Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-Graduação em Matemática

Aline Essinger de Oliveira

Análise Combinatória: Aplicação de Técnicas Alternativas na Resolução de Problemas Interessantes

Rio de Janeiro

2017

ALINE ESSINGER DE OLIVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: APLICAÇÃO DE TÉCNICAS ALTERNATIVAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTERESSANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROF-MAT) da Unirio, como requisito para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro
2017

ALINE ESSINGER DE OLIVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA: APLICAÇÃO DE TÉCNICAS ALTERNATIVAS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INTERESSANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT) da Unirio, como requisito para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática.

Aprovada em 5 de Outubro de 2017.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ronaldo da Silva Busse - Orientador
UNIRIO

Prof. Dr. Fábio Xavier Penna
UNIRIO

Profa. Dra. Patrícia Nunes da Silva
UERJ

Rio de Janeiro
2017

Dedico este trabalho aos meus pais por terem me dado a vida e por me apoiarem em todos os momentos.
Ao meu namorado por aprender conceitos combinatórios para trocarmos ideias.

Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por permitir que eu chegasse até aqui e por não deixar que eu desistisse nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, pelo incentivo, desde a graduação, e por entenderem os momentos de ausência junto a família durante o Mestrado.

Ao meu namorado, por todo amor, carinho, companheirismo, incentivo e amizade. Obrigada por fazer os meus dias ficarem mais leves e por me apoiar sempre, inclusive no término deste trabalho.

A minha amiga Mara, pelos 9 anos de amizade e por estudarmos juntas durante todo esse tempo. Obrigada por ser como uma irmã e por estar ao meu lado.

Ao meu orientador Professor Ronaldo Busse, pelo carinho, dedicação, sugestões e amizade. Agradeço também pela paciência durante todo o curso e ter se mostrado amigo e incentivador.

Aos meus professores ao longo da estrada da vida, que foram fundamentais para o meu amadurecimento e crescimento. Em especial, a dois professores da graduação, Alexandre Salvatore e Edgar Chipana, por nunca me deixarem desistir dos meus objetivos e por serem grandes exemplos de profissionais, sempre quis ser para os meus alunos o que eles foram pra mim.

A todo o corpo docente do mestrado da Unirio, pela amizade e ensinamentos.

Aos meus alunos, por me fazerem aprender a cada dia um pouco mais e por me tornar uma professora melhor.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."

(Descartes)

Resumo

Este trabalho tem como principal objetivo aplicar ferramentas pouco conhecidas na resolução de problemas de Análise Combinatória. Esses métodos de Contagem (Permutação Caótica, Recorrência, Princípio da Reflexão e Números de Catalan) serão aplicados ao longo dos capítulos na resolução de diferentes problemas em que as técnicas convencionais não se mostram tão eficientes. Além disso, trabalharemos com problemas que verificam a existência de conjuntos que satisfazem determinadas propriedades e aplicaremos o Princípio das Gavetas de Dirichlet. Essas técnicas ajudarão a resolver problemas interessantes e curiosos, como a Torre de Hanói, o Problema do Amigo Oculto, o Problema da Fila do Cinema e entre outros. Finalizamos o trabalho com alguns problemas específicos para os alunos do Ensino Médio e que envolverão todos os métodos apresentados, com níveis de dificuldades distintos.

Palavras-chave: Permutação Caótica. Recorrência. Números de Catalan. Princípio da Reflexão. Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Abstract

This work has as main objective to apply not well known tools in the resolution of Combinatorial Analysis' Problems. These methods of Counting (Chaotic Permutation, Recurrence, Reflection Principle and Catalan Numbers) will be applied throughout the Chapters in solving different problems in which conventional techniques are not so efficient. In addition, we will work with problems that verify the existence of sets that satisfy certain properties and we will apply the Dirichlet's Principle of Drawers. These techniques will help to solve interesting and curious problems such as the Tower of Hanoi, the Hidden Friend Problem, the Movie Row Problem and more. We finish the work with some specific problems for the students of the High School that will involve all the presented methods, with different levels of difficulties.

Keywords: Chaotic Permutation. Recurrence. Catalan Numbers. Reflection Principle. Dirichlet's Principle of Drawers.

Sumário

Introdução

É notório como alunos e professores apresentam dificuldade em Análise Combinatória, pois é uma área que vai muito além de fórmulas, macetes e monotonismo. Os problemas precisam de raciocínio, ilustrações e até, muitas vezes, de um pouco de curiosidade!

> *Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.* (CARVALHO, 2006)

Além da dificuldade visível que os alunos encontram em problemas de Contagem, esse conteúdo costuma chegar muito tarde para eles, sendo em muitos currículos apresentado apenas no 3º ano do Ensino Médio, quando os alunos já estão muito amadurecidos e com certos "vícios". Acreditamos que a Análise Combinatória deveria ser vista ao longo das séries, começando a partir do Ensino Fundamental, para ser praticada e compreendida ao longo do tempo.

Outro problema nessa área é que alguns professores também apresentam dificuldade em Combinatória, muitas vezes provocado por uma falha de ensino nas Licenciaturas, onde pouco se trabalham os conteúdos de Contagem, principalmente com relação à resolução de problemas, que é raramente trabalhada.

Acreditamos que a Análise Combinatória seja uma das mais importantes ferramentas na resolução de problemas, além de ser parte importante do estudo das Probabilidades e que desenvolve o raciocínio lógico matemático de forma plena e eficaz, fazendo com que o aluno, quando trabalhado corretamente, consiga desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas. Esse conteúdo é tão importante a ponto de ter lugar garantido em provas de Olimpíadas de Matemática, vestibulares e concursos públicos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio também mostram a importância que o conteúdo de Análise Combinatória deve ter no ensino Médio.

> *As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas.* (BRASIL, 2000)

O fascínio em resolver problemas de Combinatória, a curiosidade em me aperfeiçoar nesse assunto desde a graduação, a falta de materiais e trabalhos nacionais, principalmente que retratem outras técnicas de contagem que serão abordadas neste texto e a ineficiente abordagem do assunto em livros didáticos do Ensino Médio, foram alguns dos motivos que contribuíram para a escolha desse tema. Além de procurar utilizar boas estratégias na resolução de problemas de Combinatória, como é sugerido pelo Professor Paulo Cezar Pinto Carvalho.

> ***Postura:*** *Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.*
> ***Divisão:*** *Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. A ordem em que as decisões são tomadas pode ser extremamente importante para a simplicidade do processo de resolução.*
> ***Não adiar dificuldades:*** *Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.* (CARVALHO, 2015)

Definir Análise Combinatória não é uma tarefa trivial, já que muitas vezes ela é dita simplesmente como estudo de permutações, arranjos e combinações. Entretanto, isso é uma caracterização limitada, pois apesar dessas técnicas fazerem parte da Análise Combinatória, pois resolvem diversos tipos de problemas, há muitos problemas que precisam de outras técnicas para atacá-los. De acordo com [4], podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

De modo geral, há dois tipos de problemas que aparecem com frequência em Análise Combinatória: contar subconjuntos de um conjunto finito e que devem satisfazer determinadas condições dadas e demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito e que também devem satisfazer certas condições. Neste trabalho iremos abordar os dois tipos de problemas, distribuídos ao longo dos quatro capítulos.

No Capítulo 1, definiremos uma Relação de Recorrência e provaremos alguns teoremas que ajudarão na resolução da mesma, ou seja, no processo de encontrar uma expressão fechada, que só dependa de n. Para demonstrar o uso dessa técnica resolveremos alguns problemas de Combinatória. Neste Capítulo também falaremos de Permutação Caótica, provaremos a sua fórmula geral com a utilização de uma Recorrência e usaremos essa técnica para resolver diversos problemas, entre eles, um famoso problema, proposto inicialmente por Nicolaus Bernoulli, que hoje é conhecido como o Problema do Amigo Oculto.

No Capítulo 2, resolveremos um clássico problema, conhecido como O Problema da Fila do Cinema, por dois métodos diferentes: o Número de Catalan que se enquadra perfeitamente no caso em que temos $m = n$ e o Princípio da Reflexão que resolve o problema para o caso geral. Tais técnicas se mostram muito eficientes e práticas na resolução de problemas.

No Capítulo 3, iremos enunciar e provar um importante teorema, conhecido como o Princípio das Gavetas de Dirichlet, que diferentemente dos Capítulos 1 e 2 não se preocupa com a contagem, e sim com a existência de conjuntos. Resolveremos diversos problemas, em diferentes Áreas, como na Álgebra, Geometria e Aritmética com a aplicação do Teorema.

No Capítulo 4, veremos alguns problemas que envolvem todas as técnicas vistas nos Capítulos anteriores e são propostos para alunos do Ensino Médio ou para aqueles que buscam um conhecimento além da sala de aula, como ocorre em alguns projetos de

Iniciação Científica. Estes problemas foram pensados com níveis de dificuldades diversos e buscam apurar o raciocínio e pensamento combinatório dos alunos.

Almejamos ao final dos quatro capítulos, que o texto sirva como fonte de consulta para professores e alunos que busquem conhecer técnicas não usuais na resolução de problemas de contagem, aprimorando e enriquecendo seu conhecimento, além de trazer problemas interessantes e enigmáticos.

Capítulo 1

Recorrências e Permutações Caóticas

Alguns problemas de Análise Combinatória e Probabilidade tornam-se muito trabalhosos se a técnica utilizada para a resolução for enumerar todas as soluções possíveis, por não conseguir encontrar uma maneira que garanta que todos os casos foram contados. Outra forma de tentar obter uma solução de tais problemas, e que muitas vezes não se mostram suficientes, são os raciocínios elementares (princípio fundamental da contagem, permutações, combinações e arranjos). Porém, existem técnicas, não muito conhecidas, que auxiliam e facilitam a resolução de alguns desses problemas, como, por exemplo, a Recorrência, em que podemos modelar o problema a partir de uma expressão recursiva para então, encontrar uma fórmula fechada como solução para concluir o problema.

Uma outra ferramenta para resolver problemas de Contagem é a Permutação Caótica, que pode favorecer o processo de solução, de forma simples e direta, através de uma fórmula que será deduzida por intermédio de uma Recorrência, e resolverá problemas que necessitem do número de permutações em que os elementos não possam ocupar seu lugar de origem.

Neste capítulo daremos a definição formal de Recorrência e provaremos alguns teoremas que ajudam a encontrar a sua solução, além de resolvermos importantes problemas com essa técnica. Também iremos definir Permutação Caótica e deduziremos sua fórmula geral, o que auxiliará a resolução de problemas, em especial, o problema do Amigo Oculto.

1.1 Recorrência

É comum verificarmos muitas sequências que são definidas recursivamente, ou seja, através de uma expressão que permite calcular qualquer termo em função de um ou mais antecessores imediatos. Expressões desse tipo são ditas **Recorrência**.

Definição 1.1.1 *A relação de recorrência é uma identificação f que determina cada termo* a_n *de uma sequência numérica a partir dos termos que o antecedem* $(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1)$ *dada uma regra para definir o primeiro termo, ou até os primeiros termos, de acordo com a necessidade, isto é,*

$$a_n = f(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1) \tag{1.1}$$

ou ainda, uma relação de recorrência de ordem k *pode ser representada por*

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_{n+1}, a_n).$$

Quando mencionamos a **ordem** de uma relação de recorrência estamos afirmando quantos termos anteriores são precisos para determinar o próximo termo. Além disso, quando (1.1) for linear, definimos que a relação de recorrência também é **linear**.

Exemplo 1.1.1 *A função fatorial pode ser expressa recursivamente, definindo-se* $a_n = n!$*, em que a sequência é dada por*

$$a_0 = 1$$

$$a_n = n \cdot a_{n-1}$$

Nesse caso, o primeiro termo é 1 e para encontrar os próximos termos, a partir do segundo, basta multiplicar o termo anterior por n. Dizemos que essa é uma recorrência de primeira ordem.

Exemplo 1.1.2 *A sequência* x_n *dos números naturais pares* $2, 4, 6, 8, \ldots$ *pode ser definida por* $x_{n+1} = x_n + 2$ $(n \geq 1)$ *com* $x_1 = 2$.

Nessa situação, o primeiro termo é 2, e para encontrar os próximos termos, basta somar 2 unidades ao termo anterior. Assim como no exemplo 1.1.1, a recorrência é de primeira ordem.

Exemplo 1.1.3 *A sequência* F_n *de Fibonacci, em que os termos são* $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ *e que cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores pode ser definida como* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ $(n \geq 0)$*, com* $F_0 = F_1 = 1$.

Nesse caso, o primeiro termo é 1 e para encontrar os próximos termos, a partir do terceiro, basta somar os dois termos anteriores. Ou seja, dizemos que essa é uma recorrência de segunda ordem.

Observa-se ainda que para uma determinada sequência ser totalmente definida por uma relação de recorrência, é necessário que os primeiros termos sejam conhecidos, para que a partir daí, os demais termos sejam obtidos.

Verificaremos que resolver uma relação de recorrência, simboliza encontrar uma fórmula fechada para a recorrência, ou seja, uma expressão que forneça cada termo a_n da sequência em função apenas de n, isto é, sem a necessidade de conhecer os termos anteriores. Essa expressão é a solução da recorrência, e como consequência, é possível encontrar diretamente qualquer termo da sequência.

1.1.1 Recorrências Lineares de Primeira Ordem

De acordo com [6], uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear, se e somente se, essa relação for do primeiro grau. Além disso, as recorrências são ditas homogêneas quando não possuem termo independente de x_n.

Verificaremos a seguir como resolver recorrências lineares de primeira ordem, inicialmente genéricas, e em seguida mais particulares, de forma simples e como elas podem ser úteis na resolução de problemas de Análise Combinatória.

Recorrência linear homogênea de primeira ordem

Resolver $a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$, onde $f(n)$ e a_n são não nulos.

Solução: Temos que,

$$a_2 = f(1) \cdot a_1$$

$$a_3 = f(2) \cdot a_2$$

$$a_4 = f(3) \cdot a_3$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = f(n) \cdot a_n$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$a_{n+1} = a_1 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 \prod_{i=1}^{n} f(i)$$

Agora iremos resolver, de forma análoga, porém para um caso mais específico, com uma função $f(n) = 2n$. Além disso, trabalharemos com um valor inicial conhecido.

Exemplo 1.1.4 *Resolver* $x_{n+1} = 2n \cdot x_n$, $x_1 = 2$.

Solução: Temos que,

$$x_2 = 2 \cdot 1 \cdot x_1$$

$$x_3 = 2 \cdot 2 \cdot x_2$$

$$x_4 = 2 \cdot 3 \cdot x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = 2 \cdot (n-1) \cdot x_{n-1}$$

A partir daí, multiplicando as equações, obtemos

$$x_n = 2^{n-1} \cdot (n-1)! \cdot x_1$$

Como $x_1 = 2$, temos então, $x_n = 2^n \cdot (n-1)!$

Veremos agora um caso de recorrência não homogênea.

Recorrência linear não homogênea de primeira ordem

Resolver $a_{n+1} = a_n + f(n)$, onde $f(n)$ é função não nula.

Solução: Temos que,

$$a_2 = a_1 + f(1)$$

$$a_3 = a_2 + f(2)$$

$$a_4 = a_3 + f(3)$$

$$\vdots$$

$$a_{n+1} = a_n + f(n)$$

Somando as equações, obtemos,

$$a_{n+1} = a_1 + f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} = a_1 + \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

De forma semelhante, resolveremos para uma função $f(n) = n$ e conhecendo um valor inicial.

Exemplo 1.1.5 *Resolver* $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

Solução: Verifica-se que

$$x_2 = x_1 + 1$$

$$x_3 = x_2 + 2$$

$$x_4 = x_3 + 3$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_{n-1} + (n-1)$$

A partir daí, somando as equações, obtemos

$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1)$$

Como $x_1 = 0$, temos então,

$$x_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

Veremos a seguir, um importante teorema, que garante que qualquer recorrência linear não homogênea, de primeira ordem, do tipo $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n + f(n)$, poderá ser transformada em um caso mais simples, $a_{n+1} = a_n + f(n)$, já trabalhada.

Teorema 1.1.1 *Se* x_n *é uma solução não-nula da recorrência* $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$*, então a substituição* $a_n = x_n \cdot y_n$*, transforma a recorrência*

$$a_{n+1} = g(n) \cdot a_n + f(n)$$

em

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(n)}{g(n) \cdot x_n}.$$

Demonstração: Tomando $a_n = x_n \cdot y_n$ e substituindo em $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n + f(n)$, temos:

$$x_{n+1} \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot x_n \cdot y_n + f(n) \tag{1.2}$$

Mas, como x_n é solução de $a_{n+1} = g(n) \cdot a_n$, então $x_{n+1} = g(n) \cdot x_n$, substituindo em (1.2),

$$g(n) \cdot x_n \cdot y_{n+1} = g(n) \cdot x_n \cdot y_n + f(n),$$

ou seja,

$$y_{n+1} = \frac{\cancel{g(n)} \cdot \cancel{x_n} \cdot y_n}{\cancel{g(n)} \cdot \cancel{x_n}} + \frac{f(n)}{g(n) \cdot x_n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(n)}{g(n) \cdot x_n}.$$

■

Exemplo 1.1.6 *Resolver* $x_{n+1} = 3x_n + 1, x_1 = 3.$

Solução: Vamos encontrar inicialmente, uma solução não-nula para $x_{n+1} = 3x_n$.
Temos que,

$$x_2 = 3x_1$$

$$x_3 = 3x_2$$

$$x_4 = 3x_3$$

$$\vdots$$

$$x_n = 3x_{n-1}$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$x_n = 3^{n-1}x_1.$$

Escolhendo $x_1 = 1$, $x_n = 3^{n-1}$ é uma solução da equação homogênea.
Observamos que no passo acima pudemos escolher um x_1 conveniente pois precisamos apenas de uma solução da recorrência homogênea e esse x_1 é diferente da condição inicial.
Façamos uma substituição $x_n = 3^{n-1}y_n$ e aí, obtemos,

$$3^n \cdot y_{n+1} = 3 \cdot 3^{n-1} \cdot y_n + 1$$

$$3^n \cdot y_{n+1} = 3^n \cdot y_n + 1$$

$$y_{n+1} = y_n + 3^{-n}$$

Temos agora que resolver a nova recorrência, que é do tipo $y_n = y_{n-1} + f(n)$, já resolvido anteriormente. Temos que,

$$y_2 = y_1 + 3^{-1}$$
$$y_3 = y_2 + 3^{-2}$$
$$y_4 = y_3 + 3^{-3}$$
$$\vdots$$
$$y_n = y_{n-1} + 3^{-(n-1)}$$

Somando as equações, obtemos:

$$y_n = y_1 + 3^{-1} + 3^{-2} + \ldots + 3^{-(n-1)}$$
$$y_n = y_1 + 3^{-1}\left[\frac{(3^{-1})^{n-1} - 1}{3^{-1} - 1}\right]$$
$$y_n = y_1 + \left[\frac{(3^{-1})^{n} - 3^{-1}}{3^{-1} - 1}\right]$$
$$y_n = y_1 - \frac{3}{2}[(3^{-1})^n - 3^{-1}]$$
$$y_n = y_1 - \frac{3^{1-n}}{2} + \frac{1}{2}$$

Como $x_n = 3^{n-1}y_n$ e $x_1 = 3$, temos $x_1 = 3^0 y_1$ e, portanto, $y_1 = 3$.
Assim,

$$y_n = 3 - \frac{3^{1-n}}{2} + \frac{1}{2}$$
$$y_n = \frac{7}{2} - \frac{3^{1-n}}{2}$$

Logo, temos:

$$x_n = 3^{n-1} \cdot \left(\frac{7}{2} - \frac{3^{1-n}}{2}\right)$$
$$x_n = \frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - \frac{1}{2}$$

Veremos a seguir como resolver um antigo e famoso problema, encontrado em [6], que pode ser visto como um problema de Contagem, e que pode ser modelado e resolvido com uma recorrência vista nesta seção.

Exemplo 1.1.7 ***(A Torre de Hanói)*** *Diz a lenda que havia em um templo 3 estacas e n discos de ouro, de diâmetros diferentes. Inicialmente, os discos estavam enfiados na primeira estaca, em ordem crescente de diâmetros, de cima para baixo. Ocupavam-se os sacerdotes em transferi-los para a terceira estaca, usando a segunda como estaca auxiliar. No processo de transferência, de cada vez, movia-se apenas um disco, de uma estaca para a outra, e jamais um disco poderia ser colocado sobre um disco menor. Quando todos estivessem enfiados na terceira estaca, o mundo acabaria. Quantas transferências de discos, de uma estaca para a outra, devem ser feitas para colocá-las na terceira estaca?*

Solução: Vamos analisar o problema para alguns valores iniciais de n.
Para $n = 1$, basta transferir o disco da primeira estaca para a última, ou seja, 1 movimento.
Para $n = 2$, basta transferir o disco menor para a estaca do meio, depois o disco maior para a terceira estaca e por último, o disco menor para a terceira estaca, logo 3 movimentos.
Para $n = 3$, podemos começar a construir o seguinte pensamento: transferimos dois dos três discos para a estaca central, e como já vimos anteriormente isso demandará de 3 movimentos, levamos o maior disco, ou seja, o da base, para a terceira estaca e finalmente temos que transferir novamente os dois discos que estão na estaca central para a terceira estaca, e isso precisará de mais 3 movimentos. Logo, iremos precisar de $3 + 1 + 3 = 7$ movimentos.
A partir daí, vamos analisar o problema para n discos e construir um raciocínio análogo ao anterior. Seja R_n o número de movimentos de transferir os n discos para a terceira estaca. Para transferir $n - 1$ discos para a estaca central vamos precisar de R_{n-1} movimentos, sobrando portanto, o disco da base na primeira estaca, e com um movimento pode ser levado para a terceira estaca. Basta agora levar os $n - 1$ discos da estaca central para a terceira estaca, e para isso, vamos precisar de mais R_{n-1} movimentos. Portanto, $R_n = R_{n-1} + 1 + R_{n-1}$ isto é, $R_n = 2R_{n-1} + 1$. Como visto anteriormente, tal recorrência é linear não homogênea, de primeira ordem. Apesar da recorrência encontrada descrever todos os termos de uma sequência em função de uma anterior, ainda não é o suficiente, vamos encontrar R_n apenas em função de n. Inicialmente, vamos encontrar uma solução não-nula para $R_n = 2R_{n-1}$. Temos que

$$R_2 = 2R_1$$

$$R_3 = 2R_2$$

$$R_4 = 2R_3$$

$$\vdots$$

$$R_n = 2R_{n-1}$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$R_n = 2^{n-1}R_1.$$

Escolhendo $R_1 = 1$, $R_n = 2^{n-1}$ é uma solução da equação homogênea.

