interpretados, não é vazia por que é desenvolvida de forma *complementar* entre os aspectos *intensionais* e *extensionais* de seus objetos, onde um não pode prescindir do outro.

Corroborando com o fato de que as interpretações das teorias matemáticas não precisam ser justificadas de forma empírica, a visão da matemática como meta-ciência é que a diferencia das outras atividades científicas. Como proposto por Lakatos, o desenvolvimento da matemática se baseia em provas e refutações acerca da própria teoria e não necessariamente acerca da aplicação da teoria em modelos de ordem prática. Voltando ao exemplo das geometrias, nota-se que os axiomas de Euclides pretendem dar um significado à geometria plana a partir da *intensionalidade* dos conceitos primitivos, mas tal significado só possui sentido completo quando atrelado, por *extensão*, à noção usual de plano infinito. Uma concepção elíptica de universo como *extensão* da definição dos conceitos geométricos primitivos, a menos do quinto postulado, transforma o conjunto de axiomas de Euclides na geometria riemanniana.

Esse exemplo torna clara não só a ideia de que um objeto é definido simultaneamente por seus aspectos *intensionais* e *extensionais*, como também a visão de que a matemática se refere mais às concepções científicas do mundo do que às experiências epistemológicas. O mesmo pode ser observado na compreensão de números complexos como par de números reais ou como vetores no plano de Argand-Gauss, ou ainda no par equação e representação cartesiana dos objetos da Geometria Analítica.

Como vimos, o avanço da teoria dos números a níveis cada vez mais complexos de abstração gerou uma compreensão dos sistemas axiomáticos como uma estrutura construída sobre um grupo de afirmações que não precisam ter relação com a realidade, válidos apenas por seus aspectos *intensionais*. A crítica intuicionista a esse ponto de vista residia no fato de que, de modo geral, as validades dos conjuntos numéricos só eram verificadas por suas relações com seus aspectos *extensionais*.

Ressalta-se que a maior parte das estruturas algébricas teria surgido de alguma maneira como forma de solucionar questões da vivência humana, mesmo que tais questões fossem puramente científicas ou filosóficas. Assim, mesmo não estando intrinsecamente relacionados com a realidade empírica, as estruturas numéricas se vinculam à resolução de problemas (muitas vezes gerados pela própria Matemática), de modo que quanto mais seus axiomas (aspectos *intensionais*) possam ser interpretados (por *extensão*) de acordo com os dados do modelo que se deseja investigar, mais repletos de significados se tornarão.

> A tendência em transformar a Matemática em Lógica pura é equivocada, visto que a Matemática possui objetos (dependem das hipóteses e substâncias da atividade matemática), enquanto a Lógica não se ocupa com a natureza das coisas, não afirma nada acerca do mundo, grosseiramente podemos dizer que se ocupa de formas e não de objetos. Essa é uma diferença fundamental entre as duas (OTTE, 2003b Apud FONSECA, 2010, p. 82).

Esse ponto de vista é claramente encontrado na obra de Russel. Mesmo fazendo parte dos principais defensores do logicismo, Russel tinha críticas ao formalismo. Sua linha de raciocínio ressalta que, de seu ponto de vista, era necessário existir uma complementação entre os aspectos *intensionais* dos axiomas de Peano e seus aspectos *extensionais*, representados pelo senso comum dos números 0, 1, 2, 3.... É baseado nessa crítica que Russel defende a necessidade de uma definição precisa do zero e da função sucessor, de modo a garantir que o conceito "número natural" esteja definido. Ao definir os números reais, essa crítica é retomada:

> Por força do hábito de se deixarem influenciar pela imaginação espacial, as pessoas supunham que as séries deviam ter limites em casos em que pareceria estranho que não tivessem. Assim, ao perceber que não havia nenhum limite racional para as razões cujo quadrado era menor que 2, elas se permitiram "postular" um limite irracional que deveria preencher a lacuna dedekindiana [...]. O método de "postular" o que queremos tem muitas vantagens; as mesmas vantagens do roubo sobre o trabalho honesto. Vamos deixa-lo para outro e seguir adiante com nossa labuta honesta. (RUSSEL, 2007, p. 94)

Assim, apenas enunciar os axiomas como um sistema consistente mesmo quando não interpretado não define o número nem garante sua existência. É preciso antes verificar se tais axiomas formam um grupo de afirmações que, segundo alguma interpretação, faça com que o objeto se está tentando definir seja verdadeiramente um modelo para tais postulados. Seguindo esse movimento, o objeto passa a ser definido não apenas pelos axiomas ou apenas pelo modelo ao qual os axiomas se aplicam, mas pelo par.

> Uma teoria axiomática moderna transformou-se em um par, no seguinte sentido: de um lado ela é uma teoria *intensional*, descrevendo a relação entre seus termos teóricos por meio de axiomas. E, de outro lado, ela constitui referências ou extensões de tais termos, evidenciando as aplicações, interpretações ou modelos da teoria (OTTE, 2003b Apud FONSECA, 2010, p. 82).

A *complementaridade* "Otteana" aparece então como uma vertente filosófica capaz de explicar o conceito de número abarcando diferentes aspectos, de modo a satisfazer lacunas deixadas tanto pelo intuicionismo quanto pelo logicismo. Ao assumir uma postura dialética, Otte permite que novas concepções de número sejam abraçadas de forma a compor a definição desse objeto de forma dinâmica.

> As contradições internas à própria ciência, como ao próprio corpo de conhecimentos, são fator determinante no desenvolvimento [do conhecimento][...]. Tais contradições surgem, pois, num momento determinado e muitas vezes não podem ser resolvidas no quadro de teorias já existentes, de forma que, não podemos

> entendê-las como erro ou até mesmo defeitos. Por estarem ligadas ao desenvolvimento do conhecimento, é o seu reconhecimento que figurará como o caminho ao entendimento e talvez a uma possível e perseguida resolução destas contradições. O novo conhecimento supera o velho dialeticamente, constituindo um exemplo de negação da negação e revelando a unidade dialética entre continuidade e descontinuidade no processo de construção do conhecimento. (ARRUDA et al, 2015, p. 5)

Como veremos a seguir, os números de Conway configuram uma teoria que abre nova gama de abordagens acerca do que vem a ser um número. No contexto da *complementaridade*, podemos enxergar no trabalho desse matemático não apenas um par de axiomas e modelos de aplicação sobre o qual sua teoria se desenvolve, como também a relação entre sua teoria as teorias pré-existentes.

A partir da relação entre aspectos *intensionais* e *extensionais* do par números de Conway e jogos de Conway, pode-se desenvolver questionamentos entre novas dialéticas entre o sistema de Conway e o sistema numérico conjuntista perpetuado nas abordagens didáticas atuais, abrindo espaço para uma visão mais abrangente de conceito de número. Assim, após apresentar a teoria de Conway no capítulo seguinte, será possível enumerar algumas perspectivas filosóficas e didáticas às quais esse trabalho nos remete.

4 UM NÚMERO É UM JOGO

4.1 Os números de Conway

Em seu livro *On numbers and games,* publicado em 1976, John Horton Conway afirma que escreveu o livro em sete dias (excetuando partes enxertadas e correções feitas posteriormente). Afirma também que conseguiu, no livro, unir duas de suas paixões: números transfinitos e jogos matemáticos. A própria forma como o livro é construído denota sinais de *complementaridade*, pois os dois assuntos abordados se desenvolvem mutuamente, se autorregulando e auxiliando um no desenvolvimento e compreensão do outro.

O que se apresenta a seguir é, de forma bastante resumida, um possível caminho a ser percorrido na construção dos números de Conway, alternando entre suas definições de número e de jogo. A teoria não se esgota aqui e tampouco será necessário, nesse momento, apresentá-la com tantos detalhes. Para o debate acerca das concepções de número, a breve apresentação certamente servirá para incrementar a discussão.

Conway (2001, p. 4) inicia sua exposição ressaltando que a construção dos Reais feita por Dedekind e dos transfinitos feita por Cantor podem ser compreendidas como parte de uma única construção, mais simples e mais geral, formando a classe dos números ordinais, simbolizada de N_0 e apelidada de "números surreais[26]". Para compreendê-la, basta uma noção da teoria ingênua dos conjuntos.

A classe dos números surreais é construída da seguinte maneira:

- Se E e D são dois conjuntos de números (surreais) e nenhum membro de E apresenta a relação $\geq$ com qualquer membro de D, então $\{E \mid D\}$ é um número (surreal). Todos os números (surreais) são construídos dessa maneira.
- Convenciona-se que, sendo $x = \{E \mid D\}$, x^E é membro de E e x^D é membro de D. Pode-se também denotar x por $\{x^E \mid x^D\}$ e, no caso da notação $x = \{a, b, c, ... \mid d, e, f, ...\}$ tem-se $a, b, c, ...$ elementos de x^E e $d, e, f, ...$ elementos de x^D.
- Dizemos $x \geq y$ quando ocorre simultaneamente as duas seguintes condições: (y não apresenta a relação $\geq$ com nenhum x^D) e (nenhum y^E apresenta a relação $\geq$ com x). Se $y \geq x$, dizemos que $x \leq y$.

Os números surreais, bem como a relação $\geq$, são construídos recursivamente, de modo que podem ser melhor compreendidos por meio de exemplos e experimentações. As

[26] O nome "números surreais" foi dado por Donald E. Knuth, colega de Conway, em uma novela onde narra a história de dois personagens que investigam os axiomas de Conway gradativamente até que conseguem construir essa classe de números.

convenções de notação foram colocadas antes da definição da relação para simplificar a linguagem da própria definição. O termo "surreal", colocado entre parênteses na definição, não está presente no livro de Conway. Foi inserido para explicitar o fato de que, nesse momento, ainda não há nenhuma evidência de que os objetos que estão sendo construídos sejam números no sentido usual.

O interessante da construção reside na afirmação "todos os números surreais são construídos dessa maneira". Esse enunciado, unido ao fato de que nenhum número surreal foi construído até o momento, leva a conclusão de que o conjunto vazio é um conjunto de números surreais. Assim, pode-se construir o primeiro número: $\{\emptyset \mid \emptyset\}$.

De acordo com a definição da relação $\geq$, pode-se notar que $\{\emptyset \mid \emptyset\} \geq \{\emptyset \mid \emptyset\}$, já que o número criado não se relaciona com nenhum número do conjunto esquerdo e nenhum número do conjunto direito se relaciona com o número criado. Pode-se demonstrar (e Conway o faz algumas páginas adiante) que essa relação é reflexiva para qualquer número surreal, sendo também antissimétrica e transitiva, de modo a cumprir as definições de relação de ordem (ampla).

