Sérgio de Almeida Frias

Otimização de funções lineares, uma abordagem simples para aplicação em sala de aula

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientadora: Prof. Renata Martins da Rosa

Rio de Janeiro
Setembro de 2017

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO

Sérgio de Almeida Frias

Otimização de funções lineares, uma abordagem simples para aplicação em sala de aula

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela comissão examinadora abaixo assinada.

Prof. Renata Martins da Rosa
Orientadora
Departamento de Matemática PUC-Rio

Prof. Emília Carolina Santana Teixeira Alves
Departamento de Matemática PUC-Rio

Prof. José Victor Goulart Nascimento
Departamento de Matemática PUC-Rio

Prof. Miguel Adriano Koiller Schnoor
Instituto de Matemática – UFF

Prof. Márcio da Silveira Carvalho
Coordenador Setorial do Centro
Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 25 de setembro de 2017

Sérgio de Almeida Frias

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela FERLAGOS – Cabo Frio-RJ em 1996, Pós-Graduação "Latu Sensu" em Matemática pela UFRJ em 2001. Professor efetivo da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro e da UNESA - Campus Cabo Frio.

Ficha Catalográfica

Frias, Sérgio de Almeida

Otimização de funções lineares, uma abordagem simples para aplicação em sala de aula / Sérgio de Almeida Frias ; orientadora: Renata Martins da Rosa. – 2017.

74 f.: 30cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2017.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Otimização. 3. Funções lineares. 4. Resolução gráfica. I. Rosa, Renata Martins da. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD : 510

Dedico este trabalho à minha linda esposa Ediane e à minha linda filha Milena que sempre me apoiaram e incentivaram para a conclusão dessa dissertação.

Agradecimentos

A Deus que me concedeu saúde e força para concluir uma etapa importante da minha vida acadêmica.

Aos meus pais, em memória de minha mãe Sebastiana, que me criaram e educaram.

À minha esposa e minha filha que me apoiaram e muito me ajudaram para concluir o mestrado, em especial às orações de minha sogra, muito valiosas e benditas.

À minha orientadora Renata Rosa que mesmo nas suas muitas atribuições acadêmicas e tribulações familiares, encontrou tempo para me orientar e ensinar.

À CAPES e à PUC-Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais esse trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao professor Luís Eduardo Moreira pelas suas valiosas considerações no início desse trabalho.

Aos professores do PROFMAT pelos ensinamentos e sabedoria transmitidos a mim e a todos os colegas da turma.

Aos professores que participaram da banca Examinadora.

Aos colegas da turma que sempre ajudaram, apoiaram e incentivaram, em especial à Keilla Lopes e Waldeir Júnior que foram amigos de estudo e estrada.

Resumo

Frias, Sérgio de Almeida; Rosa, Renata Martins da (Orientadora). **Otimização de funções lineares, uma abordagem simples para aplicação em sala de aula**. Rio de Janeiro, 2017. 74p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma proposta de aplicação, para alunos do Ensino Médio, de otimização de funções lineares usando o modelo de resolução gráfica. Para melhor visualização do modelo é sugerido o uso de ferramentas tecnológicas como softwares gráficos – neste trabalho foi utilizado o software livre GeoGebra. A ideia principal do trabalho é mostrar a importância da Matemática como ferramenta para interpretar, compreender e tomar decisões nas mais diversas situações do cotidiano, em especial, neste trabalho situações de alocação de recursos para otimização do lucro de uma produção.

Palavras-chave

Otimização; Funções lineares; Resolução gráfica.

Abstract

Frias, Sérgio de Almeida; Rosa, Renata Martins da (Advisor). **Linear functions optimization, a simple approach to be used in the classroom.** Rio de Janeiro, 2017. 74p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This project aims to present an application proposal, for high school students, to optimize linear functions using the graphic resolution model. In order to achieve a better view of the model, the use of technological tools such as graphic softwares is suggested — in this project we used a free software named GeoGebra. The project main idea is to show the importance of Mathematics as a tool to interpret, understand and make decisions in relation to the most varied daylife situations, specifically here, in this project, in situations of resources allocation to optimize the profits of a production.

Keywords

Optimization; Linear functions; Graphic Resolution.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Um pensamento

"Um bom ensino da Matemática forma melhores hábitos de pensamento e habilita o indivíduo a usar melhor a sua inteligência"

Irene de Albuquerque

1
Introdução

Como o tema da minha dissertação é Otimização de Funções Lineares, busquei métodos de otimização e verifiquei algumas dissertações de colegas docentes pelo Brasil: Brasília, Goiás, Piauí, Rio de Janeiro, São Paulo entre outros Estados da nossa Federação, e verifiquei que os modelos mais aplicados foram o Modelo Simplex e o Modelo de Resolução Gráfica.

Em geral, as dissertações têm uma preocupação com sua aplicabilidade em sala de aula, reportando-se ao que os alunos devem conhecer de Matemática básica e novas tecnologias como softwares gráficos para compreender os modelos de otimização.

No meu entender, e principalmente como aplicação no Ensino Médio, o modelo de resolução gráfica se mostra mais realista em termos de entendimento de nossos alunos, visto as dificuldades encontradas pela maioria dos alunos em termos de Matemática básica. O Modelo Simplex tem um apelo interessante com relação às matrizes e aos sistemas lineares, mas requer dos alunos um bom entendimento e facilidade na manipulação desses assuntos que em geral apenas alunos mais aplicados em Matemática seriam capazes de compreender, logo esse modelo não é muito “amigável” à maioria de nossos alunos.

Delimitei minha dissertação a funções lineares, pois os alunos têm contato com funções polinomiais do 1º grau já no 1º ano do Ensino Médio e no 3º ano em Geometria Analítica com o estudo de equações de retas.

É importante salientar que pretendo dissertar, sempre que possível, como se fosse uma aula para os alunos do Ensino Médio, afinal, a ideia principal da dissertação é colaborar com colegas professores que estão atuando, trazendo uma nova perspectiva para o ensino da Matemática.

Funções de duas variáveis não fazem parte do Ensino Médio, mas acredito que os alunos compreendam a relação entre duas variáveis no preço final de um produto com exemplos concretos vividos por eles, como por exemplo: imposto e matéria prima.

No atual conteúdo do Ensino Médio, o único tópico de otimização visto pelos alunos são máximos e mínimos de funções quadráticas. Acredito que ampliar a visão de otimização para outros tipos de função vai ao encontro à nova estrutura do Ensino Médio.

A otimização faz parte de um mundo econômico-financeiro que talvez seja um pouco distante da realidade dos alunos, mas a ideia de otimizar (maximizar ou minimizar) é um conceito fácil de ser assimilado pelos alunos fazendo, desde o Ensino Médio, uma preparação para cada aluno na sua futura vida profissional. Maximizar lucros e tempo e minimizar custos é o que o mundo dos negócios sempre busca.

Ao se falar em otimização linear, é imprescindível falar em pesquisa operacional e programação linear. No livro Programação Linear de Puccini e Pizzolato[3]:

> "Pesquisa operacional foi o nome dado ao conjunto de processos e métodos de análise desenvolvidos por grupos acadêmicos que assessoraram as forças militares durante a 2ª Guerra Mundial. Tais grupos foram, inicialmente, criados na Inglaterra, com o objetivo de especular sobre problemas considerados novos que escapavam às rotinas bélicas, tanto no plano estratégico como tático. O primeiro desses grupos foi constituído por uma equipe integrada por três fisiologistas, dois físico-matemáticos, um astrofísico, um militar, um agrimensor, um físico e dois matemáticos".

No livro Programação Linear, Série Pesquisa Operacional de Darci Prado[2]: " A programação linear é uma técnica de otimização, uma ferramenta utilizada para encontrar o lucro máximo ou o custo mínimo em situações nas quais temos diversas alternativas de escolha sujeitas a algum tipo de restrição ou regulamentação", a programação linear foi a primeira técnica explícita para a pesquisa operacional. Historicamente o estudo da teoria da programação linear teve início na década de 40 pelo matemático norte-americano George Bernard Dantzig (1914 – 2005).

Também acredito que estudar otimização linear via resolução gráfica seja uma boa oportunidade de consolidar o entendimento de tópicos estudados sem contextualização e muitas vezes de forma mecânica como plano cartesiano e equação de retas.

A dissertação foi estruturada começando pela *introdução*, como visto acima, um capítulo sobre *tecnologias* com algumas ferramentas computacionais como softwares gráficos, planilhas eletrônicas que nos ajudam na visualização e cálculos. *Tópicos de Matemática* que os alunos precisam conhecer de Matemática básica para entender a ideia de otimização linear, *otimização de funções* que os alunos já estudaram como máximos e mínimos de funções quadráticas e a introdução do conceito de funções de duas variáveis. *O Modelo de Resolução Gráfica,* onde temos definições e passos para formular um problema de otimização com um exemplo de resolução gráfica. *O Projeto* que é uma proposta de aulas para inserção do conceito de otimização e o modelo de resolução gráfica, as *Considerações Finais* onde concluo este trabalho como uma ferramenta de apoio aos professores em sala de aula e por fim o *Apêndice* onde temos modelos de exercícios para serem aplicados aos alunos, sugestões e respostas dos exercícios.

2
Tecnologias

Para melhor visualização e entendimento do Modelo Gráfico, é importante o uso de algum software computacional gráfico, pago ou gratuito, que construa gráficos a partir de equações. É importante salientar que o software é mais uma ferramenta, uma valiosa ajuda para o entendimento do Modelo de Resolução Gráfica, caso não seja possível o uso da ferramenta tecnológica, o projeto não fica totalmente inviável, é possível desenvolver o projeto sem o recurso tecnológico, com suas devidas restrições, usando apenas o quadro em sala de aula.

Dentre os softwares gratuitos, o GeoGebra é um software de fácil acesso e instalação e foi o software usado para construir grande parte dos gráficos feitos nesta dissertação e outros feitos no próprio Word. No site www.somatematica.com.br é possível pesquisar uma gama de softwares gratuitos, não só para construção de gráficos, mas para outras finalidades matemáticas. Para conhecimento, é importante falar de alguns programas mais sofisticados e caros como o Maple e o Matlab que na minha opinião não são intuitivos e requerem um estudo prévio, ou melhor dizendo, um curso para conseguir manipulá-los, além de ter que entender um pouco da língua inglesa para acessar os comandos. Mas não podemos esquecer que estamos falando de uma aplicação em turmas do Ensino Médio no âmbito público estadual, em particular no meu caso na SEEDUC RJ.

Em questão de tecnologia, deixo a cargo do docente o que achar mais conveniente à sua realidade. Acredito que a participação dos alunos no quesito descobrir como funciona a ferramenta, dados os conceitos matemáticos trabalhados em sala seja um diferencial das aulas, além de uma motivação para que os alunos se sintam colaboradores do processo de ensino-aprendizagem, e porque não conhecedores e desbravadores de tecnologias que nós professores não conhecemos.

3
Tópicos de matemática

Para falar sobre o modelo de resolução gráfica, é importante que os alunos conheçam alguns tópicos de Matemática básica, para que possam acompanhar e entender as construções feitas no GeoGebra, que será o software usado nesta dissertação como ferramenta tecnológica para auxiliar na visualização do modelo. Como a programação linear é uma técnica de otimização de funções lineares, com restrições que podem ser equações ou inequações lineares, faz-se necessário um estudo prévio sobre o plano cartesiano, equações da reta, posições relativas de retas no plano cartesiano, translação de retas, desigualdades e regiões planas.

3.1
O Plano Cartesiano

O plano cartesiano consiste em duas retas perpendiculares, sendo uma horizontal e outra vertical que se intersectam (se cortam) num ponto chamado de origem do sistema de coordenadas cartesianas. De interesse histórico, a palavra "cartesiana" vem do filósofo francês René Descartes (1596 – 1650) que desenvolveu a análise gráfica de equações através do sistema de coordenadas retangulares [7]. As retas, horizontal e vertical, geralmente são denominadas de eixo x e eixo y respectivamente, porém nada impede que sejam denotadas por outras letras ou variáveis. Em aplicações como na Física, os eixos coordenados podem ser t e s representando tempo e espaço; na Economia, q e C representando quantidade produzida e custo de produção; entre tantos outros exemplos.

O eixo horizontal x, também chamado eixo das abscissas, comumente é considerado positivo à direita da origem e negativo à esquerda. O eixo vertical y (eixo das ordenadas) tem como lado positivo acima da origem e negativo, abaixo da origem. A coordenada x de um ponto no plano, indica a distância do ponto ao eixo y e o seu sentido, ou seja, se está à direita ou à esquerda do eixo y, já a coordenada y indica a distância do ponto ao eixo x e se está acima ou abaixo do eixo x.

Podemos verificar que duas retas concorrentes dividem o plano em quatro regiões. No caso do plano cartesiano, como os eixos são perpendiculares entre si, cada região possui um ângulo de 90° e cada região formada é chamada de

Quadrante. Na figura 1 abaixo, vemos os quatro quadrantes e o sinal de *x* e *y* de cada par ordenado pertencente aos quadrantes.

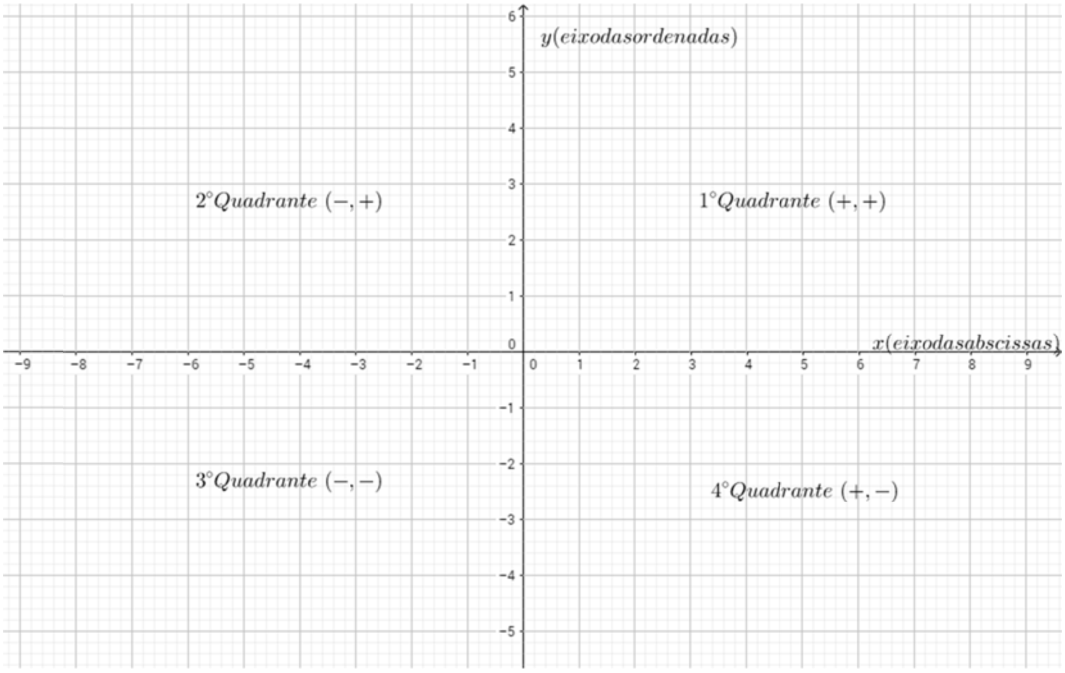


Figura 1: Plano Cartesiano com os quatro quadrantes.

3.2 Equações da Reta

Equações do tipo $ax + by + c = 0$, onde *a*, *b* e *c* são constantes reais e *a* e *b* não são nulos simultaneamente, são ditas lineares em *x* e *y*. Equações desse tipo têm por representação geométrica retas no plano cartesiano. Damos nomes diferentes de acordo como escrevemos os termos da equação. Temos a equação geral da reta, que é a apresentada no início do parágrafo, a equação reduzida, a segmentária, a paramétrica e a cartesiana, cada uma com sua especificidade. Dentre todas essas denominações, vamos focar na equação reduzida da reta $y = ax + b$. Esta equação é apresentada aos alunos no 1º ano do Ensino Médio como o gráfico de função do 1º grau, $f(x) = ax + b$, dita como função afim onde os coeficientes *a* e *b* são números reais. A grande vantagem da equação da reta escrita assim é que podemos pensar na reta como o gráfico de uma função, e apenas olhando para os coeficientes *a* e *b*, chamados respectivamente de angular e linear, já sabemos se a reta é crescente ou decrescente, e onde ela corta o eixo *y*, ou seja, sem fazer nenhuma conta, sabemos fazer um esboço do gráfico. Também veremos as retas verticais de equação $x = c$, $y \in \mathbb{R}$, onde c é uma constante.

Vejamos como podemos demonstrar que o coeficiente angular a é uma taxa de variação, $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$, e que a função afim f dada por $f(x) = ax + b$ tem como representação gráfica uma reta no plano cartesiano.

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma função real dada por $f(x) = ax + b$ cujo gráfico contém os pontos A = (x_A, y_A) e B = (x_B, y_B). Temos o coeficiente angular a como:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Podemos demonstrar isso substituindo os pontos A e B na função f, ou seja, para o ponto A temos $f(x_A) = ax_A + b = y_A$ e para o ponto B, $f(x_B) = ax_B + b = y_B$. Subtraindo $f(x_B) - f(x_A)$ teremos:

$$(ax_B + b) - (ax_A + b) = y_B - y_A \Rightarrow a(x_B - x_A) = y_B - y_A \Rightarrow a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Para demonstrar que o gráfico de uma função afim f dada por $f(x) = ax + b$ é uma reta não vertical, basta pegarmos quaisquer três pontos A, B e C, distintos dois a dois e mostrar que esses pontos são colineares, ou seja, pertencem a mesma reta que representa o gráfico da função f visto na figura 2:

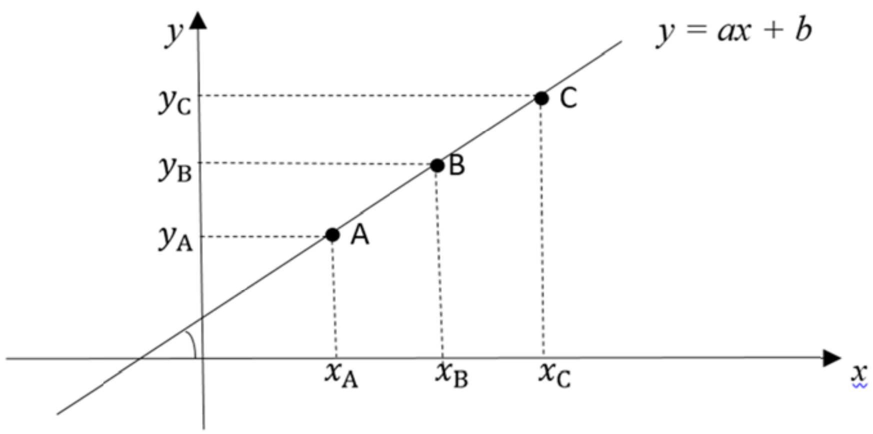


Figura 2: O gráfico da função f definida pela equação $y = ax + b$ com os pontos A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B) e C = (x_C, y_C).

Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, ou seja, são colineares, vamos primeiro mostrar que os triângulos ABD e BCE, visto na figura 3, são semelhantes.

