UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO GRAFOS PARA MONTAGEM DE UM HORÁRIO ESCOLAR VIÁVEL PARA UMA ESCOLA NO MUNICÍPIO DE ANGUERA

Marcelo Ataide Silva

Orientadora: Profª Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira

Feira de Santana

Outubro de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UMA ABORDAGEM UTILIZANDO GRAFOS PARA MONTAGEM DE UM HORÁRIO ESCOLAR VIÁVEL PARA UMA ESCOLA NO MUNICÍPIO DE ANGUERA

Marcelo Ataide Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientadora: Prof[a] Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira

Feira de Santana
Outubro de 2017

Ficha Catalográfica – Biblioteca Central Julieta Carteado

S581a Silva, Marcelo Ataide

Uma abordagem utilizando grafos para montagem de um horário escolar viável para uma escola no Município de Anguera / Marcelo Ataide Silva. – Feira de Santana, 2017.

56f.: il.

Orientadora: Márcia Braga de Carvalho Ferreira.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2017.

1. Teoria dos Grafos. 2. Algoritmos. 3. Problema na grade do horário escolar. 4. Matemática aplicada. I. Ferreira, Márcia Braga de Carvalho, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação do discente Marcelo Ataíde Silva do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos vinte dias do mês de outubro de dois mil e dezessete às 15:00 horas no Auditório da PPGM - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Uma Abordagem Utilizando Grafos para Planejamento de um Horário Escolar Viável para uma Escola no Município de Anguera"**, do discente **Marcelo Ataíde Silva**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Márcia Braga de Carvalho Ferreira (Orientador, UEFS), Adson Mota Rocha (UFRB) e Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 20 de outubro de 2017.

Profa. Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UEFS)
Orientador

Adson Mota Rocha

Prof. Dr. Adson Mota Rocha (UFRB)

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)

Visto da Coordenação:

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente a Deus, presença vital de iluminação em minha vida.
Ao meus pais, Manoel Missias e Maria das Graças e minha irmã, Gracielle Ataide pelo eterno incentivo durante todo o meu processo educacional.
Agradeço a minha noiva, Ana Paula, pelo apoio e compreensão.
À minha orientadora Márcia, pela acolhida e orientação, e pelas sugestões de melhorias durante a elaboração deste trabalho.
A todos os meus colegas da turma do mestrado pela amizade, união e muito estudo.
A todos os professores do PROFMAT pelo ensino-aprendizagem e por toda sua gentileza em compartilhar ideias e experiências valiosas.
À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela iniciativa do programa de Mestrado profissional.

Resumo

Neste trabalho foi explorado o problema de programação de horário escolar na Escola Centro Educacional Professor Áureo de Oliveira Filho, no qual foi utilizado a Teoria dos Grafos para a modelagem. A solução foi baseada a partir da elaboração e do desenvolvimento de um algoritmo específico para resolver o problema proposto com os dados que foram levantados. A principal proposta deste trabalho consiste em encontrar uma solução viável, ou seja sem conflitos, de um quadro de horário para as turmas do ensino fundamental do turno vespertino.

Palavras-chave: Teoria dos Grafos, Algoritmo, Problema do Quadro de Horário Escolar.

Abstract

In this paper we explored the problem of school time programming in the Escola Educacional Professor Aureo de Oliveira Filho School, in which the Theory of Graphs for modeling was used. The solution was based on the elaboration and the development of a specific algorithm to solve the proposed problem with the data that was raised. The main proposal of this work is to find a viable solution of a timetable for the elementary school classes of the afternoon shift.

Keywords: Theory of Graphs, Algorithm, School Timetable Problem.

Sumário

Introdução

A elaboração de um quadro de horário é indispensável na administração escolar, seja no nível fundamental, médio ou superior. O problema de programação do quadro de horário diz respeito à alocação das aulas de uma escola em um intervalo de tempo, no caso uma semana, de modo que elas satisfaçam um conjunto grande de restrições para que o horário obtido satisfaça as necessidades dos envolvidos: os professores e a instituição.

Historicamente este problema tem sido resolvido de forma artesanal, ou seja, feito manualmente, o que torna uma tarefa penosa e complexa, requerendo assim vários dias de trabalho. Essa demora para obter o melhor resultado é devido a vários motivos, como a disponibilidade dos professores, redução dos dias em que o professor estará na instituição, entre outros. Esses motivos sempre geram conflitos e tem que ser solucionados, nem sempre agradando a todos.

A dificuldade do problema está em respeitar as mais variadas restrições básicas ou restrições fortes, pois sem o atendimento dessas torna-se inviável encontrar uma solução, como por exemplo, uma turma ter aulas de duas disciplinas simultaneamente. Enquanto que as restrições desejáveis ou fracas, buscam melhorar a qualidade do quadro de horário viável, como por exemplo, respeitar a preferência dos professores por determinados dias e horários.

Devido a essas restrições e outros fatores como por exemplo pedagógicos, educacionais e pessoais, é consenso na comunidade científica que o problema de programação de horários é de difícil generalização. Isto se deve à diversidade de regimes educacionais, os quais variam de região para região, e às características de cada instituição de ensino. Desta forma, os sistemas são comumente desenvolvidos para atender a uma instituição específica.

O problema de programação do quadro de horário é resolvido e modelado matematicamente como um problema de otimização combinatória, na qual a complexidade aumenta exponencialmente em função do número de turmas e professores envolvidos. O problema de programação de horários em escolas **(PPHE)** é considerado um problema NP-Difícil (BARBOZA, 2003), ou seja, não é resolvido em tempo polinomial e é comumente abordado através de algoritmos heurísticos. Os algoritmos heurísticos são métodos que encontram uma solução aproximada com tempo computacional reduzido, entre eles destacam-se as meta-heurísticas, que é um conjunto de conceitos que podem ser utilizados para definir métodos heurísticos. Estes métodos permitem obter soluções aceitáveis em tempo viável, mas não garantem a obtenção da solução ótima, aplicáveis a um extenso conjunto de problemas. Algumas delas são: Coloração de Grafos, Busca-tabu, Algoritmos Genéticos e Simulated Annealing encontrados no trabalho (WERRA, 1996).

Na literatura o problema de alocação de aula é conhecida como **School Timetabling Problem (STP)**. A primeira referência foi um artigo de Appleby, Black e Newman (1960) no qual os autores buscavam em técnicas computacionais a solução na construção de um quadro de horário.

Além do quadro de horário escolar, temos o quadro de horário de curso, que consiste em agendar um conjunto de aulas para cada curso em um período de tempo pré-determinado e para um dado número de salas, levando em consideração o tamanho das salas para a alocação das turmas. Gotlieb (1962), apresentou a primeira formulação completa para o problema do quadro de horários para cursos **(Timetabling problem Course- Scheduling)**. Temos também o quadro de horários de exames, que consiste em agendar um quadro de exames por curso dentro de um período de tempo. Broder (1964) se ateve ao problema do quadro de horários para exames **(Timetabling Problem - Examination Scheduling)**.

No ano de 1967, Welsh e Powell (1967), estabelecem a relação de similaridade existente entre o problema de quadro de horários e o problema sobre coloração de grafos. O problema foi demonstrado como sendo um exemplar da família dos problemas NP-Completos, por Karp (1972). Somente no início da década de 80, Manvel (1981) e Metha (1981) se ocuparam da coloração de grandes grafos como forma de ataque a complexas instâncias do problema do quadro de horário.

Até hoje o problema do quadro de horário é discutido e pesquisado. No trabalho de Lobo (2005), ele oferece uma solução do problema de horário escolar via algoritmo genético paralelo, com o objetivo de acelerar o processo de convergência. Estudando o quadro de horário de uma Universidade em Minas Gerais.

No trabalho de Navarro (2016), foi feito um estudo de coloração de grafos aplicado ao problema de alocação de horário, utilizando dados do departamento de ciência da computação da Universidade Presidente Antônio Carlos. No trabalho de Santos (2008), na tentativa de atender a um maior número possível de requerimentos e características do problema foi desenvolvido o modelo AST, Automated School Timetabling. Ele reúne programação inteira e heurísticas desenvolvidos sobre um grafo híbrido, sendo essencialmente meta-heurísticas Busca Tabu. Foi realizado utilizando dados de uma escola na Bahia e outra em Pernambuco.

O objetivo do desenvolvimento deste trabalho é encontrar uma solução viável, ou seja, sem a existência de conflitos e se possível otimizada de um quadro de horário de uma escola do município de Anguera. Neste caso, vamos utilizar a teoria dos grafos para ter uma melhor visualização de todos os dados do problema. Para solucioná-lo desenvolvemos e aplicamos um algoritmo que encontra uma solução viável, partindo de uma heurística construtiva, que consiste em alocar aula a aula, observando uma ordem de restrições. Desta maneira, foi realizado um sucinto levantamento bibliográfico sobre a Teoria dos Grafos, suas principais características e aplicações, além disso foram utilizados no problema dados e demandas reais da escola em questão.

A motivação para a elaboração deste trabalho surgiu a partir de observações reais com relação aos constantes problemas encontrados no quadro de horário da escola em questão, como por exemplo aulas geminadas quebradas pelo intervalo e principalmente três aulas consecutivas de algumas disciplinas, além das dificuldades para elaboração do mesmo por parte das pessoas responsáveis. Outra grande motivação foi estudar a teoria dos grafos e suas aplicações, conteúdo esse que não é trabalhado no ensino médio e em alguns casos nem no ensino superior. A modelagem através dos grafos foi um recurso que deixou o problema de forma bem intuitiva e de melhor entendimento.