Uma vez definida essa relação com suas propriedades, pode-se expandir seu uso:

- Dizemos $x \ngeq y$ quando a relação $\geq$ não é observada de x para y.
- Dizemos $x = y$ se ocorre simultaneamente $x \geq y$ e $y \geq x$. A relação "=" é reflexiva, simétrica e transitiva, configurando uma relação de equivalência.
- Dizemos $x > y$ (analogamente, $y > x$) se ocorre simultaneamente $x \geq y$ e $y \ngeq x$.
- Dizemos $x < y$ quando $y > x$.

As relações "$\geq$" e "=" são totais. Ou seja, quaisquer números surreais são comparáveis de acordo com essas relações, de modo que a classe de números surreais é totalmente ordenada, respeitando a tricotomia.

Uma vez construído o primeiro número, que será convenientemente simbolizado por 0, é possível construir dois novos números, num segundo momento: $\{\emptyset \mid 0\}$ e $\{0 \mid \emptyset\}$. Nota-se que $0 \geq \{\emptyset \mid 0\}$ e $\{\emptyset \mid 0\} \ngeq 0$, ou seja, o novo números é diferente de zero (e menor que esse). Da mesma forma, $\{0 \mid \emptyset\} \geq 0$ e $0 \ngeq \{0 \mid \emptyset\}$, sendo também diferente de zero (e maior que esse). Por fim, como a relação é transitiva, temos $\{\emptyset \mid 0\} < 0 < \{0 \mid \emptyset\}$.

Esses novos números, também convenientemente, serão simbolizados por -1 e 1, respectivamente. Como já é possível supor, basta seguir aplicando a recursão para construção de novos elementos, o que será feito a seguir. Combinando de todas as formas possíveis os 4 conjuntos E e D de elementos já criados (incluindo o conjunto vazio), é possível formar 16 pares de conjuntos, listados e analisados abaixo:

- $\{\emptyset \mid \emptyset\}$, número criado no *primeiro* momento
- $\{\emptyset \mid 0\}$ e $\{0 \mid \emptyset\}$, números criados no *segundo* momento
- $\{0 \mid 0\}$, $\{1 \mid 1\}$, $\{-1 \mid -1\}$, $\{1 \mid -1\}$, $\{1 \mid 0\}$, $\{0 \mid -1\}$, não configuram números surreais, já que em todos os casos ocorre que algum membro de E satisfaz a relação $\geq$ com algum membro de D, negando a definição dessa classe de números.
- $\{\emptyset \mid -1\}$, $\{-1 \mid 0\}$, $\{0 \mid 1\}$, $\{1 \mid \emptyset\}$, $\{\emptyset \mid 1\}$, $\{-1 \mid \emptyset\}$ e $\{-1 \mid 1\}$, números aparentemente novos.

Ao analisar esses novos números pela relação de ordem, observa-se o seguinte:

- $\{\emptyset \mid -1\} < -1$
- $-1 < \{-1 \mid 0\} < 0$
- $0 < \{0 \mid 1\} < 1$
- $1 < \{1 \mid \emptyset\}$
- $\{\emptyset \mid 1\} \geq 0$ e $0 \geq \{\emptyset \mid 1\}$, ou seja $\{\emptyset \mid 1\} = 0$
- $\{-1 \mid \emptyset\} \geq 0$ e $0 \geq \{-1 \mid \emptyset\}$, ou seja $\{-1 \mid \emptyset\} = 0$
- $\{-1 \mid 1\} \geq 0$ e $0 \geq \{-1 \mid 1\}$, ou seja $\{-1 \mid 1\} = 0$

Usando da conveniência mais uma vez, os quatro primeiros números da lista acima serão respectivamente simbolizados por –2, –½, ½ e 2; números criados no *terceiro* momento. Os termos “primeiro”, “segundo” e “terceiro” estão em itálico pelo seguinte motivo: os três últimos números da lista acima levam à descoberta de que esse sistema permite simbolizarmos o mesmo número por conjuntos E e D distintos. Para resolver essa situação, Conway afirma que é possível saber se um determinado par $\{E \mid D\}$ é equivalente a algum outro par analisando a existência de um número x tal que $E < x < D$ com x sendo um número mais simples, ou seja, um número criado em um momento anterior.

Essa definição será formalizada futuramente. No momento, nota-se que o elemento $x = 0$ foi criado no *primeiro* momento e é tal que $-1 < x < 1$. Assim, tendo sido o par $\{-1 \mid 1\}$ criado no *terceiro* momento e observando que $E < 0 < D$, de acordo com a definição dada para “número mais simples”, conclui-se que $\{-1 \mid 1\}$ é equivalente à 0.

Antes de formalizar o que Conway chama de “teorema da simplicidade”, pode ser de utilidade didática abrir parênteses para outro trabalho do autor, O livro dos números, escrito em conjunto com Richard K. Guy. Nessa publicação, ao ressaltar que um número surreal pode ter representações distintas, o autor conclui (1999, p. 300): "Levanta-se agora, naturalmente, a questão de saber quando é que dois nomes diferentes representam o mesmo número. A resposta tem algo de surpreendente: joga-se um jogo! "

O conceito de que um número é um jogo decorre da definição de jogo que será exposta a seguir. De acordo com essa definição, será possível notar que os números mais simples são aqueles que representam situações de jogos com menos ações possíveis. Após definir o que é um jogo de Conway será possível retomar o desenvolvimento formal dos números surreais.

4.2 Jogos Combinatórios

Antes de apresentar a relação entre jogos de Conway e números surreais, convém uma breve explicação sobre uma classe mais geral de jogos, chamados jogos combinatórios, que são aqueles em que a cada momento todos os jogadores podem prever todas as jogadas futuras, sem interferência da sorte ou blefe do adversário.

Esse tipo de jogo tem um caráter de grande interesse matemático, por ser logicamente dedutível a partir da análise combinatória de todas as jogadas possíveis. Nessa classe de jogos, sempre é possível desenvolver uma estratégia ótima para cada lance, de modo que o desempenho de cada jogador depende basicamente de sua capacidade lógica. São exemplos de jogos combinatórios o xadrez e o jogo da velha.

O estudo dos jogos (como o estudo dos números transfinitos) faz parte dos temas pelos quais Conway demonstra maior interesse. Os jogos de Conway fazem parte de uma classe de jogos combinatórios jogados por exatamente dois adversários e nos quais um sai vencedor, de modo que o número de jogadas é finito. Além disso, para que se possa estudar esse tipo de jogo, será preciso considerar em alguns momentos que ambos os jogadores possuem amplo raciocínio lógico, realizando sempre as jogadas que otimizam suas chances de vencer (jogadas ótimas).

Um jogo que satisfaz esse modelo é o desmata-mata, ou Hackenbush, em inglês. Esse jogo é utilizado por Conway n'O livro dos números e pode ser visto como modelo *extensional* de seus axiomas numéricos. Nele, um grafo com linhas de duas cores, separadas por vértices, é disposto sobre uma reta horizontal, chamada de solo. Todas as linhas do grafo devem estar direta ou indiretamente ligadas ao solo e cada cor corresponde a um jogador, que a cada jogada deve eliminar uma das linhas do grafo. Chamaremos esses jogadores de E (jogador da esquerda) e D (jogador da direita). Quando uma linha do grafo é retirada, todas as linhas que se desligam do solo após essa jogada são eliminadas. Perde o jogador que ficar sem linhas de sua cor para retirar.

Vejamos alguns exemplos[27] de jogos de Hackenbush:

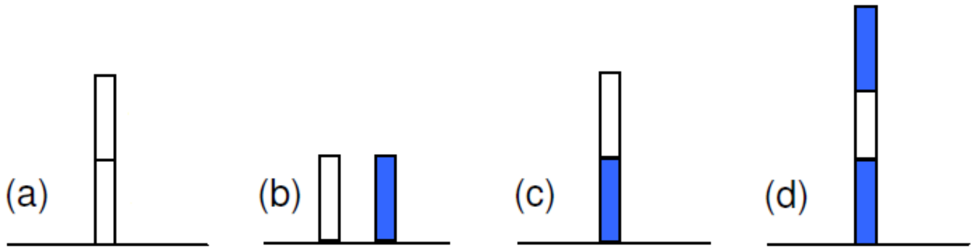

Figura 1. Exemplos de jogos de Hackenbush

Nesses exemplos o jogador E só pode retirar linhas azuis enquanto o jogador D só pode retirar linhas brancas. Para analisar as chances de cada jogador em uma configuração de jogo como essas, deve-se supor que todas suas jogadas sejam ótimas.

- No jogo (a) apenas o jogador D tem jogadas possíveis. Independentemente de quem comece o jogo, o jogador D ganha.
- No jogo (b) ambos os jogadores têm jogadas disponíveis e o jogador que começa sempre perde.
- Nos jogos (c) e (d) ambos os jogadores tem jogadas disponíveis e o jogador E ganha independentemente de quem começa.

De maneira formal, para cada jogo é definido um conjunto *S* de posições que podem ser obtidas por movimentos dos dois jogadores e que, dentre essas posições, distingue-se uma posição inicial chamada de s_0. A cada ação é realizado um deslocamento de s_0 para outra posição de *S*, sendo esse deslocamento realizado por um ou outro jogador. Simboliza-se essas ações por duas relações binárias $\to_E$ e $\to_D$ tais que $s \to_E s'$ significa um deslocamento da posição s para a posição s' feita pelo jogador esquerdo e $s \to_D s'$ representa o mesmo para o jogador direito.

Nos exemplos da figura 1 há, em cada caso, a imagem da posição s_0. A retirada de peças brancas seria simbolizada pela relação $\to_D$ e a retirada de peças azuis pela relação $\to_E$. Cada figura obtida após a retirada de alguma peça forma uma nova posição s_n. S é o conjunto

[27] Todos os exemplos e definições formais de jogos nesse capítulo foram obtidos de FONSECA, R. F. da. **A complementaridade entre os aspectos *intensional* e *extensional* na conceituação de número real proposta por John Horton Conway**. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP. São Paulo, 2010.

de todas as figuras que podem ser formadas a partir da figura inicial. Vale ressaltar que cada nova figura constitui por si só um novo jogo, mais simples do que o jogo anterior.

Seguindo com a formalização, define-se então que a relação s $\rightarrow$ s' existe se, e somente se existir s $\rightarrow_E$ s' ou s $\rightarrow_D$ s'. Ou seja, todo movimento deve ser feito por um dos dois jogadores. Além disso, se não existe s' tal que seja possível estabelecer uma relação s $\rightarrow_E$ s', então o jogador esquerdo não tem movimentos a fazer, o que significa que perdeu o jogo (analogamente para s $\rightarrow_D$ s' e o jogador direito).

