Universidade Federal de Mato Grosso
Instituto de Ciências Exatas e da Terra
Departamento de Matemática

Algumas considerações sobre os Números Complexos

Ricardo Oliveira do Nascimento
Mestrado Profissional em Matemática: PROFMAT/SBM

Orientador: **Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza**

Trabalho financiado pela Capes

Cuiabá - MT

setembro de 2017

Algumas considerações sobre os Números Complexos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação, devidamente corrigida e defendida por Ricardo Oliveira do Nascimento e aprovada pela comissão julgadora.

Cuiabá, 31 de agosto de 2017.

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Aldi Nestor de Souza
Prof. Dr. Reinaldo de Marchi
Prof. Dr. Edgar Nascimento.

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do título **de Mestre em Matemática**.

Dados Internacionais de Catalogação na Fonte.

N244a Nascimento, Ricardo Oliveira do.
Algumas Considerações sobre os Números Complexos / Ricardo Oliveira do Nascimento. -- 2017
x, 36 f. : il. color. ; 30 cm.

Orientador: Aldi Nestor de Souza.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Mato Grosso, Instituto de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Cuiabá, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Ensino da matemática. 2. Interdisciplinaridade. 3. Aplicações cotidianas. I. Título.

Ficha catalográfica elaborada automaticamente de acordo com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT
Av. Fernando Corrêa da Costa, 2367 - Boa Esperança – 78.060-900 - Cuiabá/MT
Tel : (65) 3615-8576 – E-mail: profmat@ufmt.br

FOLHA DE APROVAÇÃO

Título: **"Modelagem matemática como enfoque para o ensino"**

Autor: **Ricardo Oliveira do Nascimento**

defendida e aprovada em 31/08/2017.

Composição da Banca Examinadora:

Presidente Banca/Orientador Doutor Aldi Nestor de Souza
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Aldi Nestor de Souza

Examinador Interno Doutor Reinaldo de Marchi
Instituição : Universidade Federal de Mato Grosso

Reinaldo de Marchi

Edgar Nascimento

Examinador Externo Doutor Edgar Nascimento
Instituição : Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia - IFMT

Cuiabá,02/10/2017.

Agradecimentos

Depois de uma longa caminhada, chegamos ao final. Tantos à agradecer, tantos me ajudaram. Por princípio agradeço à Deus por ter me proporcionado tudo isso, por ter me colocado tantas pessoas que contribuiram para que eu chegasse até aqui. E uma dessas pessoas foi meu aluno Marcos Torquato, que em uma aula comum me lançou esse desafio e eu resolvi aceitar. À família pelo apoio nos momentos difícieis, por entender as ausências para o estudo. Agradeço em especial à minha mãe, Jandira, por ter me amparado de uma maneira que só ela sabe, meu pai, Alceu, por ter me estendido à mão quando precisei e ao meu companheiro de vida, Leandro, que acompanhou bem de perto os momentos de alegrias, de preocupação, de desanimo, de animo, de conquistas. Aos amigos do trabalho que tanto me ajudaram quando não era suficiente o meu conhecimento, em principal as ”meninas de linguagem”’ Alexandra, Anna Rita, Laila, Morgana, Valéria, Vanusa e Tânia. Não podia faltar o agradecimento aos meus amigos, Allan, Luis, Marcos e Pábio, e sem querer desmerecer os anteriores mas não podia deixar de agradecer em especial ao Ezer por compatilhar, além da amizade, seus conhecimentos acadêmicos de estudo e ao William que me acolheu em seu lar nesses dois anos de viagem à Cuiaba. Aos meus companheiros de sala, guerreiros do mestrado, em especial à Silvana que tenho certeza que foi enviada por Deus pra me ajudar a concluir, pois em muitos momentos pensei que não seria capaz. Aos professores, doutores do conhecimento, que compartilharam tudo que sabiam, em especial ao professor Geraldo, que foi mais do que um coordenador de curso, soube me ouvir e me atender nos momentos em que tudo parecia escapar pelas mãos, por fim ao professor Aldi, que com sua paciência ímpar extraiu de mim o que nem eu sabia que possuía, que soube entender minhas limitações e resolver o que não enxergava solução.

Muito obrigado a todos.

"O campo da derrota não está povoado de fracassos, mas de homens que tombaram antes de vencer."

Abraham Lincoln.

Resumo

Nesta pesquisa iremos conhecer um pouco mais sobre a história dos números complexos, as insuficiências dentro dos números reais que motivaram o seu surgimento. No decorrer da dissertação conheceremos onde tudo começou, o surgimento da unidade imaginária,e essa mesma unidade como um caminho para a solução das equações polinomais de terceiro grau. Mostraremos como acontece as operações dentro desse conjunto númerico, sua forma geométrica e trigonométrica, veremos tambémm algumas aplicações em outras áreas do conhecimento humano, como por exemplo a relação que há entre os números complexos e a eletricidade, o que enfatiza assim a importância desse conjunto numérico. Por fim, faremos um levantamento da abordagem pedagógica dos números complexos no Ensino Médio e Superior, na formação de professores.

Palavras chave: Ensino da matemática; interdisciplinaridade; aplicações no cotidiano; abordagem escolar.

Abstract

In this research we will know a little more about the history of the complex numbers as Insufficiencies within the real numbers that motivated its emergence. In the course of the dissertation we will know where everything began, the emergence of the imaginary unity, and that same unity as a Path for the solution of third-degree polynomial equations. We will show how the Operations within this numerical set, its geometric and trigonometric form, we will also see some applications in other areas of human knowledge, such as the relation between the complex numbers and the electricity, which emphasizes the importance of this numerical set. Finally, we will make a survey of the pedagogical approach of the complex numbers in some of the books Used in school.

Keywords: Keywords Mathematics teaching; Interdisciplinarity; Applications In everyday life; School approach.

Sumário

Agradecimentos **iv**

Resumo **vi**

Abstract **vii**

Lista de Figuras **x**

Introdução **1**

1 Aspectos Históricos. **2**

1.1 A origem dos Números complexos 2

1.1.1 Solução algébrica da equação cúbica 4

1.2 A unidade imaginária 7

1.2.1 Solução geométrica da equação cúbica 11

2 Operações, Propriedades, Forma Geométrica e Forma Trigonométrica de Números Complexos **14**

2.1 Operações nos complexos 15

2.1.1 Adição e Multiplicação 15

2.2 Forma geométrica de um número complexo 16

2.3 Representação trigonométrica dos complexos 19

3 Algumas curiosidades **24**

3.1 Números Complexos e ternos pitagóricos 24

3.2 Números Complexos e inteiros que são soma de dois quadrados 26

3.3 Números Complexos e Engenharia 27

3.4 Números Complexos e Mecânica Quântica 29

4 Considerações sobre o ensino dos Números Complexos **31**

Referências Bibliográficas **35**

Lista de Figuras

1.1 Média proporcional 9
1.2 Eixo horizontal 10
1.3 Segmentos orientados 11
1.4 Visão plana e espacial 12
1.5 Ilustração geométrica da igualdade 13

2.1 Representação pontual 16
2.2 Representação vetorial 17
2.3 Soma vetorial 18
2.4 Representação Vetorial 19
2.5 Produto de complexos 22

3.1 Triângulo Retângulo 25
3.2 Exemplo 26
3.3 Exemplo 26
3.4 Reatâncias 29
3.5 Representação Vetorial 29

Introdução

"O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.
Mas o que seria o oceano se não infinitas gotas?"
(Isaac Newton)

Nesse trabalho faremos algumas considerações sobre o conjunto dos números complexos. Dada a abrangência e a importância do tema, nos concentraremos apenas em alguns aspectos tais como: a história, as operações e propriedades, curiosidades/aplicações e por fim alguns comentários sobre o ensino desses números na escola.

Esquematicamente, o trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos assim distribuídos: no capítulo 1 faremos uma incursão sobre a origem e o surgimento dos números complexos, em particular citaremos a dificuldade de aceitação dos mesmos por parte da comundiade matemática.