Pelo Teorema 1.1.1, fazendo a substituição $R_n = 2^{n-1}P_n$, obtemos:

$$2^{n-1} \cdot P_n = 2 \cdot 2^{n-2} \cdot P_{n-1} + 1$$

$$2^{n-1} \cdot P_n = 2^{n-1} \cdot P_{n-1} + 1$$

$$P_n = P_{n-1} + 2^{1-n}$$

Daí, temos:

$$P_2 = P_1 + 2^{-1}$$

$$P_3 = P_2 + 2^{-2}$$

$$P_4 = P_3 + 2^{-3}$$

$$\vdots$$

$$P_n = P_{n-1} + 2^{-(n-1)}$$

Somando as equações, obtemos:

$$P_n = P_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-(n-1)}$$
$$P_n = P_1 + 2^{-1}\left[\frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1}\right]$$
$$P_n = P_1 - 2^{1-n} + 1$$

Como $R_n = 2^{n-1}P_n$, e temos que $R_1 = 1$, então $P_1 = 1$.

Logo, $P_n = 1 - 2^{1-n} + 1 = 2 - 2^{1-n}$, daí

$$R_n = 2^{n-1} \cdot (2 - 2^{1-n})$$

$$R_n = 2^n - 1.$$

Veremos a seguir um problema da prova do Instituto Militar de Engenharia (IME), do ano de 2002 [19], que pode ser modelado através de uma recorrência de primeira ordem e a partir daí, encontrar sua solução através de um dos métodos vistos.

Exemplo 1.1.8 ***(IME - 2002)*** *Quatro cidades A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo.*

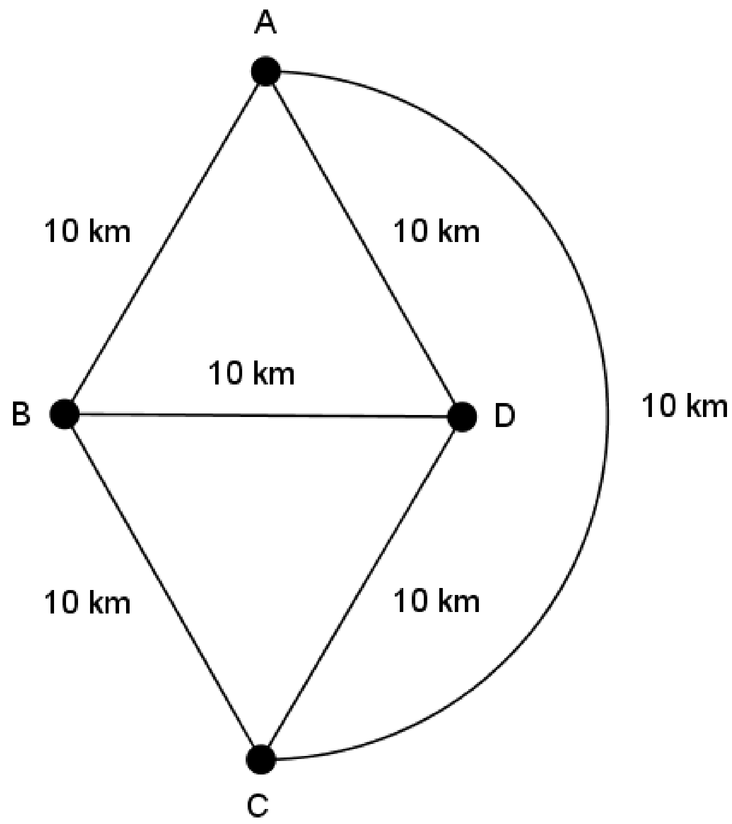

Figura 1.1: Ligação entre as 4 cidades

Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem exatamente 50 km? E $n \cdot 10$ km?

Solução: Seja P_n a quantidade de percursos diferentes que começam e terminam na cidade A com $n \cdot 10$ km. É fácil perceber que $P_1 = 0$ pois não é possível com 10 km sair e voltar para A. Além disso, o número total de caminhos com $(n-1) \cdot 10$ km que começam em A é 3^{n-1}, pois cada cidade é conectada por 3 estradas. Mas, estaremos assim contando também os caminhos que estarão em A no $(n-1) \cdot 10$ km e portanto não poderão estar em A no $n \cdot 10$ km. Ora, contar esses casos é o mesmo que calcular P_{n-1}, pois serão percursos começando e terminando em A com $(n-1) \cdot 10$ km. Logo, temos

$$P_n = 3^{n-1} - P_{n-1},$$

que é uma recorrência linear não homogênea, de primeira ordem.

Vamos encontrar inicialmente, uma solução não-nula para $P_n = -P_{n-1}$. Temos que,

$$P_2 = -P_1$$

$$P_3 = -P_2$$

$$P_4 = -P_3$$

$$\vdots$$

$$P_n = -P_{n-1}$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$P_n = (-1)^{n-1} P_1.$$

Escolhendo $P_1 = 1$, $P_n = (-1)^{n-1}$ é uma solução da equação homogênea. Façamos uma substituição $P_n = (-1)^{n-1} \cdot R_n$ e aí, obtemos,

$$(-1)^{n-1} \cdot R_n = -(-1)^{n-2} \cdot R_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$(-1)^{n-1} \cdot R_n = (-1)^{n-1} \cdot R_{n-1} + 3^{n-1}$$

$$R_n = R_{n-1} + 3^{n-1} \cdot (-1)^{1-n}$$

Temos agora que resolver a nova recorrência encontrada. Temos que,

$$R_2 = R_1 + 3^1 \cdot (-1)^{-1} = R_1 - 3^1$$

$$R_3 = R_2 + 3^2 \cdot (-1)^{-2} = R_2 + 3^2$$

$$R_4 = R_3 + 3^3 \cdot (-1)^{-3} = R_3 - 3^3$$

$$\vdots$$

$$R_n = R_{n-1} + (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1}$$

Somando as equações, obtemos:

$$R_n = R_1 - 3^1 + 3^2 - 3^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot 3^{n-1}$$

$$R_n = R_1 - 3^1 \left[\frac{(-3)^{n-1} - 1}{-3 - 1} \right]$$

$$R_n = R_1 + \frac{3}{4}[(-3)^{n-1} - 1]$$

Como $P_n = (-1)^{n-1} \cdot R_n$ e $P_1 = 0$, temos $P_1 = (-1)^0 \cdot R_1$ e, portanto, $R_1 = 0$.

Assim,

$$R_n = \frac{3}{4} \cdot (-3)^{n-1} - \frac{3}{4}.$$

Logo, temos

$$P_n = (-1)^{n-1} \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot (-3)^{n-1} - \frac{3}{4}\right]$$

$$P_n = \frac{3}{4} \cdot 3^{n-1} - (-1)^n \cdot (-1)^{-1} \cdot \frac{3}{4}$$

$$P_n = \frac{3}{4} \cdot 3^{n-1} + \frac{3}{4} \cdot (-1)^n$$

$$P_n = \frac{3}{4}[3^{n-1} + (-1)^n]$$

Assim, para $n = 5$ temos

$$P_5 = \frac{3}{4}[3^4 + (-1)^5]$$

$$P_5 = \frac{3}{4}(81 - 1)$$

$$P_5 = \frac{3}{4} \cdot 80 = 60$$

Uma outra aplicação para as Recorrências são nos problemas de Probabilidade, como podemos verificar no exemplo abaixo.

Exemplo 1.1.9 *Caroline e Daniela disputam uma série de partidas de cartas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem iniciou tem probabilidade 0,7 de ganhá-la e probabilidade 0,3 de perdê-la. Se Caroline iniciou a primeira partida, qual é a probabilidade de Daniela ganhar a n-ésima partida?*

Solução: Seja p_n a probabilidade de Daniela ganhar a n-ésima partida. Nesse caso, temos duas situações a considerar:

- Daniela ter ganho a anterior, ou seja, a $(n-1)$-ésima partida.
  A probabilidade de Daniela ter ganho a $(n-1)$-ésima partida é p_{n-1} e de ganhar a n-ésima partida dado que ganhou a $(n-1)$-ésima é de 0,7.

- Daniela ter perdido a anterior, ou seja, a $(n-1)$-ésima partida.
  A probabilidade de Daniela ter perdido a $(n-1)$-ésima partida é $(1 - p_{n-1})$ e de ganhar a n-ésima partida dado que perdeu a $(n-1)$-ésima é de 0,3.

Logo, a probabilidade de ganhar a n-ésima partida é dada por

$$p_n = 0,7 \cdot p_{n-1} + 0,3 \cdot (1 - p_{n-1})$$

$$p_n = 0,4 \cdot p_{n-1} + 0,3$$

Além disso, como Caroline iniciou a primeira partida, temos $p_1 = 0,3$.

Resolvendo inicialmente a solução não-nula para $p_n = 0,4p_{n-1}$, temos

$$p_2 = 0,4p_1$$

$$p_3 = 0,4p_2$$

$$p_4 = 0,4p_3$$

$$\vdots$$

$$p_n = 0,4p_{n-1}$$

Multiplicando as equações, obtemos

$$p_n = 0,4^{n-1}p_1$$

Escolhendo $p_1 = 1$, $p_n = 0,4^{n-1}$ é solução da equação homogênea.

Pelo Teorema 1.1.1, fazendo a substituição $p_n = 0,4^{n-1} \cdot a_n$, obtemos

$$0,4^{n-1} \cdot a_n = 0,4 \cdot 0,4^{n-2} \cdot a_{n-1} + 0,3$$

$$0,4^{n-1} \cdot a_n = 0,4^{n-1} \cdot a_{n-1} + 0,3$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{0,3}{0,4^{n-1}}$$

Daí,

$$a_2 = a_1 + \frac{0,3}{0,4}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{0,3}{0,4^2}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{0,3}{0,4^3}$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{0,3}{0,4^{n-1}}$$

Somando as equações, obtemos

$$a_n = a_1 + \frac{0,3}{0,4} + \frac{0,3}{0,4^2} + \cdots + \frac{0,3}{0,4^{n-1}}$$

$$a_n = a_1 + \frac{0,3}{0,4}\left[\frac{(0,4^{-1})^{n-1} - 1}{0,4^{-1} - 1}\right]$$

$$a_n = a_1 + \frac{1}{5}(0,4^{-n} - 0,4^{-1})$$

$$a_n = a_1 + \frac{1}{5} \cdot 0,4^{-n} - \frac{1}{2}$$

Como $p_n = 0,4^{n-1}a_n$ e $p_1 = 0,3$, então $a_1 = 0,3$, e portanto,

$$a_n = 0,3 + \frac{1}{5} \cdot 0,4^{-n} - \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{5} \cdot 0,4^{-n} - \frac{1}{5}$$

Daí,

$$p_n = 0,4^{n-1} \cdot \left[\frac{1}{5} \cdot 0,4^{-n} - \frac{1}{5}\right]$$

$$p_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{5} \cdot 0,4^{n-1}$$

1.1.2 Recorrências Lineares de Segunda Ordem

Em uma recorrência de segunda ordem cada termo da sequência é obtido a partir de dois termos imediatamente anteriores, isto é, x_n está em função de x_{n-1} e x_{n-2}.

Abordaremos apenas recorrências lineares de segunda ordem homogêneas e com coeficientes constantes, por conta dos problemas de combinatória serem resolvidos, na maioria das vezes, com esse tipo de expressão.

As recorrências lineares de segunda ordem homogêneas, com coeficientes constantes, podem ser expressas da forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Basta trabalhar com a condição $q \neq 0$, pois se $q = 0$ a recorrência deixa de ser de segunda ordem e passa a ser, na verdade, de primeira ordem.

Veremos abaixo, um problema de Análise Combinatória, de uma Olimpíada de Matemática da Noruega [21], que pode ser modelado através de uma recorrência de segunda ordem, ou seja, pode ser resolvido encontrando sempre um termo através dos dois termos imediatamente anteriores.

Exemplo 1.1.10 ***(Olimpíada Norueguesa)*** *Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos?*

Solução: Seja R_n o número de contas de banco com n dígitos que usam apenas os dígitos 1 e 2 e não ocorra dois dígitos 1 consecutivos. Temos dois casos a considerar:

- A conta começa com o dígito 2:
  Fixando o dígito 2 como o primeiro da conta resta observar os outros $n-1$ dígitos que devem seguir a mesma regra que R_n, ora, isso é o mesmo que pensar em R_{n-1}.

- A conta começa com o dígito 1:
  Fixando o dígito 1 como o primeiro da conta, pela regra, o segundo dígito só pode ser 2, resta observar os outros $n-2$ dígitos que devem seguir a mesma regra que R_n, ora, isso é o mesmo que pensar em R_{n-2}.

Logo, temos $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$. Como busca-se o número de contas com 11 dígitos, basta encontrar R_{11}. Temos que $R_{11} = R_{10} + R_9$. É fácil ver que $R_1 = 2$ pois só temos as contas 1 ou 2 e $R_2 = 3$ pois tem-se as contas 12, 21 ou 22. Assim,

$R_3 = R_2 + R_1 = 3 + 2 = 5$

$R_4 = R_3 + R_2 = 5 + 3 = 8$

$R_5 = R_4 + R_3 = 8 + 5 = 13$

$R_6 = R_5 + R_4 = 13 + 8 = 21$

$R_7 = R_6 + R_5 = 21 + 13 = 34$

$R_8 = R_7 + R_6 = 34 + 21 = 55$

$R_9 = R_8 + R_7 = 55 + 34 = 89$

$R_{10} = R_9 + R_8 = 89 + 55 = 144$

$R_{11} = R_{10} + R_9 = 144 + 89 = 233$

No exemplo acima fomos encontrando cada elemento através dos dois anteriores até encontrar o elemento desejado. No entanto, esse processo nem sempre é necessário, e é inviável para n grande. Assim, podemos obter um determinado elemento através de uma expressão geral da recorrência, ou seja, encontrar uma solução da recorrência.

Uma recorrência linear de segunda ordem homogênea, com coeficientes constantes, como já visto anteriormente, tem a forma $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, que pode ser associada a uma equação do segundo grau, $r^2 + pr + q = 0$, e que é chamada de *equação característica.* Como supomos $q \neq 0$, isso já nos garante que 0 não pode ser raiz da equação característica.

O teorema a seguir relaciona as raízes r_1 e r_2 da equação característica associada, com a solução da recorrência.

Teorema 1.1.2 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, então, $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$ é solução da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 e c_2.*

Demonstração: Substituindo $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$ no lado esquerdo da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$, obtemos,

$$c_1r_1^{n+2} + c_2r_2^{n+2} + pc_1r_1^{n+1} + pc_2r_2^{n+1} + qc_1r_1^n + qc_2r_2^n,$$

reorganizando os termos de maneira adequada, e em seguida agrupando-os temos,

$$c_1r_1^{n+2} + pc_1r_1^{n+1} + qc_1r_1^n + c_2r_2^{n+2} + pc_2r_2^{n+1} + qc_2r_2^n$$

$$= c_1r_1^n(r_1^2 + pr_1 + q) + c_2r_2^n(r_2^2 + pr_2 + q),$$

como r_1 e r_2 são raízes, temos

$$c_1r_1^n \cdot 0 + c_2r_2^n \cdot 0 = 0$$

Logo, a_n é solução. ∎

Exemplo 1.1.11 *A recorrência $x_{n+2} - 4x_{n+1} - 5x_n = 0$ tem como equação característica $r^2 - 4r - 5 = 0$. Como as raízes da equação característica são dadas por -1 e 5, de acordo com o Teorema 1.1.2, $a_n = c_1(-1)^n + c_25^n$ é solução da recorrência dada, para quaisquer valores das constantes c_1 e c_2.*

O Teorema a seguir garante que, se $r_1 \neq r_2$, **todas** as soluções de uma recorrência tem a forma apresentada no Teorema 1.1.2, ou seja, $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$. A prova do Teorema será baseada em [17] e [16].

Teorema 1.1.3 *Se as raízes de $r^2 + pr + q = 0$ são r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, então, todas as soluções da recorrência $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$ são da forma $a_n = c_1r_1^n + c_2r_2^n$, com c_1 e c_2 constantes.*

Demonstração: Seja u_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Vamos inicialmente escrever u_1 e u_2 na forma pretendida, isto é, determinar c_1 e c_2 tais que u_n seja da forma $c_1r_1^n + c_2r_2^n$. Para $n = 1$ e $n = 2$, temos

$$\begin{cases} u_1 = c_1r_1 + c_2r_2 \\ u_2 = c_1r_1^2 + c_2r_2^2 \end{cases}$$

Assim, da primeira equação, isolando c_1, temos

$$c_1 = \frac{u_1 - c_2 r_2}{r_1}$$

Substituindo na segunda equação, temos

$$u_2 = \left(\frac{u_1 - c_2 r_2}{\cancel{r_1}}\right) \cdot \cancel{r_1^2} + c_2 r_2^2$$

Daí,

$$u_2 = u_1 r_1 - c_2 r_2 r_1 + c_2 r_2^2,$$

que implica em

$$u_2 - u_1 r_1 = c_2(r_2^2 - r_2 r_1),$$

isolando c_2, temos

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1 r_1}{r_2^2 - r_2 r_1},$$

ou ainda, mais precisamente,

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1 r_1}{r_2(r_2 - r_1)}.$$

Substituindo esse resultado na equação de c_1, temos

$$c_1 = \frac{u_1 - \left(\dfrac{u_2 - u_1 r_1}{\cancel{r_2}(r_2 - r_1)}\right) \cdot \cancel{r_2}}{r_1},$$

Daí,

$$c_1 = \frac{u_1 - \dfrac{u_2 - u_1 r_1}{r_2 - r_1}}{r_1},$$

desenvolvendo, temos

$$c_1 = \frac{u_1(r_2 - r_1) - u_2 + u_1 r_1}{r_1(r_2 - r_1)},$$

segue que

$$c_1 = \frac{u_1 r_2 - \cancel{u_1 r_1} - u_2 + \cancel{u_1 r_1}}{r_1(r_2 - r_1)}.$$

Logo,

$$c_1 = \frac{u_1 r_2 - u_2}{r_1(r_2 - r_1)}$$

e

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1 r_1}{r_2(r_2 - r_1)}.$$

Esse resultado é possível pois $r_1 \neq r_2$ e como visto anteriormente, 0 não pode ser raiz da equação característica, logo, $r_1 \neq 0$ e $r_2 \neq 0$.

Tomemos $t_n = u_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n$ e vamos provar que $t_n = 0$ para todo n. De fato, temos que

$t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n = u_{n+2} - c_1 r_1^{n+2} - c_2 r_2^{n+2} + p(u_{n+1} - c_1 r_1^{n+1} - c_2 r_2^{n+1}) + q(u_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n)$
$= (u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n) - c_1 r_1^n (r_1^2 + pr_1 + q) - c_2 r_2^n (r_2^2 + pr_2 + q)$.
O primeiro parêntese é igual a zero porque u_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. Os dois últimos parênteses são iguais a zero porque r_1 e r_2 são raízes de $r^2 + pr + q = 0$.
Então, $t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n = 0$.
Além disso, como

$$\begin{cases} u_1 = c_1 r_1 + c_2 r_2 \\ u_2 = c_1 r_1^2 + c_2 r_2^2 \end{cases}$$

e t_n foi definido como $t_n = u_n - c_1 r_1^n - c_2 r_2^n$, temos $t_1 = t_2 = 0$.
Mas, se $t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n = 0$ e $t_1 = t_2 = 0$, então $t_n = 0$ para todo n. ■

Para os casos em que as raízes da equação característica são complexas, a solução $a_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$, com c_1 e c_2 constantes quaisquer, pode ser escrita colocando as raízes na forma trigonométrica, para esquivar-se de cálculos com complexos. Dessa forma, as raízes serão escritas da seguinte forma:

$$r_1 = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$r_2 = \rho(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta).$$

Assim,

$$r_1^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

$$r_2^n = \rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta).$$

Logo,

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = c_1 \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta) + c_2 \rho^n(\cos n\theta - i \operatorname{sen} n\theta).$$

Colocando ρ^n em evidência, temos

$$c_1 r_1^n + c_2 r_2^n = \rho^n[(c_1 + c_2)\cos n\theta + i(c_1 - c_2)\operatorname{sen} n\theta].$$

Podemos escrever $c_1 + c_2$ e $i(c_1 - c_2)$ como novas constantes, tomando $k_1 = c_1 + c_2$ e $k_2 = i(c_1 - c_2)$, a solução poderá ser dada por

$$a_n = \rho^n[k_1 \cos n\theta + k_2 \operatorname{sen} n\theta]$$

Temos ainda o caso que as raízes da equação característica são iguais, ou seja, $r_1 = r_2 = r$, e portanto o teorema abaixo mostra como será a solução da recorrência.

Teorema 1.1.4 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$*, então* $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ *é solução da recorrência*

$$x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0,$$

quaisquer que sejam os valores das constantes c_1 *e* c_2*.*

Demonstração: Se $r_1 = r_2 = r$, pela soma de duas raízes de uma equação do segundo grau, temos $r_1 + r_2 = -p$, ou seja, $r + r = -p$ e daí, $r = -\frac{p}{2}$, ou ainda, $2r + p = 0$. Substituindo $a_n = c_1 r^n + c_2 n r^n$ no lado esquerdo da recorrência, obtemos

$$c_1 r^{n+2} + c_2(n+2) r^{n+2} + p[c_1 r^{n+1} + c_2(n+1) r^{n+1}] + q(c_1 r^n + c_2 n r^n).$$

Agrupando adequadamente os termos, temos

$$c_1 r^n (r^2 + pr + q) + c_2 n r^n (r^2 + pr + q) + c_2 r^{n+1}(2r + p).$$

Como r é raiz e $2r + p = 0$, temos

$$c_1 r^n \cdot 0 + c_2 n r^n \cdot 0 + c_2 r^{n+1} \cdot 0 = 0.$$

Logo, a_n é solução. ∎

Exemplo 1.1.12 *A recorrência* $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0$ *tem como equação característica* $r^2 - 10r + 25 = 0$*. Como as raízes da equação característica são dadas por* $r_1 = r_2 = 5$*, de acordo com o Teorema 1.1.4,* $a_n = c_1 5^n + c_2 n 5^n$ *é solução da recorrência dada, para quaisquer valores das constantes* c_1 *e* c_2*.*

O Teorema a seguir garante que, se $r_1 = r_2 = r$, **todas** as soluções de uma recorrência tem a forma apresentada no Teorema 1.1.4, ou seja, $a_n = c_1 r_1^n + c_2 n r_2^n$.