Ressalta-se que o tipo de jogo estudado aqui deve satisfazer uma condição de finitude, isto é, a condição de não existir nenhuma sequência infinita de posições s_n com *n* natural, tal que $s_n \rightarrow s_{n+1}$. Desse modo conclui-se que nenhum jogo dessa classe terminará empatado ou retornará à posição inicial.

Essa condição garante que todo jogo, ao ser jogado, resultará em uma sequência finita de passos, partindo de uma configuração para outra até a configuração s_n onde apenas um dos dois jogadores possa realizar uma ação, configurando assim o jogador vencedor. De forma intuitiva, pode-se dizer que essa sequência leva cada configuração de jogo a uma configuração mais simples, o que remete ao teorema da simplicidade citado anteriormente e que será exposto mais adiante. Também de forma intuitiva, esse jogo mais simples é o que se chama jogo predecessor, cuja definição formal está exposta a seguir.

- Um jogo *x*' = (*S'*, s'$_0$, $\rightarrow'_E$, $\rightarrow'_D$) é um predecessor de *x* = (*S*, s_0, $\rightarrow_E$, $\rightarrow_D$), se para cada posição s'$_0$ pertencente a *S* tal que $s_0 \rightarrow$ s'$_0$, pode-se associar um jogo tal que: no conjunto *S*' estão as posições s, incluindo s'$_0$ para as quais existe uma cadeia s'$_0 \rightarrow \ldots \rightarrow$ s, com s $\rightarrow'_E$ s' se, e somente se, s $\rightarrow_E$ s'; analogamente para $\rightarrow_D$. O jogo *x'* é predecessor esquerdo ou direito de *x* se s'$_0$ resulta da relação $\rightarrow_E$ ou $\rightarrow_D$.

Em suma, um jogo *x'* é predecessor de outro jogo *x* se a posição s'$_0$ de *x'* pode ser obtida por uma sequência de uma ou mais movimentações feitas a partir da posição s_0 de *x*. Se *x'* é finalmente obtido por uma movimentação do jogador esquerdo, então é predecessor esquerdo de *x*. Se é obtido por uma movimentação do jogador direito, *x'* é predecessor direito de *x*.

4.3 Classificação de jogos

Uma vez definido o tipo de jogo combinatório do qual fazem parte os jogos de Conway, pode-se dividi-los em classes a partir de uma análise da configuração inicial de cada jogo. Para que a classificação dos jogos possa ser realizada, é preciso primeiro estabelecer, antes do início do jogo, quem irá fazer a primeira jogada, a partir da qual os jogadores realizarão movimentos alternados. Feito isso, é possível construir uma análise estratégica do jogo desde seu início, estudando as chances de vitórias de cada jogador a partir de jogadas ótimas.

Voltando ao exemplo (b) da figura 1, vê-se um jogo onde quem começa perde:

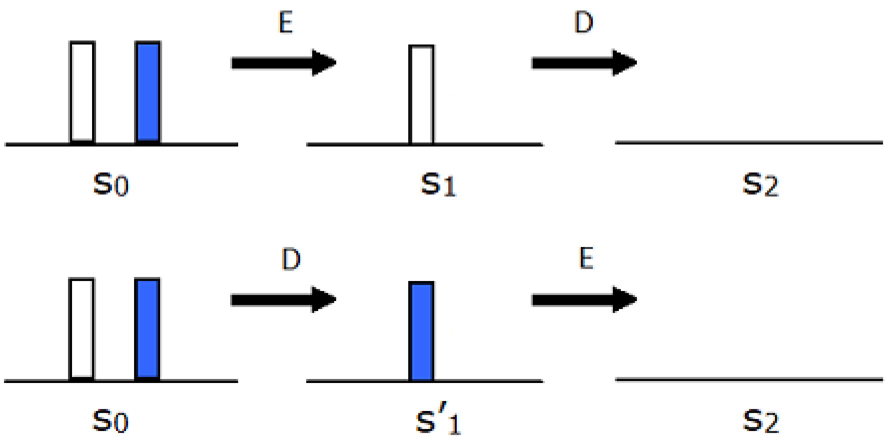

Figura 2. Análise de estratégia de um jogo

Na primeira situação, o jogador esquerdo começa e o direito vence. Na segunda, ocorre o contrário. Simbolizaremos essas duas situações utilizando as notações ExD e DxE, sendo a primeira letra indicadora de quem começa o jogo e a segunda indicadora de quem vence o jogo quando ambos utilizam apenas jogadas ótimas.

Essa notação pode ser aplicada em todos os exemplos de jogos anteriores, como mostra a figura 3. No exemplo (a) o jogador direito ganha independente de quem comece. No exemplo (b), como foi visto, quem começa perde. Nos exemplos (c) e (d), o esquerdo sempre ganha, independente de quem comece.

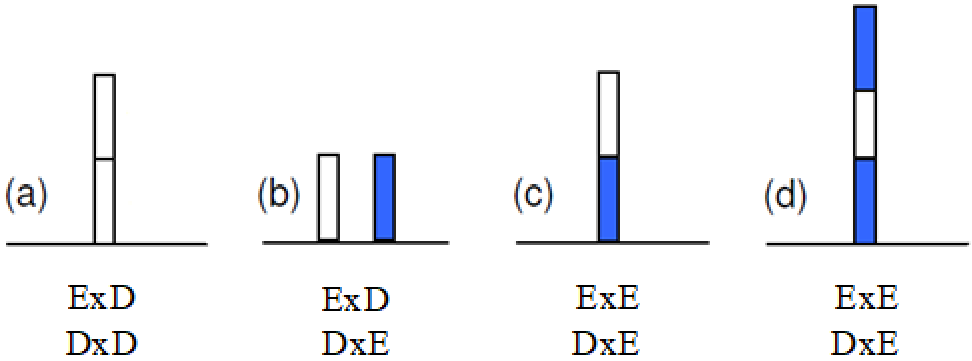

Figura 3. Classificação dos jogos

Nesses jogos de Hackenbush não há nenhuma configuração onde o jogador que começa sempre ganha, mas o jogo da velha é um exemplo onde ocorre simultaneamente ExE e DxD. Pode-se então classificar os jogos como segue:

- Um jogo *x* pertence à classe E se se verifica (DxE e ExE).
- Um jogo *x* pertence à classe D se se verifica (DxD e ExD).
- Um jogo *x* pertence à classe P (primeiro) se se verifica (DxD e ExE).
- Um jogo *x* pertence à classe S (segundo) se se verifica (ExD e DxE).

De acordo com essa classificação, é possível considerar o jogo nulo como um jogo da classe S, já que nesse jogo quem começa fica sem jogadas primeiro, portanto perde. Além disso, em qualquer jogo da classe E sabe-se que o jogador esquerdo vence, o que significa que o último movimento é dele. Assim, nos jogos dessa classe, o jogo nulo é um predecessor esquerdo. Analogamente, nos jogos da classe D, o jogo nulo é um predecessor direito.

A partir dessa observação pode-se dizer que os jogos da classe E são positivos, já que o jogo nulo está à esquerda deles. Em contrapartida, os jogos da classe D são negativos, já que o jogo nulo está à direita deles. Os jogos da classe P não podem ser comparados com o jogo nulo, não estando nem à esquerda nem à direita desse.

Partindo dessas ideias, define-se o oposto de um jogo como sendo aquele que se obtém invertendo as posições da esquerda e da direita. Logo, o oposto de um jogo positivo é sempre negativo, sendo a recíproca verdadeira. Simboliza-se o jogo oposto de x por $-x$, de modo que:

- $x = (S, s_0, \rightarrow_E, \rightarrow_D)$ e $-x = (S, s_0, \rightarrow_D, \rightarrow_E)$. Nota-se que $-(-x) = x$, e $-0 = 0$.

Define-se então a adição $x + y$ de dois jogos x e y como sendo a situação em que os dois são jogados simultaneamente e cada jogador pode, na sua vez, fazer uma movimentação em x ou em y exclusivamente. O jogador que primeiro ficar sem jogadas possíveis em ambos os jogos perde. Formalmente, tem-se:

- Se $x = (S_x, s_{0x}, \rightarrow_{Ex}, \rightarrow_{Dx})$ e $y = (S_y, s_{0y}, \rightarrow_{Ey}, \rightarrow_{Dy})$, então $x + y = (S, s_0, \rightarrow_E, \rightarrow_D)$, onde $S = S_x \times S_y$ e $s_0 = (s_{0x}, s_{0y})$. Além disso, deve ocorrer $(s_x, s_y) \rightarrow_E (s'_x, s'_y)$ se, e somente se ($s_x \rightarrow_{E\,x} s'_x$ e $s_y = s'_y$) ou ($s_x = s'_x$ e $s_y \rightarrow_{E\,y} s'_y$), de forma a garantir que as jogadas sejam feitas pelo jogador esquerdo em apenas um jogo de cada vez (analogamente para $\rightarrow_D$ e o jogador direito).
- $x - y = x + (-y)$

De acordo com essas definições, nota-se que a classe S é o elemento neutro da adição, já que ao se jogar qualquer jogo da classe S simultaneamente com outro jogo, o valor lógico do novo jogo não muda. As propriedades associativa e comutativa da adição também se verificam, ou seja, o jogo $y + x$ é isomorfo ao jogo $x + y$ e $(x + y) + z$ é isomorfo à $x + (y + z)$. Além disso pode-se definir relações de ordem e equivalência para jogos da seguinte maneira:

- Dados dois jogos x e y, tem-se $x \geq y$ se, e somente se $x - y$ for um jogo da classe E ou da classe S.
- Analogamente, tem-se $x \leq y$ se, e somente se $x - y$ for um jogo da classe D ou da classe S.
- Dados dois jogos x e y tem-se que $x = y$ são equivalentes se, e somente se $x \geq y$ e $y \geq x$ (ou seja, $x = y$ se $x - y$ é da classe S).

A relação de ordem estabelecida aqui não é total, pois não inclui os jogos da classe P. Ainda assim é reflexiva, antissimétrica e transitiva. De acordo com essas definições, pode-se obter alguns resultados importantes:

- $x = 0$ para todo jogo x da classe S
- Nenhum predecessor esquerdo de x é maior ou igual a x
- x não é maior ou igual a nenhum predecessor direito de x

Com essas definições é possível compreender melhor o que são os jogos de Conway.

4.4 Axioma de Conway para jogos

O axioma que define os jogos de Conway é similar ao que foi anteriormente apresentado para os números surreais:

- Se x e y são dois jogos de Conway, então o par $\{x \mid y\}$ é um jogo de Conway.

Nessa definição, x e y representam o conjunto de configurações possíveis de serem obtidas por movimentos de cada jogador (E ou D) em um determinado momento do jogo, de modo que o par $\{x \mid y\}$ passa a constituir uma nova configuração. Se essa configuração for obtida por um movimento do jogador esquerdo, o par passa a fazer parte do conjunto esquerdo do novo jogo. Analogamente, se essa configuração for obtida por uma jogada do jogador direito, o par forma um jogo distinto ao ser incluído no conjunto direito do novo jogo.

