Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

O Jogo dos 15 e a Teoria dos Grupos

Silvana de Oliveira Zago
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

Maio de 2017

O Jogo dos 15 e a Teoria dos Grupos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Silvana de Oliveira Zago e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 11 de outubro de 2017.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Andre Krindges
Prof. Dr. Edgar Nascimento

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

Z18j Zago, Silvana de Oliveira.
O jogo dos 15 e a teoria dos grupos / Silvana de Oliveira Zago. -- 2017
xi, 31 f. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Álgebra. 2. Teoria de grupos. 3. Permutações. 4. Lúdico. 5. Jogos. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 – Boa Esperança – 78.060-900 – Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

TÍTULO : "O jogo dos 15 e a teoria dos grupos"

AUTOR : Silvana de Oliveira Zago

defendida e aprovada em 11/09/2017.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutora Aldi Nestor de Souza
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Interno Doutor André Krindges
Instituição: Universidade Federal de Mato Grosso

Examinador Externo Doutor Edgar Nascimento
Instituição: Instituto Federal de Mato Grosso

Cuiabá,11/09/2017.

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu todas as condições para concluir este mestrado. A minha família e o meu filho Guilherme, pelo apoio e compreensão sobre minha ausência. Ao meu orientador Dr. Aldi Nestor de Souza, que sempre me encorajou nos estudos, me dando oportunidades de manter nesta perspectiva. Aos colegas de curso, companheiros de profissão e alunos, pela troca de conhecimentos e experiências. Aos professores do PROFMAT, que nos prepararam nas disciplinas, a CAPES e a SBM que elabora/financia projetos como este para contribuir cada vez mais ao avanço científico na área da Matemática.

Muito obrigado a todos.

"Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente."

Leibniz

Resumo

Apresentaremos neste trabalho a relação existente entre a Teoria dos Grupos e o Jogo dos 15. Para dar fundamento a pesquisa, inicialmente foi realizado uma contextualização sobre os principais conteúdos: Teoria dos Grupos e Grupo das permutações. Em seguida foi apresentado o Jogo dos 15, sendo descrito a história do Jogo com suas regras e jogadas. Na sequência foi relacionado a Teoria dos Grupos e o Jogo dos 15, mostrando um teorema que decide quando o Jogo dos 15 tem solução. Com a pesquisa verificamos a importância do tema proposto, pois este possibilita ao aluno ampliar seu conhecimento, portanto para encerrar foi feito uma discussão sobre jogos na sala de aula como estratégia de ensino, concretizando o estudo sobre a relação existente entre a Matemática e o lúdico.

Palavras chave: Álgebra; Teoria de Grupos; Permutações; lúdico; jogos.

Abstract

We will present in this work the relationship between the Theory of Groups and the Game of 15. To base the research, initially a contextualization was carried out on the main contents: Group Theory and Group of permutations. Next was presented the Game of 15, being described the history of the Game with its rules and plays. In the sequence was related to Theory of Groups and Game of 15, showing a theorem that decides when the Game of 15 has solution. With the research we verified the importance of the proposed theme, since this allows the student to expand his knowledge, so to close a discussion about games in the classroom as a teaching strategy, materializing the study about the relationship between mathematics and play .

Keywords: Algebra; Group theory; Permutations; playful; games.

Sumário

Lista de Tabelas

Introdução

O aluno contemporâneo, que é um sujeito globalizado, fortemente mediado pelas tecnologias digitais, é um grande desafio para a educação. Estamos diante de um aluno que precisa de motivação para os saberes matemáticos. Que precisa de um entendimento sobre o porquê daquele conhecimento adquirido, de acordo com MEC (1998b), à medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. Assim o saber matemático vai se moldando, através do processo cognitivo, associando práticas pedagógicas a esta etapa.

Nesta pesquisa, o desenvolvimento desse ambiente de construção de conhecimento matemático pode ser concebido através de jogos que ultimamente vem ganhando espaço no ambiente escolar, numa tentativa de trazer o lúdico e tornando as aulas mais fascinantes e interessantes. Segundo, Lara (2004), as atividades lúdicas podem ser consideradas como uma estratégia que estimula o raciocínio, levando o/a aluno/a a enfrentar situações conflitantes relacionadas com o seu cotidiano. Esta pesquisa de caráter exploratório, foi um estudo feito com o Jogo dos 15, observando suas regras e jogadas, relacionando-o com o conteúdo de Álgebra, em particular sobre Teoria dos Grupos, sendo necessário uma breve apresentação do conteúdo, dando ênfase ao Grupo das Permutações, assim também é uma pesquisa bibliográfica, relacionando teoria e prática, tornando significativo o processo de aprendizagem do aluno, proporcionando a construção e /ou resgate de conceitos e habilidades matemáticas a partir da prática docente. O presente trabalho se divide em quatro seções ordenadas: seção um, reservada para a introdução do trabalho composta pela apresentação temática, objetivos propostos a serem alcançados com o estudo, a metodologia aplicada e sua intencionalidade. Na seção dois, apresenta-se um breve estudo sobre Teoria dos Grupos, em especial Grupo das Permutações, apresentando os conceitos fundamentais que levam a sua compreensão. Em seguida, na seção três um breve histórico do Jogo dos 15, apresentando suas regras e jogadas. Na seção quatro, um estudo feito com o Jogo dos 15, relacionando com o conteúdo de Álgebra, em particular sobre Teoria dos Grupos, com aplicação do Grupo das permutações para sua resolução do Jogo dos 15, tendo como fonte principal de embasamento o livro de Domingues e Iezzi (2003). Na seção cinco, faz uma discussão dos jogos na sala de aula, utilizando o jogo como estratégia de ensino para estabelecer relações entre a prática vivenciada e a construção e estruturação do conhecimento.

Capítulo 1

Noção de Teoria dos Grupos

Este capítulo foi escrito de acordo com livro Domingues e Iezzi (2003), nele discutimos a Teoria dos Grupos, em particular os grupos de permutação, que compõe papel fundamental no trabalho.

1.1 Grupos e subgrupos

Definição de grupo: Seja G um conjunto no qual está definida uma operação entre pares de G. Dizemos que G é um grupo se são válidas as seguintes propriedades:

- **Associatividade**: a∗(b∗ c) = (a∗b)∗c, ∀ a,b,c ∈ G;
- **Existência do elemento neutro**: Existe um elemento e em G tal que $e * a = a * e = a$ para todo a pertencente a G;
- **Existência do elemento simétrico**: Para qualquer elemento a em G, existe um elemento m em G, tal que $a*m = m*a = e$, onde e é o elemento neutro previamente mencionado . Representamos o inverso de a por a^{-1}.
- **Se, além disso, ainda se cumprir o axioma da comutatividade**: $a * b = b * a$, quaisquer que sejam a, b pertencente a G"', o grupo recebe o nome de grupo comutativo ou abeliano.

