Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Johann Senra Moreira

Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Carlos Frederico Palmeira

Rio de Janeiro
Setembro de 2017

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Johann Senra Moreira

Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Carlos Frederico Palmeira
Orientador
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Profa. Renata Martins Rosa
Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Humberto José Bortolossi
Departamento de Matemática Aplicada - UFF

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 22 de setembro de 2017

Johann Senra Moreira

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) em 2007. Atualmente é professor do ensino básico pela Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro.

Ficha Catalográfica

Moreira, Johann Senra

Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos / Johann Senra Moreira ; orientador: Carlos Frederico Palmeira. – 2017.

103 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Cônicas. 3. Elipse. 4. Parábola. 5. Hipérbole. 6. Desenho geométrico. I. Palmeira, Carlos Frederico. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

A minha mãe, Zénia, por toda formação que tive na vida como profissional quanto cidadão.

Ao meu orientador Professor Carlos Frederico Palmeira (Fred), pelo apoio e dedicação na orientação dessa dissertação.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e à PUC-Rio, pela organização desse mestrado, que contribui com uma melhor qualificação dos professores de matemática.

Aos meus colegas Ricardo Azevedo, Luiz de Almeida e Claudio Vale, pelo incentivo.

Aos professores e funcionários da PUC–Rio que se envolveram na realização da turma de PROFMAT.

Resumo

Moreira, Johann Senra; Palmeira, Carlos Frederico. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos.** Rio de Janeiro, 2017. 103p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho tem como objetivo facilitar o estudo das cônicas e ainda despertar o interesse do aluno para o desenho geométrico. Será apresentado que as curvas cônicas estão em nosso dia a dia, não só como beleza estética, mas também provocando fenômenos físicos amplamente utilizado pela arquitetura e engenharia civil, como acústica e reflexão da luz. Utilizaremos instrumentos para desenhar curvas que despertem a curiosidade dos alunos e faremos uso das equações e lugares geométricos a fim de demostrar tais recursos. Pretende-se assim que ao adquirir tais conhecimentos o aluno aprimore seu entendimento matemático e amplie seu horizonte cultural.

Palavras-chave

Cônicas; elipse; parábola; hipérbole; desenho geométrico.

Abstract

Moreira, Johann Senra; Palmeira, Carlos Frederico (Advisor). **Construction of the conics using the geometric drawing and concrete instruments.** Rio de Janeiro, 2017. 103p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The present research aims to facilitate the study of the conics and also to arouse the interest of the student for the geometric drawing. The conic curves will be presented not only as they are in our day to day as aesthetic beauty but also as responsible for the physical phenomena widely used by architecture and civil engineering as well as acoustics and reflection of light. We will use instruments to draw curves that arouse the curiosity of the students, making use of the equations and locus in order to demonstrate such resources. It is intended that the student acquire this knowledge, improving his mathematical understanding and broadening his cultural horizon.

Keywords

Conics; elipse; parabola; hyperbola; geometric.

Sumário

Lista de Figuras

1
Introdução

As Cônicas representam um ótimo assunto em matemática, pois podemos apresentar aos alunos que conceitos matemáticos e equações do segundo grau estão ao nosso redor. Temos como exemplo na figura 1, a sombra de um abajur que descreve uma hipérbole conforme mostrado pelo professor Carneiro (2006).

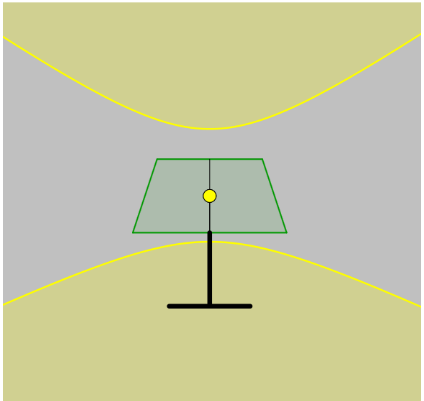

Figura 1 - Sombra de um abajur produzindo uma hipérbole

(Fonte: https://www.geogebra.org/m/znQSNJWS)

Vejamos também na figura 2, que ao inclinarmos uma garrafa de forma cilíndrica a curva do contato entre a superfície do líquido e a garrafa descreverá uma elipse, e ainda num outro exemplo na figura 3, temos que ao lançarmos um objeto de forma obliqua (desprezando a resistência do ar), a trajetória que esse objeto fará até chegar ao solo será uma parábola.

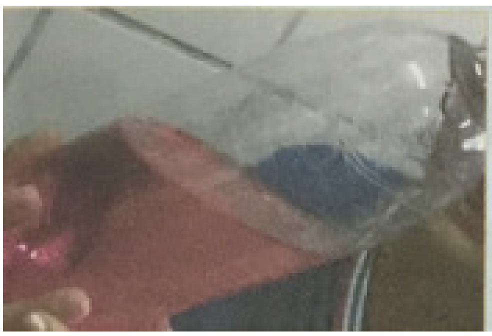

Figura 2 - Liquido em uma garrafa cilíndrica descrevendo uma elipse

(Fonte: Oficina Que curvas são essas chamadas cônicas? Bienal de Matemática 2017)

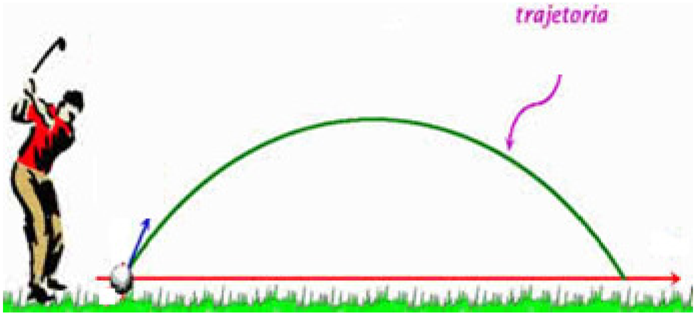

Figura 3 - Lançamento de uma bola descrevendo uma parábola (desprezando a resistência do ar)

(Fonte: https://www.todamateria.com.br/lancamento-obliquo/)

Desde a Grécia antiga o homem se utiliza das aplicações das cônicas. Vejamos o clássica lenda em que o sábio Arquimedes emprega espelhos parabólicos com o propósito de queimar as velas das embarcações romanas na defesa de Siracusa (sua cidade Natal). Temos também que conforme Àvila (1997), que em 1672 o astrônomo francês Laurent Cassegrain, baseando-se nas propriedades refletoras da hipérbole e parábola, propôs para nas construções de telescópios refletores, a utilização de um par de espelhos, um hiperbólico e um parabólico, obtendo assim vantagem sobre telescópio de Newton baseado em um espelho parabólico e um plano. Em muitos consultórios de dentista, a iluminação da área a ser tratada do paciente é feita com uma luminária com espelho elíptico, que possui a propriedade de concentrar os raios de luz em um ponto.

Apresentaremos as curvas cônicas obtidas através de seus pontos, com o uso de régua e compasso, ou através outros instrumentos, e essas curvas desenhadas serão explicadas através das propriedades de cada cônica, seja por lugar geométrico, seja pela geometria analítica. O professor do ensino médio deve estar atento ao grau de conhecimento de cada aluno, pois demostrar uma curva por meio de equações penosas pode causar desinteresse em algumas classes. Neste caso é mais coerente e didático escolher um tipo de construção mais adequada.

Deixamos de apresentar a noção de excentricidade, como também não fizemos conexão com a geometria projetiva.

2
Um pouco de História

Atribuí-se ao grego Menaecmo (cerca de 350 a. C.) a descoberta das cônicas, ao desenvolver método para a resolução de um dos problemas clássicos da antiguidade, a famosa duplicação do cubo. Este problema teve sua origem na Grécia antiga, quando o Rei Minos ordenou que a tumba cúbica de seu filho fosse dobrada de tamanho em volume. Foi então construída uma nova tumba, sendo que o método utilizado foi a duplicação das arestas, porém dessa forma a construção ficou 8 vezes maior. Este problema chegou aos matemáticos da época e foi constatado que tal questão envolve a obtenção da aresta de um cubo que tenha o dobro do volume de um cubo dado, sendo que, havia uma limitação técnica para as soluções, pois os instrumentos da época ainda eram os Euclidianos (régua não graduada e compasso).

A primeira contribuição importante foi a de Hipócrates de Chios (440 a.C). Possivelmente, fazendo analogia ao problema de que dado um retângulo de comprimentos a e b, devemos encontrar um quadrado de lado x de mesma área, este nada mais é que a inserção de uma média proporcional entre os segmentos a e b.

Em álgebra mais atual seria: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab$. Esta equação pode ser obtida geometricamente através da conhecida relação métrica do triângulo retângulo, $x^2 = ab$, conforme a figura 4.

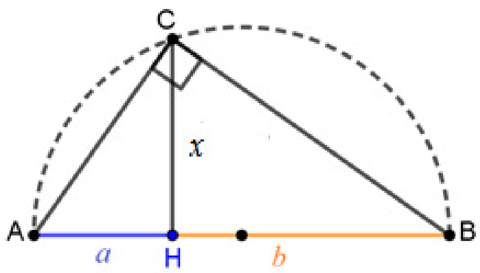

Figura 4 - Média proporcional entre *a* e *b*.

O gregos antigos tinham o conhecimento de como encontrar uma média proporcional ou geométrica entre segmentos a e b. Cabe atentar que para os gregos as equações do tipo acima não eram divisões e sim razões de mesma grandeza, como segmentos, área, volumes.

Hipócrates então provou que o problema era o mesmo que inserir duas médias proporcionais entre dois segmentos de comprimento a e $2a$. Denotando-se as médias proporcionais por x e y teremos: $a : x :: x : y :: y : b$ (esta e a notação utilizada pelos gregos antigos para expressar razões). Esta contribuição de Hipocrates não é uma solução do problema e sim uma redução do mesmo, pois encontrar duas médias proporcionais usando somente régua e compasso era um problema de igual dificuldade.

Em uma termologia mais atual o problema de inserir duas médias proporcionais entre dois segmentos a e b seria:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$ então temos $x^2 = ay$; $y^2 = bx$ e $xy = ab$ que veremos que fazendo $b = 2a$ e por eliminação de y teremos: $x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$.

Os matemáticos buscaram resolver então o problema na forma reduzida, que é inserir duas médias proporcionais entre dois segmentos de reta dados. Menaecmo, utilizando-se das secções cônicas deu duas soluções para o problema: uma traçando duas parábolas com vértice comum e eixos perpendiculares e a outra traçando uma parábola e uma hipérbole.

Em uma notação atual teremos as seguintes resoluções do problema:

$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, sendo a a aresta do cubo que desejamos duplicar o volume.

$$\begin{cases} x^2 = ay \rightarrow \text{trata - se de uma parábola} \\ y^2 = 2ax \rightarrow \text{trata - se de uma parábola} \\ xy = 2a^2 \rightarrow \text{trata - se de uma hipérbole.} \end{cases}$$

1º caso: Traçado das duas parábolas com vértices comuns $\begin{cases} x^2 = ay \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{a} \\ y^2 = 2ax \end{cases}$

De $y^2 = 2ax$, substituindo y das duas equações teremos:

$$\left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \frac{x^4}{a^2} = 2ax \Rightarrow x^3 = 2a^3.$$

Logo, teremos que, tirando a raiz cubica de ambos os lados $\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{2a^3} \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$ que é o comprimento desejado (ver figura 5).

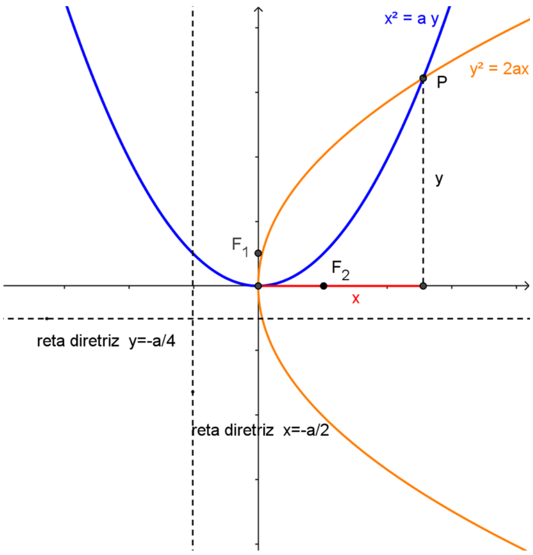

Figura 5 - Obtendo o comprimento de $a\sqrt[3]{2}$ utilizando duas parábolas

2º caso: traçando uma parábola e a hipérbole.

$$\begin{cases} y^2 = bx \\ xy = ab \end{cases} \quad \text{substituindo } b = 2a \text{ teremos } \begin{cases} y^2 = 2ax \\ xy = 2a^2 \end{cases}$$

De $xy = 2a^2$ teremos $y = \dfrac{2a^2}{x}$, de $y^2 = 2ax$ substituindo y da equação acima teremos: $\left(\dfrac{2a^2}{x}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \dfrac{4a^4}{x^2} = 2ax \Rightarrow 2a^4 = ax^3$.

Dividindo por a e tirando a raiz cubica de ambos os lados teremos: $\sqrt[3]{2a^3} = \sqrt[3]{x^3} \Longrightarrow x = a\sqrt[3]{2}$ que é o comprimindo desejado.

O caso da segunda parábola $x^2 = ay$ e a hipérbole $xy = ab$ se resolve de modo análogo, observe na figura 6 que teremos o mesmo ponto *P* de interseção para todos os 3 casos.

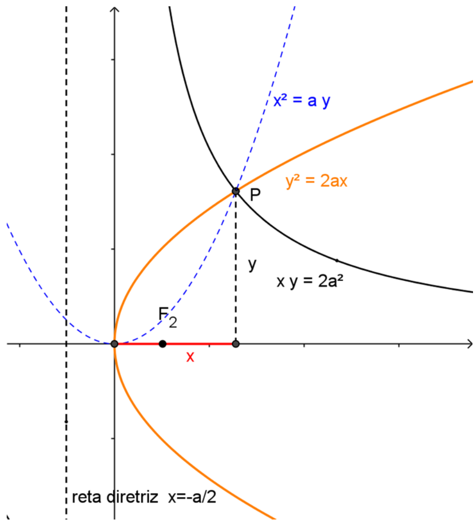

Figura 6 - Obtendo o comprimento de $a\sqrt[3]{2}$ utilizando parábola e hipérbole

As cônicas apresentadas por Menaecmo eram obtidas através de seção de um plano perpendicular à geratriz de tipos de cones diferentes, a elipse era obtida a partir de um cone acutângulo, a parábola de um cone retângulo e a hipérbole de um cone obtusângulo, conforme a figura 7:

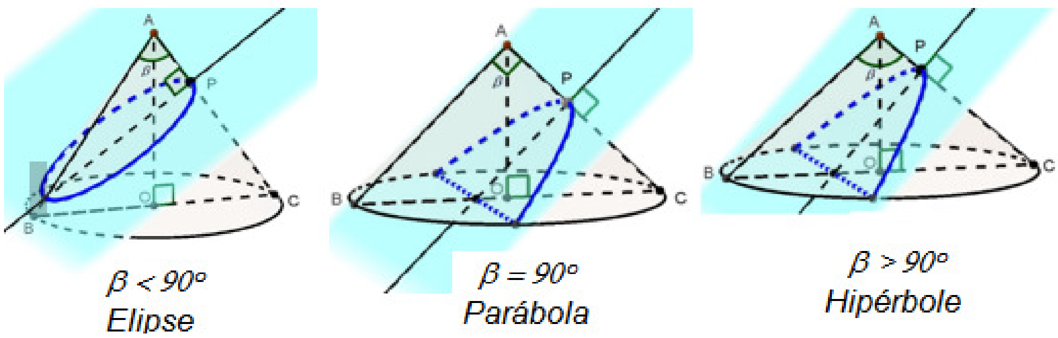

Figura 7 - Cônicas obtidas por Menaecmo

Os estudos das seções cônicas tiveram destaques ao longo da história da matemática. Nomes importantes na antiguidade se destacaram como Euclides que escreveu um livro sobre cônicas, Arquimedes que usando algumas propriedades do livro de Euclides, escreveu e provou a quadratura da parábola.

De modo geral encontrar a quadratura de uma área limitada por uma curva é construir um quadrado cuja área seja igual a da figura dada. O problema solucionado por Arquimedes foi que seja t a tangente a parábola por um ponto P e AB

uma corda da parábola paralela a t, então a área S da parábola limitada pelo segmento AB é 4/3 da área do triangulo PAB. Vejamos o exemplo na figura 8.

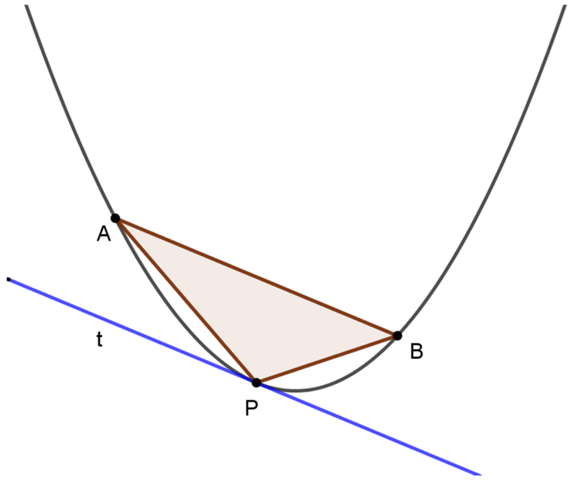

Figura 8 - Quadratura da Parábola

Apolônio de Perga (cerca de 262 a. C), que além de ter escrito sobre diversos assuntos em matemática, ficou mais conhecido pelos seus livros sobre secções cônicas, que são ao todo 8, mas o último não chegou até nosso dias. Entre suas contribuições encontram-se que as seções cônicas não eram obtidas somente a partir de cortes perpendicular a geratriz de um cone reto.

Apolônio introduziu que as cônicas podem ser obtidas a partir de um mesmo cone oblíquo de base circular. Se o plano cortar todas as geratrizes, a cônica obtida é uma elipse, se o plano é paralelo a uma das geratrizes, a cônica é uma parábola e se o plano cortar os dois ramos do cone (ver figura 9), a cônica obtida é uma hipérbole. Apolônio foi também o primeiro a usar os termos “parábola”, “hipérbole” e “elipse” para designar as seções cônicas.

Observação: Cone reto é um cone onde o eixo é perpendicular ao plano da base. Cone oblíquo é um cone onde o eixo não é perpendicular ao plano da base.

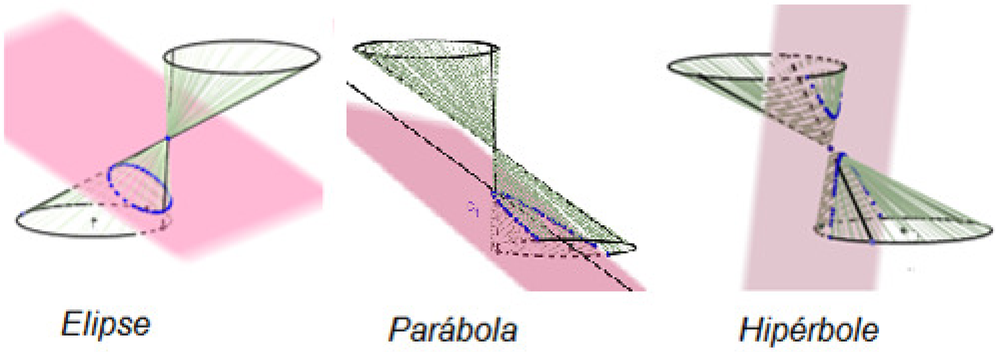

Figura 9 - Cônicas obtidas por Apolônio

Uma contribuição importante também veio do matemático Blaise Pascal (1623 – 1662), que aos 16 anos, imprimiu um trabalho *Essay pour les Coniques*, onde expos um teorema de Geometria Projetiva conhecido como Hexagrama místico de Pascal.

Em um hexágono inscrito em uma cônica, as retas que contiverem os lados opostos interceptam-se em pontos colineares.

Em um hexágono definimos lados opostos como sendo os lados que estão separados por dois outros lados. Definindo desta forma não importará se o hexágono é convexo ou não. Um exemplo para o caso da elipse está na figura 10, onde temos um hexágono *ABCDEF*, ondo os pares de lados opostos são: (*AB* e *DE*), (*BC* e *EF*) e (*FA* e *CD*).

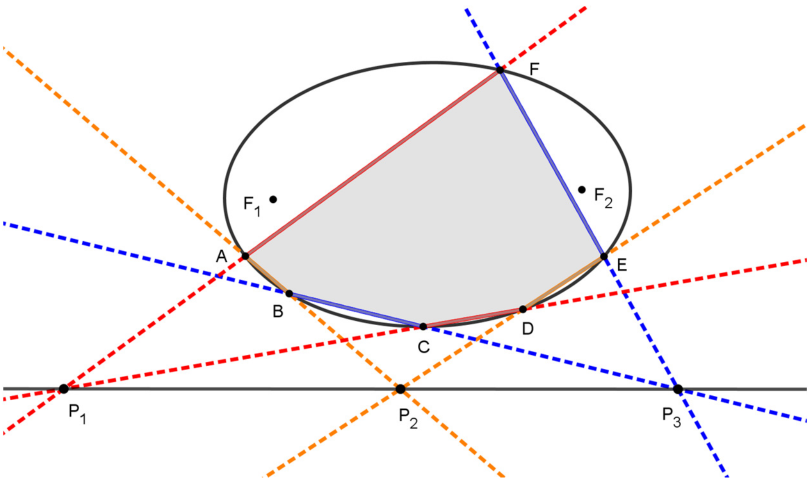

Figura 10 - Hexágono inscrito em uma Elipse

Philippe de La Hire, matemático francês nascido em 1640, escreveu três obras sobre as seções cônicas, apresentou 61 teoremas sobre as três cônicas a partir de uma definição bifocal, (para a parábola um dos focos encontra-se no infinito), sendo esta somente uma das caracterizações das cônicas. Como já foi dito, os gregos as obtinham através de seções em cones, porém a definição bifocal usada por Philipe de La Hire desvincula as cônicas do cone. Sua caracterização das cônicas é a que prevalece no estudo das curvas elipse, hipérbole e parábola no ensino médio, pois são usadas para provar as formas das equações.