A diferença entre esse axioma e o apresentado anteriormente acerca dos números é que, para jogos, os valores x e y não precisam apresentar uma relação de ordem específica para que o par $\{x \mid y\}$ seja considerado um novo jogo. Ainda assim a construção dos jogos de Conway consiste em realizar o mesmo processo de recorrência feito anteriormente: uma vez que existem dois jogadores E e D, a ausência de um jogo presume a ausência de jogadas possíveis para ambos os jogadores, o que leva automaticamente à existência do jogo $\{\emptyset \mid \emptyset\}$, representante do tabuleiro vazio. Após a criação de um jogo vazio, que é o mesmo que chamamos de solo no jogo de Hackenbush, pode-se considerar que tal posição foi obtida por uma jogada, ou seja, um movimento de um dos dois jogadores, o que cria o novo jogo por recorrência do axioma.

Todo jogo de Conway é um jogo com essas características. Assim, sendo um jogo definido pela quádrupla $(S, s_0, \rightarrow_E, \rightarrow_D)$, temos que, em um jogo de Conway $x = \{x^E \mid x^D\}$, x representa a posição s_0 e os elementos dos conjuntos x^E e x^D representam as outras posições de S. Essas novas posições podem ser obtidas por movimentos do jogador esquerdo ou direito através das relações $\rightarrow_E$ e $\rightarrow_D$. A condição de finitude é verificada porque, se existisse uma sequência infinita de posições s_n com n natural, tal que $s_n \rightarrow s_{n+1}$, existiria também uma sequência de conjuntos (s_n) de tal modo que todo conjunto seja um elemento esquerdo ou direito do conjunto precedente, o que contraria o axioma de fundamento da teoria dos conjuntos.

A relação entre os jogos de Hackenbush e os números de Conway não é imediata. Entretanto, analisando uma a uma as jogadas em uma figura de Hackenbush e representando-as com determinado simbolismo, a relação buscada surge naturalmente. Tome-se o jogo (a) da figura 1 como exemplo, reproduzido abaixo, a partir do qual eliminou-se uma peça de cada vez, partindo da mais distante do solo, até a última peça:

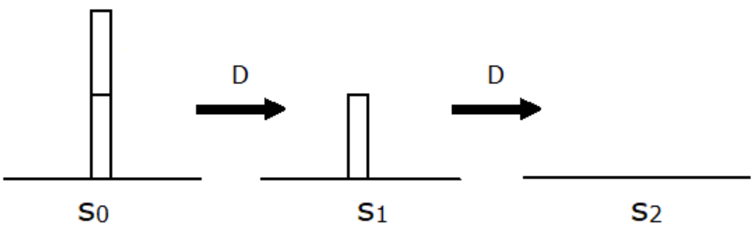

Figura 4. Análise do jogo (a)

A letra D sobre as setas indicam o jogador que fez o movimento. Os índices s_0, s_1 e s_2 indicam o jogo obtido após cada movimentação. Uma vez feita essa construção, podemos descrever esse jogo da seguinte maneira:

- Considera-se a posição final s_2, onde não há peças, como um jogo simbolizado pelo par $\{\emptyset \mid \emptyset\}$, indicando que não há jogadas para nenhum dos dois jogadores. O conjunto vazio do lado esquerdo indica essa condição para o jogador E, enquanto o conjunto vazio do lado direito indica condição análoga para o jogador D.
- Chamando o par $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ de 0, podemos observar que tal configuração de jogo foi atingida a partir de uma ação do jogador D. Dito isso, pode-se simbolizar a posição s_1 por $\{\emptyset \mid 0\}$, indicando que o 0, para esse jogo, é predecessor direito.
- Chamando o par $\{\emptyset \mid 0\}$ de –1, podemos observar que tal configuração de jogo também foi atingida a partir de uma ação do jogador D. Assim, pode-se simbolizar a posição s_0 do jogo (a) por $\{\emptyset \mid -1, 0\}$, indicando que tanto o 0 quanto o –1 são predecessores direitos de s_0.

Com essa notação, essa classe de jogos revela sua semelhança com a construção dos números surreais. Para aprofundar o estudo, vejamos como essa notação se aplica aos outros exemplos de Hackenbush, já com a notação de Conway referenciada em cada posição.

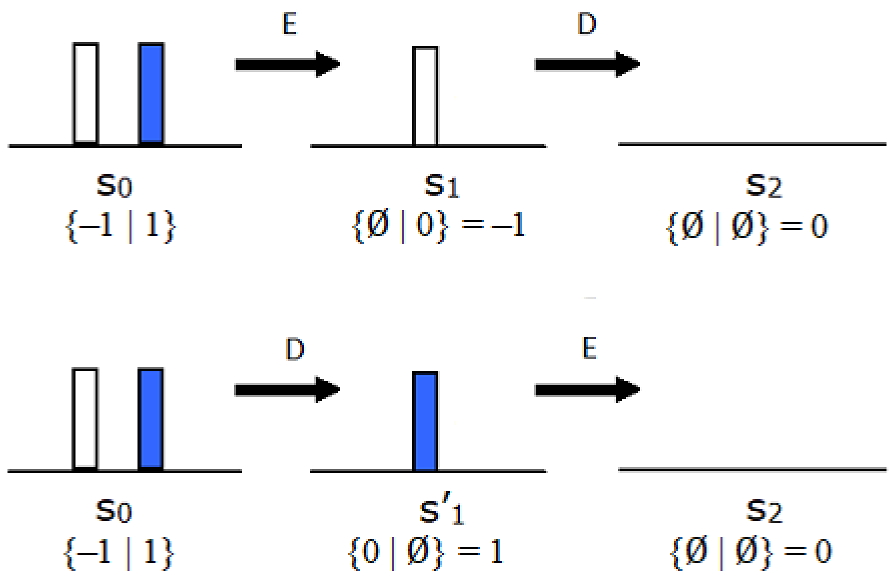

Figura 5. Análise do jogo (b)

No caso do jogo (b), a configuração inicial gera um conjunto de movimentos que precisa ser analisado em duas etapas, já que não é possível determinar uma única forma de retirar a peça mais distante do solo. Nesse exemplo, o conjunto de posições *S* é formado pelos pares $\{\emptyset \mid 0\}$, $\{\emptyset \mid \emptyset\}$, $\{0 \mid \emptyset\}$, $\{-1 \mid 1\}$, sendo essa última identificada como s_0.

Analisando primeiro a situação em que o jogador esquerdo começa, nota-se que a posição s_1 corresponde ao o jogo $\{\emptyset \mid 0\} = -1$ (idêntico à posição s_1 do jogo (a) analisado anteriormente), de modo que o –1 é predecessor esquerdo de s_0. Por outro lado, se o jogador direito começa, chega-se em uma posição s'_1, que ainda não foi analisada. Essa nova posição s'_1 forma um jogo com uma única jogada, que deve ser feita pelo jogador esquerdo e resulta em {Ø | Ø} = 0. Desse modo, pode-se chamá-la de {0 | Ø} = 1. Como a posição s'_1 = 1 foi obtida pelo jogador direito e a posição s_1 = –1 foi obtida pelo jogador esquerdo, pode-se concluir que a posição s_0 do jogo (b) corresponde ao par {–1 | 1}.

Esse jogo faz parte da classe S, pois nele ocorre simultaneamente ExD e DxE. Essa observação confirma o que foi dito anteriormente sobre a equivalência entre o par {–1 | 1} e o par mais simples {Ø | Ø} = 0. Esse exemplo demonstra que a utilização dos jogos de Hackenbush como modelo de interpretação dos axiomas de Conway pode ser de grande importância na compreensão desses axiomas.

Outro ponto a ser observado aqui é que o jogo (b) pode ser interpretado como a soma de dois jogos jogados simultaneamente, a saber, o jogo {Ø | 0} = –1 (formado por uma única linha azul) e o jogo {0 | Ø} = 1 (formado por uma única linha branca). Esse fato ajuda a compreender o conceito de jogo oposto: o jogo {Ø | 0} é obtido pela inversão de todas as jogadas esquerda e direita do jogo {0 | Ø} e a soma de ambos resulta em um jogo da classe S, equivalente ao jogo nulo.

No jogo (c) nota-se que as posições s_1 e s_2 representam jogos que já foram analisados anteriormente:

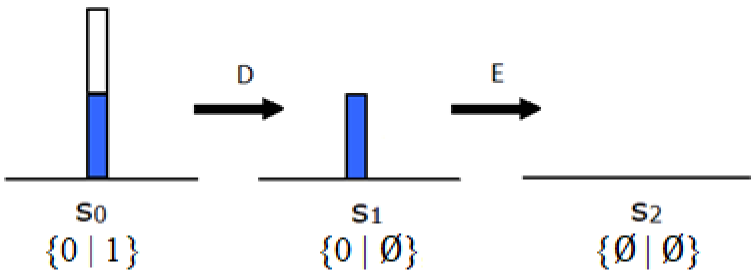

Figura 6. Análise do jogo (c)

Pode-se então concluir diretamente que s_2 = 0 e s_1 = 1 fazem parte respectivamente dos conjuntos E e D desse jogo, de modo que a posição s_0 do jogo (c) corresponde ao par {0 | 1}, que será agora chamado de ½.

Conforme o exposto, a posição s_0 desse jogo de Hackenbush é um jogo positivo (classe E), já que o jogador da esquerda, responsável por mover as peças azuis, ganha independentemente de quem começa o jogo. Nesse ponto da exposição é possível abandonar momentaneamente o modelo de Hackenbush e jogar diretamente o jogo de Conway. As jogadas possíveis são as seguintes:

- {0 | 1} $\rightarrow_D$ 1 = {0 | ∅} $\rightarrow_E$ 0 = {∅ | ∅}. Aqui, após a movimentação do jogador da direita, ele já não tem mais movimentos. O jogador da esquerda ganha o jogo.
- {0 | 1} $\rightarrow_E$ 0 = {∅ | ∅}. Aqui, após a movimentação do jogador da esquerda, é a vez do jogador da direita, que não tem movimentos. O jogador da esquerda ganha o jogo.

Nesse momento é possível também começar a investigar por que esse jogo foi convenientemente chamado de ½ no início do capítulo. Para isso, basta elaborar um jogo composto pela soma de dois jogos {0 | 1} com um jogo {∅ | 0} e analisar a estratégia de vitória.