Usa-se frequentemente a notação $(G, *)$ para indicar o grupo G com a operação $*$. É comum omitirmos o símbolo $*$ e usarmos expressões como, por exemplo, "Seja G um grupo"ou "Consideremos um grupo G, o que naturalmente pressupõe a operação subentendida. Outra maneira ainda de nos referirmos a um grupo $(G, *)$ é dizer que "G tem uma estrutura de grupo em relação à operação $*$".

1.2 Propriedades imediatas de um grupo

Seja $(G, *)$ um grupo. As propriedades da operação $*$:

- **O elemento neutro de um grupo é único**.

  Demonstração: Suponha que **e** e **e'** são dois elementos neutros. Então, para todo $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$, é verdade que $\mathbf{g} * \mathbf{e'} = \mathbf{e'} * \mathbf{g} = \mathbf{g}$. Em particular, temos $\mathbf{e} * \mathbf{e'} = \mathbf{e}$. Também é verdade que, para todo $\mathbf{g} \in \mathbf{G}, \mathbf{g} * \mathbf{e} = \mathbf{e} * \mathbf{g} = \mathbf{g}$. Em particular, para $\mathbf{g} = \mathbf{e'}$, temos $\mathbf{e} * \mathbf{e'} = \mathbf{e'}$. Portanto, $\mathbf{e} = \mathbf{e} * \mathbf{e'} = \mathbf{e'}$.

- **Cada elemento de um grupo G possui apenas um simétrico.**

  Demonstração: Seja $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ e sejam **x** e **x'** inversos de **g**. Então, $\mathbf{x} = \mathbf{x} * \mathbf{e} = \mathbf{x} * (\mathbf{g} * \mathbf{x'}) = (\mathbf{x} * \mathbf{g}) * \mathbf{x'} = \mathbf{e} * \mathbf{x'} = \mathbf{x'}$.

- **Em um grupo temos** $(\mathbf{x} * \mathbf{y})^{\mathbf{-1}} = \mathbf{y}^{\mathbf{-1}} * \mathbf{x}^{\mathbf{-1}}$.

  Demonstração: Temos que $(\mathbf{x}*\mathbf{y})^{\mathbf{-1}}(\mathbf{x}*\mathbf{y}) = \mathbf{e}$. Aplicando $\mathbf{y}^{\mathbf{-1}}$ nos dois lados da igualdade temos:$(\mathbf{x} * \mathbf{y})^{\mathbf{-1}}(\mathbf{x} * \mathbf{y}) * (\mathbf{y}^{\mathbf{-1}}) = \mathbf{e} * (\mathbf{y}^{\mathbf{-1}})$. Pela associatividade e definição de elemento neutro temos:$(\mathbf{x}*\mathbf{y})^{\mathbf{-1}}*\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathbf{-1}}$.Agora, aplicando $\mathbf{x}^{\mathbf{-1}}$ nos dois lados desta última igualdade, finalmente obtemos $(\mathbf{x} * \mathbf{y})^{\mathbf{-1}} = \mathbf{y}^{\mathbf{-1}} * \mathbf{x}^{\mathbf{-1}}$.

Cabem aqui algumas observações no que diz respeito à linguagem a ser empregada daqui pra frente:

- Será chamado de grupo *aditivo*, o grupo cuja operação é uma adição e grupo *multiplicativo*, se a operação for multiplicação.
- No caso de grupo aditivo, o simétrico de um elemento **a** é chamado oposto de **a** e indicado por **-a**; e no caso do grupo multiplicativo, o simétrico de **a** , é chamado de inverso de **a** e denotado por $\mathbf{a}^{\mathbf{-1}}$.
- Na maior parte da teoria desenvolvida sobre grupos, usa-se normalmente a notação de multiplicação, pois é mais prática e, é claro, os resultados obtidos valem em qualquer caso, bastando mudar convenientemente a notação.

1.3 Alguns grupos importantes

- **Grupo aditivos dos inteiros**

  Sistema formado pelo conjunto dos números inteiros, com a operação usual de adição.

- **Grupo aditivo dos racionais**

  Sistema formado pelo conjunto dos números racionais, com a operação usual de adição.

- **Grupo aditivo dos reais**

  Sistema formado pelo conjuntos dos números reais, com a operação usual de adição.

- **Grupo aditivo dos complexos** Sistema formado pelo conjuntos dos números complexos, com a operação usual de adição.

- **Grupo multiplicativo dos racionais**

  Sistema formado pelo conjunto dos números racionais não nulos, denotado por $\mathbb{Q}-\{0\}$, e com a multiplicação usual sobre este conjunto. O número 1 é o elemento neutro desse grupo.

- **Grupo multiplicativo dos reais não nulos**

  Sistema formado pelo conjunto dos números reais não nulos, denotado por $\mathbb{R}-\{0\}$, e com a multiplicação usual sobre este conjunto. O número 1 é o elemento neutro desse grupo.

- **Grupo multiplicativo dos complexos**

  Sistema formado pelo conjunto dos números complexos não nulos, denotado por $\mathbb{C}-\{0\}$, e com a multiplicação usual sobre este conjunto. O número 1 é o elemento neutro desse grupo. Eo inverso de um elemento $z = a + bi$, não nulo, é $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + \dfrac{-b}{a^2+b^2}\mathrm{i}$.

1.4 Grupos finitos

Chama-se grupo finito, um grupo $(G, *)$ em que o conjunto G é finito. Nesse caso, o número de elementos de G é chamado ordem do grupo (*notação* $\circ(G)$) e a tábua da operação $*$ se denomina tábua do grupo. Arthur Cayley 1821-1895, foi o primeiro matemático a usar tábuas para representar grupo e o uso de matrizes na Matemática.

Exemplo 1: Fácil verficar que G $=\{-1,+1\}$ é um grupo multiplicativo, sua ordem é 2 e sua tábua é:

$\cdot$	*1*	*-1*
1	*1*	*-1*
-1	*-1*	*1*

1.5 Subgrupos

Consideremos o grupo aditivo ($\mathbb{Q}$,+). Observemos que $\mathbb{Z}$, por exemplo, é um subconjunto de $\mathbb{Q}$ para qual valem as seguintes propriedades:

- $\mathbb{Z}$ é fechado para adição;
- ($\mathbb{Z}$, $+$), em que $+$ indica a adição de $\mathbb{Q}$, restrita aos elementos de $\mathbb{Z}$, também é um grupo. Por isso se diz que $\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{Q}$.

Definição: Seja $(G,*)$ um grupo. Diz-se que um subconjunto não vazio $H \subset G$ é um subgrupo de G se:

- H é fechado para a operação $*$, (isto é, se a, b $\in$ H então $a*$b$\in H$);
- $(H,*)$ também é um grupo (aqui o símbolo $*$ indica a restrição da operação de G aos elementos de H). É imediato verificar que, $\{e\}$ e $\{G\}$ são subgrupos de G. Esses dois subgrupos, são chamados *subgrupos triviais* de G.