Teorema 1.1.5 *Se as raízes de* $r^2 + pr + q = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$*, então todas as soluções da recorrência* $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$ *são da forma* $c_1 r^n + c_2 n r^n$*, com* c_1 *e* c_2 *constantes.*

Demonstração: Seja u_n uma solução qualquer de $x_{n+2} + p x_{n+1} + q x_n = 0$. Vamos inicialmente escrever u_1 e u_2 na forma pretendida, isto é, determinar c_1 e c_2 tais que u_n seja da forma $c_1 r^n + c_2 n r^n$. Para $n = 1$ e $n = 2$, temos

$$\begin{cases} u_1 = c_1 r + c_2 r \\ u_2 = c_1 r^2 + 2 c_2 r^2 \end{cases}$$

Assim, da primeira equação, isolando c_1, temos

$$c_1 = \frac{u_1 - c_2 r}{r}$$

Substituindo na segunda equação, temos

$$u_2 = \left(\frac{u_1 - c_2 r}{\cancel{r}}\right) \cdot \cancel{r^2} + 2c_2 r^2$$

Daí,

$$u_2 = u_1 r - c_2 r^2 + 2c_2 r^2,$$

que implica em

$$u_2 - u_1 r = c_2 r^2,$$

isolando c_2, temos

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1 r}{r^2},$$

Substituindo esse resultado na equação de c_1, temos

$$c_1 = \frac{u_1 - \left(\dfrac{u_2 - u_1 r}{\cancel{r^2}}\right) \cdot \cancel{r}}{r},$$

Daí,

$$c_1 = \frac{u_1 - \dfrac{u_2 - u_1 r}{r}}{r},$$

desenvolvendo, temos

$$c_1 = \frac{u_1 r - u_2 + u_1 r}{r^2}.$$

Logo,

$$c_1 = \frac{2u_1 r - u_2}{r^2}$$

e

$$c_2 = \frac{u_2 - u_1 r}{r^2}.$$

Esse resultado é possível pois $r \neq 0$.

Tomemos $t_n = u_n - c_1 r^n - c_2 n r^n$ e vamos provar que $t_n = 0$ para todo n. De fato, temos que

$t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n$

$= u_{n+2} - c_1 r^{n+2} - c_2(n+2)r^{n+2} + p[u_{n+1} - c_1 r^{n+1} - c_2(n+1)r^{n+1}] + q(u_n - c_1 r^n - c_2 n r^n)$

$= (u_{n+2} + pu_{n+1} + qu_n) - c_1 r^n(r^2 + pr + q) - c_2 n r^n(r^2 + pr + q) - c_2 r^{n+1}(2r + p).$

O primeiro parêntesis é igual a zero porque u_n é solução de $x_{n+2} + px_{n+1} + qx_n = 0$. O segundo e o terceiro parêntesis são iguais a zero porque r é raiz de $r^2 + pr + q = 0$. Já o quarto parêntesis é igual a zero porque, $2r + p = 0$, pois, quando $r_1 = r_2 = r$, temos $r = -\frac{p}{2}$, e portanto, $t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n = 0$.
Além disso, como

$$\begin{cases} u_1 = c_1 r + c_2 r \\ u_2 = c_1 r^2 + 2c_2 r^2 \end{cases}$$

e t_n foi definido como $t_n = u_n - c_1 r^n - c_2 n r^n$, temos $t_1 = t_2 = 0$.
Mas, se $t_{n+2} + pt_{n+1} + qt_n = 0$ e $t_1 = t_2 = 0$, então $t_n = 0$ para todo n. ■

Veremos a seguir um problema que pode ser modelado com uma recorrência de segunda ordem e será resolvido em duas etapas: escrevendo todos os elementos até obter o P_7 desejado e encontrando a solução geral da Recorrência, ou seja, P_n.

Exemplo 1.1.13 ***(UFRJ)*** *Uma pessoa pode subir uma escada da seguinte forma: a cada degrau, ou ela passa ao degrau seguinte ou galga dois degraus de uma só vez, pulando um degrau intermediário. A exceção dessa regra ocorre se a pessoa estiver no penúltimo degrau, quando ela só tem a opção de passar ao último degrau. Seja P_n o número de modos diferentes que a pessoa tem de subir uma escada de n degraus dessa maneira. Calcule P_7 e P_n.*

Solução: Para uma pessoa chegar ao último degrau n tem-se duas possibilidades:

- Ter vindo do penúltimo degrau:

  Nesse caso a pessoa teve que passar pelos $n-1$ degraus, ou seja, tem P_{n-1} formas de fazer isso.

- Ter vindo do antepenúltimo degrau:

  Nesse caso a pessoa teve que passar pelos $n-2$ degraus, ou seja, tem P_{n-2} formas de fazer isso.

Logo, tem-se que $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$. Como busca-se P_7, tem-se que $P_7 = P_6 + P_5$.
É fácil ver que $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, então

$P_3 = P_2 + P_1 = 2 + 1 = 3$

$P_4 = P_3 + P_2 = 3 + 2 = 5$

$P_5 = P_4 + P_3 = 5 + 3 = 8$

$P_6 = P_5 + P_4 = 8 + 5 = 13$

$P_7 = P_6 + P_5 = 13 + 8 = 21.$

Resolveremos agora a Recorrência para encontrar a solução geral, ou seja, P_n apenas em função de n.

Temos que $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ pode ser escrita como $P_n - P_{n-1} - P_{n-2} = 0$, que tem como equação característica associada, $r^2 - r - 1 = 0$, em que as raízes são dadas por

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Pelo Teorema 1.1.3, temos que todas as soluções da recorrência são dadas por

$$P_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

com c_1 e c_2 constantes.

Como $P_1 = 1$ e $P_2 = 2$, substituindo em $P_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, temos

$$\begin{cases} c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 2 \end{cases}$$

Desenvolvendo as equações, temos

$$\begin{cases} c_1 + \sqrt{5}c_1 + c_2 - \sqrt{5}c_2 = 2 \\ c_1 + 2\sqrt{5}c_1 + 5c_1 + c_2 - 2\sqrt{5}c_2 + 5c_2 = 8 \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por -2, temos

$$\begin{cases} -2c_1 - 2\sqrt{5}c_1 - 2c_2 + 2\sqrt{5}c_2 = -4 \\ 6c_1 + 2\sqrt{5}c_1 + 6c_2 - 2\sqrt{5}c_2 = 8 \end{cases}$$

Somando as equações ficamos com

$$4c_1 + 4c_2 = 4 \Longrightarrow c_1 + c_2 = 1.$$

Daí, tomando $c_1 = 1 - c_2$ e substituindo na primeira equação, obtemos

$$1 - \cancel{c_2} + \sqrt{5}\cdot(1 - c_2) + \cancel{c_2} - \sqrt{5}c_2 = 2$$

Seguindo que

$$-2\sqrt{5}c_2 = 1 - \sqrt{5},$$

Portanto,

$$c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-5}{-10} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}.$$

Substituindo em c_1,

$$c_1 = 1 - \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.$$

Logo,

$$P_n = \left(\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Observação: Apesar da recorrência encontrada não parecer gerar números naturais, como é o esperado, podemos encontrar os 10 primeiros termos e verificar, que de fato, são números naturais.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Tabela 1.1: Tabela de P_n

Como já era previsto, os valores de P_n são números naturais e da sequência de Fibonacci, isso porque a recorrência $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$ é a sequência de Fibonacci.

1.2 Permutação Caótica

Dada uma sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de elementos distintos, chama-se **permutação caótica** a qualquer permutação em que nenhum dos elementos encontra-se na sua posição de origem. Uma permutação com essa característica também é chamada de **"desarranjo"**. Com técnicas apresentadas em [12] e [7] e mais algumas adaptações é possível construir a fórmula geral de Permutação Caótica, como pode ser visto abaixo.

Seja D_n o número de permutações caóticas, isto é, a quantidade de permutações dos n termos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nas quais nenhum deles ocupa sua posição original. Quando $n = 1$, tem-se somente um termo. Logo, não existe forma de "desarranjá-lo" e, portanto, $D_1 = 0$. Quando $n = 2$, pode-se "desarranjar" os termos apenas de uma forma: (a_2, a_1). Quando $n = 3$, pode-se arrumar os termos de seis maneiras: $(a_1, a_2, a_3); (a_1, a_3, a_2); (a_2, a_1, a_3); (a_2, a_3, a_1); (a_3, a_1, a_2); (a_3, a_2, a_1)$. Temos como "desarranjos", (a_2, a_3, a_1) e (a_3, a_1, a_2). Portanto, $D_3 = 2$. Seguindo a análise dos casos particulares, verifica-se que $D_4 = 9$ e $D_5 = 44$, mas, a partir daí, as alternativas tornam-se muito numerosas de tal modo que é preciso deduzir matematicamente uma lei de formação para D_n.

Seja $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ um arranjo inicial de n termos. Rearranjando-os de modo que nenhum retorne à sua posição original, existem $n - 1$ opções para o primeiro termo. Suponha-se que o primeiro termo seja a_2. Assim, D_n será dado pelo produto do número de variações dos demais termos por $n - 1$ (já que existem $n - 1$ opções para o primeiro termo). Sendo a_2 o primeiro termo de um "desarranjo", tem-se duas possibilidades:

- O segundo termo é o a_1. Nesse caso, precisa-se rearranjar os $n-2$ termos restantes de modo que nenhum volte à sua posição de origem. Ora, esse é o mesmo problema do qual partiu-se, reduzido de dois termos, havendo portanto, D_{n-2} formas de fazê-lo.

- O segundo termo não é o a_1. O problema agora é rearranjar os $n-1$ termos restantes que ficarão à direita de a_2 e isso pode ser feito de D_{n-1} maneiras, se considerarmos que a posição original de a_1 passa a ser a posição de a_2.

Como os rearranjos das duas formas pertencem a conjuntos disjuntos, tem-se que

$$D_n = (n-1) \cdot D_{n-2} + (n-1) \cdot D_{n-1}$$

$$D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1})$$

Obtêm-se assim, uma fórmula de recorrência que resolve o problema, mas ainda não fornece D_n como uma função explícita de n.

Desenvolvendo-se a fórmula de recorrência, tem-se

$$D_n = nD_{n-2} + nD_{n-1} - D_{n-1} - D_{n-2}$$

o que implica em

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} + D_{n-2} - nD_{n-2})$$

Assim para qualquer $n > 2$, inteiro, tem-se

$$D_3 - 3D_2 = -(D_2 - 2D_1)$$

$$D_4 - 4D_3 = -(D_3 - 3D_2)$$

$$D_5 - 5D_4 = -(D_4 - 4D_3)$$

$$\cdots$$

$$D_n - nD_{n-1} = -[D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}]$$

Multiplicando membro a membro, os dois lados das $n-2$ equações, e cancelando os fatores comuns, obtêm-se

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)$$

Sabendo-se que $D_2 = 1$ e $D_1 = 0$ e que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, obtêm-se

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n$$

ou ainda,

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \tag{1.3}$$

A expressão acima é uma recorrência linear não homogênea de primeira ordem e pode ser resolvida com um dos métodos da seção anterior.

Vamos encontrar inicialmente, uma solução não-nula para $D_n = nD_{n-1}$.
Temos que,

$$D_2 = 2D_1$$

$$D_3 = 3D_2$$

$$D_4 = 4D_3$$

$$\vdots$$

$$D_n = nD_{n-1}$$

Multiplicando as equações, obtemos:

$$D_n = n!\, D_1.$$

Escolhendo $D_1 = 1$, $D_n = n!$ é uma solução da equação homogênea.

Façamos uma substituição $D_n = n!\, G_n$ e aí, obtemos,

$$n!\, G_n = n(n-1)!\, G_{n-1} + (-1)^n$$

$$n!\, G_n = n!\, G_{n-1} + (-1)^n$$

$$G_n = G_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Temos agora que resolver a nova recorrência. Temos que,

$$G_2 = G_1 + \frac{(-1)^2}{2!} = G_1 + \frac{1}{2!}$$

$$G_3 = G_2 + \frac{(-1)^3}{3!} = G_2 - \frac{1}{3!}$$

$$G_4 = G_3 + \frac{(-1)^4}{4!} = G_3 + \frac{1}{4!}$$

$$\vdots$$

$$G_n = G_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Somando as equações, obtemos:

$$G_n = G_1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Como $D_n = n!\, G_n$ e $D_1 = 0$, temos $D_1 = 1!\, G_1$ e, portanto, $G_1 = 0$.

Assim,

$$G_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

Logo, temos:

$$D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) \text{ para } n \geq 2.$$

Observação: Caso não se resolva a recorrência $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$ pelo método visto anteriormente e alguns termos consigam ser encontrados de forma intuitiva será necessário provar a expressão deduzida por intermédio do Princípio de Indução Finita, como pode ser visto a seguir.

Utilizando o Princípio de Indução Finita, demonstra-se que

$$D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

é válida para $n \geq 2$.

De fato, para $n = 2$, tem-se que $D_2 = 2!\left(\frac{1}{2!}\right) = 1$, que já foi verificada como verdadeira.

Suponha-se, por Hipótese de Indução, que

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$$

Demonstra-se a validez de D_{n+1}. De fato, como visto anteriormente em (1.3), tem-se então que

$$D_{n+1} = (n+1)D_n + (-1)^{n+1}$$

Substituindo a Hipótese de Indução, tem-se

$$D_{n+1} = (n+1)\left[n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)\right] + (-1)^{n+1}$$

$$D_{n+1} = (n+1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right) + (-1)^{n+1}$$

$$D_{n+1} = (n+1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

Portanto, $D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$ para $n \geq 2$.

1.2.1 Algumas Aplicações

Existem diversos problemas de Análise Combinatória e até de Probabilidade que se tornam muito trabalhosos de se resolver apenas com a noção de Contagem e com a permutação caótica a resolução se torna mais elementar e objetiva. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1.2.1 *Um grupo de estudo possui 4 alunos. A professora coletou as provas resolvidas pelos alunos e imediatamente repassou para eles mesmos corrigirem. De quantas maneiras é possível fazer isto sem que um aluno receba a mesma prova que fez?*

Solução: Como cada aluno não pode corrigir a sua própria prova, portanto temos um problema de permutação caótica. Ou seja, temos que descobrir o valor de D_4. Logo,

$$D_4 = 4!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 4!\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) = 24\left(\frac{12}{24} - \frac{4}{24} + \frac{1}{24}\right) = 9 \text{ maneiras.}$$

Exemplo 1.2.2 *Quantas são as permutações de* $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$ *que têm exatamente* ***cinco*** *elementos no seu lugar primitivo?*

Solução: Inicialmente temos que escolher os cinco elementos que vão ocupar o seu lugar primitivo. Como existem 8 elementos no total, existem $C_8^5 = 56$ possibilidades. Feito isso, temos que permutar caoticamente os demais 3 elementos, fato que só pode ser feito de $D_3 = 3!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) = 2$ possibilidades. Dessa forma, no total, temos $56 \cdot 2 = 112$ permutações.

Exemplo 1.2.3 *Em uma gincana do Ensino Médio apresentam-se a uma equipe seis fichas voltadas para baixo, estando representada em cada uma delas as letras E, S, C, O, L e A. As fichas encontram-se alinhadas em uma ordem qualquer. A equipe deve ordenar as fichas ao seu gosto, mantendo as letras voltadas para baixo, tentando obter a palavra ESCOLA. Ao desvirá-las, para cada letra que esteja na posição correta a equipe ganhará 10 pontos. Qual a probabilidade da equipe ganhar exatamente 20 pontos?*

Solução: Existem 6! maneiras da equipe ordenar as letras. Para a equipe ganhar exatamente 20 pontos, basta que 2 letras fiquem na posição correta, ou seja, no seu lugar de origem na palavra ESCOLA. Temos C_6^2 maneiras de escolher as letras que ficarão nas posições corretas e temos que permutar caoticamente as outras 4 letras, ou seja,

$$C_6^2 \cdot D_4 = 15 \cdot 9 = 135$$

Logo, a probabilidade pedida é dada por

$$P = \frac{135}{6!} = \frac{135}{720} = 18,75\%$$

Um outro problema muito interessante, que é proposto por [18] como exercício para ser resolvido com permutação caótica é:

Exemplo 1.2.4 *Cinco carros entram em uma rotatória ao mesmo tempo, vindos de direções diferentes, conforme mostrado na figura a seguir. Cada carro dá menos de uma volta inteira na rotatória; além disso, não há dois carros que saem da rotatória na mesma direção. De quantas maneiras diferentes os cinco carros podem sair da rotatória?*

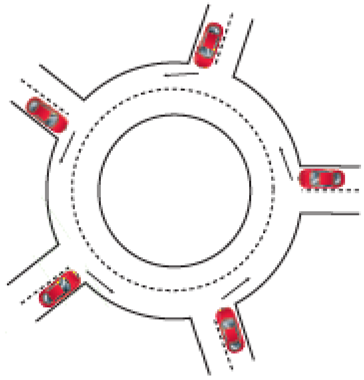

Figura 1.2: Rotatória de 5 carros

Solução: Como cada carro ao entrar na rotatória dá menos de uma volta inteira, ou seja, o carro não pode sair da rotatória pelo mesmo lugar que entrou, logo, trata-se de um problema de permutação caótica em que devemos permutar os 5 veículos. Dessa forma, temos

$$D_5 = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) = 44$$

Exemplo 1.2.5 *Quatro idosos aguardam atendimento em uma clínica médica.Todos deverão ser consultados por dois médicos diferentes, um psicólogo e um nutricionista. O atendimento de ambos os médicos está marcado para iniciar às 16:00 horas e terminar às 17:00 horas. Os médicos deverão gastar, em cada atendimento, exatos 15 minutos. De quantas formas poderiam ser organizadas os horários das duas consultas?*

Solução: Primeiramente, para organizar os 4 idosos para se consultar com o psicólogo (análogo se iniciar com o nutricionista) temos 4! maneiras. Depois disso, temos que pensar na organização dos idosos para se consultar com o nutricionista. Como cada idoso não pode estar nas duas consultas ao mesmo tempo, para o segundo médico o horário de cada idoso não pode ser o mesmo que no primeiro, ou seja a posição primitiva dos horários não pode ser mantida, isso nos leva a permutar caoticamente os 4 idosos nos horários. Portanto, temos $4! \cdot D_4 = 24 \cdot 9 = 216$ formas de organizar os horários das consultas.

1.2.2 O Problema do Amigo Oculto

Nesta seção será abordado um famoso problema da Análise Combinatória, que foi proposto inicialmente por Nicolaus Bernoulli e ficou conhecido como “O problema das cartas mal endereçadas", que consiste em descobrir de quantas formas distintas pode-se colocar n cartas em n envelopes, endereçados a n destinatários diferentes, de modo que nenhuma das cartas seja colocada no envelope correto.

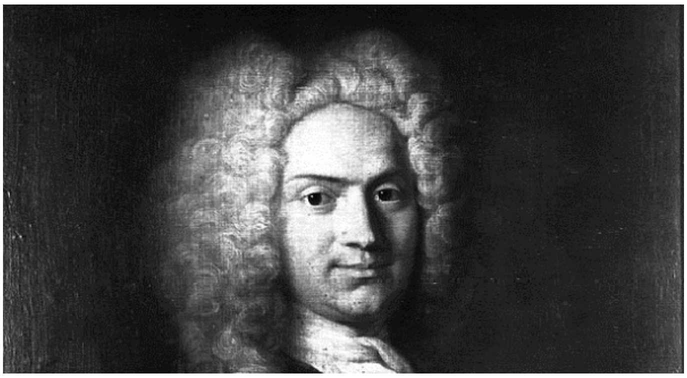

Figura 1.3: Nicolaus Bernoulli. Fonte: <http://www.famous-mathematicians.com/10-famous-swiss-mathematicians-and-their-contributions/>. Acesso em: 20 de março de 2017.

De acordo com [9], um pouco mais tarde, Leonhard Euler deu uma solução engenhosa e surpreendente para o problema de Bernoulli, que é conhecido como uma pequena pérola da Análise Combinatória.

Figura 1.4: Leonhard Euler. Fonte: <http://www.famous-mathematicians.com/10-famous-swiss-mathematicians-and-their-contributions/>. Acesso em: 20 de março de 2017.

Nos dias atuais o problema resolvido por Euler ganhou uma contextualização diferente, mas que não deixa de ter a mesma essência, além de ser algo muito familiar nas festas de final de ano, que é conhecido como "O Problema do amigo oculto" e pode ser enunciado de acordo com [15], da seguinte forma:

Seja uma brincadeira de "amigo oculto", na qual n pessoas escrevem seu nome num pedaço de papel e o depositam num recipiente, de onde cada um pega aleatoriamente um dos pedaços de papel. Qual a probabilidade de ninguém pegar seu próprio nome?

A solução será baseada na original do próprio Euler. Trata-se de um problema de permutação caótica em que podemos definir P_n como a probabilidade de nenhuma das n pessoas pegar o seu próprio nome. Além disso, o espaço amostral é dado por $n!$, pois os papéis serão retirados por cada uma das n pessoas, e portanto, podem ser retirados de $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ formas. Já o evento de ninguém pegar o seu próprio nome, ou seja, seu "nome de origem" é dado por uma permutação caótica de n elementos, ou seja, D_n. Portanto,

$$P_n = \frac{D_n}{n!}$$

Dado que D_n é definido por $D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$ para $n \geq 2$, temos que:

$P_n = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$ para $n \geq 2$. Assim,

n	P_n
2	$1/2 = 0,5000$
3	$1/3 \approx 0,3333$
4	$3/8 = 0,3750$
5	$11/30 \approx 0,3667$
6	$53/144 \approx 0,3681$
7	$103/280 \approx 0,3679$
8	$2119/5760 \approx 0,3679$
$\vdots$	$\vdots$
12	$\approx 0,3679$
$\vdots$	$\approx 0,367879441$

Tabela 1.2: Tabela de probabilidades.

Observamos que o valor para P_n começa a se estabilizar perto de $0,36787944$, ou seja, sugere-se que P_n tenda para um determinado valor e coincidentemente, $e^{-1} \approx$

$0,367879441$, assim, P_n tende a e^{-1} quando n cresce. Logo, podemos concluir que a probabilidade de um amigo oculto dar certo, isto é, que ninguém sorteie o seu próprio nome é de aproximadamente 37%, já começando a estar perto dessa porcentagem com 5 pessoas.

Capítulo 2

O Número de Catalan e o Princípio da Reflexão

Neste capítulo iremos abordar sobre um curioso e clássico problema, sugerido por [4], conhecido como "Problema da Fila do Cinema" que será resolvido com duas técnicas diferentes, muito pouco conhecidas, e que pode ser enunciado da seguinte forma:

> Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de $R\$5,00$ e n $(n < m)$ pessoas tem notas de $R\$10,00$. A entrada custa $R\$5,00$.
>
> a. Quantas são as filas possíveis?
>
> b. Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco
>
> c. Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com duas notas de $R\$5,00$?