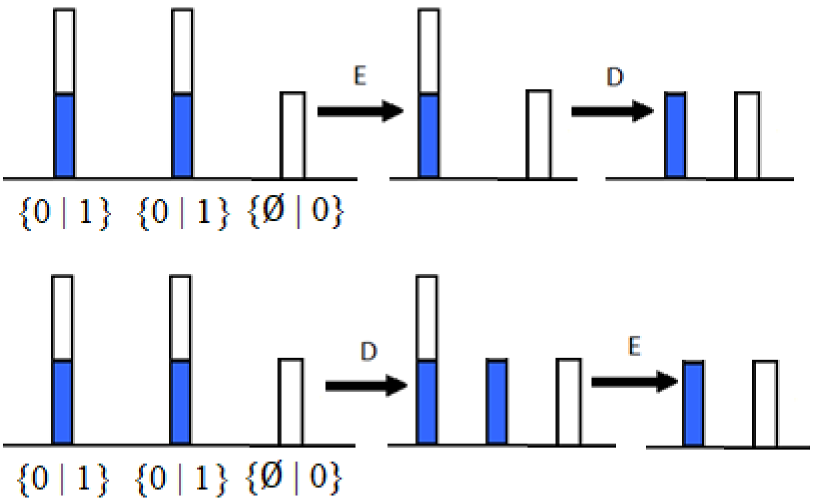

Figura 7. O jogo ½

Nessa soma de jogos, ao realizar apenas jogadas ótimas independentemente de quem começa, chega-se ao jogo dado no exemplo (b) que, como vimos, é um jogo da classe S. Isso significa que essa soma resulta em um jogo onde quem começa perde, ou seja, um jogo equivalente ao jogo nulo. Adiante será justificado, pelo elemento neutro do produto, o fato de ser utilizado o número 1 para representar o jogo {0 | ∅}. No momento, considerando isso como verdade, justifica-se chamar seu oposto {∅ | 0} de –1. Desse modo, sendo x = {0 | 1} e tendo verificado que $x + x + (-1) = 0$, justifica-se chamar o jogo {0 | 1} de ½.

Para encerrar essa análise, falta analisar o jogo (d) da figura 1 (reproduzido a seguir) e propor ainda uma investigação. No jogo (d), a posição s_1 corresponde exatamente ao jogo (c) e é obtida pelo jogador E. Assim, conclui-se o jogo ½ é predecessor esquerdo da posição s_0 do jogo (d), formando assim o jogo {0, ½ | 1}, que ainda não foi analisado ou nomeado.

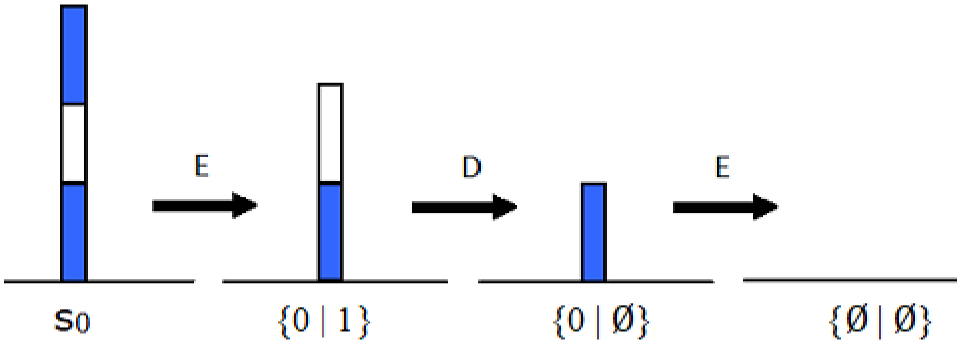

Figura 8. Análise do jogo (d)

Adiante se justificará o fato de chamar o jogo x = {½ | 1} de ¾. No momento basta observar que todo jogo de Hackenbush com um número finito de linhas pode ser associado a um jogo de Conway $x = \{x^E \mid x^D\}$ onde x^E e x^D tem um número finito de elementos e x representa um número racional da forma $\frac{m}{2^n}$. Vejamos então o que acontece se imaginarmos um jogo de Hackenbush com uma quantidade infinita de linhas:

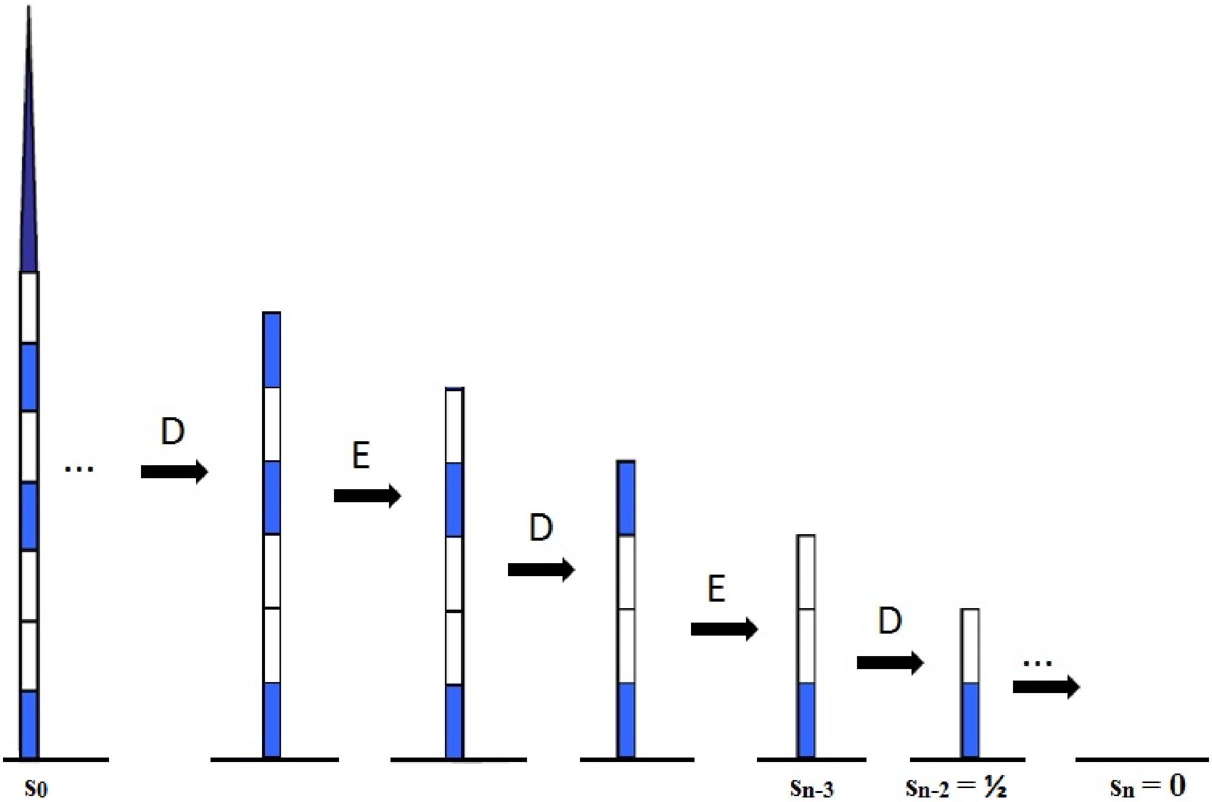

Figura 9. Análise de um jogo infinito

Nota-se que, mesmo em um jogo infinito, o número de jogadas é finito. Isso ocorre por que um dos dois jogadores irá começar o jogo e todas as peças que estiverem sobre a peça retirada por ele serão eliminadas. Essa finitude está relacionada ao fato de que cada jogada leva a um jogo mais simples e, de acordo com a forma como os jogos (e os números) são criados, todo processo levará em algum momento ao jogo zero, criado no *primeiro* momento.

Para descobrir que número esse jogo representa, basta descobrir o comportamento gerado pelo padrão das cores. Nesse caso, após a sequência azul – branca – branca – azul, todas as linhas seguirão o padrão alternado branca – azul.

Partindo do jogo ½ já analisado, observa-se que, nessa formação, o zero é predecessor esquerdo e o 1 é predecessor direito. Como o ½ é obtido pelo jogador direito, ½ é um predecessor direito. Assim, a posição s_{n-3} representa o jogo ¼ e é um predecessor esquerdo. As próximas posições serão 3/8 à direita, 5/16 à esquerda, 11/32 à direita, 21/64 à esquerda e assim por diante. Observando o padrão, percebe-se que o conjunto esquerdo forma uma série crescente cujo limite é 1/3. Já o conjunto direito forma uma série decrescente cujo limite é dado por 1 – 2/3 = 1/3. Como 1/3 será o único número entre x^E e x^D, conclui-se que esse jogo de Hackenbush só pode representar 1/3. Veremos também adiante que toda dizima periódica pode ser representada por uma soma infinita de frações binárias, tendo assim um jogo de Hackenbush com infinitas linhas que a represente.

As análises dos cinco exemplos tornam claro que jogos como os de Hackenbush, da mesma forma que os números surreais, podem ser descritos simbolicamente a partir da teoria de Conway fazendo uso da linguagem de conjuntos e do uso de símbolos numéricos. Resta ver como a soma de jogos e o elemento oposto podem ser definidos segundo essa simbologia. Para jogos de Conway, se $x = \{x^E \mid x^D\}$ e $y = \{y^E \mid y^D\}$, tem-se:

- $-x = \{-x^D \mid -x^E\}$ é o elemento oposto de x
- $x + y = \{x^E + y, x + y^E \mid x^D + y, x + y^D\}$
- $y - x = y + (-x)$

As relações de ordem e equivalência para jogos de Conway seguem as mesmas ideias das relações para jogos em geral, de acordo com as definições de jogos positivos e negativos pelas classes E ou D e da relação de ordem entre a subtração de jogos e o jogo nulo. A transposição formal dessa ideia para a axiomática dos jogos de Conway e consequentemente para os números surreais não é simples, mas uma breve explicação de seu desenvolvimento será dada posteriormente. No momento, o que foi definido até aqui é suficiente para a compreensão da afirmação de que “um número é um jogo”.

4.5 Os números surreais como corpo ordenado completo

Os jogos de Conway como foram descritos apresentam claramente uma relação direta com o que se chamou no começo do capítulo de “números surreais”. Conforme o exposto, o axioma que define os jogos de Conway é o mesmo que define os números surreais, acrescido da condição de que um jogo $x = \{x^E \mid x^D\}$ representa um número se, e somente se $x^E \ngeq x^D$.

Esse adendo ao axioma dos jogos seleciona apenas aqueles jogos que pertencem às classes E, D e S já que nos jogos da classe P[28] pode ocorrer por exemplo o caso {0 | 0}. Ao se excluir o caso P dessa classe de jogos, os que sobram estabelecem entre si uma relação de ordem total, onde a classe S representa o elemento neutro.