Proposição 1: Seja (G,$*$) um grupo. Para que um sugconjunto $H \subset G$ seja um subgrupo de G, é necessário e suficiente que $a*b^{-1}$ seja um elemento de H sempre que aeb pertencerem a esse conjunto.

Demonstração

$(\rightarrow)$ Indiquemos por e e e_h, respectivamente, os elementos neutros de G e H. Como $e_h*e_h = e_h = e_h*e$, e todo elemento do grupo possui inverso em relação a $*$, então e $= e_h$. Tomemos agora um elemento b $\in$ H e indiquemos por b^{-1} e b_h^{-1} seus simétricos em G e H, respectivamente. Como, porém, $b_h^{-1}*b = e_h = e = b^{-1}*b$, então $b_h^{-1} = b^{-1}$ (

novamente pelo fato de todos os elementos do grupo possuirem inverosos em relação $*$). Por fim, se a e b $\in H$, então a $*$ b_h^{-1} $\in$, uma vez que, por hipótese, (H,$*$) é um grupo. Mas $b_h^{-1} = b^{-1}$ e portanto a $*$ b^{-1}$\in$ H.

($\leftarrow$) Como, por hipótese, H não é vazio, podemos considerar um elemento $x_0 \in$ H. Juntando esse fato à hipótese: $x_0 * x_0^{-1} = e \in$ H. Considerando agora um elemento b $\in$ H, da hipótese e da conclusão anterior segue que $e * b^{-1} = b^{-1} \in H$. Mostremos agora que H é fechado para operação $*$. De fato, se a, b $\in$ H, então, levando em conta a conclusão anterior, a, b^{-1}$\in$ H. De onde (novamente usando a hipótese): $a * (b^{-1})^{-1} = a * b \in H$. Falta mostrar a associatividade em H, mas isso é trivial, pois, se a,b,c $\in$ H, então a,b,c $\in$ G e, portanto, $a * (b * c) = (a * b) * c$ (já que essa propriedade vale em G).$\bullet$

Convém observar que, se o grupo é aditivo, então a condição de subgrupo dada pela proposição apresenta-se assim:

- Se a, b $\in$ H, então a + (-b) $\in$ H. E no caso de um grupo multiplicativo:
- Se a, b $\in$ H, então ab^{-1}$\in$ H.

Exemplo 2: O conjunto H = $\{x \in R^* | x > 0\}$ é um subgrupo do grupo multiplicativo dos números reais R - $\{0\}$. De fato, se a,b $\in$ H, então a,b $\in$ mathbb R, $a > 0$ e $b > 0$. Mas, se $b > 0$, então $ab^{-1} > 0$, pois o produto de dois números reais estritamente poaitivoa também é estritamente positivo. De onde, $ab^{-1} \in R$.

1.6 Grupos de permutações

Permutação é o termo usado na teoria dos grupos para designar uma bijeção de um conjunto nele mesmo. Se E indica um conjunto não vazio denotaremos por $S(E)$ o conjunto das permutações dos elementos de E. A composição de permutações é, neste caso, uma operação sobre $S(E)$, pois, se f e g são permutações de E, ou seja, se f: $E \rightarrow E$ e $g : E \rightarrow E$ são bijeções, então a composta $g \circ f \ : E \rightarrow$ E também é uma bijeção. Para essa operação vale a associatividade e que $i_E : E \rightarrow E$ (definida por $i_E(x) = x$, para todo $x \in E$), que obviamente é uma bijeção, é o elemento neutro nesse caso, posto que : $(i_E \circ f)$(x) = i_E(f(x)) = f(x), para todo x $\in$ E, o que garante a igualdade $i_E \circ f = f$. Analogamente se prova que $f \circ i_E = f$. Finalmente, se f é uma permutação de E, então o mesmo acontece com f^{-1} (aplicação inversa de f), é uma bijeção e é o elemento inverso de f para a composição de aplicações, pois $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i_E$.

Portanto , (S(E),$\circ$) é um grupo - *o grupo das permutações sobre* E. Observação: O grupo (S(E),$\circ$), é comutativo se, e somente se, sua ordem é 1 ou 2.

Um caso particular importante de um grupo de permutações, relacionado com a origem da *Teoria dos Grupos*, é aquele em que $E = I_n \ \{1, 2, 3, ..., n\}$ em que $n \geq 1$. Neste caso, em vez da notação genérica $S(E)$, usa-se S_n para indicar o grupo das permutações sobre E. E o próprio grupo $(S_n, \circ)$ tem um nome especial: grupo das permutações de n elementos. Da análise combinatória sabemos que esse grupo tem ordem $n!$. Para o estudo de S_n, costuma-se usar a seguinte notação: se f $\in S_n$ e $f(1) = i_1$, $f_2 = i_2, ..., f(n) = i_n$, então:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n. \end{pmatrix}$$

Por exemplo, a permutação idêntica, elemento neutro de S_n, é denotada por

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ 1 & 2 & ... & n \end{pmatrix}$$

Nessa notação, a ordem das colunas não importa, embora em geral se usem os elementos da primeira linha em ordem crescente. Por exemplo, em S_3,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

pois ambas têm o mesmo efeito sobre os elementos de E.

Com essa notação, a composição de duas permutações

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix} e \ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ j_1 & j_2 & ... & j_n \end{pmatrix}$$

se faz da seguinte maneira:

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & ... & i_r & ... & n \\ j_1 & ... & j_{i_r} ... & j_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & ... & r & ... & n \\ i_1 & ... & i_r & ... & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ... & r & ... \\ ... & j_{i_r} & ... \end{pmatrix}$$

pois $(g \circ f)$ (r) $= g(f(r)) = g(i_r) = j_{i_r}$

Por exemplo, em S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Notar que , por exemplo, a imagem de 3 pela composta se obtém da seguinte maneira: $3 \to 4 \to 3$.

Ainda de acordo com essa notação, se

$$\text{f} = \begin{pmatrix} a & ... & r & ... & b \\ 1 & ... & i_r & ... & n \end{pmatrix}$$

então

$$\text{f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & ... & i_r & ... & n \\ a & ... & r & ... & b \end{pmatrix}$$

Por exemplo, em S_4 a permutação inversa de

$$\text{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é:

$$\text{f}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1.7 Ciclos e Notação Cíclica

Para o estudo que se segue, precisaremos introduzir uma nova notação para as permutações.