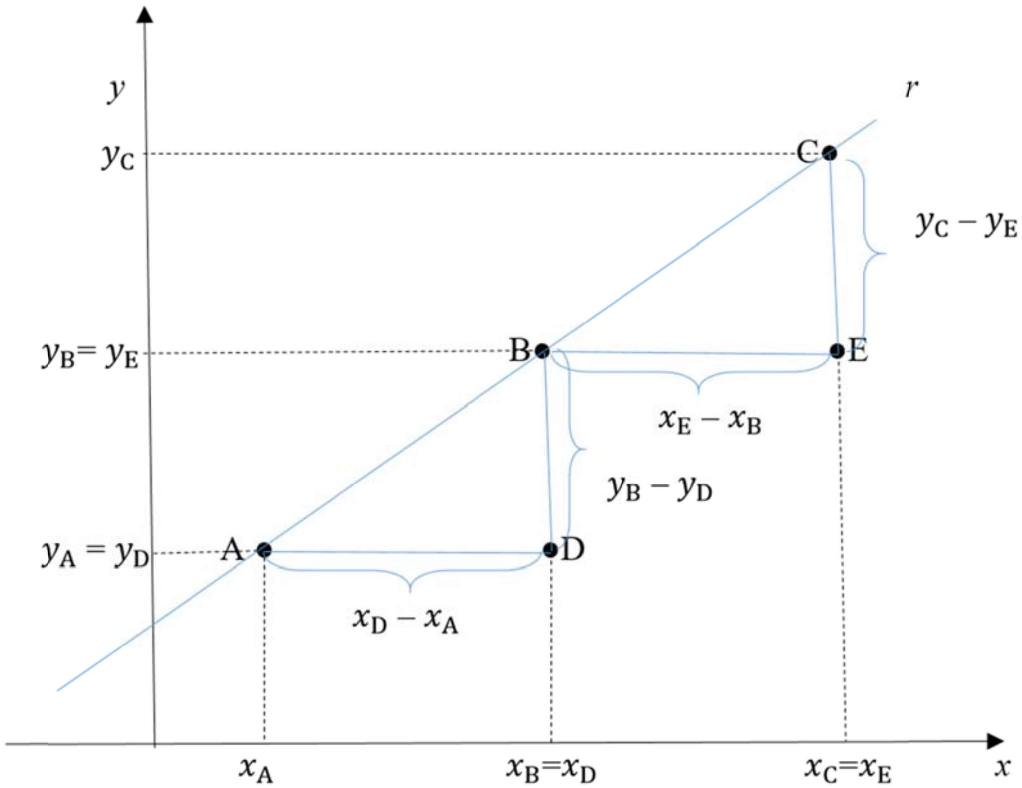


Figura 3: A reta *r* e os triângulos ABD e BCE.

Na figura 3 acima, vemos que os segmentos AD e BE são paralelos ao eixo x e os segmentos BD e CE são paralelos ao eixo *y*, logo podemos concluir que os triângulos ABD e BCE são retângulos e os ângulos ∠BAD e ∠CBE são congruentes, então temos dois triângulos retângulos semelhantes. Sendo semelhantes, as razões entres seus lados são iguais e podemos escrever que:

$$\frac{y_C - y_E}{x_E - x_B} = \frac{y_B - y_D}{x_D - x_A}$$

Como $x_B = x_D$, $x_C = x_E$, $y_A = y_D$ e $y_B = y_E$, podemos reescrever a razão de semelhança acima como:

$$\frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Esta razão de semelhança, como definimos anteriormente, representa o coeficiente angular *a* da reta *r*. Se pegarmos dois pontos distintos quaisquer da reta *r*, por exemplo, P e Q com coordenadas (x_P, y_P) e (x_Q, y_Q) teremos que $a = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$. Se colocarmos o ponto **P** como interseção da reta *r* com o eixo *y* (vertical) e convenientemente chamarmos esse ponto de P = (*0*, *b*) e o ponto Q um ponto qualquer da reta *r* com coordenadas genéricas Q = (*x, y*), teremos: $a = \frac{y-b}{x-0}$, ou $y = ax + b$ que é a relação das coordenadas (*x, y*) dos pontos que pertencem à reta *r*. Chamamos a relação $y = ax + b$ de equação da reta *r*, não vertical. Essa relação nos garante que os pontos de *r* são pontos cujas coordenadas são $(x, ax + b)$, sendo *x* um número real.

Dado o exposto, podemos, por exemplo, encontrar a equação da reta que passa pelos pontos P = (1, 5) e Q = (2, 7). Para isso basta encontrar o coeficiente angular da reta fazendo: $a = \frac{7-5}{2-1} = 2$. Substituindo o coeficiente angular $a = 2$ na equação $y = ax + b$ teremos: $y = 2x + b$. Para encontrar o coeficiente *b*, basta substituir o ponto P ou Q na equação. Usando o ponto P, por exemplo, teremos 5 = 2.1 + *b*, *b* = 3. Sendo assim, a reta que contém os pontos P e Q tem por equação $y = 2x + 3$.

Verifiquemos agora que uma função *f*, definida pela expressão $f(x) = ax + b$, com *a* e *b* reais, tem como gráfico uma reta. Peguemos dois pontos do gráfico de *f*, para facilitar vamos tomar os pontos A = (0, *f*(0)) e B = (1, *f*(1)), para achar a equação da reta que passa pelos pontos A e B, façamos como o exemplo acima, primeiro encontramos o coeficiente angular usando a expressão:

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{a+b-b}{1} = \frac{a}{1} = a,$$

Como sabemos que o ponto que intersecta o eixo *y* (vertical) é da forma (0, *f*(0)), o ponto A é o ponto onde a reta corta o eixo y, como dito anteriormente, os pontos A e B foram tomados para nos facilitar, logo a equação da reta fica: $y = ax + f(0)$.

Na expressão $f(x) = ax + b$, que define *f*, façamos $x = 0$ e vamos obter $f(0) = a.0 + b = b$, e concluímos que a equação da reta é $y = ax + b$. Com isso verificamos que o gráfico de *f* e a reta r são o conjunto de pontos cujas coordenadas são dadas por $(x, ax + b)$, logo, se *f* é uma função cujo gráfico é uma reta, então *f* é determinada pela expressão $f(x) = ax + b$, onde $y = ax + b$ é a equação da reta.

Visto que a função f tem como representação gráfica uma reta no plano cartesiano, vamos dar nome a algumas funções e significados para os coeficientes a e b.

Sendo a função f definida por $f(x) = ax + b$, dita função afim, o coeficiente a, chamado de angular da reta que é o gráfico de f, nos diz se f é crescente, se $a > 0$, ou decrescente, se $a < 0$. De fato, se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$ quando $a > 0$ e aí temos $ax_1 + b < ax_2 + b$, ou seja $f(x_1) < f(x_2)$, e quando $a < 0$ temos $ax_1 > ax_2$, $ax_1 + b > ax_2 + b$ e $f(x_1) > f(x_2)$. O coeficiente b, dito linear, nos dá a interseção da reta com o eixo y, já que um ponto no eixo y tem a forma $(0, y)$, logo, se $x = 0$ temos $f(0) = a.0 + b = b$, a reta cortará o eixo y no ponto $(0, b)$. O gráfico na figura 4 abaixo resume o exposto.

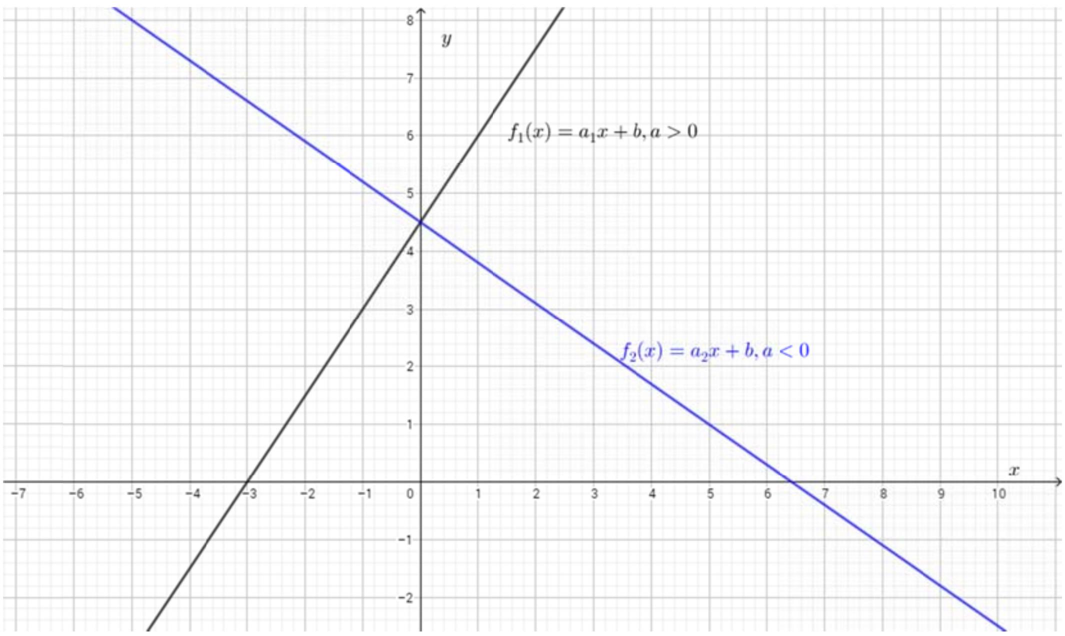


Figura 4: Gráfico das funções $f_1(x) = a_1x + b$, com $a_1 > 0$ e $f_2(x) = a_2x + b$, com $a_2 < 0$.

3.2.1
Casos Particulares da Função Afim

Se na função afim f dada por $f(x) = ax + b$ o coeficiente a (angular) for zero, a função fica: $f(x) = 0x + b = b$, essa função recebe o nome de função constante, é a função mais elementar da Matemática, graficamente é uma reta paralela ao eixo x passando por b.

Se na função afim f dada por $f(x) = ax + b$ o coeficiente b (linear) for zero, a função fica: $f(x) = ax + 0 = ax$, pelo fato de b ser zero, a reta necessariamente passa pela origem formando ângulo com o eixo x, já que o coeficiente angular é diferente de zero. Na figura 5 temos uma função constante com $b > 0$ e uma função linear com $a < 0$.

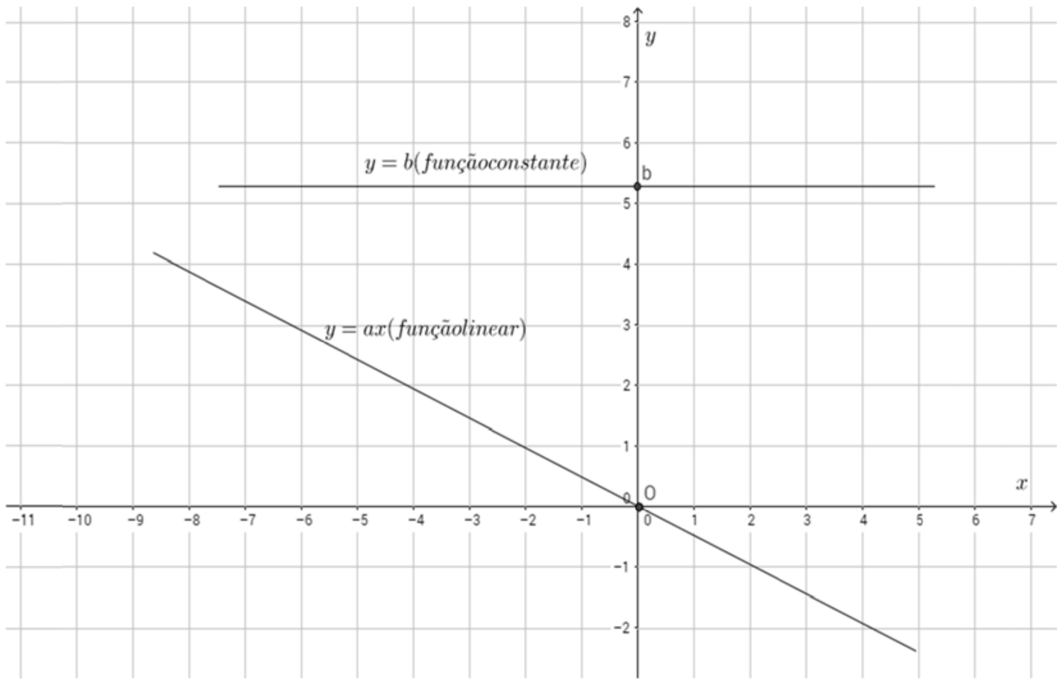


Figura 5: Gráfico da função constante de equação $y = b$, com $b > 0$ e o gráfico da função linear de equação $y = ax$, com $a < 0$.

Com o exposto acima, vamos construir, num mesmo plano cartesiano, as retas cujas equações são: (I) $y = 2x – 4$, (II) $y = – 2x + 6$, (III) $y = – 3x$ e (IV) $y = 4$. A figura 6 nos mostra o gráfico das quatro equações.

(I) Temos $a = 2 > 0$, uma reta crescente, cortando o eixo y no ponto A = (0, – 4).

(II) Temos $a = – 2 < 0$, uma reta decrescente, cortando o eixo y no ponto C = (0, 6).

(III) Temos $a = – 3 < 0$, uma reta decrescente, passando pela origem já que $b = 0$.

(IV) Temos $a = 0$, uma reta constante, cortando o eixo y no ponto F = (0, 4).

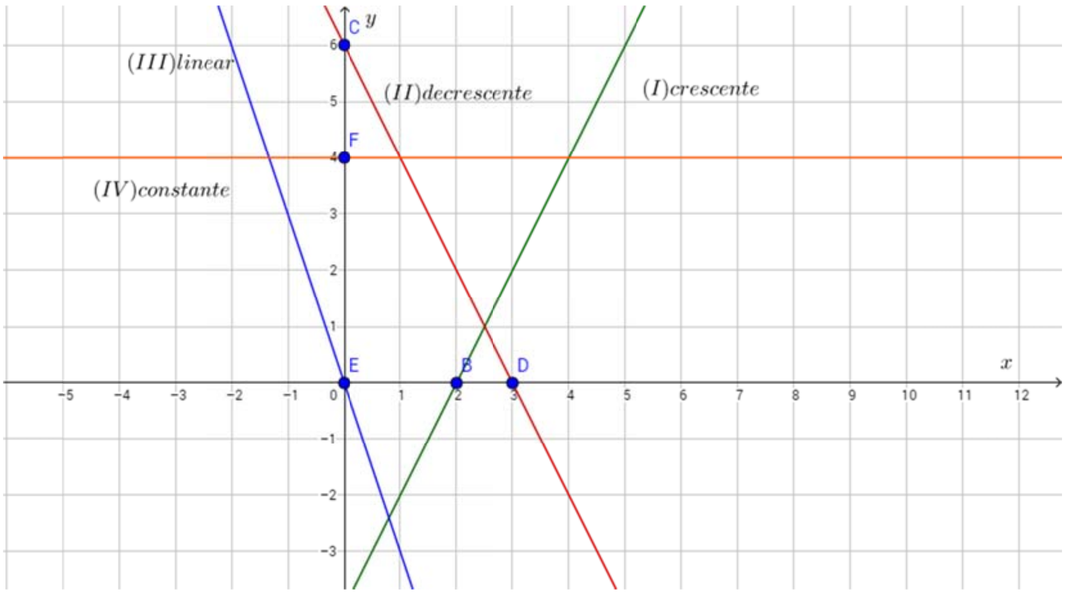


Figura 6: Os gráficos das equações (I), (II), (III) e (IV).

Nos gráficos da figura 6, temos três pontos, B = (2, 0), D = (3, 0) e E = (0, 0), que representam as interseções das retas (I), (II) e (III) com o eixo *x*. Esses pontos recebem o nome de zeros ou raízes da função e para calculá-los, basta igualar a função a zero e resolver a equação em *x,* encontrando o ponto onde o gráfico intersecta o eixo *x*, ou seja:

(I) $2x - 4 = 0$ (II) $-2x + 6 = 0$

$2x = 4$ $-2x = -6$

$x = 2$ $x = 3$

3.3
Posições Relativas de Duas Retas Coplanares

Duas retas podem se apresentar no mesmo plano das seguintes formas:

I – Concorrentes: quando possuem um ponto em comum, chamado de ponto de interseção das retas. Num sistema $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$ de equações lineares, tem solução única, que é o ponto de interseção das retas.

II – Paralelas Distintas: quando não possuem interseção. É o caso em que o sistema não tem solução, afinal, as retas não se encontram.

III – Paralelas Coincidentes: quando uma reta está sobre a outra. Nesse caso, dizemos que o sistema tem infinitas soluções, visto que todo ponto de uma reta pertence também a outra reta.

Dentre essas classificações, as retas paralelas distintas e concorrentes perpendiculares nos interessa de maneira especial.

3.3.1
Retas Paralelas Distintas

Para que duas retas sejam paralelas, elas devem ter a mesma inclinação, ou seja, mesmo coeficiente angular. Como o foco são equações da reta na forma reduzida, fica fácil verificar se duas retas são paralelas ou não, ou seja, se temos uma equação $y = ax + b$ e outra equação $y = cx + d$, essas equações (retas) serão paralelas, se e somente se, os coeficientes a e c forem iguais, $a = c$. Como exemplo, as retas de equação $y = -x - 2$ e $y = -x + 3$ são paralelas, pois possuem o mesmo coeficiente angular $a = -1$. No gráfico na figura 7 vemos tal situação.

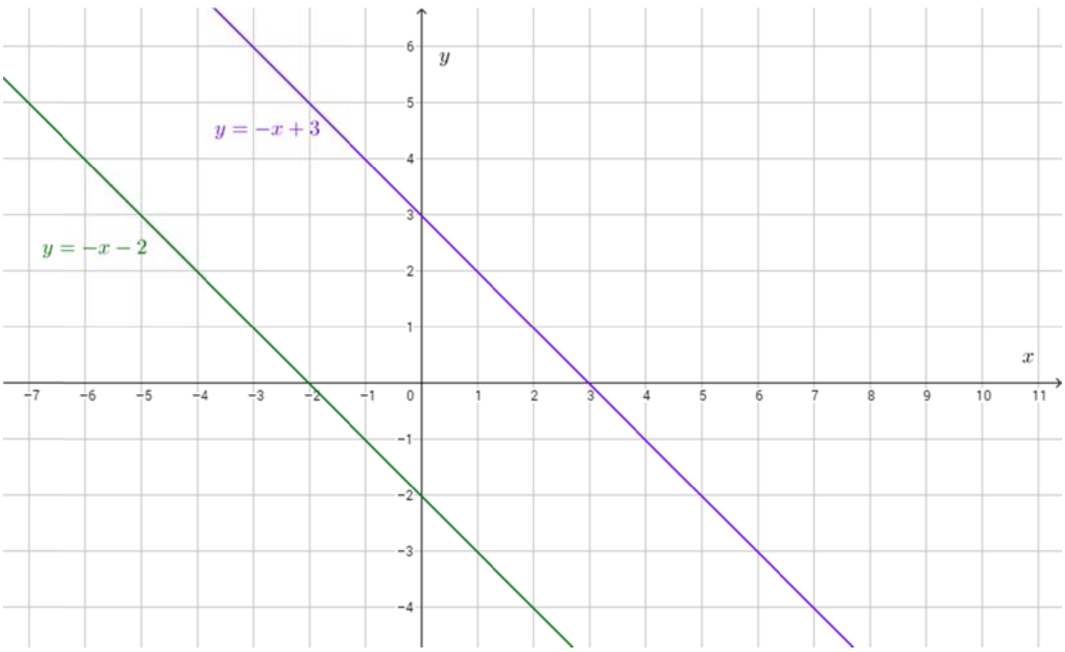


Figura 7: Os gráficos das retas de equações $y = -x + 3$ e $y = -x - 2$.

3.3.2
Retas Perpendiculares

Duas retas são ditas ortogonais ou perpendiculares se o ângulo formado por elas é de 90°. Se temos duas retas, sendo uma delas horizontal e outra vertical, pela própria definição, elas são perpendiculares.

Sejam r e s duas retas que não são horizontais nem verticais, com equações $y = mx + p$ e $y = nx + q$ respectivamente, observe que neste caso $m \neq$

0 e $n \neq 0$. Afirmamos que *r* e *s* são perpendiculares, se e somente se, o produto dos coeficientes angulares *m* e *n* for igual a -1, ou seja, $m.n = -1$, ou também podemos dizer que duas retas são perpendiculares se os coeficientes angulares são opostos e inversos, ou seja, $m = -\frac{1}{n}$. Para provar essa afirmação, vamos supor primeiro que $m.n = -1$ e vamos provar que *r* e *s* formam entre si um ângulo de 90°. Para isso vamos considerar as funções lineares *f* e *g* de expressões $f(x) = mx$ e $g(x) = nx$ cujos gráficos são retas de equações $y = mx$ e $y = nx$, sendo lineares, ambas passam pela origem. Vamos pegar o ponto A = (1, m) pertencente ao gráfico de *f* e um ponto B = $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ pertencente ao gráfico de *g*, a figura 8 nos mostra os gráficos das funções *f* e *g* e os pontos A e B, ilustrando o caso em que $m > 0$ (neste caso, como $m.n = -1$ por hipótese, temos então $n < 0$).