Retomando então a axiomática do início, tem-se:

- Se x^E e x^D são dois conjuntos de números surreais e nenhum membro de x^E apresenta a relação $\geq$ com qualquer membro de x^D, então $x = \{ x^E \mid x^D \}$ é um número surreal. Todos os números surreais são construídos dessa maneira.
- Dizemos $x \geq y$ quando ocorre simultaneamente as duas seguintes condições: (y não apresenta a relação $\geq$ com nenhum x^D) e (nenhum y^E apresenta a relação $\geq$ com x). Se $y \geq x$, dizemos que $x \leq y$
- Dados dois números x e y, tem- se $x = y$ se, e somente se $x \geq y$ e $y \geq x$
- Se $x \geq y$ e $y \ngeq x$, então $x > y$. Analogamente para $x \leq y$
- Sendo $x = \{x^E \mid x^D\}$ tem-se $x^E \ngeq x$ e $x \ngeq x^D$
- O oposto de um elemento x é dado por $-x = \{-x^D \mid -x^E\}$
- A adição de dois elementos é dada por $x + y = \{x^E + y, x + y^E \mid x^D + y, x + y^D\}$
- A subtração entre dois elementos é dada por $y - x \equiv y + (-x)$
- A adição é comutativa: $x + y \equiv y + x$
- A adição é associativa: $(y + x) + z = y + (x + z)$
- O elemento $0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ é neutro da adição
- Se $y \geq z$, então $x + y \geq x + z$ para todos x, y, z números surreais.

Conway ressalta que a definição de equivalência não significa a mesma coisa que a igualdade. Ocorre aqui como ocorre nas classes de equivalência de frações: dois números x e

[28] Nos exemplos tratados aqui e nos jogos de Hackenbush em geral não se observa jogos da classe P. Para esse estudo esse tipo de jogo foi negligenciado justamente por não se relacionar à números Reais. Alguns exemplos dessa classe de jogos podem ser encontrados em FONSECA, R. F. da. **A complementaridade entre os aspectos *intensional* e *extensional* na conceituação de número real proposta por John Horton Conway**. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP. São Paulo, 2010.

y podem ser equivalentes mesmo tendo x^E diferente de y^E e x^D diferente de y^D. Por isso diferencia-se o sinal "=" de equivalência do sinal "≡" de identidade. Na definição da subtração e da comutatividade da adição, o sinal de identidade significa que os dois membros representam números com os mesmos conjuntos E e D.

Conforme o exposto, Conway afirmara que para identificar se um número possui um equivalente mais simples, joga-se um jogo. A apresentação de alguns jogos permitiu essa observação na prática, ao mostrar que o jogo $\{0 \mid 1\} + \{0 \mid 1\} + \{\emptyset \mid 0\}$ é equivalente ao jogo $\{-1 \mid 1\}$ que é equivalente ao $\{\emptyset \mid \emptyset\} = 0$. Para demonstrar formalmente essa afirmação, o autor enuncia o Teorema da simplicidade:

- Para todo $x = \{x^E \mid x^D\}$, caso exista um número z tal que $x^E \ngeq z \ngeq x^D$ e não existam números em z^D ou z^E que também satisfaçam essa condição, então $x = z$ (sendo z sua forma mais simples).

De acordo com esse teorema, qualquer número que tenha um elemento negativo em seu conjunto esquerdo e um elemento positivo em seu conjunto direito é equivalente ao 0, uma vez que $z = 0 = \{\emptyset \mid \emptyset\}$ estará entre seus conjuntos esquerdo e direito e nenhum elemento direito ou esquerdo de z satisfará essa mesma condição. Esse teorema responde de forma muito mais rápida à questão dos números criados a partir do terceiro momento, pois sempre que um número criado em um momento anterior recair entre os elementos esquerdo e direito de um determinado número, a equivalência se verifica automaticamente.

A demonstração desse teorema e de muitas outras propriedades listadas anteriormente utiliza um enunciado chamado de princípio de recorrência e que vale para jogos em geral. Partindo da definição de jogo predecessor, enuncia-se o seguinte princípio:

- Se para todo jogo x, o fato de uma propriedade P ser verdadeira para todo predecessor x' de x implicar que é também verdadeira para x, então todo jogo x possui a propriedade P.

Esse princípio se estende para os números surreais como o princípio da indução completa funciona no conjunto dos naturais, com a vantagem que a recorrência segue aqui um passo finito. O conceito de predecessor, ao ser transportado para a classe de números surreais, se vale do conceito de simplicidade. Assim, um jogo predecessor é sempre representado por um número mais simples, ou seja, um que foi criado num momento anterior. Desse modo, toda propriedade que tem a característica de ser hereditária (ou seja, sendo válida para algum número também é válida para um mais simples), é válida para todos os números.

Uma forma de observar o funcionamento desse princípio é justamente na demonstração de que $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ é o elemento neutro da adição. Pela definição anterior de adição tem-se

$$x + 0 = \{x^E \mid x^D\} + \{\emptyset \mid \emptyset\} = \{x^E + 0 \mid x^D + 0\}$$

Se 0 não for o elemento neutro da adição, ocorrerá $x + 0 \neq x$, o que gera $x^E + 0 \neq x^E$. Mas, pela definição de número surreal, x^E é um número criado antes de x, o que torna a propriedade $x + 0 \neq x$ uma propriedade hereditária. Sendo hereditária, tem de ser válida para todo x, mas isso não é verdade, pois $0 + 0 = \{\emptyset \mid \emptyset\} + \{\emptyset \mid \emptyset\} = \{\emptyset \mid \emptyset\} = 0$. Logo, tem-se $x + 0 = x$ para todo x.

Com o princípio da recorrência e o teorema da simplicidade, a teoria de Conway permite a demonstração de todas as outras propriedades listadas, garantindo que a classe de números $(N_0, +, \geq, 0)$ forma uma estrutura algébrica definida por um único axioma e que depende apenas de uma relação de ordem bem definida para ser construída. Essa classe possui uma relação de equivalência e respeita a tricotomia, de modo que a relação de ordem $\geq$ é total. A classe é munida também de uma operação de adição + que é associativa, comutativa e com 0 como elemento neutro. Como todo elemento possui oposto, é uma classe fechada para a adição e para a subtração, formando um grupo abeliano. O passo que falta para transformar esse grupo em um corpo é a definição da multiplicação. Assim, para quaisquer dois números surreais x e y, tem-se o produto:

- $xy = \{x^E y + xy^E - x^E y^E, x^D y + xy^D - x^D y^D \mid x^E y + xy^D - x^E y^D, x^D y + xy^E - x^D y^E\}$

As seguintes propriedades da multiplicação se verificam:

- A multiplicação é comutativa: $xy \equiv yx$
- Vale a regra de sinais: $(-x)y \equiv x(-y) \equiv -xy$
- A multiplicação é associativa: $(xy)z = x(yz)$
- A multiplicação é distributiva sobre a adição: $x(y + z) = xy + xz$

Nota-se que a associativa e a distributiva geram elementos equivalentes, mas não idênticos, ao contrário da comutativa e da regra de sinais. As operações abaixo também geram elementos idênticos:

- $x0 \equiv \{x^E \mid x^D\}\{\emptyset \mid \emptyset\} \equiv \{\emptyset \mid \emptyset\} \equiv 0$
- $x1 \equiv \{x^E \mid x^D\}\{0 \mid \emptyset\} \equiv \{x^E 1 + x0 - x^E 0 \mid x^D 1 + x0 - x^D 0\} \equiv \{x^E \mid x^D\} \equiv x$

A propriedade da multiplicação por zero é imediata. Já a demonstração do 1 como elemento neutro da multiplicação parte de $x0 = 0$ e utiliza o princípio de recorrência da mesma forma que a demonstração do zero como elemento neutro da adição.

Uma vez definido o elemento neutro da multiplicação, é possível construir um número y de modo que, sendo x um número surreal positivo, y será tal que $xy = 1$, chamado de inverso de x. O elemento inverso existe na classe dos números surreais para todo x e é único, de modo que qualquer elemento z que satisfaça $zx = 1$ é equivalente a y. O inverso é dado então por:

- $y = \left\{0, \frac{1+(x^D-x)y^E}{x^D}, \frac{1+(x^E-x)y^D}{x^E} \,\middle|\, \frac{1+(x^E-x)y^E}{x^E}, \frac{1+(x^D-x)y^D}{x^D}\right\}$

Nota-se que essa expressão inclui o 0 no conjunto esquerdo, sendo válida apenas para valores positivos de x, como foi explicitado anteriormente. Caso x seja um número surreal negativo, seu inverso será o oposto de y, o que moverá o zero para o conjunto da direita. Além disso essa notação apresenta uma recursão: os símbolos y^D e y^E utilizados representam os elementos inversos de x^D e x^E respectivamente. O uso dessa notação se relaciona com o fato de que aqui y significa o inverso de x e não um número $y = \{y^E \mid y^D\}$ qualquer. O uso de y em vez de x^{-1} evita o uso da potenciação que não foi definida.

No decorrer do texto, Conway apresenta ainda a definição da raiz quadrada, mas nosso objetivo aqui está concluído: os números de Conway se mostraram não só como um caso particular dos jogos de Conway, mas também como um corpo ordenado.

4.6 Os números reais são surreais

Finalmente é possível concluir que os números surreais são números no contexto usual. Como demonstrado, os símbolos $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ e $\{0 \mid \emptyset\}$ representam o 0 e o 1 para os números surreais, sendo respectivamente os elementos neutros da adição e da multiplicação. Além disso, tem-se $\{\emptyset \mid 0\}$ como oposto ao 1, representando assim o –1. Utilizando a soma de jogos, demonstrou-se que $\{0 \mid 1\} = ½$, sendo possível concluir imediatamente que $\{–1 \mid 0\}$ é seu oposto –½.

Os outros números criados no terceiro momento não foram investigados, mas agora é possível concluir que $\{1 \mid \emptyset\}$ só pode representar o 2, pois somado com –1 resulta em 1. Seu oposto, $\{\emptyset \mid –1\}$, representa assim o –2. Outro número que não havia sido investigado, mas aparecera entre os jogos de Hackenbush foi o $\{0, ½ \mid 1\}$. Pelo teorema da simplicidade, esse número é igual a {½ | 1} e pode-se demonstrar que representa a fração $\frac{3}{4}$, que só seria criada no quarto momento.

Esse breve experimento recursivo pode levar à uma série de inferências que se mostram aos poucos verdadeiras e demonstráveis. A princípio observa-se que o zero é necessariamente o primeiro número criado, num momento que chamaremos de dia 0 da criação. A partir daí todos os números da forma $\{x - 1 \mid \emptyset\}$ com x natural não nulo são criados no dia x e representam o natural x. Observa-se também que todo número do tipo $\{x \mid y\}$ com x e y naturais representa o racional $(x + y) \div 2$, criado no dia $y + 1$. Além disso, números opostos são sempre criados no mesmo dia.