Definição: Sejam $a_1, a_2, ..., a_r \in I_n$, inteiros distintos. Se $\sigma \in S_n$ é uma permutação tal que $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = \sigma^2(a_1) = a_3$,..., $\sigma(a_{r-1}) = \sigma^{r-1}(a_1) = a_r$ e $\sigma(a_r) = \sigma^r(a_1) = a_1$ e $\sigma_x = x$, para todo x $\in I_n$ - $\{a_1, a_2, ..., a_r\}$, então se diz que σ é um ciclo de comprimento r e que $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_r)$ é um conjunto suporte de σ. Para designar a permutação assim definida, usaremos a notação $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_r)$. Se r = 2 então σ é chamado de *transposição.*

Exemplo 3: Consideremos em S_5 a permutação

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Como $\sigma(1) = 4$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$ e $\sigma(5) = 5$, então σ é um ciclo de comprimento 3 cujo conjunto suporte é $\{1, 2, 4\}$. portanto, podemos escrever:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

A notação cíclica merece um comentário. Primeiro, ela não indica em que grupo S_n está. Por exemplo, o ciclo $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, tanto pode se tratar do exemplo anterior, como de:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

De que permutação se trata realmente é determinado pelo contexto. Outro aspecto dessa notação é que o mesmo ciclo pode ser descrito de mais uma maneira, pois cada um dos elementos do suporte pode ocupar a primeira posição, desde que não se mude a sequência em que eles aparecem. Em S_5, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Em qualquer dessas três notações, $1 \to 4$, $4 \to 2$, $2 \to 1$, $3 \to 3$, $5 \to 5$ e, portanto, efetivamente elas indicam a mesma permutação de S_5.

Definição: Seja G um grupo e seja x um elemento de G. A ordem de x, notação $\circ(x)$, é o menor inteiro não negativo n, tal que $x^n = e$.

Proposição 2: Se $\sigma = (a_1, a_2, ..., a_r) \in S_n$ é um ciclo de comprimento $r > 1$, então $\circ(\sigma) = r$.

Demonstração: Da definição de ciclo decorre diretamente que $\sigma^{i-1}(a_1) = a_i$ (i = 1,2,3,...,r) e $\sigma^r(a_1) = a_1$. Então $\sigma^i \neq \epsilon$ sempre que 1, e, portanto, $r \leq \circ(\sigma)$. Por outro lado, se i é um indice tal que 1, então $\sigma^r(a_i) = \sigma^r(\sigma^{i-1}(a_1)) = \sigma^{i-1}(\sigma^r(a_1)) = \sigma^{i-1}(a_1) = a_i$. Considerando-se que, $\sigma(x) =$ x sempre $x \neq a_i$ $(i = 1, 2, 3, ..., r)$, então $\sigma^r = \epsilon$ e, por conseguinte, $\circ(\sigma) \leq r$. De onde, $\circ(\sigma) = r\bullet$

Definição: Dois ciclos cujos suportes são conjuntos disjuntos, são chamados *ciclos disjuntos*. Exemplo:

Dois ciclos como $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} e \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$ *em* S$_5$, cujos suportes são conjuntos disjuntos, são chamados *ciclos disjuntos*

Proposição 3: Dois ciclos disjuntos comutam.

Demonstração: Sejam φ e σ ciclos disjuntos de S_n, com suportes iguais respectivamente a A e B. Se x é um elemento de I_n, há três hipóteses possíveis:

- x $\in$A. Então, ($\varphi\circ\sigma$) (x) $= \varphi(\sigma(x)) = \varphi(x)$, ao passo que $(\sigma\circ\varphi)(x) = \sigma(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Portanto, $\varphi \circ \sigma$ e $\sigma \circ \varphi$ coincidem em A.
- x $\in$B (raciocínio análogo).
- x $\notin A$ e x $\notin B$.Neste caso, $(\varphi \circ \sigma)$ (x) $= \varphi(\sigma(x)) = \varphi(x) = x$, ao passo que $(\sigma \circ \varphi)(x) = \sigma(\varphi(x)) = \varphi(x) = x$. Portanto, $\varphi \circ \sigma$ e $\sigma \circ \varphi$ também coincidem fora de A e B•

Proposição 4: Toda permutação $\sigma \in S_n$, exceção feita à permutação idêntica, pode ser escrita univocamente (salvo quanto á ordem dos fatores) como um produto de ciclos disjuntos.

Demonstração: Supondo, para facilitar, que $\sigma(1) \neq 1$, consideremos a sequência de imagens de 1 pelas potências sucessivas de σ :
$\sigma^0(1) = 1$, $\sigma(1)$, $\sigma^2(1) = (\sigma \circ \sigma)(1)$, $\sigma^3(1), ...$

Como I_n é finito, os elementos dessa sequência não podem ser todos distintos. Isso nos permite fazer a seguinte escolha: seja r o menor expoente estritamente positivo tal que $\sigma^0(1) = 1$, $\sigma(1)$, $\sigma^2(1) = (\sigma \circ \sigma)(1)$, $\sigma^3(1)$,..., $\sigma^{r-1}(1)$ sejam distintos mas $\sigma^r(1) = \sigma^j(1)$, para algum inteiro j tal que $0 \leq j\angle r$. Daí segue que $\sigma^r(1) = 1$. Obtém-se assim o ciclo:

$$\sigma_1 = (1, \sigma(1), \sigma_2(1), ..., a^{r-1}(1))$$

que coincide com a restrição de σ a seu conjunto suporte. Indiquemos por a o menor inteiro de I_n que não aparece no suporte de σ_1 e tal que $\sigma(a) \neq a$. (Se nenhum a de I_n cumprisse essa desigualdade, a demostração ja se encerrada.) Repetindo-se o argumento anterior com a sequencia

$$\sigma^0(a) = a$$

, $\sigma(a)$, $\sigma^2(a) = (\sigma \circ \sigma)(a)$, $\sigma^3(a), ...$
$chega - seaumciclo\sigma_2$, que também coincide com a restição de σ a seu conjunto suporte. Mostraremos que σ_1 e σ_2 são disjuntos. De fato, suponhamos que b fosse um elemento

comum aos suportes desses dois ciclos. Então $b = \sigma^t(1) = \sigma^s(a)$, com $0 \leq s \leq t$. Daí, $\sigma^{t-s}(1) = a$, o que coloca a no suporte de $\sigma(1)$, contrariamente a nossa escolha.Esse processo certamente termina num número finito de m de passos. E, σ se escreve da seguinte forma $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \ ... \circ \sigma_m$, $\sigma_1, \sigma_2, \ ...\sigma_m$ ciclos disjuntos •

Exemplo 4: Vamos decompor em ciclos disjuntos a seguinte permutação de S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como $\sigma(1) = 1$, vamos começar o processo descrito na demonstração com o elemento 2: 2, $\sigma(2) = 6$, $\sigma^2(2) = \sigma(\sigma(2)) = \sigma(6) = 5$, $\sigma(5) = 7$, $\sigma(7) = 2$.