No capítulo 2 abordaremos as operações e propriedades que dão a esse conjunto a estrutura algébrica que o torna, algébricamente, o mais completo dos conjuntos numéricos populares da matemática escolar.

No capítulo 3, que o chamamos de algumas curiosidades sobre os números complexos, citaremos algumas situações em que os números complexos, graças a suas operações e propriedades, se revelam úteis para a solução de problemas tanto na matemática como em áreas como a engenharia e a física.

Por último, no capítulo 4, falaremos dos números complexos no contexto do ensino e citaremos aspectos dessa teoria em exames nacionais como o ENEM e tambem nos cursos de formação de professores.

Capítulo 1

Aspectos Históricos.

As descobertas surgem com a busca à respostas, ao desconhecido. E a partir desse desconhecido que surgiu o conjunto dos números complexos, pelo "destravamento de cálculos algébricos".

Neste trabalho conheceremos sobre a história desse conjunto, bem como o que motivou a necessidade de concepção de um conjunto numérico mais abrangente que o Conjunto dos Números Reais. Veremos como as ocorre e o que representa as operações entre os elementos desse conjunto bem como a relação entre dos números complexos com outras áreas do conhecimento, como por exemplo a eletricidade.

Finalizando esse capítulo mostraremos uma representação geométrica, feita por Cardano para a solução da equação de terceiro grau, que gerou toda essa busca por esse novo conjunto numérico.

1.1 A origem dos Números complexos

Os Números Complexos surgiram da necessidade de se encontrar soluções/raízes de equações polinomiais de grau 3. Um equação polinomal é uma equação do tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 :$$

o inteiro positivo n, chama-se grau da equação; à variável x chama-se incógnita e aos números $a_0, a_1, ...a_n$*, coeficientes da equação*, por fim o valor de x que torna essa sentença verdadeira é a chamada de raíz ou solução da equação algébrica.

A busca pela solução dessas equações algébrica tem motivado os matemáticos ao longo da história. Várias técnicas de resolução ao longo do tempo foram sendo desenvolvidas para descobrir essas ráizes, como por exemplo os Babilônicos que resolviam as equações do segundo grau utilizando a técnica de “completar quadrados”, os Gregos usando régua e compasso e o mais divulgado que é a fórmula de Baskara. Usando como referência para resolução das equações de segundo grau,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a fórmula de Baskara, suas raízes serão:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Em alguns casos o valor do chamado discriminante, $\Delta = b^2 - 4ac$, poderia ser negativo. Nessas situações que naquela época não tinha significado apenas diziam que não tinha solução, o que dava a tranquilidade admitir que simplesmente não era possuia raízes.

Durante alguns séculos tiveram como alvo de estudo essas equeções do segundo grau, sem se importar muito com a do terceiro grau, pois não encontravam um caminho concreto para a resolução das mesmas, confome menciona Caraça (2000). Contudo o interesse pelo estudo matemático na Europa tomou força, em especial na Itália, no início do século XVI. E foram dois italianos que protagonizaram a disputa pela autoria da fómula que resolveria as equações do terceiro grau.

A seguir um breve relato de como aconteceu a disputa entre os cientistas.

Primeiro falaremos de Tartaglia, que se chamava Nicolo Fontana (1499-1557), italiano de Brescia, teve uma infância pobre e devido a um incidente em que foi ferido gravemente, ficou com uma grave cicatriz na boca o que dificultava sua fala, por isso o apelido de Tartaglia que em italiano significa “gago”. Devido a sua origem humilde, aprendeu a escrever somente aos 14 anos o que não o impediu que se tornasse um engenheiro e ensinar matemática em algumas cidades italianas como Veneza, Verona e outras.

O segundo cientista envolvido na disputa é Girolamo Cardano (1501-1576), italiano de Pavia, teve sua vida marcada por vários contrastes, pois era um excepcional cientista de inteligência impar e o que contrastava com seu temperamento, que era agressivo, oportunista.

Segundo Ripoll et al. (2006), Tartaglia deixou vazar informações preciosa a Cardano, mostrando o caminho usado para resolução das equações do terceiro grau. Isso aconteceu depois de muita insistência de Cardano a Tartaglia, que confiou e pediu sigilo sobre o assunto. No entanto, usando dessa informação, Cardano a publicou em sua obra *Ars Magna* na Alemanha em 1545, levando assim a autoria da resolução. Por conta dessa conturbada história, a fórmula é conhecida como "Fórmula Cardano-Tartaglia"em alguns livros ou somente "Fórmula de Cardano"em outros.

1.1.1 Solução algébrica da equação cúbica

Vejamos a seguir como é o caminho para resolução das equações segundo a "Fórmula de Cardano-Tartaglia":

Considere a equação geral do 3º grau, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$*, com* a*,* b*,* c *e* d *números reais quaisquer e* $a \neq 0$ *. A equação pode ser escrita suprimindo o termo* ax^2*, tornando-se do tipo* $y^3 + py + q = 0$*, que é obtido fazendo a substituição de* $y = x + m$ *com* m *conveniente.*

Usando a relação acima citada podemos substituir $x = y - m$, na equação de terceiro grau,

$$a(y-m)^3 + b(y-m)^2 + c(y-m) + d = 0$$

$$ay^3 - 3ay^2m + 3aym^2 - am^3 + by^2 - 2bym + bm^2 + cy - cm + d = 0$$

$$ay^3 - 3ay^2m + by^2 + 3aym^2 - 2bym + cy - am^3 + bm^2 - cm + d = 0$$

$$ay^3 + (-3am + b)y^2 + (3am^2 - 2bm + c)y - am^3 + bm^2 - cm + d = 0$$

Como a ideia é suprimir o termo y^2 então usaremos a relação:

$$-3am + b = 0 \Rightarrow m = \frac{b}{3a}$$

Substituindo o valor de m, teremos

$$ay^3 + \left[3a\left(\frac{b}{3a}\right)^2 - 2b\left(\frac{b}{3a}\right) + c\right]y - a\left(\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(\frac{b}{a}\right)^2 - c\left(\frac{b}{3a}\right) + d = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{3ab^2}{9a^2} - \frac{2b^2}{3a} + c\right)y - \frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c\right) y - \frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d = 0$$

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right) y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right) = 0$$

Sabendo que $a \neq 0$, podemos dividir toda a equação por a, obtendo

$$y^3 + \left(-\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}\right) y + \left(\frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}\right) = 0$$

Fazendo: $-\dfrac{b^2}{3a^2} + \dfrac{c}{a} = p$ e $\dfrac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3} = q$, temos uma equação na incógnita y simplificada do tipo:

$$y^3 + py + q = 0$$

Agora, iremos relacionar essa ideia com uma das identidades algébricas clássicas:

$$\begin{aligned}
(m+n)^3 &= (m+n).(m+n).(m+n) \\
&= (m^2 + 2mn + n^2).(m+n) \\
&= m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3
\end{aligned}$$

Utilizando as informações anteriores, se $y = A + B$, ou seja, refere-se ao fato que y pode ser expresso na forma de uma soma de dois números e estes serão as raízes da equação. Logo:

$$(A+B)^3 + (A+B)p + q = 0$$

$$A^3 + 3AB^2 + 3A^2B + B^3 + pA + pB + q = 0$$

$$A^3 + B^3 + 3AB(A+B) + p(A+B) + q = 0$$

$$(A^3 + B^3) + (3AB + p)(A+B) + q = 0$$

A equação é verdade para:

$$A^3 + b^3 = -q$$

e

$$3AB + p = 0 \Rightarrow AB = -\frac{p}{3} \Rightarrow A^3B^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Comparando o resultado anterior com as equaçoes de segundo grau,conseguimos notar que A^3 e B^3 são raízes de uma equação do tipo $w^2 - Sw + P = 0$, onde S e P são respectivamente a soma e o produto das raízes. Logo, podemos escrever tal equação como:

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0$$

Usando a Fórmula de Bhaskara $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, concluímos que:

$$w = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

Como A^3 e B^3 são raízes dessa equação, então:

$$A^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

$$B^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Concluindo temos que $y = u + v$, então:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Essa fórmula fornece as raízes da equação de terceiro grau do tipo $x^3 + px + q = 0$.