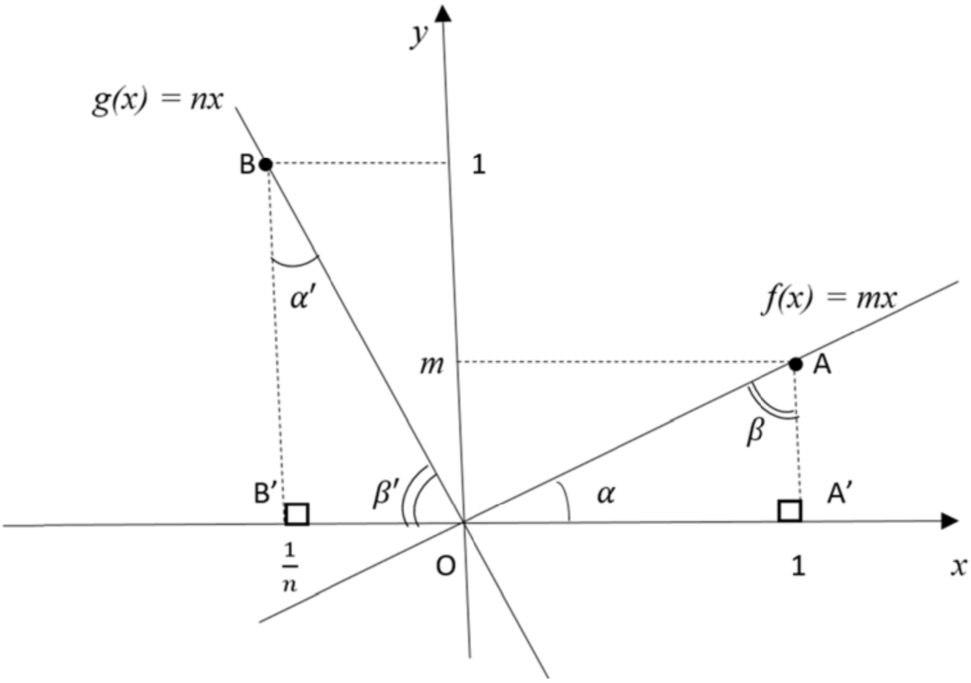


Figura 8: As funções $f(x) = mx$ e $g(x) = nx$ e os pontos A = (*1, m*) e B = $(\frac{1}{n}, 1)$.

Pela figura 8, é fácil verificar que os triângulos AOA' e BOB' são congruentes pois são triângulos retângulos com um cateto medindo |OA'| = |BB'| = 1 e outro cateto medindo |AA'| = |OB'| = $-\frac{1}{n}$, temos então o caso de congruência LAL(lado-ângulo-lado), logo os ângulos α, α', β e β' definidos na figura 8 são tais que α = α' e β = β', como no triângulo retângulo AOA', α + β = 90°(soma dos ângulos internos de um triângulo), e a soma dos ângulos $\alpha + A\hat{O}B + \beta' = 180°$ (no eixo x a soma desses ângulos representa um ângulo raso), concluímos que $A\hat{O}B = 90°$, logo as retas que são os gráficos das funções *f* e *g* são perpendiculares, ou seja, formam um ângulo de 90°.

Verificaremos agora que se as retas *r* e *s* são perpendiculares, o produto de seus coeficientes angulares é igual a – 1, ou seja, *m.n* = –1. Usamos ainda α, α’, β e β’ como na figura 8. Estamos supondo agora que $A\hat{O}B$ = 90°. Com isso temos α + β’ = 90°. Como o triângulo AOA’ é retângulo, temos α + β = 90°, também o triângulo BOB’ é retângulo logo α’ + β’ = 90°. De α + β’= 90º = α + β, temos β = β’, de α + β’= 90º = α’ + β’, temos α = α’. Logo os triângulos retângulos AOA’ e BOB’ são semelhantes, mais ainda, como |OA’| = |BB’| = 1, os triângulos são congruentes pelo caso de congruência ALA (ângulo-lado-ângulo). Temos então que *m* = |AA’| = |OB’| = $-\frac{1}{n}$, e finalmente *m.n* = –1.

3.4
Translação de Retas

Transladar é movimentar (deslocar) um objeto de um ponto a outro. A translação é um deslocamento paralelo, em linha reta, na mesma direção e mesmo sentido de um objeto em questão em função de um vetor.

Podemos transladar um objeto, por exemplo, um segmento de reta, na horizontal. Na figura 9, temos a translação horizontal do segmento $\overline{\mathrm{AB}}$, com A = (1, 2) e B = (3, 5), quatro unidades para direita, chegando no segmento $\overline{\mathrm{A'B'}}$, sendo que A’ = (1 + 4, 2 + 0) = (5, 2) e B’ = (3 + 4 , 5 + 0) = (7, 5), note que na translação horizontal os valores das ordenadas dos pontos que são extremidades do segmento permanecem inalterados assim como o tamanho do segmento.

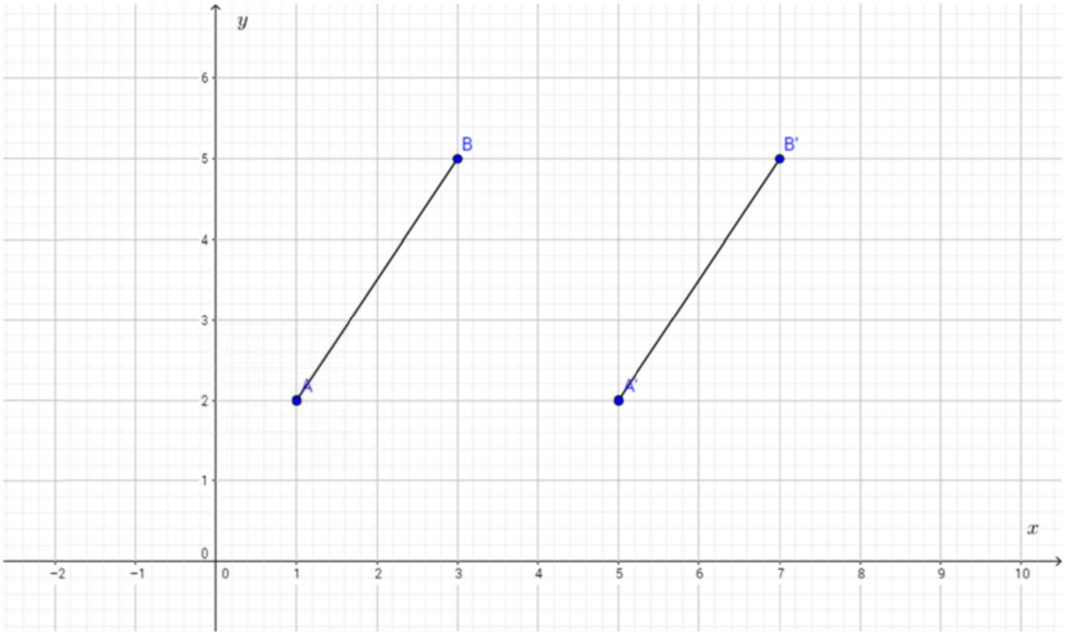


Figura 9: Translação do segmento $\overline{AB}$ no segmento $\overline{A'B'}$.

Também podemos transladar um objeto na vertical, usando também um segmento de reta como no exemplo anterior, temos na figura 10 a translação do segmento $\overline{CD}$, com C = (3, 1) e D = (5, 4), quatro unidades para cima, chegando ao segmento $\overline{C'D'}$, sendo C' = (3 + 0, 1 + 4) = (3, 5) e D'= (5 + 0, 4 + 4) = (5, 8), também verificamos que o tamanho do segmento não se altera, e agora na translação vertical as abscissas dos pontos extremidade permanecem as mesmas.

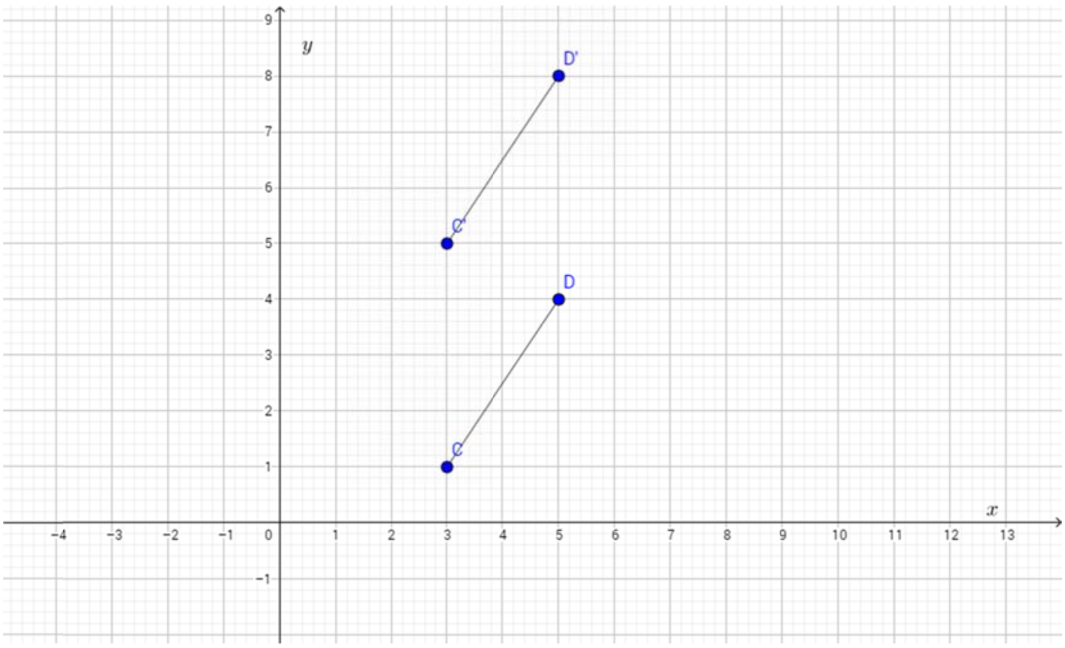


Figura 10: Translação do segmento $\overline{CD}$ no segmento $\overline{C'D'}$.

De forma geral, a translação de um ponto (x, y) com relação a um vetor (z, w) é o ponto ($x+z$, $y+w$). Isso significa uma translação horizontal em $|z|$ unidades para a direita se $z \geq 0$ ou para a esquerda se $z \leq 0$, e uma translação vertical em $|w|$ unidades para cima se $w \geq 0$ ou para baixo se $w \leq 0$.

Na translação do gráfico de uma função f com relação a um vetor (z, w) obtemos o gráfico de uma função, digamos g dada por $g(x) = f(x - z) + w$. De fato, a translação de ponto P = (x, $f(x)$) do gráfico de f é o ponto Q = ($x+z$, $f(x) + w$) e, para entendermos este ponto como um ponto do gráfico de uma função, podemos escrever $x' = x+z$ (e $x = x' - z$), $f(x) + w = f(x' - z) + w$ e Q = (x', $f(x' - z) + w$). Assim, $g(x) = f(x - z) + w$. Em particular, se o gráfico de f é a reta de equação $y = ax+b$, então o gráfico de g é a reta de equação y = $ax + b + c$, onde $c = - a\,z + w$.

Na translação de retas, o objeto em questão é uma reta e o vetor tem a direção de uma reta perpendicular à reta que será transladada passando pela origem do plano, sendo o deslocamento paralelo, a translação de uma reta sempre será outra reta paralela à reta em questão. Se as retas a serem transladadas forem horizontais ou verticais, basta somarmos o valor que se queira à constante em questão, se quisermos subir, retas horizontais, ou deslocar à direita, retas verticais, caso queiramos descer ou caminhar para a esquerda, basta subtrairmos à constante dada. Como exemplo, na figura 11 temos a translação das retas $y = 2$ e $x = 3$, transladadas cinco unidades para cima e quatro unidades para a direita, respectivamente.

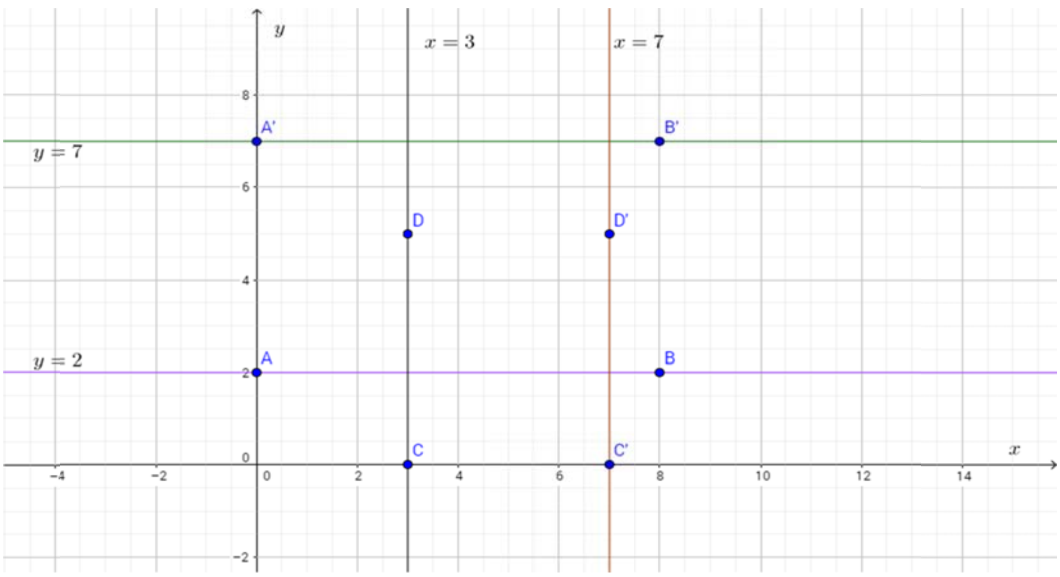


Figura 11: As retas de equação $y = 2$ e $x = 3$ transladadas para $y = 7$ e $x = 7$.

Se a reta a ser transladada não for horizontal nem vertical, basta somarmos ou subtrairmos o valor desejado ao coeficiente linear da reta a ser transladada, veja que o coeficiente angular não se altera garantindo que todas as retas possuam o mesmo ângulo formado com o eixo x, sendo assim paralelas à reta em questão.

Todas as retas transladadas são perpendiculares a uma mesma reta perpendicular à reta original.

Como exemplo, o gráfico na figura 12 mostra uma reta y_1 transladada por y_2, y_3, y_4, todas paralelas entre si e perpendiculares à reta y_5.

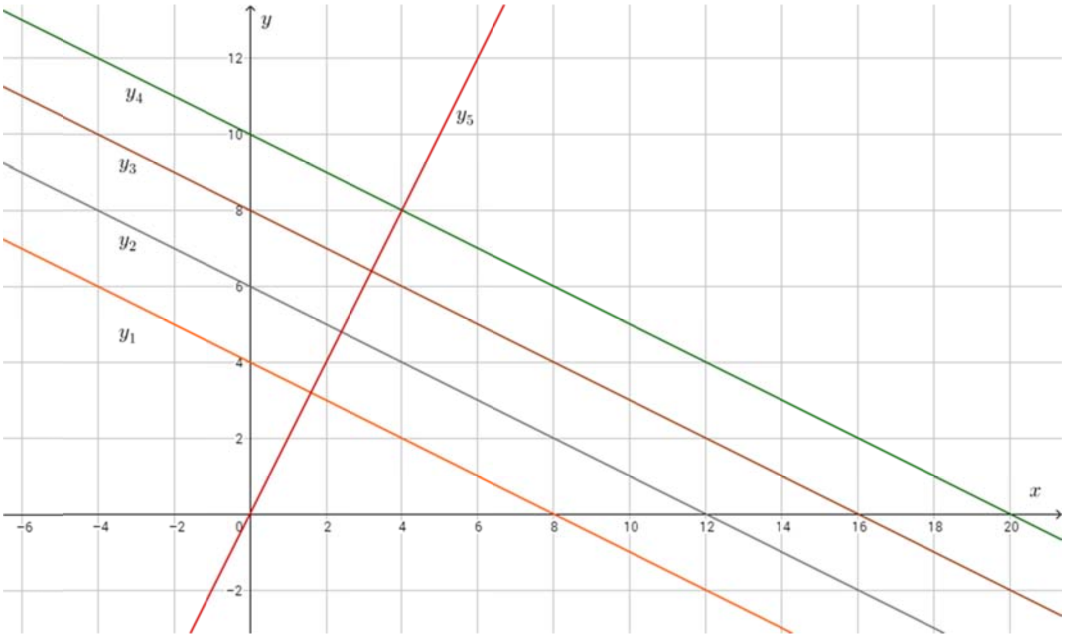


Figura 12: Retas transladadas.

Ao transladarmos uma reta, teremos uma família de retas paralelas, esta família de retas também é chamada de linhas de nível.

3.5 Desigualdades Lineares e Regiões Planas

Quando traçamos uma reta em um plano, esse plano fica dividido em duas partes, ou em duas regiões chamadas de semiplanos. Se a reta em questão for horizontal ou vertical, as regiões são dadas pelas seguintes desigualdades:

Para a reta horizontal $y = a$ temos as seguintes regiões no plano:

I) Região $y > a$ representada na figura 13.

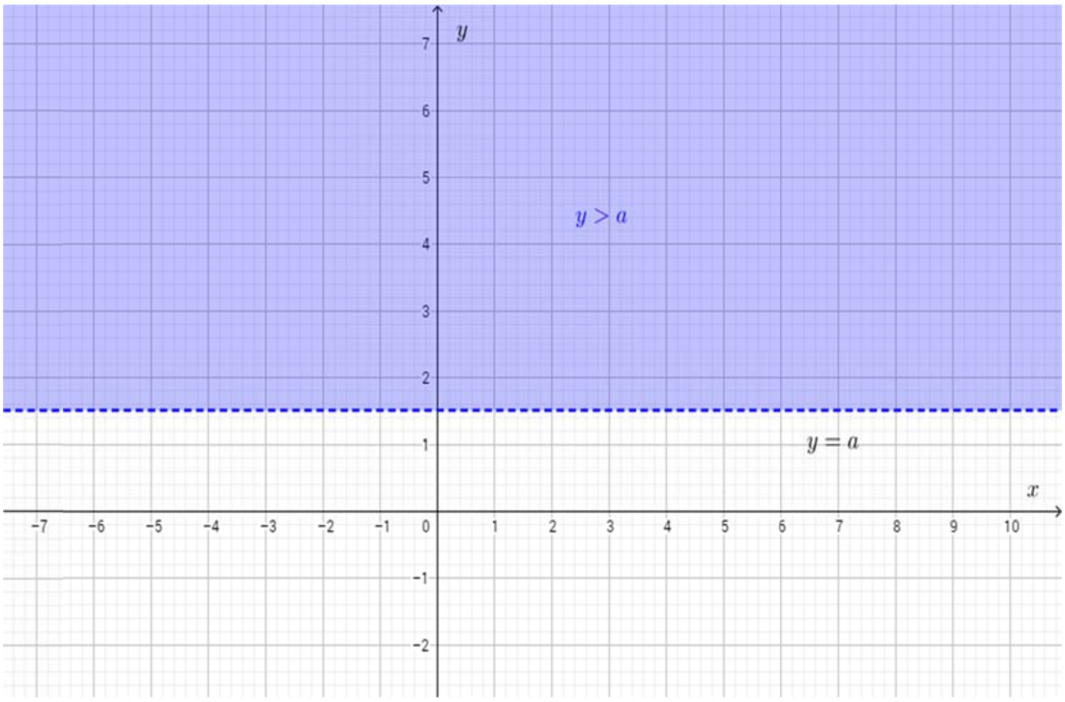


Figura 13: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > a\}$.

II) Região $y \geq a$ representada na figura 14.