Dandelin, matemático francês (1794-1847), se utiliza da propriedade bifocal e da seção cônica fazendo um elo entre as duas caracterizações. Ele faz uso de esferas inscritas em um cone e um plano que secciona este cone, que deverá ser tangente as esferas, sendo os pontos de tangência os focos da cônica. Na figura 11 temos o exemplo da elipse.

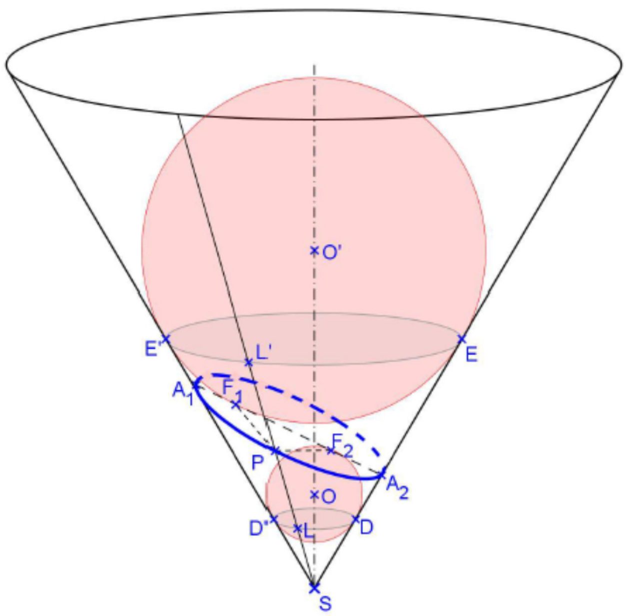

Figura 11 - Os focos da elipse obtidos por Dandelin

(Fonte: Siqueira, 2012, p. 7)

3
Elipse

Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tais que, dados dois pontos fixos (F_1 e F_2) chamados de focos, a soma das distâncias de um ponto P do plano a cada um dos focos é igual a uma constante $2a$, sendo maior que a distância entre F_1 e F_2, ou seja, $d(F_1, F_2) < 2a$.

$$P \in elipse \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

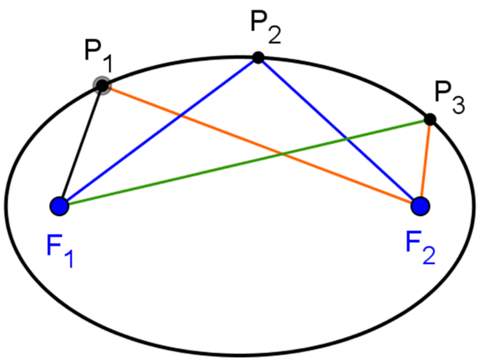

Figura 12 - Elipse

Na Figura 12 temos as distâncias:

$$d(P_1, F_1) + d(P_1, F_2) = d(P_{2,} F_1) + d(P_{2,} F_2) = d(P_{3,} F_1) + d(P_{3,} F_2) = 2a.$$

3.1
Elementos de uma Elipse

Na figura 13, temos os seguintes elementos de uma elipse:

Focos: são os pontos F_1 e F_2;

Distância focal: é o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2} = 2c$;

Centro: é o ponto médio entre os focos;

Reta focal: é a reta que contém os focos ,sendo os pontos A_1 e A_2 a interseção desta reta com a elipse;

Eixo focal ou eixo maior: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento;

Reta não focal: é a reta perpendicular à reta focal que passa no centro, sendo os pontos B_1 e B_2 ,a interseção desta reta com a elipse;

Eixo não focal ou eixo menor: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, de comprimento 2*b*;

Vértices: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 ;

Corda: segmento que une 2 pontos da elipse;

Diâmetro: são cordas que passam pelo centro.

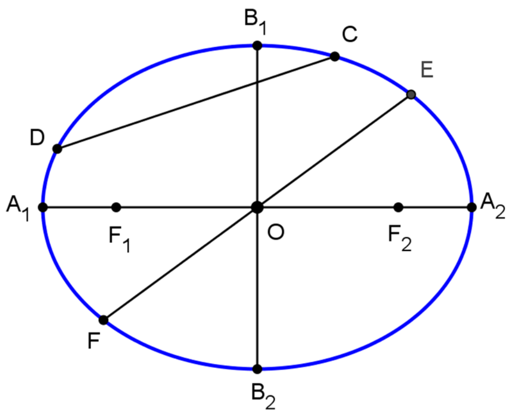

Figura 13 - Elementos de uma elipse

3.2
Equação reduzida da elipse

A equação reduzida da elipse é obtida utilizando o plano cartesiano em que $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$, são os focos da elipse, o eixo maior é igual a $2a$, ou seja, a distância entre os pontos extremos do eixo maior é igual a $2a$. Veja a figura 14.

Seja $P = (x, y)$ um ponto pertence a elipse então:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a \tag{3.1}$$

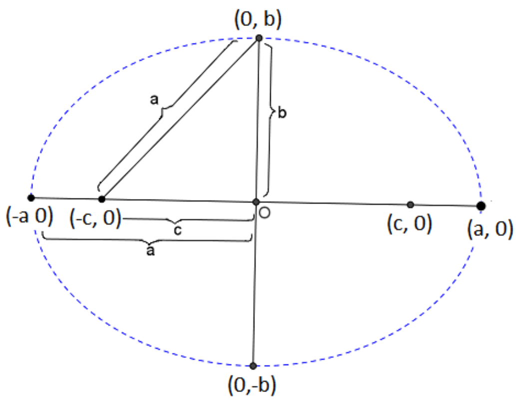

Figura 14 - Elipse de centro na origem, sendo a reta focal no eixo *OX*

Temos: $d(P,F_1)=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ e $d(P,F_2)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ então pela equação (3.1) temos:

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ (isolando um radical)

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$

$(x+c)^2+y^2=4a^2-2.2a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

$\left(a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2$ simplificando os termos

$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)^2$

dividindo ambos os lados por $a^2(a^2-c^2)$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$ observando que por Pitágoras temos $a^2=b^2+c^2$,

logo $b^2=a^2-c^2$, então $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ (3.2)

Demostramos que se o ponto $P=(x,y)$ satisfaz a equação $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$ então $P=(x,y)$ também satisfaz a equação

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, temos que a recíproca é verdadeira, pois observando que utilizamos valores positivos para a e b ,logo teremos, em nossa demonstração, que $a=b \Leftrightarrow a^2=b^2$, esta observação se faz importante uma vez que na demonstração houve termos elevados ao quadrado duas vezes.

Dito isso, seguindo os passos da demonstração em sentido inverso a partir da equação (3.2), temos que as equações (3.1) e (3.2) são equivalentes, pois todas as operações feitas são reversíveis.

3.3
Simetrias em uma Elipse

Uma boa ferramenta para traçarmos elipses é o conhecimento de suas simetrias, considerando que uma elipse é simétrica em relação à reta focal, a reta não focal e ao seu centro.

Mostraremos que se $P=(x_0,y_0)$ satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Então os pontos $P_1=(-x_0,y_0)$, $P_2=(x_0,-y_0)$ e $P_3=(-x_0,-y_0)$ também satisfazem.

Como P satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ então: $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$

a) Substituindo o ponto $P=(x_0,y_0)$ por $P_1=(-x_0,y_0)$

teremos $\frac{(-x_0)^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1.$

Concluímos que a elipse é simétrica em relação ao eixo não focal.

b) Substituindo o ponto $P=(x_0,y_0)$ por $P_1=(x_0,-y_0)$

teremos $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{(-y_0)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$

Concluímos que a elipse é simétrica em relação ao eixo focal.

c) Substituindo o ponto $P = (x_0, y_0)$ por $P_1 = (-x_0, -y_0)$

teremos $\frac{(-x_0)^2}{a^2} + \frac{(-y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x_0^{\ 2}}{a^2} + \frac{y_0^{\ 2}}{b^2} = 1.$

Concluímos que a elipse é simétrica em relação ao centro.

3.4
Restabelecendo o centro, eixos e focos de uma elipse

Dada uma a elipse desenhada, vamos obter o seu centro, eixos e focos.

Restabelecendo o centro:

Dada uma elipse desenhada, iremos encontrar seu centro.

Procedimento

Passo 1: Traça-se uma corda P_1P_2 e uma outra qualquer paralela a esta, marquemos seus pontos médios M e N respectivamente;

Passo 2: Tracemos a reta r que passa pelos pontos M e N;

Passo 3: Tracemos uma corda Q_1Q_2 (não paralela a P_1P_2) e uma outra qualquer paralela a esta, marquemos seus pontos médios S e T respectivamente;

Passo 4: Por fim tracemos reta s que passa pelos pontos S e T;

Chamemos de O o ponto de interseção entre as retas r e s, este ponto será o centro da Elipse. Conforme Figura 15.

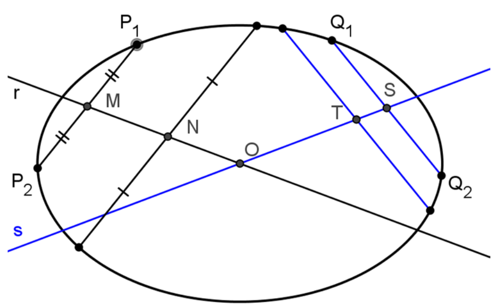

Figura 15 - Restabelecendo o centro de uma elipse

Justificativa:

Seja a equação da elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Seja a reta $y=mx+k$, vamos encontrar suas interseções com a elipse.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=mx+k \end{cases}$$

Substituindo y das duas equações teremos:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+k)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{m^2x^2+2mkx+k^2}{b^2}=1$$

$$(b^2+m^2a^2)x^2+2mka^2x+a^2k^2-a^2b^2=0.$$

Para encontrar a abscissa do ponto $M=(x_0,y_0)$ que será o ponto médio entre os pontos P_1 e P_2 , utilizaremos que, se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ então a abscissa do ponto médio entre as raízes é dado por $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}.$

Teremos então que $x_0=\frac{-2mka^2}{2(b^2+m^2a^2)}=-\frac{mka^2}{b^2+m^2a^2}.$

Para encontrar a ordenada ponto $M=(x_0,y_0)$ teremos: $y_0=mx_0+k$

$$y_0=m\left(-\frac{mka^2}{b^2+m^2a^2}\right)+k \Rightarrow -\frac{m^2ka^2}{b^2+m^2a^2}+k \Rightarrow \frac{-m^2ka^2+k(b^2+m^2a^2)}{b^2+m^2a^2}$$

Então que $y_0=\frac{kb^2}{b^2+m^2a^2}$ e $M=\left(-\frac{mka^2}{b^2+m^2a^2},\frac{kb^2}{b^2+m^2a^2}\right).$

Tomando uma segunda reta paralela reta $y=mx+k$ teremos a equação $y=mx+k_1$, logo as coordenadas do ponto médio de suas interseções com a elipse será $M_1=\left(-\frac{mk_1a^2}{b^2+m^2a^2},\frac{k_1b^2}{b^2+m^2a^2}\right).$

Escrevendo a equação da reta que passa pelos pontos M e M_1.

Após alguns cálculos obteremos $y = -\dfrac{b^2 x}{a^2 m}$ que é reta que passa pelo origem (centro da elipse).

Repetindo o processo com outro par de retas paralelas, $y = m_1 x + k$ e $y = m_1 x + k_1$, obteremos uma outra reta que também passará pela origem.

Restabelecendo seus Eixos

Partindo da construção acima, já identificamos a posição do centro da elipse, iremos encontrar os eixos da elipse.

Seja o ponto O o centro da elipse. Traça-se uma circunferência C_1 que interceptará a elipse em 4 pontos distintos A, B, C e D.

Tracemos as retas AC e BD, temos que a mediatrizes das cordas AB e BC serão as retas focal e não focal da elipse (ver figura 16).

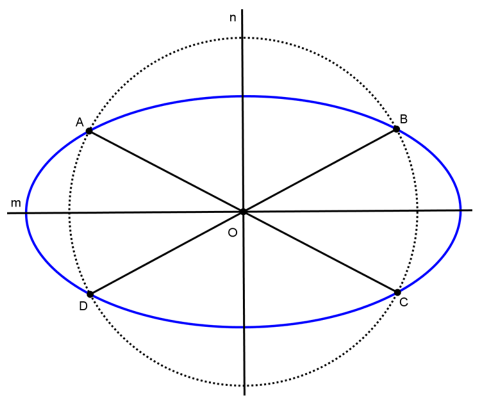

Figura 16 - Restabelecendo as retas focal e não focal de uma elipse

Justificativa:

Seja $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ a equação reduzida da elipse e $x^2 + y^2 = c^2$, com $0 < c < b$ a equação de uma circunferência de mesmo centro.

Ao resolvermos o sistema formado pelas equações: $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ x^2+y^2=c^2 \end{cases}$, é fácil ver que se um ponto (x_0, y_0) é solução do sistema, temos que os e pontos $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ e $(-x_0, -y_0)$ também são.

Dai vemos da figura 16 que se A tem coordenadas $(-x_0, y_0)$, então os outros pontos de interseção entre as duas curvas terão as coordenadas: $B = (x_0, y_0)$, $C = (x_0, -y_0)$ e $D = (-x_0, -y_0)$. Temos pela simetria em relação ao eixo da elipse que as mediatrizes das cordas AB e AD serão as retas focal e não focal da elipse.

Os eixos serão os segmentos pertencente a estas retas compreendidos no interior da elipse.

Restabelecendo os Focos, conhecendo os eixos da elipse

Sejam os pontos A e B vértices do eixo maior, os pontos C e D vértices do eixo menor e o ponto O o centro da elipse.

Pelo Vértice C tracemos uma circunferência de raio OA que interceptara o eixo AB nos pontos F_1 e F_2 que serão os focos da elipse (ver figura 17).

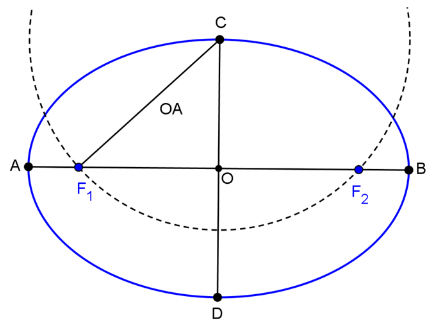

Figura 17 - Restabelecendo os focos da elipse

A justificativa desta construção é pela própria definição de Elipse, onde informa que a distância entre o vértice do eixo menor ao foco é igual a distância do vértice do eixo maior ao centro da Elipse.

3.5
Construções de Elipses por meio de seus pontos

Segmentos de reta e círculos são facilmente construídos, respectivamente com régua e compasso. Cônicas (e outras curvas) também podem ser construídas com instrumentos não tão simples. Alguns serão apresentados neste trabalho. É usual construir uma cônica através da obtenção com régua e compasso de vários pontos, e unir esses pontos. Apresentaremos aqui diferentes construções deste tipo.

Traçado de uma elipse por meios de pontos utilizando o eixo focal e os focos

Sejam os pontos A e B vértices do eixo maior, e os focos F_1 e F_2.

Passo 1: Marca-se um ponto qualquer ponto G no interior do eixo AB entre os focos F_1 e F_2 inclusive;

Passo 2: Com o centro no foco F_1 tracemos duas circunferências de raios GA e GB e as chamaremos de C_1 e C_2 respectivamente;

Passo 3: Com o centro no foco F_2 tracemos duas circunferências de raios GA e GB e as chamaremos de C_3 e C_4 respectivamente;

Passo 4: Chamemos de P_1 e P_2 os pontos de interseção das circunferências C_1 e C_4 que possuem raios diferentes. Chamemos de P_3 e P_4 os pontos de interseção das circunferências C_2 e C_3 que possuem raios diferentes;

Passo 5: Os pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são pontos desejados, pois pertencem a elipse, observemos a Figura 15, pois é bastante explicativa;

Passo 6: Caso tivéssemos escolhido o ponto médio de AB obteríamos semente 2 pontos da elipse que seriam os extremos do segundo eixo;

Passo 7: Este processo se repete escolhendo outros pontos do eixo AB, pois quantos mais pontos escolhermos mais pontos da elipse obteremos melhorando assim o traçado da figura (ver figura 18).

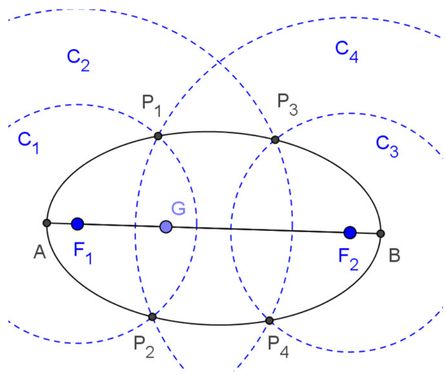

Figura 18 - Traçado da elipse conhecendo seu eixo focal e focos

Justificativa

Temos que: F_1P_1 mede AG, pois é raio do círculo C_1 de centro em F_1 e F_2P_1 mede BG, pois é raio do círculo C_4 de centro em F_2.

Como a soma dos comprimentos $AG + BG = AB$, temos que o ponto P_1 pertence a elipse cujo focos são F_1 e F_2 e eixo maior AB.

Traçado de uma elipse por meios de pontos utilizando os dois eixos

Sejam A_1A_2 de comprimento $2a$ e B_1B_2 de comprimento $2b$, os eixos ortogonais da elipse de centro em O.

Procedimentos:

Passo 1: Pelo centro O traçam-se duas circunferências, C_1 de raio b e C_2 de raio a;

Passo 2: Escolhe-se um ponto Q qualquer exterior as circunferências e traça-se o segmento OQ, este segmento interceptara a circunferência C_1 no ponto E, e a circunferência C_2 no ponto F;

Passo 3: Por E traçamos uma reta paralela ao eixo A_1A_2 e por F traçamos uma reta paralela ao eixo B_1B_2, o ponto P de intercessão destas retas pertencerá a elipse;

Passo 4: Para determinarmos outros pontos da elipse devemos escolher outros pontos exteriores as circunferências e repetir o processo. Quantos mais ponto obtivermos melhor será o traçado da elipse desejada (ver figura 19).

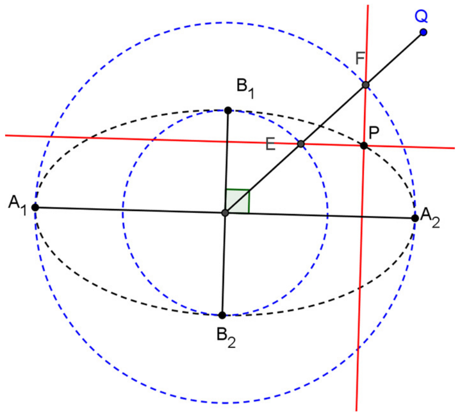

Figura 19 - Traçado de uma elipse por meios de pontos utilizando os eixos

Justificativa:

Consideremos a figura 20. Sejam os pontos R e S os pés das perpendiculares traçadas do eixo A_1A_2, que passam pelos pontos E e F respectivamente.

Utilizando a trigonometria:

Sejam os triângulos OFS e OER e α ângulo comum aos dois triângulos pelo vértice O.

Do triângulo OFS temos: $cos\,\alpha = \dfrac{OS}{OF} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow cos^2\,\alpha = \dfrac{x^2}{a^2}$

Do triângulo OER temos: $sen\,\alpha = \dfrac{ER}{OE} = \dfrac{y}{b} \Rightarrow sen^2\,\alpha = \dfrac{y^2}{b^2}$

Como $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

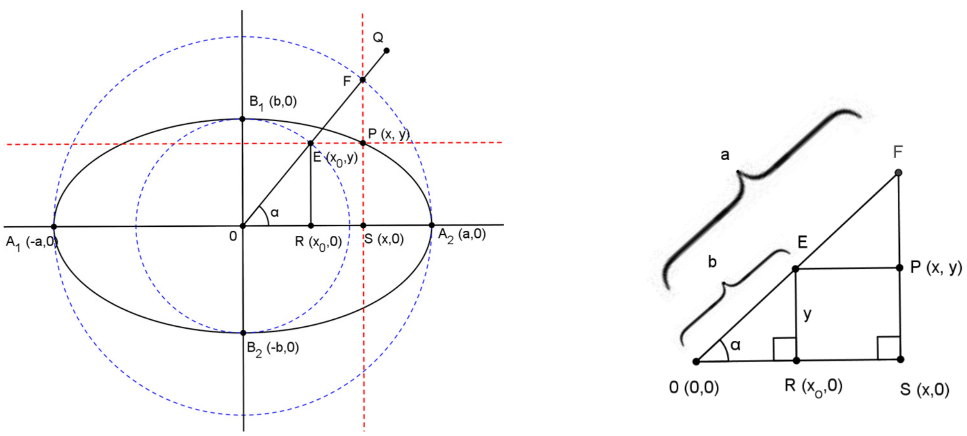

Figura 20 - Justificativa da construção, utilizando trigonometria

Traçado de uma elipse por meios de pontos conhecendo seus focos e o comprimento do eixo focal

Sejam os pontos F_1 e F_2 que serão os focos, A_1 e A_2 que serão os vértices da elipse, temos que a distância focal $d(F_{1,}F_2) = 2c$ e eixo maior $d(A_{1,}A_2) = 2a$. Observemos que $2c < 2a$.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos uma circunferência C_1 de centro F_1 e raio $2a$;

Passo 2: Marquemos um ponto A qualquer da circunferência e tracemos a reta que passa pelos pontos A e F_1 a qual chamaremos de r ;

Passo 3: Tracemos o segmento AF_2;

Passo 4: Seja m a mediatriz do segmento AF_2. O ponto P de interseção entre a mediatriz m e a reta r será um ponto que pertence a elipse de focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2;

Passo 5: Para encontrar outros pontos da elipse, devemos escolher outros pontos da circunferência de raio $2a$ e repetir o procedimento (ver figura 21).

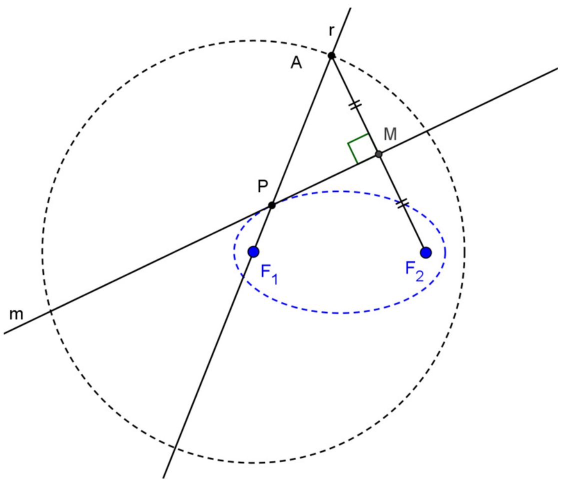

Figura 21 - Traçado da elipse conhecendo seus focos e comprimento focal

Justificativa

Como o ponto P pertence a mediatriz do segmento AF_2, então $d(P, A) = d(P, F_2)$, temos também que $d(F_1, A) = 2a$ (raio) $= d(F_1, P) + d(P, A)$, mostrando assim que P pertence a elipse de focos F_1 e F_2 e eixo $2a$.