Como exemplo resolveremos a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$ grau usando a Fórmula de Cardano-Tartaglia,

Dada a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$, onde $p = -6$ e $q = -9$, substituindo na fórmula de Cardano-Tartaglia, temos que:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} + \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{(-9)}{2} - \sqrt{\frac{(-9)^2}{4} + \frac{(-6)^3}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-216)}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{(-216)}{27}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{8}{1}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{8}{1}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{32}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{32}{4}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{49}{4}}}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \frac{7}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \frac{7}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} + \sqrt[3]{\frac{2}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{1}$$

$$x = 2 + 1$$

$$x = 3$$

Sendo 3 uma das soluções da equação $x^3 - 6x^2 - 9 = 0$

.

1.2 A unidade imaginária

Com a resolução das equações de terceiro grau, utilizando a fórmula de Cardano-Tartaglia, surgiu um novo impasse, as raízes quadradas negativas, dessa vez não tinha como negá-las ou apenas deixar de lado como fora feito lá nas equações do segundo grau. Segundo Ripoll et al. (2006) em 1575, Raphael Bombelli, nascido em Bolonha na Itália, que era engenheiro hidráulico, conseguiu um forma para "destravar"o cálculo das raízes em casos de cúbicas irredutiveis. Ele era discípulo de Cardano e publicou em seu livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica* a resolução da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, para resolver ele fez uso da fórmula de Cardano, e obteve a seguinte raíz

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

contudo Bombelli não se sentia tranquilo com as raízes quadradas negativas, mas mesmo assim as utilizava usando as regras gerais da Álgebra. Observemos a seguir o desenvolvimento de Bombelli para o cálculo das raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$

$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3.2^2.\sqrt{-1} + 3.2.(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^2$

$(2 + \sqrt{-1})^3 = 8 + 12.\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}$

$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11.\sqrt{-1} = 2 + \sqrt{-121}$ (1)

De forma análoga,

$(2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$ (2)

Assim de (1) e (2) obtemos,

$x = \sqrt[3]{(2 + 11.\sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(2 - 11.\sqrt{-1})^3}$

$x = 2 + 11.\sqrt{-1} + 2 - 11.\sqrt{-1}$

$x = 4.$

A partir dessa demonstração os matemáticos começaram a utilizar dessas raízes quadradas de números negativos, porém não se sentiam muito a vontade com a estranheza desse número. Vale ressaltar que em sua publicação, Bombelli, começou a inserir esses números na forma $a + b\sqrt{-1}$, segundo as palavras dele essas seriam entidades associadas a uma nova espécie de raízes quadradas, dedicando setenta e quatro páginas de seu livro para investigar a álgebra dessas novas grandezas, segundo Ripoll et al. (2006).

A partir dessa constatação de Bombelli, chegou-se a conclusão de que os números reais não eram suficientes, pois existiam uma nova categoria que ia além de seus números, sendo assim era necessário expandir, criar um novo conjunto que além dos reais esses números pudessem fazer parte de sua composição.

Essa legitimação dos números complexos levou tempo, muitos matemáticos ainda não consideravam esses números como verdadeiros, pois naquela época para que isso pudesse se concretizar era necessário ter uma relação geométrica para os números. Em outras palavras era necessário mostrar que esses números complexos poderia ser expressos como objetos geométricos e mais que fosse possível estender a teoria das proporcões contida nos *Elementos* de Euclides.

Por muitos anos se tentou realizar esses feitos, muitos foram os cientistas que buscaram resolver mais esse contratempo da aceitação plena dos complexos e as raízes quadradas de números negativos. O primeiro a realizar a tentativa foi em 1673 pelo inglês *Jonh Wallis* que publicou em seu livro *De Algebra Tractatus Historicus e Practicus* ele usou a forma tradicional da construção da média proporcional x entre dois segmentos de medida a e b. Em seu raciocínio ele parte da seguinte sentença $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, de modo que resolver essa relação seria o mesmo que resolver a equação $x^2 = ab$.

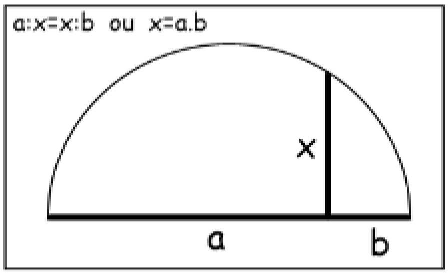

Figura 1.1: Média proporcional

Ainda segundo Ripoll et al. (2006), Wallis interpretou a proporção $\frac{+1}{x} = \frac{x}{-1}$ como “dizendo”que $\sqrt{-1}$ é a média proporcional entre +1 e -1, e que $\sqrt{-1}$ deve ser interpretado como a medida de um *segmento ortogonal a dois segmentos de sentidos opostos* e de ”medidas”respectivamente iguais a +1 e -1. Contudo fracassou no passo seguinte, o da interpretação dos números imaginários puros $b\sqrt{-1}$, ou bi. Hoje essa representação seria fácil, na época de Wallis era dificultada pois ainda não se tinha uma ideia concreta para a interpretação geométrica dos números negativos.

Vários outros matemáticos fizeram grandes contribuições para o desenvolvimento dos números complexos, podemos citar entre eles G.W. Leibniz, Johann Bernoulli, Jean d'Alembert, Leonhard Euler. Dentre os mencionados um que desempenhou um papel importante foi Euler, que nasceu na Suiça na cidade de Basiléia no ano de 1707, foi um grande matemático se destacando nesse cenário com um dos que mais publicou e produziu. Ele foi um dos que se empenhou para melhorar a formalização desse conjunto em especial dar uma notação própria para $\sqrt{-1}$ em seus estudos ele atribuiu a essa raíz a letra i representando assim os números na forma $z = a + bi$.

Somente em 1806 a chamada Crise da Legitimidade teve fim, pois o contador *Jean Robert Argand* publicou em sua monografia a representação desse número complexo na teoria das proporções da Geometria Euclidiana. Segundo Ripoll et al. (2006), *podemos* *dizer que a extensão de Argand foi feita em três etapas. Ele inicia a primeira etapa interpretando os números reais como vetores sobre o eixo horizontal, onde o sentido positivo de orientação e a unidade de medida são dados por um vetor unitário* $\overrightarrow{OU}$. *Os números positivos são vistos como vetores de mesmo sentido que* $\overrightarrow{OU}$ *os números negativos como vetores de sentido oposto a esse vetor unitário* $\overrightarrow{OU}$.

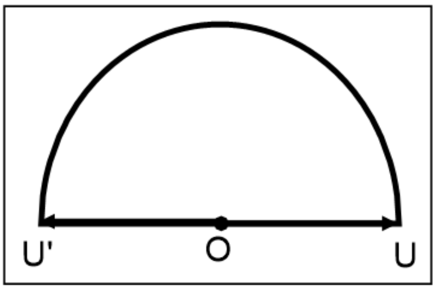

Figura 1.2: Eixo horizontal

A seguir, ele estende a tradicional teoria das proporcões de modo a incluir todos os números reais, inclusive os negativos. Em particular, ele dá interpretação para as proporções básicas $+1 : +1 = -1 : -1$ e $+1 : -1 = -1 : +1$, observando que elas seguem um mesmo padrão: quando os termos extremos (a e d em $a : b = c : d$) tem sinais opostos, o mesmo ocorre com os termos médios (c e d em $a : b = c : d$), e quando os termos extremos tem sinal, o mesmo ocorre com os termos médios.