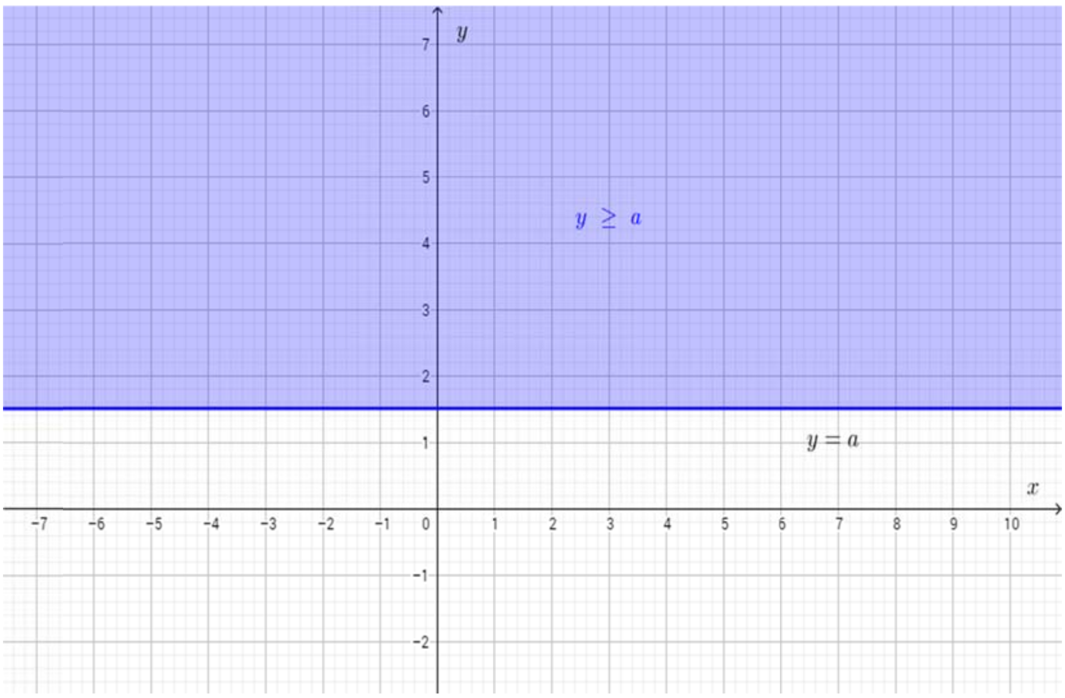


Figura 14: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq a\}$.

III) Região $y < a$ representada na figura 15.

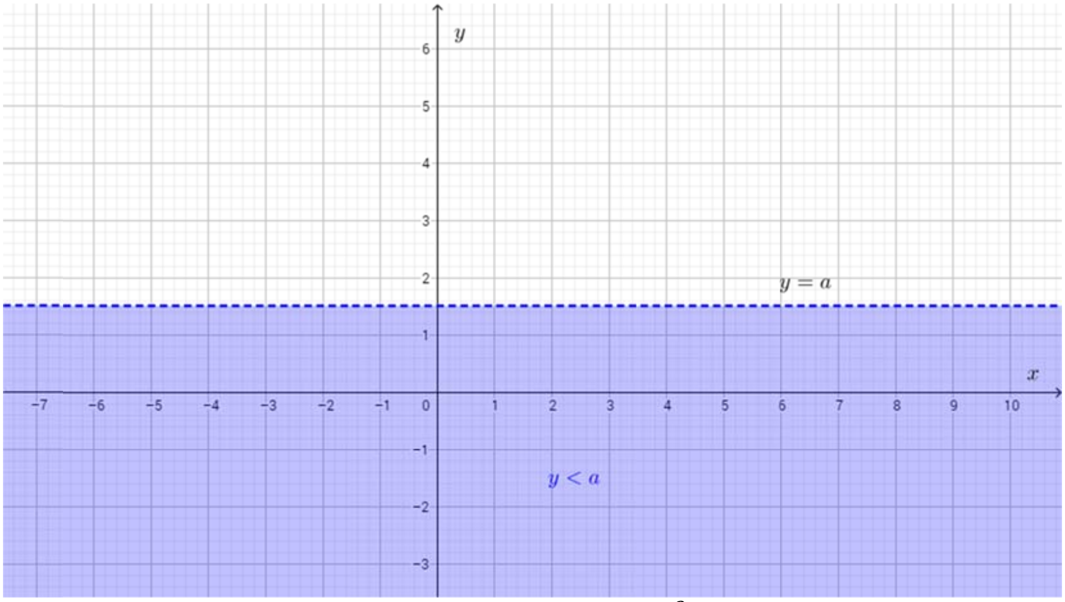


Figura 15: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y < a\}$.

IV) Região $y \leq a$ representada na figura 16.

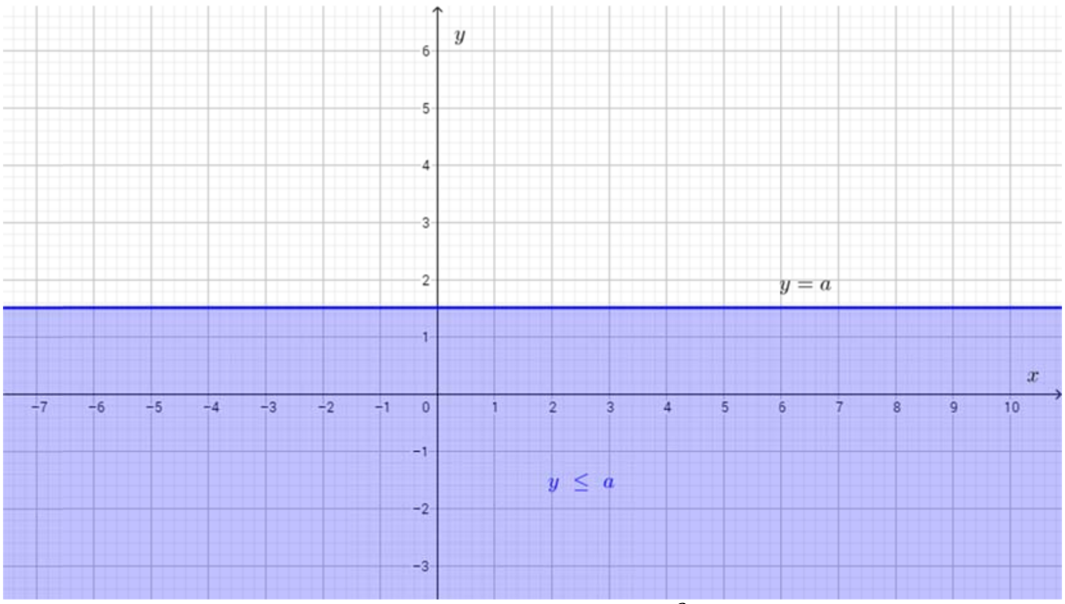


Figura 16: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \leq a\}$.

Para a reta vertical $x = a$ temos as seguintes regiões no plano:

I) Região $x > a$ representada na figura 17.

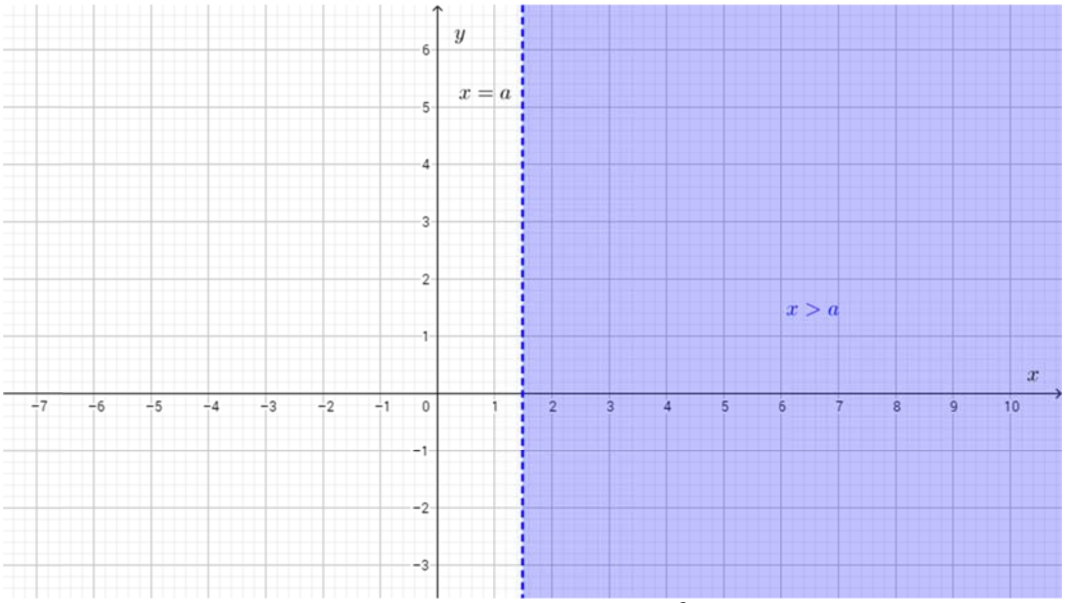


Figura 17: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a\}$.

II) Região $x \geq a$ representada na figura 18.

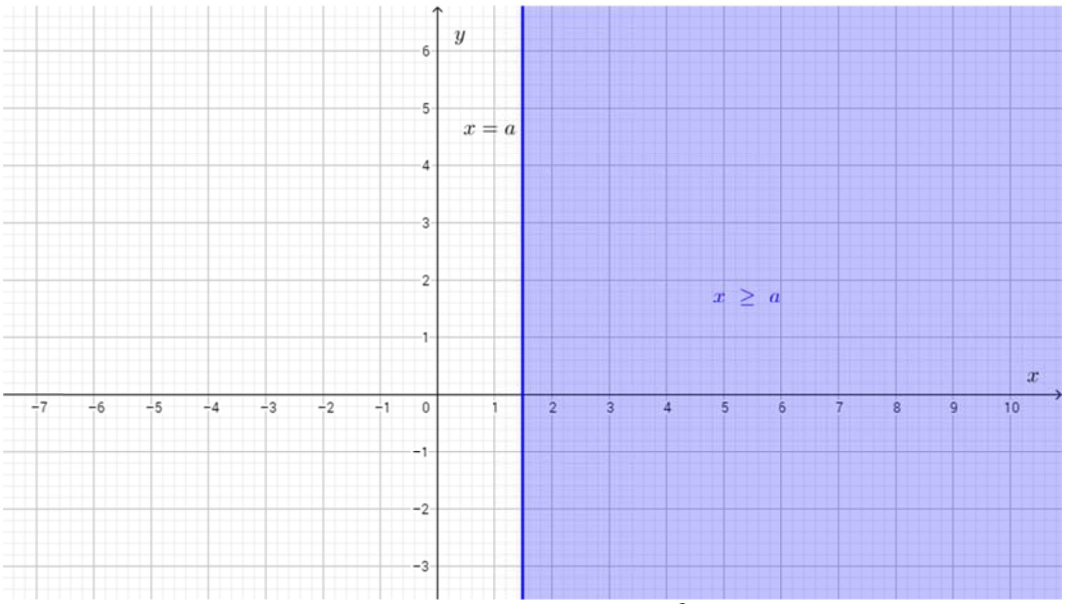


Figura 18: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq a\}$.

III) Região $x < a$ representada na figura 19.

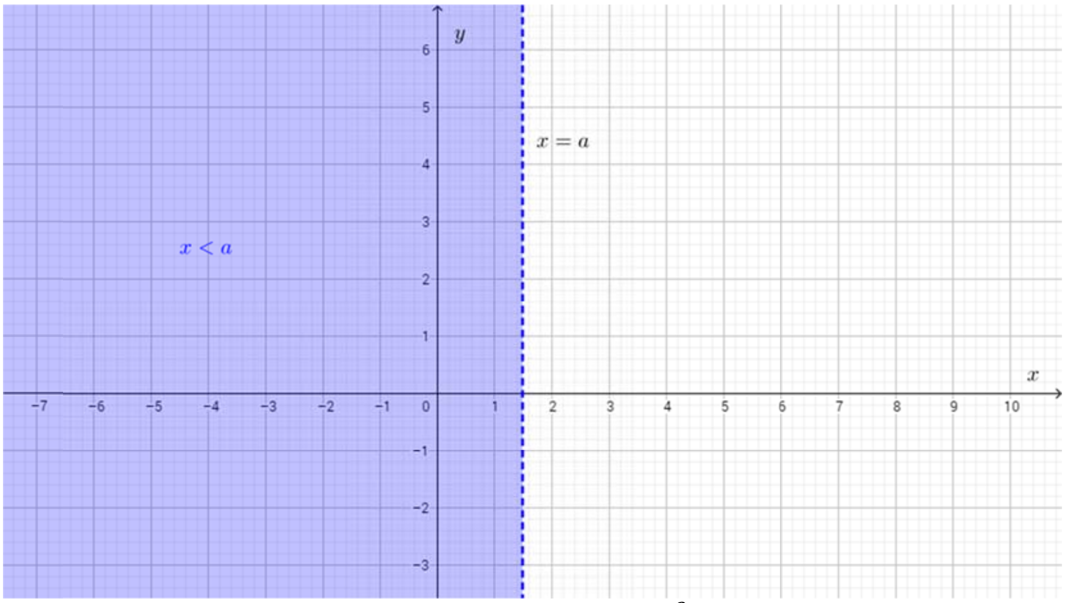


Figura 19: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x < a\}$.

IV) Região $x \leq a$ representada na figura 20.

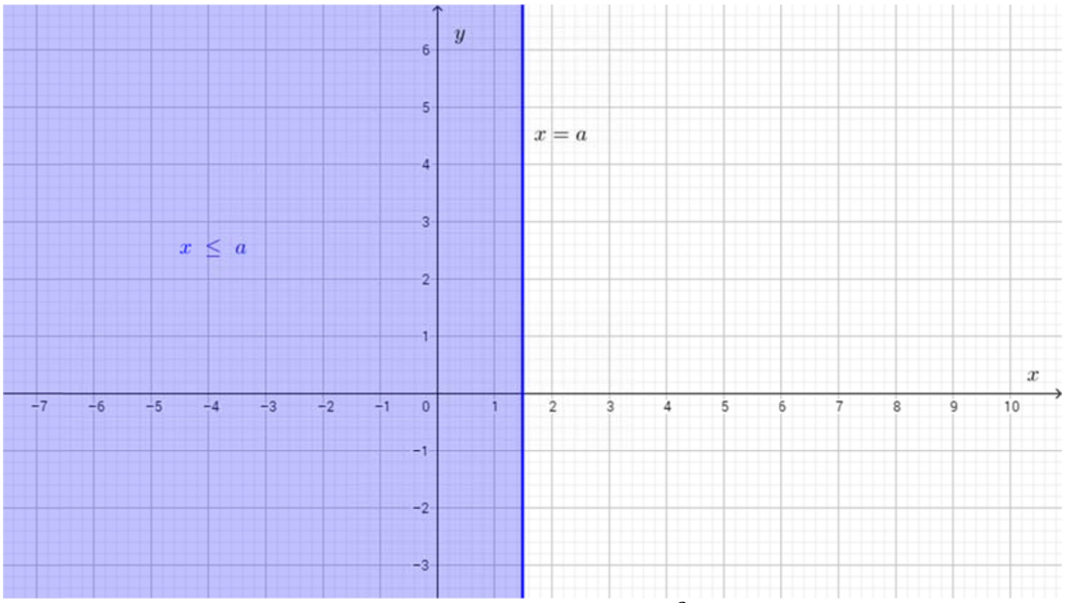


Figura 20: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \leq a\}$.

Uma observação importante a ser feita é que quando as retas fronteiras $y = a$ ou $x = a$, que dividem o plano em duas regiões são consideradas, temos desigualdades do tipo $y \geq a$, $y \leq a$, $x \geq a$ e $x \leq a$, a linha que usamos para representar reta fronteira é contínua, já quando as desigualdades são $y > a$, $y < a$, $x > a$ e $x < a$, a linha fica pontilhada.

Para desigualdades do tipo $y > ax + b$, $y \geq ax + b$, $y < ax + b$ e $y \leq ax + b$, verificamos as regiões cujos pontos P = (x, y) satisfazem as inequações:

I) Região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > ax + b\}$ representada na figura 21, o semiplano é representado pelos pontos que estão acima da reta $y = ax + b$.

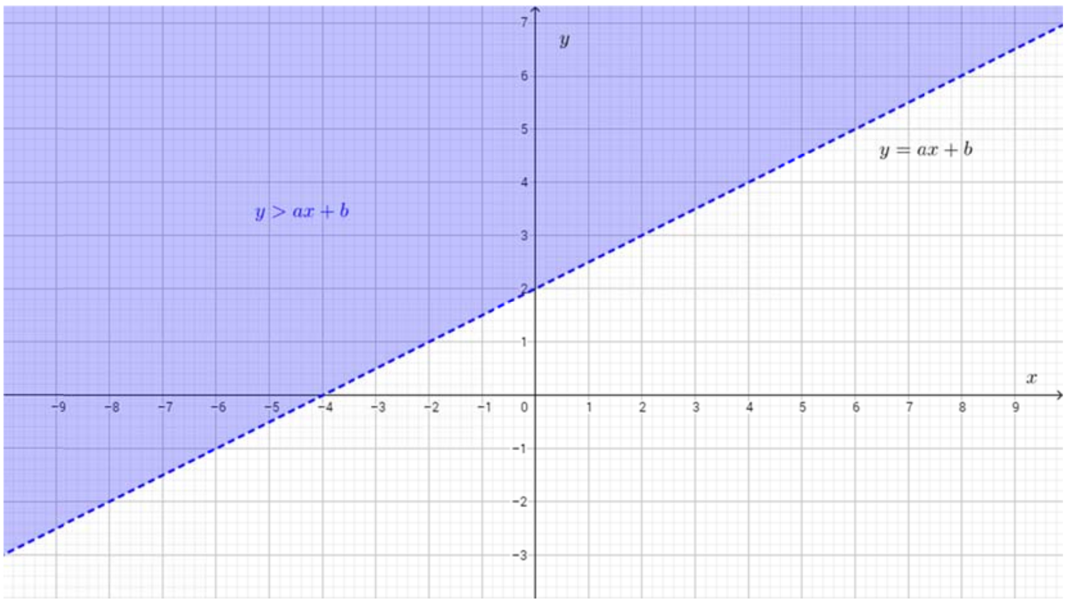


Figura 21: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > ax + b\}$.

II) Região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \geq ax + b\}$ representada na figura 22, o semiplano é representado pelos pontos que estão acima da reta ou que pertencem a reta $y = ax+b$.

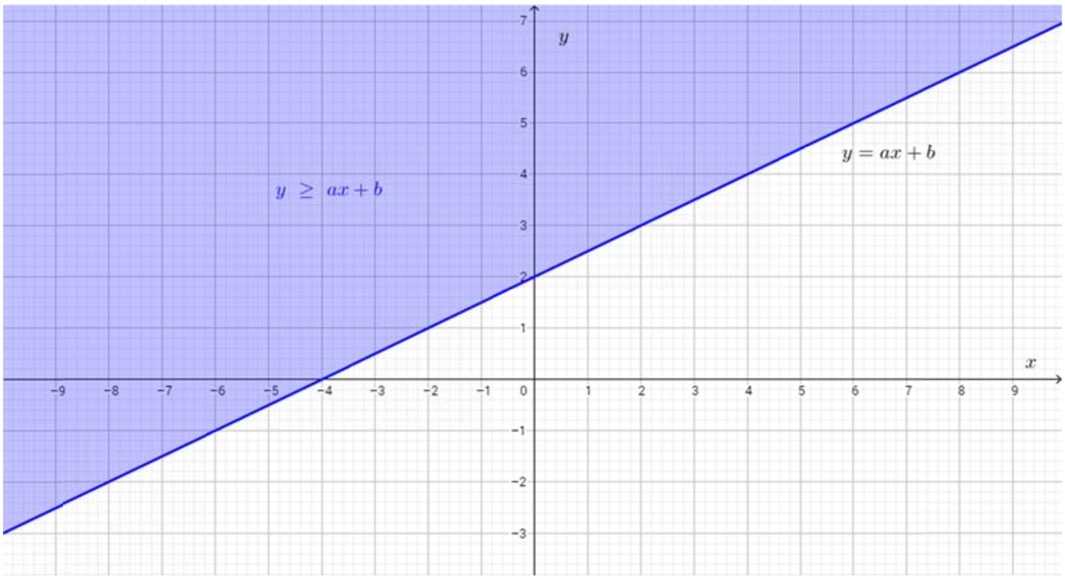


Figura 22: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \geq ax + b\}$.

III) Região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y < ax + b\}$ representada na figura 23, o semiplano é representado pelos pontos que estão abaixo da reta $y = ax + b$.