A principal contribuição desta dissertação é apresentar um método eficiente que solucione o problema de programação do quadro de horário de uma escola no Município de Anguera. Desta forma, inicialmente é proposto uma modelagem através de Grafos e, em seguida, é implementado um algoritmo para gerar as soluções de forma viável e otimizada.

Diante da compreensão do contexto e dos objetivos definidos, dividimos esse trabalho em quatro capítulos apresentados da seguinte forma:

No capítulo 1, é apresentado conceitos de grafos, exemplos, tipos de grafos e abordagem histórica.

No capítulo 2, será abordado os diferentes problemas de alocação de horários educacionais e a formulação matemática para problemas de grade de horários escolares proposta por Werra (1985) e Junginger(1986).

No capítulo 3, são apresentados a formulação do problema juntamente com os grafos desenvolvidos no software Geogebra, as restrições trabalhadas e a instituição de ensino em questão. Após feito isso definimos algoritmo e apresentamos o algoritmo proposto.

No capítulo 4, é aplicado o algoritmo para todas as turmas do turno vespertino da escola, sendo que para a turma do 6º ano foi demonstrado todo o passo a passo do algoritmo. Além disso foi feito um comparativo com os problemas de um horário real utilizado no ano de 2016 na escola em questão com as soluções encontradas.

Por fim, no capítulo 5, apresentaremos nossas conclusões e propostas de trabalhos futuros.

Capítulo 1

Aspectos Gerais de Grafos

Neste capítulo falaremos sobre a Teoria dos Grafos, sua história e origem. Apresentaremos também sua definição básica, a definição de grafos bipartidos, definição de subgrafo, de caminhos e de conexidade.

1.1 Abordagem Histórica dos Grafos

O desenvolvimento de teorias matemáticas que relacionam elementos de conjuntos discretos é bastante recente se comparado a história da matemática "contínua". Exemplo disso é a Teoria dos Grafos formulada já no século XVIII e que ainda assim foi "redescoberta muitas vezes"(GOUVEIA, 2003).

A origem a cerca da Teoria dos Grafos está associada ao famoso problema das pontes de Konigsberg (cidade da Prússia que agora se designa Kaliningrad). O problema era realizar um passeio pela cidade, começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada uma das sete pontes do rio Pregel, exatamente uma vez, como podemos observar na Figura 1.1.

Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas essa pontes sem repetir nenhuma, se tornando uma lenda popular, quando em 1736, Leonhard Euler(1707-1783) provou que não existia tal possibilidade. Ele utilizou de um raciocínio muito simples, transformou os caminhos em linhas e suas intersecções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história.

Após essa demonstração de Euler, em 1847 o físico alemão Kirchhoff (1824-1887) utilizou modelos de grafos no estudo de circuitos elétricos. E em 1857, Cayley (1821-1895), se destacou utilizando aplicações de enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

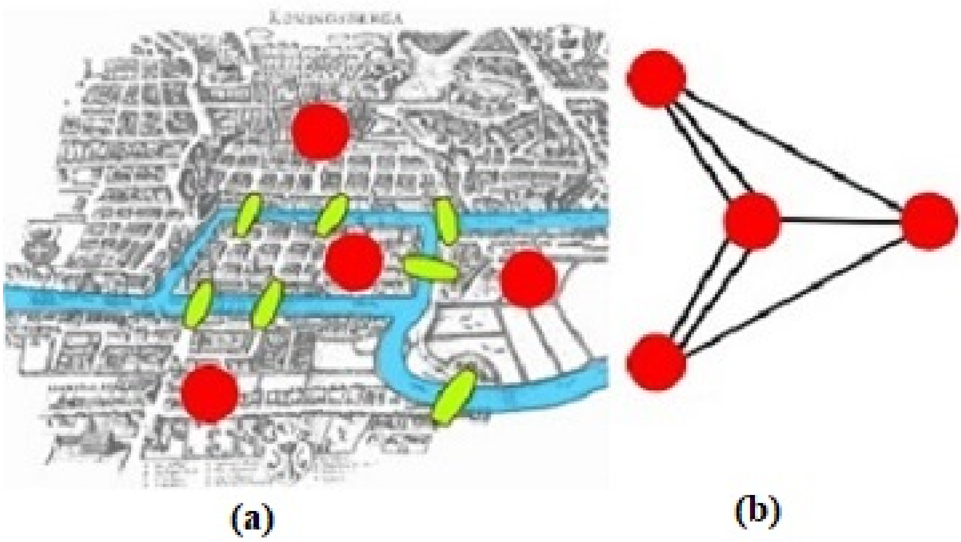

Figura 1.1: Pontes de Königsberg (a) e o respectivo Grafo (b).

1.2 Definições Básicas de Grafos

Inicialmente vamos definir quem são os conjuntos $V(G)$ e $A(G)$.

- $V(G)$ é o conjunto de todos os vértices do Grafo, representado geometricamente por pontos.
  $V(G) = V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ quantidade n de pontos;

- $A(G)$ é o conjunto de todas as arestas do Grafo, representado geometricamente por segmentos de reta.
  $A(G)$=A= $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ quantidade m de arestas, com $a_k = \{v_{k_i}, v_{k_j}\}$, para $k \in \{1, ..., m\}$.

A partir dos conjuntos acima, temos.

Definição 1.1. Um Grafo G é denotado por um par $(V(G), A(G))$, que consiste de um conjunto não vazio $V(G)$ de vértices e um conjunto $A(G)$ de arestas, juntamente com uma função incidência $\psi(G)$ que faz corresponder a cada aresta $a_m \in A(G)$ um par não ordenado de vértices, não necessariamente distintos, de $V(G)$. Os vértices pertencentes a $\psi(G)(a_m)$ são os extremos da aresta a_m.

Definição 1.2. Sejam u e v dois vértices e $a = \{u, v\}$ uma aresta que os conecta. Para evitar sobrecarga de notação substituímos $\{u, v\} \in A(G)$ por $uv \in A(G)$, sendo u e v vértices que pertencem a V. Dizemos que a aresta $\{u, v\}$ **incide** em u e em v ou ainda, que u e v são extremidades dessa aresta, assim os dois vértices serão ditos adjacentes ou vizinhos.

Exemplo 1.3. Seja o Grafo $G(V(G), A(G))$
onde

$$V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \text{ e}$$
$$A(G) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

e $\psi(G)$ é definida por:

$\psi(G)(a_1) = v_1v_2$; $\psi(G)(a_2) = v_2v_3$; $\psi(G)(a_3) = v_3v_4$; $\psi(G)(a_4) = v_4v_5$; $\psi(G)(a_5) = v_5v_1$

Na Figura 1.2 apresentamos uma representação geométrica do Grafo G.

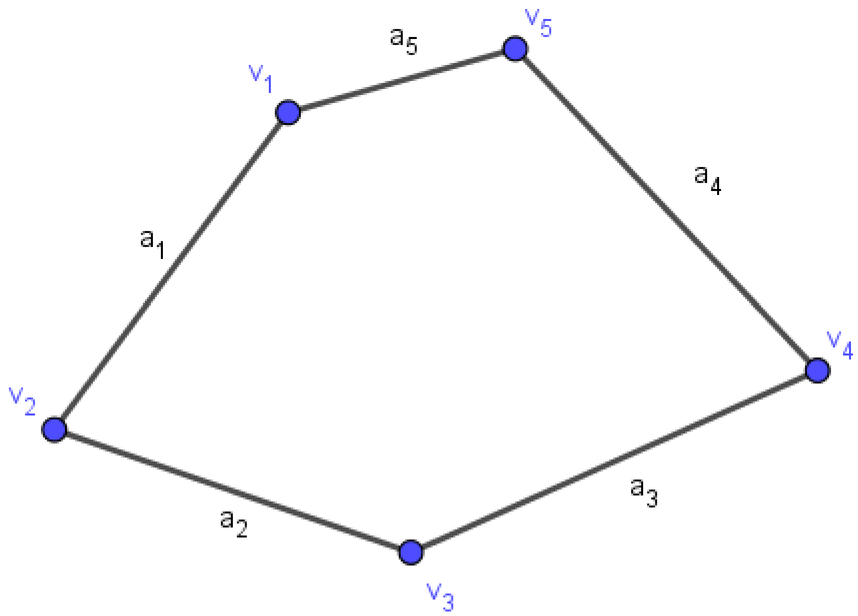

Figura 1.2: Grafo G

Definição 1.4. Quando duas arestas forem incidentes a um mesmo par de vértices, ou seja, possuem o mesmo extremo, serão chamadas de arestas em paralelo.

Definição 1.5. Quando uma aresta qualquer incide a um único vértice, será chamada de aresta em laço.

Definição 1.6. Quando duas ou mais arestas possuírem o mesmo extremo, serão chamadas de arestas adjacentes.

Definição 1.7. Um grafo que não apresenta arestas em paralelo e nem laço, será chamado de grafo simples.

Definição 1.8. Um grafo completo é um grafo simples onde quaisquer dois de seus vértices são adjacentes. Então, seja $G = (V, A)$ um grafo simples, tal que, para todo par de vértices distintos $u, v \in V$ temos $uv \in A$. Denotamos o grafo completo em n vértices por K_n.

Definição 1.9. Ordem de um grafo G, consiste na quantidade de vértices do grafo ou na cardinalidade do conjunto V, denotamos por $|V(G)|$.

Definição 1.10. A dimensão de um grafo G, é a quantidade de arestas do grafo ou a cardinalidade do conjunto A, denotamos por $|A(G)|$.