Na segunda etapa o objetivo de Argand, é encontrar uma representação para $\sqrt{-1}$ como um segmento orientado. Ele faz uso do raciocínio de Wallis e usa como base a relação $x^2 = -1$ onde faz referência ao fato que o número x pode ser representado como média proporcional entre os números $+1$ e -1, ou seja $+1 : x = x : -1$. Na sequência ele nota que a proporção não obedece ao padrão representado, pois os seus extremos +1 e -1, tem sinais oposto, enquanto os termos médios x são iguais, logo tem o mesmo sinal. Sendo assim não seria possivel representar x como uma media do segmento horizontal, dos números reais, para poder romper com esse impasse ele usa a geometria plana para representar as médias proporcionais na geometria euclidiana em forma de segmentos orientados. Na figura a seguir temos a situação apresentada por ele onde, afirma que $\overrightarrow{OU} : \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OI} : \overrightarrow{OU'}$, pois essa proporcionalidade vale tanto em termos dos comprimentos desses vetores quanto em termos de direções: o ângulo entre $\overrightarrow{OU}$ e $\overrightarrow{OI}$ é igual ao ângulo entre $\overrightarrow{OI}$ e $\overrightarrow{OU'}$. Sendo assim, passando a considerar o segmento orientado $\overrightarrow{OI}$ como a unidade i dos números complexos.

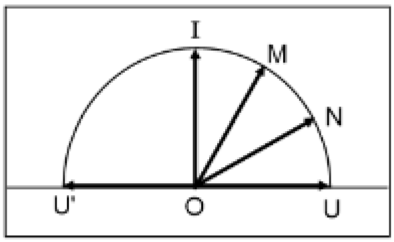

Figura 1.3: Segmentos orientados

Na última etapa ele mostra que essa representação pode ser feita com quantas médias proporcionais quisermos, com direções de ângulos $k\pi/2^n$, sendo assim qualquer grandeza podemos escrever como um vetor de origem em O caracterizado por seu comprimento e seu ângulo com o vetor unitário horizontal, $\overrightarrow{OU}$. Levando assim a duas representações de suas grandezas dirigidas, Por fim, após um longo tempo e depois de muitas discussões, consegue a forma de um número complexo em relação a proporção de duas grandezas dirigidas:

$$\overrightarrow{OM} : \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} : \overrightarrow{OQ}.$$

Depois de muitos publicarem a ideia de Argand que aos poucos foi reescrita de maneira mais rigorosa, somente por volta de 1850 é que se consolida a legitimidade da unidade imaginária, não deixando margem para receio das raízes quadradas de números negativos, tomando como a unidade $\boldsymbol{i}$ como a referencia à $\sqrt{-1}$, foi abandonado o costume de escrever os números complexos da forma $x = a + b\sqrt{-1}$ passando a ser usada da maneira atual $x = a + bi$.

1.2.1 Solução geométrica da equação cúbica

Por fim, traremos a representação geométrica que Cardano publicou em seu livro *Ars Magna* a respeito da solução de equações de terceiro grau. Nessa publicação ele traz treze tipos de equações cúbicas, apresentadas em capítulos separados. A demonstração que veremos a seguir refere-se a um caso particular de equação cúbica. Descreveremos, na sequência, o método geométrico que justificava a solução deste tipo de equação elaborado por Cardano.

Conforme menciona Roque (2012), o capítulo XI da *Ars Magna* fornece um método para resolver a equação $x^3 + 6x = 20$, que era escrita como: *cub p; 6 res aeqlis 20* (cubo e seis coisas igual a 20). Cardano começa apresenando uma demonstração geométrica e só depois enuncia uma regra para resolver tal equação. A solução geométrica fornecida por Cardano começa assim: Procuramos um cubo de lado GH tal que o cubo de GH mais seis vezes o lado GH seja igual a 20. Sejam dois cubos, designados pelas suas diagonias AE e CL, cuja diferença é 20. Cardano exibe uma representação plana desses cubos, como mostra a figura 1.3. Para melhor entender essa ideia será mostrado também a representação espacial do cubo AE com a divisão indicada na representação plana, mas sem adicionarmos o cubo CL.

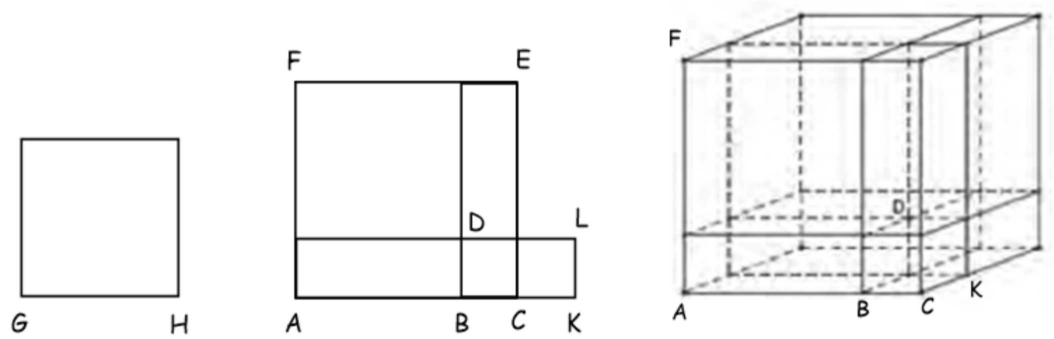

Figura 1.4: Visão plana e espacial

Fonte: [p.235]Texto: História da Matemática, Tatiana Roque

Marcando B de modo que BC seja igual a CK, obtem-se que AB é igual a GH, ou seja, o valor da "coisa". Isso quer dizer que AB é o valor de x procurado. A argumentação de Cardano era geométrica e consistia em encontrar um cubo de lado AB que satisfizesse a mesma condição do cubo de lado GH, ou seja, $AB^3 + 6AB = 20$, supondo que $AC^3 - CK^3 = 20$ temos, $AC \times CK = 2$ e $BC = CK$. Para facilitar o entendimento, chamaremos AC de u e $BC = CK$ de v, então tem-se que $AB = u - v$.

A fim de mostrar que o segmento AB da figura 1.3 é a solução procurada, Cardano usa duas propriedades de decomposição de cubo. Na primeira ele diz o seguinte: se uma quantidade é dividida em duas parte ($AB = u - v$ e $BC = v$), o cubo do todo é igual aos cubos das partes mais três vezes os produtos de cada uma das partes pelo quadrado da outra, que de fato é o cubo da soma de dois termos que conhecemos.

Cardano considera, a decomposição do cubo AE nos paralelepípedos da figura 1.4: BC^3 (cubo em branco), AB^3 (cubo em preto), $3(BC^2)$ paralelepípedos em cinza-claro - dois que estão visíveis e o terceiro abaixo do cubo preto) e $3(AB^2)$ os paralelepípedos em cinza escuro. Seguindo o raciocínio, as hipóteses de que $AC^3 - CK = 20$ e $AC \times CK = 2$ são utilizadas para concluir, argumentando de forma geométrica, que o cubo construído sobre o segmento AB mais seis vezes o segmento AB será igual a 20, em outras palavras

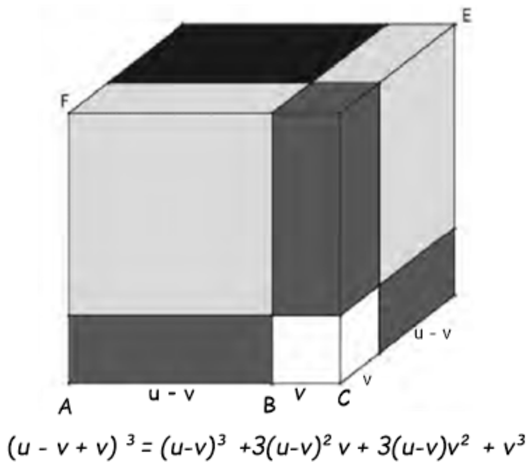

Figura 1.5: Ilustração geométrica da igualdade

Fonte: [p.235]Texto: História da Matemática, Tatiana Roque

temos que $AB^3 + 6AB = 20$.

Ainda nos referindo a esse caso particular, Cardano deduz daí a seguinte regra de resolução: eleve 2 ao cubo, que é a terça parte de 6, o que dá 8; multiplique por 10, metade do termo numérico, por ele mesmo, resultando 100; some 100 e 8, fazendo 108. Extraia a raiz quadrada, que é $\sqrt{108}$, e a some, num primeiro momento, com o número 10, e num segundo momento subtraindo pelo mesmo número 10, então teremos a seguinte expressão: $\sqrt{108} + 10$ e $\sqrt{108} - 10$. Extraindo a raíz cúbica desses valores e subtraindo uma da outra obteremos: $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$ que a media AB.