Resolveremos problemas com malhas $n \times n$ que serão percorridas com o uso de um caminho monotônico, que é definido como aquele que começa na parte inferior esquerda do canto da malha, terminando no canto superior direito, e consiste inteiramente de setas apontando para a direita ou para cima, como pode ser visto na figura a seguir.

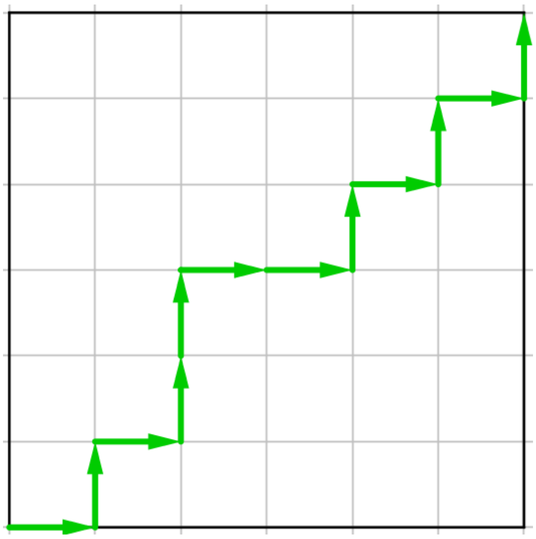

Figura 2.1: Caminho monotônicos na malha 6×6

Definiremos os números de Catalan e provaremos que eles podem ser utilizados para contar o número de caminhos monotônicos, no decorrer das bordas de uma malha $n \times n$, que não cruzam a diagonal. Para um caso particular do "Problema da Fila do Cinema" veremos que o Número de Catalan ajudará a interpretar e resolver o problema.

Finalmente, trabalharemos com problemas envolvendo o movimento de partículas no plano, em que o seu deslocamento, a cada unidade de tempo, será caracterizado por uma unidade para a direita e uma para cima ou para baixo. Enunciaremos o Princípio da Reflexão e explicaremos a sua associação com uma bijeção. Em seguida, resolveremos o "Problema da Fila do Cinema" com essa técnica e veremos o quanto ela é facilitadora.

2.1 Os Números de Catalan

De acordo com [14], os números de Catalan que geram uma sequência de números naturais, aparecem em vários problemas de Contagem. O $n-$ésimo Número de Catalan é definido por

$$K_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \quad \text{para} \quad n \geq 0,$$

ou ainda, de uma forma alternativa, K_n pode ser escrito como

$$K_n = C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 1.$$

Um dos problemas de Contagem que pode ser resolvido com K_n é o número de caminhos monotônicos ao longo das bordas de uma malha $n \times n$, que não podem passar acima da diagonal [11]. Veremos o caso em que $n = 3$, substituindo na expressão do $n-$ésimo Número de Catalan, temos

$$K_3 = \frac{6!}{4!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}3!} = 5,$$

ou seja, há 5 caminhos monotônicos que não passam acima da diagonal em uma malha 3×3, e que de fato, podem ser observados na figura a seguir:

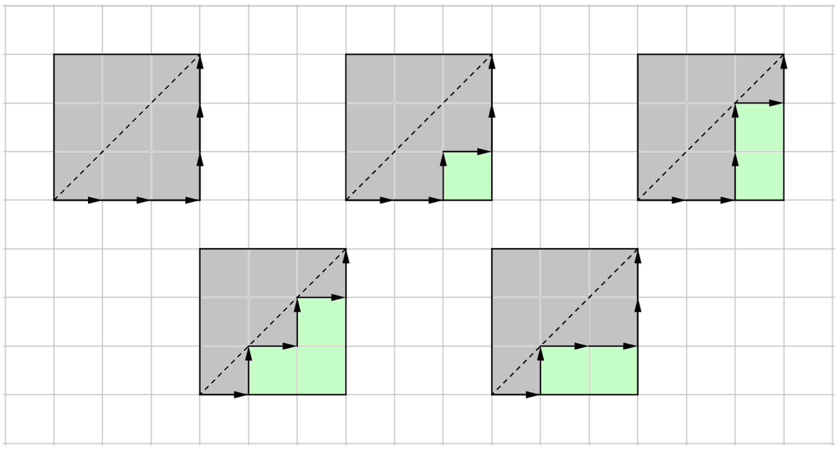

Figura 2.2: Caminhos monotônicos na malha 3×3

Existem diversas formas de provar porque a expressão

$$K_n = \frac{1}{n+1} \cdot C_{2n}^{n}$$

resolve problemas de Análise Combinatória, como o de encontrar caminhos monotônicos que não cruzam a diagonal. Mostraremos por uma prova bijetiva, que contará literalmente uma coleção de algum tipo de objeto para chegar a expressão correta, ou seja, obter uma fórmula explícita [8].

Vamos supor que tenhamos um caminho monotônico em uma malha $n \times n$ que cruze a diagonal, como podemos observar na figura a seguir:

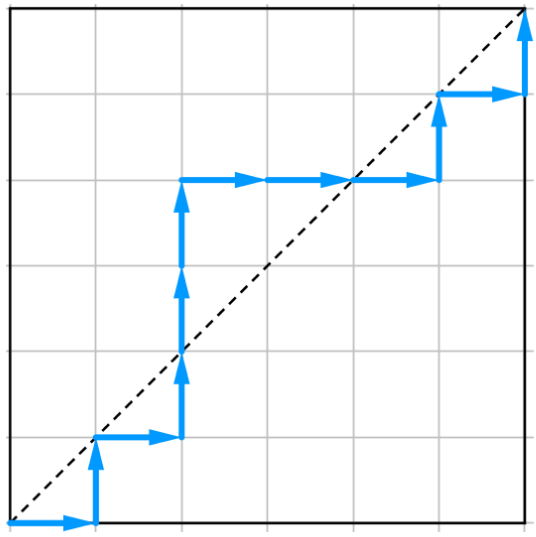

Figura 2.3: Caminho monotônico cruzando a diagonal

Observamos a primeira seta no caminho que se encontra acima da diagonal, a partir daí, todas as setas restantes no caminho devem ser trocadas de posição, ou seja, as que se encontram apontando para cima, passam apontar para a direita e as que se encontram apontando para a direita, passam a apontar para cima. A figura à seguir ilustra esse procedimento, em que as setas em vermelho mostram o trecho que está sendo invertido.

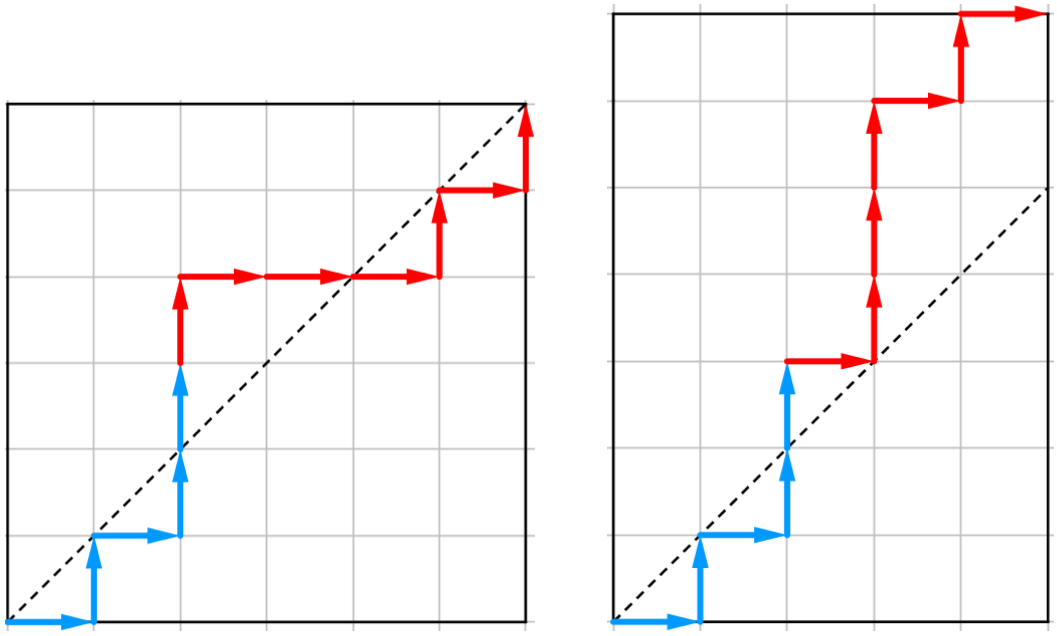

Figura 2.4: Caminho sendo invertido

O caminho resultante é monotônico em uma malha $(n-1) \times (n+1)$. Como cada caminho monotônico na malha $(n-1) \times (n+1)$ cruza a diagonal em pelo menos um ponto, o número total de caminhos cruzando a diagonal será dado por C_{2n}^{n-1}.

Já o total de caminhos monotônicos em uma malha $n \times n$ é dado por C_{2n}^{n}.

Logo, o número de caminhos monotônicos na malha $n \times n$ que não cruzam a diagonal será dado por $C_{2n}^{n} - C_{2n}^{n-1}$, que é o número de Catalan K_n.

Resolveremos agora o problema inicial do capítulo, de forma adaptada, e veremos como o Número de Catalan poderá ser utilizado.

Exemplo 2.1.1 ***(Problema da Fila do Cinema adaptado)*** *Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de $R\$5,00$ e m pessoas tem notas de $R\$10,00$. A entrada custa $R\$5,00$. Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?*

Solução: Vamos denotar pelo símbolo $(\rightarrow)$ a entrada de uma nota de $R\$5,00$ na bilheteria e pelo símbolo $(\uparrow)$ a entrada de uma nota de $R\$10,00$. Irão chegar a bilheteria $m+m = 2m$ notas e construiremos uma malha $m \times m$ para representar a entrada de notas. Veremos a seguir uma possibilidade de fila em que a bilheteria terá problemas de troco após a quinta pessoa pagar o ingresso.

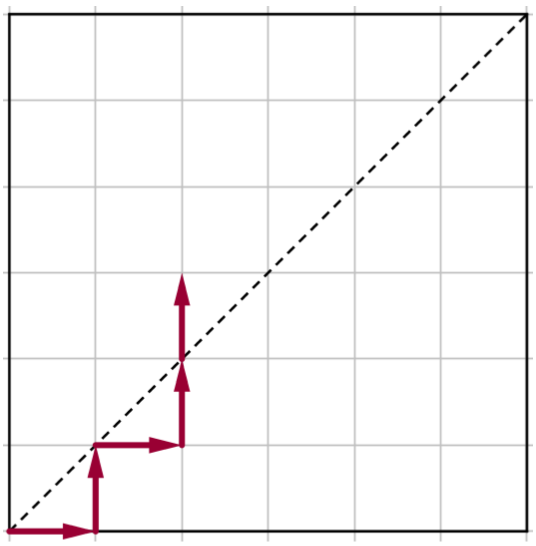

Figura 2.5: Fila com problema de troco

No caso da figura acima, entrou uma nota de $R\$5,00$, uma de $R\$10,00$, uma de $R\$5,00$, uma de $R\$10,00$ e uma de $R\$10,00$, e aí nesse momento, não há mais notas de $R\$5,00$ no poder da bilheteria. Vamos a seguir apresentar outros casos em que a bilheteria fica sem troco

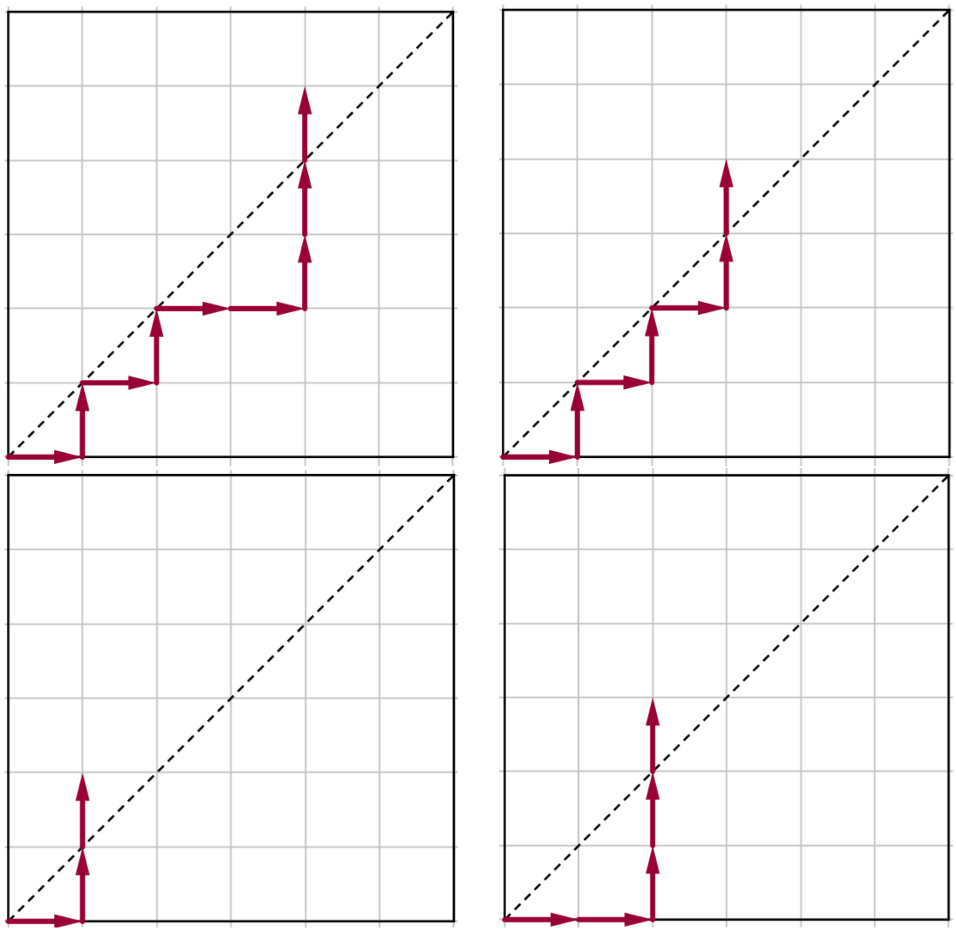

Figura 2.6: Outras Filas com problema de troco

Observamos que em todas as filas que há problema de troco, ocorre de uma seta cruzar a diagonal da malha, pois nesse momento a bilheteria recebe uma nota de $R\$10,00$ e não tem notas de $R\$5,00$ para o troco. Assim, o problema se resume a contar o número de caminhos possíveis em uma malha $m \times m$ que cruze a diagonal. Já sabemos que o número de Catalan fornece o número de caminhos monotônicos em uma malha $m \times m$ que não cruzam a diagonal. Como temos que o total de filas, que é o mesmo que o total de caminhos monotônicos da malha, é dado por C_{2m}^{m}, temos que o número de filas que terão problemas de troco será

$$C_{2m}^{m} - K_m,$$

ou seja,

$$C_{2m}^{m} - [C_{2m}^{m} - C_{2m}^{m-1}] = C_{2m}^{m-1}.$$

Porém, como há m pessoas com notas de $R\$5,00$ e m pessoas com notas de $R\$10,00$ e, considerando que as pessoas são distinguíveis temos que fazer a permutação das mesmas, ou seja, teremos

$$m!\, m!\, C_{2m}^{m-1} = m!\, m!\, \frac{(2m)!}{(m+1)!\,(m-1)!} = \frac{m\,(2m)!}{m+1}$$

2.2 O Princípio da Reflexão

Para retratarmos o Princípio da Reflexão vamos sempre imaginar uma partícula se movendo no plano. A cada unidade de tempo, o seu deslocamento é descrito por uma unidade para a direita e uma unidade para cima ou para baixo. Em outras palavras, a partícula estando no ponto (x, y), poderá se mover para o ponto $(x+1, y+1)$ ou para o ponto $(x+1, y-1)$. Vamos analisar um exemplo para averiguar os tipos de situações descritas.

Exemplo 2.2.1 *Quantas são as trajetórias distintas em que uma partícula com o movimento descrito anteriormente sai da origem e atinge o ponto* $(5, 3)$*?*

Solução: Vamos usar a notação $(0,0) \longrightarrow (5,3)$ para representar que a partícula sai do ponto $(0,0)$ e atinge o ponto $(5,3)$. Inicialmente, vamos interpretar o que significa sair de $(0,0)$ e chegar em $(5,3)$.

Observamos que um passo da partícula, ou seja, uma unidade para a direita e uma unidade para cima ou uma para baixo deixa a partícula num ponto em que a primeira coordenada caracteriza a quantidade de passos realizados e, em cada passo desses, a partícula se desloca para cima ou para baixo. Essa diferença entre subidas e descidas nos concede a segunda coordenada do ponto. Nomearemos por S um passo de subida e por D um passo de descida, temos então que o número de subidas mais o número de descidas da partícula é a coordenada x do ponto em que se encontra e que a diferença entre o número de subidas e o número de descidas é a coordenada y do ponto. Nesse exemplo, temos:

$$\begin{cases} S + D = 5 \\ S - D = 3 \end{cases}$$

Daí, $S = 4$ e $D = 1$.

Portanto, para a partícula sair de $(0,0)$ e chegar a $(5,3)$, ela precisará realizar 4 subidas e 1 descida. Veremos a seguir alguns possíveis trajetos.

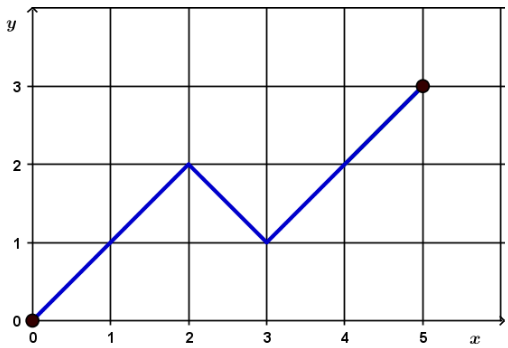

Figura 2.7: SSDSS

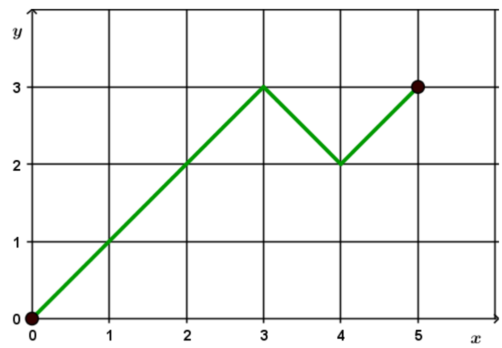

Figura 2.8: SSSDS

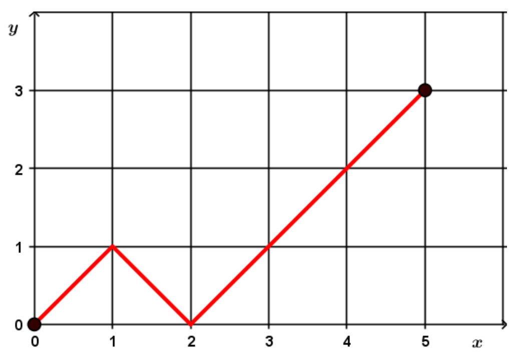

Figura 2.9: SDSSS

O valor de S e D que encontramos como solução do sistema, é exatamente a quantidade necessária de subidas e descidas que garantem começar da origem e chegar em $(5,3)$, como foi visto nas figuras. Assim, encontrar a quantidade de trajetos distintos é o mesmo que descobrir o número de anagramas diferentes que são formados com a quantidade de letras S e de letras D que aparecem, ou seja, basta fazermos uma permutação com repetição, que é dada por

$$P_5^{4,1} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

Podemos notar que após encontrar a quantidade de letras S e D obrigatórias para se sair de $(0,0)$ e chegar a $(5,3)$, seja qual for a sequência que montarmos com tais quantidades nos levará ao destino, ou seja, alterando a ordem das letras S e D teremos um caminho diferente, mas que chegará no mesmo ponto.

No exemplo visto anteriormente, que foi levado em consideração o ponto de saída $(0,0)$ e o ponto de chegada $(5,3)$, nos permitiu concluir que nas coordenadas do ponto $(5,3)$ ficasse implícito que:

- $5 = 5 - 0$ representa o número de passos dados , ou seja, $S + D$;
- $3 = 3 - 0$ representa a diferença entre as subidas e descidas, ou seja, $S - D$.

Podemos pensar também nos casos que o ponto inicial e o ponto final sejam pontos quaisquer, ou seja, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) e descobrir quantos trajetos distintos existem de $(x_0, y_0) \longrightarrow (x_1, y_1)$. Não é difícil perceber que a diferença das primeiras coordenadas continuará sendo o número de passos que foram dados para sair do ponto inicial e chegar no ponto final, isto é, $S + D = x_1 - x_0$. Da mesma forma que a diferença entre as segundas coordenadas será a diferença entre o número de subidas e descidas, ou seja, $S - D = y_1 - y_0$. O exemplo a seguir ilustra esse caso.

Exemplo 2.2.2 *Quantos trajetos distintos existem ligando* $(2,1) \longrightarrow (9,4)$*?*

Solução: Temos que encontrar quantos trajetos distintos ligam os pontos da figura a seguir.

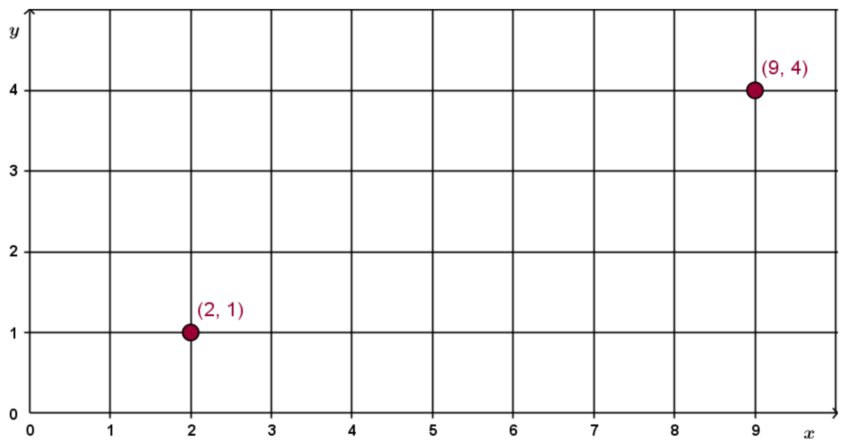

Figura 2.10: Pontos a serem ligados

Temos que $x_1 - x_0 = 9 - 2 = 7$ e $y_1 - y_0 = 4 - 1 = 3$. Assim, temos que resolver o seguinte sistema

$$\begin{cases} S + D = 7 \\ S - D = 3 \end{cases}$$

Daí, $S = 5$ e $D = 2$.