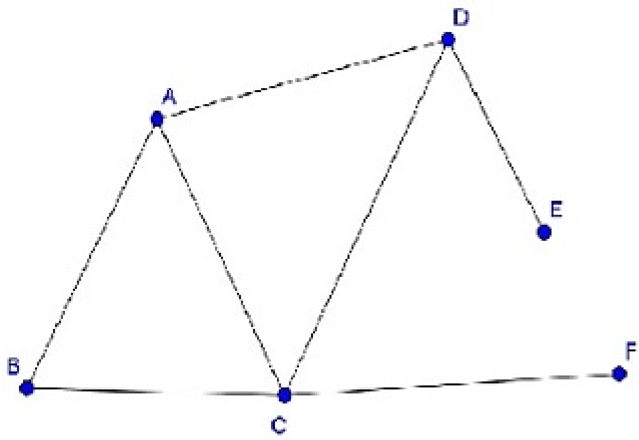

Figura 1.3: Grafo simples

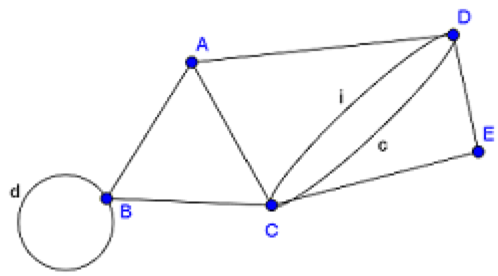

Figura 1.4: Grafo com arestas em laço e em paralelo

A partir das definições 1.9 e 1.10, temos que na Figura 1.3 o $|V(G)| = 6$ e o $|A(G)| = 7$. Enquanto que na Figura 1.4 o $|V(G)| = 5$ e o $|A(G)| = 9$, sendo que as arestas i e c estão em paralelo e a aresta d é um laço.

1.3 Grafos Bipartidos

Também chamado de bicolorido, bígrafo ou bipartite é um grafo simples se o conjunto dos vértices V pode ser divididos em dois conjuntos V_1 e V_2 com uma quantidade m e n de vértices, respectivamente. Assim, seja $G = (V, A)$ um grafo simples, V pode ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2, tal que $V = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e os vértices em V_1 conectam-se apenas a vértices em V_2 e vice-versa.

1.3.1 Grafo Bipartido Completo

Um grafo bipartido será completo quando cada vértice do subconjunto V_1 é adjacente a todos os vértices do subconjunto V_2. Ele é denotado por $K_{m,n}$, onde $m = |V_1|$ e $n = |V_2|$. A Figura 1.5 exemplifica um grafo bipartido completo $K_{3,4}$.

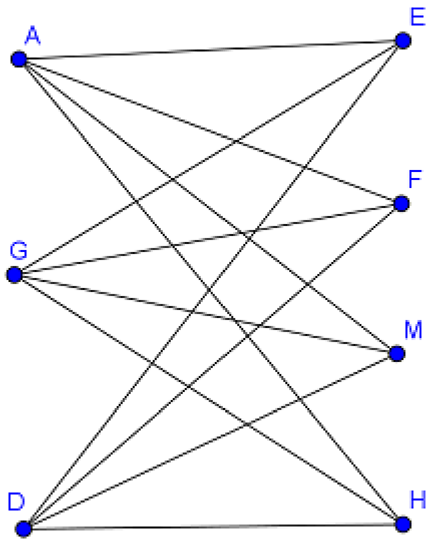

Figura 1.5: Grafo Bipartido Completo com $K_{3,4}$

1.4 Subgrafos

Sendo $H = (V', A')$ e $G = (V, A)$ grafos, dizemos que H é subgrafo de G e denotamos, $H \leqslant G$, se cada vértice e aresta de H é também vértice e aresta de G, respectivamente, ou seja, $V' \subset V$ e $A' \subset A$.

Para melhor entendimento, consideremos as Figuras (1.6, 1.7 e 1.8). Podemos verificar que o grafo H_1 da Figura 1.7 é um subgrafo do grafo G. Já o grafo H_2 da Figura 1.8 não é um subgrafo de G, pois a aresta $\{B, E\} \notin G$.

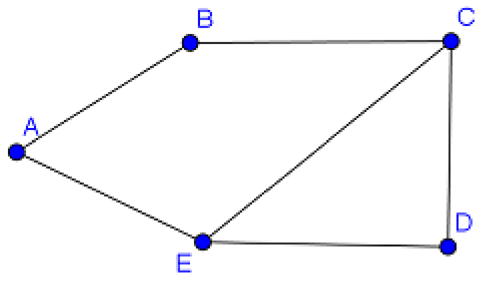

Figura 1.6: Grafo G

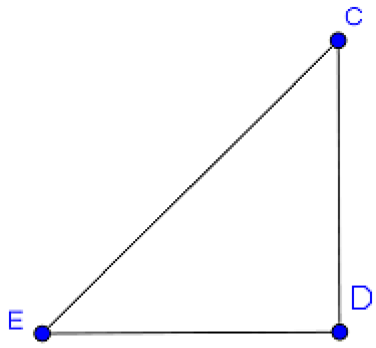

Figura 1.7: Grafo H_1: Subgrafo de G

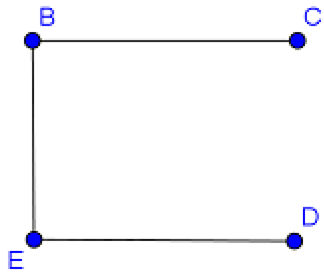

Figura 1.8: Grafo H_2: Não é um Subgrafo de G

1.5 Caminhos

Dado $G = (V, A)$ um grafo simples. Vamos definir os conceitos de passeio, caminho e trilha.

Definição 1.11. Passeio ou Percurso é uma sequência finita $P = v_0v_1...v_n$ de vértices do grafo G tal que $v_iv_{i+1} \in A$ para $1 \leq i \leq n-1$, como podemos ver na Figura 1.9 item (a). No qual v_0 e v_n são os pontos inicial e final do percurso. Se $v_0 = v_n$ então P é fechado caso contrário é aberto.

Definição 1.12. Caminho é um percurso tal que $v_i \neq v_j$ para todo $i, j \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, podemos verificar na Figura 1.9 item (c). Quando $v_1 = v_n$, ou seja, o primeiro e o último vértices são os mesmos, o percurso recebe o nome de ciclo, como podemos ver na Figura 1.9 item (e). Um ciclo é de ordem n, se $|V| = |A| = n$.

Definição 1.13. Trilha é um percurso onde $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\}$ para $1 \leqslant i, j \leqslant n-1$, ou seja, todas as arestas são distintas, podemos verificar na Figura 1.9 item (b). Quando $v_1 = v_n$, a trilha recebe o nome de circuito, como na Figura 1.9 item (d).

Um grafo é dito euleriano se contém uma trilha que contém todas as suas arestas.

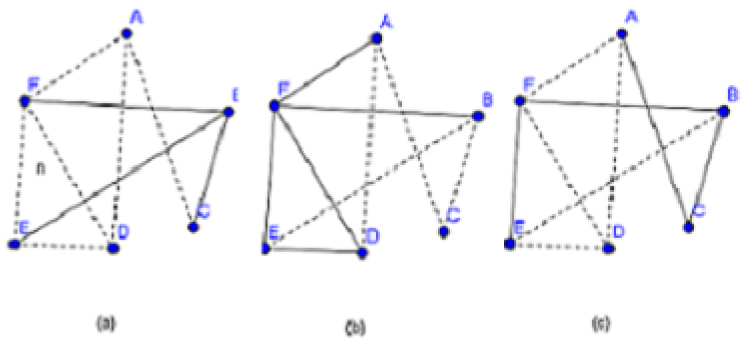

Figura 1.9: Exemplos de Percurso (ebfbc), Trilha (afdefb) e Caminho (acbfe), respectivamente

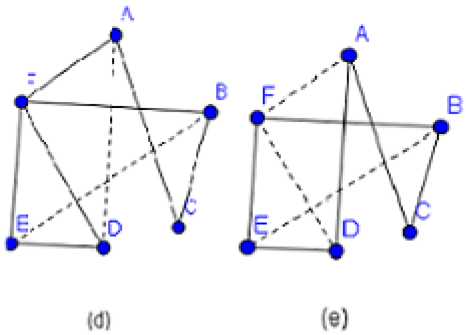

Figura 1.10: Exemplos de Circuito (afdefbca) e Ciclo (fbcadef), respectivamente

1.6 Conexidade

Um Grafo $G(V, A)$ é dito conexo, Figura 1.11 item (a), se existir um caminho entre qualquer par de vértices distintos $u, v \in V(G)$, caso contrário é desconexo, Figura 1.11 item (b).

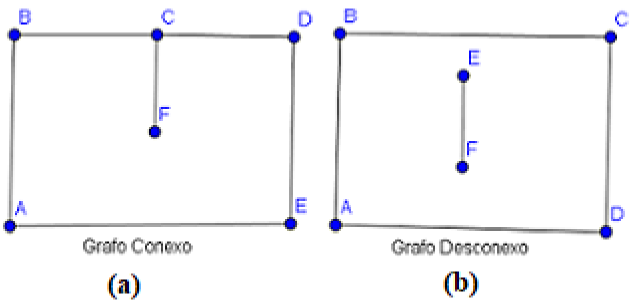

Figura 1.11: Exemplo de Grafo Conexo e Desconexo

1.6.1 Componente Conexa

Uma componente conexa de G é um subgrafo H de G, conexo, tal que para todo subgrafo I de G, que contenha estritamente H, se tenha I desconexo.