Capítulo 2

Operações, Propriedades, Forma Geométrica e Forma Trigonométrica de Números Complexos

Muitas décadas se passaram para que o conjunto dos números complexos pudesse chegar a forma que hoje estudamos, precisou de um grande esforço para a sua aceitação devido a discrença, naquela época, desses números. Todo esse desconforto foi causado por conta das raízes quadradas de números negativos, que a princípio não era considerada como solução das equações do segundo grau e a partir da exploração das equações de terceiro grau, começou-se a utilizá-la de modo menos incrédulo, porém ainda não confiando plenamente. Mas graças principalmente aos esforços de Bombelli, Euler e Argand, hoje utilizamos de forma tranquila na sua expressão $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$ *chamada de unidade imaginária*

Denotamos por C o Conjunto dos Números Complexos $\mathbb{C} = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$

Dado $z = a + bi$ onde a é a parte real e b a parte imaginária.

Motivados pelas operações feitas por Bombelli, definiremos a adição e multiplicação de Números Complexos.

2.1 Operações nos complexos

2.1.1 Adição e Multiplicação

Dados $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, a adição $z_1 + z_2$ é definida por:

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

E a multiplicação $z_1.z_2$ é definido por:

$z_1.z_2 = (ab - cd) + (ad + bc)i.$

É fácil verificar que, para a adição e multiplicação assim definidas as seguinte propriedades são satisfeiras.

Associatividade

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e

$(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$, para quaisquer z_1, z_2 e $z_3 \in \mathbb{C}$.

Comutatividade

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e

$z_1.z_2 = z_2.z_1$, para quaisquer z_1 e $z_2 \in \mathbb{C}$.

Elementos Neutros

$z + 0 = 0 + z$, para todo z, onde $0 = 0 + 0i$ e

$z.1 = 1.z$, para todo z, onde $1 = 0 + 1i$.

Elementos Simétricos

Para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$,

$-z = -a - bi$ é tal que $z + (-z) = 0$ e

Para todo z ≠0,z=a+bi,

z$^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}i$ é tal que $z.z^{-1} = 1$.

Distributividade

$z_1.(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1.z_3$

Com essas operações e as cinco propriedades o cojunto dos Números Complexos, forma uma estrutura algébrica chamada corpo.

2.2 Forma geométrica de um número complexo

Com a chamada *"Crise de Legitimidade"*, foi necessário trazer a ideia do número complexo dos pressupostos algébricos para uma represetação Euclidiana na propriedade geométrica. Muitos anos se passaram e alguns matemáticos se empenharam em fazer uma alusão à geometria com os complexos. Depois de muito estudo conseguiu-se notar que esse número complexo, poderia ser escrito no eixo de coordenadas **XOY**.

Segundo Caraça (2000), no declinar do século XVIII, em 1797, um topógrafo norueguês, *Caspar Wessel*, entrego à *Academia Dinamarquesa de Ciências e Letras* uma Memória, publicada em 1799, sobre a represenação analítica da Direção onde, pela primeira vez, foi apresentada uma representação geométrica dos números complexos. Contudo anos depois, em 1806, Jean Robert Argand publicou a mesma representação e a ele durante muitos anos ficou ligada a mesma representação que veremos a seguir.

Como diz Lima et al. (2002) *fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = a + bi$ é representado pelo ponto P(a, b). O ponto P é chamado de imagem do complexo z. Como a correspondência entre os complexos e suas imagens é um a um, frequentemente identificaremos os complexos a suas imagens escrevendo $(a, b) = a + bi$. O plano no qual representamos os complexos é chamado de plano de Argand.*

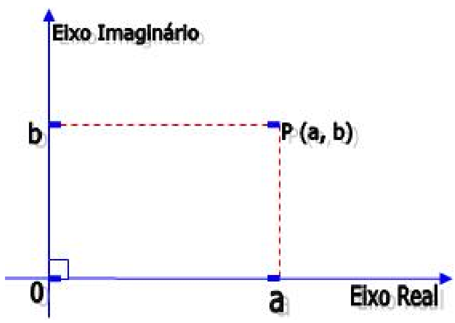

Figura 2.1: Representação pontual

Tendo essa ideia inicial, exploraremos algumas considerações dadas pelas definições desses pontos que representam essa relação biunivoca, $a + bi \leftrightarrow (a, b)$.

Definição: *O eixo das abscissas do plano de Argand é denominado eixo real desse plano,* *e o eixo das ordenadas é denomiado eixo dos imaginários puros desse plano, Ripoll et al. (2006).*

Uma outra representação desse número complexo $a + bi$, que podemos ter geometricamente, seria a representação desse complexo através de vetor de sentido e direção dada pela origem do plano de Argand-Gauss e P(a,b). Sendo assim, torna-se essencial falarmos um pouco sobre o vetor na geometria plana.

Conforme menciona Ripoll et al. (2006), observamos que dois pontos P e Q do plano determinam um segmento de reta; quando espedificamos um desses pontos como sendo a origem do segmento então obetemos um vetor do plano, sendo P e Q os pontos extremos deste valor. O vertor de pontos extremos P e Q e com origem P e denotado por $\overrightarrow{PQ}$, o comprimento do segmento de reta determinado por P e Q é denominado de módulo do vetor $\overrightarrow{PQ}$, sendo denotado por $|\overrightarrow{PQ}|$.

Definição: Indiquemos O a origem do sistema de coordenadas do plano de Argand-Gauss. Para cada número complexo $z = a + bi$, indiquemos por $z = (a, b)$ o correspondente do plonto no plano de Argand-Gauss. Dizemos que o vetor $\overrightarrow{OZ}$ é a representação vetorial do número complexo z.

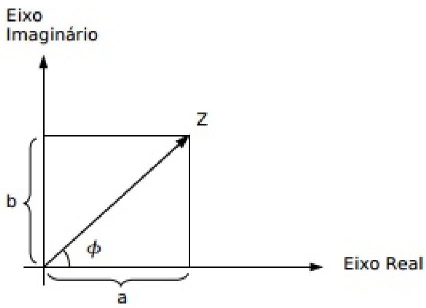

Figura 2.2: Representação vetorial

Tendo como referência essa relação pontual e vetorial, a distância entre a origem do plano e o ponto P(a, b) será chamada de módulo do número complexo, quando falamos em representação pontual, já na representação vetorial esse módulo representará o comprimento do vetor z. Dado um número complexo $z = a + bi$ teremos a representação do módulo(distância) da seguinte forma $|z|$, que será um número real. Esse valor que representa o módulo do número complexo $z = a + bi$ pode ser encontrado pela fórmula

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \textit{ onde a é a parte real e b é o coeficiente da parte imaginária.}$$

Sabendo que a representação de um número complexo pode ser definido como um vetor de OZ, podemos apresentar de uma outra maneira a adição de números complexos. Assim sendo se temos dois números complexos z_1 e z_2, cada um deles sendo representados pelos vetores $\overrightarrow{OZ_1}$e $\overrightarrow{OZ_2}$,respectivamente, a soma desses números será representada pela soma dos vetores em questão, portanto a soma de números complexos seria a soma de vetores num mesmo plano.

Usando a definição da Física para explorarmos essa ideia, *a soma de dois vetores complexos $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, também chamada de resultante desses vetores, é o vetor denotado por $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ e dado pela diagonal do paralelogramo que tem como lados os segmentos O e OB e que contém o ponto O.*

Sendo assim, define Ripoll et al. (2006), *dados dois números complexos z e w, a soma $z+w$ tem como representação vetorial o vetor $\overrightarrow{OC}$ dado por $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, onde $\overrightarrow{OA}$ é a representação vetorial de z e $\overrightarrow{OB}$ é a representação vetorial de w.* Na figura a seguir veremos como seria essa representação

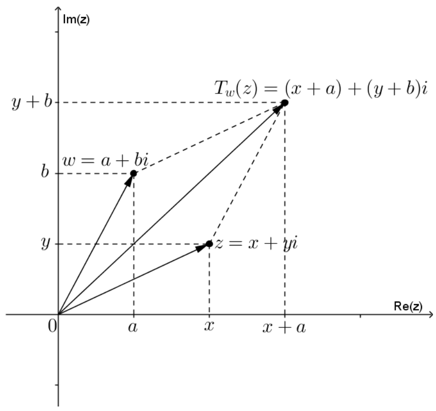

Figura 2.3: Soma vetorial

Vale lembrar que a diferença dois números complexos, seria o mesmo que somar com o seu oposto, em outras palavras seria o vetor complexo de mesma direção , mesmo módulo e sentido oposto.