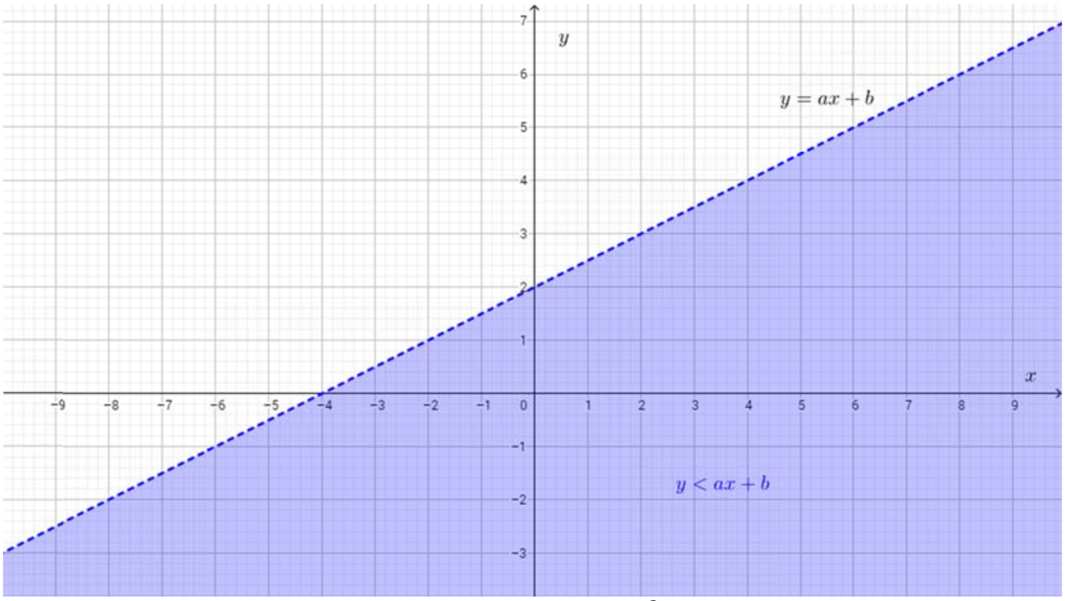


Figura 23: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y < ax + b\}$.

IV) Região $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \leq ax + b\}$ representada na figura 24, o semiplano é representado pelos pontos que estão abaixo da reta ou que pertencem a reta.

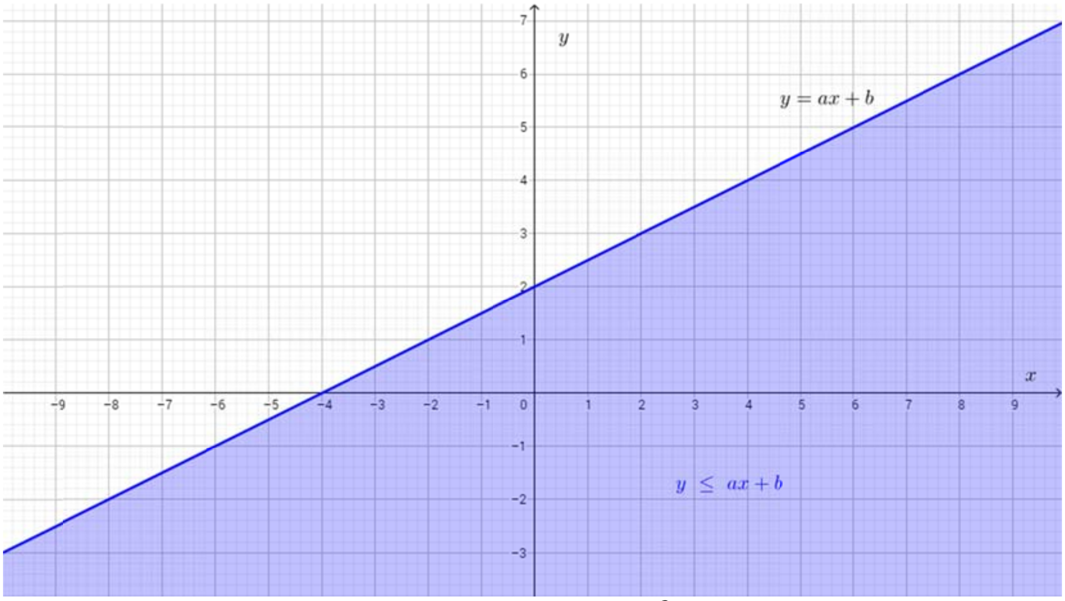


Figura 24: *: Região plana* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \leq ax + b\}$.

Também verificamos para essas desigualdades que quando os sinais são $\leq$ e $\geq$, temos que a linha que representa a reta fronteira de equação $y = ax + b$ é contínua, e quando a desigualdade é < ou >, a linha fica tracejada.

Todas as regiões planas acima foram construídas com a mesma reta fronteira de equação $y = -0{,}5x + 2,$ como exemplo, fixemos a abscissa $x = 8$ e a região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \leq -0{,}5x + 2\}$, neste exemplo vamos visualizar na figura 25 os pontos A = (8, 2), B = (8, 6) e C = (8, 10) onde veremos um exemplo de um ponto A que pertence à região, um ponto B que está na reta fronteira e um ponto C que está fora da região.

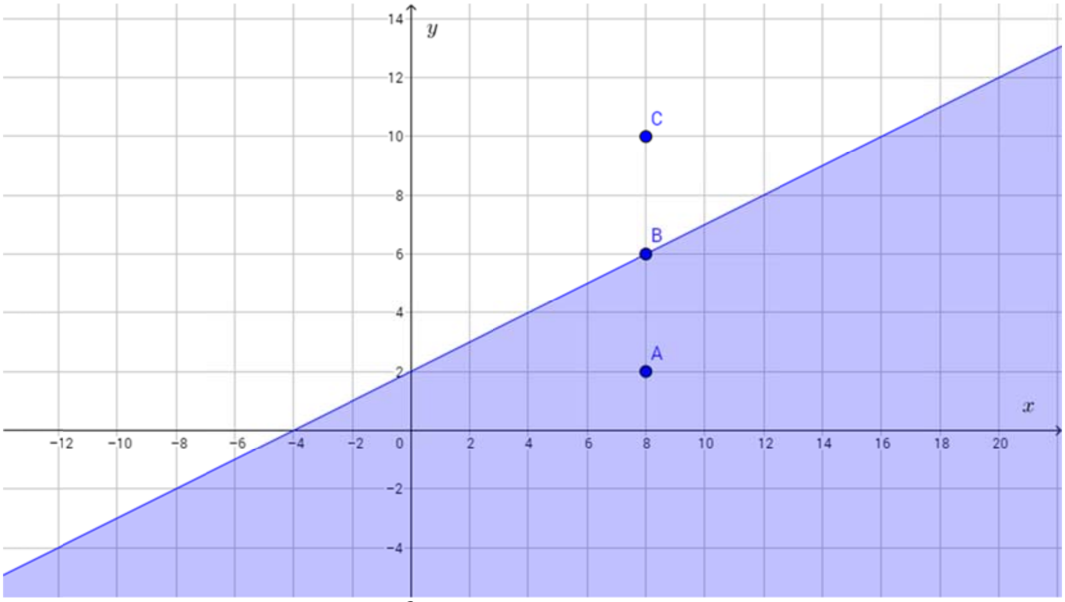


Figura 25: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \leq 0{,}5x + 2\}$ com os pontos A=(8, 2), B=(8, 6) *e* C=(8, 10).

3.6
Sistemas de Desigualdades Lineares

Quando temos um conjunto finito de inequações lineares, aplicadas em um mesmo conjunto, denominamos esse conjunto de sistema de desigualdades lineares, onde o conjunto solução pode ser uma região plana, limitada ou não. Resolver um sistema de desigualdades é procurar pontos que satisfaçam, concomitantemente, todas as desigualdades do sistema, a solução do sistema é a intersecção dos semiplanos correspondentes às inequações do sistema, formando uma região convexa que pode ser, de acordo com as inequações envolvidas, limitada ou não.

Vamos determinar como exemplo, a região solução das desigualdades abaixo:

$$(I)\ 3x + 5y \leq 150$$

$$(II)\ x + 4y \leq 80$$

$$(III)\ x \leq 40$$

$$(IV)\ x \geq 0$$

$$(V)\ y \geq 0$$

As desigualdades (I) e (II) acima estão escritas na forma que normalmente aparecem em problemas de otimização, mas são mais bem compreendidas graficamente se reescrevermos na sua forma reduzida:

$$\text{(I) } y \leq -\frac{3}{5}x + 50$$

$$\text{(II) } y \leq -\frac{x}{4} + 20$$

$$\text{(III) } x \leq 40$$

$$\text{(IV) } x \geq 0$$

$$\text{(V) } y \geq 0$$

Vamos ver como fica o gráfico da interseção das regiões planas dadas pelas inequações (I) e (III) na figura 26.

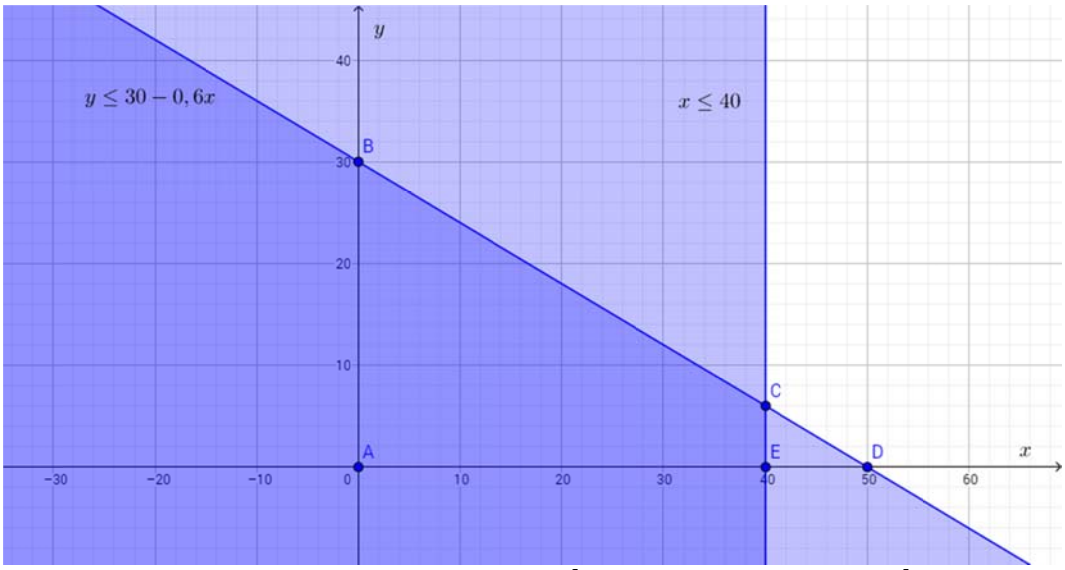


Figura 26: Interseção das regiões planas *{(x, y)* ∈ $\mathbb{R}^2$| *y ≤ 30 – 0,6x}* e *{(x, y)* ∈ $\mathbb{R}^2$| *x ≤ 40}* com os pontos A = (0,0), B = (0,30), C = (40,6), D = (50,0) e E = (40,0).

Fazendo esse processo de interseção com as cinco inequações, teremos na figura 27, a região delimitada pelos vértices A, F, G, C e E, essa região plana é a solução gráfica do sistema de desigualdades do exemplo acima. É interessante notar que qualquer ponto no interior da região e nos segmentos de reta que delimitam a região são soluções do sistema proposto.

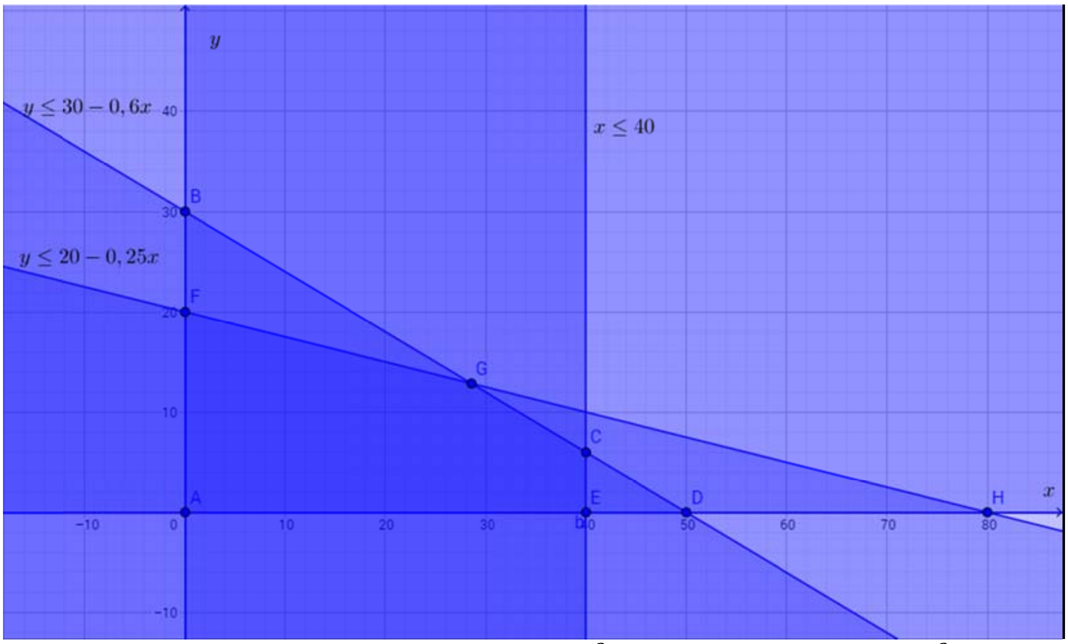


Figura 27*:* Interseção das regiões planas $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \le 30 - 0{,}6x\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \le 20 - 0{,}25x\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \le 40\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x \ge 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ y \ge 0\}$ com os pontos A = (0,0), B = (0,30), C = (40,6), D = (50,0), E = (40,0), F = (0, 20), G= (200/7, 90/7) *e* H = (80, 0).

4
Otimização

Se pesquisarmos o significado da palavra otimizar, teremos por exemplo no site (www.significados.com.br) a seguinte definição: “ Otimizar significa tornar ótimo ou ideal, é extrair o melhor rendimento possível, no que concerne a qualquer área de atividade”. Estudar, conhecer, selecionar e empregar meios que façam os objetivos serem alcançados da melhor forma possível. Otimizar é estabelecer metas, prioridades, para que a eficiência nos resultados seja alcançada.

É comum ouvir falar em otimizar o tempo, otimizar custos, otimizar produção, otimizar os estudos, enfim, entre tantas outras situações, mas todas elas nos reportam à mesma questão: maximizar ou minimizar.

Acredito que a modelagem matemática seja uma ferramenta importante e poderosa para auxiliar as pessoas, instituições, empresas e governos, conseguirem otimizar as questões inerentes a cada situação prática do dia a dia referente ao seu âmbito de atuação. Alguns exemplos práticos: como conseguir estudar todas as matérias do colégio durante a semana (um exemplo simples do cotidiano de qualquer aluno), até uma questão mais complexa, como reduzir custos de uma grande produção sem perder a qualidade da produção.

Existem vários modelos de otimização matemática, é muito importante salientar que nem todas as situações são passíveis de modelagem matemática, mas a proposta da dissertação é justamente estudar modelos de otimização que sejam de fácil entendimento e aplicabilidade, principalmente no Ensino Médio.

Quando se fala de otimização, os modelos solução gráfica e o simplex aparecem nas dissertações do PROFMAT e em outras literaturas. Temos também o método dos pontos interiores desenvolvido por Karmarkar [5] que se opõe ao simplex como solução mais rápida; podemos ir para cálculo diferencial e usar as funções derivadas para encontrar máximos e mínimos de funções [6], enfim, temos um leque de possibilidades para tratar do tema otimização.

Dentre os modelos citados acima, optei pelo modelo gráfico por achar mais intuitivo e aplicável à realidade dos alunos no Ensino Médio público do Estado do Rio de Janeiro.

5
Modelo de resolução gráfica

É importante salientar que o nosso foco são problemas de Programação Linear com duas variáveis de controle, pois para resolver problemas com mais de duas variáveis precisaríamos de outros métodos de solução.

Para resolver um problema de otimização pelo modelo de resolução gráfica, precisamos conhecer algumas definições que serão necessárias para o entendimento do modelo, que são: Parâmetros, variáveis de decisão, função objetivo e conjunto de restrições. Temos então:

- Parâmetros: são valores fixos presentes no problema a ser resolvido.

- Variáveis de decisão: são as incógnitas que queremos descobrir, ou seja, é o foco do nosso modelo.

- Função objetivo: é uma função matemática, que depende das variáveis de decisão e que queremos otimizar (maximizar ou minimizar) considerando os parâmetros estabelecidos.

- Conjunto de restrições: são as relações de interdependência entre as variáveis de decisão.

Para formular um problema de otimização, observamos a seguinte ordem:

1. Identificar as variáveis de decisão
2. Montar a função objetivo
3. Verificar o conjunto de restrições

Para apresentar o modelo de resolução gráfica, vamos partir de um exemplo prático para que o entendimento fique mais fácil para os alunos. Vamos supor que tenhamos que alocar recursos para a fabricação de computadores modelos standard e premium. O modelo standard fornece um lucro de R$360,00 e o premium de R$600,00. O modelo standard requer, na sua produção, um gabinete simples e uma porta USB, já o modelo premium usa um gabinete maior e mais bonito com duas portas USB. No estoque existem 120 gabinetes simples, 100 gabinetes grandes 240 portas USB. A partir desses dados, como deve ser a produção desses computadores para que o lucro seja máximo?

Colocando esses dados em uma tabela, representada na tabela 1, para melhor visualização dos dados do problema, teremos:

MODELOS	STANDARD	PREMIUM
LUCRO	R$ 360,00	R$ 600,00
GABINETE	SIMPLES	GRANDE
ESTOQUE	120	100
PORTA USB	1	2
ESTOQUE	240	

Tabela 1: Estoque de peças

Nosso objetivo é fabricar computadores modelos standard e premium que maximizem o lucro. Antes de mostrar o modelo gráfico, é interessante fazer os alunos buscarem a solução por tentativa e erro, usando como auxílio uma calculadora, para que não se perca muito tempo fazendo contas. Sugiro fazer uma disputa entre os alunos para ver quem chega primeiro na solução, aliás, dependendo da turma que se trabalhe, a disputa entre grupos é uma estratégia interessante para eles focarem no problema.

Após a disputa entre os alunos, é hora de mostrar um método para resolver o problema, que no caso é o modelo de resolução gráfica. Primeiro passo é identificar as variáveis de decisão, que a tabela acima mostra de forma bem didática. No segundo passo, que é montar a função objetivo, temos algumas formas de representar as variáveis trabalhadas: Podemos chamar as quantidades standard de s e as quantidades premium de p e o lucro de L ou ir para as mais usuais x, y e Z, sendo assim podemos escrever a função objetivo como:

$$L = 360s + 600p \quad \text{ou} \quad Z = 360x + 600y$$

Agora vamos para as restrições:

1) Gabinetes: Temos os modelos simples e grandes nas quantidades respectivas de 120 e 100 totalizando 220 gabinetes, então a primeira restrição fica:

$$s + p \leq 220 \text{ ou } x + y \leq 220$$

2) Porta USB: O modelo standard usa uma porta USB e o modelo premium, duas portas USB, o estoque dispõe de 240 portas, essa restrição nos dá a inequação:

$$s + 2p \leq 240 \quad \text{ou} \quad x + 2y \leq 240$$

3) A condição de não negatividade, afinal ninguém produz negativamente, veja que a produção zero é possível. Por exemplo: não produzir o modelo standard e só produzir o modelo premium é uma situação que pode acontecer:

$$s \geq 0 \text{ e } p \geq 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 0 \quad \text{e} \quad y \geq 0$$

Juntando as informações acima, temos um modelo de Programação Linear do tipo:

Maximizar a função L = 360s + 600p com as restrições:

$$\begin{cases} s + p \leq 220 \\ s + 2p \leq 240 \\ s \geq 0 \\ p \geq 0 \end{cases}$$

ou

Maximizar a função Z = 360x + 600y com as restrições:

$$\begin{cases} x + y \leq 220 \\ x + 2y \leq 240 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y \leq 220 - x \\ y \leq 120 - 0{,}5x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Apesar de ser interessante chamar as variáveis pelas letras iniciais, eu particularmente prefiro as tradicionais x e y, pelo fato que vamos trabalhar gráficos, retas e regiões planas, e falar para os alunos que o eixo das abscissas agora será denotado de s e eixo das ordenadas pela letra p, pode gerar um pouco de confusão nos alunos, afinal eles têm como alicerce os eixos x e y. Acredito que seja uma forma deles não acharem que tudo mudou, ou seja, mesmo sendo um problema de aplicação, são ferramentas que eles conhecem.

Uma forma interessante de os alunos identificarem o que as variáveis x e y representam, é colocar no gráfico, junto aos eixos cartesianos, o que as variáveis significam, no exemplo em questão, x (standard) e y (premium).

Vamos começar construindo os gráficos das restrições, que são regiões planas, onde o Plano Viável representa a região de pontos que satisfazem as inequações:

1) Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; x + y \leq 220\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \; y \leq 220 - x\}$ representada na figura 28.