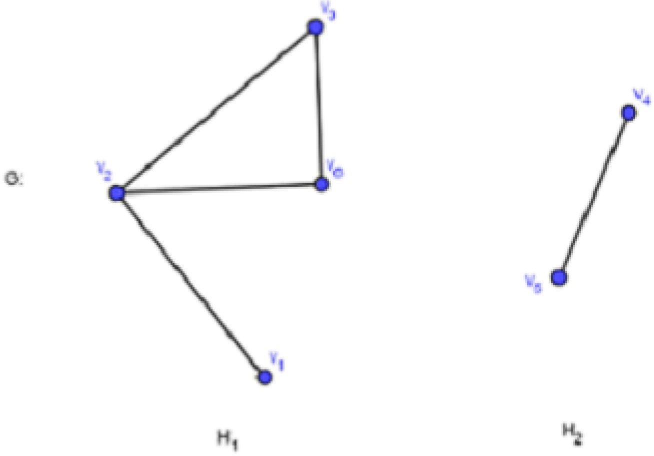

Figura 1.12: Grafo $G = H_1 \cup H_2$

O grafo G da Figura 1.12 é desconexo, pois os vértices $v_1, v_5 \in G$ mas não existe um caminho $v_1 - v_5$ e nem um caminho $v_5 - v_1$. H_1 e H_2 são componentes conexas de G.

Capítulo 2

Problema do Quadro de Horário

Problemas de produção de quadro de horários em Instituições de ensino têm sido bastante estudados nas últimas décadas. Entre as principais razões para esse interesse estão:

a) A dificuldade de resolução, pois encontrar um quadro de horários que satisfaça tantos interesses é uma tarefa complicada;

b) Importância prática, permitir a satisfação da grande maioria dos envolvidos dentro da instituição;

c) Importância teórica, por serem difíceis de serem resolvidos, são um grande desafio para pesquisas em área como computação e matemática, pois são problemas NP-completo, definido como problemas de decisão possíveis de verificar em tempo polinomial o valor das instâncias.

Sendo assim, neste capítulo vamos apresentar a definição dos principais problemas de grade de horário e a formulação matemática para o problema formulada por Werra (1985) e Junginger (1986).

2.1 Problema de Grade de Horário em Instituições Educacionais

O problema de grade de horário em instituições educacionais, consiste em agendar uma sequência de evento (aulas ou exames) os quais envolvem professores e estudantes em um horário pré-fixado, satisfazendo sempre a um conjunto de restrições. A programação de horários é algo muito importante, pois influencia diretamente na vida de funcionários, alunos e professores. Uma vez implementado um quadro de horários, esse normalmente é utilizado durante todo o período letivo, fazendo com que em várias situações alunos e professores tenham que se adaptar a ele, pois as soluções geralmente não atendem à todos os interesses e disponibilidade dos envolvidos.

Um grande número de variações deste problema tem sido proposto na literatura, sendo essa classificação proposta por Schaerf (1999). Existem três tipos principais que se diferem pelo tipo de evento, tipo de instituição envolvida (escolas de fundamental e médio ou universidades) e à influência de restrições, são elas:

- **Grade de Horário para uma escola de ensino fundamental e médio:** Conhecido também como Problema Turma- Professor(PTP), consiste na alocação de aulas em uma grade de horário semanal para todas as turmas de uma escola, respeitando restrições essenciais que são aqueles que garantem a viabilidade da solução e as restrições desejáveis, cuja função é melhorar a qualidade da solução mas que, no entanto, seu não atendimento não inviabiliza uma alocação, temos como exemplo, nenhuma turma ou professor pode ser envolvido em mais de uma aula. Aqui são consideradas que as disciplinas são fixas para cada turma e o objetivo principal é evitar que um professor esteja alocado a duas turmas simultaneamente ou que uma turma tenha aula com dois professores diferentes em um mesmo horário.

- **Grade de Horário para cursos universitários:** Esquematização da grade de horários semanal de um conjunto de cursos universitários (Programação, Cálculo, etc.), no qual cada estudante escolhe as disciplinas que irá estudar. Sendo que não é necessário que sejam sempre estudantes de um mesmo currículo, sendo assim uma turma de um determinado curso pode ter estudante de vários currículos diferentes. Ainda existe um conjunto de horários disponíveis para alocação das aulas, e para cada horário um número limitado de salas. O problema consiste em alocar as aulas aos horários disponíveis, e atribuir cada aula a uma sala, respeitando disponibilidade e capacidade dessas, de forma que nenhum estudante tenha aulas simultâneas. Uma das características de problemas dessa classe é que ao contrário dos problemas de horários em escola, existe uma maior flexibilidade em relação aos horários, pois a princípio um curso pode ser escalonado em todo o período de funcionamento da instituição (manhã, tarde e noite). Ainda outra diferença é que como o conceito de turmas nesse problema é diferente em relação ao problema em escolas secundárias, aqui os alunos deslocam-se para terem suas aulas.

- **Grade de horário para exames:** É definido como um problema relacionado a instituições com características de uma universidade típica. É composto por um conjunto de estudantes previamente matriculados em cursos, um conjunto de exames para cada estudante e um conjunto de horários disponibilizados para realizar exames. O objetivo primário nesse problema é alocar os exames a horários de modo que nenhum estudante tenha que fazer dois exames simultaneamente. Algumas restrições são típicas desse tipo de problema, tais como: os estudantes não podem fazer mais que um número n de exames por dia, alguns exames de certos cursos não podem preceder a exames de outros e alguns exames têm que ser alocados em um mesmo horário.

Nos horários escolares, em geral, os grupos de alunos já estão definidos, são as classes ou turmas. E é com as classes que o problema é definido, não com os alunos. O problema básico consiste em dados os conjuntos classes, professores e períodos, encontrar uma grade de horário que atenda alguns requisitos (restrições). Duas importantes restrições são a restrição de conflito para professores e a restrição de conflito para classes. Esses requisitos podem ser alterados de instituição para instituição tornando o problema de difícil generalização. Sendo que a correta administração dos interesses de professores e de alunos, expressa em um quadro de horários adequado, passa a ser um problema de grande interesse prático, ao lado de sua importância teórica.

Considerando a modelagem de um problema de grade de horário escolar (PGHE), serão primeiramente definidos as restrições do problema, que usualmente são de dois tipos:

- **Restrições fortes:** Essas restrições são indispensáveis que sejam satisfeitas para que seja possível a implementação de um quadro de horários factível, ou seja viável. A restrição mais comum é a não ocorrência de conflitos, como por exemplo, um professor lecionar em duas turmas diferentes em um mesmo horário ou então uma turma assistir a aula de dois professores;

- **Restrições Fracas:** Esse conjunto de restrições são aquelas cuja satisfação é desejável, ou seja, caso não satisfeita, não atrapalha a viabilidade do quadro de horário, porém melhora o quadro de horário. Temos como exemplo de restrição fraca as preferências de professores por determinada turma, ou determinado período de trabalho e ainda seu dia de folga.

2.2 Formulação Matemática para um Problema de Grade Horária Escolar

O Problema de Programação de Horário Escolar estabelece a programação semanal de horários das aulas das turmas de uma escola. Essa formulação foi proposta por Werra (1985), mas em seu modelo ele não considerava restrições tais como a disponibilidade de professores e pré-alocações do tipo: professor p_1 lecionar na turma t_1 em um horário qualquer k. Considere:

- Conjunto de Turmas: $T = \{t_1, t_2, ...t_i\}$;

- Conjunto de Professores: $P = \{p_1, p_2, ..., p_j\}$;
- Conjunto de Horários: $H = \{h_1, h_2, ..., h_k\}$;
- R uma matriz de inteiros não negativos, em que $r_{ij} \in R$ é a carga horária do professor j na turma i.

O objetivo é encontrar:

$$x_{ijk} \qquad \forall i \in T, \quad j \in P, \quad k \in H$$

Tal que $x_{ijk} = 1$ caso o professor j tenha aula na turma i no período k, e $x_{ijk} = 0$ caso contrário.

Temos as seguintes restrições definidas pelas equações e inequações abaixo:

1. Garante o número de aulas correto entre o professor j e a turma i;
   $$\sum_{k=1}^{|H|} x_{ijk} = r_{ij} \qquad \forall i \in T, \;\; j \in P$$
2. Garante que não exista sobreposição de turmas;
   $$\sum_{j=1}^{|P|} x_{ijk} \leqslant 1 \qquad \forall i \in T, \;\; k \in H$$
3. Garante que não ocorra sobreposição de professores.
   $$\sum_{i=1}^{|T|} x_{ijk} \leqslant 1 \qquad \forall j \in P, \;\; k \in H$$

Enquanto que no trabalho proposto por Junginger (1986) são abordados restrições que no trabalho de Werra não traz. São elas:

1. Garante que uma turma não terá uma aula em um horário não disponível;
   $$\sum_{j=1}^{|P|} x_{ijk} \leqslant dt_{ik} \qquad \forall i \in T, \;\; k \in H$$
   Nesta formulação $dt_{ik} = 1$ caso a turma i esteja disponível no horário k, ou $dt_{ik} = 0$ caso contrário.
2. Garante que um professor não será alocado em um horário não disponível;
   $$\sum_{i=1}^{|T|} x_{ijk} \leqslant dp_{jk} \qquad \forall j \in P, \;\; k \in H$$
   Nesta formulação $dp_{jk} = 1$ se o professor j esteja disponível no horário k, ou $dp_{jk} = 0$ caso contrário.

3. Garante uma pré-alocação será respeitada.

   $x_{ijk} \geqslant A_{ijk} \qquad \forall i \in T, \;\; j \in P, \;\; k \in H$

   Nesta formulação $A_{ijk} = 1$ caso exista uma pré-alocação professor j deve lecionar na turma i no período k, ou $A_{ijk} = 0$ caso contrário.