Aplicando essa ideia vetorial de um número complexo, podemos obter no produto de dois números complexos uma situação bem interessante, que pode trazer de uma maneira mais concreta através dessa representação geométrica o que a operação de multiplicação, na forma algébrica, produz.Vale ressaltar que aqui iremos utilizar todas as referências algébricas do produto acrescida dessa situação geométrica de dois vetores. Porém essa ideia também não foi tão simples de se chegar ao resultado, e deve-se a Argand a autoria de sua representação.

Para iniciarmos devemos lembrar que as multiplicações que será mostrada é um pouco diferente das usuais na Geometria Analítica, sendo assim é uma maneira particular de realização desse produto de vetores, restrita ao plano de Argand.

2.3 Representação trigonométrica dos complexos

Como mencionado no primeiro capítulo, era necessário ter uma representação com os conceitos da Geometria Euclidiana dos números complexos, essa relação geométrica não se limita à uma representação vetorial dos complexos e ainda sobre esse aspecto temos uma outra maneirar de fazer essa representação de um número complexo, essa forma é chamada de *Forma Trigonométrica de um Número Complexo*$\dot{}$Levando em consideração conceitos já bem fundamentados da geometria como o *Teorema de Pitágoras* , podemos utiliza-lo juntamente com a idea vetorial e representar trigonometricamente esse número. Sendo assim, tomaremos como base as razoes trigonométricas para fazer a associação e detalhar algumas especificidades que isso irá gerar.

Considerando a representação abaixo podemos fazer algumas relações,

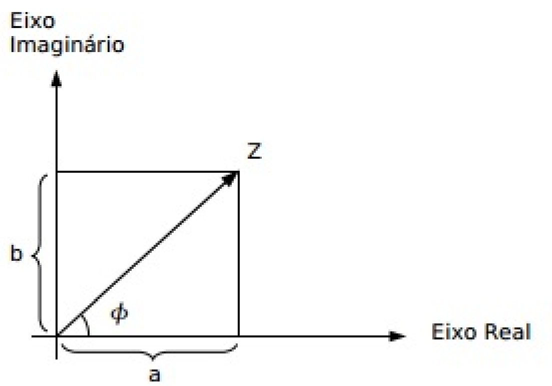

Figura 2.4: Representação Vetorial

Já sabemos que um número complexo é escrito da forma $z = a + bi$, onde a é a parte real e bi a parte imaginária. Sabemos também que $|z|$ é chamado de *argumento*, que o comprimento do vetor complexo. Observamos que essa relação, entre o vetor complexo e o eixo Real, forma um ângulo esse ângulo se chama *argumento*. Considerando ainda as definições trigonométricas, teremos que

$$sen\theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}.$$

$$cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}.$$

Na representação vetorial temos ainda,
a é o cateto adjacente,
b é o cateto oposto,
$|z| = \rho$ é a hipotenusa.

Sendo assim estabelecemos a relação,

$$sen\theta = \frac{cat\ op}{hip} \qquad cos\theta = \frac{cat\ adj}{hip}$$

$$sen\theta = \frac{b}{|z|} \qquad cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$sen\theta = \frac{b}{\rho} \qquad cos\theta = \frac{a}{\rho}$$

$$\rho.sen\theta = b \qquad \rho.cos\theta = a$$

$$b = \rho.sen\theta \qquad a = \rho.cos\theta$$

Escreveremos assim o número complexo na *Forma Trigonométrica* será:

$$z = a + bi$$

$$z = \rho.cos\theta + i.\rho.sen\theta$$

$$z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$$

onde,
$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ que é o *módulo* (comprimento do vetor complexo).
θ é o ângulo formado com a a reta real e o vetor complexo.

Vale lembrar que um número real também é complexo, e sua representação geométrica estará sobre o eixo Ox, e o seu argumento será igual a 0. Quando o número complexo foi imaginário puro estará sobre o eixo Oy, e terá argumento $\theta = \frac{\pi}{2}$ se $b > 0$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$ se $b < 0$.

Exemplo: Na sequência veremos como pode ser escrito um número complexo na forma trigonométrica

$z = 4 + 4\sqrt{3}i$

Desenvolvimento:

Primeiro determinaremos o módulo e na sequência o argumento do número complexo,

$\rho = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})}$

$\rho = \sqrt{16 + (48)}$

$\rho = \sqrt{64}$

$\rho = 8$

$sen\theta = \dfrac{b}{\rho}$

$sen\theta = \dfrac{4\sqrt{3}}{8}$

$sen\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = arcsen\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 60^\circ$

$z = 4 + 4\sqrt{3}i$

$z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$

$z = 8.(cos60^\circ + i.sen60^\circ)$

Um aplicação interessante para essa forma trigonométrica é encontrar o produto de dois números complexos. Ainda sobre o prisma do vetor complexo podemos encontrar essa maneira geometrica de obter esse resultado algébrico. Assim para o produto de dois números complexos teremos: Seja $z_1 = \rho_1.(cos\theta_1 + i.sen\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2.(cos\theta_2 + i.sen\theta_2)$, dois complexos escritos na forma trigonométrica. Podemos encontrar o produto $z_1.z_2$, utilizando a seguinte maneira,

$$z_1.z_2 = \rho_1.(cos\theta_1 + i.sen\theta_1).\rho_2.(cos\theta_2 + i.sen\theta_2)$$

$$z_1.z_2 = \rho_1.\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)]$$

Para se chegar a essa fórmula para o produto, bastou-se aplicar o conceito da distribuição na produto desses dois número, acrescido da relação da soma de dois arcos. Como já vimos a distributiva para multiplicação no capítulo anterior, relembraremos o seno e o cosseno da soma de dois arcos:

$$sen(a + b) = sen(a).cos(b) + sen(b).cos(a)$$

$$cos(a+b) = cos(a).cos(b) - sen(a).sen(b)$$

Agora iremos estender as somas de arcos para o produto e assim chegarmos a fórmula do produto de dois termos, o que mostra o produto de dois números complexos de uma maneira geométrica:

$$\begin{aligned}
z_1.z_2 &= \rho_1.(cos\theta_1 + i.sen\theta_1).\rho_2.(cos\theta_2 + i.sen\theta_2) \\
&= \rho_1.\rho_2.[(cos\theta_1 + i.sen\theta_1).(cos\theta_2 + i.sen\theta_2)] \\
&= \rho_1.\rho_2.[(cos\theta_1.cos\theta_2 + i.cos\theta_1.sen\theta_2 + i.sen\theta_1.cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2)] \\
&= \rho_1.\rho_2.[(cos\theta_1.cos\theta_2 - sen\theta_1.sen\theta_2 + i.(sen\theta_1.cos\theta_2 + cos\theta_1.sen\theta_2)] \\
&= \rho_1.\rho_2.[cos(\theta_1 + \theta_2) + i.sen(\theta_1 + \theta_2)]
\end{aligned}$$

Assim, o vetor resultante do produto de dois números complexos, terá módulo igual ao produto dos módulos e argumento igual à soma dos argumentos.