3.6
Traçado de tangentes à elipse:

3.6.1
Traçando uma tangente e uma normal a uma elipse por um ponto *P* da curva

Seja a elipse de eixo maior AB de comprimento $2a$ e focos F_1 e F_2, pertencentes ao eixo AB.

Seja P, um ponto da elipse, que desejamos que passe a reta tangente t e a reta normal n.

Procedimentos:

Passo 1: Construiremos uma circunferência com centro no foco F_1 e raio AB.

Passo 2: Tracemos a semirreta F_1P que interceptará a circunferência em C e tracemos o segmento F_2C.

Passo 3: Tracemos a mediatriz do segmento F_2C, esta mediatriz a qual chamaremos de m será a reta tangente a elipse no ponto P.

Passo 4: Para traçarmos a normal, tomaremos uma reta perpendicular a reta m sobre o ponto P (ver figura 22).

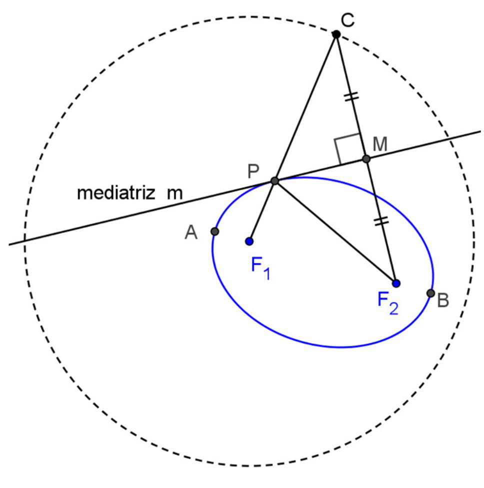

Figura 22 - Tangente a um ponto da elipse

Justificativa.

Consideremos a figura 23. Para que a reta m (mediatriz de F_2C) seja tangente a elipse no ponto P teremos que mostrar que P é o único ponto de interseção entre m e a elipse.

Observemos que por construção $F_1C = AB = 2a$.

Suponhamos que exista um ponto P' diferente de P que pertença a mediatriz m e a elipse, então $d(P',C) = d(P',F_2)$ e além disso temos que $d(F_1,P') + d(F_2,P') = 2a = d(F_1,P) + d(F_2,P)$.

Logo $d(F_1,P') + d(P',C) = 2a$, absurdo, pois pela desigualdade triangular $d(F_1,P') + d(P',C) > d(F_1,C) = 2a$, então P é o único ponto de m pertencente a elipse, logo m é tangente a elipse.

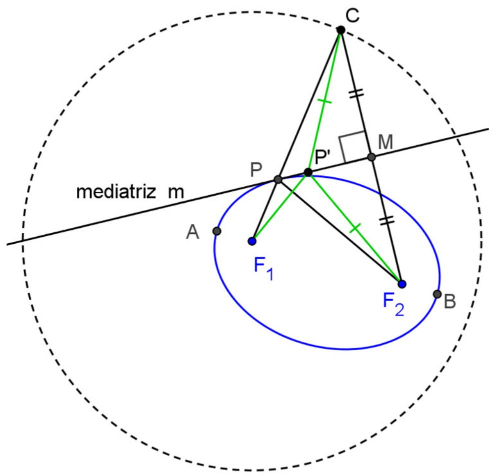

Figura 23 - Justificativa da construção de uma tangente a um ponto da elipse

3.6.2
Traçando duas retas tangentes a elipse por um ponto P exterior a curva

Seja a elipse de focos F_1 e F_2, eixo maior AB e P um ponto fora da elipse no qual desejamos traçar as tangentes.

Procedimentos:

Passo 1: Construímos a circunferência C_1 de centro F_1 de raio AB.

Passo 2: Construímos a circunferência C_2 de centro P e raio PF_2.

Passo 3: Marquemos os pontos C e D de interseção com as circunferência C_1 e C_2.

Passo 4: Tracemos os segmentos F_1C e F_1D marcando os pontos T e Q respectivamente de interseção com a elipse (ver figura 24).

As retas PT e PQ são as tangentes desejadas.

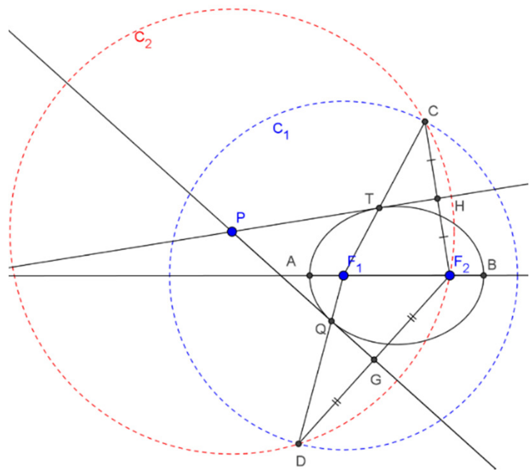

Figura 24 - Tangente à elipse por um ponto fora da curva

Justificativa:

Inicialmente fixaremos na demonstração que a reta PQ a qual mostraremos que é tangente a elipse no ponto Q.

Temos por construção que o segmento F_1D mede AB = comprimento do eixo maior da elipse e $PF_2 = PD$, ambos raio do círculo C_2.

O ponto Q divide o segmento F_1D tal que $F_1D = F_1Q + QD = AB$. Como Q pertence a elipse, então $F_1Q + F_2Q = AB$, logo $F_2Q = QD$.

Observando que os triângulos PQD e PQF_2 são congruentes por LLL, logo a reta PQ é bissetriz do triângulo PDF_2 e como este triângulo é isósceles então PQ é uma mediatriz do lado DF_2.

Observemos que estamos nas condições do item 3.6.1, pois o segmento $F_1D = 2a$, que é raio de uma circunferência de centro em F_1, então a tangente pelo ponto Q é a mediatriz do lado DF_2 do triangulo QDF_2.

Segue de forma análoga a demonstração que a reta PT é tangente a elipse pelo ponto T.

3.7
Equipamentos para construções de elipses

Conhecendo o eixo maior , usando barbante, pregos ou alfinetes do tipo percevejo

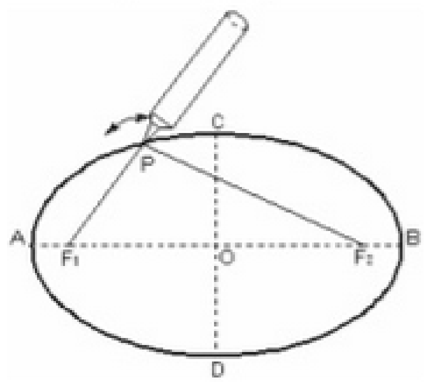

Figura 25 - Construindo uma elipse com barbante

Procedimentos para construir a elipse:

Passo 1: Conforme a figura 25, fixamos dois percevejos em uma folha de papel apoiada em um papelão grosso. (O papelão poderá ser uma capa dura de um caderno que o aluno não utiliza mais).

Passo 2: Cortamos um barbante de preferência grosso em tamanho que seja maior que a distância entre os dois pregos fixados , em seguida, amarre as pontas do barbante em cada prego.

Passo 3: Mantendo o barbante esticado, corra com um Lápis ou caneta, de modo a fechar a figura, que será a Elipse e saberemos que o tamanho que cortamos o barbante é igual a $2a$.

A construção acima é simples de fazer em sala de aula, pois, além de construir a figura temos também a assimilação pelo aluno do fato que o lugar geométrico da elipse foi constatado, pois os pregos fixados são os focos da elipse e a soma das distancias entre um ponto qualquer da Elipse aos focos foi mantida ao esticarmos o barbante. (Este método é tradicionalmente chamado de método do jardineiro).

Conhecendo seus dois eixos, utilizando bastão ou papel

Sejam o eixo maior AB igual a $2a$ e o eixo menor CD igual a $2b$. Tracemos esses dois eixos de forma perpendicular, com intercessão nos seus pontos médios o qual chamaremos de ponto O, este ponto será o centro da elipse.

Cortemos uma tira de papel de tamanho a, desenhamos nas extremidades os pontos O' e P e um ponto X entre O' e P de tal maneira que $O'P = a$, $O'X = a - b$ e $XP = b$.

Observando a figura 26, temos que o ponto O' deverá correr pelo eixo menor DC a maneira que o ponto X corra no eixo maior AB, então o ponto B' descreverá uma elipse.

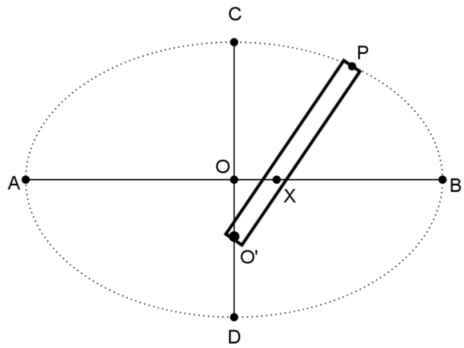

Figura 26 - Construindo uma elipse com tira de papel

Justificativa:

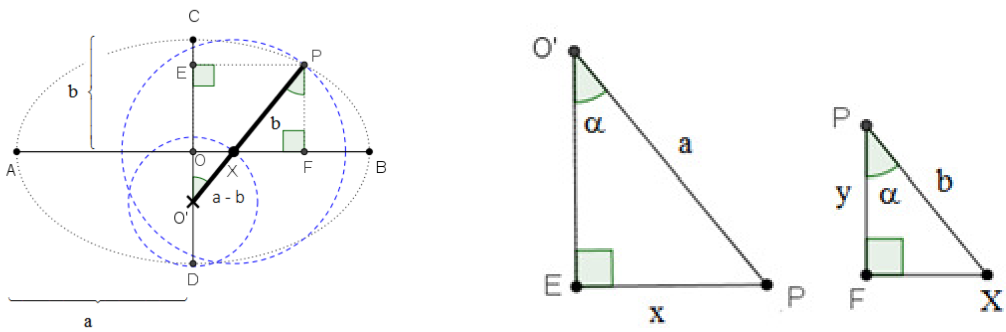

Figura 27 - Justificativa da construção de uma elipse com tira de papel

Temos na figura 27, os eixos da elipse nos eixos do plano cartesiano , coincidindo os centro de ambos, e um ponto P da elipse como coordenada $P = (x,y)$.

Temos os triângulos *O'EP* e *PFX* semelhantes por *AA*.

Então temos que $\begin{cases} sen(\alpha) = \dfrac{EP}{PO'} = \dfrac{x}{a} \\ cos(\alpha) = \dfrac{PF}{PX} = \dfrac{y}{b} \end{cases}$

Pela identidade trigonométrica $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ então $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

A mesma construção acima feita com uma simples tira de papel, é também base para o mecanismo da figura 28, que é um instrumento composto por uma alavanca regulável, presa a ela estão dois pinos em posições pré-determinadas que deslizarão sobre trilhos ortogonais. Ao girarmos a alavanca, sua ponta transcreverá uma elipse.

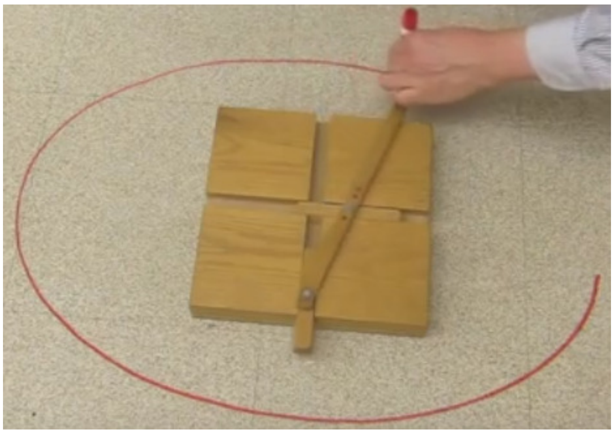

Figura 28 - Elipsógrafo com trilhos ortogonais

(Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=iM-r8bhTT8k)

Utilizando um instrumento na forma de losango primeiro mecanismo:

O do instrumento da figura 29, trata-se de um losango *ABCD* articulado. Este losango está preso em seu vértice *A* por uma roldada de raio *r* e em seus lados *AB* e *AD* são presos dois pontos *M* e *N* respectivamente que ficarão fixos de mesma distância de A, mas que deslizarão por uma reta *t*.

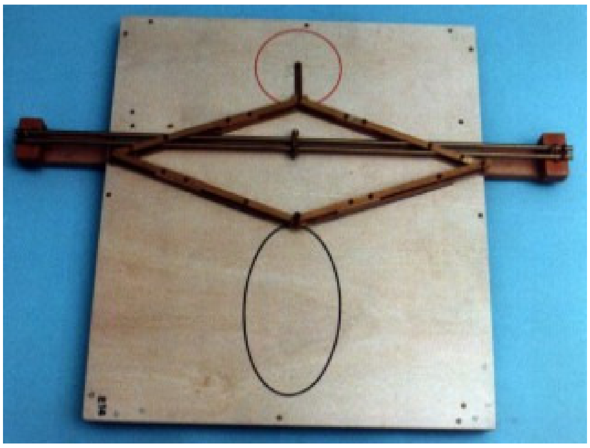

Figura 29 - Elipsógrafo primeira construção utilizando losango

(Fonte: http://archivioweb.unimore.it/theatrum/macchine/_00the.htm)

Funcionamento:

Consideremos as figuras 29 e 30. Ao mover o ponto A do losango sobre uma circunferência de centro em K e raio r, o losango mudará de forma, aumentando e diminuindo o ângulo $D\hat{A}B$, isto se deve ao fato que como os pontos N e M deslizarão horizontalmente sobre um trilho t, sendo assim, os vértices B, C e D não farão o mesmo movimento que o vértice A, em particular o vértice C irá então descrever uma elipse.

Justificativa:

Consideremos a figura 30. Seja o losango $ABCD$, com $AB = AC = CD = DA = l$ e sejam os pontos M e N nos lados AB e AD respectivamente, de tal maneira que $AM = NA = m$

A reta t estará sobre o eixo x, o centro do círculo de raio r estará sobre o eixo y, os pontos M e N deslizarão sobre o eixo x. Determinemos as coordenadas dos pontos $A = (a, b)$ e $C = (x, y)$.

Tracemos os diagonais DB e AC do losango que se cruzarão no ponto P, e marquemos o ponto Q que será a intercessão entre a diagonal AC com o eixo x.

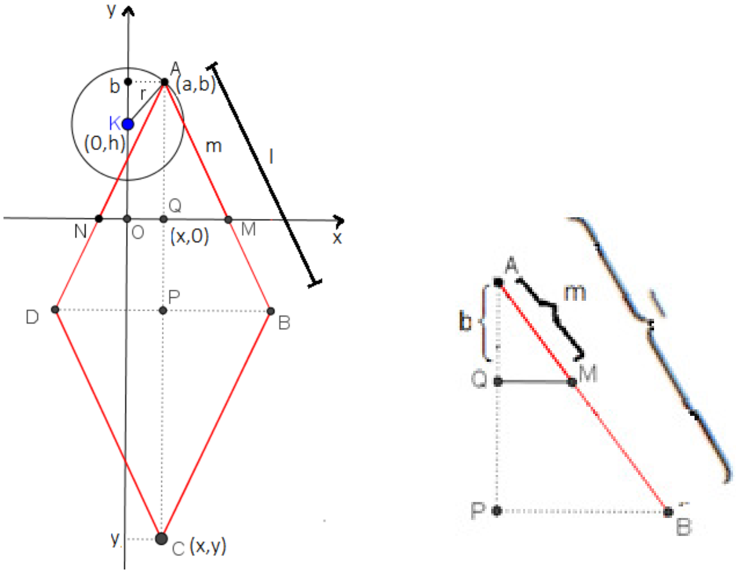

Figura 30 - Justificativa do Elipsógrafo da primeira construção com losango

Temos que os triângulos AMQ e ABP são semelhantes por AA:

$$\begin{cases} M\hat{A}Q \equiv B\hat{A}P \text{ ângulo comum} \\ A\hat{Q}M \equiv A\hat{P}B \text{ ambos ângulos de } 90^{\circ} \end{cases}$$

Então temos $\frac{m}{b} = \frac{AM}{AQ} = \frac{AB}{AP} = \frac{l}{AP} \Rightarrow AP = \frac{lb}{m}$.

Obtendo as coordenadas do ponto Q:

$CQ = CP + QP = AP - AQ + CP$, observando que $AP = CP$ devido a figura ser um losango temos:

$AP - AQ + AP = 2AP - AQ = = 2\left(\frac{l.b}{m}\right) - b.$ Segue que:

$$CQ = 2\left(\frac{l.b}{m}\right) - b = \frac{2lb - bm}{m} = b\frac{(2l - m)}{m}$$

Fazendo $\frac{l-m}{m} =$ constante c que dependerá do comprimento escolhido para o losango $ABCD$ e da posição dos pontos fixos M e N, temos então $CQ = cb$.

Observando o ponto C, temos que terá a mesma abscissa dos pontos *A* e *Q*, sendo assim $a = x$ e sua coordenada *y* é escolhida de maneira que $- CQ = cb$, faremos $CQ = y$, tem-se então que $-y = cb$

Na circunferência de centro em *K* e raio *r*, temos $K = (0,h)$, o ponto *A* da circunferência tem coordenadas (a,b), então essa circunferência tem equação $a^2 + (b-h)^2 = r^2$, substituindo $a = x$ e $b = -\frac{y}{c}$ temos:

$$x^2 + \left(-\frac{y}{c} - h\right)^2 = r^2 \Rightarrow \frac{x^2}{r^2} + \frac{(y+ch)^2}{c^2r^2} = 1.$$

Utilizando um instrumento na forma de losango segundo mecanismo

O mecanismo da figura 31 trata-se de um losango articulado onde um dos trilhos é a diagonal do losango, os pontos fixos são os dois focos sendo um fazendo parte do losango e o outro que se ligará ao losango por um trilho de comprimento fixo.

Funcionamento:

Ao movermos o ponto *E* de forma circular, a distância entre os pontos *E* e *C* modificará , e o ponto *P* de interseção dos trilhos *AE* e *BD* descreverá uma elipse.

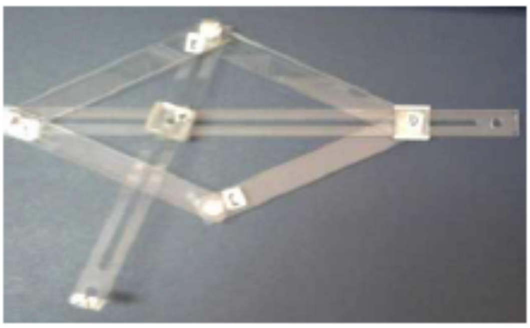

Figura 31 - Elipsógrafo, segunda construção utilizando losango

(Fonte: Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática - Numero 35-Septiembre de 2013, página 116)

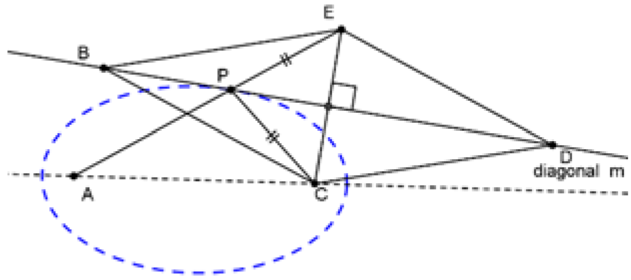

Figura 32 - Justificativa de um Elipsógrafo, segunda construção utilizando losango

Justificativa:

Temos por construção na figura 32, que AE tem comprimento fixo e $BC = CD = DE = EB$ sendo o quadrilátero $BCDE$ um losango, então BD é mediatriz de CE.

Seja P um ponto de intercessão entre a mediatriz DB e AE, então $PC = PE$, logo $AP + PE = AE \Rightarrow AP + PC = A.$

(Observa-se que o ponto E descreverá uma circunferência de raio AE, está circunferência é chamada de círculo diretor, pois é centrada em um dos focos e seu raio é igual ao eixo focal).

3.7.1
Elipses através de cortes em um cilindro

Método para fazer em sala de aula conforme figuras 33 e 34:

Materiais: Garrafa pet vazia, pincel atômico e tesoura.

Procedimentos:

Passo 1: Enchemos a garrafa pet com água (líquidos não transparentes é mais indicado);

Passo 2: Inclinemos a garrafa e marquemos com a caneta a curva da superfície do liquido;

Passo 3: Esvaziamos a garrafa e recortamos com tesoura a curva desenhada.

Temos que a curva recortada é uma elipse.

Para completar podemos pedir para o aluno colocar esta curva sobre um papel e desenhá-la, assim estará desenhando uma elipse.