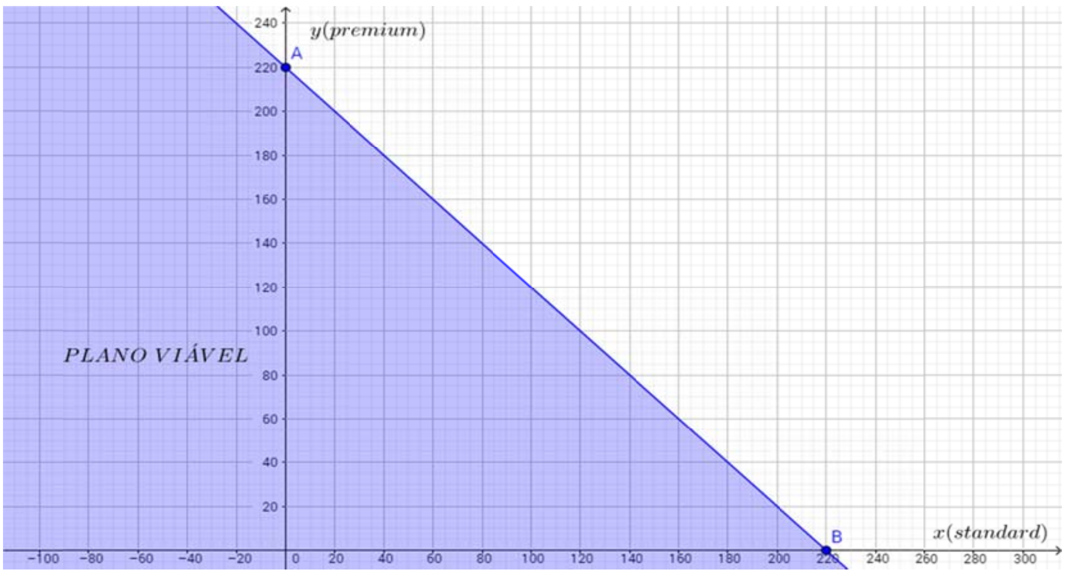


Figura 28: Região plana dada por $y \leq 220 - x$ e os pontos A = (0,220) e B = (220,0).

2) Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \leq 240\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \| y \leq 120 - 0{,}5x\}$ representada na figura 29.

Figura 29: Região plana dada por $y \leq 120 - 0{,}5x$ e os pontos A = (0,120) e B = (240,0).

3) Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$ representada na figura 30.

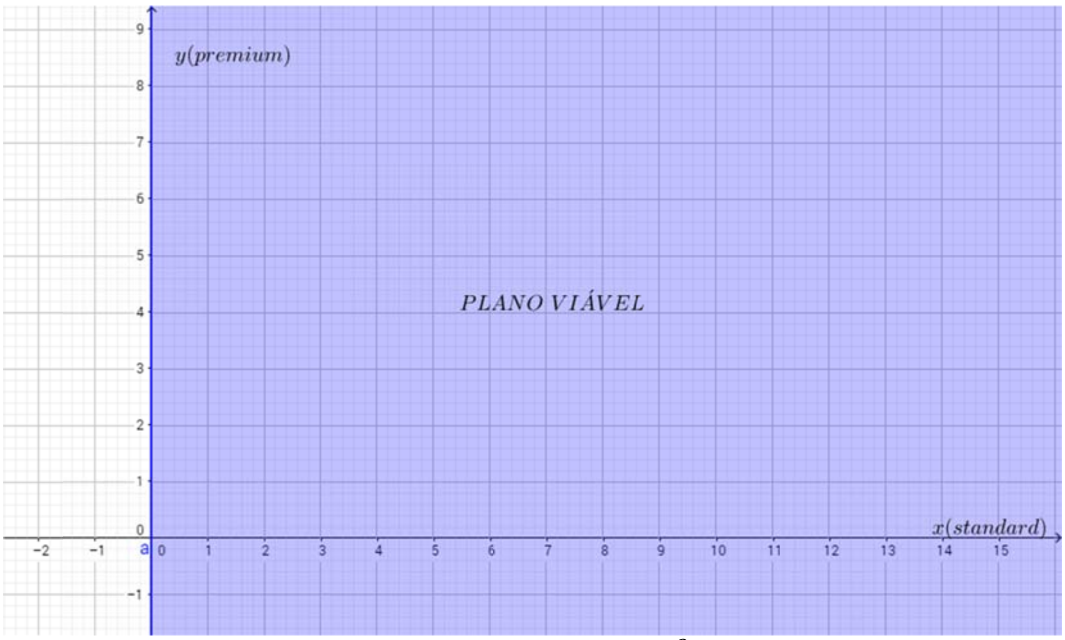


Figura 30: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$.

4) Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ representada na figura 31.

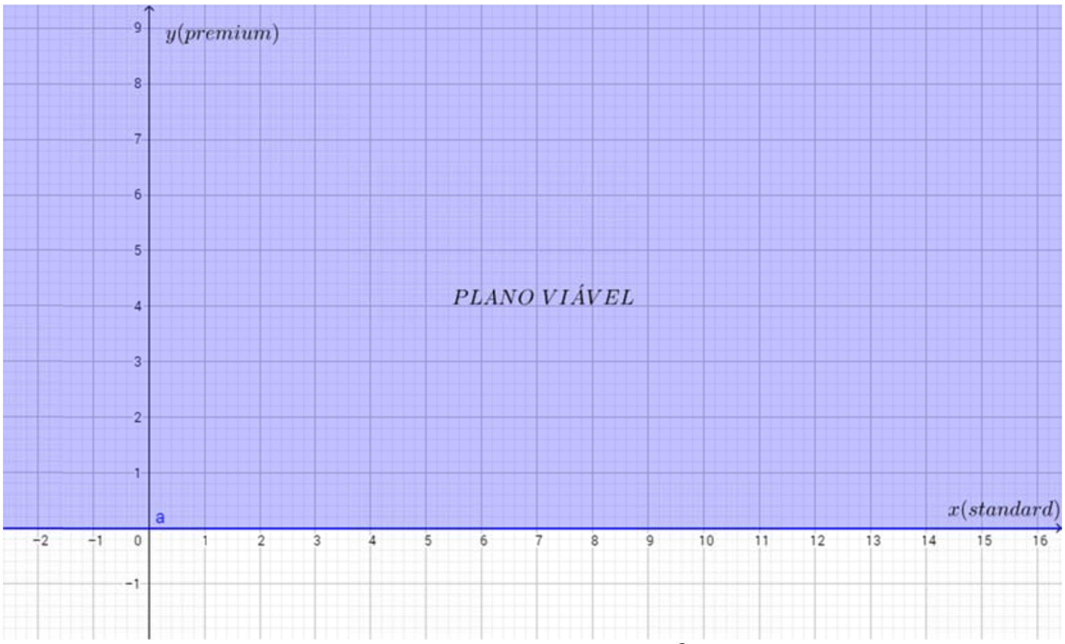


Figura 31: Região plana $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$.

.

Agora devemos construir um gráfico com todas as restrições analisadas num mesmo plano cartesiano, onde veremos uma região, chamada de Região Viável, que é a interseção de todos os planos viáveis vistos anteriormente. Essa região satisfaz, simultaneamente, todas as inequações apresentadas.

5) Na figura 32 vamos visualizar a interseção dos planos $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \leq 220 - x\}$, $\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \leq 120 - 0{,}5x\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x \geq 0\}$ e $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y \geq 0\}$ que representa a Região Viável limitada entre os vértices A = (0, 0), B = (0, 120), C = (200, 20) e D = (220, 0).

Figura 32: Região Viável limitada entre os vértices A = (0, 0), B = (0, 120), C = (200, 20) e D = (220, 0).

Após a construção das quatro restrições em um mesmo gráfico, originando a Região Viável, que é a interseção dos quatro gráficos, algumas perguntas possivelmente vão surgir como: onde entra a função objetivo nesse gráfico? Além das interseções entre os gráficos, o que mais representam os pontos A, B, C e D no gráfico acima?

O primeiro passo para incluir o gráfico da função objetivo no gráfico das inequações restrição é pensar no lucro zero:

$$Z = 360x + 600y$$

$$0 = 360x + 600y$$

$$y = -\frac{360}{600}x$$

$$y = -\,0{,}6x$$

6) A figura 33 representa a Região Viável com a função objetivo considerando o lucro zero.

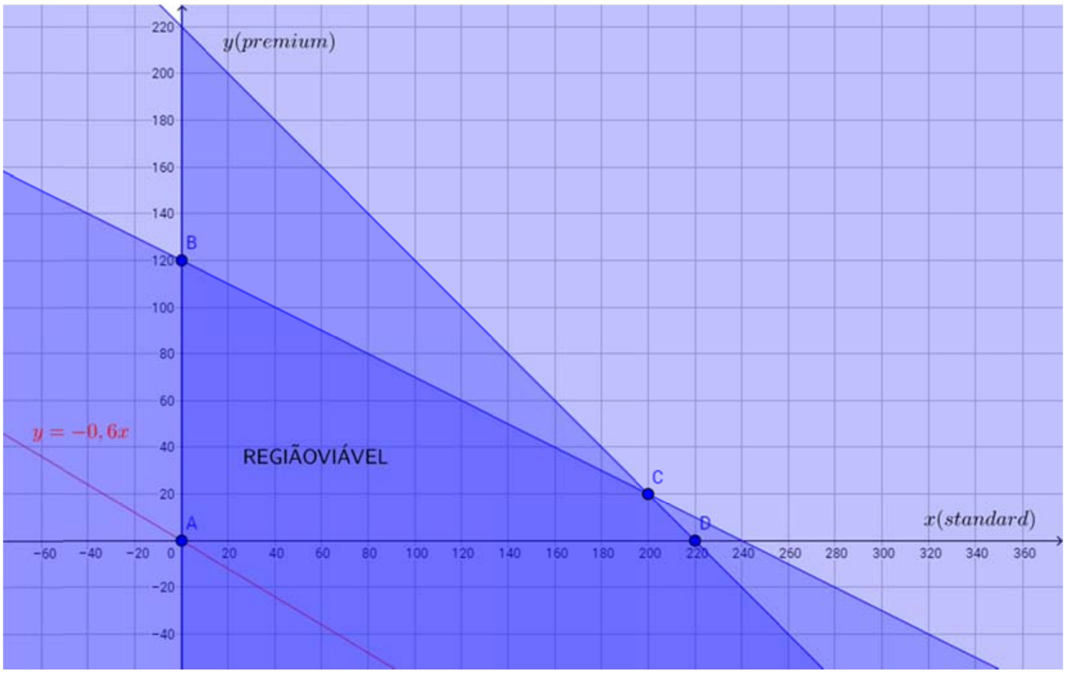


Figura 33: Região Viável com a função objetivo $y = -0,6x$.

A partir da reta de equação $y = -0,6x$, que é a representação gráfica da função objetivo quando o lucro é zero, verificamos que qualquer reta paralela a ela e acima dela, corta (intercepta) a Região Viável. É interessante notar, que todos os pontos que pertencem à intersecção das retas paralelas à reta $y = -0,6x$ e acima dela, com a Região Viável, geram o mesmo lucro.

Da função objetivo $Z = 360x + 600y$, vamos obter sua equação reduzida:

$$Z = 360x + 600y$$

$$360x + 600y = Z$$

$$600y = Z - 360x$$

$$y = \frac{Z}{600} - \frac{360}{600}x$$

$$y = -0,6x + \frac{Z}{600} \qquad \text{(I)}$$

Se fizermos $Z = 0$ nessa equação, teremos a função $y = -0,6x$ que já foi vista na figura 6.

Podemos a partir da equação I dar valores a Z, de tal forma que as equações obtidas sempre serão do tipo $y = -0,6x + C$, onde C é uma constante. Nessa hora, é importante questionar aos alunos o que acontece com as retas quando a constante C muda de valor. Com alguns valores para C, é possível fazer com que os alunos percebam que as retas se deslocam paralelamente à função $y = -\ 0{,}6x$, ou seja, se as retas possuem o mesmo coeficiente angular, possuem a mesma inclinação, e a mudança do coeficiente linear faz com que a reta se desloque paralelamente mantendo a mesma inclinação.

Outra coisa interessante para mostrar aos alunos é o fato de os pontos que pertencem a reta da função objetivo, que interceptam a Região Viável, dão o mesmo valor de lucro. Por exemplo, a reta $y = -\ 0{,}6x + 100$ corta a Região Viável nos pontos (100, 40), (120, 28), (160, 4), ... Substituindo esses pontos na função objetivo $Z = 360x + 600y$ temos:

Para o ponto (100, 40)	Z = 360(100) + 600(40)
	Z = 36.000 + 24.000
	Z = 60.000
Para o ponto (120, 28)	Z = 360(120) + 600(28)
	Z = 43.200 + 16.800
	Z = 60.000
Para o ponto (160, 4)	Z = 360(160) + 600(4)
	Z = 57.600 + 2.400
	Z = 60.000

7) A figura 34 mostra o gráfico da equação y = − 0,6x + 100 intersectando a Região Viável nos pontos E = (100, 40), F = (120,28) e G = (160,4).

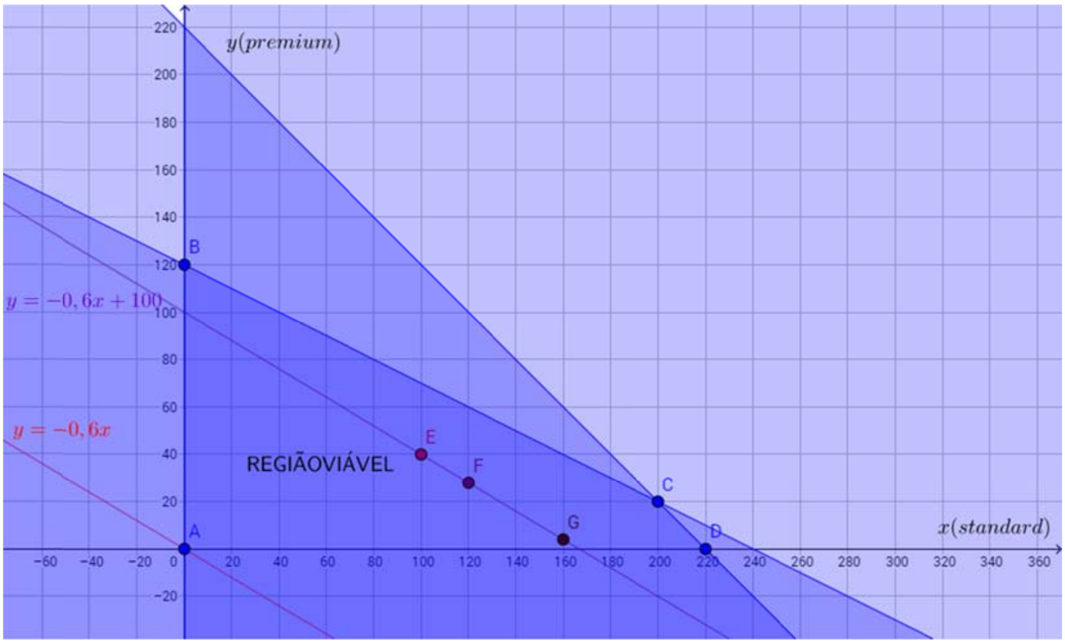


Figura 34: Região Viável intersectada pela equação $y = -0{,}6x + 100$ e os pontos E = (100, 40), F = (120,28) e G = (160,4).

Depois que os alunos perceberam a igualdade do lucro para pontos diferentes pertencentes à mesma reta que corta a Região Viável, vem a próxima indução, que é fazer o mesmo teste, porém com retas cada vez mais distantes da reta $y = -0{,}6x$, que dá lucro zero, para que eles verifiquem que o lucro vai aumentando com o distanciamento das retas paralelas à reta $y = -0{,}6x$. Podemos, por exemplo, construir as retas $y = -0{,}6x + 60$, $y = -0{,}6x + 100$ e $y = -0{,}6x + 120$ e marcar nessas retas os pontos respectivos H = (80, 12), E = (100, 40) e I = (110, 54) e calcular os lucros para cada situação.

Para o ponto H = (80, 12), temos $Z = 360(80) + 600(12)$

$Z = 28.800 + 7.200$

$Z = 36.000$

Para o ponto E = (100, 40), temos $Z = 360(100) + 600(40)$

$Z = 36.000 + 24.000$

$Z = 60.000$

Para o ponto I = (110, 54), temos $Z = 360(110) + 600(54)$

$Z = 39.600 + 32.400$

$$Z = 72.000$$

8) A figura 35 mostra as retas y = –0,6x + 60, y = –0,6x + 100 e y = – 0,6x + 120 e os pontos H, E e I respectivamente sobres as retas.

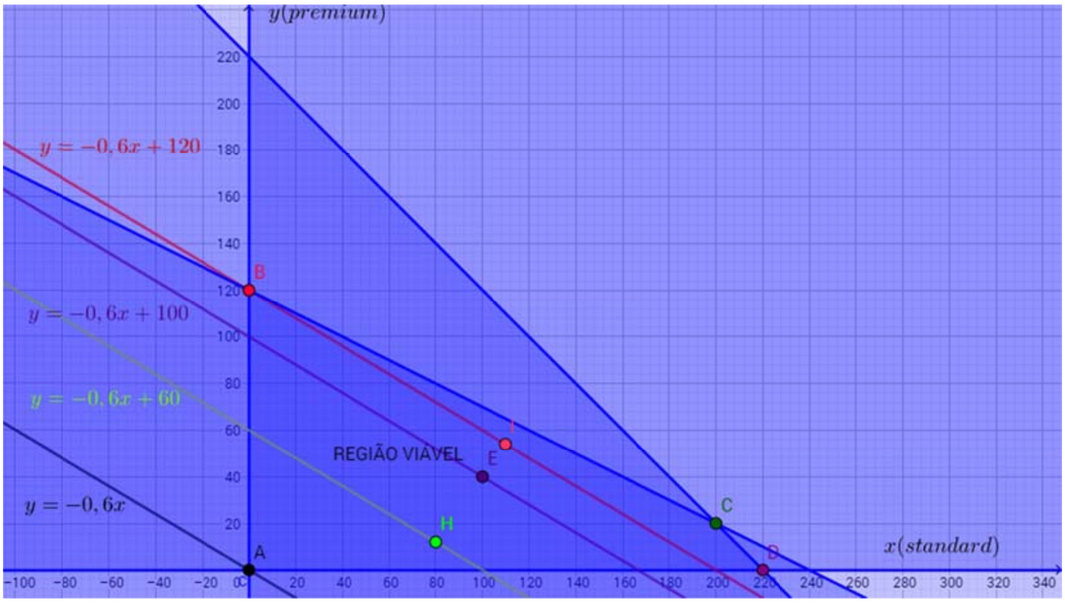


Figura 35: Região Viável com os pontos E, I e H.

Provavelmente, algum aluno deva perguntar sobre o lucro nos pontos que delimitam a Região Viável, caso isso não aconteça, é a hora de pedir para que façam os cálculos para os pontos A = (0,0), B = (0,120), C = (200, 20) e D = (220, 0). Após as contas, é fácil verificar que o ponto C = (200, 20), que significa produzir 200 computadores standard e 20 computadores premium, dá o maior lucro de R$ 84.000,00.

Para verificarmos que a solução ótima está na fronteira da região viável, devemos analisar dois casos: quando as retas que definem a fronteira são ou não paralelas às retas paralelas vindas da função objetivo.

Quando as retas que definem a fronteira da região viável não são paralelas às retas vindas da função objetivo, a solução ótima está em um e só um vértice da região viável. Para mostrar isso, primeiro vamos verificar porque a solução ótima se encontra na fronteira e não no interior. A região viável é limitada pelas desigualdades $x \geq 0$ e $y \geq 0$ nos dando como interseção o 1º quadrante como região viável, as restrições do problema são dadas por inequações do tipo $ax + by \leq c$, onde *a, b* e *c* são constantes positivas, logo as retas fronteiras são sempre gráficos de funções decrescentes. A interseção das regiões dadas pelas restrições do problema nos dá como região viável um polígono convexo, ou seja, para quaisquer dois pontos A e B pertencentes a esse polígono, todos os pontos pertencentes ao segmento $\overline{AB}$ estão contidos nesse polígono. Outra definição importante é a de ponto interior, exterior e fronteira de uma região. Dizemos que um ponto é interior a uma região se existe um disco aberto, cujo centro é o ponto em questão que está contido nessa região. De forma análoga, para um ponto ser exterior, deve ser interior à região externa. Já para um ponto ser definido como fronteira, para qualquer disco, cujo centro é o ponto em questão, existe um ponto desse disco que está no interior da região e um ponto que está no exterior da região.