Portanto, para sair de $(2, 1)$ e chegar em $(9, 4)$ haverá no percurso 5 subidas e 2 descidas. Um exemplo de trajeto pode ser visto na figura a seguir

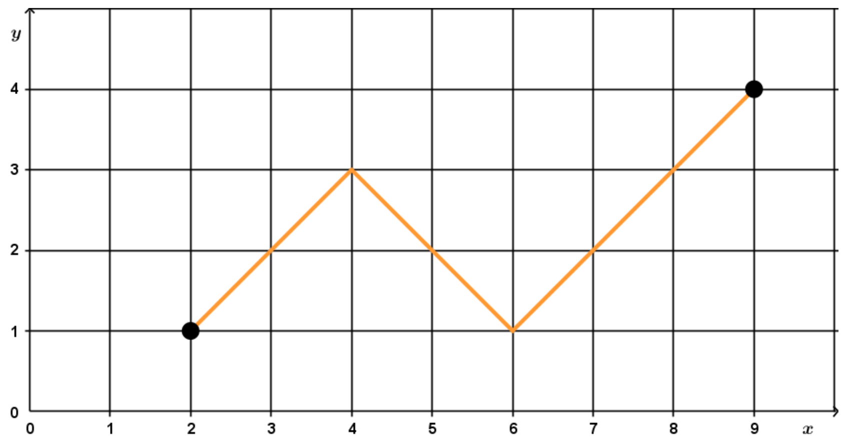

Figura 2.11: SSDDSSS

Temos que calcular o número de anagramas diferentes que são formados com 5 letras S e 2 letras D, ou seja, basta fazermos uma permutação com repetição, que é dada por

$$P_7^{5,2} = \frac{7!}{5!2!} = 21.$$

Logo, existem 21 trajetos ligando $(2, 1) \longrightarrow (9, 4)$.

Veremos agora um exemplo em que ao se fazer um percurso teremos que tocar obrigatoriamente numa determinada reta.

Exemplo 2.2.3 *Quantos são os trajetos que ligam* $(0, 0) \longrightarrow (8, 2)$*? E quantos desses trajetos tocam a reta* $y = -1$*?*

Solução: Inicialmente temos que $S + D = 8 - 0 = 0$ e $S - D = 2 - 0 = 2$.

$$\begin{cases} S + D = 8 \\ S - D = 2 \end{cases}$$

Daí, $S = 5$ e $D = 3$.

Portanto, temos que o número de anagramas distintos com 5 letras S e 3 letras D é dado por

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!3!} = 56.$$

Logo, existem 56 trajetos ligando $(0,0) \longrightarrow (8,2)$.

Agora iremos descobrir quantos dos 56 trajetos tocam a reta $y = -1$. O gráfico a seguir representa uma dessas situações.

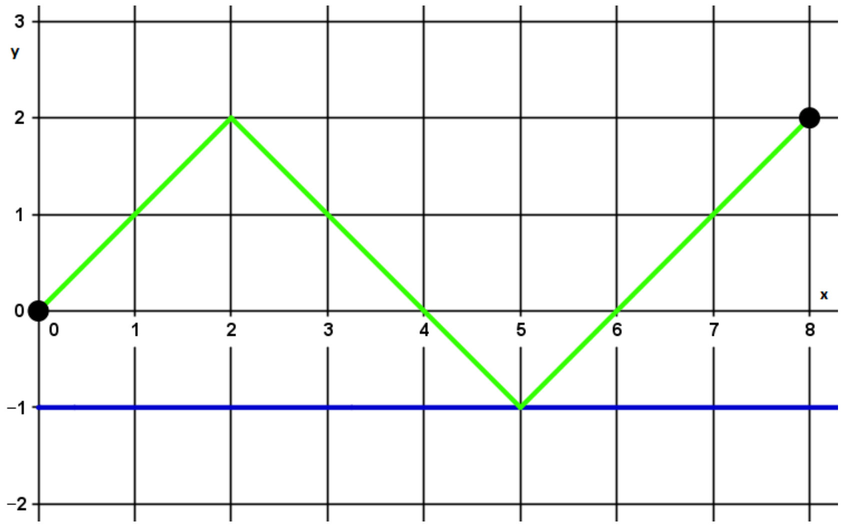

Figura 2.12: Caminho tocando a reta $y = -1$

Para encontrar todos os casos que essa situação acontece, teremos que transformar o problema em um outro, que conte os trajetos existentes, saindo de um dado ponto e chegando ao destino, nesse caso, $(8,2)$ e que possa garantir que a reta $y = -1$ seja tocada. Para isso, iremos fazer uma reflexão de parte do gráfico em torno da reta $y = -1$, isto é, de todos os pontos do gráfico que se encontram antes do primeiro ponto de interseção do gráfico com a reta $y = -1$. Isso significa trocar um ponto P de coordenadas (a,b) pelo ponto P' cujas coordenadas são:

$$P' = (a, -b-2)$$

Como pode ser visto na figura a seguir, a distância do ponto P e do ponto P' à reta $y = -1$ é $b+1$. Com isso, P' é o reflexo de P em relação á reta $y = -1$.

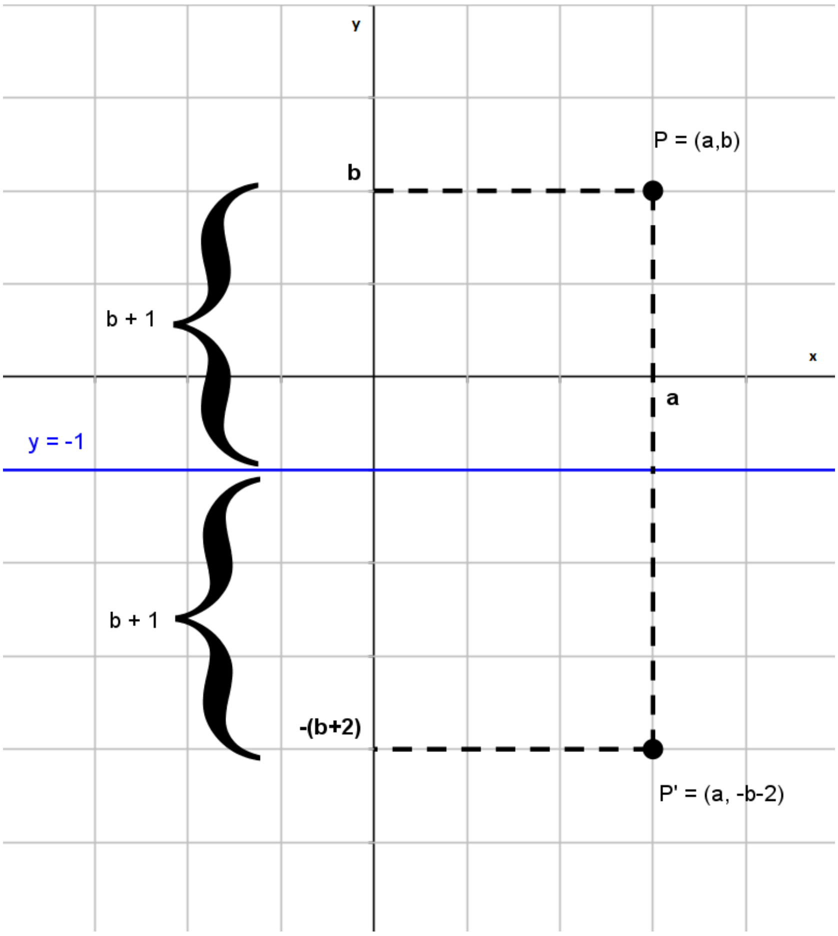

Figura 2.13: Ponto P e P'

Portanto, fazendo a reflexão de toda a parte do gráfico até que haja a primeira interseção com a reta $y = -1$, o gráfico da figura 2.12 se transformará no seguinte gráfico:

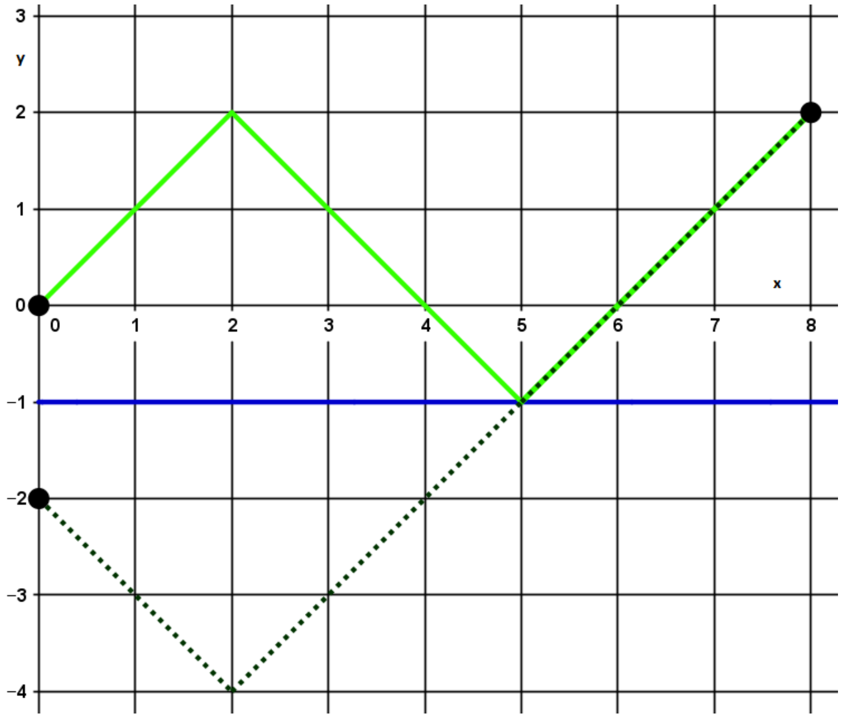

Figura 2.14: Caminho com reflexão

E a partir daí, o número de trajetos saindo de $(0,0)$ e chegando em $(8,2)$ e que toca a reta $y=-1$ é o mesmo dos que saem de $(0,-2)$ e chegam ao mesmo ponto $(8,2)$. Portanto, temos

$$\begin{cases} S+D=8-0=8 \\ S-D=2-(-2)=4 \end{cases}$$

Daí, $S=6$ e $D=2$.

Portanto, temos que o número de anagramas distintos com 6 letras S e 2 letras D é dado por

$$P_8^{6,2}=\frac{8!}{6!2!}=28.$$

Logo, existem 28 trajetos ligando $(0,-2)\longrightarrow(8,2)$, que é a mesma quantidade ligando $(0,0)\longrightarrow(8,2)$ e que tocam a reta $y=-1$. Isto é, dos 56 trajetos possíveis, 28 tocam a reta $y=-1$. De acordo com [10], o que garante isso é a explicação da associação feita como uma bijeção, que a partir daí define o **Princípio da Reflexão**, que pode ser ilustrado como:

O Princípio da Reflexão

Para sabermos o número de caminhos que tocam uma reta qualquer, basta sabermos o número de caminhos refletidos.

Temos que para cada caminho $(0,0) \longrightarrow (x,y)$ com $y \geq -1$ e que toca a reta $y = -1$, podemos relacionar um único caminho $(0,-2) \longrightarrow (x,y)$, através de uma reflexão, e a partir daí, construiremos uma função. Seja então

$$f : \{(0,0) \longrightarrow (x,y)\} \longrightarrow \{(0,-2) \longrightarrow (x,y)\}.$$

Para provarmos que essa função é bijetiva, temos que mostrar que ela é injetiva e também sobrejetiva.

Vamos inicialmente provar a injetividade, ou seja, temos que mostrar que pontos distintos do domínio são levados em pontos distintos da imagem, isto é,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Sejam c_1 e c_2 dois caminhos distintos que ligam $(0,0) \longrightarrow (x,y)$ e que tocam a reta $y = -1$. Temos que provar que quando fizermos a reflexão desses caminhos em torno da reta $y = -1$, obteremos caminhos também distintos. Por c_1 e c_2 serem distintos, temos três possibilidades para os caminhos:

- Eles tocam a reta $y = -1$ em passos diferentes;

  Vamos considerar que o encontro do caminho c_1 com a reta $y = -1$ aconteça primeiro do que com o caminho c_2 e seja $P_1 = (a,-1)$ tal ponto de encontro. Seja $P_2 = (a,b)$, com $b > -1$, o ponto pertencente ao caminho c_2 que tem a mesma abscissa de P_1. Quando fazemos a reflexão de parte do gráfico de c_1 anterior à interseção P_1 em torno da reta $y = -1$, obtemos que o ponto refletido de P_1 é o próprio P_1. Porém, quando fazemos a reflexão de parte do gráfico de c_2 anterior à interseção P_2 em torno da reta $y = -1$, teremos como ponto refletido de P_2 o ponto P_2' que terá como coordenadas $(a, -b-2)$. Assim, como $b > -1$ temos que $P_2' \neq P_1$ e portanto, os gráficos refletidos são distintos, como pode ser visto na figura a seguir:

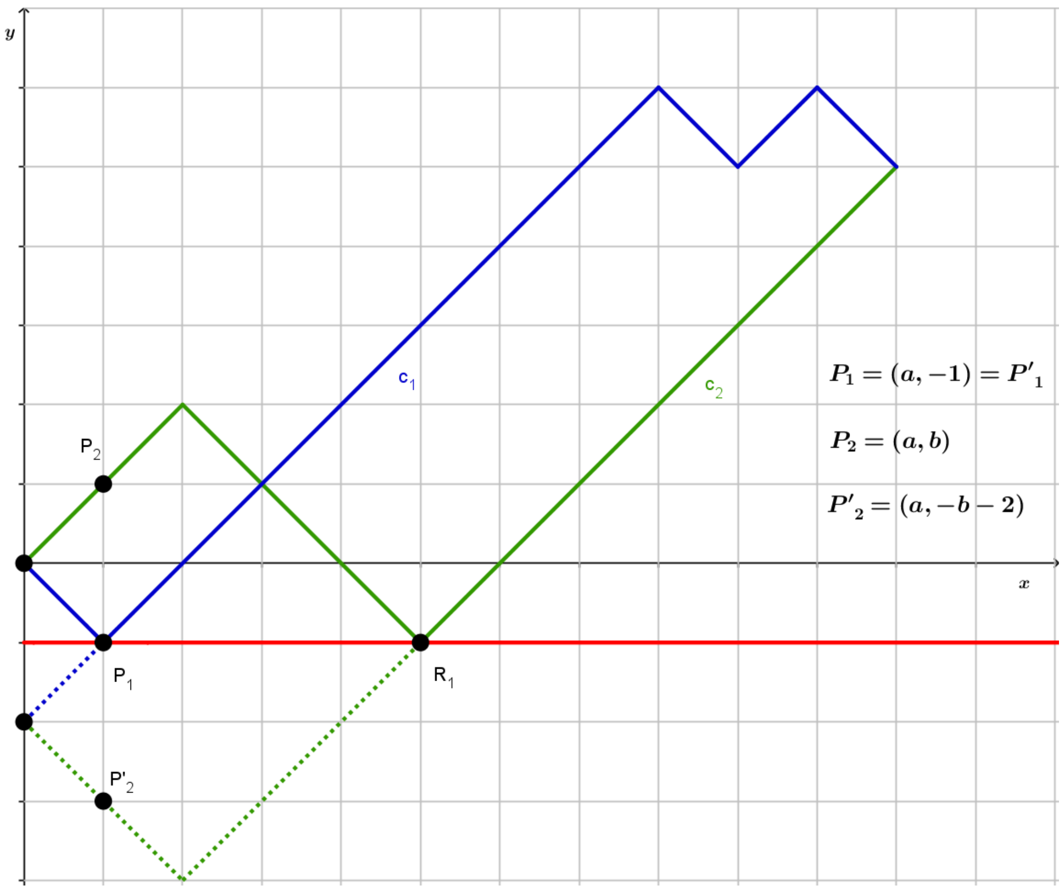

Figura 2.15: Caminho c_1 e c_2

- Eles tocam a reta $y = -1$ no mesmo passo e seus gráficos antes desse ponto de interseção são distintos;

  Nesse caso, existem $P_1 = (a, b_1) \in c_1$ e $P_2 = (a, b_2) \in c_2$ tais que

$$\begin{cases} 0 < a < \text{abscissa da interseção} \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$$

  Quando fazemos a reflexão de parte do gráfico de c_1 anterior à interseção R_1 em torno da reta $y = -1$, obtemos que o ponto refletido de P_1 é P_1' com abscissa a e ordenada $-b_1 - 2$, como pode ser visto na figura a seguir:

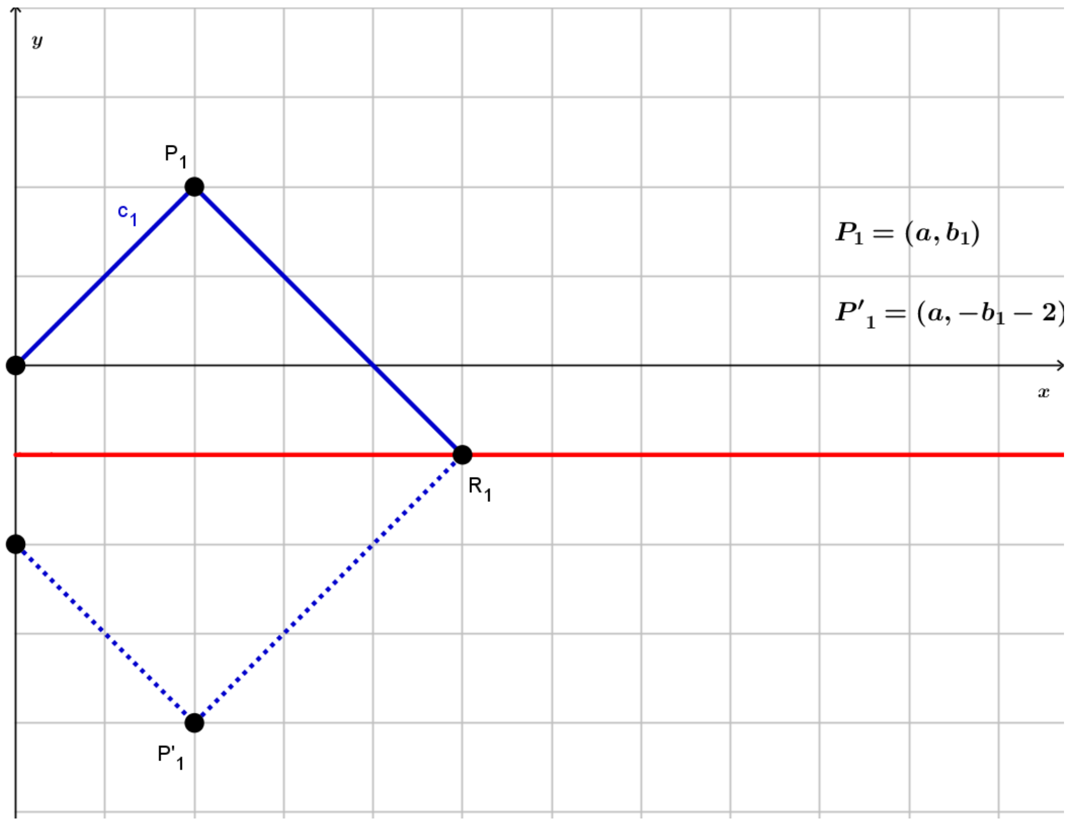

Figura 2.16: Caminho c_1

Por outro lado, o ponto refletido de P_2 é P_2' de abscissa a e ordenada $-b_2 - 2$, como pode ser visto na figura a seguir:

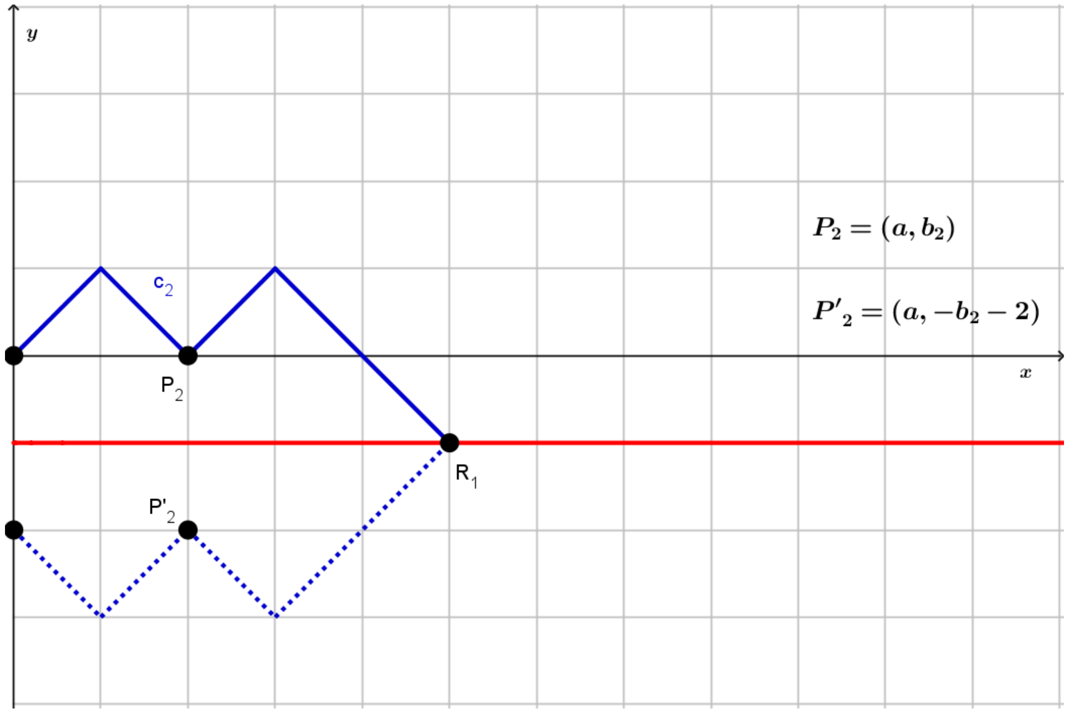

Figura 2.17: Caminho c_2

Como $b_1 \neq b_2$, temos que $P_1' \neq P_2'$ e portanto, os gráficos refletidos também são diferentes, como pode ser observado na figura a seguir, em que os caminhos c_1 e c_2 se encontram na mesma malha.