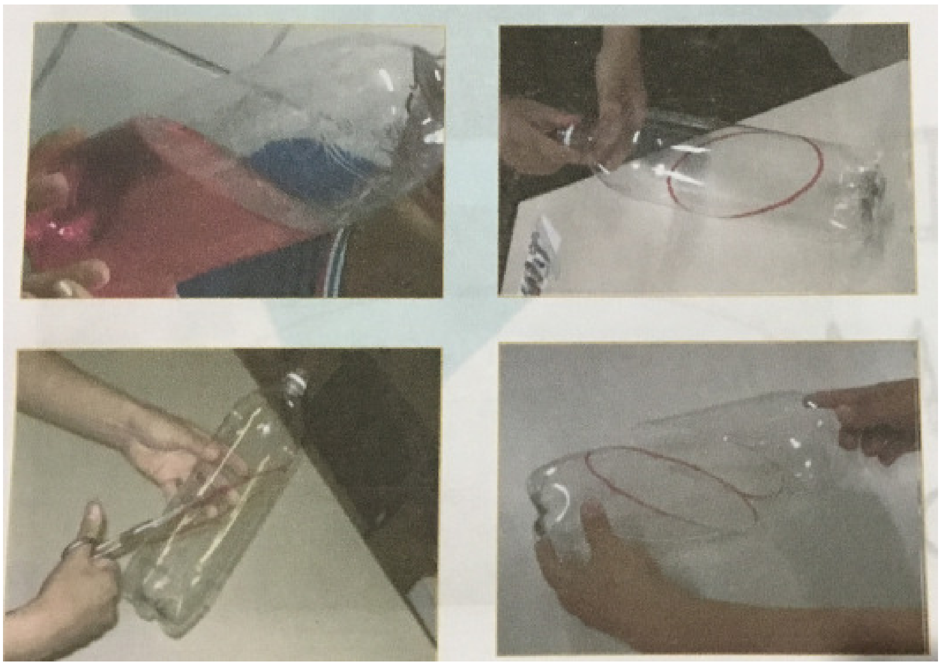

Figura 33 - Elipse obtida através de uma garrafa pet

(Fonte: Oficina Que curvas são essas chamadas cônicas? Bienal de Matemática 2017)

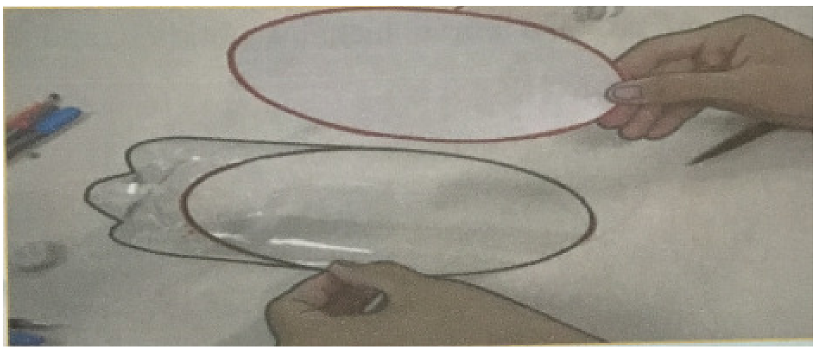

Figura 34 - Desenhando a elipse obtida com uma garrafa pet

(Fonte: Oficina Que curvas são essas chamadas cônicas? Bienal de Matemática 2017)

Demonstração:

Mostraremos que a secção plana em um cilindro reto por um plano obliquo ao eixo é uma elipse.

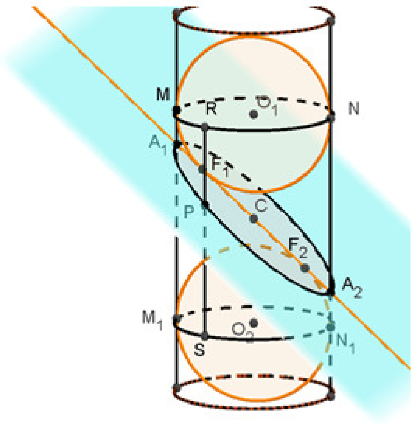

Figura 35 - Pontos da elipse obtida através de um cilindro

Consideremos o cilindro reto de raio r da figura 35. Nele estão inscritas duas esferas de centro O_1 e O_2 separadas por uma distância d.

Seja π o plano secante ao cilindro, sendo que π deverá ser tangente as duas esferas e centro O_1 e O_2 pelos pontos F_1 e F_2 respectivamente.

Seja t reta pertencente ao cilindro e tangente as esferas que intercepta o plano π no ponto P, sendo R e S os pontos de tangências da reta t com as esferas de centro O_1 e O_2 respectivamente.

Seja r a reta que contém os pontos F_1 e F_2.

Seja α um plano perpendicular a base do cilindro que contem a reta r.

Sejam os pontos M e N pontos do plano α de intercessão da esfera O_1 com o cilindro e M_1 e N_1 pontos do plano α de intercessão da esfera O_2 com o cilindro.

Temos então: $RS = RP + PS$.

Como R e F_1 pertence a esfera de centro O_1 então $PR = PF_1$ e $PS = PF_2$ logo, $PF_1 + PF_2 = MM_1 = NN_1$.

Como A_1F_1 e A_1M são tangentes à esfera de centro O_1 então $A_1F_1 = A_1M$,

Analogamente temos: $A_2F_1 = A_2N$, $A_1F_2 = A_1M_1$ e $A_2F_2 = A_2N_1$

Logo, $MM_1 = A_1M + A_1M_1 = A_1F_1 + A_1F_2 = A_1F_1 + A_2F_1 = A_1A_2$

Temos então $PF_1 + PF_2 = A_1A_2$.

4
Hipérbole

Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, tais que, dados dois pontos fixos F_1 e F_2 chamados de focos, a diferença, em valor absoluto, das distâncias de um ponto P da hipérbole a cada um dos focos é igual a constante $2a$, sendo menor que a distância entre F_1 e F_2, ou seja, $d(F_1, F_2) > 2a$:

$P \in hipérbole \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$

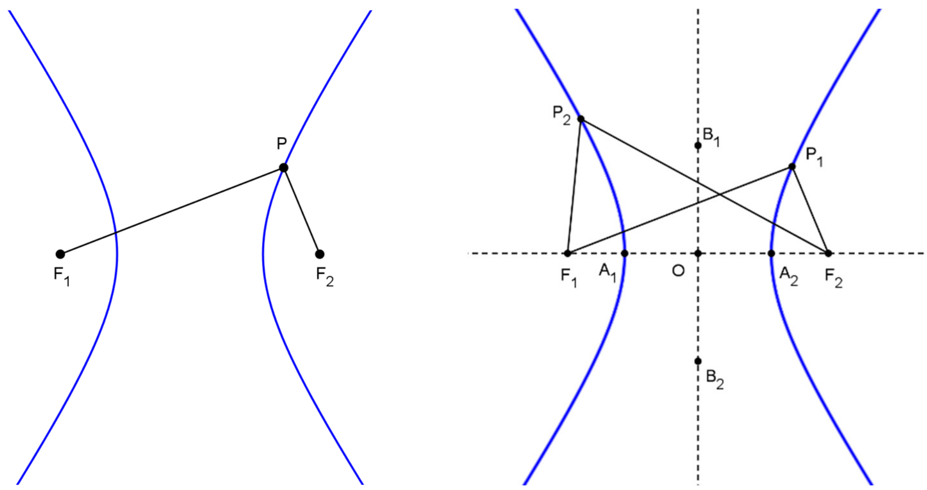

Figura 36 - Hipérbole

Como podemos observar na figura 36 que a hipérbole é uma curva com dois ramos, se o ponto P pertence a parte direita da curva então teremos $d(P_1, F_1) - d(P_1, F_2) = 2a$ e se P pertencer a parte esquerda da curva teremos: $d(P_1, F_1) - d(P_1, F_2) = -2a$.

4.1
Elementos de uma Hipérbole

Observe os pontos da hipérbole na figura 36. Temos os seguintes elementos:

Focos: são os pontos F_1 e F_2;

Distância focal: é o comprimento do segmento $\overline{F_1F_2} = 2c$;

Centro: é o ponto C, que é o ponto médio entre os focos ou os vértices;

Reta focal: reta que contém os focos, sendo os pontos A_1 e A_2 a intercessão desta reta com a hipérbole;

Eixo focal, real ou transverso: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, de comprimento 2*a*;

Reta não focal: é a reta perpendicular a reta focal que passa pelo centro;

Eixo não focal: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, de comprimento 2b, sendo $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ e B_1 e B_2, simétricos em relação ao eixo focal;

Vértices focais: são os pontos A_1 e A_2, que são as interseções da hipérbole com a reta focal;

Vértices não focais: são os pontos B_1 e B_2;

Corda: segmento que une 2 pontos da hipérbole;

Diâmetro: são cordas que passam pelo centro.

4.2
Equação reduzida da hipérbole

A equação reduzida da hipérbole é obtida utilizando o plano cartesiano (ver figura 37), em que $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$ são os focos da hipérbole, o eixo focal é igual a 2*a*, ou seja, a distância entre os pontos extremos do eixo focal é igual a 2*a*.

Seja $P = (x, y)$ um ponto que pertence a hipérbole então:

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \tag{4-1}$$

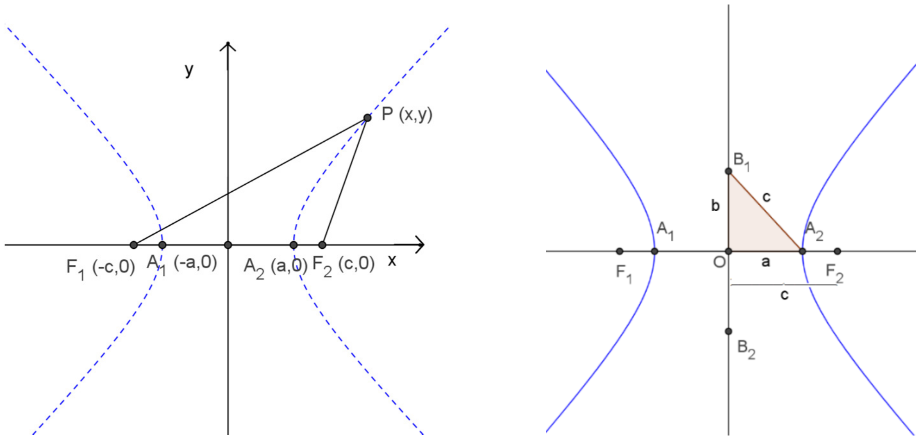

Figura 37 - Equação canônica da hipérbole

Temos $d(P,F_1)=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ e $d(P,F_2)=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

então pela equação (4-1):

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$ isolando um radical

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(\pm 2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 2.2a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$\left(\pm a.\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=\left(a^2-xc\right)^2$$ simplificando os termos

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)^2$$

Dividindo ambos os lados por $\mathrm{a}^2(a^2-c^2)$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{(a^2-c^2)}=1$, observando que por Pitágoras temos $c^2=a^2+b^2$, logo

$b^2=-a^2+c^2$. ou seja $-b^2=a^2-c^2$, então $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (4-2)

Demostramos que se o ponto $P=(x,y)$ satisfaz a equação $\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$ então P também satisfaz a equação

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, fazendo as devidas substituições e as operações de maneira análoga ao da elipse temos que a recíproca é verdadeira.

4.3
Simetrias em uma Hipérbole

A Hipérbole é simétrica em relação à reta focal, a reta não focal e ao seu centro.

Mostraremos que se $P=(x_0,y_0)$ satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, então os pontos $P_1=(-x_0,y_0)$, $P_2=(x_0,-y_0)$ e $P_3=(-x_0,-y_0)$ também satisfazem.

Como P satisfaz a equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ então: $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$.

a) Substituindo o ponto $P=(x_0,y_0)$ por $P_1=(-x_0,y_0)$,

teremos $\frac{(-x_0)^2}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$.

Concluímos que a hipérbole é simétrica em relação ao eixo não focal.

b) Substituindo o ponto $P=(x_0,y_0)$ por $P_1=(x_0,-y_0)$,

teremos $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{(-y_0)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$.

Concluímos que a hipérbole é simétrica em relação ao eixo focal.

c) Substituindo o ponto $P=(x_0,y_0)$ por $P_1=(-x_0,-y_0)$,.

teremos $\frac{(-x_0)^2}{a^2}-\frac{(-y_0)^2}{b^2}=1\Rightarrow\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}=1$.

Concluímos que a hipérbole é simétrica em relação ao centro.

4.4
Assíntotas

Assíntotas são duas retas tais que, a distância entre cada uma delas e um ponto móvel da hipérbole vai ficando cada vez menor a medida em que o ponto da se afasta em direção ao infinito.

Em uma equação canônica da hipérbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, as assíntotas serão as retas $y=\frac{b}{a}x$ e $y=-\frac{b}{a}x$.

Procedimento para traçar assíntotas:

Primeiro devemos encontrar os vértices imaginários. Seja uma hipérbole de focos F_1 e F_2, e vértices focais A_1 e A_2, temos eixo focal igual a $2a$.

Os vértices B_1 e B_2 do eixo imaginário podem ser obtidos com o seguinte procedimento:

Passo 1: Tracemos pelo centro uma reta perpendicular t ao eixo focal;

Passo 2: Tracemos uma circunferência com centro em um dos vértices focais e raio igual ao comprimento do centro a um dos focos F_1 ou F_2.

Chamemos de B_1 e B_2 a interseção desta circunferência com a reta t. Estes pontos serão os vértices do eixo imaginário. Tomemos o comprimento do eixo imaginário como $2b$.

Obtemos as assíntotas traçando as diagonais de um retângulo de comprimento $2a$ e $2b$, com centro no centro da hipérbole, com seus lado de comprimento $2a$ paralelos ao eixo focal, como na figura 38.

Esta interpretação geométrica configura-se uma ótima ferramenta para traçarmos uma hipérbole, ou seja primeiro traçamos as assíntotas depois os ramos da hipérbole.

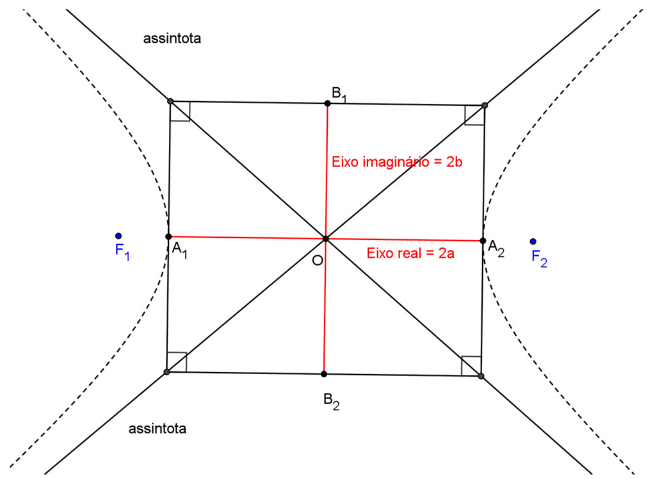

Figura 38 - Assíntotas de uma hipérbole

Justificativa:

Seja a hipérbole de equação $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ e a reta $y=mx$, uma condição que a reta intercepte a hipérbole é que existe ao menos um ponto $P(x_o, y_0)$ em comum

Seja $P(x_o, y_0)$ um ponto de interseção entre a hipérbole e a reta, então:

$\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{y_0{}^2}{b^2}=1$ e $y_0 = mx_0$. Relacionando as duas equações temos:

$$\frac{x_0{}^2}{a^2}-\frac{m^2 x_0{}^2}{b^2}=1.$$

Resolvendo a equação:

$$x_0{}^2\left(b^2-a^2m^2\right)=a^2\mathrm{b}^2 \Rightarrow x_0=\pm\frac{a\mathrm{b}}{\sqrt{b^2-a^2m^2}}=\pm\frac{\mathrm{b}}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-m^2}}.$$

Para que a rata intercepte a hipérbole, x_0 deve ser um número real, então:

$$\frac{b^2}{a^2}-m^2>0.$$

Para a e b números positivos, tem-se

$$-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}.$$

Sendo assim a inclinação da reta $y = mx$ esta contida no intervalo $\left]-\frac{b}{a},\frac{b}{a}\right[$.

Da equação $x_0 \pm \frac{b}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-m^2}}$, temos que quando m tende a $\frac{b}{a}$, o ponto de x_0 tende a mais o menos infinito, isto significa que a medida que um ponto percorre a hipérbole indo ao infinito a distância entre a hipérbole e as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ tende a zero.

Temos que as retas $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ são diagonais do retângulo centrado na origem de base 2*a* e comprimento 2*b*.

4.5
Restabelecendo o centro, eixos, focos e as retas focal e não focal de uma hipérbole

Dada uma hipérbole desenhada, iremos obter o seu centro, eixos e focos.

Restabelecendo o centro de uma hipérbole dada

Dada uma elipse desenhada, iremos encontrar seu centro.

Procedimentos:

Passo 1: Traçam-se duas cordas paralelas 1 e 2 quaisquer e marquemos seus pontos médios *M* e *N* respectivamente;

Passo 2: Tracemos uma a reta r que passará os pontos médios *M* e *N*;

Passo 3: Tracemos duas outras cordas 3 e 4 paralelas entre si, mas não paralelas a *AB* ou *CD*, marquemos seus pontos médios P e Q respectivamente;

Passo 4: Por fim tracemos uma reta s que passará pelos pontos médios P e *Q*;

Passo 5: Chamemos de O o ponto de interseção entre as retas r e s, este ponto será centro da hipérbole (ver figura 39).

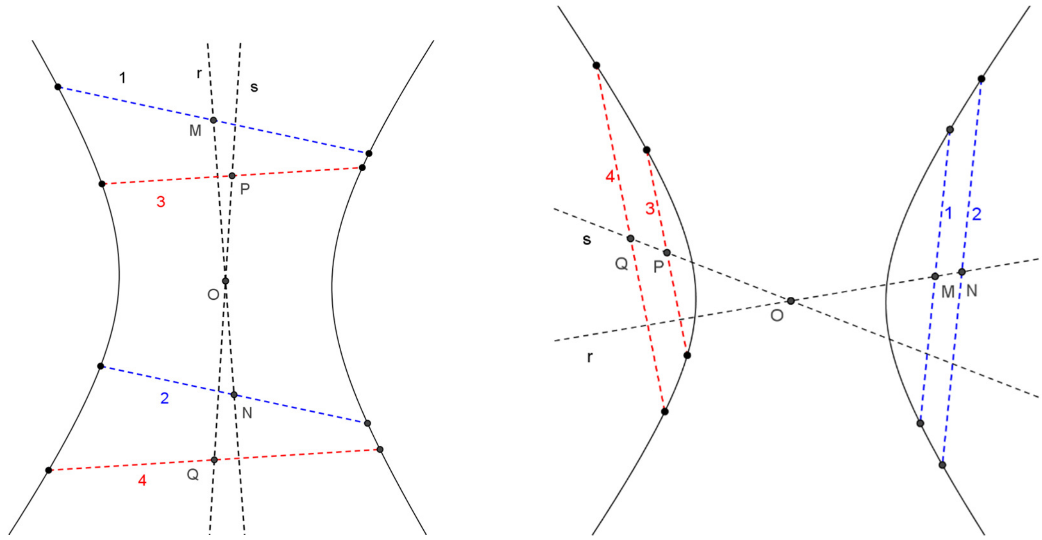

Figura 39 - Restabelecendo o centro de uma elipse

Demonstração:

Seja a equação da hipérbole: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$ (4.2)

Seja a corda 1 desta hipérbole e a equação:

$y = mx + k.$ (4.3)

Uma família de retas paralelas a esta corda 1, tem o coeficiente angular m será o mesmo para todas estas retas.

De forma análoga tratada no caso da elipse e utilizando a relação entre as equações (4.2) e (4.3), temos o ponto médio é $x_0 = \frac{a^2mk}{b^2 - a^2m^2}$.

E a equação da reta que passa pelos pontos médios de duas cordas paralelas é : $y = \frac{b^2x}{a^2m}$ que é a equação de uma reta que passa pelo centro do eixo cartesiano, logo pelo centro da hipérbole cuja equação é (4.2).

Encontrando as retas focal e não focal de uma hipérbole dada

Partindo da construção acima, já identificamos a posição do centro da hipérbole.

Seja o ponto O o centro da hipérbole. Traça-se uma circunferência C_1 que interceptará a elipse em 4 pontos distintos A, B, C e D.

Tracemos as retas AC e BD, temos que a mediatrizes das cordas AB e AD serão as retas focal e não focal da hipérbole (ver figura 40).

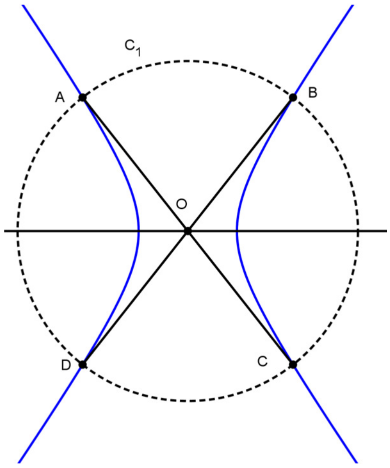

Figura 40 - Traçando as retas focal e não focal de uma hipérbole

Justificativa:

A justificativa seguirá de maneira análoga a da elipse:

Seja $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ a equação reduzida da hipérbole e $x^2 + y^2 = c^2$, com $0 < c < b$ a equação de uma circunferência de mesmo centro.

Ao resolvermos o sistema formado pelas equações: $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{cases}$, é fácil ver que se um ponto (x_0, y_0) é solução do sistema, temos que os e pontos $(-x_0, y_0)$, $(x_0, -y_0)$ e $(-x_0, -y_0)$ também são.

Dai vemos da figura 40 que se A tem coordenadas $(-x_0, y_0)$, então os outros pontos de interseção entre as duas curvas terão as coordenadas: $B = (x_0, y_0)$, $C = (x_0, -y_0)$ e $D = (-x_0, -y_0)$. Temos pela simetria em relação ao eixo da hipérbole que as mediatrizes das cordas AB e AD serão as retas focal e não focal da hipérbole.

O eixo focal será o segmento pertencente a reta focal compreendido entre os vértices focais.

Encontrando os focos de uma hipérbole dada.

Já temos as retas focal e não focal e os vértices A_1 e A_2.

Toma-se qualquer ponto P da hipérbole.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos uma perpendicular r ao eixo $\overline{A_1A_2}$ que contenha o ponto P, chamemos de C o ponto que será o pé desta perpendicular;

Passo 2: Pelo centro O traçamos a circunferência C_1 de raio OC;

Passo 3: Tracemos pelo vértice A_2 uma perpendicular ao eixo $\overline{A_1A_2}$ na qual chamaremos de s e marquemos o ponto D que será a interseção desta perpendicular com C_1;

Passo 4: Tracemos a semirreta $\overrightarrow{OD}$;

Passo 5: Por P tracemos uma paralela a $\overline{A_1A_2}$ que interceptará $\overrightarrow{OD}$ no ponto E;

Passo 6: Tracemos a perpendicular ao eixo $\overline{A_1A_2}$ que passe pelo ponto E, e chamemos o pé desta perpendicular de G;

Passo 7: Construímos a circunferência C_2 com centro em O e raio OG , a interseção desta circunferência com o eixo imaginário serão os pontos B_1 e B_2 vértices da hipérbole;

Passo 8: Construímos a circunferência C_3 com centro em O e raio B_1A_2. As interseções desta circunferência com o eixo $\overline{A_1A_2}$ serão os focos F_1 e F_2 (ver figura 41).