Pelo teorema da simplicidade, provou-se que todo número $x = \{E \mid D\}$ com algum x^E negativo e algum x^D positivo é equivalente a 0. Pelo mesmo teorema nota-se que, tendo todos os elementos de E e D o mesmo sinal, caso exista um ou mais inteiros entre E e D, {E | D} é equivalente ao inteiro de menor módulo. A demonstração desse fato é simples. Sendo o número $x = \{x - 1 \mid \emptyset\}$ o menor natural entre E e D formados por positivos, é imediato que não há elementos em x^E ou x^D que também estejam entre E e D. A demonstração é análoga para E e D formados por negativos.

A criação do número $\{½ \mid 1\} = \frac{3}{4}$ só poderia ser realizada no terceiro dia, pois a fração ½ só foi criada no segundo dia, após o 0 e o 1. Ocorre que qualquer fração cujo denominador é uma potência de dois será criada em algum dia n com n natural. Seguindo esse raciocínio Conway mostra que, em um processo finito, todos os racionais diádicos (do tipo $\frac{m}{2^n}$ com m inteiro e n natural) podem ser criados por seus axiomas.

De fato, sendo x um racional diádico, x pode ser escrito como $\{x - \frac{1}{2^n} \mid x + \frac{1}{2^n}\}$, como pode ser demonstrado:

- No caso de $n = 0$ a demonstração é imediata, já que x será inteiro e pode-se recorrer ao fato de $x = \{x - 1 \mid x + 1\}$ ser equivalente a $\{x - 1 \mid \emptyset\}$ para $x > 0$, $\{\emptyset \mid x + 1\}$ para $x < 0$, ou $\{\emptyset \mid \emptyset\}$ para $x = 0$.
- Para $n > 0$, define-se $z = \{x - \frac{1}{2^n} \mid x + \frac{1}{2^n}\}$ e prova-se que $z = x$, pois
  - $2z = \{z + x - \frac{1}{2^n} \mid z + x + \frac{1}{2^n}\}$ é o número mais simples entre E e D.
  - $x - \frac{1}{2^n} < z < x + \frac{1}{2^n}$ implica em $2x - \frac{1}{2^{n-1}} < 2z < 2x - \frac{1}{2^{n-1}}$
  - Como $2x$ é tal que $2x - \frac{1}{2^{n-1}} < 2x < 2x - \frac{1}{2^{n-1}}$, por recorrência, conclui-se que $2x = 2z$, de modo que $x = z$.

Com essa demonstração conclui-se que para cada racional diádico há um número de Conway que o representa. Como os números de Conway representam um corpo totalmente ordenado, essa representação é única. Resta saber que números podem ser criados em processos infinitos.

Como dito no início do capítulo, a estrutura desenvolvida por Conway forma uma generalização dos cortes de Dedekind e da teoria de Cantor para números reais e transfinitos. A relação entre a construção dos números de Conway como um par e a construção dos números reais por cortes de Dedekind possuem associação direta. Em ambos os casos, cada número se define por um par de conjuntos esquerdo e direito. A diferença é que Dedekind define os cortes como sendo pares de conjuntos de racionais, para então afirmar que os cortes onde o conjunto esquerdo possui máximo ou o direito possui mínimo são representantes dos próprios números racionais. Já na teoria de Conway, a existência de um conjunto anterior não é necessária: todos os seus números são construídos a partir do vazio.

A relação entre a construção de Conway e a construção dos reais por intervalos encaixantes proposta por Cantor não é tão imediata por que depende exatamente dos processos infinitos. Pelo teorema da simplicidade, tem-se que quando $x = \{E \mid D\}$ é tal que E e D são conjuntos não vazios com máximo e mínimo respectivamente, sendo x^E o máximo e E e x^D o mínimo de D, então pode-se afirmar que $x = \{x^E \mid x^D\}$. Nota-se que, nesses casos, x^E e x^D são números mais simples que x, sendo x criado num processo finito. Assim, x representa um racional diádico. Por outro lado, quando E não possui máximo ou D não possui mínimo, podendo um deles ser vazio, x pode representar outro tipo de número.

Por exemplo, pode-se notar que o número transfinito ω representante da infinitude dos naturais pode ser diretamente associado ao surreal $\{1, 2, 3, 4, \ldots \mid \emptyset\}$. Essa afirmação é uma extensão da construção dos inteiros vista anteriormente e demonstra que é possível encontrar significado para números surreais onde E e D são conjuntos não limitados. Decorre dela que esse tipo de número passa a ser criado a partir do dia ω.

A fração 1/3, por exemplo, tem representação decimal infinita. Utilizando linguagem binária, pode-se escrever 1/3 como 0,01010101.... Ocorre que todos os números racionais não diádicos ainda podem ser escritos como somas infinitas de frações binárias. Uma vez que os pares de conjuntos E e D formadores dos números surreais podem ser infinitos, sempre haverá uma forma de escrever um número surreal que corresponda a um número racional qualquer.

Retomando a teoria de Cantor, ressalta-se que Cantor associa a cada número real uma sequência de Cauchy de números racionais. Uma vez construídos todos os surreais representantes de racionais, é de se esperar que os representantes dos irracionais também possam ser construídos como pares de somas infinitas. Conway demonstra isso com um teorema.

O caminho que foi seguido até aqui intencionou demonstrar que ao escolher um número real qualquer sempre será possível encontrar um número surreal que o represente. Assim, para formalizar a existência de um conjunto dentro dos números surreais isomorfo aos reais, Conway propõe a seguinte definição:

- x é um número real se e somente se $-n < x < n$ para algum inteiro n, e
  $x = \{x - 1, x - 1/2, x - 1/3, \ldots \mid x + 1, x + 1/2, x + 1/3, \ldots\}$

Ou em uma forma reduzida:

- $x = \{x - (1/n) \mid x + (1/n)\}_{n > 0}$. (Entende-se que n varia no conjunto dos naturais)

Com essa definição do que vêm a ser números reais, Conway conclui que basta uma compreensão do que são naturais para construir todos os reais, o que é apresentado na forma do seguinte teorema em quatro partes:

i. Números racionais diádicos são números reais.
ii. Se x e y são números reais, então $-x$, $x + y$ e xy são números reais.
iii. Cada número real tem uma única expressão na forma {E | D}, em que E e D são conjuntos não vazios de racionais, E não tem maior elemento, D não tem menor elemento, e há no máximo um número racional que não está em E nem em D. E, ainda, $y' < y \in$ E implica $y' \in$ E, $z' > z \in$ D implica $z' \in$ D.
iv. Cada corte {E | D} como descrito em (iii) é igual a um único número real.

A parte (i) do teorema é imediata, de acordo como o que já foi demonstrado aqui, recorrendo ao teorema da simplicidade. A parte (ii) depende apenas das definições apresentadas para as operações dadas. A parte (iii) é a que mais desperta interesse: analisando-a com cuidado nota-se que é similar à definição dos cortes de Dedekind.

É importante ressaltar que a inclusão da afirmação – n < x < n garante que E e D não sejam vazios, fazendo com que x não seja transfinito. Além disso, a forma como x foi construído garante que E não tem máximo e D não tem mínimo, mas x é cota superior de E e inferior de D. Caso x seja racional, ele é o único racional que não figura nem em E nem em D. Caso seja irracional, é o supremo de E e ínfimo de D. A parte (iv) é a recíproca: todo corte desse tipo define um número entre -n e n. A unicidade desse número decorre de que a existência de outro y entre E e D, sendo racional, só pode ser igual a x. Sendo irracional, só pode ser o supremo de E e ínfimo de D, portanto igual a x.

Conway ressalta ainda que é possível substituir os termos “racional” por “racional diádico” em seu teorema, mostrando assim que tanto os racionais não diádicos quanto os irracionais podem ser construídos a partir do dia ω. O exemplo do número surreal que corresponde ao transfinito ω mostra que a classe de números surreais é mais extensa que os reais, incluindo também os transfinitos. Conway demonstra assim que todo número ordinal, dos reais aos transfinitos é um caso particular de jogo {E | D}.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após essa exposição, pode-se voltar à questão "o que é número?" com uma nova gama de perspectivas. Em retrospectiva é possível notar que, partindo das questões propostas na introdução desse trabalho, algumas respostas e outras tantas perguntas foram sendo elaboradas. Ao buscar uma definição de número ao longo da história e da filosofia, esbarrou-se em tópicos ainda atuais nos meandros do pensamento matemático:

- Afinal, as verdades matemáticas, construídas logicamente, são realmente irrefutáveis? Ou ainda, será possível que os enunciados matemáticos não digam nada sobre a realidade, não podendo nunca ser verificados ou falseados?
- No âmbito filosófico, é possível compreender a Matemática como sendo uma ciência ora obtida da experiência, ora fruto apenas do pensamento humano? O que essas diferentes compreensões podem ocasionar nas metodologias de ensino?

Essas são questões que permanecem em aberto na Filosofia da Matemática, mas cujo debate pode ser incrementado pela busca por definições do que é número. Ao definir o número partindo apenas de seus aspectos *intensionais* chegou-se a um conjunto de axiomas que pouco diz sobre o conceito de número tal qual é ensinado nas escolas, onde parte-se principalmente de seus aspectos *extensionais*.

Isso pode dizer muito sobre a construção da matemática como meta-ciência, bem como sobre a noção de verdade matemática. Os currículos atuais do ciclo básico mostram uma tendência à contextualização como parte essencial no processo de aprendizagem matemática. Esse viés é fruto de um movimento de reação crítica ao MMM e à abordagem conjuntista que parte de uma Matemática formal e não interpretada. Ainda assim, à parte das mudanças curriculares do ciclo básico, a abordagem axiomática é a que prevalece no ensino superior.

A coexistência dessas diferentes abordagens parece confirmar a ideia de que uma visão *complementarista* pode ser de grande valia para os processos de ensino e aprendizagem matemáticos. Ao buscar a complementaridade como ponto de vista filosófico dos saberes matemáticos, pode-se vislumbrar novas respostas para as questões citadas acima. Entretanto, para que essa visão possa ser considerada, é preciso retomar outras questões também levantadas ao longo desse estudo.

- É possível que haja dentro do currículo escolar espaço para o questionamento filosófico acerca do que vem a ser número?

- Quanto da compreensão do que é número por parte dos estudantes depende de sua apresentação socialmente contextualizada?