A solução será:

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in T, \quad j \in P, \quad k \in H$$

Tal que $x_{ijk} = 1$ caso o professor j tenha aula na turma i no período k, e $x_{ijk} = 0$ caso contrário.

Nos modelos apresentados acima, o objetivo era apenas determinar uma solução viável (problema de viabilidade), porém na maioria dos problemas a necessidade é achar um boa solução, ou seja, otimizar uma função objetivo. Junginger [23] propôs uma função, descrita abaixo, como objetivo de transformar o problema de viabilidade em um problema de otimização.

$$min \sum_{i=1}^{|T|} \sum_{j=1}^{|P|} \sum_{k=1}^{|H|} x_{ijk} d_{ijk}$$

Esta função objetivo atua como um mecanismo de penalização, onde d_{ijk} é um valor associado a satisfabilidade de o professor j ser alocado à turma i no horário k.

Capítulo 3

Problema do Quadro de Horário para a Escola CEPAOF

Neste capítulo será apresentado a formulação do problema, com as respectivas restrições trabalhadas, a descrição da escola com suas características e por fim é apresentado o algoritmo proposto para a resolução do problema.

3.1 Formulação do Problema

Após a organização dos dados da escola em questão e do levantamento das restrições fortes e fracas que permeiam o problema de elaborar um quadro de horário escolar, modelamos o problema através de um grafo conexo, relacionando as disciplinas da grade curricular com os horários e os dias da semana, que está representado no grafo geral na Figura 3.1.

No grafo, temos um vértice de saída s e um vértice de chegada t. A primeira coluna de vértices são de todas as disciplinas ofertadas na escola, a segunda coluna é referente aos dias da semana e a terceira coluna é referente aos horários de aula para o turno vespertino.

O valor da aresta respectiva a $(s, c_i m_j)$ será o valor da carga horária da disciplina dada pela matriz de carga horária, que irá variar de 1 a 4. O valor da aresta $(c_i m_j, d_k)$ será no máximo 2, que representa a quantidade máxima de aula por dia. E o valor da aresta (d_k, h_k) será sempre 1, representando a hora aula e a somatória dos valores de todas essas arestas será 25, que corresponde ao número total de aulas por semana de cada turma.

Para uma turma i qualquer, utilizaremos os vértices referentes apenas as disciplinas que pertencem a sua matriz curricular, assim faremos uma remoção de alguns vértices.

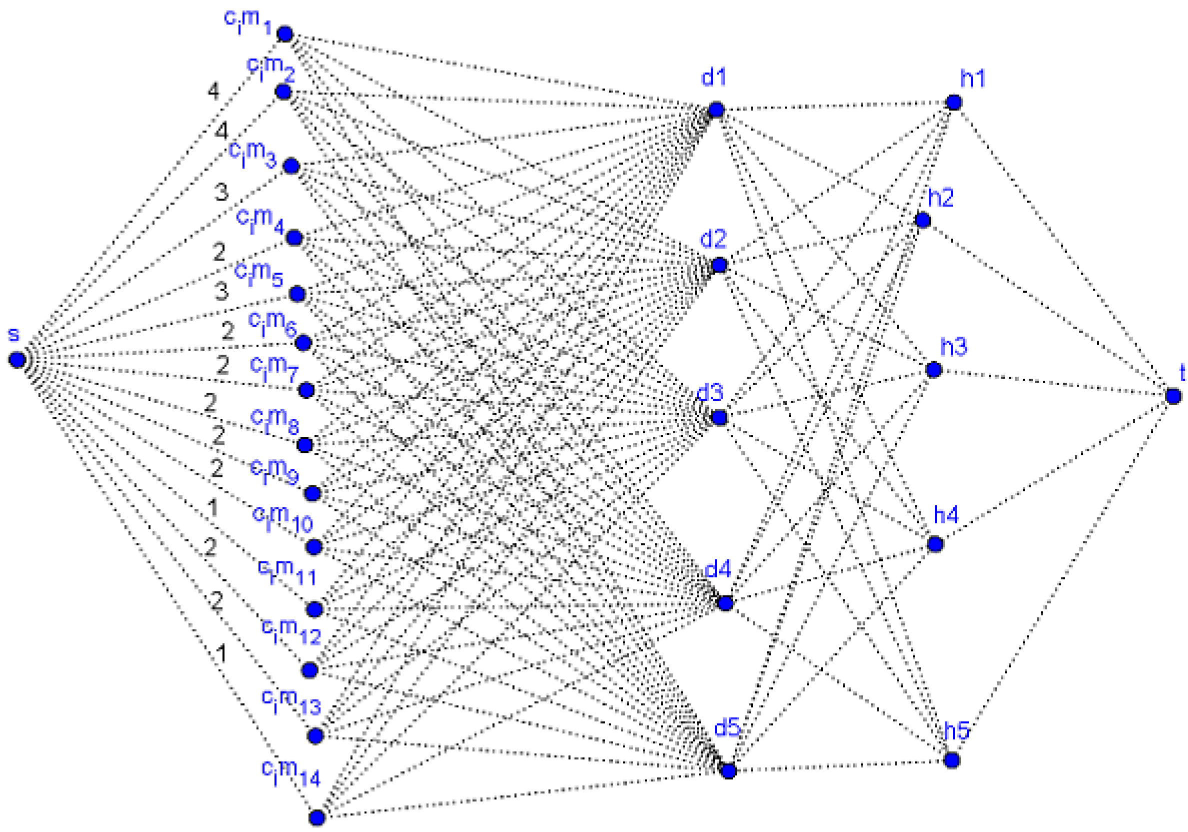

Figura 3.1: Grafo Geral

Para esta formulação descreveremos a seguir, como foi adaptado as nomenclaturas e os conjuntos em questão:

- $C = \{c_i\}$, com $i = 1, ..., 4$, um conjunto de turmas;
  - 6º ano - c_1
  - 7º ano - c_2
  - 8º ano - c_3
  - 9º ano -c_4
- $M = \{m_j\}$, com $j = 1, ..., 14$, um conjunto de disciplinas;
  - Português - m_1
  - Matemática - m_2
  - Ciências - m_3
  - Geografia -m_4
  - História - m_5
  - Artes - m_6

- Língua Estrangeira - m_7
- Educação Física -m_8
- Religião - m_9
- Cidadania - m_{10}
- Geometria - m_{11}
- Meio Ambiente - m_{12}
- Identidade e Cultura - m_{13}
- Redação - m_{14}

- $H = \{h_k\}$, com $1 \leqslant k \leqslant 5$, um conjunto de horários semanais;
  - 1º Horário - h_1
    (13:20 as 14:00)
  - 2º Horário - h_2
    (14:00 as 14:40)
  - 3º Horário - h_3
    (14:40 as 15:20)
  - 4º Horário - h_4
    (15:40 as 16:20)
  - 5º Horário - h_5
    (16:20 as 17:00)

- $D = \{d_k\}$, com $1 \leqslant k \leqslant 5$, um conjunto de dias da semana;
  - Segunda-Feira - d_1
  - Terça-Feira - d_2
  - Quarta-Feira - d_3
  - Quinta-feira - d_4
  - Sexta-feira - d_5

- $B = (b_{h_k,d_k})$, uma matriz da grade de horário. Esta matriz representa uma solução para o problema após os passos do algoritmo. A matriz B é quadrada de ordem 5.

$$B = \begin{pmatrix} b_{h_1,d_1} & b_{h_1,d_2} & b_{h_1,d_3} & b_{h_1,d_4} & b_{h_1,d_5} \\ b_{h_2,d_1} & b_{h_2,d_2} & b_{h_2,d_3} & b_{h_2,d_4} & b_{h_2,d_5} \\ b_{h_3,d_1} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & b_{h_3,d_4} & b_{h_3,d_5} \\ b_{h_4,d_1} & b_{h_4,d_2} & b_{h_4,d_3} & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ b_{h_5,d_1} & b_{h_5,d_2} & b_{h_5,d_3} & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

- $A_{jXk} = (a_{m_j,d_k})$, uma matriz que representa a disponibilidade dos professores por turma. Nesta matriz apresentamos todas as disciplinas (m_j) e seus respectivos dias (d_k) disponíveis para alocação de aula dada por cada professor.

  A leitura é feita da seguinte forma:

  0 - Corresponde a Atividade Complementar (A.C.), dia em que o professor não pode ter aula, pois nesse dia acontece uma reunião com a coordenação;
  1 - Corresponde a um dia de folga escolhido pelo professor;
  2 - Dia disponível para alocar aula;
  3 - Disciplina não pertence a grade curricular da turma.