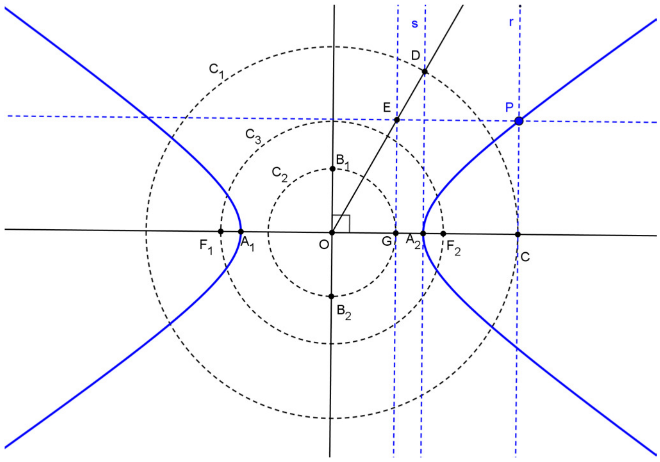

Figura 41 - Restabelecendo os focos de uma hipérbole

Justificativa.

Utilizando um sistema de coordenadas cartesiano tal que o centro da hipérbole é o ponto $O = (0,0)$, e os vértice são os pontos $(a,0)$ e $(-a,0)$.

Sejam $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole e $A_1 = (a,0)$ e $A_2 = (-a,0)$ os vértices. Na figura 42 denotaremos o ponto A_2 por A.

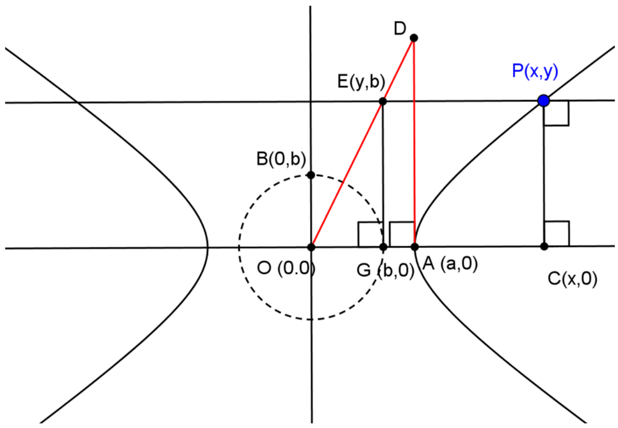

Figura 42 - Justificativa do método utilizado para encontrar os focos

Observando o triângulo OGE, temos que o cateto EG tem comprimento y

Pela semelhança entre os triângulos OAD e OGE temos:

$$\frac{DA}{EG}=\frac{OA}{OG}\Rightarrow\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{y}=\frac{a}{b}$$ (elevando ao quadrado ambos os lados)

$$\frac{x^2-a^2}{y^2}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow b^2x^2-b^2a^2=y^2a$$, temos então que:

$b^2x^2-y^2a^2=b^2a^2$ dividindo ambos os lados por b^2a^2, teremos $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Tomando $c=\sqrt{a^2+b^2}$, teremos que os pontos $F=(c,0)$ será um dos focos da hipérbole. Analogamente obteremos o outro foco.

4.6
Construções de Hipérboles por meio de seus pontos

Da mesma forma que ocorre com a Elipse pode-se obter pontos da hipérbole com régua e compasso, e construir uma boa aproximação da hipérbole ligando esses pontos.

Traçando a hipérbole conhecendo suas assíntotas e um ponto da curva

Sejam as assíntotas *r* e *s*, que se interceptam no ponto *O* que é o centro da hipérbole e um ponto *P* da hipérbole, conforme figura 43.

Procedimentos:

Passo 1: Pelo ponto *P* conhecido da hipérbole, traçamos uma reta t que interceptará a assíntota r em *A* e a assíntota s em *B*;

Passo 2: Para localizarmos um segundo o ponto da hipérbole. Tracemos por B uma circunferência de centro em *B* e raio *PA*, que cortará a assíntota s em dois pontos, o ponto Q da hipérbole será um desses dois pontos, pela construção temos que *PA* = *QB*, sendo *Q* escolhido de forma que a hipérbole fique compreendida entre as duas assíntotas;

Passo 3: Continuamos a construção traçando outras retas contenham o ponto P, ou o ponto Q, e de forma análoga localizaremos outros pontos.

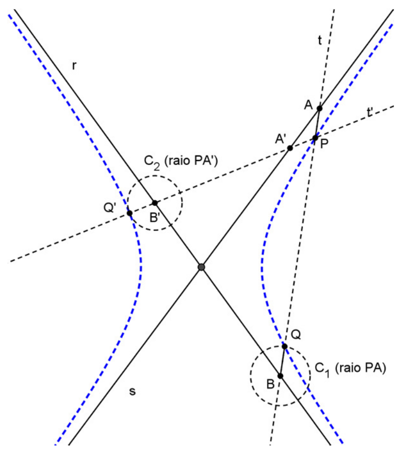

Figura 43 - Encontrando pontos da hipérbole dadas suas assíntotas

Justificativa

Seja reta *r* de equação $y = mx + k$ que corta as duas assíntotas nos pontos *A* e *B*, e a hipérbole nos pontos *P* e *Q*, temos:

A coordenada x da interseção entre a reta $y = mx + k$ e a assíntota $y = \frac{b}{a}x$ é $x_1 = \frac{ak}{b - am}$.

A coordenada *x* da intercessão entre a reta $y = mx + k$ e a assíntota $y = -\frac{b}{a}x$ é $x_2 = \frac{-ak}{b + am}$.

Então o ponto médio entre os pontos x_1 e x_2 é o ponto $x_0 = \frac{a^2mk}{a^2m^2 + b^2}$, e conforme item (4.5), onde restabelecendo o centro de uma hipérbole dada, esta coordenada coincide com a coordenada do ponto médio da corda da hipérbole que pertence a reta $y = mx + k$ e passa pelo ponto *P*, como por construção *AP* = *BQ*, temos que Q pertence a hipérbole.

Traçando uma hipérbole conhecendo seus eixos e seus focos

Sejam a reta focal $\overline{A_1A_2}$ que chamaremos de r, os vértices A_1 e A_2 e os focos F_1 e F_2 de uma hipérbole.

Procedimentos:

Passo 1: Marquemos um ponto K qualquer em r, estando a esquerda de F_1 ou a direita de F_2, de preferência para começarmos escolheremos este ponto próximo à F_1;

Passo 2: Com centro no foco F_1 tracemos uma circunferência C_1 de raio KA_1 e com centro no foco F_2 tracemos uma circunferência C_2 de raio KA_2, os pontos de interseções P_1 e P_2 destas circunferências serão pontos do ramo esquerdo da hipérbole;

Passo 3: Com centro no foco F_1 tracemos uma circunferência C_3 de raio KA_2 e com centro no foco F_2 tracemos uma circunferência C_4 de raio KA_1, os pontos de interseções P_3 e P_4 destas circunferências serão pontos do ramo direito da hipérbole;

Analogamente ao escolhermos outros pontos mais a esquerda de F_1 do eixo $\overline{A_1A_2}$ determinamos outros pontos, quanto maior o número de pontos pertencente à hipérbole obtivermos, mais perfeita será nossa construção (ver figura 44).

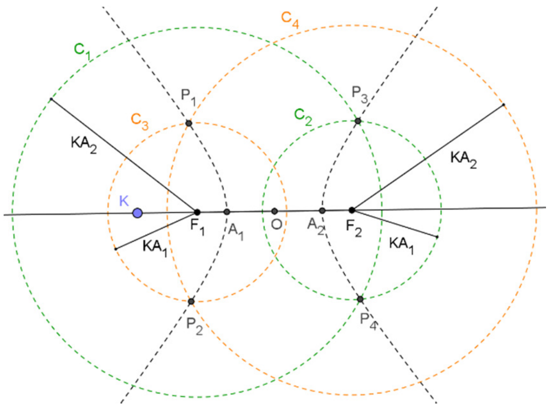

Figura 44 - Traçando uma hipérbole dados seus eixos e focos

Justificativa:

Temos que:

F_1P_1 mede KA_1, pois é raio do círculo C_1 de centro em F_1.

F_2P_1 mede KA_2, pois é raio do círculo C_4 de centro em F_2.

Como o comprimento $A_1A_2 = KA_2 - KA_1$, temos que o ponto P pertence a hipérbole cujo focos é F_1 e F_2 e eixo focal $\overline{A_1A_2}$.

Traçando uma hipérbole sendo dados os dois eixos

Conhecendo os eixos podemos achar os focos usando o Teorema de Pitágoras e aplicar a construção anterior para obter os pontos da hipérbole. Segue abaixo na figura 45 uma construção que não depende que conheçamos os focos.

Seja $\overline{A_1A_2}$ de comprimento $2a$ o eixo focal e $\overline{B_1B_2}$ de comprimento $2b$ o eixo imaginário de uma hipérbole.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos a reta focal;

Passo 2: Com o centro em O e raio OB_1 tracemos uma circunferência C_1 que cortara o eixo real nos pontos X_1 e X_2, fixaremos nossa construção no lado do ponto X_2;

Passo 3: Escolhemos na reta do eixo focal a direita do vértice A_2, um ponto C e por este ponto traçaremos uma reta perpendicular ao eixo real , chamemos de r esta reta;

Passo 4: Construiremos uma circunferência C_2 de raio OC e centro em O;

Passo 5: Tracemos perpendicular ao eixo focal pelo vértice A_2 a qual chamaremos de s, marcando o ponto E que será a interseção deste ponto com a circunferência C_2;

Passo 6: Ligamos por uma semirreta os pontos OE, chamemos de u esta semirreta;

Passo 7: Tracemos perpendicular ao eixo focal pelo ponto X_2 a qual chamaremos de t, marcando o ponto F que será a intercessão deste ponto com a semirreta s, e por este ponto F tracemos uma reta paralela ao eixo focal que interceptará a reta r no ponto P. Este ponto P é um ponto da hipérbole desejada;

Passo 8: Repetiremos este processo marcando outros pontos sobre a reta focal e analogamente encontraremos outros pontos pertencente à hipérbole (ver figura 45).

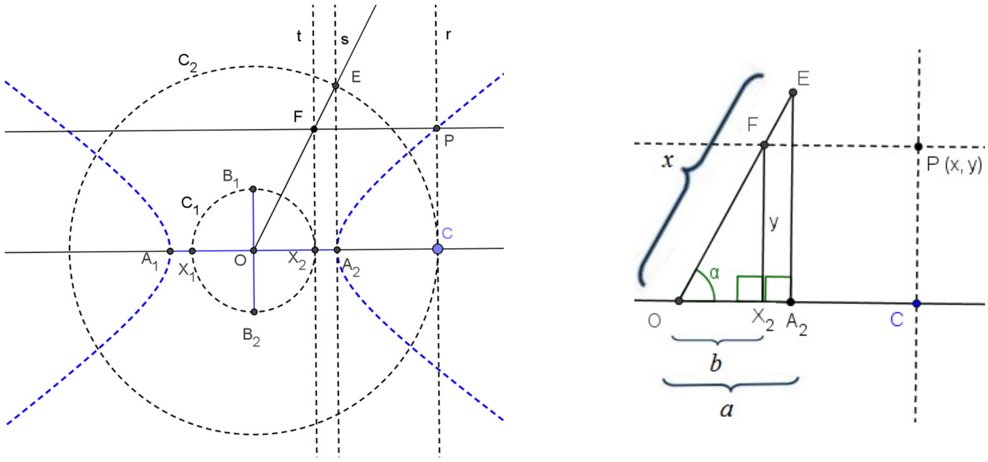

Figura 45 - Traçando uma hipérbole sendo dados os dois eixos

Justificativa:

Observamos que por Pitágoras temos que: o segmento $OF = \sqrt{y^2 + b^2}$ e o segmento $A_2E = \sqrt{x^2 - a^2}$, então:

Observando o triângulo OA_2E, temos $sen\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$;

Observando o triângulo OX_2F, temos $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{y^2 + b^2}}$.

Então: $\begin{cases} sen\alpha = \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{y^2 + b^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sen^2\alpha = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2} \\ \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{y^2 + b^2} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2 - a^2}{x^2} + \dfrac{b^2}{y^2 + b^2} = 1$

$$\frac{x^2y^2 - a^2y^2 + x^2b^2 - a^2b^2 + x^2b^2}{x^2y^2 + x^2b^2} = 1 \Rightarrow \cancel{x^2y^2} - a^2y^2 + \cancel{2}x^2b^2 - a^2b^2 = \cancel{x^2y^2} + \cancel{x^2b^2} \Rightarrow$$

$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ dividindo ambos os lados por a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Traçando a hipérbole conhecendo seus focos e o comprimento do eixo focal

Sejam os pontos F_1 e F_2 que serão os focos, A_1 e A_2 que serão os vértices da Hipérbole H, temos que a distância focal $d(F_{1,}F_2) = 2c$ e eixo focal $d(A_{1,}A_2) = 2a$. Observemos que $2c > 2a$.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos uma circunferência de centro F_1 e raio $2a$;

Passo 2: Marquemos um ponto A qualquer da circunferência;

Passo 3: Tracemos a reta que passa pelos pontos A e F_1 a qual chamaremos de r e tracemos o segmento AF_2.

Seja m a mediatriz do segmento AF_2, o ponto P de intercessão entre a mediatriz m e a reta r será um ponto pertencente a hipérbole de focos F_1 e F_2 e vértices A_1 e A_2. Veja a figura 46.

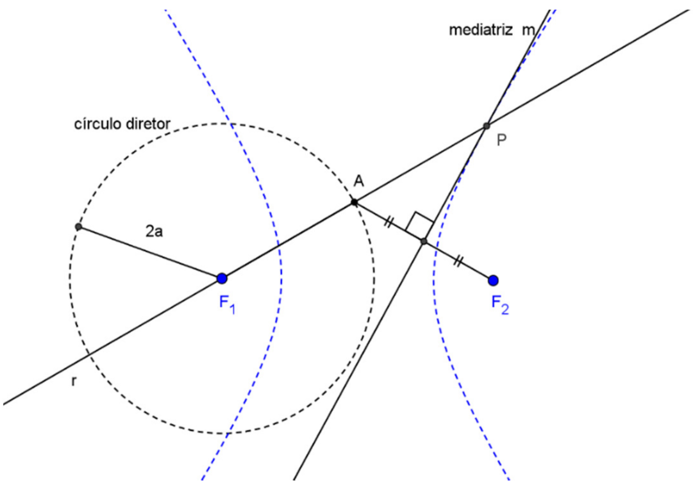

Figura 46 - Hipérbole dados seus focos e o comprimento do eixo focal

Justificativa:

Como o ponto P pertence a mediatriz do segmento AF_2, então $d(A,P) = d(P,F_2)$, temos também que $2a = d(F_1, P) - d(A, P)$ e, $d(F_1,P) = 2a(raio) + d(A,P) \Rightarrow 2a$, logo $2a = d(F_1,P) - d(F_2,P)$, mostrando assim que P pertence a hipérbole de focos F_1 e F_2 e eixo $2a$.

Observemos a semelhança desta construção com a construção da elipse no item (3.5-Traçado de uma elipse por meios de pontos conhecendo seus focos e o comprimento do eixo focal), em resumo temos um ponto do espaço F_1 e traçamos com centro em F_1 uma circunferência C_1 de raio $2a$, escolhemos um segundo ponto F_2 do espaço que pode estar no interior ou exterior de C_1.

Escolhemos um ponto A de C_1 e concluímos a construção. Se o ponto F_2 for colocado no interior de C_1 a figura construída será uma elipse, e se o ponto F_2 for colocado no exterior de C_1 a figura construída será uma hipérbole.

4.7 Traçado de tangentes à hipérbole

4.7.1 Traçando a tangente e a normal por um ponto dado em uma hipérbole

Seja a hipérbole de eixo focal AB de comprimento $2a$ e focos F_1 e F_2;

Seja P, um ponto da hipérbole, que desejamos que passe a reta tangente t e a reta normal n.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos as semirretas F_1P e F_2P;

Passo 2: Marquemos um ponto Q no segmento F_1P, de tal maneira que $QP = F_2P$;

Passo 3: Tracemos a mediatriz m do triângulo QPF_2. Esta mediatriz será a reta tangente a hipérbole pelo ponto P. Veja a construção na figura 47.

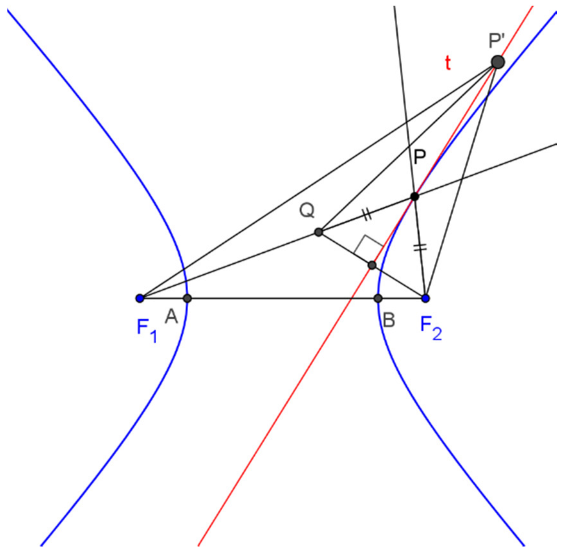

Figura 47 - Traçando a tangente e a normal por um ponto dado em uma hipérbole

Justificativa:

Para que a reta t (mediatriz de QF_2) seja tangente a hipérbole no ponto P teremos que mostrar que P é o único ponto de intercessão a t e a hipérbole.

Observemos que $F_1Q= 2a$, pois $|(d(F_1,Q)+d(Q,P))-d(F_2,P)|=2a$, como por construção $d(Q,P)=d(F_2,P)$, temos:

$|(d(F_1,Q)+d(Q,P))-d(Q,P)|=2a$, logo $|(d(F_1,Q)|=2a$

Suponhamos que exista um ponto P' pertencente também a t e a hipérbole, então $d(P',Q)=d(P',F_2)$ e $|d(F_1,P')-d(F_2,P')|=2a$ e por hipótese $2a=|d(F_1,P)-d(F_2,P)|$, logo $|d(F_1,P')-d(P',Q)|=2a$, absurdo, pois pela desigualdade triangular $d(P',Q)+d(Q,F_1)>d(F_1,P')$, como $d(Q,F_1)=2a$ temos $2a>d(F_1,P')-d(P',Q)$, logo a reta t é tangente à hipérbole.

Notemos que como o triangulo PQF_2 por construção é isósceles, então a mediatriz m coincide com a bissetriz do triângulo QPF_2.

4.7.2
Traçando duas tangentes a uma hipérbole por um ponto P dado fora da curva

Seja a hipérbole de focos F_1 e F_2, eixo focal AB de comprimento $2a$, e um ponto P qualquer que não pertence a hipérbole.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos a circunferência C_1 de centro em F_1 e raio igual ao eixo focal AB.

Passo 2: Tracemos a circunferência C_2 de centro em P e raio PF_2.

Passo 3: Marquemos os pontos G e H de intercessão entre os dois círculos

Passo 4: Ligamos os segmentos GF_2 e HF_2,

Passo 5: As mediatrizes dos segmentos GF_2 e HF_2 se interceptarão no ponto P e serão as duas tangentes procuradas (ver figura 48).

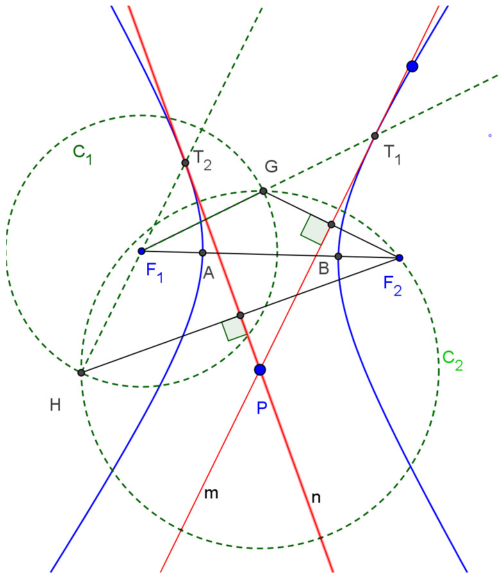

Figura 48 - Traçando duas retas tangente à hipérbole

Justificativa:

Como P é centro do circunferência C_2, logo qualquer mediatriz de cordas desta circunferência passará necessariamente por P, logo as mediatrizes das cordas GF_2 e HF_2, contém o ponto P.

Mostremos agora que mediatriz do segmento GF_2 a qual chamaremos de m é tangente à hipérbole.

Seja T_1, ponto de intercessão entre a semirreta F_1G e a mediatriz m, logo . $d(T_1,G)=d(T_1,F_2)$.

Temos por construção que $d(G,F_1)=2a$, então como:

$d(F_1,T_1)=d(F_1,G)+d(G,T_1)$ implica $d(F_1,T_1)-d(G,T_1)=d(F_1,G)$ $d(F_1,T_1)-d(F_2,T_1)=2a$, temos então que T_1 pertence a hipérbole e a mediatriz de GF_2, temos que pelo item (4.7.1), este ponto T_1 é único ponto da mediatriz m que intercepta a hipérbole, logo ela é a tangente traçada pelo ponto P.

Mostremos que a mediatriz do segmento HF_2 a qual chamaremos de n é tangente à hipérbole.

Seja T_2, ponto de intercessão a semirreta HF_1 e a mediatriz n, temos por construção que $d(F_1,H)=2a$ e $d(H,T_2)=d(F_1,H)+d(F_1,T_2)$ como T_2 pertence a mediatriz n tem-se $d(F_2,T_2)=d(H,T_2)$, então:

$d(F_2,T_2)=d(F_1,T_2)+d(F_1,H)$, logo $d(F_2,T_2)-d(F_1,T_2)=2a$, então T_2 pertence a hipérbole, e pelo item (4.6.1) este ponto T_2 é único ponto da mediatriz n que intercepta a hipérbole, logo a mediatriz n é a tangente traçada pelo ponto P.

4.8
Equipamentos para construções de hipérboles

Construir uma hipérbole utilizando barbante , Régua e pregos ou alfinetes do tipo percevejo

Definimos o lugar onde serão os focos A e B da hipérbole
Faremos um furo em uma das extremidades da régua e na outra colaremos um barbante, tanto o furo quanto a fixação do barbante devem estar próximo as quinas da régua, conforme figura 49.