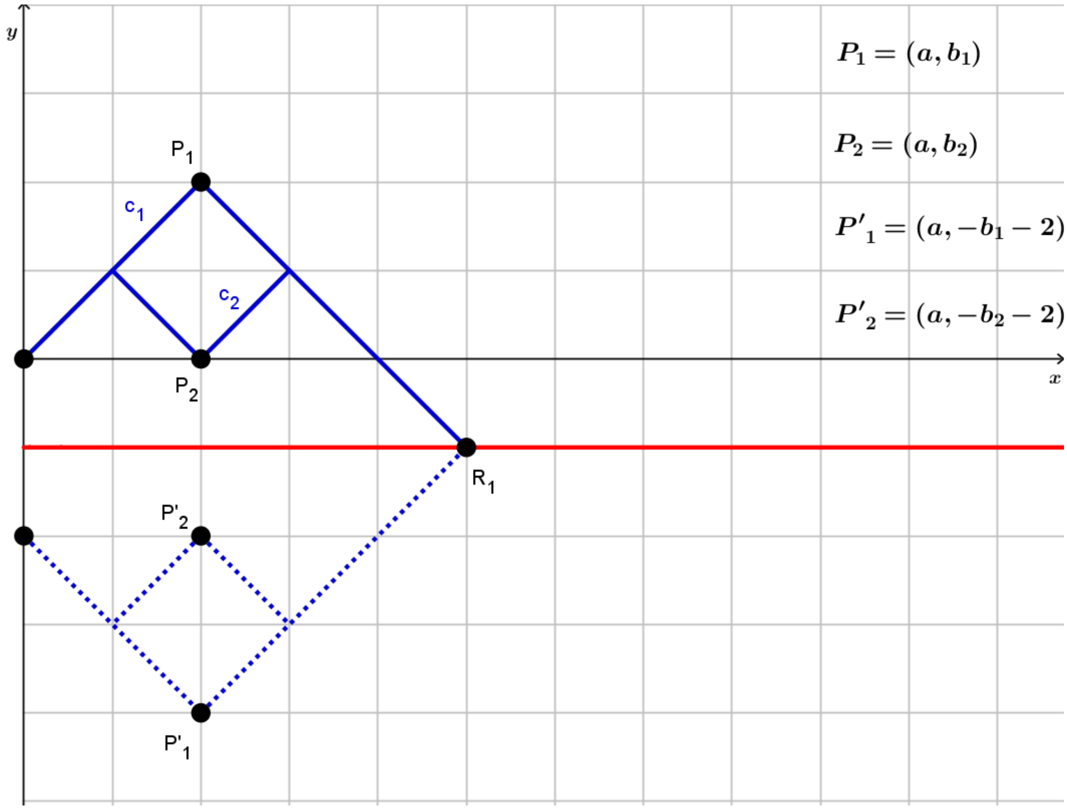

Figura 2.18: Caminho c_1 e c_2 na mesma malha

- Eles tocam a reta $y = -1$ no mesmo passo mas seus gráficos depois desse ponto de interseção são distintos.

  Nesse caso, há pelo menos um ponto depois da interseção com a reta $y = -1$ pertencentes a c_1 e c_2 distintos, vemos a seguir um possível caminho c_1:

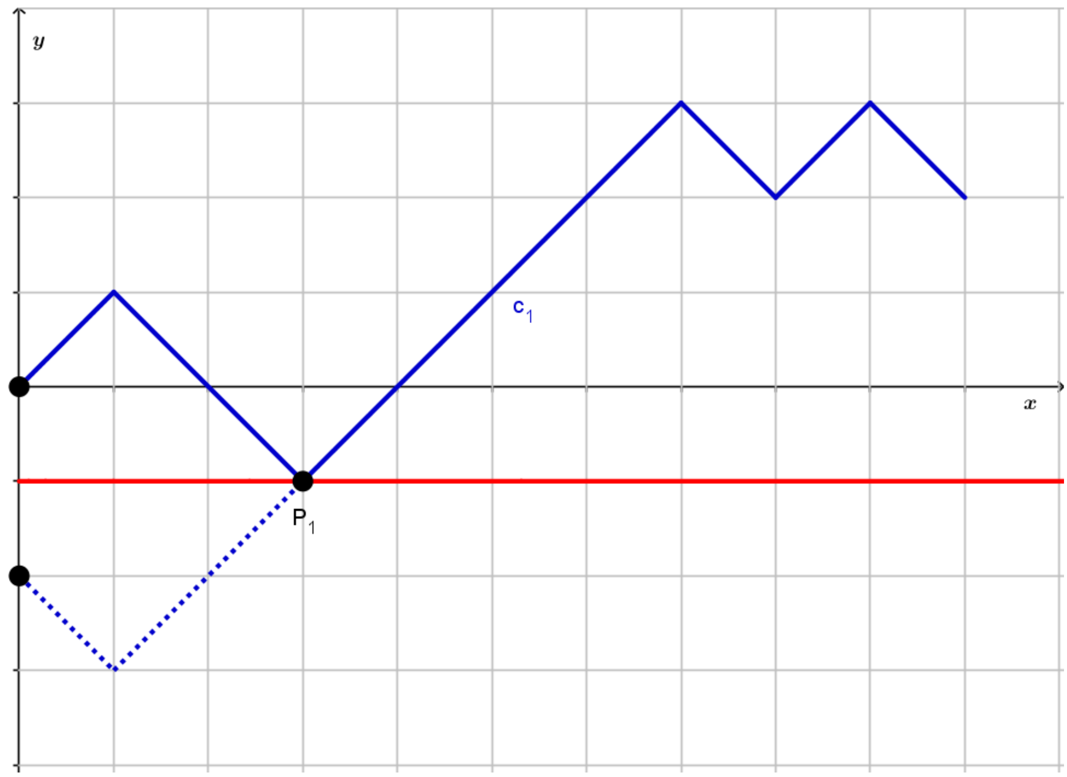

Figura 2.19: Caminho c_1

De forma análoga, vemos um possível caminho c_2 na figura a seguir, tocando a reta $y = -1$ no mesmo passo que c_1.

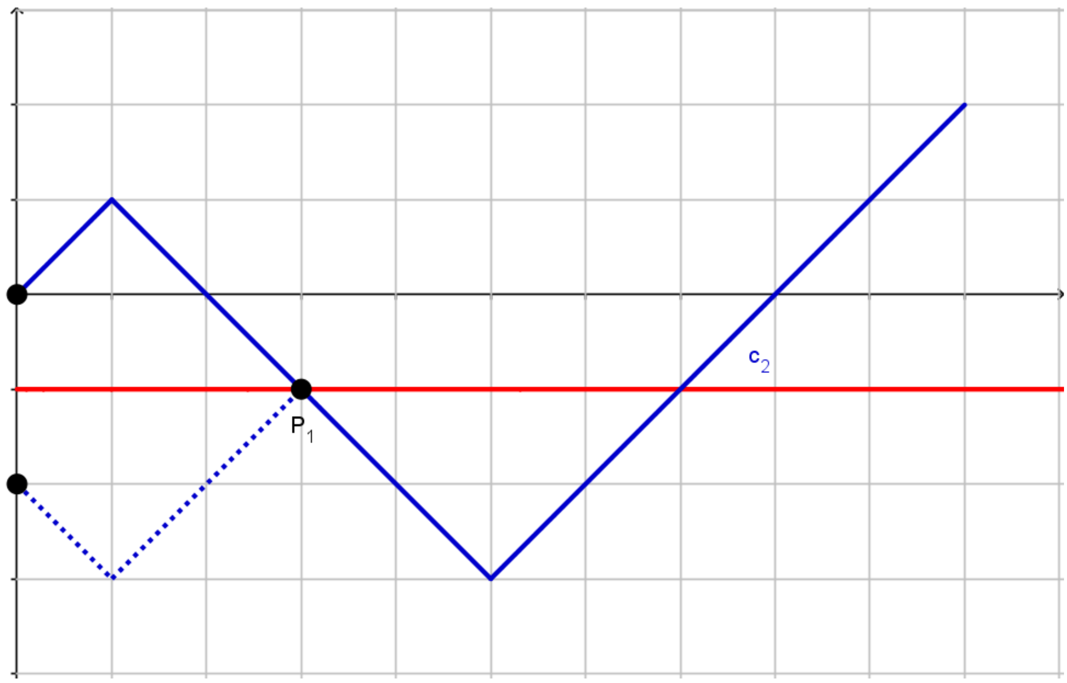

Figura 2.20: Caminho c_2

Como a reflexão sempre acontece só na parte do gráfico que antecede o ponto de interseção, não há reflexão dos pontos distintos de c_1 e c_2, que portanto continuam distintos e os gráficos são diferentes, como pode ser observado na figura a seguir:

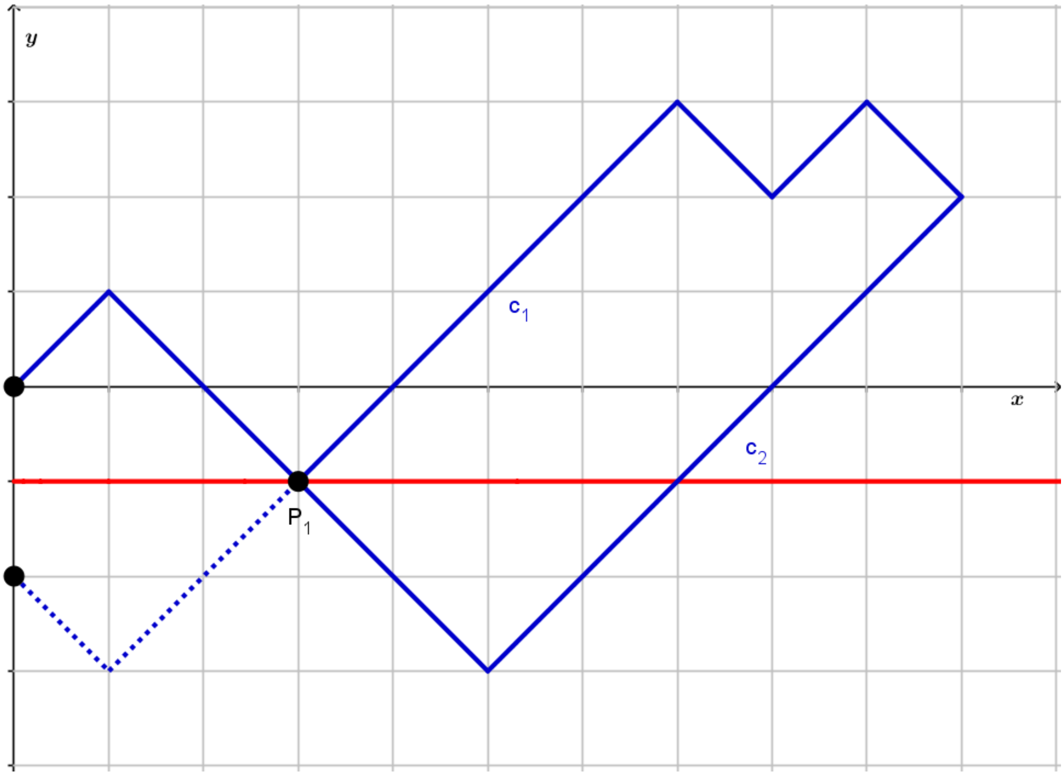

Figura 2.21: Caminho c_1 e c_2 na mesma malha

Logo, nos três casos mostramos a injetividade. Vamos provar agora a sobrejetividade, ou seja, temos que mostrar que para todo caminho C do contradomínio, existe um caminho C' pertencente ao domínio tal que $f(C') = C$.

Temos que mostrar então que para cada caminho do tipo $(0,-2) \longrightarrow (x,y)$, com $y \geq 1$, existe um caminho $(0,0) \longrightarrow (x,y)$ que toca a reta $y = -1$, cuja reflexão é o próprio $(0,-2) \longrightarrow (x,y)$. Basta pensarmos de forma inversa, ou seja, dado o gráfico $(0,-2) \longrightarrow (x,y)$, vamos refletir a parte do caminho anterior ao primeiro ponto de interseção com a reta $y = -1$ para cima, como pode ser visto na figura a seguir:

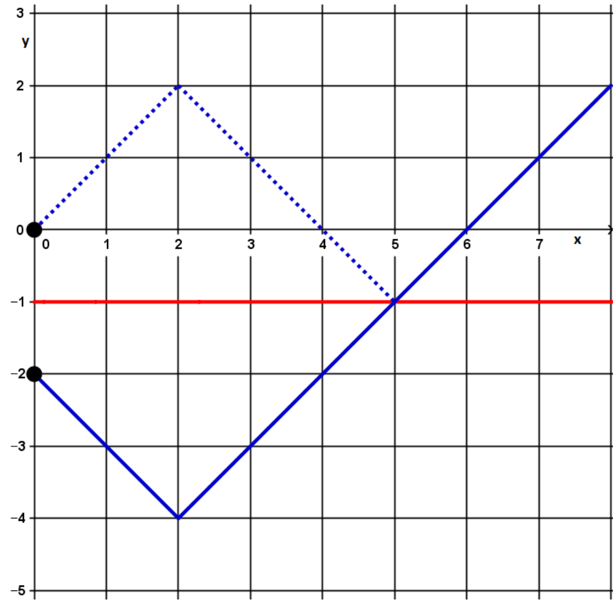

Figura 2.22: $(0, -2) \longrightarrow (x, y)$ e sua reflexão

Como definimos $y \geq 1$, isso assegura que cada caminho $(0, -2) \longrightarrow (x, y)$ tocará a reta $y = -1$, garantindo que teremos a reflexão. Dessa forma, teremos o gráfico e sua reflexão, como pode ser visto na figura a seguir:

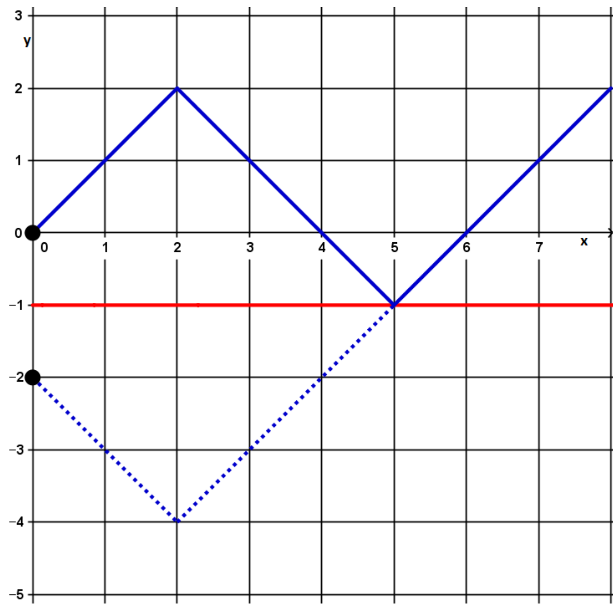

Figura 2.23: $(0, 0) \longrightarrow (x, y)$ e sua reflexão

Logo, mostramos a sobrejetividade. Assim, como provamos a injetividade e a sobrejetividade, fica provada a bijetividade.

A partir daí, temos condições de resolver o problema inicial do capítulo com o Princípio da Reflexão.

Exemplo 2.2.4 ***(O Problema da Fila do Cinema)*** *Numa fila de cinema, m pessoas tem notas de R\$5,00 e n $(n < m)$ pessoas tem notas de R\$10,00. A entrada custa R\$5,00.*

a. Quantas são as filas possíveis?

b. Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar sem troco?

c. Quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começa a trabalhar com duas notas de R\$5,00?

Solução:

a. Como são m pessoas com notas de $R\$5,00$ e n pessoas com notas de $R\$10,00$, temos um total de $(m+n)$ pessoas. Para obtermos as filas possíveis basta permutarmos as pessoas, logo

$$P_{m+n} = (m+n)!$$

b. Façamos um gráfico, pondo, no eixo y, a quantidade de notas de $R\$5,00$ em poder da bilheteria e, no eixo x, a quantidade de pessoas atendidas. Os gráficos dos caminhos ligarão os pontos $(0,0)$ e $(m+n, m-n)$. Os caminhos que representam filas com problemas de troco são as que tocam a reta $y = -1$, ou seja, a bilheteria deixa de ter notas de $R\$5,00$ para dar troco aos clientes. Um exemplo desses caminhos pode ser visto na figura a seguir:

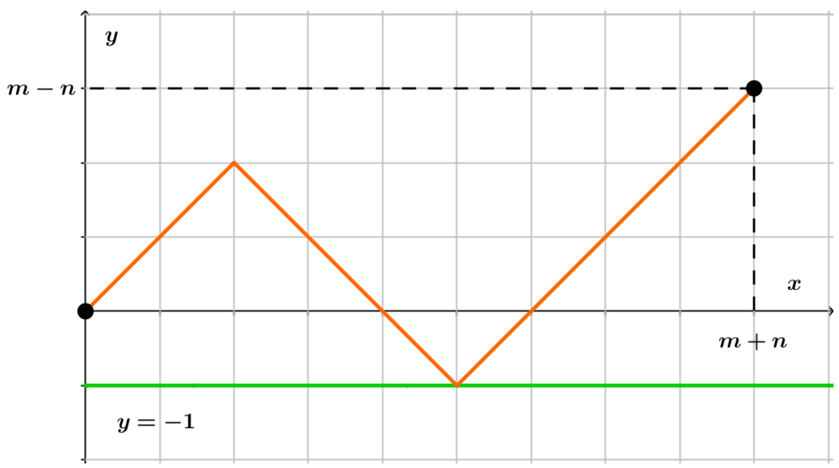

Figura 2.24: Caminho $(0,0) \longrightarrow (m+n, m-n)$

Pelo Princípio da Reflexão, o trecho de $(0,0)$ até tocar a primeira vez na reta, pode ser refletido em torno da reta $y = -1$ e então o caminho $(0,0) \longrightarrow (m+n, m-n)$ passará a ser correspondente biunivocamente aos caminhos de $(0,-2) \longrightarrow (m+n, m-n)$. A reflexão pode ser vista na figura abaixo.

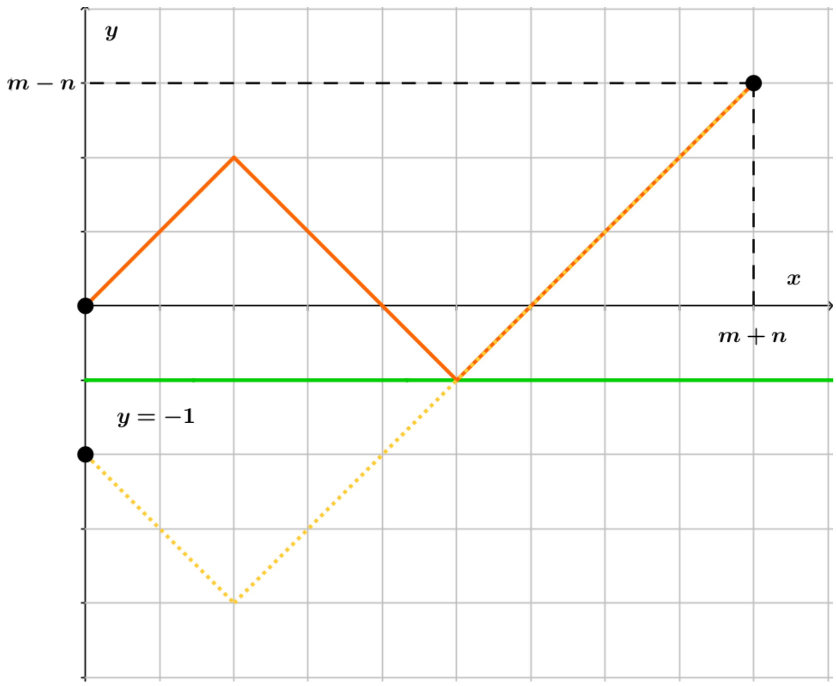

Figura 2.25: Caminho $(0,-2) \longrightarrow (m+n, m-n)$

Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que:

$S+D=m+n-0=m+n$

$S-D=m-n+2$

Portanto, resolvendo o sistema, temos

$$\begin{cases} S+D=m+n \\ S-D=m-n+2 \end{cases}$$

Daí, $S=m+1$ e $D=n-1$.

Calculando o número de anagramas distintos formados por $(m+n)$ letras, sendo $(m+1)$ letras S e $(n-1)$ letras D, temos

$$P_{m+n}^{m+1,n-1}=\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}.$$

Mas, além disso, as pessoas podem trocar de lugar entre si na fila, ou seja, temos $m!n!$ maneiras de arrumá-las. Logo, há $(m!n! \cdot P_{m+n}^{m+1,n-1})$ filas possíveis, ou seja,

$$m!n! \cdot \frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!},$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{(m+n)! \cdot \cancel{m!} \cdot n\cancel{(n-1)!}}{(m+1) \cdot \cancel{m!} \cdot \cancel{(n-1)!}} = \frac{n(m+n)!}{m+1}.$$

c. Agora, iniciaremos os caminhos no ponto $(0, 2)$ e o ponto final será dado por $(m + n, m - n + 2)$. Novamente, refletindo o primeiro trecho em torno da reta $y = -1$, teremos os caminhos de $(0, -4)$ a $(m + n, m - n + 2)$ como caminhos equivalentes. Assim,

$$\begin{cases} S + D = m + n - 0 = m + n \\ S - D = m - n + 2 + 4 = m - n + 6 \end{cases}$$

Daí, $S = m + 3$ e $D = n - 3$.

Logo, $P_{m+n}^{m+3,n-3} \cdot n!m!$ dará o número de filas possíveis. Resolvendo, temos

$$\frac{(m+n)!}{(m+3)!(n-3)!} \cdot n!m!,$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{(m+n)!}{(m+3)(m+2)(m+1)\cancel{m!}\cancel{(n-3)!}} \cdot n(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}\cancel{m!},$$

resultando em

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+3)(m+2)(m+1)} \cdot (m+n)!$$

Observação: No item b, quando $m = n$ a solução do problema é exatamente a mesma encontrada na seção anterior, pelo Número de Catalan, para uma malha $m \times m$. De fato, Os caminhos ligarão os pontos $(0, 0)$ e $(2m, 0)$. Os caminhos que representam filas com problemas de troco são os que tocam a reta $y = -1$.

Pelo Princípio da Reflexão, o trecho de $(0, 0)$ até tocar a primeira vez na reta, pode ser refletido em torno da reta $y = -1$ e então o caminho $(0, 0) \longrightarrow (2m, 0)$ passará a ser correspondente biunivocamente aos caminhos de $(0, -2) \longrightarrow (2m, 0)$.

Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que:

$S + D = 2m - 0 = 2m$

$S - D = 0 + 2 = 2$

Portanto, resolvendo o sistema, temos

$$\begin{cases} S + D = 2m \\ S - D = 2 \end{cases}$$

Daí, $S = m + 1$ e $D = m - 1$.

Calculando o número de anagramas distintos formados por $2m$ letras, sendo $(m+1)$ letras S e $(m-1)$ letras D, temos

$$P_{2m}^{m+1,m-1} = \frac{(2m)!}{(m+1)!(m-1)!}.$$

Mas, além disso, as pessoas podem trocar de lugar entre si na fila, ou seja, temos $m!\, m!$ maneiras de arrumá-las. Logo, há $(m!\, m! \cdot P_{2m}^{m+1,m-1})$ filas possíveis, ou seja,

$$m!\, m! \cdot \frac{(2m)!}{(m+1)!(m-1)!},$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{(2m)! \cdot \cancel{m!} \cdot m\cancel{(m-1)!}}{(m+1) \cdot \cancel{m!} \cdot \cancel{(m-1)!}} = \frac{m\,(2m)!}{m+1}.$$

Capítulo 3

O Princípio das Gavetas de Dirichlet

Nos capítulos anteriores foram retratados problemas e ferramentas de Análise Combinatória que se preocupavam com a contagem. No entanto, ainda existem os problemas que verificam a existência de conjuntos que satisfazem determinadas propriedades, que são denominados como Problemas de Existência. Para resolver tais problemas, há uma ferramenta conhecida como o Princípio da Gavetas de Dirichlet, que será enunciada, provada e utilizada neste capítulo.