Abaixo vemos um exemplo geométrico do produto de complexos, onde multiplicamos um número complexo, $z_1 = a + bi$, pela unidade imaginária i. E o resultado geométrico é uma rotação do vetor, no sentido anti horário em 90º:

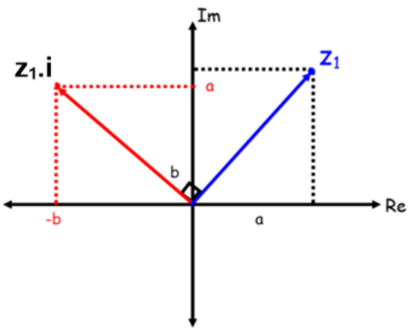

Figura 2.5: Produto de complexos

Através da forma trigonométrica de um número complexo, podemos resolver as potências dentro do conjunto dos números complexos. Para tal tomaremos como base a multiplicação mencionada anteriormente. Seja $z = a + bi$ um número complexo, e sua forma trigonométrica $z = \rho.(cos\theta + i.sen\theta)$, teremos que:

$$\begin{aligned} z^2 = z.z &= \rho.(cos\theta + i.sen\theta).\rho.(cos\theta + i.sen\theta) \\ &= \rho.\rho.[(cos\theta + i.sen\theta).(cos\theta + i.sen\theta)] \\ &= \rho^2.[cos(\theta+\theta) + i.sen(\theta+\theta)] \\ &= \rho^2.[cos(2\theta) + i.sen(2\theta)] \end{aligned}$$

De forma análoga temos que para z^n, teremos:

$$\begin{aligned} z^n = z.z.(...).z &= \rho.(cos\theta + i.sen\theta).\rho.(cos\theta + i.sen\theta).(...).\rho.(cos\theta + i.sen\theta) \\ &= \rho.\rho.(...).\rho[(cos\theta + i.sen\theta).(cos\theta + i.sen\theta).(...).(cos\theta + i.sen\theta)] \\ &= \rho^n.[cos(\theta+\theta+...+\theta) + i.sen(\theta+\theta+...+\theta)] \\ &= \rho^n.[cos(n\theta) + i.sen(n\theta)] \end{aligned}$$

Capítulo 3

Algumas curiosidades

Nesse capítulo apresentaremos alguns fatos que revelam, de maneira surpreendente, a presença dos números complexos em diversas situações, inclusive cotidianas, mostrando assim que, mesmo tendo sido um conjunto criado sob suspeita e de forma inusitada, tal conjunto tornou-se parte indispensável tanto na matemática como em outras ciências.

3.1 Números Complexos e ternos pitagóricos

Um problema milenar estudado por Euclides é o de caracterizar os ternos pitagóricos, isto é, ternas m, n e p de números inteiros que satisfazem a equação $m^2+n^2=p^2$.

Nesta seção veremos cada número complexo $z = a + bi$ com a e b não nulos e a¿b, está associado um terno pitagórico. Para isso veremos a seguir a construção que gera essa relação. Seja $z = a + bi$ um número complexo, com $a > b$ e $a, b > 0$. Fazendo z^2, obtemos:

$$\begin{aligned} z^2 &= (a+bi).(a+bi) \\ &= a^2 + 2ab.i + b^2i^2 \\ &= a^2 + 2ab.i - b^2 \\ &= (a^2 - b^2) + (2ab)i \end{aligned}$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
|z^2|^2 &= (a^2 - b^2) + (2ab)^2 \\
&= a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 4a^2b^2 \\
&= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \\
&= (a^2 + b^2)^2
\end{aligned}
$$

Portanto, dado um número complexo $z = a + bi$, z^2 é o número complexo cujas partes real e imaginária são os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa $a^2 + b^2$:

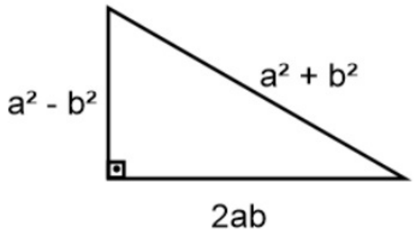

Figura 3.1: Triângulo Retângulo

Vejamos a seguir alguns exemplos de números complexos que geram triângulos retângulos:

Exemplo 1: Dado o número complexo $z = 2 + i$, temos:

$$
\begin{aligned}
z^2 &= (2^2 - 1^2) + (2.2.1)i \\
&= (4 - 1) + 4i \\
&= 3 + 4i
\end{aligned}
$$

Portanto o triângulo associado à $z = 2 + i$ tem catos 3 e 4 e hipotenusa $2^2 + 1^2 = 5$:

Exemplo 2: Dado o número complexo $z = 5 + 2i$, temos:

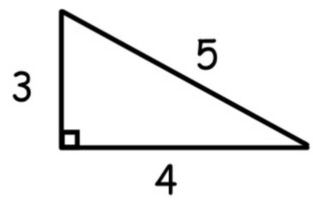

Figura 3.2: Exemplo

$$\begin{aligned} z^2 &= (5^2 - 2^2) + (2.5.2)i \\ &= (25 - 4) + 20i \\ &= 21 + 20i \end{aligned}$$

Portanto o triângulo associado à $z = 5+2i$ tem catetos 21 e 20 e hipotenusa $5^2+2^2 = 29$:

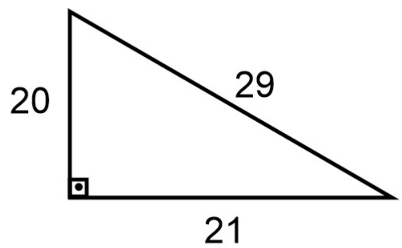

Figura 3.3: Exemplo

3.2 Números Complexos e inteiros que são soma de dois quadrados

Um inteiro n é dito ser soma de dois quadrados se existem a e b inteiros tais que $n = a^2 + b^2$. Nessa seção, usando as propriedades e númeors complexos, veremos que se n e m são soma de dois quadrados, então o produto $m.n$ também. Vejamos:

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$

$n = a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi) = z.\overline{z}$

$m = c^2 + d^2 = (c + di)(c - di) = w.\overline{w}$

Temos que,

$$\begin{aligned} n.m &= z.\overline{z}.w.\overline{w} \\ &= z.w.\overline{z}.\overline{w} \\ &= (z.w).\overline{z.w} \\ &= [(ac-bd)+(ad+bc)i].[(ac-bd)-(ad+bc)i] \\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \end{aligned}$$

Vejamos o exemplo a seguir:
Sejam $z = 2 + i$ e $w = 3 + 2i$
$5 = 2^2 + 1^2 = (2 + i)(2 - 1i) = z.\overline{z}$
$13 = 3^2 + 2^2 = (3 + 2i)(3 - 2i) = w.\overline{w}$
Temos que,

$$\begin{aligned} n.m &= (2.3-1.2)^2+(2.2+1.3)^2 \\ &= (6-2)^2+(4+3)^2 \\ &= (4)^2+(7)^2 \\ &= 16+49 \\ &= 65 \end{aligned}$$

E 65 é hipotenusa de um retângulo que tem 56 e 33 como catetos.

3.3 Números Complexos e Engenharia

Segundo Nobre (2013) a primeira aplicação de números complexos à teoria de circuitos elétricos parece ter sido realizada pelo cientista alemão Hermann Von Helmholtz (1821-1894). A aplicação de números complexos de corrente alternada (CA) foi disseminada nos Estados Unidos por Arthur Edwin (1861-1939) e Charles Steinmetz (1865-1923) com auxílio de Julius Berg (1871-1941) no final do século XIX. Em 1823, Edwin adotou o termo *impedância* (inventado pelo matemático inglês Oliver Heaviside (1850-1925)) assim como os *números complexos* para os elementos dos circuitos elétricos CA, o que foi seguido por Steinmetz. Desde então os números complexos são fundamentais para a Engenharia Elétrica.

Na sequência de sua dissertação ele fala da diferença entre corrente contínua e corrente alternada, sendo assim uma corrente elétrica é um fluxo de elétrons(partículas que carregam energia) passando por um fio, algo como a água que circula dentro de uma mangueira. Se os elétrons se movimentam num único sentido, essa corrente é chamada de contínua. Se eles mudam o sentido constatemente, estamos falando de uma corrente alternada. Na prática, a diferença entre elas está na capacidade de transmitir energia para locais distante. A energia que usamos em casa é produzida por alguma usina e precisa percorrer centenas de quilômetros até chegar à tomada. Quando essa energia é transmitida por uma corrente alternada, ela não perde muita força no meio caminho. Já na contínua o desperdício é muito grande. Isso porque a corrente alernada pode, facilmente, ficar com uma voltagem muito mais alta que a contínua, e quanto maior é essa voltagem, mais longe a energia chega sem perder força no trajeto.