Se o comprimento do barbante for x cm, e o comprimento do eixo maior da hipérbole a ser construída for $2a$ cm, então cortaremos o barbante de maneira que o comprimento da régua x seja igual a $2a$ mais o comprimento do barbante.

Figura 49 - Construção de uma hipérbole usando régua e barbante

Para desenhar o ramo direito da hipérbole,   prenderemos a régua no foco esquerdo da hipérbole, de maneira que a régua possa ficar girando em torno deste ponto, amarraremos a ponta solta do barbante no foco direito da hipérbole.

Percorremos com um lápis o barbante esticado na direção da régua,, deixando-o encostado na mesma, conforme a figura 50. Veremos que a curva construída será uma hipérbole.

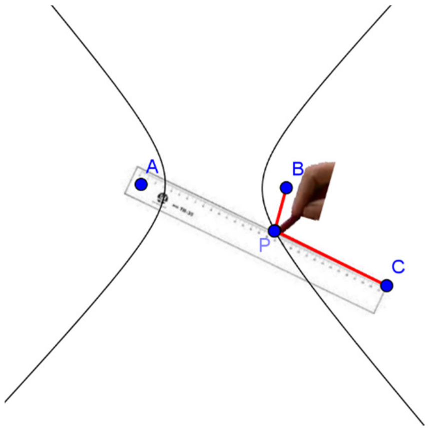

Figura 50 - Construção de uma hipérbole usando régua e barbante

.

É importante lembrar que a distância entre os focos = $2c$ deve ser maior que o eixo focal = $2a$ (distância entre os vértices).

Justificativa:

Sejam:

m = Comprimento da régua; $2a$ = Comprimento do eixo focal;

x = Comprimento do barbante, temos $m = 2a + x$. (4.3)

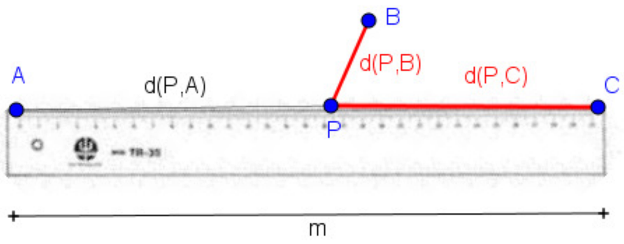

Figura 51 - Barbante deslizando na régua

Observando a figura 51. Seja P um ponto obtido em um instante qualquer da construção, temos:

$$d(P,C) = m - d(P,A) \tag{4.4}$$

$$x = d(P,B) + d(P,C) \Rightarrow d(P,C) = x - d(P,B) \tag{4.5}$$

De (4.4) e (4.5) temos: $m - d(P,A) = x - d(P,B) \Rightarrow d(P,A) - d(P,B) = m - x$, logo por (4.3) temos que $d(P,A) - d(P,B) = 2a$.

Construir uma hipérbole utilizando um instrumento na forma de losango

O instrumento da figura 52 , trata-se de um losango ABCD articulado, que possui em seu interior, duas hastes AQ e CQ de mesmas medida.

Os vértices A e C do losango deslizaram sobre um trilho r, e o vértice Q (interseção entre as hastes AQ e CQ) deslizará sobre um trilho s que está inclinado em relação ao trilho r.

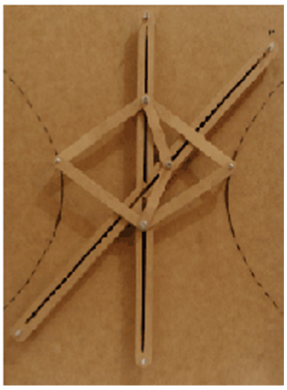

Figura 52 - Hipérbole utilizando um instrumento na forma de losango

(Fonte: http://rpm.org.br/cdrpm/80/3.html)

Funcionamento:

Observemos a figura 53. Ao percorrer o ponto Q sobre o trilho s, os pontos A e C deslizarão sobre o trilho r, fazendo que os outros dois vértices do losango B e D movimentem-se traçando uma hipérbole.

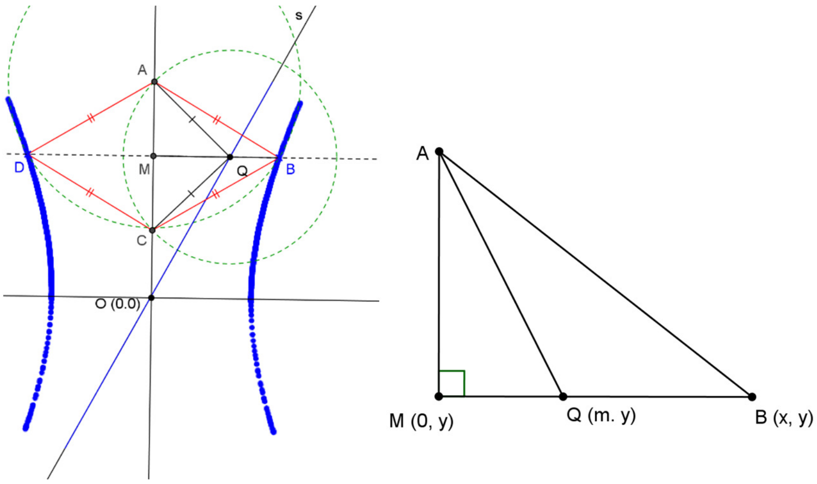

Figura 53 - Justificativa do instrumento que possui a forma de um losango

Justificativa:

Faremos nossa justificativa observando o ramo direito da hipérbole que será traçada pelo ponto B.

Na demonstração do funcionamento do mecanismo, utilizaremos coordenadas do plano cartesiano e mostraremos que os pontos que o ponto B percorre pertencem a equação de uma hipérbole.

Fixando a reta r sobre o eixo cartesiano y, e o ponto de intercessão da reta r com a reta inclinada s na origem do plano, desta forma a reta s terá uma equação $y = kx$, temos as coordenados dos pontos: $B = (x, y)$ e $Q = (m, y)$

Como distâncias fixas teremos os lados do losango ABCD, $AB = BC = CD = DA = a$ e por construção segmentos $AQ = QC = b$,

Variando temos o segmento $MQ = m$ e $MB = x$

Do triângulo AMQ temos: $AQ^2 = AM^2 + MQ^2 \Rightarrow AM^2 = AQ^2 - MQ^2$

Do triângulo AMB temos: $AB^2 = AM^2 + MB^2 \Rightarrow AM^2 = AB^2 - MB^2$

Logo: $AQ^2 - MQ^2 = AB^2 - MB^2 \Rightarrow b^2 - m^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow m^2 = x^2 + b^2 - a^2$

Como o ponto $Q= (m, y)$ pertence a reta s de equação $y = kx$, então neste ponto Q tem-se: $\mathrm{y}^2 = k^2\mathrm{m}^2 \Rightarrow \mathrm{y}^2 = k^2(x^2 + b^2 - a^2) \Rightarrow \mathrm{y}^2 = k^2x^2 + k^2b^2 - k^2a^2$

$y^2 = k^2x^2 - k^2(a^2 - b^2) \Rightarrow k^2x^2 - y^2 = k^2(a^2 - b^2)$

Dividindo ambos os lado por $k^2(a^2 - b^2)$ teremos: $\dfrac{x^2}{(a^2 - b^2)} - \dfrac{y^2}{k^2(a^2 - b^2)} = 1,$

que trata-se de equação de uma hipérbole.

Observa-se ainda, uma das assíntotas dessa hipérbole é a reta $y = kx$ que é a reta s, pois quando o ponto Q está na coordenada (0,0) teremos que o eixo imaginário tem o valor de b, logo o eixo focal será $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, então no caso das hipérboles que possui seu centro na origem do plano cartesiano e eixo focal paralelo ao eixo das abcissas temos que $y = \dfrac{b}{a}x$ é a equação de uma das assíntotas, então fazendo as substituições teremos que $y = \dfrac{kc}{c}x \Rightarrow y = kx$.

Construir uma hipérbole a partir de seus focos, utilizando um instrumento articulado.

O mecanismo da figura 54, trata-se de um instrumento que será fixado em dois pontos que serão os focos da hipérbole.

A haste PF_1, irá girar sobre o foco F_1;

A haste PF_2, irá girar sobre o foco F_2;

A haste AB tem comprimento fixo, suas extremidades A e B estão presas de maneira que possam girar nas hastes PF_1 e PF_2 respectivamente.

As hastes PF_1 e PF_2 também estão ligadas por um ponto P de interseção entre elas, de maneira que o ponto P possa deslizar sobre o trilho destas duas hastes.

Ambas estão ligadas pelas haste AB de comprimento fixo e pelo ponto P que deslizará sobre a intercessão destas duas hastes (PF_1 e PF_2).

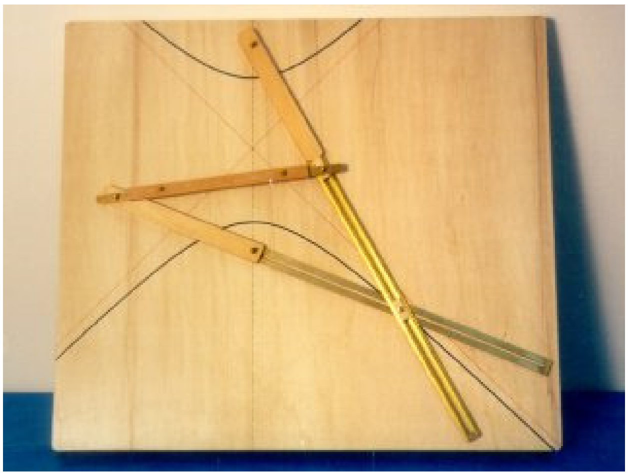

Figura 54 - Instrumento preso aos focos da hipérbole

(Fonte: http://archivioweb.unimore.it/theatrum/macchine/_00the.htm)

Funcionamento

Quando movimentamos o ponto A de forma circular, ele descreverá um arco circunferência de raio AF_1, obrigando o ponto B fazer um movimentar de maneira a descrever um arco de circunferência de raio BF_2. Com estes movimentos o ponto P de intercessão entre as hastes PF_1 e PF_2 deslizará sobre estas hastes, descrevendo uma parte da hipérbole. Vejam as figuras 54 e 55.

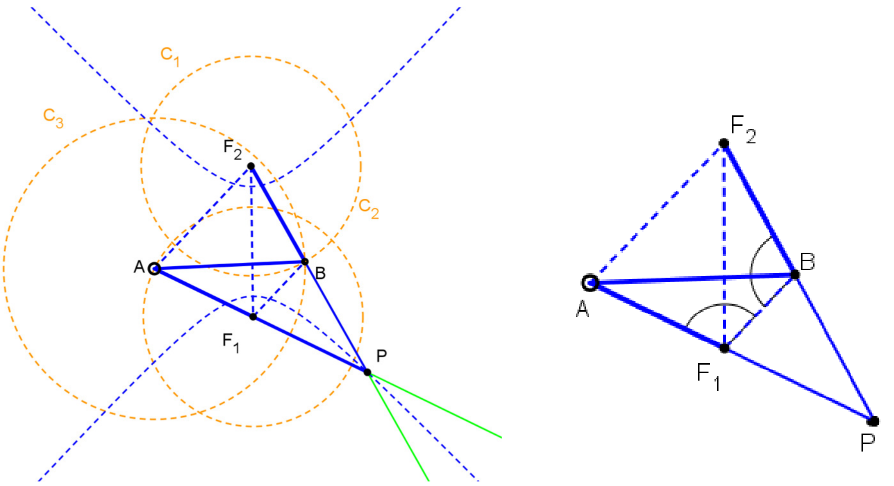

Figura 55 - Justificativa da construção que utiliza Instrumento preso aos focos da hipérbole

Justificativa:

Por construção temos que $F_2B = F_1A$ = raios das circunferências $C_1 = C_2$ que são circunferências equivalentes, e que o comprimento AB é igual ao comprimento F_1F_2 , a circunferência C_3 terá raio = F_1F_2, (ver figura 55).

Observemos a congruência entre os triângulos $\Delta BF_2F_1 \equiv \Delta F_1BA$ por LLL então $F_1\hat{B}F_2 = B\hat{F}_1A$,logo os ângulos externos $B\hat{F}_1P$ e $F_1\hat{B}A$ são iguais, portanto os triângulos APF_2 e F_1PB são é isósceles. Destes triângulos temos que $PF_1 = PB$, $PF_2 = PA$ e $PF_2 = PB + BF_2$, então $PF_2 = PF_1 + BF_2 \Rightarrow PF_1 - PF_2 = -BF_2$ que é uma constante.

Como já mencionado o instrumento deve ser remontado para traçar toda a hipérbole.

5
Parábola

Seja *d* uma reta dada e *F* um ponto fora dela. A Parábola de foco *F* e diretriz *d* é o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes do ponto fixo *F* e da reta diretriz *d*, ou seja, se o ponto *P* pertence à parábola, temos $d(P,F)=d(P,r)$.

5.1
Elementos da parábola

Na figura 56, temos os elementos que compõe a parábola:

Foco: é o ponto *F*;
Diretriz: é a reta *r*;
Eixo focal: é a reta que passa pelo foco e é perpendicular a diretriz;
Vértice: é o ponto *V* de intercessão entre a parábola e o eixo focal;
Parâmetro da parábola: é o valor 2*p* que é a distância entre o foco e a diretriz.

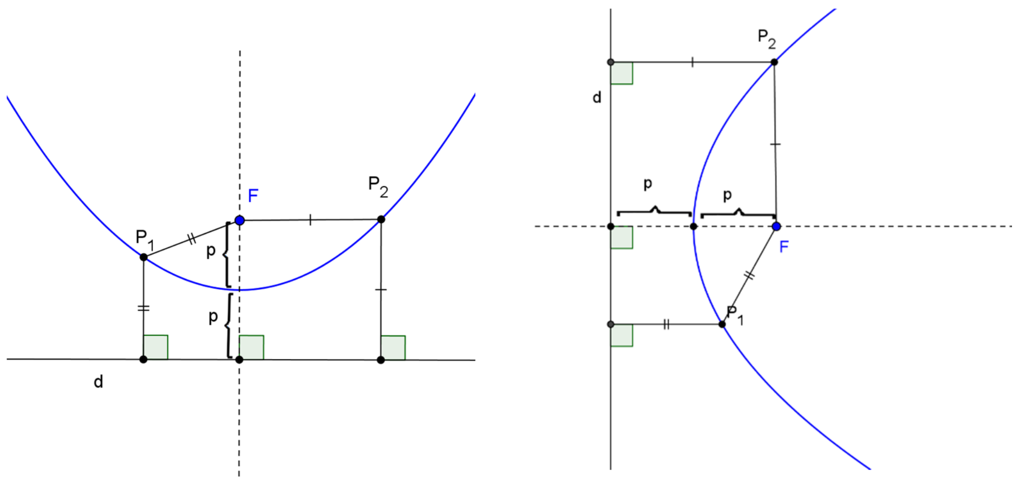

Figura 56 - Parábola

5.2
Equação reduzida da parábola

Para mostrarmos a equação reduzida da parábola utilizaremos o plano cartesiano , colocamos o vértice V na origem, ou seja $V = (0,0)$ e chamaremos o parâmetro de p, ou seja, , $d(F,r) = 2p$, teremos também: $F = (0, p)$ como foco da parábola, r como reta diretriz de equação $y = -p$ e $P = (x, y)$ um ponto qualquer da parábola. $P \in parábola \Leftrightarrow d(P,F) = d(P,r)$ (5.1)

Temos: $d(P,F) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2}$ e $d(P,r) = |y + p|$, então como por definição $d(P,F) = d(P,r)$.

teremos $\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|$, elevando ao quadrado

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 = \left(|y + p|\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2 \Rightarrow x^2 = 4yp \Rightarrow y = \frac{x^2}{4p}.$$

Para mostrarmos que equação $y = \frac{x^2}{4p}$ é uma parábola.

Temos: $y = \frac{x^2}{4p} \Rightarrow x^2 = 4py.$

Como $(y+p)^2 - (y-p)^2 = 4py$ tem-se que $(y+p)^2 - (y-p)^2 = x^2$,

logo $x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2 \Rightarrow (x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$

Que é equivalente a $d(P,F) = d(P,r)$.

5.3
Simetria na parábola

A Parábola é simétrica em relação à reta focal.

Demonstração:

Mostraremos que se $P = (x_0, y_0)$ satisfaz a equação, $y = \frac{x^2}{4p}$.

Então os pontos $P_1 = (-x_0, y_0)$, também satisfazem. Como P satisfaz a equação

$y = \frac{x^2}{4p}$ então: $y_0 = \frac{x_0^{\,2}}{4p}$.

Substituindo o ponto $P = (x_0, y_0)$ por $P_1 = (-x_0, y_0)$

teremos $y_0 = \frac{(-x_0)^2}{4p} = \frac{x_0^{\,2}}{4p}$.

Concluímos que a parábola é simétrica em relação ao eixo focal.

5.4
Restabelecendo o foco, eixo focal e diretriz de uma parábola

Determinando o eixo focal e o vértice de uma parábola dada

Procedimentos:

Passo 1: Traçam-se duas cordas *AB* e *CD* quaisquer, sendo paralelas entre si, marcando seus pontos médios *M* e *N* respectivamente;

Passo 2: Tracemos a reta *r* que passa pelos pontos *M* e *N;*

Passo 3: Tracemos uma reta *s* perpendicular a *r* de tal maneira que corte a parábola em 2 pontos *G* e *H*;

Passo 4: Seja *O* ponto médio do segmento *GH;*

Passo 5: Pelo ponto *O* tracemos uma reta *t* paralela a reta *r*, esta reta será o eixo da parábola;

Passo 6: O ponto de intercessão da reta *t* com a parábola será o vértice *V* da parábola. Veja a figura 57

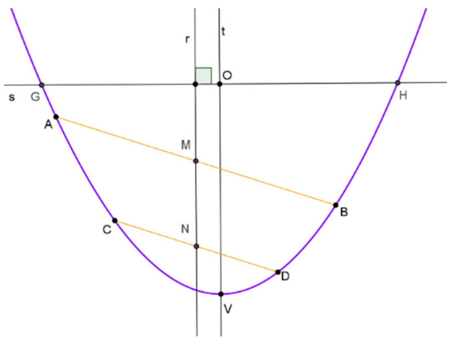

Figura 57 - Encontrando a reta focal da parábola

Justificativa:

Seja uma parábola de vértice na origem do plano cartesiano de equação $y = \frac{x^2}{4p}$, seja uma reta secante de equação $y = mx + k$ .Temos que a intercessão da parábola e a reta dada será: $\frac{x^2}{4p} = y = mx + k \Rightarrow x^2 - 4mpx - 4mk = 0$ que tem como raízes: $\frac{4mp \pm \sqrt{16m^2p^2 - 4(-4mpk)}}{2}$ que simplificando temos: $2mp \pm 2\sqrt{m^2p^2 + mpk}$, encontrando a abscissa do ponto médio destes dois pontos: $\frac{2mp + 2\sqrt{m^2p^2 + mpk} + 2mp - 2\sqrt{m^2p^2 + mpk}}{2} = 2mp.$

Logo para qualquer reta paralela a reta $y = mx + k$ os pontos médios das intercessões das retas com a parábola passarão pela reta $x = 2mp$.

Como a diretriz tem equação $y = -2p$, segue que a reta $x = 2mp$ é perpendicular a diretriz, logo paralela ao eixo focal.

Pela simetria da parábola em relação a reta focal, temos que, ao traçarmos a paralela a $x = 2mp$, pelo ponto O, estamos trançando a reta focal da parábola.

Determinando o foco e diretriz de uma parábola dada

Dada uma parábola desenhada, vamos obter seu foco e sua diretriz.

Conhecendo o eixo da parábola pelo item anterior, determinaremos o seu foco.

Procedimentos:

Passo 1: Marquemos um ponto A no interior da parábola pertencente ao seu eixo, e por este ponto tracemos uma reta r perpendicular a este eixo que cortará a curva nos pontos P e Q;

Passo 2: Tracemos por V uma circunferência de raio VA e marquemos no eixo da parábola o ponto B exterior a parábola tal que $VA = VB$;

Passo 3: Escolhemos entre os pontos P e Q um ponto, por exemplo o P, e por este ponto tracemos uma reta s que interceptará o eixo da parábola no ponto B;

Passo 4: Tracemos a mediatriz de PB que interceptará o eixo no ponto F, temos que este ponto F será o foco da parábola. (ver figura 58)

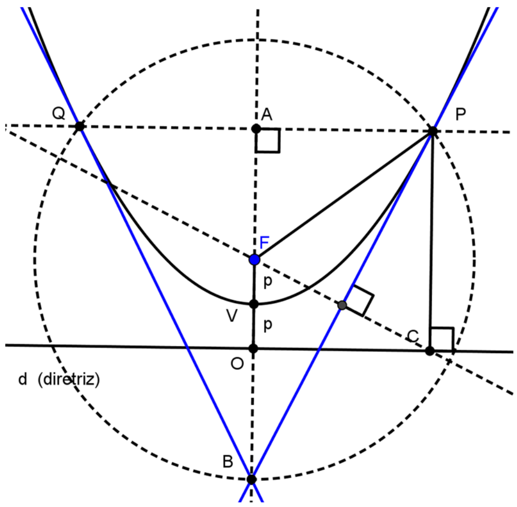

Figura 58 - Encontrando o foco e a diretriz de uma parábola

Justificativa:

1) A distância entre os pontos PF e QF, são iguais pela simetria da parábola em relação ao seu eixo.
2) Mostraremos que o quadrilátero $FPCB$ é um losango:

Sejam, o ponto C, pé da perpendicular traçada da diretriz que contém o ponto P, O, ponto de interseção da diretriz com o eixo da parábola.

Temos:

a) $FP = PC$ (definição de parábola)

b) A reta que passa por PC é paralela ao eixo da parábola, pois ambas são perpendiculares à diretriz, logo por ângulos alternos internos temos $F\hat{B}P = C\hat{P}B$.

c) Temos $FB = BC$, como pelo item 5.6.1, a tangente pelo ponto P coincide com a mediatriz do segmento FC, então qualquer ponto da mediatriz equidista dos pontos F e C.

d) Os triângulos *FPB* e *CPB* são congruentes por LLL, e das igualdades de ângulos $F\hat{B}C = C\hat{P}B$, temos que *FPCB* é um losango.

Temos $FP = BC$ pelo item d, $AP = OC$ por construção, os triângulos *APF* e *OCB são retângulos em A e O,* respectivamente. Então os triângulos *APF* e *OCB são congruentes por LAL*, logo $AF = OB$.