Essas não são questões que possam ser abordadas de forma superficial, principalmente quando se observa que a elaboração de um currículo vai muito além da seleção de conteúdos. A organização desses conteúdos num quadro curricular funciona como um *Tangram* onde a realocação das peças é capaz de formar figuras completamente distintas. Na construção do saber do aluno, que hoje é produto e amanhã será produtor do currículo, a escolha dos conteúdos e de sua articulação é um ato social e político, que pode definir a relação desse aluno com a ciência que se está ensinando.

Esse quadro fica ainda mais nebuloso quando se compreende que o professor de matemática, que ontem foi aluno, passou também por um processo de cisão entre o conteúdo do ciclo básico e o conteúdo do ensino superior. Se essa cisão colabora ou não na conceituação de número absorvida pelo professor, ainda não é possível saber, assim como não é possível determinar qual o espaço que a abordagem filosófica do conceito de número poderia ter nos currículos dos diferentes níveis de ensino. Mas pode-se supor ainda assim que a ausência atual do debate filosófico gera uma noção distinta do que vem a ser o número para professores e alunos, o que nos leva de volta às questões que abrem esse trabalho.

- É possível definir o que é número de forma única? Existe espaço nos currículos brasileiros atuais para esse questionamento? O conceito de número real é o mesmo para professores e alunos de matemática?

De acordo com tudo o que foi o exposto, parece então não ser possível definir número de forma única, do mesmo modo que o conceito de número não pode ser o mesmo para professores e alunos. Embora o texto tenha seguido em direção à afirmação de que o número é um jogo, o caminho percorrido mostra que todas as vezes em que se perguntou o que era o número, uma nova abordagem surgiu. Ainda assim, essa proliferação de respostas é algo que deve ser considerado, pois deixa claro que o processo de construção do conhecimento não escolhe caminhos. Ao contrário, quanto maior o número de caminhos distintos na busca de um novo saber, mais significativo ele se torna.

Assim, mais importante do que definir número de forma única, é criar o espaço para que professores e alunos façam essa pergunta. As respostas certamente serão distintas, mas o debate também será certamente enriquecedor. A resposta que a teoria desenvolvida por Conway permite à pergunta “o que é número” é importante então em diversos sentidos. No âmbito axiomático, fica demonstrado que todos os números ordinais podem ser integrantes de uma classe de jogos, sendo assim um caso particular deles. Há ainda a possibilidade de se investigar se os jogos que não representam números ordinais não poderiam representar outro tipo de números, por exemplo os complexos.

Como a abordagem de Conway a partir dos jogos não prescinde de definição axiomática, evidencia que os processos algorítmicos em teorias não interpretadas e a linguagem puramente lógica e simbólica não perdem seu valor diante dessas novas abordagens. Com isso, é possível supor que os jogos de Conway seriam um incremento valioso ao ensino superior.

Claro que sua teoria apresenta desvantagens quando direcionada ao ciclo básico, principalmente na execução das operações e demonstrações, que são significativamente menos simples e de mais difícil compreensão do que, por exemplo, as operações com frações feitas no método tradicional. Além disso, quando Conway contorna questões como o salto epistemológico que ocorre nas construções tradicionais ao se passar dos racionais para os irracionais, parte ele próprio dos cortes de Dedekind para poder generalizá-los, sendo então preciso algum conhecimento de análise para compreender completamente a teoria. Mas nada disso impede que, uma vez apresentada essa teoria no ensino superior, seja possível encontrar professores que realizem transposições didáticas envolvendo jogos e somas de progressões ou jogos e ordenação de racionais.

No âmbito filosófico, os aspectos *intensionais* da axiomática de Conway interagem com os aspectos *extensionais* por meio de modelos de jogos, como os jogos de Hackenbush, satisfazendo assim os preceitos da *complementaridade*. Essa construção dual, partindo simultaneamente do estudo do jogo para compreender o número e da definição do número para criar o jogo, é um retrato do que se entende por *complementaridade* no escopo matemático. Não há um processo hierárquico entre o axioma e sua interpretação: a relação entre o jogo e a teoria formal é via de mão dupla, onde o viajante decide em qual direção prefere seguir. Nesse sentido, o estudo dos números de Conway sugere de forma natural maneiras de transpor o conteúdo para os diversos ciclos escolares, configurando assim uma possibilidade de reunião entre a matemática escolar e a matemática do ensino superior.

Partindo desse ponto de vista, é possível afirmar que o surgimento dos números de Conway é sintomático, uma vez que está imerso em um movimento maior nas ciências em busca de incluir as ações do observador no objeto observado. A própria definição de número não poderia ser diferente: está intrinsecamente ligada ao desenvolvimento tecnológico humano e se altera em conjunto com esse desenvolvimento, como pôde ser visto na contextualização histórica feita no primeiro capítulo.

Assim, o estudo dos números surreais não ensina apenas sobre números e jogos, mas ensina também sobre a *complementaridade*: analisando a teoria de Conway como parte da teoria dos números, nota-se inclusive que os números surreais formam um aspecto *extensional* da própria definição *intensional* de número real. Como aspecto complementar da teoria, o estudo desses "novos" números pode levar a novas respostas para algumas questões levantadas pelo próprio desenvolvimento dos números reais.

- O que é um inteiro? Uma unidade pode ser feita de partes? Se sim, cada parte é uma nova unidade? Existe um limite para esse fracionamento? Existe enfim uma unidade fundamental?

O estudo dos números de Conway pode gerar pontos de vista distintos dos tradicionais na abordagem à essas perguntas, e esse é um dos aspectos importantes da *complementaridade*: o modelo de aplicação deve ser capaz de aperfeiçoar a teoria. Por outro lado, esse modelo gera também suas próprias questões. Por exemplo:

- O que pode significar para a compreensão do universo matemático o ato de definir os naturais por particularização dos reais ao invés de definir os reais como construção a partir dos naturais?

É nesse sentido que foi feita a afirmação de que a resposta para a pergunta norteadora desse texto não poderá ser respondida de forma única. Antes, para compreender tudo que um número pode vir a ser, é preciso que o estudante tenha acesso à diferentes formas de construção desse objeto. Dentre essas construções, a de Conway parece ser imprescindível, já que analisando aspectos históricos, filosóficos e didáticos, parece ser possível afirmar que um número é sim um jogo, mas não apenas um jogo de Conway. Um número é um jogo no sentido de que seus aspectos *intensionais* não serão suficientes para defini-lo de modo a incluir tudo que recai sobre esse conceito, como saber as regras de um jogo não é o mesmo que saber jogá-lo. Um número é simultaneamente o jogo, o jogador e o tabuleiro.

REFERÊNCIAS

ARRUDA, E. J. de; PAULA J. B.; DARSIE, M. M. P. **O pensamento Otteano**: O fenômeno da complementaridade na/para interpretação do desenvolvimento do conhecimento matemático e sobre os seus fundamentos. Latin American Journal of Science Education, Vol 1, 2015. Disponível em: http://www.lajse.org/may15/12051_Arruda.pdf Acesso em 05 set. 2017.

BARKER, S. F. **Filosofia da Matemática**. Tradução: Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1969. (Curso Moderno de Filosofia).

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, EDUSP, 1974.

BRASIL, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC).** Terceira versão. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_publicacao.pdf. Acesso em: 05 set. 2017.

CONWAY, J. H; GUY, R. K. **O livro dos números**. Tradução de José Sousa Pinto: Lisboa: Gradiva, 1999.

———. **On Numbers and Games**. 2. ed. Massachusetts: A K Peters, 2001.

COUSQUER, E. **Histoire du concept de nombre**. Institut de Recherche sur l'Enseignement dês Mathématiques. IREM de Lille, 1994.

D'AMBROSIO, U. **Sociedade, cultura, matemática e seu ensino.** Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

DANTZIG, T. **Número**: a linguagem da ciência. Tradução: Sergio Goes de Paula. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 1970.

DEDEKIND, R. **Essays on the Theory of Numbers**. Tradução de Woostre Woodruff Beman. Chigago: The Open Court Publishing Company, 1901.

DOXIADIS, A.; PAPADIMITRIOU, C. H. **Logicomix**: Uma jornada épica em busca da verdade. Tradução: Alexandre Boide dos Santos. São Paulo: Ed. WMF Martins Fontes, 2010.

FONSECA, R. F. da. **A complementaridade entre os aspectos intensional e extensional na conceituação de número real proposta por John Horton Conway**. Dissertação (Doutorado em Educação Matemática), PUC-SP. São Paulo, 2010.

FREGE, G. **Os fundamentos da aritmética**. Tradução, prefácio e notas de Antônio Zilhão. Rio de Janeiro: Imprensa Nacional; Casa da Moeda, 1992.

GLAESER, G. **Epistemologia dos números relativos.** Tradução: Lauro Tinoco. Rio de Janeiro: UFF, 1985 (Artigo do boletim GEPEM)

GODOY, E. V. **Currículo, cultura e educação matemática:** uma aproximação possível? Campinas, SP: Papirus, 2015.

GOLDFARB, W. **Poincaré against the Logicists.** Minessota Studies in Philosophy os Science, Vol. XI. Minessota, p. 61 – 81, 1988.

GOMEZ, B. **Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud**. Ata do Congresso Novas Jornadas para el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas (JAEM). Lugo, p. 91-95, 1999.

GONÇALVEZ, C. H. B.; POSSANI, C. **Revisitando a crise dos incomensuráveis na Grécia Antiga.** Matemática Universitária, nº 47. São Paulo, p. 16 – 24, dez. 2009.

HOLTON, G. **As raízes da complementaridade.** Tradução: Dinorah de Oliveira Mendes. Revista humanidades, Vol II, nº 9, dez / 1984. Disponível em http://www.fflch.usp.br/df/opessoa/Holton-Complementaridade.pdf Acesso em 05 set. 2017.

IGLIORI, S. B. C.; SILVA, B. A. **Concepções dos alunos sobre os números reais.** In: LAUDARES, João Bosco (Org.). *Educação Matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 2001.

KNUTH, D. E. **Números surreais.** Tradução de Jorge Nuno Silva. Lisboa: Gradiva, 2002.

LOPES, P. C. R. **Construções dos números reais.** Dissertação (Mestrado em educação matemática), Universidade da Madeira. Funchal, Madeira, 2006.

MILIES, C. P.; COELHO, S. P. **Números**: Uma introdução à Matemática. São Paulo: Ed. USP, 2006.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro, RJ: Zahar, 2012.

RUSSEL, B. **Introdução à filosofia matemática.** Tradução: Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Zahar Ed., 2007.

SILVA, J. J. da. **Matemática e Fenomenologia**. Bauru: SIPEQ, 2004. Disponível em: http://arquivo.sepq.org.br/II-SIPEQ/Anais/pdf/mr1/mr1_2.pdf. Acesso em 05 set. 2017.

———;. **Filosofias da Matemática**, São Paulo: Editora da UNESP, 2007.