Portanto,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Repetindo-se o processo à partir de 3,

$\sigma(3) = 8$, $\sigma(8) = 4$, $\sigma(4) = 3$

logo,

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

portanto,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposição 5: Se $n > 1$, então toda permutação de S_n pode ser expressa como um produto de transposições.

Demonstração: Uma verificação simples mostra que para todo ciclo de comprimento r em S_n vale a identidade

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{r-1}, a_r) = (a_1 a_r) \circ (a_1 a_{r-1}) \circ ... \circ (a_1 a_2)$$

Portanto, dada uma permutação de S_n, é só decompô-la em ciclos, de acordo com a proposição anterior, e depois aplicar a identidade acima para cada um dos ciclos$\bullet$

Exemplo 5:

Em S_4, $\sigma = (1\,2\,3\,4) = (1\ \ 4) \circ (1\ \ 3) \circ (1\ \ 2)$.

Exemplo 6: Vejamos como decompor em transposições a seguinte permutação de S_8:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Como já vimos no exemplo 4: $(2\,6\,5\,7) \circ (3\,8\,4)$. Logo:

$$(2\,6\,5\,7) = (2\ \ 7) \circ (2\ \ 5) \circ (2\ \ 6) \text{ e } (3\,8\,4) = (3\ \ 4) \circ (3\ \ 8)$$

Portanto:

$$\sigma = (2\ \ 7) \circ (2\ \ 5) \circ (2\ \ 6) \circ (3\ \ 4) \circ (3\ \ 8)$$

1.8 O sinal de uma permutação

A decomposição de um ciclo em transposições, garantida pela proposição 5, não é única. De fato, como $(a\ \ b) \circ (b\ \ a)$ é uma aplicação idêntica de I_n, que é o elemento neutro de S_n, então num produto de transposições podem-se inserir tantas expressões desse tipo quanto desejemos, sem afetar o resultado. Em S_7, por exemplo:

$$(2\,6\,5\,7) = (2\ \ 7) \circ (2\ \ 5) \circ (2\ \ 6) = (1\ \ 2) \circ (2\ \ 1) \circ (2\ \ 7) \circ (2\ \ 5) \circ (2\ \ 6)$$

Pode-se demontrar, porém, que todas as decomposições de um mesmo ciclo em transposições têm em comum a *paridade*, ou seja, se numa delas o número de transposições é par(ímpar), então o mesmo acontece em todas as outras. Para provar esse importante resultado, é preciso introduzir o conceito de *sinal* de uma permutação.

Definição: O sinal de uma permutação $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix}$ é o número real, aqui denotado por $sgn\sigma$, e definido por:

$$\text{sgn}\sigma = \prod \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j}$$

em que o produto é estendido a todos os pares (i,j) de índices tais que $i > \ j$.

Da definição decorre diretamente que o sinal da permutação idêntica é 1. Convém observar que o produto que define $sgn\sigma$ não depende da ordem das colunas na expressão de σ que cada quociente $\dfrac{a_i - a_j}{b_i - b_j}$ é uma função par (i,j).

Exemplo 7: O sinal da permutação $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{sgn}(\sigma) = \dfrac{2-1}{3-2} \cdot \dfrac{3-1}{1-2} \cdot \dfrac{3-2}{1-3} = (1) \cdot (-2) \cdot (-1) = 1$

Proposição 6: O sinal de uma transposição é -1.

Demonstração: Seja $\tau \in S_n$ uma transposição. Evidentemente podemos representar τ da seguinte maneira:

$$\tau = \begin{pmatrix} a_1 & a_2... & a_r & ...a_s & ... & a_n \\ a_2 & a_1... & a_s & ...a_r & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Se $(r\ ,\ s)$ é o par de índices alterados pela transposição τ, com um $1 \leq r < s \leq n$, então as situações possíveis são as seguintes:

a)$(r,\ s) = (1\ 2)$. Nesse caso, o fator correspondente em sgnτ é $\dfrac{a_2 - a_1}{a_1 - a_2} = -1$.

b)r $= 1$ e $s > \ 2$. Nesse caso, o fator correspondente em é $\dfrac{a_s - a_1}{a_s - a_2}$.

c)r $= 2$ e $s > \ 2$. Nesse caso, o fator correspondente em sgnτ é $\dfrac{a_s - a_2}{a_s - a_1}$.

d)$r > \ 2$. Nesse caso, o fator correspondente em sgnτ é $\dfrac{a_s - a_r}{a_s - a_r} = 1$.

Como os fatores de b) e c) aparecem em pares cujo produto é 1 então,
$\dfrac{a_2 - a_1}{a_1 - a_2} = -1\bullet$

Proposição 7: Para quaisquer permutações $\sigma, \varphi \in S_n$, sgn$(\varphi \circ \sigma) = (sgn\varphi)(sgn\sigma)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a \\ b_1 & b_2 & ... & b_n \end{pmatrix} e\ \varphi = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & ... & b_n \\ c_1 & c_2 & ... & c_n \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$(\text{sgn}\varphi)(\text{sgn}\sigma) = (\text{sgn}\sigma)(\text{sgn}\varphi) = \prod \frac{a_i - a_j}{b_i - b_j} \prod \frac{b_i - b_j}{c_i - c_j} = \prod \frac{a_i - a_j}{c_i - c_j} = \text{sgn}(\varphi \circ \sigma) \bullet$$

Corolário 1: Se $\sigma \in \mathrm{S}_n$, então $sgn\sigma = \pm 1$.

Demonstração Como já vimos, toda permutação pode ser expressa como um produto de transposições. Portanto:

$\sigma = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ ... \circ \lambda_r$

para convenientes transposições $\lambda_1 \lambda_2, ... \lambda_r \in S_n$. Então usando-se a generalização natural da proposição 7 para r fatores e considerando-se que a assinatura de uma transposição é igual a -1:

$sgn\sigma = sgn(\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ ... \circ \lambda_r) = (sgn\lambda_1)(sgn\lambda_2)...(sgn\lambda_{\lambda_r}) = (-1)(-1)...(-1) = (-1)^r = \pm 1 \bullet$

Colorário 2: Qualquer que seja a permutação $\sigma \in S_n$, $sgn\sigma^{-1} = (sgn\sigma)^{-1}$

Demonstração: Como $(1\ 2) \circ (1\ 2)$ indica a identidade de S_n, então $\sigma^{-1} \circ \sigma = (1\ 2) \circ (1\ 2)$.Portanto:

$\left[sgn(\sigma^{-1})\right](sgn\sigma) = sgn\left(\sigma^{-1} \circ \sigma\right) = sgn\left[(1\ 2) \circ (1\ 2)\right] = = [sgn\,(1\ 2)]\,[sgn\,(1\ 2)] = (-1)(-1) = 1$

De onde, $sgn\sigma^{-1} = (sgn\sigma)^{-1}$ $\bullet$

Proposição 8: Seja dada uma permutação $\sigma \in S_n$ e consideremos duas decomposições de σ em transposições:

$\sigma = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ ... \circ \lambda_r$ e $\sigma = \rho_1 \circ \rho_2 \circ ... \circ \rho_s$

Então os inteiros r e s têm a mesma paridade.