Teorema 3.0.1 ***(O Princípio das Gavetas de Dirichlet)*** *Se $n + 1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá ter 2 ou mais objetos.*

Demonstração: Vamos supor, por absurdo, que cada gaveta contenha, no máximo, 1 objeto. Ora, como existem n gavetas segue que o número máximo de objetos seria n, mas isso contradiz o fato inicial de termos $n + 1$ objetos. Logo, a suposição que cada gaveta contenha no máximo 1 objeto não pode ser verdadeira. Assim, há pelo menos uma gaveta com 2 ou mais objetos.

A seguir, veremos uma versão mais geral do Princípio das Gavetas de Dirichlet, que também é utilizada na resolução de problemas.

Teorema 3.0.2 ***(Versão Geral)*** *Se $nk + 1$ objetos são colocados em n gavetas, então pelo menos uma gaveta deverá conter pelo menos $k + 1$ objetos.*

Demonstração: A prova da versão geral será similar à anterior. Vamos supor, por absurdo, que em cada gaveta contenha, no máximo, k objetos. Ora, como existem n gavetas segue que o número máximo de objetos seria nk, mas isso contradiz o fato inicial de termos $nk + 1$ objetos. Logo, a suposição que cada gaveta contenha no máximo k objetos não pode ser verdadeira. Assim, há pelo menos uma gaveta com pelo menos k+1 objetos.

Notemos que se $k = 1$ a versão geral coincide com a versão mais simples.

3.1 Exemplos de Aplicação

Dentro de um problema, o objetivo principal é identificar qual item fará o papel de gaveta e qual fará o de objeto a ser colocado na gaveta. Em [10] e [13] podemos encontrar alguns exemplos em que é possível aplicar o Princípio das Gavetas de Dirichlet, como segue abaixo.

Exemplo 3.1.1 *Uma roleta de cassino possui 50 casas numeradas. A brincadeira é: rodar a roleta e soltar uma bolinha que irá parar em uma das casas. Quantas jogadas são necessárias a fim, de garantir que a bolinha cairá mais de uma vez em alguma das casas?*

Solução: Considerando as 50 casas numeradas como gavetas e as jogadas como objetos, queremos descobrir quantas jogadas serão necessárias para que a bolinha caia mais de uma vez em alguma das casas. Pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, tendo n gavetas e $n+1$ objetos então pelo menos uma gaveta conterá 2 ou mais objetos. Logo, para garantirmos que a bolinha caía mais de uma vez em alguma casa, serão necessárias $(50 + 1) = 51$ jogadas.

Exemplo 3.1.2 *Mostrar que todo subconjunto de* $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$*, contendo n+1 elementos, possui um par de elementos primos entre si.*

Solução: Vamos considerar os n pares de números: 1 e 2, 3 e 4, ..., $2n - 1$ e $2n$. Os pares de números serão as gavetas. Como serão escolhidos mais do que n números, ou seja, mais do que n objetos, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, há pelo menos dois objetos pertencentes a mesma gaveta, ou seja, dois números vindos do mesmo par. Como dois números do mesmo par são consecutivos, eles são primos entre si.

Exemplo 3.1.3 *Um restaurante possui 62 mesas com um total de 314 cadeiras. É possível garantir a existência de pelo menos uma mesa com pelo menos 6 cadeiras?*

Solução: Consideremos as mesas como gavetas e as cadeiras como objetos. Distribuindo as cadeiras igualmente entre as mesas, temos que cada mesa ficará com 5 cadeiras, pois $314 = 5 \cdot 62 + 4$. Pela versão geral do Princípio das Gavetas, temos $k = 5$, $n = 62$ e uma sobra de 4 cadeiras que serão distribuídas a alguma mesa e que portanto, ficará com pelo menos 6 cadeiras.

Exemplo 3.1.4 *Existem 83 casas em uma rua. As casas são numeradas com números entre 100 e 262 inclusive. Mostre que pelo menos 2 casas têm números consecutivos.*

Solução: Como as casas podem ser numeradas de 100 a 262 temos 163 números possíveis para a numeração das casas. Vamos considerar as casas como gavetas e os números como objetos. Um das numerações possíveis para que não tenhamos casas com números consecutivos seria $\{100, 102, 104, \cdots, 262\}$. Mas essa numeração seria suficiente para apenas 81 casas, pois $163 = 81 \cdot 2 + 1$ e só usamos números pares. Assim, como há 83 casas na rua, há mais duas casas que terão que ser numeradas e, consequentemente, serão consecutivas a numeração das outras casas e daí, haverá pelo menos 2 casas com números consecutivos.

Exemplo 3.1.5 *Em cada casa de um tabuleiro* 3×3*, um dos números 1, -1 ou 0 foi escrito. Prove que, após calcularmos as somas dos números de cada linha, coluna e diagonal do tabuleiro, encontraremos pelo menos duas somas iguais.*

Solução: Em cada linha, coluna ou diagonal há exatamente três casas, então as somas possíveis ao introduzir o -1, 1 ou 0 serão sete: -3, -2, -1, 0, 1, 2 ou 3. Também temos que no tabuleiro há 3 linhas, 3 colunas e 2 diagonais, assim considerando as possíveis somas como gavetas e o número de linhas, colunas e diagonais como objetos, temos que há 8 objetos para 7 gavetas. Portanto, pelo Princípio das Gavetas de Dirichlet, existirão pelo menos 2 linhas, colunas ou diagonais de modo que a soma dos números de suas casas serão iguais.

Exemplo 3.1.6 *Mostrar que 11 divide infinitos números da forma 363636...36.*

Solução: Vamos considerar inicialmente os 12 números a seguir:

$$36$$
$$3636$$
$$363636$$
$$36363636$$
$$3636363636$$
$$363636363636$$
$$36363636363636$$
$$3636363636363636$$
$$363636363636363636$$
$$36363636363636363636$$
$$3636363636363636363636$$
$$363636363636363636363636$$

Consideremos os números como objetos e as classes de congruência módulo 11 como gavetas. Como temos mais do que 11 números, pelo Princípio das Gavetas, pelo menos dois deles estão na mesma classe de congruência módulo 11. Assim, a diferença entre eles é divisível por 11. Mas esta diferença é da forma

$$3636\ldots36\ldots0000 = 3636\ldots36 \cdot 10^{2k}$$

Como 11 não divide 10^{2k}, então 11 divide $3636\ldots36$. Para se obter um conjunto infinito, podemos repetir o processo que foi feito acima, utilizando sequências $\{s_1, s_2, s_3, ...\}$ de 12 números da forma $363636\ldots36$, com a quantidade de algarismos conforme abaixo:

$$s_1 \longrightarrow \{2, 4, ..., 24\}$$

$$s_2 \longrightarrow \{26, 28, ..., 48\}$$

$$s_3 \longrightarrow \{50, 52, ..., 72\}$$

$$\vdots$$

$$s_n \longrightarrow \{2 + 24(n-1), ..., 24n\}$$

Em [3], podemos encontrar o exercício abaixo que também podem ser resolvido pelo mesmo princípio.

Exemplo 3.1.7 *Em uma urna há 28 bolas azuis, 20 bolas verdes, 12 bolas amarelas, 10 bolas pretas e 8 bolas brancas. Qual é o números mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza que sacaremos pelo menos 15 bolas da mesma cor?*

Solução: Temos 78 bolas em 5 cores diferentes, consideremos as cores como gavetas e as bolas como objetos. Para termos certeza de que vamos tirar 15 bolas da mesma cor, temos que pensar na pior das hipóteses, que é tirarmos no máximo 14 bolas de cada cor até que chegará uma hora que a próxima bola completará as 15 bolas de mesma cor. Vamos supor que tenhamos pelo menos 14 bolas de cada cor, assim, de acordo com a versão geral do Princípio das Gavetas, teríamos que retirar $14 \cdot 5 + 1 = 71$ bolas de 5 cores para garantir que aparecerá $14 + 1 = 15$ bolas da mesma cor. Porém, há algumas cores que não temos 14 bolas, e portanto teremos que descontar do total. Faltam 2 bolas amarelas, 4 pretas e 6 brancas, resultando em 12 bolas que não temos. Logo, basta retirar 71 - 12 = 59 bolas.

Além dos problemas citados, há outros que podem ser criados e adaptados para o uso do Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Exemplo 3.1.8 *Bernardo irá fazer um trabalho para a escola em que deverá criar um alfabeto em braile para cegos. Para isso, ele constrói com uma caneta especial, 50 pontos em alto relevo, numa cartolina quadrada com lado igual a 70 cm. Mostre que existem dois pontos cuja distância é inferior a 15 cm.*

Solução: Para resolver esse problema devemos pensar numa divisão ideal do quadrado, como temos 50 pontos, podemos dividir o quadrado em 49 quadradinhos de 10 cm de lado cada. Como pode ser visto abaixo.

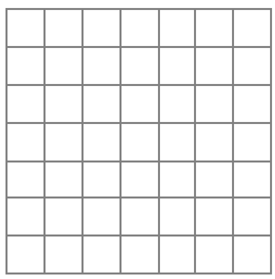

Figura 3.1: Cartolina dividida em 49 quadradinhos

Consideremos os pontos como objetos e os quadradinhos como gavetas. Assim, como há mais pontos do que quadradinhos, haverá pelo menos dois pontos em um quadradinho. A distância máxima entre dois pontos de um quadrado é dada pela diagonal, que nesse caso, mede $\sqrt{200} < \sqrt{225} = 15$ cm, e segue o resultado.

Capítulo 4

Problemas pensados para o Ensino Médio

Neste capítulo, resolveremos alguns problemas que foram escolhidos para serem levados para a sala de aula do Ensino Médio ou ainda para alunos que buscam conhecimento extra classe. Os exercícios selecionados retratam temas trabalhados nos capítulos anteriores e apresentam níveis de dificuldade diversos.

Acreditamos que é papel do professor instigar seus alunos para o pensamento combinatório que as vezes é tão pouco utilizado. De acordo com [5], o ensino da Matemática é fortemente baseado na aplicação de fórmulas e de problemas-modelo. Assim, esperamos que os problemas propostos neste capítulo possam desenvolver a criatividade e o raciocínio dos alunos, além de despertar a curiosidade em aprender Análise Combinatória e adquirir confiança para resolver problemas.

4.1 Problemas

O problema a seguir foi criado pensando na realidade dos alunos e poderá ser resolvido com o Princípio das Gavetas de Dirichlet, abordado no Capítulo 3.

4.1.1 Roupas repetidas

Maria possui 80 colegas em sua escola. Haverá uma festa e sabe-se que os alunos dessa escola poderão usar uma blusa entre 10 possíveis cores e uma bermuda entre 8 possíveis cores. Mostre que, sempre existirão pelo menos dois alunos que se vestirão *exatamente da mesma forma, ou seja, com blusas de mesma cor e bermudas de mesma cor.*

Solução: Como há 10 possibilidades de cores para blusas e 8 para bermudas, o princípio fundamental da contagem garante que há exatamente $10 \cdot 8 = 80$ combinações possíveis de cores para usar uma blusa e uma bermuda. Vamos considerar essas 80 combinações de cores como as gavetas, e os 81 alunos da escola (Maria e seus 80 colegas) como os objetos. Como existem mais alunos (objetos) do que combinações de cores (gavetas), o Princípio das Gavetas de Dirichlet garante que existem pelo menos dois alunos que se vestirão da mesma forma.

A questão abaixo é uma adaptação de um exercício sugerido em [2] e pode ser resolvida com o Número de Catalan, mencionado no Capítulo 2.

4.1.2 O problema do advogado

Para ir ao escritório que trabalha, um advogado precisa andar 5 quarteirões para norte e 5 para leste. Portanto, este advogado caminha todos os dias 10 quarteirões para ir trabalhar. Na figura a seguir temos um mapa demonstrando a localização da residência e do escritório do advogado, onde a linha tracejada representa um rio que atravessa alguns quarteirões.

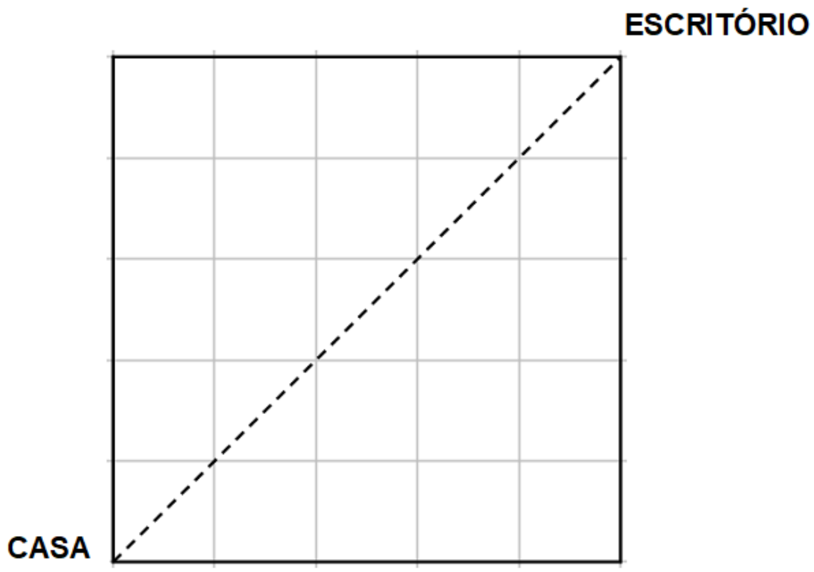

Figura 4.1: Mapa da casa e do escritório do advogado

Quantas rotas são possíveis para o advogado alcançar seu escritório sabendo que *neste trecho não existem pontes para atravessar o rio? Para isso, considere que começando a andar para o norte ele deve continuar na parte superior do rio. Caso comece a caminhada na direção leste, ele deve permanecer na parte inferior do rio.*

Solução: Cada rota aceitável permanece acima da diagonal ou fica abaixo da diagonal, ou seja, em nenhum momento a rota poderá cruzar a diagonal por conta do rio. Basta então encontrarmos o número de rotas aceitáveis abaixo da diagonal e multiplicarmos por 2. O advogado irá percorrer 5 quarteirões para cima e 5 para a direita. O número de rotas possíveis, abaixo da diagonal, será dado pelo número de Catalan para $n = 5$, ou seja K_5. O total de rotas será dado por $2 \cdot K_5$, calculando temos

$$2 \cdot K_5 = 2 \cdot \frac{10!}{6!5!} = \cancel{2} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 84$$

O problema a seguir envolve conceitos geométricos e pode ser resolvido com o Principio das Gavetas de Dirichlet, retratado no Capítulo 3.

4.1.3 51 pontos no quadrado

Cinquenta e um pontos são postos no interior de um quadrado de lado 1 metro. Prove que existe um conjunto de três desses pontos que podem ser cobertos por um quadrado de lado 20 centímetros.

Solução: Vamos dividir o quadrado em 25 quadradinhos, como na figura a seguir, pelo princípio da gavetas, haverá um quadradinho com pelo menos menos 3 pontos, pois há 51 pontos.

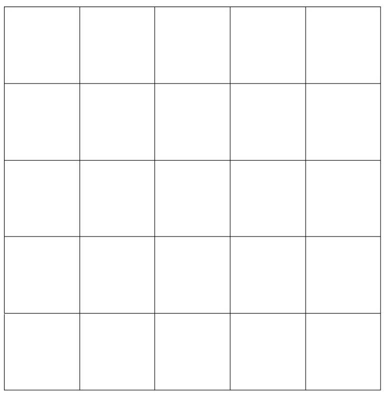

Figura 4.2: Quadrado de 1 metro dividido em 25 quadradinhos

Como o quadrado tem 1 metro e foi dividido em 25 quadradinhos, cada um terá lado de 20 centímetros e segue o resultado.

A seguir veremos uma questão retirada do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), do ano de 2009 [20], que poderá ser resolvida com Permutação Caótica, vista no Capítulo 1.

4.1.4 Concurso da Lanchonete

Em um concurso realizado em uma lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5. O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verificava-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50 que era o valor, em reais, do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se R$ 1,00 de desconto. Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira 5, ele ganharia R$ 2,00 de desconto. Qual é a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

Solução: O consumidor pode arrumar as cartas de 4! maneiras. Para que ele não ganhe qualquer desconto, nenhuma carta pode estar no local adequado, ou seja, na sua posição de origem do número 12,50. Assim, basta permutar caoticamente os 4 números, ou seja, D_4. Logo, a probabilidade pedida é dada por

$$P = \frac{D_4}{4!} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

O exemplo a seguir é um exercício proposto em [10] e poderá ser resolvido com o Princípio da Reflexão, visto no Capítulo 2.

4.1.5 O clássico FLA $\times$ FLU

No clássico carioca Flamengo $\times$ Fluminense, o resultado final foi:
Flamengo 5 $\times$ 3 Fluminense. Uma pessoa que não acompanhou o jogo ficou imaginando como poderia ter ocorrido a sequência de gols na partida.
a) De quantas maneiras ela pode imaginar que os gols aconteceram?
b) De quantas maneiras ela pode imaginar que em algum momento o Fluminense ganhava

por uma diferença de dois gols?

Solução:

a) No final da partida o Flamengo havia feito 5 gols e o Fluminense 3, ou seja, tivemos um total de 8 gols. Portanto, para saber de quantas maneiras esses gols podem ter acontecido basta permutamos os gols, lembrando que como temos mais de um gol do mesmo time temos que fazer uma permutação com repetição, como pode ser visto a seguir:

$$P_8^{5,3} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} = 56.$$

b) Vamos definir inicialmente os eixos e os pontos a serem ligados no gráfico. O eixo x representará o total de gols da partida e o eixo y a vantagem de gols do Flamengo sobre o Fluminense. Os possíveis caminhos ligarão os pontos $(0, 0)$ e $(8, 2)$. Os gráficos em que o Fluminense estava ganhando por uma diferença de dois gols tocam a reta $y = -2$, pois nesse momento a vantagem do Flamengo sobre o Fluminense é negativa. O gráfico a seguir representa um desses casos.

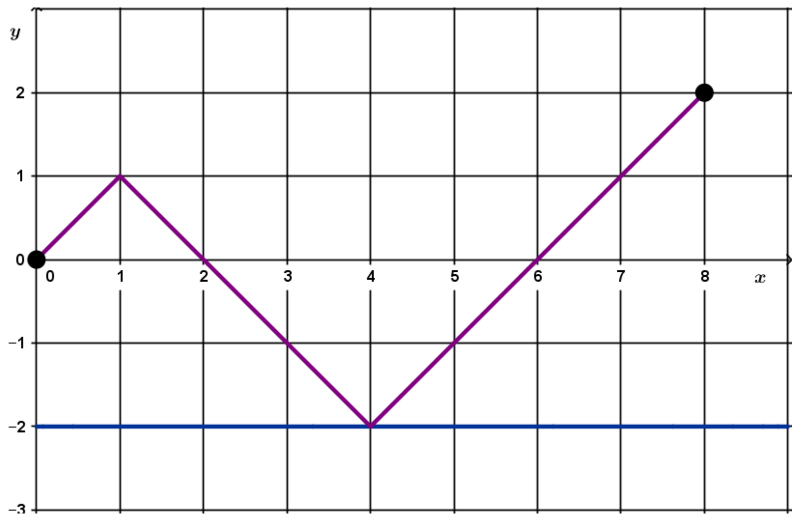

Figura 4.3: Caminho tocando a reta $y = -2$

Como visto anteriormente pelo Princípio da Reflexão, o trecho de $(0, 0)$ até tocar a primeira vez na reta, pode ser refletido em torno da reta $y = -2$ e então o caminho $(0, 0) \longrightarrow (8, 2)$ passará a ser correspondente biunivocamente aos caminhos de $(0, -4) \longrightarrow (8, 2)$. O novo caminho pode ser visto na figura a seguir.

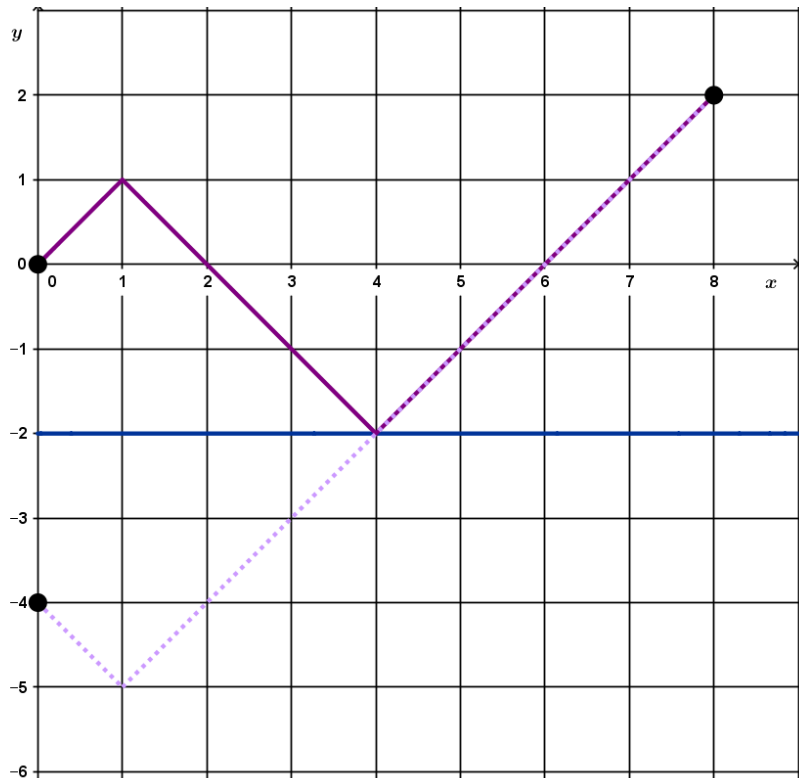

Figura 4.4: Caminho tocando a reta $y = -2$

Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que:

$S + D = 8 - 0 = 8$

$S - D = 2 + 4 = 6$

Portanto, resolvendo o sistema, temos

$$\begin{cases} S + D = 8 \\ S - D = 6 \end{cases}$$

Daí, $S = 7$ e $D = 1$.

Calculando o número de anagramas distintos formados por 8 letras, sendo 7 letras S e 1 letra D, temos

$$P_8^{7,1} = \frac{8!}{7!1!} = 8.$$

Concluímos, portanto, que das 56 sequências possíveis de acontecimento dos gols, em 8 delas o Fluminense ganhava em algum momento com uma diferença de 2 gols.