Turma 6º ano - c_1

$$A_{j_X k} = \begin{pmatrix} a_{m_1,d_1} & a_{m_1,d_2} & a_{m_1,d_3} & a_{m_1,d_4} & a_{m_1,d_5} \\ a_{m_2,d_1} & a_{m_2,d_2} & a_{m_2,d_3} & a_{m_2,d_4} & a_{m_2,d_5} \\ a_{m_{11},d_1} & a_{m_{11},d_2} & a_{m_{11},d_3} & a_{m_{11},d_4} & a_{m_{11},d_5} \\ a_{m_3,d_1} & a_{m_3,d_2} & a_{m_3,d_3} & a_{m_3,d_4} & a_{m_3,d_5} \\ a_{m_5,d_1} & a_{m_5,d_2} & a_{m_5,d_3} & a_{m_5,d_4} & a_{m_5,d_5} \\ a_{m_4,d_1} & a_{m_4,d_2} & a_{m_4,d_3} & a_{m_4,d_4} & a_{m_4,d_5} \\ a_{m_7,d_1} & a_{m_7,d_2} & a_{m_7,d_3} & a_{m_7,d_4} & a_{m_7,d_5} \\ a_{m_6,d_1} & a_{m_6,d_2} & a_{m_6,d_3} & a_{m_6,d_4} & a_{m_6,d_5} \\ a_{m_{12},d_1} & a_{m_{12},d_2} & a_{m_{12},d_3} & a_{m_{12},d_4} & a_{m_{12},d_5} \\ a_{m_8,d_1} & a_{m_8,d_2} & a_{m_8,d_3} & a_{m_8,d_4} & a_{m_8,d_5} \\ a_{m_{13},d_1} & a_{m_{13},d_2} & a_{m_{13},d_3} & a_{m_{13},d_4} & a_{m_{13},d_5} \\ a_{m_{10},d_1} & a_{m_{10},d_2} & a_{m_{10},d_3} & a_{m_{10},d_4} & a_{m_{10},d_5} \\ a_{m_9,d_1} & a_{m_9,d_2} & a_{m_9,d_3} & a_{m_9,d_4} & a_{m_9,d_5} \\ a_{m_{14},d_1} & a_{m_{14},d_2} & a_{m_{14},d_3} & a_{m_{14},d_4} & a_{m_{14},d_5} \end{pmatrix}_{14\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{14\times 5}$$

Turma 7º ano - c_2

$$A_{j_X k} = \begin{pmatrix} a_{m_1,d_1} & a_{m_1,d_2} & a_{m_1,d_3} & a_{m_1,d_4} & a_{m_1,d_5} \\ a_{m_2,d_1} & a_{m_2,d_2} & a_{m_2,d_3} & a_{m_2,d_4} & a_{m_2,d_5} \\ a_{m_{11},d_1} & a_{m_{11},d_2} & a_{m_{11},d_3} & a_{m_{11},d_4} & a_{m_{11},d_5} \\ a_{m_3,d_1} & a_{m_3,d_2} & a_{m_3,d_3} & a_{m_3,d_4} & a_{m_3,d_5} \\ a_{m_5,d_1} & a_{m_5,d_2} & a_{m_5,d_3} & a_{m_5,d_4} & a_{m_5,d_5} \\ a_{m_4,d_1} & a_{m_4,d_2} & a_{m_4,d_3} & a_{m_4,d_4} & a_{m_4,d_5} \\ a_{m_7,d_1} & a_{m_7,d_2} & a_{m_7,d_3} & a_{m_7,d_4} & a_{m_7,d_5} \\ a_{m_6,d_1} & a_{m_6,d_2} & a_{m_6,d_3} & a_{m_6,d_4} & a_{m_6,d_5} \\ a_{m_{13},d_1} & a_{m_{13},d_2} & a_{m_{13},d_3} & a_{m_{13},d_4} & a_{m_{13},d_5} \\ a_{m_8,d_1} & a_{m_8,d_2} & a_{m_8,d_3} & a_{m_8,d_4} & a_{m_8,d_5} \\ a_{m_{12},d_1} & a_{m_{12},d_2} & a_{m_{12},d_3} & a_{m_{12},d_4} & a_{m_{12},d_5} \\ a_{m_{10},d_1} & a_{m_{10},d_2} & a_{m_{10},d_3} & a_{m_{10},d_4} & a_{m_{10},d_5} \\ a_{m_9,d_1} & a_{m_9,d_2} & a_{m_9,d_3} & a_{m_9,d_4} & a_{m_9,d_5} \\ a_{m_{14},d_1} & a_{m_{14},d_2} & a_{m_{14},d_3} & a_{m_{14},d_4} & a_{m_{14},d_5} \end{pmatrix}_{14\times 5} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{14\times 5}$$

Turma 8º ano - c_3

$$A_{j_X k} = \begin{pmatrix} a_{m_1,d_1} & a_{m_1,d_2} & a_{m_1,d_3} & a_{m_1,d_4} & a_{m_1,d_5} \\ a_{m_2,d_1} & a_{m_2,d_2} & a_{m_2,d_3} & a_{m_2,d_4} & a_{m_2,d_5} \\ a_{m_{14},d_1} & a_{m_{14},d_2} & a_{m_{14},d_3} & a_{m_{14},d_4} & a_{m_{14},d_5} \\ a_{m_3,d_1} & a_{m_3,d_2} & a_{m_3,d_3} & a_{m_3,d_4} & a_{m_3,d_5} \\ a_{m_5,d_1} & a_{m_5,d_2} & a_{m_5,d_3} & a_{m_5,d_4} & a_{m_5,d_5} \\ a_{m_4,d_1} & a_{m_4,d_2} & a_{m_4,d_3} & a_{m_4,d_4} & a_{m_4,d_5} \\ a_{m_7,d_1} & a_{m_7,d_2} & a_{m_7,d_3} & a_{m_7,d_4} & a_{m_7,d_5} \\ a_{m_6,d_1} & a_{m_6,d_2} & a_{m_6,d_3} & a_{m_6,d_4} & a_{m_6,d_5} \\ a_{m_{10},d_1} & a_{m_{10},d_2} & a_{m_{10},d_3} & a_{m_{10},d_4} & a_{m_{10},d_5} \\ a_{m_8,d_1} & a_{m_8,d_2} & a_{m_8,d_3} & a_{m_8,d_4} & a_{m_8,d_5} \\ a_{m_{12},d_1} & a_{m_{12},d_2} & a_{m_{12},d_3} & a_{m_{12},d_4} & a_{m_{12},d_5} \\ a_{m_{13},d_1} & a_{m_{13},d_2} & a_{m_{13},d_3} & a_{m_{13},d_4} & a_{m_{13},d_5} \\ a_{m_9,d_1} & a_{m_9,d_2} & a_{m_9,d_3} & a_{m_9,d_4} & a_{m_9,d_5} \\ a_{m_{11},d_1} & a_{m_{11},d_2} & a_{m_{11},d_3} & a_{m_{11},d_4} & a_{m_{11},d_5} \end{pmatrix}_{14\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{14\times 5}$$

Turma 9º ano - c_4

$$A_{j_X k} = \begin{pmatrix} a_{m_1,d_1} & a_{m_1,d_2} & a_{m_1,d_3} & a_{m_1,d_4} & a_{m_1,d_5} \\ a_{m_2,d_1} & a_{m_2,d_2} & a_{m_2,d_3} & a_{m_2,d_4} & a_{m_2,d_5} \\ a_{m_9,d_1} & a_{m_9,d_2} & a_{m_9,d_3} & a_{m_9,d_4} & a_{m_9,d_5} \\ a_{m_3,d_1} & a_{m_3,d_2} & a_{m_3,d_3} & a_{m_3,d_4} & a_{m_3,d_5} \\ a_{m_5,d_1} & a_{m_5,d_2} & a_{m_5,d_3} & a_{m_5,d_4} & a_{m_5,d_5} \\ a_{m_4,d_1} & a_{m_4,d_2} & a_{m_4,d_3} & a_{m_4,d_4} & a_{m_4,d_5} \\ a_{m_7,d_1} & a_{m_7,d_2} & a_{m_7,d_3} & a_{m_7,d_4} & a_{m_7,d_5} \\ a_{m_6,d_1} & a_{m_6,d_2} & a_{m_6,d_3} & a_{m_6,d_4} & a_{m_6,d_5} \\ a_{m_{14},d_1} & a_{m_{14},d_2} & a_{m_{14},d_3} & a_{m_{14},d_4} & a_{m_{14},d_5} \\ a_{m_8,d_1} & a_{m_8,d_2} & a_{m_8,d_3} & a_{m_8,d_4} & a_{m_8,d_5} \\ a_{m_{12},d_1} & a_{m_{12},d_2} & a_{m_{12},d_3} & a_{m_{12},d_4} & a_{m_{12},d_5} \\ a_{m_{13},d_1} & a_{m_{13},d_2} & a_{m_{13},d_3} & a_{m_{13},d_4} & a_{m_{13},d_5} \\ a_{m_{10},d_1} & a_{m_{10},d_2} & a_{m_{10},d_3} & a_{m_{10},d_4} & a_{m_{10},d_5} \\ a_{m_{11},d_1} & a_{m_{11},d_2} & a_{m_{11},d_3} & a_{m_{11},d_4} & a_{m_{11},d_5} \end{pmatrix}_{14\times 5} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}_{14\times 5}$$

- $C_{jX1} = (c_{m_j})$, uma matriz coluna da carga horária das disciplinas. Esta matriz apresenta o número de aulas semanais de cada disciplina em cada turma.