Demosntração: Devido ao corolário 1, $sgn\sigma = (-1)^r = (-1)^s$. Se r for par, então $(-1)^r = 1$; daí $(-1)^s = 1$ e, portanto, s também é par. O raciocício é análogo no caso em que r é impar•

Definição: Uma permutação $\sigma \in S_n$ é chamada *par* ou *ímpar* conforme possa ser expressa como um produto de um número par ou ímpar de transposições. Em outras palavras, conforme seu sinal seja +1 ou -1. O conjunto das permutações pares de S_n será indicado por A_n.

Podemos associar a uma permutação um sinal positivo (+) ou negativo (-), obtido contando-se o número de transposições (isto é, a troca da posição de dois elementos) necessárias para se obter a permutação. Para exemplificar, consideremos as permutações das letras a, b e c:

$(a\ b\ c) \rightarrow$ terá sinal (+) pois nenhuma troca foi feita

$(b\ a\ c) \rightarrow$ terá sinal (-) pois houve apenas uma troca (do a com o b)

$(b\ c\ a) \rightarrow$ terá sinal (+) pois trocamos o a com o b e, posteriormente, o c com o a

Uma permutação é sempre obtida por meio de uma série de transposições simples. Se ela for obtida por meio de um número par de transposições, seu sinal será +, e se for obtida por um número ímpar de transposições, seu sinal será - . O número de transposições de uma permutação pode mudar, mas a paridade não.

Observe os exemplos:

Exemplo 1:

- f = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in S_7$
- Notação cíclica f $=(1\ \ 6) \circ (2\ \ 4\ \ 3\ \ 5) = (1\ \ 6) \circ (2\ \ 5) \circ (2\ \ 3) \circ (2\ \ 4)$
- paridade PAR

Exemplo 2:

- $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 3 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_8$

- Notação cíclica $\sigma = (2\ \ 6\ \ 5\ \ 7) \circ (3\ \ 8\ \ 4) = (2\ \ 7) \circ (2\ \ 5) \circ (2\ \ 6) \circ (3\ \ 4) \circ (3\ \ 8)$
- paridade ÍMPAR

Capítulo 2

Jogo dos 15

Nesta seção, apresentaremos o *O Jogo dos 15.* Será descrita a história do Jogo, bem como suas regras e jogadas.

2.1 O Jogo

É um jogo de tabuleiro, que fez parte da infância de muitas pessoas e hoje, devido a tecnologia, pode ser baixado de graça da internet. De acordo com Dal Monte Neto (2009), tudo começou na década de 1870, quando o americano Sam Loyd, inventor de um número enorme de quebra-cabeças, publicou no suplemento dominical de um jornal nova-iorquino um problema-desafio com o prêmio de 1000 dólares para quem descobrisse a solução. Como o editor se mostrasse desconfiado, Loyd teve de garantir o pagamento de seu próprio bolso. Relatos da época dão conta de que muitos patrões tiveram de proibir o porte de quebra-cabeça nos recintos de trabalho, para impedir que seus funcionários brincassem com ele pelos cantos. Rapidamente, o jogo atravessou o Atlântico e consta que na Alemanha os deputados chegaram a levá-lo às sessões do Parlamento. Em Paris, tornou-se comum promover torneios nos cafés, onde os fregueses se esqueciam dos compromissos, concentrados por horas a fio na brincadeira.

O Jogo dos 15 consiste em uma caixinha quadrada com dezesseis partilhas, também quadradas. A 16ª é retirada, deixando-se um espaço vago, para o qual pode-se empurrar uma pastilha adjacente, na horizontal ou vertical. Esta, por sua vez, ao ser removida deixa outro espaço, para o qual pode-se empurrar outra pastilha e assim por diante. Desse modo, é possível desarranjar a ordem indicada na Tabela 2.1, através do deslizamento sucessivos de pastilhas (não vale retirá-las da caixa).

Tabela 2.1: Tabuleiro do jogo dos 15.

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	

O que Sam Loyd propôs em seu desafio foi chegar a configuração da Tabela 2.1, partindo da posição indicada na Tabela **??**. Nesta, o objetivo é ordenar as peças em ordem crescente de 1 a 15.

Tabela 2.2: Configuração inicial do Tabuleiro.

labeltab2

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*15*	*14*	

Segundo Dal Monte Neto (2009), ninguém jamais ganhou o prêmio oferecido por Sam Loyd, ainda que muitas pessoas alegassem ter descoberto a solução casualmente, mas, sem tê-la anotado, diziam não saber reconstituí-la. Notória demonstração de orgulho ferido, já que o problema, simplesmente, não tem solução. Sam Loyd sabia disso e, portanto, não hesitou em arriscar seu próprio dinheiro no prêmio. Não tardou muito para que começassem a investigar o comportamento matemático do passatempo. Descobriu-se que, entre os várias combinações iniciais possíveis, exatamente metade apresenta a possibilidade de chegar-se à posição da Tabela 2.1 e a outra metade conduzem, na melhor das hipóteses, à posição da Tabela **??**. Veremos isto com mais detalhes ao longo do trabalho.

2.2 O jogo, suas regras e jogadas

Trata-se,como ja foi dito na seção 2.1, de uma pequena caixa quadrada, com 15 espaços cobertos por quinze peças, numeradas de 1 a 15, também quadradas e um espaço vazio para que se possa movimentá-las (conforme a Tabela 2.3).

Tabela 2.3: Exemplo de configuração do tabuleiro

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*15*	*14*	

Para jogar, deve-se deslocar as peças, no sentido vertical ou horizontal, ocupando o espaço vazio, sem retirá-las da caixa. Um exemplo de jogada é a Tabela 2.4, onde o número 14 foi deslocado para o espaço vazio, num movinto horizontal.

Tabela 2.4: Configuração do tabuleiro após uma jogada.

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*15*		*14*

Objetivo: Ordenar os números da tabela, até obter a Tabela 2.5.

Tabela 2.5: Configuração final do tabuleiro.

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	

De acordo com o artigo Luiz Barco (2009), a popularidade do jogo fez com que ele merecesse, anos mais tarde, artigos em publicações científicas. Analisando a invenção de Sam Loyd, matemáticos chegaram à seguinte conclusão: são quase vinte e um trilhões de configurações possíveis das peças na caixinha (21×10^{12}).