Pelos exposto temos a igualdade entre o comprimento dos segmentos: $AV = VB$.

Então quando traçamos a mediatriz dos pontos *PB* estamos traçando a diagonal do losango *FPCB*.

Para encontrar a diretriz utilizaremos a definição de parábola que informa que a distância do foco ao vértice é igual a distância do vértice à diretriz.

5.5
Construções de Parábolas por meio de seus pontos

Traçando uma parábola conhecendo seu foco e sua reta diretriz

Seja d a reta diretriz e F o foco da parábola, conforme a figura 59.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos o eixo da parábola, que uma perpendicular a reta diretriz passando por *F*, seja A o pé deste perpendicular, temos o ponto médio entre A e *F* é o ponto V que será o vértice da parábola;

Passo 2: Tracemos uma circunferência C_1 de centro *F* e raio *r*, sendo *r* maior que *VF*;

Passo 3: Tracemos uma circunferência C_2 de centro A e raio *r* e marquemos o ponto D de intercessão de C_2 com o eixo da parábola;

Passo 4: Por *D* tracemos uma reta paralela da diretriz *d.* Os pontos de intercessão D_1 *e* D_2 desta reta com a circunferência C_1, serão os pontos da parábola.

Justificativa:

Mostremos que os pontos D_1e D_2 pertencem a parábola de Foco *F* e diretriz *d*.

Por construção temos que r é raio das circunferências C_1 e C_2, logo $r = d(D, A) = d(D_1, d) = d(F, D_1)$, temos por definição que D_1 pertence a parábola de foco *F* e diretriz *D*, por analogia teremos que D_1 também pertence a mesma parábola. Repetiremos o processo escolhendo outras medidas para o raio *r*.

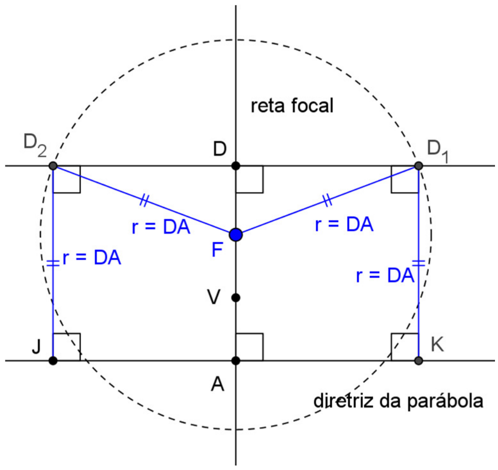

Figura 59 - Encontrando os pontos da parábola, conhecendo seu foco e reta diretriz

.

Temos abaixo na figura 60, um segundo método, sendo que sem desenhar o eixo.

Dado um ponto *F* que será o Foco e uma reta *d* que será a diretriz da parábola.

Procedimentos:

Passo 1: Marquemos um ponto *A* qualquer da reta *d*. Tracemos o segmento *FA* ligando o foco *F* ao ponto *A*;

Passo 2: Tracemos a mediatriz do segmento *FA* e por *A* tracemos uma reta r perpendicular a diretriz *d;*

Passo 3: O ponto *P* de intercessão entre a reta r e a mediatriz do segmento *FA* será um ponto da parábola;

Passo 4: Repetimos a mesma construção para outros pontos A_1, *A*2 ... da diretriz d obteremos mais pontos da parábola.

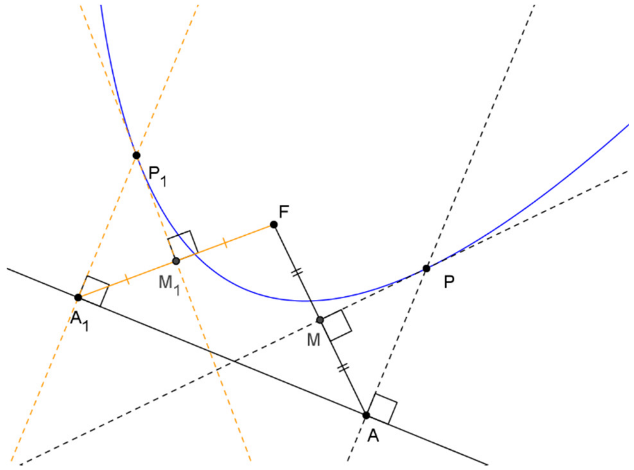

Figura 60 - Encontrando os pontos da parábola, conhecendo seu foco e reta diretriz, segunda construção

Justificativa:

Qualquer ponto da mediatriz do segmento FA é equidistante dos pontos F e A, então se P é um ponto da mediatriz temos que $d(P,A)=d(P,F)$, como A é o pé da perpendicular entre a reta r e a diretriz d, temos que $d(P,A)=d(P,d)$, logo $d(P,F)=d(P,d)$, mostrando assim que o ponto P pertence a parábola.

5.6 Tangentes à Parábola

5.6.1 Traçando por um ponto P da parábola sua tangente

Seja o ponto F, foco da parábola, e d reta diretriz da parábola. Tomemos um ponto P da parábola a qual desejamos traçar a tangente.

Procedimentos:

Passo 1: Tracemos por P a circunferência PF que cortará a diretriz no ponto A, temos que PF = PA, não existe outro ponto de intercessão da circunferência traçada e a reta diretriz e o segmento PA é perpendicular a reta diretriz, pois por hipótese P pertence a parábola.

Passo 2: Tracemos a mediatriz do segmento FA, temos que esta mediatriz será a tangente a parábola no ponto P. Veja a figura 61.

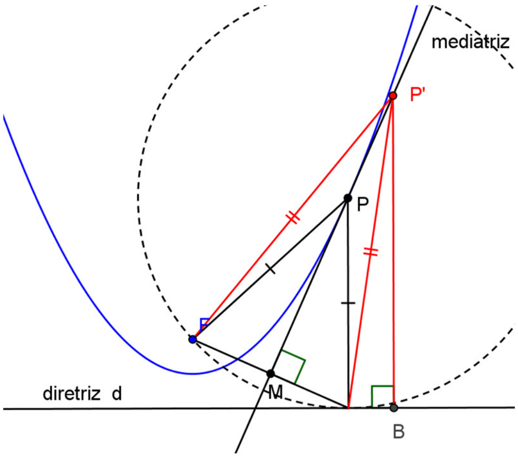

Figura 61 - Traçando por um ponto P da parábola sua tangente

Justificativa:

Para que a reta m (mediatriz de FPA) seja tangente a hipérbole no ponto P teremos que mostrar que P é o único ponto de intercessão entre a m e a parábola.

Observemos que como P pertence a parábola, temos $FP = PA$, sendo PA a distância entre o ponto P e a reta diretriz, logo o segmento PA é perpendicular a reta diretriz.

Suponhamos que exista um ponto P' pertencente também a m e a parábola, então existe um ponto B que será o pé da perpendicular traçada da diretriz contendo o ponto P'.

O Fato de P' pertencer a mediatriz de FPA nos dá que $d(P',F) = d(P',A)$, pois todo ponto da mediatriz de FPA equidista dos pontos F e A.

O Fato de P' pertencer a parábola no dá que $d(P',F) = d(P',B)$, logo $d(P',A) = d(P',B)$, absurdo, pois como PA perpendicular a diretriz d pelo ponto A, então não pode haver um outro segmento $P'A$, também perpendicular a diretriz d pelo mesmo ponto A.

5.6.2
Traçando duas retas tangentes a parábola por um ponto fora da curva

Seja d reta diretriz , o ponto F foco da Parábola e o ponto P exterior a parábola.

Procedimentos:

Passo 1: Com centro em P construa uma circunferência de raio PF, e marque os pontos A e B de interseção desta circunferência com a reta diretriz;

Passo 2: Tracemos os segmentos FA e FB;

Passo 3: Tracemos a mediatriz do segmento FA e FB, estas mediatrizes passarão pelo ponto P e serão tangentes à parábola. Veja na figura 62.

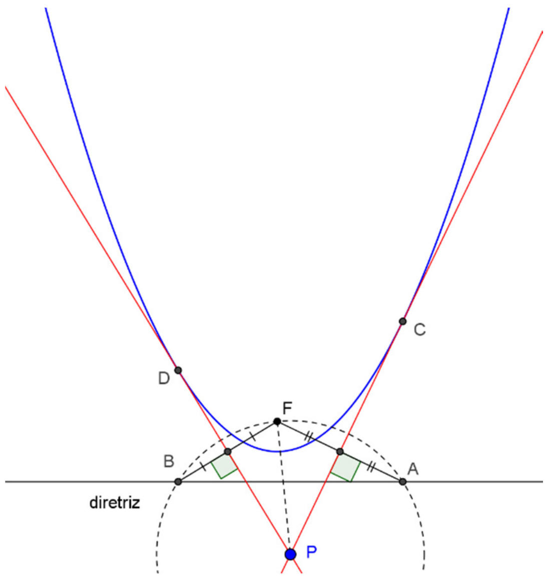

Figura 62 - Traçando duas tangente à parábola por um ponto exterior

Justificativa:

Como os pontos A e B pertencem reta diretriz então como já mostrado em (5.6.1), temos que as mediatrizes de FB e FA são tangentes a parábola, como estes segmentos são cordas da circunferência de centro em P e raio PF temos que as mediatrizes de FB e FA passam pelo centro P da circunferência.

5.7
Traçando parábolas utilizando instrumentos

Traçando uma parábola utilizando régua e Barbante

Para esta construção necessitaremos de uma ripa ou régua para servir de base, um esquadro, um alfinete, cola quente e barbante. Na figura 63 temos a construção

Procedimentos

Passo 1: Sobre uma folha de cartolina pregamos um prego em um ponto F que será o foco da parábola;

Passo 2: Colocamos a régua ou pipa sobre a folha a uma distância $2p$ do ponto F;

Passo 3: Colocamos o esquadro sobre a ripa de forma que sua hipotenusa fique do lado oposto ao ponto F;

Passo 4: Colamos na extremidade superior do esquadro a ponta de um barbante;

Passo 5: Amarramos o barbante no prego (ponto F) de tal maneira que o comprimento do barbante seja o mesmo comprimento do esquadro;

Passo 6: Usando a ponta do lápis para manter o barbante esticado e deslizando o esquadro sobre a régua, a ponta do lápis descreverá uma parábola. Veja a construção na figura 63.

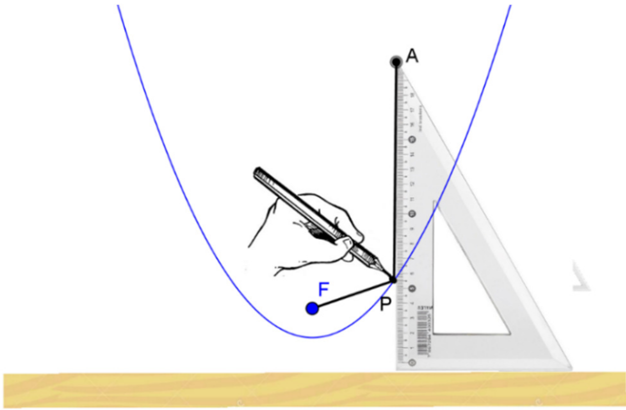

Figura 63 - Traçando uma parábola utilizando régua e barbante

Justificativa:

Se P é a posição da ponta do lápis então:

Por construção a ripa encontra-se a uma distância $2p$ do foco, logo encontra-se na diretriz da parábola, chamemos esta diretriz de reta d, temos também que o comprimento do barbante será o comprimento do esquadro que chamaremos de f, logo será do ponto A à diretriz, então:

$$d(P,F) = f - d(P,A) = d(P,d).$$

Parabológrafo de Cavalieri

O instrumento da figura 64 é conhecido como Parabológrafo de Cavalieri. Parabológrafos são instrumentos utilizados para construir parábolas.

Funcionamento:

A barra 1 de comprimento m esta presa ao trilho 2 fazendo um ângulo de 90^0, esta barra correrá sobre o trilho 1. O vértice V do esquadro é a interseção entre os trilhos 1 e 2. Este vértice permanecerá imóvel, mas o trilho 2 deslizará sobre ele, com isso os dois lados do esquadro se movimentarão, mas sempre mantendo a intercessão com o ponto V e a extremidade livre da barra 1. Desta forma o ponto P irá traçar uma parábola.

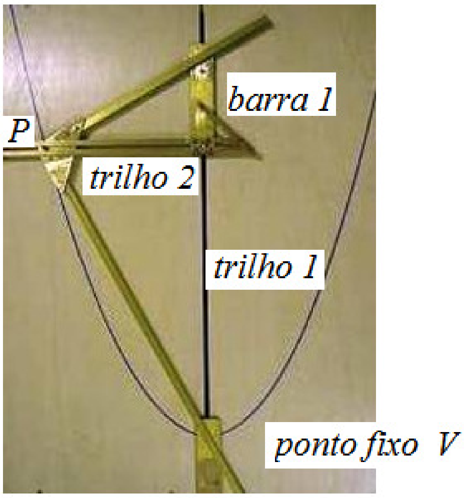

Figura 64 - Parabológrafo de Cavalieri

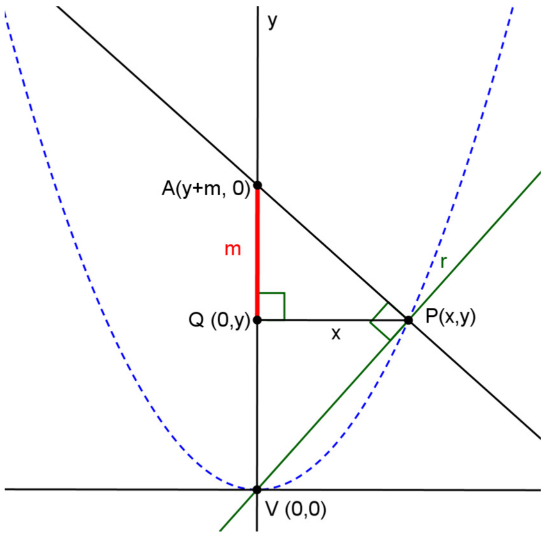

Figura 65 - Construção do Parabológrafo de Cavalieri

Justificativa:

Colocando o ponto *V* na origem do plano cartesiano e o trilho no qual se deslizará a barra no eixo y, sendo *P* um ponto do plano e *r* a reta que contém o segmento *VP*, conforme a figura 65. Teremos as seguintes coordenadas:

Pontos *P = (x,y), V = (0,0); Q = (0,y);* (Pé da perpendicular do ponto *P* ao eixo *y*); *A (y + m,0)* (Ponto de interseção entre a reta perpendicular a reta *r* e o eixo *y*, sendo *m* o comprimento do *A* ao ponto *Q*)

Temos que o triângulo AVP sendo *x* sua altura, logo pela propriedade do triangulo retângulo, temos que $x^2 = my$, fazendo p como parâmetro da parábola então temos que $m = 4p \Rightarrow p = \frac{m}{4}$, Concluindo que o ponto *P* pertence a parábola de diretriz $y = -p = -\frac{m}{4}$ e Foco $= F = \left(\frac{m}{4},0\right)$ e eixo focal coincidido com o eixo *y*.

Construção utilizando losango articulado

O instrumento da figura 66, trata-se de uma construção com losango articulado, onde o ponto fixo é o foco da Parábola, o trilho abaixo deste ponto será a diretriz, e neste trilho corre o ponto *A*, fazendo também correr um segundo trilho que esta preso ao ponto *A* e é perpendicular ao primeiro. Dois pontos do losango são presos a um terceiro trilho, de forma que os pontos deslizem sobre este trilho, ligando este terceiro trilho ao segundo encontra-se o ponto *P*, e nele colocaremos um lápis, pois ao mover o ponto *A*, o ponto *P* contornará uma parábola cujo foco será o ponto fixo *F* e a diretriz será o primeiro trilho utilizado.

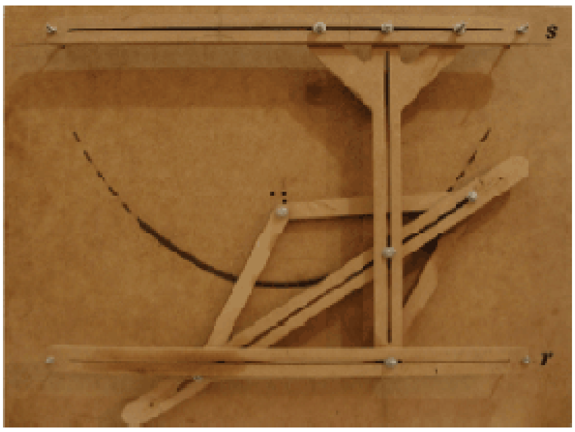

Figura 66 - Instrumento construído utilizando losango articulado

(Fonte: http://rpm.org.br/cdrpm/80/3.html)

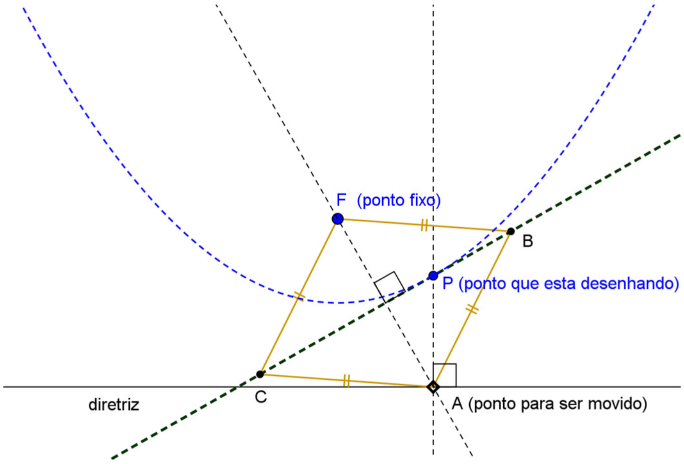

Figura 67 - Justificando a construção do Instrumento construído utilizando losango articulado

Justificativa:

Chamemos o ponto fixo F de foco e reta d de diretriz da parábola e A ponto pertencente a diretriz, Como por construção $ABFC$ é losango temos que a reta BC é mediatriz do segmento AF, conforme figura 67.

Como mostrado em (5.6.1), temos, mediatriz entre o ponto A da reta diretriz e o foco F da parábola, é tangente a parábola em um ponto P que encontra-se na interseção entre esta mediatriz e a reta perpendicular da diretriz traçada por A.

A necessidade do Losango $ABFC$ é justificada pelo fato das diagonais de um losango se cortarem no ponto médio e serem perpendiculares.

6
Compasso Perfeito

O instrumento da figura 68, é conhecido como Compasso Perfeito. Ele é composto por um eixo *r*, que terá como pontos extremos *A* e *B*, sendo *A* fixado no plano da base, e uma barra giratória *s* que terá como pontos extremos *D* e *E. O* eixo *r* e a barra s estão ligadas por um ponto *C*. Chamemos de α o ângulo entre *r* e o plano da base e de β o ângulo entre *r* e *s*. Temos também um ponto *F* na barra giratória *s*, a função deste ponto é tornar fixo o ângulo β.

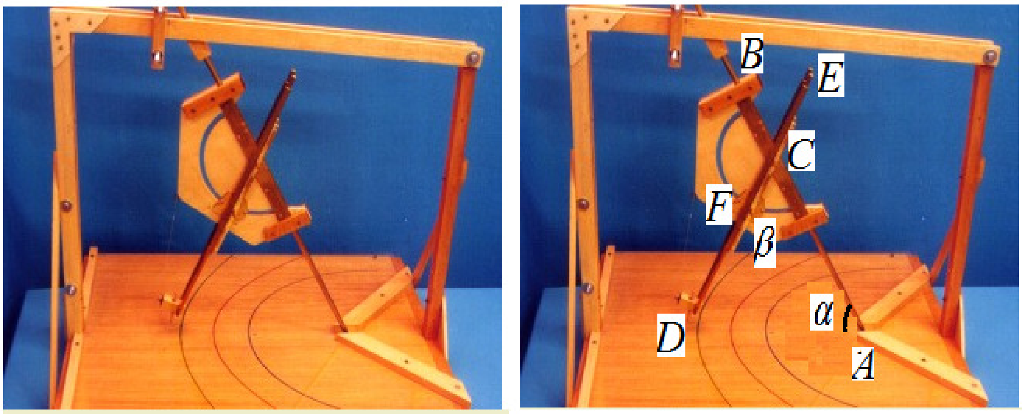

Figura 68 - Compasso Perfeito

(Fonte: http://archivioweb.unimore.it/theatrum/macchine/_00the.htm)

Funcionamento:

Quando o eixo *r* está inclinado em relação ao plano da base e a barra *s* gira em torno do ponto *C*, mantendo fixo o ângulo β, os comprimentos de *CD* e *CE* se modificaram, a medida que *CD* cresce *CE* diminui, e analogamente a medida que *CD* diminui *CE* cresce . Assim a barra *s* estará descrevendo um cone obliquo que será seccionado com o plano da base. Neste cone a barra *s* será uma geratriz.

Ao modificarmos um dos ângulos α e β o cone se modificará, logo sua intercessão com o plano da base também se modificará.

Esboçamos este instrumento utilizando o GeoGebra . Vejam as figuras 69, 70 e 71.

Construímos a circunferência C_1 em um plano perpendicular ao eixo *r*. Esta circunferência foi colocada para mantermos fixo o ângulo entre o eixo *r* e a barra giratória *s* (geratriz do cone). A barra será uma reta *s* que passará por um ponto C do eixo *r* e por um ponto *F* qualquer de C_1. Ao girarmos o ponto *F* sobre C_1 o ângulo entre eixo *r* e a barra *s* a qual já chamamos de β permanecerá sempre o mesmo e a interseção entre a reta *s* e o plano da base descreverá uma cônica.

Como justificativa, consideremos as cônicas como seções planas numa superfície cônica.

Consideremos também o comprimento do eixo *r* e da barra *s* tão grande quanto necessitarmos.

Se o ângulo $\alpha \neq 90^0$ e $\alpha > \beta$, a curva de interseção entre a barra *s* e o plano da base será uma elipse. Veja a figura 69.