Turma 6^o ano - c_1

$$C_{jX1} = \begin{pmatrix} c_{m_1,} \\ c_{m_2} \\ c_{m_{11}} \\ c_{m_3} \\ c_{m_5} \\ c_{m_4} \\ c_{m_7} \\ c_{m_6} \\ c_{m_{12}} \\ c_{m_8} \\ c_{m_{13}} \\ c_{m_{10}} \\ c_{m_9} \\ c_{m_{14}} \end{pmatrix}_{14\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{14\times 1}$$

Turma 7^o ano - c_2

$$C_{jX1} = \begin{pmatrix} c_{m_1} \\ c_{m_2} \\ c_{m_{11}} \\ c_{m_3} \\ c_{m_5} \\ c_{m_4} \\ c_{m_7} \\ c_{m_6} \\ c_{m_{13}} \\ c_{m_8} \\ c_{m_{12}} \\ c_{m_{10}} \\ c_{m_9} \\ c_{m_{14}} \end{pmatrix}_{14\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{14\times 1}$$

Turma 8º ano - c_3

$$C_{jX1} = \begin{pmatrix} c_{m_1} \\ c_{m_2} \\ c_{m_{14}} \\ c_{m_3} \\ c_{m_5} \\ c_{m_4} \\ c_{m_7} \\ c_{m_6} \\ c_{m_{10}} \\ c_{m_8} \\ c_{m_{12}} \\ c_{m_{13}} \\ c_{m_9} \\ c_{m_{11}} \end{pmatrix}_{14\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{14\times 1}$$

Turma 9º ano - c_4

$$C_{jX1} = \begin{pmatrix} c_{m_1} \\ c_{m_2} \\ c_{m_9} \\ c_{m_3} \\ c_{m_5} \\ c_{m_4} \\ c_{m_7} \\ c_{m_6} \\ c_{m_{14}} \\ c_{m_8} \\ c_{m_{12}} \\ c_{m_{13}} \\ c_{m_{10}} \\ c_{m_{11}} \end{pmatrix}_{14\times 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{14\times 1}$$

3.2 Restrições do Problema

Geralmente as instituições de ensino possuem características que as diferem umas das outras. Isso se deve ao fato de que, dependendo da região (País, Estado ou Município) na qual elas se encontram, elas possuem diferentes aspectos organizacionais, como alocação de salas; pedagógicos, como duração das aulas e intervalos entre as mesmas; e pessoais, como atender as preferências e necessidades dos membros do corpo docente. Por possuírem um único conjunto de regras, as ferramentas de montagem de horário escolar tornam-se inviáveis para serem utilizadas em um amplo grupo de instituições. Assim elas são desenvolvidas para se adequar as necessidades específicas da instituição que a utiliza, ou seja, de acordo com o contexto. Abaixo serão descritas os requerimentos/restrições que serão utilizados nesse trabalho e deverão ser satisfeitas.

Restrições Fortes do Problema de Alocação de Horário

1. *Sobreposição de Professores:*
   Nenhuma turma pode assistir a duas disciplinas diferentes ao mesmo tempo;

2. *Sobreposição de Turmas:*
   Nenhum professor pode lecionar em duas turmas diferentes ao mesmo tempo;

3. *Número máximo de aulas diárias por turma:*
   O número de encontros diários de uma disciplina numa classe não pode ultrapassar duas aulas;

4. *Indisponibilidade:*
   A seleção do horário das disciplinas é baseado dentre os dias disponíveis e vagas disponíveis naquele determinado dia, alocando sempre nos primeiros horários disponíveis;

5. *Ordenamento da Alocação:*
   Alocar as disciplinas na ordem da matriz de disponibilidade;

6. *Número de aulas Geminadas:*
   Alocar as disciplinas com maior número de aulas geminadas sem a quebra do intervalo;

7. *Distribuição da Carga Horária:*

   - Disciplinas com carga horária de 4 horas-aula semanais, deve-se alocar sempre na configuração 2-2 em dias diferentes, isto é duas aulas geminadas, mas não alocar no terceiro e quarto horário;
   - Disciplinas com carga horária de 1 hora-aula por semana, enquanto tiver terceiro horário disponível alocar, senão em qualquer outro horário disponível;
   - Disciplinas com carga horária de 3 horas-aula por semana, alocar na seguinte configuração 2-1, ou seja, duas aulas geminada, ministradas em horários consecutivos primeiro duas aulas juntas, exceto no terceiro e quarto horário e uma aula no terceiro horário se disponível em algum dia da semana, senão em qualquer horário;

- Disciplinas com carga horária de 2 horas-aula por semana alocar em dois horários disponíveis geminados, caso não tenha, alocar na configuração 1-1 em dias diferentes.

Restrições Fracas

1. Maior número possível de aulas geminadas;
2. Mínimo de aulas geminadas separadas por intervalo ou por qualquer outra disciplina.

3.3 Centro Educacional Professor Áureo de Oliveira Filho

Situada no município de Anguera, Bahia, a escola Centro Educacional Professor Áureo de Oliveira Filho, conhecida também como **CEPAOF** foi a instituição escolhida para a análise. Trata-se de uma típica escola pública de primeiro grau brasileira que possuía no ano de 2016 um número total de 23 professores entre efetivos e contratados e 11 turmas distribuídas em dois turnos, matutino e vespertino, perfazendo um total de aproximadamente 200 alunos matriculados, sendo considerada uma escola de médio porte para o município. Havia professores que lecionavam em mais de um turno, porém todas as turmas possuem suas aulas em um único turno e em uma única sala. Desta forma, estas salas são pré-determinadas no início de cada ano pelos Gestores e, portanto, a associação turma-sala não precisa ser considerada neste problema de alocação de aulas.

As turmas tem cinco aulas por dia, de segunda-feira a sexta-feira, somando um total de 25 aulas por semana, tanto para o turno matutino como para o vespertino, sendo que as aulas para cada turma são ministradas em um mesmo turno. E para cada classe ou turma, há um professor e uma carga horária semanal para cada disciplina.

O que nos interessa neste problema é a ordem de agendamento das aulas, pois todas possuem um mesmo tempo de duração e a unidade de tempo de uma aula será chamada de horário de aula que corresponde a 40 minutos, no qual entre o terceiro e quarto horário há um intervalo de 20 minutos.

Essa escola possui turmas do 2º Ciclo do Ensino Fundamental (do sexto ao nono ano). O agendamento é feito anualmente, no início de cada ano letivo, após feito o levantamento das disponibilidades dos professores, no período de planejamento chamado jornada pedagógica. Ficando incumbido de montar um quadro de horário os gestores e coordenadores da escola, o que é uma tarefa difícil e requer muita experiência. Em geral, a grade de horário leva semanas para ficar pronta e sempre possui problemas. Na tabela 2.1 abaixo, resume-se os dados levantados na pesquisa.

As cargas horárias dos professores são distribuídas entre esses turnos, sendo que o mínimo de aulas que um professor deve ter é de 13 horas/aula. Para esse regime de trabalho cada professor deve lecionar matérias de sua competência, caso não consiga atingir o limite

	Turmas	Aulas/dia
Turno Matutino	7	5
Turno Vepertino	4	5
Número de dias de aula por semana: 5		
Número de Professores nos dois turnos: 23		
Número de alunos matriculados aproximadamente nos dois turnos: 200		

Tabela 3.1: Características do CEPAOF

estipulado para o cargo, então, o professor deve completar sua carga horária contratual com outras matérias afins. Havendo assim um grande grupo de professores que lecionam apenas pelo turno da manhã, outro pequeno grupo de professores que lecionam apenas pela tarde e um outro grupo que leciona nos dois turnos, ou seja, sua carga horária é distribuída tanto no turno da manhã como no turno da tarde.

Neste trabalho nos concentramos apenas no turno vespertino, desta forma, as carga horária de alguns professores não irão ser cumpridas, devido o fato de não incluirmos no trabalho o turno matutino, pois aumentaria o número de turmas e restrições, tornando o trabalho mais complexo para se resolver por métodos heurísticos construtivos.

As disciplinas na instituição são distribuídas entre os professores, assim cada professor está ligado a uma ou mais disciplinas, no entanto, uma disciplina só está ligada a somente um professor. É importante frisar que disciplinas com o mesmo nome, mas de séries diferentes são consideradas distintas e podem ou não ter o mesmo professor. A disciplina de Língua Estrangeira tem subturma, são divididas em Inglês e Espanhol, mas não é mais uma variável do problema, pois é considerada como uma só disciplina na grade de horário, embora na prática existam dois professores em salas diferentes que dividem a turma.

Outro fator que aumenta a dificuldade em encontrar um horário viável e factível são as reuniões semanais entre professores e coordenadores, chamada de Atividade Complementar (A.C.). Os professores são “divididos”por área de conhecimento, sendo assim disciplinas como Português, Língua Estrangeira, Educação Física, Artes e Redação fazem parte da área de Linguagem, e sua respectiva reunião acontece nas quintas-feiras. As disciplinas de Matemática, Ciências, Geometria e Meio ambiente fazem parte da área de Exatas, e sua respectiva reunião acontece nas quartas-feiras. E por fim, as disciplinas de Geografia, História, Religião, Cidadania e Identidade e Cultura fazem parte da área de Humanas, e sua respectiva reunião acontece nas terças-feiras. Além disso, cada professor tem direito a um dia da semana da sua escolha para tirar uma folga, já que sua carga horária é de apenas 20 horas.

3.4 Algoritmo Proposto Para a Resolução do Problema

Primeiramente vamos definir algoritmo. De acordo com Cruz (1997), temos a seguinte definição:

Definição 3.1. Algoritmo é uma sequência finita de instruções bem definidas e não ambíguas, cada uma das quais devendo ser executadas mecânica ou eletronicamente em um intervalo de tempo finito e com uma quantidade de esforço finita.

Para solucionar o problema do quadro de horário da escola CEPAOF, foi implementado o seguinte algoritmo.

Entrada: Selecionar a turma c_i, com $1 \leqslant i \leqslant 4$, turmas descritas no Capítulo 3, seção 3.1.