Capítulo 3

Jogo dos 15 e a Teoria dos Grupos

Nesta seção, exibiremos a relação entre a *Teoria dos Grupos* e o *Jogo dos 15*. Em particular mostraremos um teorema que decide quando o *Jogo dos 15* tem solução.

3.1 Associação do jogo com o grupo de permutacões

A cada configuração do Jogo dos 15, associaremos uma permutação de S_{15}, como abaixo:

$$H = \begin{array}{||c|c|c|c||} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ \hline & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \end{array}$$

Associamos a esse jogo a permutação abaixo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{15} & x_{14} & x_{13} \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Exemplo 1:

Para o jogo dado pela configuração abaixo (que corresponde ao Jogo de Sam Loyd):

Associaremos a seguinte permutação do S_{15}:

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*15*	*14*	

$$\text{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Em notação cíclica $f_{=}(58) \circ (67) \circ (13\,1415) = (58) \circ (67) \circ (13\;\,14) \circ (13\;\,15)$, como a composição de permutações pares resulta numa permutação par, temos que sua paridade é **PAR**.

Exemplo 2:

Para o jogo dos 15 resolvido, temos a seguinte configuração:

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	

Associaremos a seguinte permutação do S_{15}:

$$\text{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Sua notação cíclica $f_{=}(58) \circ (67) \circ (13\,15)$, como a composição de permutações ímpares resulta numa permutação ímpar, temos que sua paridade é **ÍMPAR**.

Teorema 1 *Ao fazermos uma jogada no Jogo dos 15, a paridade da permutação associada é a mesma (não muda).*

Demonstração:
Dividiremos a demonstração em todos nos casos a seguir, pois o espaço vazio do Jogo dos 15 pode estar em qualquer lugar na tabela.

Modelo 1: Jogada na vertical

Considere a seguinte tabela H relativa a um jogo dos 15, em que $x_1, x_2, ..., x_{15}$, são os números de 1 a 15, em qualquer ordem:

$$\text{H} = \begin{array}{||c|c|c|c||}\hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_9 & & x_{10} & x_{11} \\ \hline x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \end{array}$$

Associamos a esse jogo a permutação abaixo:

$$\text{H} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Ao fazermos uma jogada na vertical com o elemento x_6, temos o seguinte tabela F:

$$\text{F} = \begin{array}{||c|c|c|c||}\hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_5 & & x_7 & x_8 \\ \hline x_9 & x_6 & x_{10} & x_{11} \\ \hline x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \end{array}$$

Associamos a esse jogo a permutação abaixo:

$$\text{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_8 & x_7 & x_5 & x_9 & x_6 & x_{10} & x_{11} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Tanto na matriz H quanto na F, a paridade é desconhecida, pois $x_1, x_2, ..., x_{15}$, são os números de 1 a 15, em qualquer ordem.

Agora considere a permutação G, dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 9 & 7 & 8 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix} inS_{15}$$

Observe que em notação cíclica $G_{=}(789) = (7\ 8)\circ(79)$, temos que sua paridade é **par**.

Fazendo agora a composição de F com G, temos:$F \circ G =$ H , observe

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \end{pmatrix}$$

Portanto, como G é par, a paridade de F é a mesma de H..

Modelo 2: Jogada na horizontal

Considere a seguinte tabela H relativa a um jogo dos 15, em que $x_1, x_2, ..., x_{15}$, são os números de 1 a 15, em qualquer ordem:

$$H = \begin{array}{||c|c|c|c||} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline x_9 & & x_{10} & x_{11} \\ \hline x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \end{array}$$

Associamos a esse jogo a permutação abaixo:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Ao fazermos uma jogada na horizontal, temos o seguinte tabela F:

$$F = \begin{array}{||c|c|c|c||} \hline x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ \hline & x_9 & x_{10} & x_{11} \\ \hline x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ \hline \end{array}$$

Associamos a esse jogo a permutação abaixo:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Observe que após a movimentação, temos que a matriz F é igual a matriz H, e portanto a paridade de ambas as matrizes é a mesma .

As demais posições são analisadas de modo análogo.Com isso concluímos a demonstração •

De acordo com a notação cíclica, o Jogo dos 15 resolvido tem paridade ÍMPAR. Portanto pelo Teorema um jogo só terá solução se a paridade for ÍMPAR.

Voltando ao **Jogo de Sam Loyd**, cuja configuração apresentada abaixo:

A permutação associada é:

1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*
9	*10*	*11*	*12*
13	*15*	*14*	

$$\mathrm{f} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 8 & 7 & 6 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 14 & 15 & 13 \end{pmatrix} \in S_{15}$$

Como vimos no exemplo 1 sua paridade é par, portanto pelo Teorema, impossível resolvê-lo.

Capítulo 4

Jogos na sala de aula

Nesta seção, faremos uma breve discussão sobre o uso de jogos na sala de aula como estratégia de ensino. Em particular do caso do Jogo dos 15, como uma forma de abordar temas mais avançados em Matemática como a Teoria dos Grupos.

4.1 O jogo como estratégia de ensino

Para Libâneo (1994) o processo de ensino se caracteriza pela combinação de atividades do professor e dos alunos. Estes, pelo estudo das matérias, sob direção do professor, vão atingindo progressivamente o desenvolvimento de suas capacidades mentais. A direção eficaz desse processo depende do trabalho sistematizado do professor que, tanto no planejamento como no desenvolvimento nas aulas conjuga objetivos, conteúdos, métodos e forma organizada de ensino.

O professor, ao dirigir e estimular o processo de ensino em função da aprendizagem dos alunos utiliza intencionalmente um conjunto de ações e procedimentos, que chamamos de estratégias de ensino. Por exemplo, a atividade de explicar a matéria corresponde os métodos de exposição; a atividade de estabelecer uma conversação ou discussão com a classe corresponde o método de elaboração conjunta. Os alunos, por essa vez, sujeitos da própria aprendizagem, utilizam-se de métodos de assimilação de conhecimentos. Por exemplo, a atividade dos alunos de resolver tarefas corresponde o método de resolução de tarefas; a atividade que visa o domínio dos processos de conhecimentos científicos numa disciplina corresponde o método científico; a atividade de observação corresponde o método de observação e assim por diante.

Em resumo, podemos dizer que as estratégias de ensino são as ações do professor pelas quais se organizam as atividades de ensino e dos alunos para atingir os objetivos do trabalho docente em relação ao conteúdo específico, regulando a forma de interação entre ensino e aprendizagem, entre professor e os alunos, cujo resultado é a assimilação consciente dos conhecimentos e desenvolvimento das capacidades operativas dos alunos.

Frente a estas discussões sobre o que é estratégia de ensino e a sua importância no processo de aprendizagem, podemos destacar o uso de jogos na sala de aula como método, para estabelecer relações entre a prática vivenciada e a construção e estruturação do conhecimento. Portanto, a utilização de jogos torna-se um recurso interessante e prazeroso que viabiliza a aprendizagem.