Dadas as definições anteriores, vamos provar por absurdo, que se um ponto é interior a uma região ele não pode ser a solução ótima.

Dada a função objetivo $f(x, y) = ax + by$, com a e b positivos, seja Z = $f(x, y)$ o lucro que queremos maximizar e considere a equação y = $-\frac{a}{b}x + \frac{Z}{b}$. Suponhamos que o ponto (x_0, y_0), interior à região, seja o ponto que maximiza a função, então $Z_0 = ax_0 + by_0$ é o ponto no domínio que maximiza a função. Como o ponto (x_0, y_0) é interior à região, pela definição de ponto interior, existe um ponto (x_0, y_1) sendo $Z_1 = ax_0 + by_1$, com $y_1 > y_0$ que também é interior à região então:

$$y_1 > y_0$$
$$by_1 > by_0$$
$$ax_0 + by_1 > by_0 + ax_0$$
$$Z_1 > Z_0$$

Logo, (x_0, y_0) não é o ponto de máximo.

Vamos verificar agora porque o ponto de máximo se encontra em um único vértice do polígono que representa a região viável.

A partir da reta que representa a função objetivo $y = -\frac{a}{b}x + \frac{Z}{b}$, se consideramos Z = 0, ou seja, lucro zero, a função se torna $y = -\frac{a}{b}x$, que é a equação de uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Como queremos que o lucro seja máximo, estamos em busca da reta, paralela à função objetivo, que tenha o maior coeficiente linear, ou seja, $\frac{Z}{b}$ tem que ser o maior valor possível de forma que a reta de equação $y = -\frac{a}{b}x + \frac{Z}{b}$ intersecte a região viável.

Sabemos que os pontos de interseção das retas paralelas à função objetivo com a região viável dão o mesmo lucro. Se a reta de equação $y = -\frac{a}{b}x + \frac{Z}{b}$ intersecta a região em dois pontos, intersecta também o interior, pois a região é convexa.

Como já vimos que um ponto interior à região viável não nos dá o valor máximo, concluímos que o valor máximo tem que ser a interseção da reta, paralela da função objetivo, em um único ponto da região viável, que se dá necessariamente em um único vértice do polígono.

Quando as retas que definem a fronteira da região viável são paralelas a uma reta vinda da função objetivo, a interseção delas é um segmento de reta, um lado da região viável. Neste caso, temos infinitas soluções que nos dão o lucro máximo do problema.

6
Projeto

Comecei a lecionar Matemática em 1997, no Município de Araruama no Estado do Rio de Janeiro, ano em que fiz meu primeiro concurso público para o magistério estadual, já faz quase vinte anos que leciono na rede pública estadual.

Nesses vinte anos de magistério, já lecionei em colégios particulares, por contratos na rede municipal de Araruama e como efetivo na rede estadual, atuando desde o antigo 1º grau (da 5ª à 8ª série) até hoje no Ensino Médio. Essa breve introdução é para enfatizar que tenho vivido uma grande mudança no ensino, visto por vários aspectos: desde o descaso do poder público com a educação até com a falta de compromisso por parte de alguns pais com a educação de seus filhos. É difícil "remar contra a maré" quando o discurso é a favor da educação, mas a realidade é totalmente outra. Acredito que minha experiência docente não seja muito diferente da maioria dos meus colegas que enfrentam a mesma situação educacional pelo país.

Hoje me deparo com uma realidade angustiante: alunos interessados que pretendem alcançar voos maiores (apesar de ser a minoria), mas o sistema não permite que nós professores nos empenhemos mais, quer seja por falta de recursos básicos como papel (folha A4) e marcador de quadro branco, quanto a recursos mais sofisticados como acesso a computadores com acesso à internet com boa velocidade. Sem contar com a deficiência de conteúdos básicos como leitura (interpretação) e cálculos básicos (como somar, subtrair, multiplicar e dividir) que os alunos saem do Ensino Fundamental sem saber e, mesmo assim, chegam ao Ensino Médio.

Diante da realidade que vivo hoje, pretendo, com essa dissertação, propor novos caminhos para o ensino da Matemática, propondo aos colegas que labutam em sala de aula, meios de tornar uma das disciplinas mais temerosas pelos alunos algo interessante e concreto para a realidade deles. Acredito que a dissertação vá ao encontro do projeto de lei que muda a estrutura do Ensino Médio, que aposta no interesse de cada aluno e sua expectativa para o futuro.

No ano de 2017, ano da entrega da dissertação, lecionei no CIEP 384, em São Vicente de Paulo, 3º distrito do Município de Araruama, uma turma de

Resolução de Problemas Matemáticos, com dois tempos de 50 minutos por semana. A turma foi a 2004 da manhã, uma turma de 2º ano do Ensino Médio com 27 alunos. Essa turma já era conhecida minha, pois foram meus alunos, em sua maioria, no 1º ano, em 2016, quando lecionei Matemática. A proposta foi de apresentar a esses alunos problemas de otimização linear, sabendo que eles já tinham estudado função do 1º grau, ou seja, eles tinham familiaridade com retas no plano cartesiano, tinham estudado a equação da reta na forma reduzida, aliás nome que só é apresentado a eles no 3º ano em Geometria Analítica, mas conheciam o que são os coeficientes angular e linear, o que eles representam para função do 1º grau, o zero ou raiz da função, o que é uma função constante, construção do gráfico identificando o coeficiente linear e o zero da função, fazer o estudo do sinal da função, que para mim sempre foi um grande problema de aprendizagem para os alunos de 1º ano do Ensino Médio, quer seja na função do 1º grau ou na função do 2º grau, que a meu ver é mais complicado ainda para eles. Acredito que a deficiência de entender o que é estudar o sinal de uma função, faz com que os alunos que conseguem seguir os estudos em uma Universidade na área de exatas, tenham dificuldades em entender aplicações que se dão exatamente no estudo do sinal das funções, como por exemplo entender crescimento e decrescimento e pontos críticos de uma função estudando o sinal da função derivada.

A disciplina Resolução de Problemas Matemáticos ou simplesmente R.P.M. foi concebida pela Superintendência Pedagógica da SEEDUC com o objetivo de: "Estimular o envolvimento dos estudantes com situações concretas e contextualizadas de pesquisa, aprendizagem colaborativa e construções coletivas entre os próprios estudantes e respectivos tutores – docentes preparados para incentivar o desenvolvimento da autonomia do alunado" (Currículo mínimo, orientações curriculares, 2013).

A proposta do projeto foi de apresentar aos alunos regiões planas, conteúdo não contemplado no Ensino Médio Estadual. Acredito que uma grande porcentagem dos alunos do Ensino Médio não estudem o assunto, independentemente da origem, quer seja pública ou privada. Proponho trazer para sala de aula a ideia de que o plano cartesiano existe antes das funções propriamente ditas e mostrar aos alunos o que representa o conjunto de pontos (x, y) tais que $y \neq f(x)$, pois o "senso comum" é fazer $y = f(x)$ ou mesmo escrever $y(x)$, ou seja, os alunos entendem muitas vezes que o plano apenas existe para esboçar o gráfico de uma função, que os pontos no plano representam necessariamente curvas no plano, fora isso é algo estranho, como fosse um absurdo um ponto não pertencer a uma curva. Não é trivial fazer a ligação entre uma figura plana e uma equação (ou sistema de equações, inequações...), pode ser que entender o que significa por exemplo $y \neq f(x)$ ajude a entender melhor o que significa $y = f(x)$.

Após a apresentação das regiões planas, vem o passo seguinte que é falar sobre reta horizontal e vertical, retas paralelas e perpendiculares, a relação entre as retas paralelas e perpendiculares e translação de retas, que são conhecimentos fundamentais para falar de otimização linear por resolução gráfica. É importante ressaltar que estou falando de conhecimentos que eles já adquiriram, assim como conteúdo que só seria visto no 3º ano do Ensino Médio e conteúdo que sequer são vistos no Ensino Médio nos colégios públicos.

Quero deixar claro que essa proposta de abordagem, principalmente a inclusão do objeto da minha pesquisa no cenário educacional que vivo e muitos colegas docentes vivem pelo país, é uma tentativa de fazer a Matemática mais atraente aos nossos alunos, mas não como uma proposta fantasiosa fora da realidade que em geral vemos em um certo tipo de literatura. Quero poder colaborar com algo factível, que de fato faça sentido com o que nós professores vivemos em sala de aula: falta de interesse dos alunos; abandono das escolas pelo poder público como desde falta de laboratórios à simples falta de papel A4 para reprodução de avaliações; inversão de valores pela sociedade, como achar que os professores têm a obrigação de ensinar boas maneiras aos seus filhos.

Infelizmente, por questões financeiras e operacionais na SEEDUC-RJ, algumas turmas foram extintas em vários Colégios no Estado do Rio de Janeiro, inclusive no CIEP 384, onde trabalho, e não foi possível implantar o projeto.

6.1
PROBLEMA MOTIVACIONAL

Problemas práticos de otimização estão presentes em diversos campos do conhecimento, podemos por exemplo verificar qual deve ser o roteiro de um caminhão de lixo para que ele faça o menor percurso pelas ruas de um determinado bairro, a fim de economizar tempo e combustível; na alimentação, queremos ter uma dieta que supra os nutrientes necessários com o menor custo possível; na agricultura, qual deve ser a plantação que melhor se adeque ao solo e ao mercado comprador, quais maquinários necessários para a colheita para que a lucratividade seja máxima; na produção de roupas, qual deve ser a composição dos tecidos para que se tenha um produto competitivo e aceito no mercado, respeitando a capacidade de produção da empresa, para gerar lucro. Enfim, podemos citar vários exemplos onde a palavra-chave “otimização” vai aparecer.

Vistos alguns exemplos acima, podemos introduzir uma situação problema aos alunos que desperte neles o interesse na busca pela resposta de um problema prático, em que num primeiro momento eles consigam desenvolver uma solução por tentativa e erro usando uma simples calculadora. No contexto, chamar a atenção dos nossos alunos hoje para resolver uma situação-problema, é um grande problema! Principalmente no mundo dos smartphones e redes sociais em que vivemos, eu costumo brincar com os meus alunos que vivo uma disputa desleal: “Redes sociais versus Matemática”, é claro que as redes sociais ganham facilmente. Deixando a disputa de lado, e tentando trazer a tecnologia para o nosso lado, uma introdução histórica do que vai ser estudado é uma estratégia interessante como motivação, e uma pesquisa rápida usando os smartphones é uma forma de trazer a tecnologia para sala de aula. Sendo assim, escolhi como problema motivacional o “Problema da Dieta”, que vem ao encontro com a introdução histórica e porque não uma forma de falar de alimentação saudável e balanceada.

No livro Programação linear de Darci Prado[2], o autor aborda o “Problema da Dieta”, como ficou conhecido durante a segunda guerra mundial nos EUA. Resumidamente, queria-se encontrar uma alimentação mais econômica, que suprisse as necessidades diárias de nutrientes (carboidratos, proteínas, vitaminas, ...). A melhor solução do problema foi dada por George Stigler, em 1945, ele partiu de 77 alimentos e 9 nutrientes em cada um e chegou a uma dieta curiosa composta de farinha de trigo, repolho e fígado de porco, a um custo de aproximadamente de 60 dólares anuais. Com esta introdução histórica é possível fazer alguns questionamentos com os alunos como: viabilidade da dieta, frieza dos números (afinal George Stigler só levou em consideração os aspectos econômicos), gosto pessoal e até religião, visto que, em algumas religiões, não é permitido comer carne de porco.

6.2
ETAPAS DO PROJETO

Elaborei o projeto como um plano de aula, considerando uma aula de dois tempos de 50 minutos, e, como todo plano de aula, ele é flexível, depende da turma a ser trabalhada, ou seja, o projeto é apenas um norte, uma proposta para que colegas docentes possam trabalhar de acordo com sua realidade. É importante ressaltar que é possível implementar uma parte do projeto, ou mesmo aproveitar a ideia de otimização e trabalhar da maneira que achar mais conveniente.

AULA 1:

Para a primeira aula começamos com um questionamento aos alunos: "o que é otimização?" ou "o que vocês entendem por otimizar?" Com certeza será o primeiro problema a ser encontrado: vocabulário! Pelo fato de muitos de nossos alunos lerem pouco, é bem provável que desconheçam a palavra, mas se logo em seguida falarmos em máximos e mínimos a coisa fique um pouco melhor. Num próximo passo, passamos para a abordagem histórica com o "Problema da Dieta", e se a turma for participativa, vamos ter uma aula bem interessante, onde eles poderão listar vários exemplos no dia a dia onde maximizar ou minimizar alguma coisa se faz necessário.

Nessa primeira aula, proponho uma atividade prática simples e que está no programa do ensino médio: após relembrá-los sobre perímetro e área de retângulos, fixemos um perímetro qualquer, por exemplo 20 metros, e considerando apenas lados inteiros, peçamos que construam todos os possíveis retângulos com o perímetro dado. Feito isso, eles agora vão calcular qual retângulo tem a maior área. Essa atividade vai levá-los a um questionamento em relação ao retângulo de maior área, provavelmente algum aluno irá perguntar: "professor, você falou em retângulos, e a maior área é de um quadrado?". Mais um momento oportuno de revisarmos quadriláteros e suas propriedades.

Terminada a atividade, é hora de questionarmos aos alunos: e se o perímetro fosse maior? E se considerássemos não somente lados inteiros, mas lados decimais?

AULA 2:

Na segunda aula, dependendo de como foi a primeira aula, visto que, se não há participação da turma, o início da aula 2 pode ser feito no final da aula 1, já podemos entrar com um problema de lucro máximo, mas sem falar do modelo gráfico, a ideia dessa aula é fazer com que eles, com a ajuda de uma calculadora, para a aula render, façam cálculos para chegar no maior valor (maximização) por exemplo na fabricação de computadores modelos standard e premium do exemplo dado no capítulo 5 - Modelo de Resolução Gráfica, veja que no problema dos computadores eles têm que levar em consideração as restrições do problema: um estoque de 220 gabinetes e 240 portas USB, com lucros de R$ 360,00 e R$ 600,00, respectivamente nos modelos standard e premium. Na primeira atividade, da área máxima de um retângulo, as contas são mais rápidas, no problema da fabricação dos computadores, os alunos vão ter um pouco mais de trabalho por causa das restrições. Será interessante notarem que para quantidades diferentes de produção dos modelos, terão o mesmo lucro. Para trabalhar essa atividade, a criatividade fica por conta de cada docente. Uma ideia interessante seria uma disputa entre grupos, o grupo que chegar primeiro no valor máximo, respeitando as restrições do problema, ganha alguma coisa. Se o prêmio for um ponto na média, com certeza vão se empenhar ao máximo! Se a turma fluir, for rápida no cálculo encontrando a resposta, fica a critério do docente trazer outro problema ou dar continuidade ao projeto.

Mais alguns problemas interessantes, sobre alocação de recursos, para trabalhar em sala para que os alunos busquem uma solução ótima.

a) Uma pequena fábrica de móveis produz dois modelos de molduras ornamentais, cujos preços de venda são, respectivamente, R$ 110,00 e R$ 56,00. Ela possui 7 peças de madeira e dispõe de 31 horas de trabalho para confeccionar os dois modelos, sendo que o modelo A requer 2 peças de madeira e 5 horas de trabalho, enquanto o modelo B necessita de 1 peça de madeira e 7 horas de trabalho. Quantas molduras de cada modelo a fábrica deve montar se desejar maximizar o rendimento obtido com as vendas?
b) Uma microempresa produz dois tipos de jogos para adultos e sua capacidade de trabalho é de 50 horas semanais. O jogo A requer 3 horas

para ser confeccionado e propicia um lucro de R$ 30,00, enquanto o jogo B precisa de 5 horas para ser produzido e acarreta um lucro de R$ 40,00. Quantas unidades de cada jogo devem ser produzidas semanalmente a fim de maximizar o lucro?

AULA 3:

Agora é a hora de mostrar o gráfico, já montado com todas as restrições, com os pontos delimitadores da Região Viável e voltarmos a fazer contas com os alunos com pontos aleatórios que pertençam à região interna e pontos que delimitam a região. Para essa atividade, usaremos o gráfico da página 50 que representa a solução gráfica do problema da fabricação dos computadores. Mais uma vez, podemos usar a calculadora como instrumento para agilizar o processo, apesar de podermos trabalhar apenas com valores inteiros para facilitar os cálculos. Como já sabem a resposta, pois na disputa entre grupos na aula 2 encontraram o ponto de máximo, o gráfico vem apenas para corroborar o que já foi feito, com um pequeno detalhe: " por que o ponto de máximo se encontra em um dos vértices?". Nessa hora, nós professores, estaremos torcendo para que algum aluno nos pergunte: "Como foi feito esse gráfico?". Ou melhor ainda: "por que o ponto está em um dos vértices?". Essa pergunta seria um ótimo questionamento. Mas, vamos começar pela possível primeira pergunta: "como foi feito o gráfico?". Nesse momento, possivelmente já estaremos perto do final da aula, e é possível relembrar o gráfico de funções do 1º grau com os coeficientes angular e linear e o zero da função e as equações das retas horizontais e verticais.

AULA 4:

Recordado como construir o gráfico de uma função do 1º grau, ou seja, retas no plano cartesiano, é chegada a hora de apresentar aos alunos o que representa desigualdades lineares graficamente (é o item 3.5 da dissertação), e talvez, como já comentado, uma novidade aos alunos, nessa aula fará sentido o que foi comentado no início deste capítulo, na página 59, sobre a dificuldade dos alunos de entender $y \neq f(x)$. Nessa aula, os gráficos se farão necessários e elucidativos onde as regiões planas se apresentarão naturalmente. Se existir a possibilidade de acesso a um software gráfico, como, por exemplo, o GeoGebra (utilizado para construir alguns gráficos desse trabalho) ou qualquer um de fácil acesso, será bem-vindo. Caso contrário, utilizamos o quadro.

Nessa aula vamos trabalhar desigualdades e regiões planas. Antes de partirmos para um software gráfico, é interessante construirmos no quadro as regiões planas. Começando pela construção das retas horizontais $y = a$ e verticais $x = a$, onde a é uma constante qualquer. Como sugestão, é interessante pegarmos uma constante positiva e negativa, por exemplo: 3 e – 3. Construídas as retas, vamos perguntar aos alunos quais pontos (x, y), no plano cartesiano, que satisfazem as inequações: $y > 3$, $y < -3$, $x > -3$ e $x < 3$. Nessa hora, eles vão perceber que as respostas são infinitas, originando regiões planas.

O próximo passo serão as retas de equação $y = ax + b$ e suas respectivas desigualdades $y > ax + b$ e $y < ax + b$, da mesma forma que fizemos com as retas horizontais e verticais, vamos pegar valores para a e b fáceis, por exemplo: $a = 2$ e $b = -4$ e, após construirmos a reta de equação $y = 2x - 4$, perguntamos aos alunos alguns pontos que satisfaçam as desigualdades $y > 2x - 4$ e $y < 2x - 4$. A ideia é que logo os alunos percebam as regiões abaixo e acima da reta, reta esta que apresentaremos como reta fronteira entre as regiões.

Já entendido que as desigualdades representam regiões no plano, podemos trabalhar com um software gráfico para que verifiquem a diferença entre $y = ax + b$ e $y > ax + b$ ou $y < ax + b$.

AULA 5:

Acredito que já tenhamos informações suficientes para juntar e construir o gráfico da região viável. Sem dúvida alguma, a ferramenta tecnológica, como um software gráfico, é de suma importância e valia, pois a interseção dos planos formando a Região Viável será de fácil compreensão e rápida visualização com a ajuda de software gráfico, mas na falta da ferramenta tecnológica, é possível construir no quadro branco a interseção dos planos, apesar de dispor de mais tempo. Junto com a Região Viável, apresentaremos a translação de retas. No caso especial da translação da reta que representa a função objetivo. É interessante mostrar aos alunos que os pontos de intersecção das retas transladadas com a Região Viável fornecem o mesmo valor (no exemplo do capítulo 5 – modelo de resolução gráfica, o valor se refere ao lucro na produção). Para isso, basta selecionar alguns valores de x e y satisfazendo a equação da reta e as inequações da Região Viável e colocar os alunos para fazer as contas.