Nos dois próximos exemplos teremos dois problemas, um genérico e outro como a sua generalização, que podem ser modelados e resolvidos utilizando Recorrência, técnica essa vista no capítulo 1. Por se tratar de um problema bem elaborado, principalmente a generalização, sugerimos que possa ser trabalhado com estudantes de Ensino Médio que busque um pouco mais de conhecimento, como em casos de alunos de Iniciação Científica.

4.1.6 O problema de pintar as casas

Em uma praça circular, há n casas idênticas. Um pintor dispõe de 4 cores diferentes para pintar as casas. De quantos modos isso pode ser feito se casas adjacentes não podem ter a mesma cor?

Solução: Seja R_n o número de maneiras de pintar as n casas com 4 cores. Temos então a seguinte configuração:

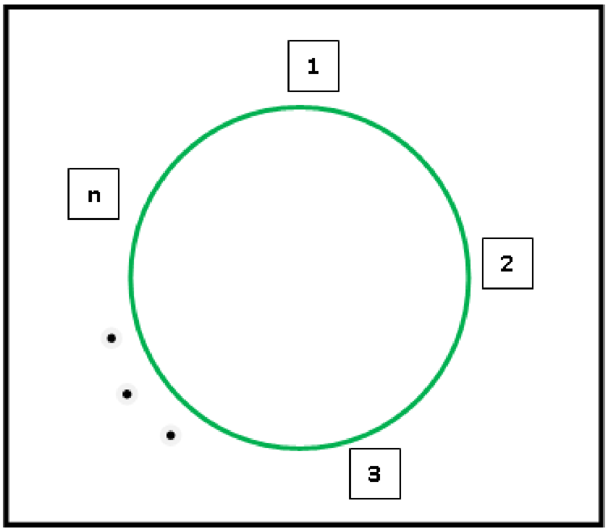

Figura 4.5: Praça circular com n casas

Ao acrescentar 1 casa entre a casa 1 e a $n-$ésima casa, temos uma nova configuração com duas situações possíveis:

- Situação 1: (A 1ª casa e a $n-$ésima casa tem cores diferentes)

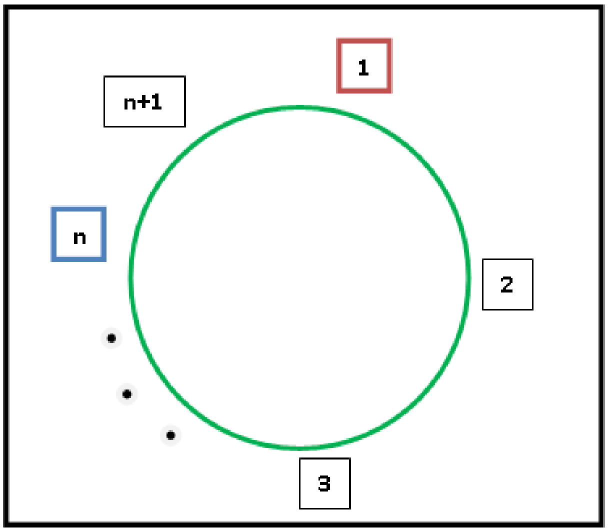

Figura 4.6: Praça circular com $n+1$ casas

Assim, como a 1ª casa e $n-$ésima casa tem cores diferentes, a $(n+1)-$ésima casa poderá ser pintada de 2 cores diferentes e, as casas de 1 até n poderão ser pintadas de R_n maneiras. Assim,

$$R_{n+1} = 2R_n.$$

- Situação 2: (A 1ª casa e $n-$ésima casa tem a mesma cor)

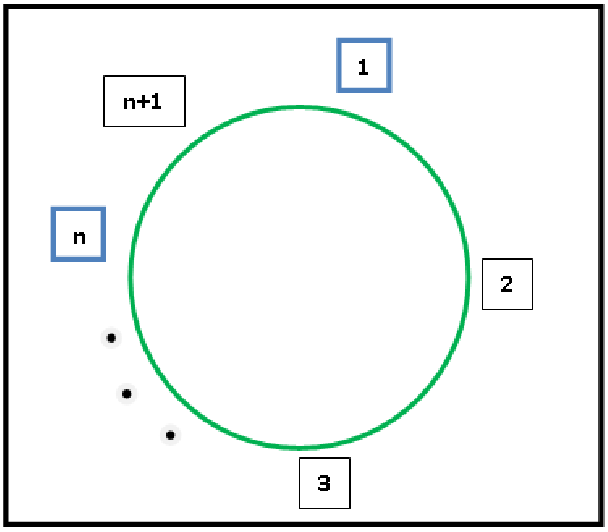

Figura 4.7: Praça circular com $n+1$ casas

Como a 1ª casa e a $n-$ésima casa tem a mesma cor, a $(n+1)-$ésima casa poderá ser pintada de 3 cores diferentes, e além disso, as casas de 1 até $n-1$ poderão ser pintadas de R_{n-1} maneiras, já que a $n-$ésima casa já esta com a mesma cor da $1^{\underline{a}}$ casa. Logo,

$$R_{n+1} = 3R_{n-1}.$$

Portanto, temos

$$R_{n+1} = 2R_n + 3R_{n-1},$$

que é uma recorrência de segunda ordem. Porém, temos que observar que a expressão acima será válida apenas para $n \geq 3$, pois quando $n = 1$ temos apenas uma casa e seguindo o raciocínio anterior, ao acrescentarmos mais uma casa na configuração já não conseguiremos ter a situação 2, pois, a $2^{\underline{a}}$ casa já será adjacente a $1^{\underline{a}}$ casa e portanto, não poderão ter a mesma cor. Analogamente, quando $n = 2$, ao acrescentarmos mais uma casa na configuração não será possível ter a situação 2, pois a $1^{\underline{a}}$ casa também já será adjacente a $2^{\underline{a}}$ casa. Logo,

$$R_{n+1} = 2R_n + 3R_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 3,$$

e pode ser escrita como

$$R_{n+1} - 2R_n - 3R_{n-1} = 0,$$

que tem como equação característica associada, $r^2 - 2r - 3 = 0$, em que as raízes são dadas por

$$r_1 = 3 \quad \text{e} \quad r_2 = -1.$$

Pelo Teorema 2.1.3, temos que todas as soluções da recorrência são dadas por

$$R_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-1)^n,$$

com c_1 e c_2 constantes.

Para encontrarmos as constantes c_1 e c_2 precisaremos de dois valores iniciais.

Para $n = 3$, temos a configuração a seguir.

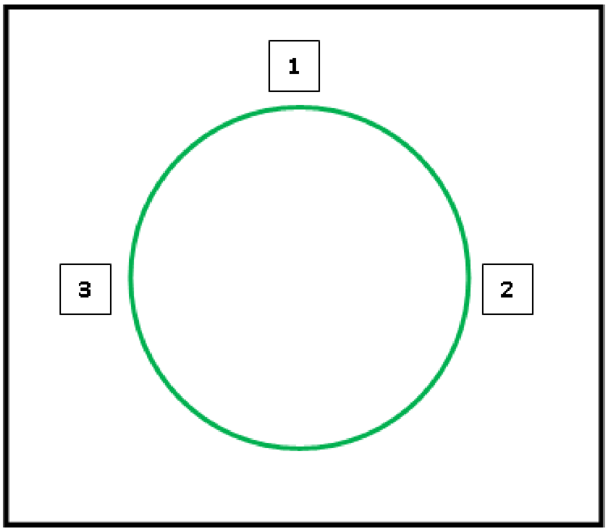

Figura 4.8: Praça circular com 3 casas

Para a $1^{\underline{a}}$ casa temos 4 opções para pintar, para a $2^{\underline{a}}$ temos 3 e para a $3^{\underline{a}}$ temos 2. Logo, $R_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Da mesma forma, para $n = 4$ temos duas possibilidades, como pode ser observado a seguir.

Na figura a seguir, a $1^{\underline{a}}$ casa poderá ser pintada de 4 formas e automaticamente a $3^{\underline{a}}$ casa terá essa cor também, sobrando 3 possibilidades para a $2^{\underline{a}}$ casa e para a $4^{\underline{a}}$ casa.

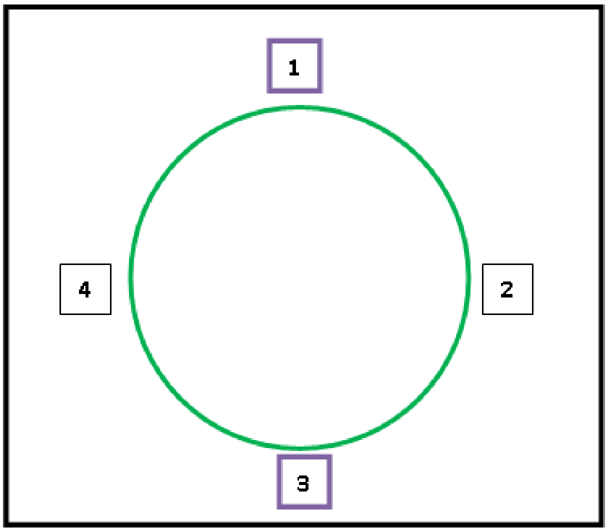

Figura 4.9: Praça circular com 4 casas

Na figura a seguir, a $1^{\underline{a}}$ casa poderá ser pintada de 4 formas e com isso, sobram 3 possibilidades para a $3^{\underline{a}}$ casa. Assim, sobram apenas 2 possibilidades de cor para a $2^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ casas. Logo, $R_4 = 4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 36 + 48 = 84$.

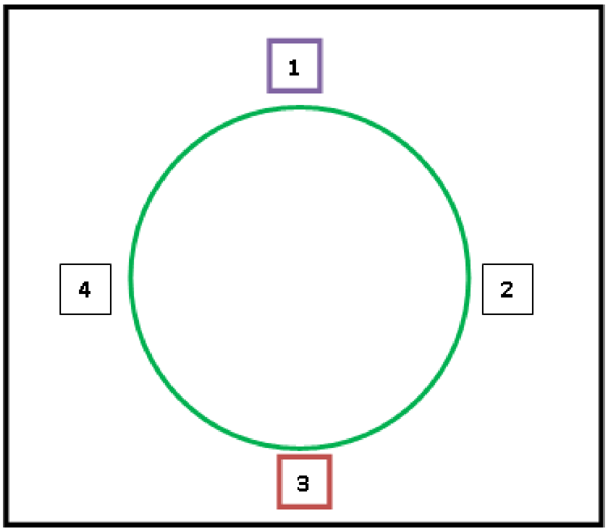

Figura 4.10: Praça circular com 4 casas

Como $R_3 = 24$ e $R_4 = 84$, substituindo em $R_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot (-1)^n$, temos

$$\begin{cases} c_1 \cdot 3^3 + c_2 \cdot (-1)^3 = 24 \\ c_1 \cdot 3^4 + c_2 \cdot (-1)^4 = 84 \end{cases}$$

Desenvolvendo as equações, temos

$$\begin{cases} 27c_1 - c_2 = 24 \\ 81c_1 + c_2 = 84 \end{cases}$$

Somando as equações ficamos com

$$108c_1 = 108 \Longrightarrow c_1 = 1.$$

Daí, substituindo na primeira equação, obtemos

$$27 - c_2 = 24$$

Seguindo que

$$c_2 = 3.$$

Logo,

$$R_n = 3^n + 3 \cdot (-1)^n$$

Não é difícil perceber que para $n = 1$ teremos $R_1 = 4$ e para $n = 2$, $R_2 = 4 \cdot 3 = 12$. Portanto,

$$R_1 = 4$$

$$R_2 = 12$$

$$R_n = 3^n + 3 \cdot (-1)^n \quad \text{para} \quad n \geq 3.$$

4.1.7 Generalização do problema de pintar as casas

Em uma praça circular, há n casas idênticas. Um pintor dispõe de p cores diferentes para pintar as casas. De quantos modos isso pode ser feito se casas adjacentes não podem ter a mesma cor?

Solução: Seja R_n o número de maneiras de pintar as n casas com p cores. Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, temos que ao acrescentar 1 casa entre a casa 1 e a $n-$ésima casa, temos uma nova configuração com duas situações possíveis:

- Situação 1: (A $1^{\underline{a}}$ casa e a $n-$ésima casa tem cores diferentes)
  Assim, como a $1^{\underline{a}}$ casa e $n-$ésima casa tem cores diferentes a $(n+1)-$ésima casa poderá ser pintada de $(p-2)$ cores diferentes. E as casas de 1 até n poderão ser pintadas de R_n maneiras. Assim,

$$R_{n+1} = (p-2) \cdot R_n.$$

- Situação 2: (A $1^{\underline{a}}$ casa e $n-$ésima casa tem a mesma cor)
  Como a $1^{\underline{a}}$ casa e a $n-$ésima casa tem a mesma cor, a $(n+1)-$ésima casa poderá ser pintada de $(p-1)$ cores diferentes, e além disso, as casas de 1 até $n-1$ poderão ser pintadas de R_{n-1} maneiras, já que a $n-$ésima casa já esta com a mesma cor da $1^{\underline{a}}$ casa.

Logo,

$$R_{n+1} = (p-1) \cdot R_{n-1}.$$

Portanto, temos

$$R_{n+1} = (p-2) \cdot R_n + (p-1) \cdot R_{n-1},$$

que é uma recorrência de segunda ordem. Porém, temos que observar que a expressão acima será válida apenas para $n \geq 3$, pois quando $n = 1$ temos apenas uma casa e seguindo o raciocínio anterior, ao acrescentarmos mais uma casa na configuração já não conseguiremos ter a situação 2, pois, a 2ª casa já será adjacente a 1ª casa e portanto, não poderão ter a mesma cor. Analogamente, quando $n = 2$, ao acrescentarmos mais uma casa na configuração não será possível ter a situação 2, pois a 1ª casa também já será adjacente a 2ª casa. Logo,

$$R_{n+1} = (p-2) \cdot R_n + (p-1) \cdot R_{n-1} \quad \text{para} \quad n \geq 3,$$

e pode ser escrita como

$$R_{n+1} - (p-2) \cdot R_n - (p-1) \cdot R_{n-1} = 0,$$

que tem como equação característica associada, $r^2 - (p-2) \cdot r - (p-1) = 0$, em que as raízes são dadas por

$$r_1 = p - 1 \quad \text{e} \quad r_2 = -1.$$

Pelo Teorema 1.1.3, temos que todas as soluções da recorrência são dadas por

$$R_n = c_1 \cdot (p-1)^n + c_2 \cdot (-1)^n,$$

com c_1 e c_2 constantes.

Para encontrarmos as constantes c_1 e c_2 precisaremos de dois valores iniciais. Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, para $n = 3$, temos $R_3 = p \cdot (p-1) \cdot (p-2)$.

Da mesma forma, para $n = 4$, seguindo os casos apresentados no exemplo anterior, teremos

$$R_4 = p \cdot 1 \cdot (p-1) \cdot (p-1) + p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot (p-2)$$

$$R_4 = p \cdot (p-1)^2 + p \cdot (p-1) \cdot (p-2)^2$$

Substituindo R_3 e R_4 em $R_n = c_1 \cdot (p-1)^n + c_2 \cdot (-1)^n$, temos

$$\begin{cases} c_1 \cdot (p-1)^3 + c_2 \cdot (-1)^3 = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \\ c_1 \cdot (p-1)^4 + c_2 \cdot (-1)^4 = p \cdot (p-1)^2 + p \cdot (p-1) \cdot (p-2)^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo as equações, temos

$$\begin{cases} (p-1)^3 \cdot c_1 - c_2 = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \\ (p-1)^4 \cdot c_1 + c_2 = p \cdot (p-1)^2 + p \cdot (p-1) \cdot (p-2)^2 \end{cases}$$

Somando as equações ficamos com

$$(p-1)^3 \cdot c_1 + (p-1)^4 \cdot c_1 = p \cdot (p-1) \cdot (p-2) + p \cdot (p-1)^2 + p \cdot (p-1) \cdot (p-2)^2,$$

seguindo que

$$(p-1)^3 \cdot (1+p-1) \cdot c_1 = p \cdot (p-1) \cdot (p-2+p-1+p^2-4p+4)$$

$$p \cdot (p-1)^3 \cdot c_1 = p \cdot (p-1) \cdot (p-1)^2$$

$$c_1 = 1.$$

Daí, substituindo na primeira equação, obtemos

$$c_2 = (p-1)^3 - p \cdot (p-1) \cdot (p-2)$$

$$c_2 = (p-1) \cdot [(p-1)^2 - p \cdot (p-2)]$$

$$c_2 = (p-1) \cdot (\cancel{p^2-2p} + 1 \cancel{-p^2+2p})$$

seguindo que

$$c_2 = p-1.$$

Logo,

$$R_n = (p-1)^n + (p-1) \cdot (-1)^n.$$

Não é difícil perceber que para $n = 1$ teremos $R_1 = p$ e para $n = 2$ obtemos $R_2 = p \cdot (p-1)$. Portanto,

$$R_1 = p$$

$$R_2 = p \cdot (p-1)$$

$$R_n = (p-1)^n + (p-1) \cdot (-1)^n \quad \text{para} \quad n \geq 3.$$

Considerações Finais

Neste trabalho foram abordadas diversas técnicas de Contagem que não são comumente trabalhadas no Ensino Básico e nem no Ensino Superior. Verificamos como a Permutação Caótica e a Recorrência podem ser pertinentes para resolver diversos tipos de problemas dos principais concursos de admissão aos cursos superiores. Nesse sentido, abordamos alguns mais simples, como questões do Enem e alguns mais elaboradas, como as questões do IME e da UFRJ. Averiguamos também que o Princípio da Reflexão é eficiente para resolver o problema da Fila do Cinema e que o Número de Catalan se encaixa perfeitamente como solução para o caso onde temos $m = n$. O Princípio das Gavetas de Dirichlet serviu para provar problemas que não se preocupam com a contagem e sim com a existência de agrupamentos que cumprem determinadas propriedades.

Enquanto professora e pesquisadora acredito que é necessário estimular o raciocínio e a descoberta, e para isso, foram sugeridos alguns problemas para o Ensino Médio para resgatar o pensar matemático e ir além de conceitos ou fórmulas. Esses problemas foram elaborados com níveis de dificuldades diferentes e podem ser resolvidos com alguma das técnicas apresentadas no trabalho.

Embora não seja uma área nova, acreditamos que a Análise Combinatória é uma área que ainda tem muito a ser pesquisada e desenvolvida. Ao longo do trabalho foram estudados novos métodos que podem ser aplicados para obter soluções de problemas neste ramo, além de aperfeiçoar os já trabalhados. Durante a pesquisa em busca de materiais para o trabalho, podemos perceber que os Números de Catalan não servem apenas para resolver o problema da Fila do Cinema, e que outros diversos problemas de contagem o tem como solução. Julgamos importante, para trabalhos futuros continuar com pesquisas nesse campo e trazer mais problemas resolvidos com essa técnica objetiva e acessível para diferentes públicos, em especial para os alunos do Ensino Médio, como em um dos problemas descrito no Capítulo 4. Da mesma forma, acreditamos que o Princípio da

Reflexão pode ser estudado para ser aplicado em outros problemas, além dos trabalhados no texto.

Finalmente, esperamos que o trabalho ajude professores e alunos que procuram informações de Análise Combinatória e que sirva como fonte de inspiração e estudo para popularizar o uso de novos métodos de Contagem além dos já tradicionais Permutação, Combinação e Arranjo.

Referências Bibliográficas

[1] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: MEC, 2000.

[2] BRUALDI, Richard Anthony. *Introductory Combinatorics.* 5. ed. Madison: Pearson, 2009.

[3] CARNEIRO, Manoel Leite; OLIVEIRA, Marcelo Rufino. *Coleção Elementos da Matemática - Volume 3.* 3. ed. Belém: VestSeller, 2010.

[4] CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro; MORGADO, Augusto César. *Análise Combinatória e Probabilidade.* 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[5] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Métodos de Contagem e Probabilidade.* Rio de Janeiro: IMPA - OBMEP, 2015.

[6] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; LIMA, Elon Lages; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2.* 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[7] CUNHA, Gabriel Gomes; CUNHA, Grégory Duran; MEDEIROS, Tatiane; OLIVEIRA, Fabrício Alves. *Um estudo das permutações caóticas.* Minas Gerais. Disponível em : <http://www.portal.famat.ufu.br>. Acesso: 28 de dezembro de 2016.

[8] DAVIS, Tom. *Catalan Numbers.* Mathematical Circles Topics - Berkeley. Disponível em: <http://www.geometer.org/mathcircles>. Acesso: 10 de julho de 2017.

[9] GARBI, Gilberto. *Uma pequena pérola de Euler,* Revista do professor de Matemática, Nº 50 - Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

[10] GOMES, Carlos A.; PEREIRA, André Gustavo C.; SIMIOLI, Viviane. *Introdução à Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2015.

[11] JIANG, Xiaotong. *Applications of Catalan Numbers.* Sweet Briar College - USA. Disponível em: <http://oldweb.sbc.edu>. Acesso: 12 de julho de 2017

[12] JÚNIOR, Edson Praxedes dos Santos. *Permutações Caóticas e Aplicações.* 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Federal de Goiás, Goiânia.

[13] MELLO, Margarida P.; MURALI, Idani T.; SANTOS, José Plínio O. *Introdução à Análise Combinatória.* 4. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

[14] MIKLÓS, Dezsõ. *Catalan number.* Hungarian Academy of Sciences - Hungria. Disponível em: <http://www.renyi.hu/ dezso/>. Acesso em: 20 de fevereiro de 2017.

[15] MOREIRA, Carlos Gustavo Tamm de Araújo. *Amigo Oculto,* Revista do professor de Matemática, Nº 15 - Sociedade Brasileira de Matemática, 1992.

[16] PEREIRA, Marcos Vinicius. *Recorrências – Problemas e Aplicações.* 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade de Brasília, Brasília.

[17] SIMÕES, Diêgo Ayllo da Silva. *Recorrências: Conceitos e Aplicações.* 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa.

[18] SOARES, Alexmay. *Notas de aula: Matemática e suas tecnologias.* Disponível em: <http://www.fariasbrito.com.br>. Acesso: 15 de março de 2017.

[19] Prova do Instituto Militar de Engenharia 2002. Disponível em: <http://ime.eb.br>. Acesso: 03 de fevereiro de 2017.

[20] Prova do ENEM Cancelada 2009. Disponível em: <http://www.infoescola.com>. Acesso: 20 de janeiro de 2017.

[21] Prova da Olimpíada de Matemática da Noruega. Disponível em: <https://abelkonkurransen.no/nb/oppgaver/>. Acesso: 01 de fevereiro de 2017