Conforme as orientações dos novos Parâmetros Curriculares Nacionais, vê MEC (1998a), as atividades com jogos podem representar um importante recurso pedagógico, já que os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações.

Sabendo da importância que os PCN´s representa no âmbito educacional para o desenvolvimento dos projetos escolares, e a influência que possui nas atividades a serem realizadas pelos professores de Matemática , usando o jogo como método, nos PCN´s existe a defesa de que os jogos podem contribuir na formação de atitudes construção de uma atitude positiva perante os erros, na socialização (decisões tomadas em grupo), enfrentar desafios, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e dos processos psicológicos básicos.

Ainda existe muito educadores que tentam utilizar jogos em sala de aula, somente para diversão e não para dar encaminhamento ao trabalho, fortalecer o conhecimento estudado, não que o jogo não tenha esse caráter de diversão, mais existe a possibilidade de explorar os jogos para avaliar os efeitos dos mesmos em relação ao processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Segundo Grando et al. (2000) a grande maioria ainda vem desenvolvendo as atividades com jogos espontaneamente, isto é, com um fim em si mesmo, o jogo pelo jogo, ou imaginando privilegiar o caráter apenas motivacional. Nota-se uma certa ausência de preocupação em se estabelecer algum tipo de reflexão, registro, pré formalização ou sistematização das estruturas matemáticas subjacentes à ação no jogo (análise). Desta forma, não se estabelece um resgate das ações desencadeadas no jogo, ou seja, um processo de leitura, construção e elaboração de estratégias e tradução, explicitação numa linguagem. Trata-se apenas de compreensão e cumprimento das regras, com elaboração informal e espontânea de estratégias, e sem muita contribuição para o processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Para sistematizar esse conhecimento, deve-se entender quais os tipos de jogos que existe, para que o professor consiga manipular essa recreação transformando numa estratégia de ensino.De acordo com Lara (2004), os jogos podem ser divido em:

1. **Jogos de construção**: aqueles que trazem ao aluno um assunto desconhecido fazendo com que, através da manipulação de materiais de perguntas e respostas, ele sinta a necessidade de uma nova ferramenta, ou se preferirmos, de um novo conhecimento para resolver determinada situação problema proposta pelo jogo. E, na procura desse novo conhecimento ele tenha a oportunidade de buscar por si mesmo uma nova alternativa para sua resolução. Jogos desse tipo permitem a construção de algumas abstrações matemáticas que, muitas vezes, são apenas transmitidas pelo professor e memorizadas sem uma real compreensão pelo aluno.

2. **Jogos de treinamento**: O treinamento pode auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido. Muitas vezes, é através de exercícios repetitivos que o aluno percebe a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção. Além disso, o jogo de treinamento pode ser utilizado para verificar se o aluno construiu ou não determinado conhecimento, servindo como um termômetro que medirá o real entendimento que o aluno obteve.

3. **Jogos de aprofundamento**: Depois que o aluno tenha construído ou trabalhado determinado assunto, é importante que o professor proporcione situações onde o aluno aplique-o. A resolução de problemas é uma atividade muito conveniente para esse aprofundamento, e tais problemas podem ser apresentados na forma de jogos. Os conteúdos matemáticos são tratados, ainda, por alguns professores de forma fragmentada. Será, também, através dos jogos de aprofundamento que poderemos fazer uma articulação entre diferentes assuntos já estudados.

4. **Jogos estratégicos**: Muitos jogos que nosso aluno está acostumado a jogar com seus amigos, entre eles: Dama, Xadrez, Batalha Naval, Cartas, ou com o computador e celulares. Podemos desenvolver, no ensino da Matemática, jogos desse tipo. Jogos que façam com que os alunos criem estratégias de ação para melhor situação como jogadores. Onde tenha que criar hipóteses e desenvolver um pensamento sistêmico, podendo pensar múltiplas alternativas para resolver um determinado problema.Está presente nos PCNs MEC (1998a) o seguinte argumento:Nos jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) parte-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático.

4.2 O Jogo dos 15

Este trabalho tem o objetivo de proporcionar aos professores de Matemática, tanto na escola como nas instituições de Ensino Superior, a possibilidade de discutir através do jogo dos 15 temas de Matemática, como a Teoria dos Grupos.

Teoria dos Grupos é um dos assuntos de fundamental importância em diversas áreas afins, como: na Física, onde é utilizada para descrever as simetrias que as leis da Física devem obedecer; na Química, grupos são utilizados para classificar estruturas cristalinas e a simetrias das moléculas, logo, em particular em Matemática, grupos são usados para o estudo de simetrias.

Nesse contexto, através de um jogo conhecido popularmente como Jogo dos 15, a abordagem do tema Teoria dos Grupos, que é de fundamental importância para a Matemática. O jogo com sua ludicidade permite uma visão mais atrativa e agradável na compreensão do conteúdo abordado.

Considerado como jogo estratégico, O Jogo dos 15, é um jogo simples e pode ser jogado por qualquer pessoa, logo o professor pode usar em qualquer serie ou ano, e tem a oportunidade de desenvolver nos alunos habilidades lógicas e técnicas para a resolução de problemas. Aproveitando para sistematizar e entender o processo do Jogo dos 15, o professor utiliza do conteúdo de Álgebra Linear: Teoria dos Grupos, em particular Grupo das Permutações, que pode ser trabalhado com os alunos do Ensino Médio, aproveitando a Análise Combinatória para justificar todo esse processo.

Na Análise Combinatória, a noção de grupo de permutação e o conceito de um grupo são frequentemente utilizados para simplificar a contagem de um conjunto de objetos. É no Ensino Superior que o aluno compreende toda essa sistematização do Jogo dos 15, e os conteúdos trabalhados usados são indispensáveis para a construção do modelo matemático, se tornando um importante método de ensino.

Referências Bibliográficas

Dal Monte Neto, L. (2009). Um antepassado do cubo mágico. Disponível em http://super.abril.com.br/comportamento/um-antepassado-do-cubo-magico/ Acesso em: 09/05/2017.

Domingues, H. H. e Iezzi, G. (2003). *Álgebra moderna.* Atual.

Grando, R. C. et al. (2000). O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.

Lara, I. C. M. (2004). Jogando com a matemática de 5ª a 8ª série.

Libâneo, J. A. (1994). Didática.

Luiz Barco (2009). O Jogo dos 15 e suas trilhões de possilibildades. Disponível em http://super.abril.com.br/comportamento/o-jogo-do-15-e-suas-trilhoes-de-possibilidades/ Acesso em: 09/maio/2017.

MEC (1998a). Introdução aos parâetros curriculares nacionais: Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental.

MEC (1998b). Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio (pcnem), parte iii– ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.