Os números complexos, segundo Nobre (2013), são utilizados para ajudar na análise de circuitos de corrente alternada, por isso se torna tão importante. Menciona ainda que, quando a energia elétrica chega a uma residência comum os aparelhos eletrodomésticos usados normamente consomem uma quanidade real de energia, ou seja, o que foi consumido é marcado no relógio. Entretanto, nas indústrias existem grandes motores e outros equipamentos que precisam de muita energia e normalemnte são formados por bobinas que ao funcionarem produzem um campo magnético. Esse campo magnétrico gera o que chamamos de *reatância indutiva* que não é real pois não aparecem no consumo de energia e se não for contrabalanceada volta para o sistema de alimentação causando danos às estruturas de alimentação elétrica. Para contrapor a *reatância indutiva* são introduzidos no circuito os capacitores que geram a *reatância capacitiva*, responsável por essa contraposição. Essas reatâncias podem ser observadas na figura abaixo:

Pelo gráfico observamos que a *reatância indutiva* apresenta um comportamento inverso da capacitiva

A *impedância* elétrica de um elemento, de um ramo ou de um circuito completo é a razão entre a tensão (v) e a corrente (i), onde a tensão é a força de impulsiona os elétrons e corrente é o movimento ordenado dos elétrons.

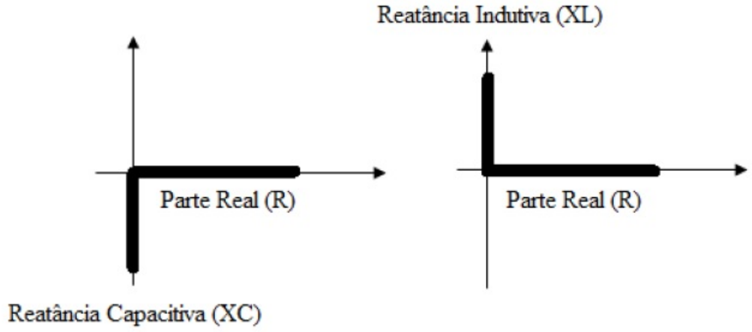

Figura 3.4: Reatâncias

Fonte: [p.47]Números Complexos e Algumas aplicações, Waldek Rocha Nobre

A *impedância* é o módulo do número complexo $Z = R + jX$, ou na forma polar $Z = |Z|.(cos\Phi + isen\Phi)$ onde $j^2 = -1$, Φ é o ângulo (argumento) de defasagem entre a tensão aplicada e a corrente no circuito, R é a resistência e X $(XL - XC)$ é a resultante das indutivas e capacitivas do circuito. Os engenheiros usam j no lugar do i para evitar confusão com o i de corrente.

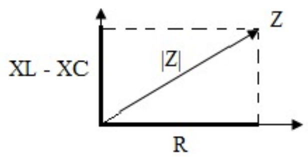

Figura 3.5: Representação Vetorial

Fonte: [p.48]Números Complexos e Algumas Aplicações, Waldek Rocha Nobre

3.4 Números Complexos e Mecânica Quântica

Conforme Amaral et al. (2012), partindo de seu exemplo não-trivial mais simples que é o bit quântico. Como relatado no texto um bit clássico e uma variável aleatória que pode assumir dois valor, por exemplo, 0 e 1. O bit quântico, porém, declara os estados extremais 0 e 1 uma base ortogonal para *espaço de estados* do sistema. Todo sistema quântico possui um *espaço de estados*, E, que é um espaço vetorial complexo com produto escalar, no capítulo em questão sendo $dim(E) = 2$. Na descrição mais simples de mecânica quântica, o estado de um sistema é definido por um vetor unitário em seu espaço de estados. Toda e qualquer predição sobre o sistema pode ser eita a partir do conhecimento de seu estado.

Definição: *O estado de um sistema é um vetor normalizado em seu espaço de estados.*

Esse espaço de estados que o texto trata é um espaço vetorial sobre os complexos. Dessa forma, o espaço de estado de um qbit é isomorfo $\mathbb{C}^2$. Uma base para o espaço de estados será dada por dois vetores linearmente independentes, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$.Como as alternativas classicas de um bit costumam ser denotadas 0 e 1 e a notação de Dirac prescinde uma letra para designar o vetor é comum utilizarmos a base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, alertando ao fato de que não se pode confundir $|0\rangle$ com a origem do espaço vetorial. Relata ainda que claramente este não é o caso, por $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são linearmente independentes. Como tais vetores correspondem a alternativas clássicas distintas, temos ainda que esta base é *ortogonal*. Chegamos assim à imporante noção de *teste*, apresentada para qbits:

Definição: *Um teste com alternativas classicas a e b é associado a uma base ortonormal, denotada $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. Aplicar um teste pode ser visto como decompor o vetor com relação a esta base para em seguida selecionar apenas uma das alternativas.*

Definida uma base, todo vetor do espaço de estado pode ser escrito como combinação linear destes elementos. Para um qbit, então, seu estado sera descrito por

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$$

onde α e β são números complexos, e a normalização exige $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

Capítulo 4

Considerações sobre o ensino dos Números Complexos

Os números complexos fazem parte da grade curricular de matemática do Ensino Médio. Segundo Brasil - MEC (2006) os números complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, $s^2 + 1 = 0$.

Segundo o documento SBM (2014), os números complexos devem ser apresentados como tema suplementar.

Por outro lado o Exame Nacional do Ensino Médio, Enem, omite o conteúdo de números complexos de sua matriz de referências de Matemática e suas Tecnologias. Os dados a seguir, extraídos do site do INEP, detalham as competências exigidas pelo ENEM referente a Matemática.

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Por fim, com relação aos cursos de formação de professores de matemática, novamente a abordagem referente a números complexos, espedificamente, análise complexa, difere da dos bacharéis em matemática, conforme PARECER CNE/CES 1.302/2001. Vejamos a seguir um comparativo entre Bacharelado e Licenciatura constante no Parecer:

Bacharelado

Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Bacharelado, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

· Cálculo Diferencial e Integral

· Álgebra Linear

· Topologia

· Análise Matemática

· Álgebra

· Análise Complexa

· Geometria Diferencial

Licenciatura

Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Licenciatura, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

· Cálculo Diferencial e Integral;

· Álgebra Linear;

· Fundamentos de Análise;

· Fundamentos de Álgebra;

· Fundamentos de Geometria;

· Geometria Analítica;

A parte comum deve ainda incluir: a) conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Por tudo que foi possivel conhecer da história do conjunto dos números complexos, desde sua formação, passando por todos as atribulações e disputas de sua origem e autoria, bem como tudo que foi agregado para que pudesse chegar a sua forma que hoje estudamos nos livros didáticos, foi possível notar que outros ramos do conhecimento humano também fazem uso desde conjunto, como os mencionados na Engenharia Elétrica e na Mecânica, evidenciando assim a sua importância.Por ser o mais completo dos conjuntos númericos, constatamos a necessidade de popularização deste conjunto e a inserção nas grandes avaliações nacionais, onde envolvem os conhecimentos matemáticos se torna essencial a sua presença.

Referências Bibliográficas

Amaral, B., Baraviera, A. T., e Cunha, M. O. T. (2012). Mecânica quântica para matemáticos em formação.

Brasil - MEC (2006). Orientações curriculares para o ensino médio. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf
Acesso em: 17/07/2017.

Caraça, B. J. (2000). *Conceitos fundamentais da matemática*. Gradiva.

Lima, E. L., Carvalho, P. C., Wagner, E., e Morgado, A. C. (2002). A matemática do ensino médio.

Nobre, W. R. (2013). Números complexos e algumas aplicações.

Ripoll, J. B., Ripoll, C. C., e Silveira, J. F. P. (2006). Números racionais, reais e complexos. *Porto Alegre: UFRGS*.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Zahar.

SBM (2014). Orientações da sbm para a discussão sobre o currículo de matemática. https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Ensino_Meio_FINAL.pdf / Acesso em: 07/08/2017.