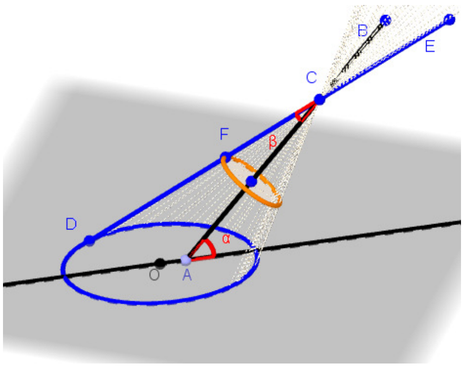

Figura 69 - Elipse

Se o ângulo $\alpha \neq 90^0$ e $\alpha < \beta$, a curva de interseção entre a barra *s* e o plano da base será uma hipérbole. Veja a figura 70.

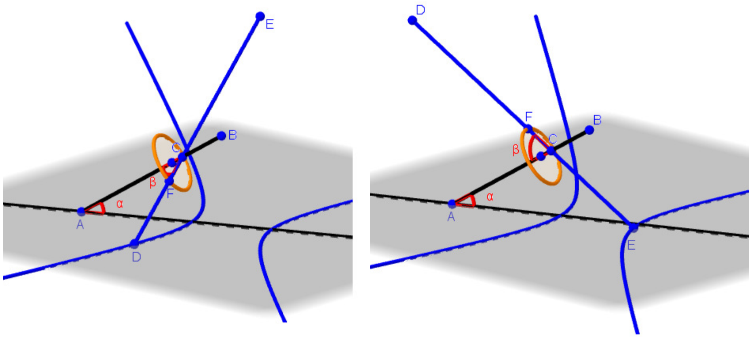

Figura 70 - Hipérbole

Se o ângulo $\alpha \neq 90^0$ e $\alpha = \beta$, a curva de interseção entre a barra *s* e o plano da base será uma parábola. Veja a figura 71.

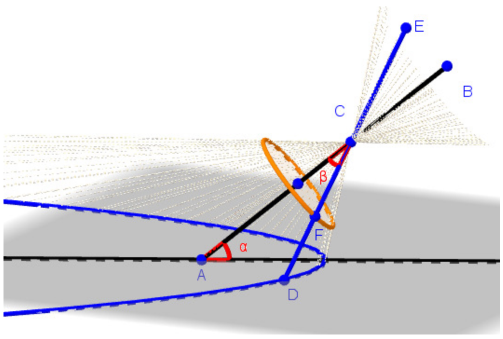

Figura 71 - Parábola

No caso do o ângulo $\alpha = 90^0$, o compasso se comportará como um compasso escolar normal e as curvas obtidas sempre serão circunferências.

7
Aplicações das cônicas

Lei da Reflexão.

1) O raio incidente, o raio refletido e a normal pertencem ao mesmo plano, chamado de plano de incidência.

2) Em relação a normal, o ângulo do raio de incidência é igual ao ângulo do raio refletido. (ver figura 72)

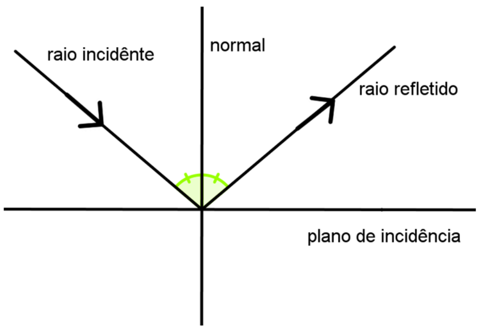

Figura 72 - Reflexão da luz

Trabalhando no plano de incidência, temos a reflexão em curvas planas.

Definimos que a Lei da Reflexão equivale a dizer que quando os raios são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto.

7.1
Propriedade refletora da elipse

Se um raio luminoso por um dos focos de uma elipse, ela será refletida para outro foco.

Para a demonstração acima mostraremos que: Em uma elipse de focos F_1 e F_2, os ângulos formados entre a reta tangente a elipse em um ponto P e os segmentos que ligam aos focos F_1 e F_2 são iguais (ver figura 73).

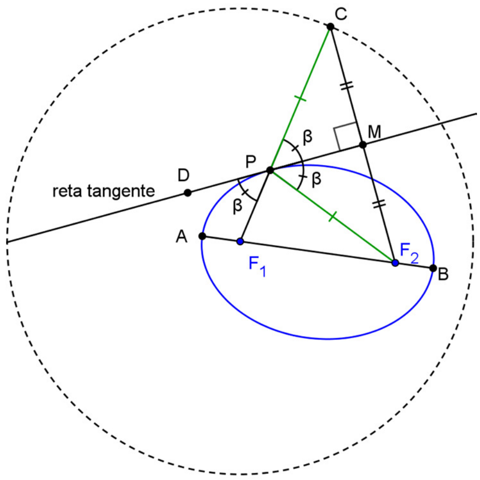

Figura 73 - Propriedade refletora da elipse

Demonstração:

Sejam a Circunferência centrada em F_1 e raio de comprimento igual ao eixo AB, e C um ponto desta circunferência, tal que o raio F_1C, contém o ponto P.

Pelo item (3.6.1) temos que a mediatriz do triangulo PCF_2 é tangente a elipse no ponto P. Seja M o ponto de intercessão da mediatriz com a base CF_2 do triângulo.

Marcamos um ponto D qualquer nesta mediatriz de maneira que o ponto P fique entre os pontos D e M.

Como o triangulo PCF_2 é isósceles, temos que sua mediatriz coincide com a bissetriz que nos dá a igualdade entre ângulos: $C\hat{P}M = F_2\hat{P}M = \beta$ temos também que $D\hat{P}F_1 = M\hat{P}C$, pois são ângulos opostos pelo vértice, logo $C\hat{P}M = F_2\hat{P}M = D\hat{P}F_1 = \beta$, então os ângulos formados pelos segmentos PF_1 e PF_2 com a reta tangente a elipse em P são iguais.

7.2
A aplicações propriedade refletora da elipse da elipse

Refletores odontológicos

Na figura 74 temos um exemplo da reflexão da luz em um refletor odontológico. Visando concentrar o máximo de iluminação em um foco, melhorando assim a iluminação na região desejada e não causando desconforto ao paciente com luz nos seus olhos.

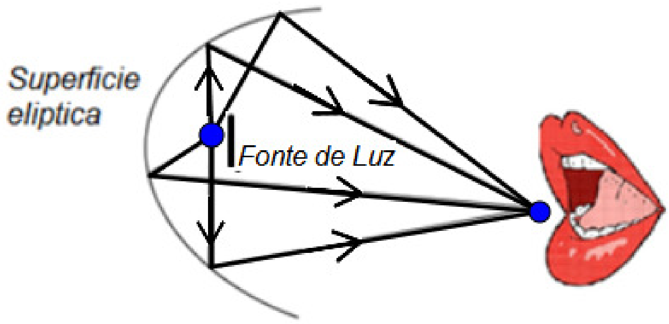

Figura 74 - Dispositivo odontológico

Construções de teatros usando uma forma de cilindro elíptico

(Um cilindro elíptico é um cilindro, cuja base é uma circunferência.).

O som emitido em um dos focos é direcionado para o outro foco. Na figura 75 temos um exemplo de um teatro construído na forma de um cilindro elíptico em que um dos focos esta no palco e o outro esta no camarote do rei.

Figura 75 - Teatro Nacional de São Carlos, Lisboa, Portugal

(Fonte: http://2015.openhouselisboa.com/places/teatro-nacional-de-sao-carlos-3/index.html)

7.3
Outras aplicações da elipse

Beleza estética

A arquitetura também se utiliza das formas elípticas, como beleza estética, como podemos verificar na figura 76.

Figura 76 - Planetário Tycho Brahe, Copenhague, Dinamarca

(Fonte: https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe_Planetarium)

Orbita dos planetas no sistema solar.

Johann Kepler, nascido em 1571, formulou as três leis do movimento planetário, sendo a primeira “ A orbita de qualquer planeta é elíptica, com o sol em um dos seus focos”. Veja a figura 77.

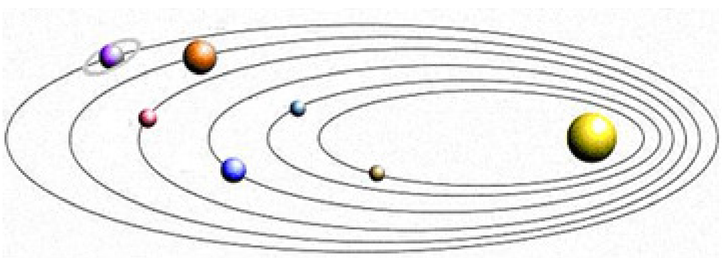

Figura 77 - Órbita dos planetas

7.4
Propriedade refletora da parábola

Se uma reta incide paralelamente ao eixo da parábola, então ela será refletida para seu foco.

Para a demonstração acima mostraremos que: Em uma parábola de foco F e diretriz d, o ângulo formado entre a reta perpendicular a reta diretriz que passa pelo ponto P e reta tangente neste ponto é igual ao ângulo entre reta tangente e raio que liga P ao foco da parábola .

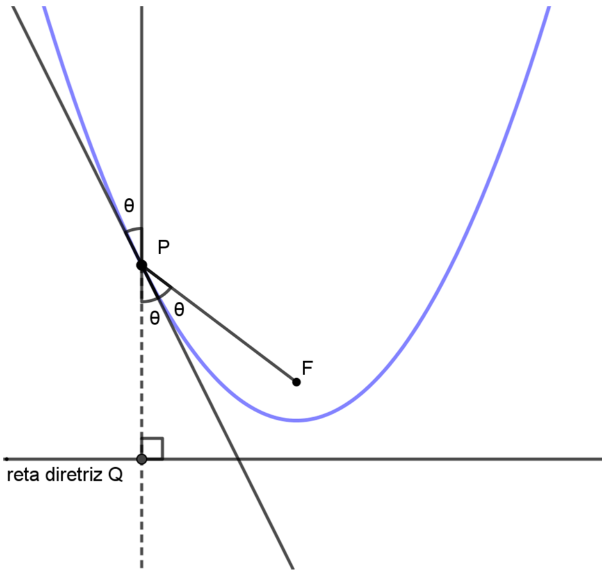

Figura 78 - Propriedade Refletora da Parábola

Demonstração:

Consideremos a figura 78. Sejam F o foco da parábola e Q o pé da perpendicular à reta diretriz que passa pelo ponto P, temos pelo item (5.6.1) que a mediatriz da base QF do triângulo PQF é tangente à parábola no ponto P.

Pela propriedade da parábola temos que $PQ = FP$, logo o triângulo QPF é isósceles, então sua mediatriz coincide com a bissetriz, que nos dá a igualdade entre ângulos.

Temos ainda que a volta também é verdadeira, pois a reta bissetriz de PQ e FP, divide igualmente os ângulo do triângulo QPF pelo ponto P, sendo QPF isósceles, temos que esta reta bissetriz é uma mediatriz, logo pelo item (5.6.1) é uma reta tangente à parábola pelo ponto P.

7.5
Aplicações da propriedade refletora da parábola

Antenas parabólicas

Observamos pela Lei da Reflexão, quando um raio incidente atinge a superfície da parábola, sendo este paralelo ao eixo da parábola, ele será refletido ao foco da parábola, logo se tivermos uma superfície de revolução, parabólica polida e espelhada, os raios recebidos paralelos ao eixo da parábola serão refletidos em um único ponto que é o foco da parábola.

O princípio acima é usado nas antenas parabólicas (ver figura 79), iluminação de alguns sistemas de faróis de carro, telescópios refletores, antenas de radar, radiotelescópios.

Figura 79 - Antena parabólica

(Fonte: http://www.antenatelecamp.com/2013/03/saiba-escolher-o-tamanho-de-uma-antena.html)

7.6
Outras aplicações da parábola

Trajetória de objetos no lançamento obliquo.

No ensino médio aprendemos que desprezando o efeito do ar, a trajetória de uma bola lançada horizontalmente por um ângulo inclinado, descreve parábola (ver figura 80).

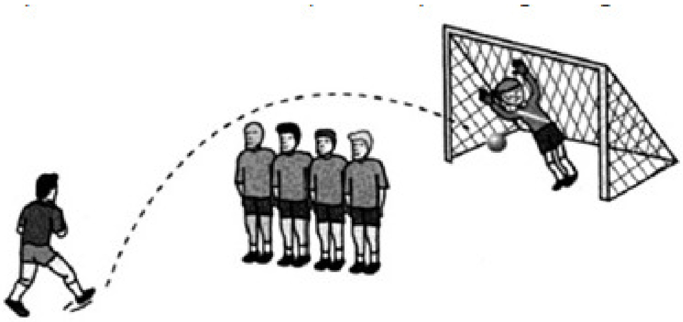

Figura 80 - Trajetória de uma bola descrevendo uma parábola

(Fonte: https://blogdoenem.com.br/funcao-polinomial-2o-grau-revisao-matematica-enem/)

Pontes pênsil

Conforme mostrado por Ruffino (1998). A curva do cabo de uma ponte pênsil é uma parábola, se supusermos que o peso da plataforma da pista está espalhado uniformemente ao longo da ponte, e que o peso do cabo propriamente é desprezível em relação ao peso da plataforma.

Na figura 81 temos um exemplo de ponte pênsil que é a famosa ponte Golden Gate Bridge.

Figura 81 - Golden Gate Bridge

(Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ponte_p%C3%AAnsil)

7.7 Propriedade refletora da hipérbole

Se um raio luminoso passa por um dos focos de uma hipérbole, ao atingi-la será, ela será refletida na direção do outro foco. (ver figura 78)

Para a demonstração acima mostraremos que: Em uma hipérbole de focos F_1 e F_2, o ângulo formado entre a reta tangente à hipérbole em um ponto P e o segmentos que liga P ao foco F_1 e é igual ao ângulo formado entre a reta tangente neste ponto P e o segmento que liga P ao foco F_2.

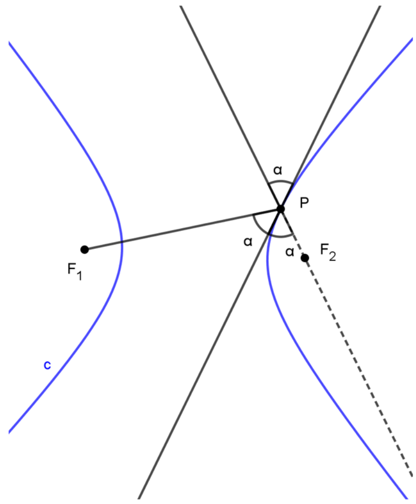

Figura 82 - Propriedade Refletora da Hipérbole

Demonstração:

Marcando um ponto Q no segmento PF_1, tal que $PQ = PF_2$, temos que pelo item (4.7.1) que mediatriz de QPF_2, é tangente a hipérbole pelo ponto P.

Como o triangulo QPF_2 por construção é isósceles, temos que sua mediatriz coincide com a bissetriz, o que nos dá a igualdade entre ângulos: $Q\hat{P}M = F_2\hat{P}M = \alpha$ temos também que α é o ângulo entre a reta que passa pelo segmento F_2P e a mediatriz do triangulo PQF_2, pois são ângulos opostos pelo vértice.

Temos ainda que a volta também é verdadeira, pois a reta bissetriz do triângulo F_1PF_2 coincide com a bissetriz do triângulo isósceles QPF_2, pois Q pertence ao segmento F_1P, então esta reta bissetriz é uma mediatriz, logo uma reta tangente à hipérbole pelo ponto P.

7.8
Uma aplicação que conjuga as propriedades refletora da hipérbole e da parábola

Telescópios refletores do tipo Cassegrain:

Em 1672 o astrônomo francês Cassegrain propôs a utilização de um espelho hiperbólico na construção de telescópios refletores, porém demorou cerca de um século para que começassem suas montagens, sendo que atualmente são amplamente utilizados.

Seu funcionamento consiste que os raios de luz incidam no primeiro espelho (hiperbólico ou parabólico), e são refletidos para o segundo espelho hiperbólico, sendo novamente refletidos de volta, em direção a um observador ou uma câmera. Veja a figura 83.

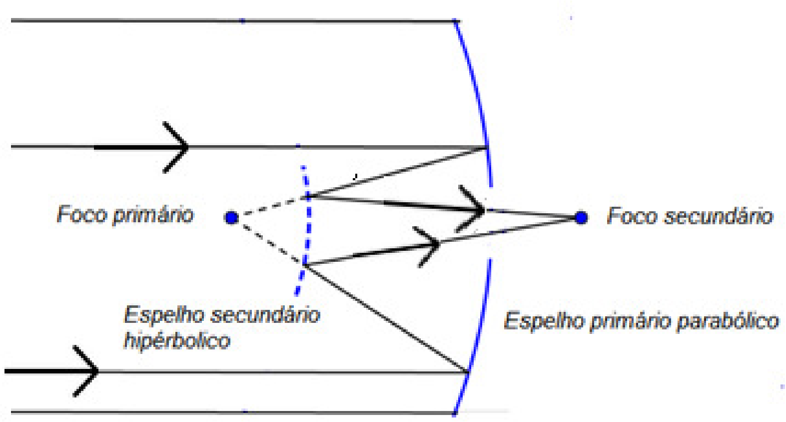

Figura 83 - Telescópio refletor do tipo Cassegrain

7.9
A hipérbole como sombra de alguns abajures

Na figura 84 temos uma hipérbole formada pela sombra de um abajur. Conforme demonstrado por Carneiro (2006), quando um abajur tem a forma de um tronco de cone, então a parede será tal como um plano paralelo à geratriz do cone, formando assim a sombra de uma hipérbole.

Figura 84 - Sombra de um Abajur

(Fonte: http://rpm.org.br/cdrpm/59/1.htm)

8
Conclusão

Buscamos neste trabalho tratar as cônicas no desenho geométrico, seja quando já possuímos a curva e desejamos encontrar seus principais elementos, seja quando queremos desenhá-las. Aproveitamos as justificativas das construções do desenho geométrico e instrumentos empregados, para relacioná-los com o conceito de lugar geométrico de cada cônica e a geometria analítica.

Verifica-se que em várias demonstrações são feitas de modo simples, que favorece o interesse dos alunos.

Em muitos momentos o professor se depara com uma pergunta feita por alunos " para quer serve isso", " onde vou usar isso". Quando o assunto é regra de três a resposta é fácil e diversas aplicações são ditas pelo professor, mas em diversos outros assuntos o próprio professor não faz ideia da aplicação no cotidiano do assunto que ele acabou de abordar. Neste sentido acreditamos que as cônicas é um excelente assunto para o ensino médio, pois sua própria descoberta histórica é algo fascinante para apresentar para o alunos, Além de dar ao professor inúmeras aplicações no dia a dia até mesmo exemplos em que elas aparecem de forma natural.

Não tratamos do uso de programas de geometria dinâmica, mas é inegável sua contribuição na aprendizagem do aluno, pois em um ambiente de fácil uso como o seu celular utilizando aplicativos como o GeoGebra, podem ser testadas todas as construções e propriedades empregadas neste trabalho.

9 Referências bibliográficas

Andrade, Lenimar Nunes. **A Construção de Cônicas e o Teorema de Pascal**. Revista do Professor de Matemática, 45, 2001. Disponível em: < http://rpm.org.br/cdrpm/45/3.htm >. Acesso em: 02 set. 2017.

Ávila, Geraldo. **A Hipérbole e os telescópios**. Revista do Professor de Matemática, 34, 1997. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/34/5.htm>. Acesso em: 02 set. 2017.

Boyer, C. B. **História da matemática**: tradução Elza F. Gomides, São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

Carneiro, José Paulo. **A sombra do meu abajur**. Revista do Professor de Matemática, 59, 2006. Disponível em: < http://rpm.org.br/cdrpm/59/1.htm>. Acesso em: 02 set. 2017.

Carvalho, Benjamin de A. **Desenho Geométrico**. Rio de Janeiro: Imperial Novo Milênio, 2008.

Cunha, G. N. de Mello e. **Curso de Desenho Geométrico e Elementar** 4ª edição. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1951.

Eves, Howard. **Introdução à história da matemática**/Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: editora Unicamp, 2011.

Guimarães, A. dos S.;Santos, A.F.A dos.;Silva, J de S.;Morares,S. M. de. **Oficina: Que curvas são essas: Elipse, Hipérbole Parábola?**. Bienal de Matemática, Rio de Janeiro, 2017.

Matemática, Sociedade Portuguesa de. **Isto é matemática. O bilhar, o dentista e o Teatro São Carlos** < https://www.youtube.com/watch?v=_PYgy-06rIs&list=PLKTNxZkADYLsXkndkcs7BDFN5nijhBLWe&index=11>. Acesso em: 02 set. 2017.

Neto, Francisco Quaranta. **Tradução Comentada da Obra " Novos Elementos Das Seções Cônicas"** (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância, para o Ensino de Matemática. Natal, 2013.

Pereira, L. R.; Bonfim V. **Instrumentos articulados que desenham cônicas.** Revista do Professor de Matemática, 80, 2013. Disponível em: < http://rpm.org.br/cdrpm/80/3.html>. Acesso em: 02 set. 2017.

Pergola, Marcello. **Mostra "Theatrum Machinarum" strumenti per la geometria**. Modena - Foro Boario - Novembre 1998. Disponível em: < http://archivioweb.unimore.it/theatrum/macchine/_00the.htm >. Acesso em: 02 set. 2017.

Roque, Tatiana; Carvalho J. B. Pitombeira. **Tópicos de História de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM,, 2012.

Reis, Lima Genésio; Silva, Valdir Vilmar da. Geometria Analítica 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

Rufino, Paulo R. O problema da corda suspensa. Revista matemática universitária nº 24/25, 1998. Disponível em: < http://rmu.sbm.org.br/artigos.php>. Acesso em: 02 set. 2017.

Schooten, Van Schooten. **Francisci à Schooten Exercitationvm mathematicarum libri quinque**. Ex officina Johannis Elsevirii: Baviera, 1657 . Disponível em: <https://books.google.com.br/books/ucm?vid=UCM5323846917&printsec=frontcover&redir_esc=y&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false> Acesso em: 02 set. 2017.

Siqueira, P. H.; Costa, A. M. **Cônicas** 2ª edição. Universidade Federal do Paraná setor de ciências exatas departamento de expressão gráfica, 2012.

Valladares, R. J.C. **Elipse, sorrisos e sussuros**. Revista do Professor de Matemática, 36, 1998. Disponível em: < http://rpm.org.br/cdrpm/36/5.htm>. Acesso em: 02 set. 2017.

Wagner, Eduardo. **Porque as antenas são parabólicas.** Revista do Professor de Matemática, 33, 1997. Disponível em: <http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm>. Acesso em: 02 set. 2017.