Outra análise que pode ser feita com as retas transladadas, é verificar que quanto mais as retas se afastam da primeira reta (função objetivo) que passa pela origem (lucro zero), mais o lucro vai aumentando. Agora basta um ponto em cada reta, pois os alunos já fizeram as contas antes e verificaram que os pontos de interseção de uma reta com a região viável dão o mesmo valor (lucro).

Proponho para essa aula, a construção do gráfico que representa a Região Viável apresentada na aula 3. As regiões representadas pelas restrições $x \geq 0$ e $y \geq 0$ são elementares, já as regiões dadas por $y \leq 220 - x$ e $y \leq 120 - 0{,}5x$ ficam a encargo dos alunos como exercício de verificação da aula 4. Na hora do esboço da interseção das regiões, sem a utilização de um software, será conveniente esboçar as regiões de duas a duas com o auxílio de marcadores de quadro branco de cores variadas. Talvez isso seja um problema para a realidade de alguns colegas, visto que ter um marcador de uma cor já será uma vitória! Mas vamos ser otimistas. Após o esboço das regiões, os alunos notarão que as retas de equação $y = 220 - x$ e $y = 120 - 0{,}5x$ se cortam em um ponto. Pedimos então que encontrem o ponto de interseção entre as retas.

Bom, agora que os alunos já têm uma noção de como construir a intersecção de desigualdades lineares, é hora de construirmos as retas paralelas à função objetivo Z = $360x + 600y$ quando o lucro é zero, ou seja, construir as retas paralelas à reta de equação $y = -0{,}6x$. Vamos falar agora de translação de retas e retas perpendiculares: podemos mostrar que retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular e que são sempre perpendiculares a uma mesma reta. Visto isso, é fácil perceber que as retas paralelas à reta de equação $y = -0{,}6x$ são todas do tipo $y = -0{,}6x + c$, onde c é uma constante real qualquer, e como eles sabem que o coeficiente linear da reta representa a interseção da reta com o eixo y, os alunos podem encontrar retas paralelas à reta $y = -0{,}6x$ dando valores ao coeficiente linear e mais uma vez vamos esperar de nosso alunos que percebam que os valores para o coeficiente linear terá uma restrição para que as retas interceptem a Região Viável.

7
Considerações finais

Este presente trabalho é mais uma proposta, dentre tantas outras, de mostrar aos nossos alunos a importância e a aplicabilidade da Matemática, um dos grandes desafios dos professores de Matemática em sala de aula.

Ao abordar problemas de otimização linear, verifiquei que a resolução de problemas, por meio da resolução gráfica, pode ser uma forma interessante de aprendizagem, considerando a possibilidade de se poder trabalhar com um software gráfico para a visualização da região viável, e em seguida verificar qual o ponto da região que dá a melhor solução.

Para falar de otimização linear é necessário aprender e rever tópicos de Matemática que os alunos já viram, ou não, como o plano cartesiano, equações da reta, posições relativas de retas no plano, translação de retas, desigualdades lineares, regiões no plano e sistemas de desigualdades lineares, que são conteúdos necessários para que os alunos entendam os problemas de otimização e como devem usar esses conhecimentos para chegar na solução ótima.

O tema otimização nos leva a situações-problema em que instigam os alunos a pensarem no seu dia a dia como chegar a uma solução ótima para problemas cotidianos e, a partir de casos simples, é possível mostrar aos alunos que esse tema faz parte da realidade do mundo econômico-financeiro.

A ideia de um projeto em que professores, de qualquer lugar do país, possam acessar a proposta para implementar em suas aulas, é uma forma de colaboração pedagógica facilitadora do trabalho docente de colegas que não têm tempo e disponibilidade para pesquisar modelos diferentes de aplicações da Matemática.

Enfim, termino esta dissertação acreditando humildemente que consiga contribuir com colegas, professores de Matemática, espalhados pelo nosso país, de forma prática e viável, com uma proposta de atividade em sala de aula sobre otimização linear, sempre tentando fazer a Matemática mais tangível e amigável aos nossos alunos.

8 Referências bibliográficas

1 – LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no Plano**. Rio de Janeiro, RJ: SBM, 1992

2 – PRADO, Darci Santos do. **Programação Linear**. Série Pesquisa Operacional – Volume 1. 3ª ed. Belo Horizonte, MG: Editora de Desenvolvimento Gerencial, 2003.

3 – PIZZOLATO, Nelio Domingues; PUCCINI, Abelardo de Lima. **Programação Linear**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 1972.

4 – ANTON, Howard. **Álgebra Linear com Aplicações**. Porto Alegre, RS: Bookman, 2001.

5 – STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e Suas Aplicações**. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2010.

6 – MORETTIN, Pedro A; HAZZAN, Samuel; BUSSAB, Wilton de O. **Cálculo Funções de Uma e Várias Variáveis**. São Paulo, SP: Saraiva, 2003.

7 – WEBER, Jean E. **Matemática para Economia e Administração**. 2ª ed. São Paulo, SP: Harbra,1986.

8 – SILVA, Sebastião Medeiros da. **Matemática para os Cursos de Economia, Administração, Ciência Contábeis**. São Paulo, SP: Atlas, 1997.

9 – IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar,** volume 1: Conjuntos, Funções. 8ª ed. São Paulo, SP: Atual, 2004.

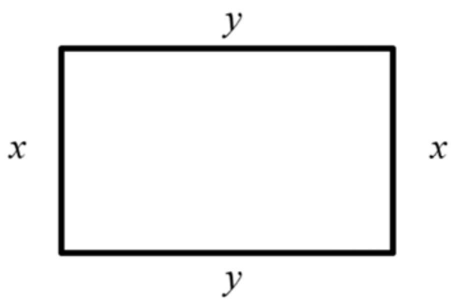
10 – MALTA, Iaci; PESCO, Sinésio; LOPES, Hélio. **Cálculo a uma variável,** volume 1: Uma introdução ao cálculo. 1ª ed. Rio de Janeiro, RJ: Elsevier: PUC-Rio, 2015.

9
Apêndice

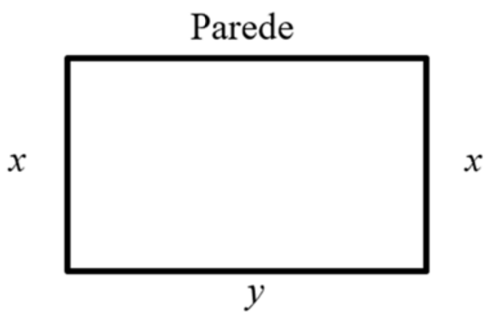
Atividade 1

Nome:____ Nº_____

Sabendo que perímetro é a soma dos lados de um polígono e que a área de uma retângulo é base vezes altura, discuta com os colegas do grupo e encontre as dimensões de um retângulo de perímetro 20 metros que tenha a maior área. Considere apenas lados de tamanho inteiros.



Agora imaginem a seguinte situação: vocês têm que cercar uma área retangular com uma corda de 20 metros, de forma que a área seja a maior possível, mas se aproveitará uma parede como um dos lados do retângulo. Logo, não será utilizada a corda na parede, como no problema anterior, considerem apenas lados de tamanhos inteiros. Veja a figura abaixo:



Atividade 2

Nome: ____ Nº______________

Vamos supor que tenhamos que alocar recursos para a fabricação de computadores modelos standard e premium. O modelo standard fornece um lucro de R$360,00 e o premium de R$600,00. O modelo standard requer, na sua produção, um gabinete simples e uma porta USB, já o modelo premium usa um gabinete maior e mais bonito com duas portas USB. No estoque existem 120 gabinetes simples, 100 gabinetes grandes e 240 portas USB. A partir desses dados, como deve ser a produção desses computadores para que o lucro seja máximo?

Para ajudar a construção do problema, preencham a tabela 2 abaixo com os dados do problema. Não se esqueçam que vocês têm um limite de estoque de peças para fabricar os dois modelos de computadores.

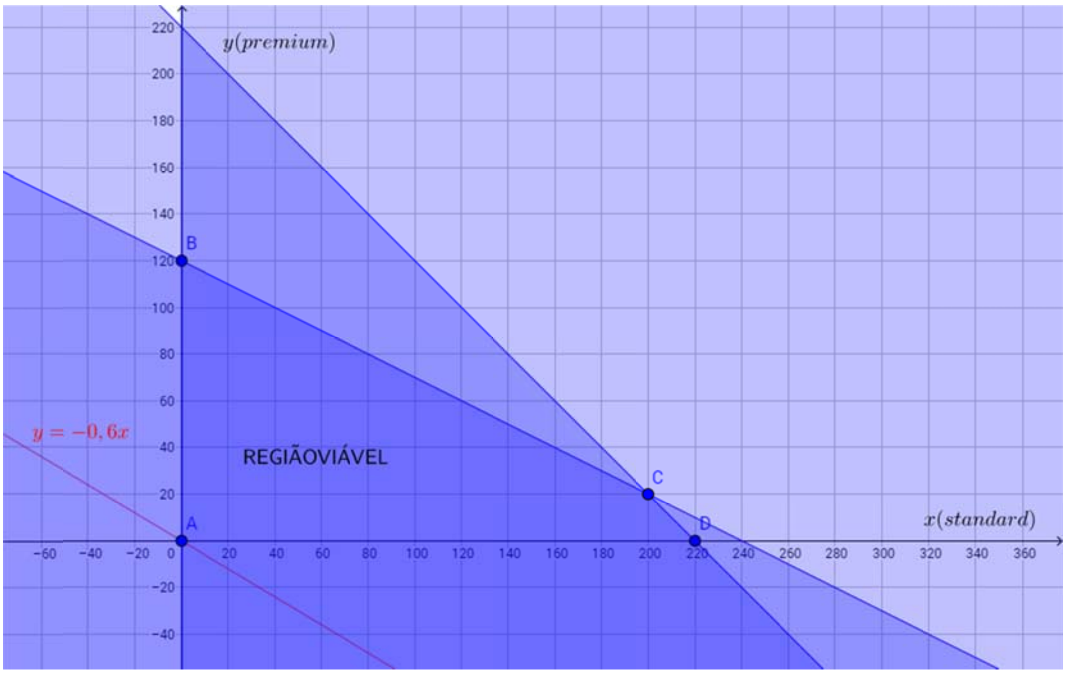
MODELOS	STANDARD	PREMIUM
LUCRO		
GABINETE	SIMPLES	GRANDE
ESTOQUE		
PORTA USB		
ESTOQUE		

Tabela 2: Estoque de peças

Atividade 3

Nome: ____ Nº______________

Vamos agora analisar o gráfico que representa a situação problema da atividade 2, vejam que a região viável está dentro do polígono ABCD, o eixo *x* representa o modelo standard e o eixo *y*, o modelo premium. O grupo vai escolher três pontos que estejam no interior do polígono, aproveitem o gráfico quadriculado para escolher os pontos, e peguem também os pontos que são os vértices do polígono e façam as devidas contas para verificar o lucro para cada situação.



Qual o ponto que deu o maior lucro? Foi o mesmo ponto, ou seja, a mesma situação da atividade 2?

Atividade 4

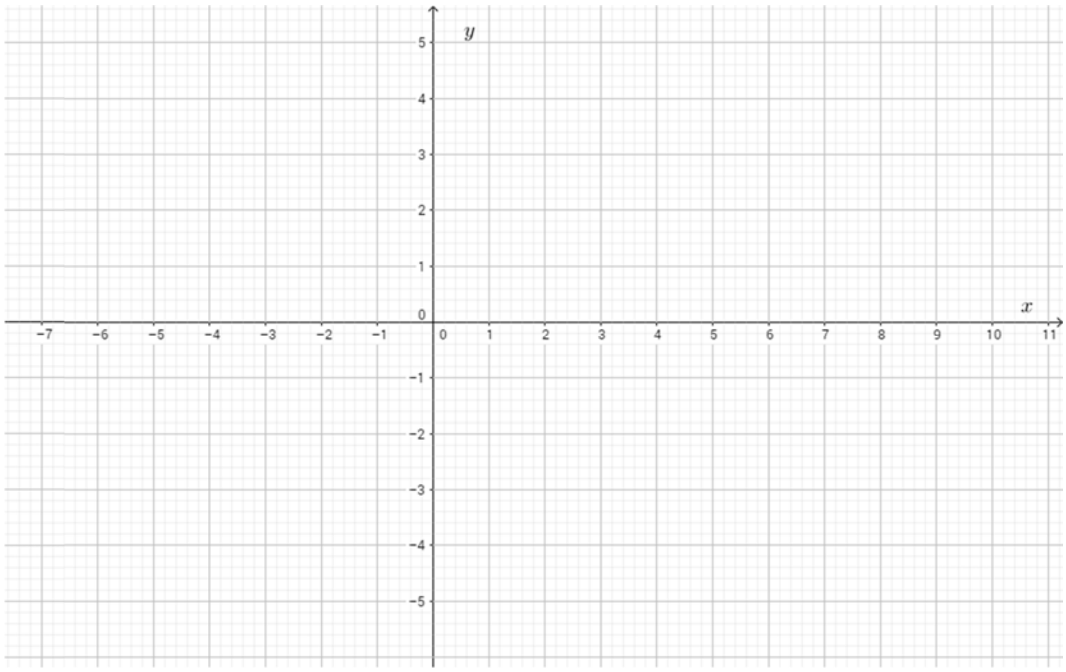
Nome: ___________________________________ Nº __________

1) Construa as retas horizontais $y = -3$ e $y = 3$, e as retas verticais $x = -3$ e $x = 3$.

2) Dê pontos que satisfaçam as desigualdades $y > 3$, $y < -3$, $x > -3$ e $x < 3$.

3) Construa a reta de equação $y = 2x - 4$. Encontre 4 pontos que satisfaçam as desigualdades $y > 2x - 4$ e 4 pontos que satisfaçam a desigualdade $y < 2x - 4$. Agora coloque esses pontos num mesmo gráfico.

4) Como você percebe os pontos encontrados, que satisfazem as desigualdades, em relação à reta $y = 2x - 4$.



Atividade 5

Nome: ____ Nº _________

Nesta atividade vamos construir o gráfico dado na atividade 3. Siga os passos:

1º passo: Construa, separadamente, as regiões $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y \leq 220 - x$ e $y \leq 120 - 0{,}5x$.

2º passo: Encontre o ponto de intersecção das retas $y = 220 - x$ e $y = 120 - 0{,}5x$.

3º passo: Verifique que região representa a intersecção das regiões $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

4° passo: Faça a interseção das regiões $y \leq 220 - x$ e $y \leq 120 - 0{,}5x$ com o ponto de intersecção encontrado.

5° passo: Vendo a região do 3° passo, faça a intersecção das quatro regiões e compare com o gráfico dado na atividade 3.

Alguns problemas de otimização

1) Uma microempresa produz dois tipos de jogos para adultos e sua capacidade de trabalho é de 50 horas semanais. O jogo A requer 3 horas para ser confeccionado e propicia um lucro de R$ 30,00, enquanto o jogo B precisa de 5 horas para ser produzido e acarreta um lucro de R$ 40,00. Quantas unidades de cada jogo devem ser produzidas semanalmente a fim de maximizar o lucro?

2) Uma pequena fábrica de móveis produz dois modelos de molduras ornamentais, cujos preços de venda são, respectivamente, R$ 110,00 e R$ 56,00. Ela possui 7 peças de madeira e dispõe de 31 horas de trabalho para confeccionar os dois modelos, sendo que o modelo A requer 2 peças de madeira e 5 horas de trabalho, enquanto o modelo B necessita de 1 peça de madeira e 7 horas de trabalho. Quantas molduras de cada modelo a fábrica deve montar se desejar maximizar o rendimento obtido com as vendas?

3) Um fabricante produz dois tipos de óleo, A e B, que são feitos da mistura de óleo de algodão e de amendoim. Cada litro de óleo do tipo A contém 25% de óleo de algodão e 75% de amendoim, e o tipo B, 50% cada. O estoque possui 6.000 litros de óleo de algodão e 9.000 litros de óleo de amendoim. Represente graficamente a região viável de produção.

4) Uma indústria produz dois tipos de geradores de energia, tipo I e tipo II, e para produzi-los, eles passam por duas máquinas A e B. Para produzir o gerador tipo I, a máquina A tem que trabalhar 2 horas e a máquina B deve trabalhar 4 horas. Para a produção do gerador tipo II as máquinas A e B devem trabalhar 4 horas e 2 horas, respectivamente. Supondo que as máquinas podem trabalhar 24 horas por dia, calcule o lucro máximo dessa

indústria, sabendo que o gerador tipo I rende um lucro de R$ 300,00 e o tipo II um lucro de R$ 500,00.

Respostas e sugestões das atividades e dos problemas

Atividade 1

Resposta: Um quadrado de lado 5 metros.

Um retângulo de lados x = 5 e y = 10.

Atividade 2

Resposta: 200 standard e 20 premium.

Sugestão de modelo: $\begin{cases} x + y \ \leq 220 \\ x + 2y \ \leq 240 \\ x \ \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Maximizar a função *f(x, y)* = 360*x* + 600*y*

Atividade 3

Resposta: Por exemplo os pontos (40, 40), (100, 40) e (160, 20). O maior lucro se dá no ponto (200, 20). Sim, é o mesmo ponto encontrado na atividade 2.

Atividade 4

Comentário: Esperamos que os alunos percebam que uns pontos estão acima da reta e outros, abaixo da reta.

Atividade 5

Comentário: É interessante comentar com os alunos que a intersecção das regiões $x \geq 0$ e $y \geq 0$ é o próprio 1º quadrante por se tratar de pontos (x, y) com coordenadas positivas.

Problema 1

Resposta: Fabricar 20 jogos do tipo A.

Sugestão de modelo: $\begin{cases} 3x + 5y \ \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Maximizar a função *f(x, y) = 30x + 40y*

Problema 2

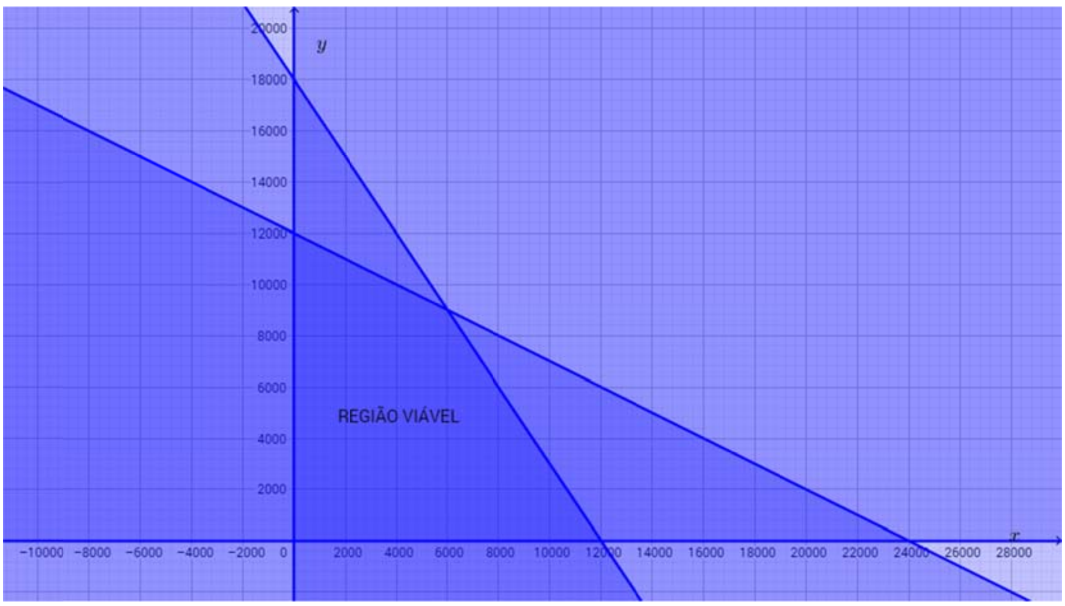
Resposta: 2 molduras do modelo A e 3 molduras do modelo B.

Sugestão de modelo: $\begin{cases} 2x + y \ \leq 7 \\ 5x + 7y \ \leq 31 \\ x \ \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Maximizar a função *f(x, y) = 110x + 56y*

Problema 3

Resposta:



Sugestão de modelo: $\begin{cases} 0{,}25x + 0{,}5y \ \leq 6.000 \\ 0{,}75x + 0{,}5y \ \leq 9.000 \\ x \ \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Problema 4

Resposta: 4 geradores de energia do tipo I e 4 geradores de energia do tipo II

Sugestão de modelo: $\begin{cases} 2x + 4y \ \leq 24 \\ 4x + 2y \ \leq 24 \\ x \ \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Maximizar a função $f(x, y) = 300x + 500y$