A partir da escolha da turma, iremos consultar a matriz A_{jXk} de disponibilidade dos professores, que se encontra no Capítulo 3, seção 3.1:

- Se $a_{m_j,d_k} = 0$ é Atividade Complementar (A.C.), não pode alocar aula, para $1 \leqslant j \leqslant 14$ e $1 \leqslant k \leqslant 5$;
- Se $a_{m_j,d_k} = 1$ é folga, dia escolhido pelo professor para não ter aula, não pode alocar aula, para $1 \leqslant j \leqslant 14$ e $1 \leqslant k \leqslant 5$;
- Se $a_{m_j,d_k} = 2$, dia disponível para alocar aula, para $1 \leqslant j \leqslant 14$ e $1 \leqslant k \leqslant 5$;
- Se $a_{m_j,d_k} = 3$, disciplina não está na grade curricular da turma, portanto não pode alocar aula, para $1 \leqslant j \leqslant 14$ e $1 \leqslant k \leqslant 5$;

As disciplinas serão alocadas de acordo com a restrição sobre ordenamento citada no Capítulo 3, seção 3.2, item 5 que diz que serão alocadas as disciplinas na ordem da matriz A_{jXk} de disponibilidade dada no Capítulo 3, seção 3.1. No qual as disciplinas foram ordenadas de acordo com sua carga horária e pela prioridade em alocar.

(i) Iniciar com as disciplinas com carga horária de 4 aulas por semana, consultar matriz C_{jX1} da carga horária no Capítulo 3, seção 3.1, alocando de 2 em 2 aulas pelo método de seleção aleatório, em dias diferentes ($d_{k_1} \neq d_{k_2}$,com $k_1 \neq k_2$), não alocar nas posições b_{h_3,d_k} e b_{h_4,d_k} com $1 \leqslant k \leqslant 5$ da matriz B_{kXk} da grade de horário.

   a. Enquanto houver disciplina com carga horária de 4 aulas alocar.

   b. Se não, finaliza e vai para a próxima carga horária.

(ii) Alocar as disciplinas com carga horária de 1 aula por semana, consultar matriz C_{jX1} da carga horária no Capítulo 3, seção 3.1, alocando pelo método aleatório.

   a. Enquanto b_{h_3,d_k} estiver disponível alocar, com $1 \leqslant k \leqslant 5$ da matriz B_{kXk} da grade de horário.

b. Se não em qualquer outro horário b_{h_k,d_k}.

(iii) Alocar as disciplinas com carga horária de 3 aulas por semana, consultar matriz C_{jX1} da carga horária no Capítulo 3, seção 3.1, alocar 2 aulas geminadas pelo método de seleção aleatório, exceto nas posições b_{h_3,d_k} e b_{h_4,d_k} com $1 \leqslant k \leqslant 5$ da matriz B_{kXk} da grade de horário. E, por fim alocar 1 aula, pelo método aleatório.

a. Enquanto b_{h_3,d_k} estiver disponível alocar, com $1 \leqslant k \leqslant 5$ da matriz B_{kXk} da grade de horário.

b. Se não em qualquer outro horário b_{h_k,d_k}.

c. Enquanto houver disciplina com carga horária de 3 aulas alocar.

d. Se não, finaliza e vai para a próxima carga horária.

(iv) Alocar as disciplinas com carga horária de 2 aulas, consultar a matriz C_{jX1} da carga horária no Capítulo 3, seção 3.1.

a. Enquanto tiver 2 aulas geminadas em algum dia (d_k) alocar, pelo método de seleção aleatório. Evitando sempre que puder os horários nas posições b_{h_3,d_k} e b_{h_4,d_k}.

b. Se não, alocar de 1 em 1 em dias diferentes ($d_{k_1} \neq d_{k_2}$, com $k_1 \neq k_2$), pelo método de seleção aleatório.

Fim da alocação.

Caso ocorra alguma infactibilidade iniciar o algoritmo novamente até que se encontre um horário factível.

Capítulo 4

Resultados Utilizando o Algoritmo

Neste capítulo será apresentado os passos do algoritmo para encontrar uma solução para cada turma da escola CEPAOF do turno vespertino. Faremos também uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho com o horário real da escola do ano de 2016.

4.1 Aplicando o Algoritmo Para a Turma do 6º ano

Vamos aplicar os passos do algoritmo para construir a grade de horário para a turma do 6º ano e verificar sua eficiência e simplicidade na sua utilização. Os Grafos apresentados abaixo, após cada alocação, contém apenas os vértices das disciplinas referentes a grade curricular da turma em questão associados com seus respectivos dias de disponibilidade para aula retirados a partir da matriz $A_{j_X k}$ de disponibilidade no Capítulo 3, seção 3.1, sendo assim os grafos abaixo serão subgrafos do grafo geral da Figura 3.1.

Todas as alocações das aulas foram feitas de maneira aleatória, ou seja, todos os dias disponíveis para aula de cada disciplina tinham iguais probabilidades de ser escolhido, sendo essa sua principal vantagem, embora não garanta que irá ocorrer viabilidade no horário.

Entrada: Turma selecionada c_1

Aplicando o passo **(i)**, observando a ordem da matriz $A_{j_X k}$ de disponibilidade, vamos iniciar a alocação com a disciplina m_1. Sendo os dias disponíveis para aula segunda, quarta e sexta. Escolhendo de forma aleatória o dia. Teremos:

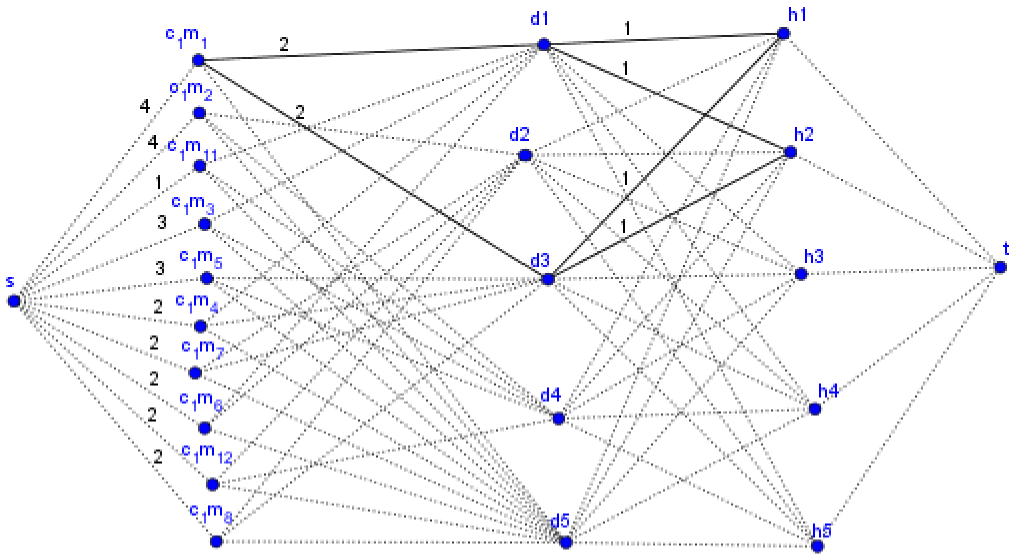

Figura 4.1: Grafo representado após alocação da disciplina m_1

Abaixo está a matriz da grade de horária que foi feita a partir do grafo.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & b_{h_1,d_2} & m_1 & b_{h_1,d_4} & b_{h_1,d_5} \\ m_1 & b_{h_2,d_2} & m_1 & b_{h_2,d_4} & b_{h_2,d_5} \\ b_{h_3,d_1} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & b_{h_3,d_4} & b_{h_3,d_5} \\ b_{h_4,d_1} & b_{h_4,d_2} & b_{h_4,d_3} & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ b_{h_5,d_1} & b_{h_5,d_2} & b_{h_5,d_3} & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Agora, de acordo com o algoritmo enquanto houver disciplina com carga horária de 4 aulas alocar, observando a matriz A_{jXk} de disponibilidade vamos alocar a disciplina m_2, sendo os dias disponíveis para aula terça, quinta e sexta. Escolhendo de forma aleatória os dias, teremos:

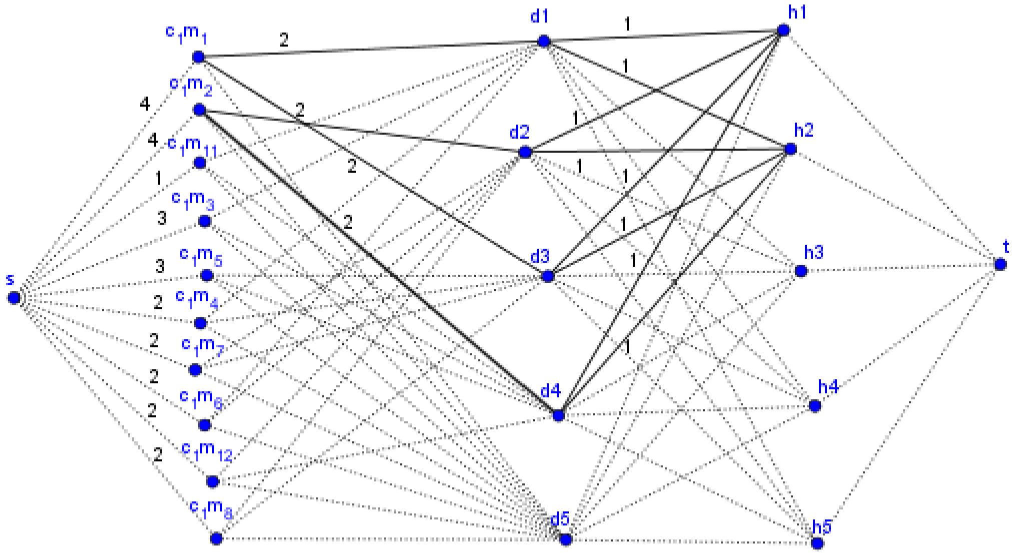

Figura 4.2: Grafo representado após alocação da disciplina m_2

Abaixo a matriz da grade de horário após a alocação.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_1,d_5} \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_2,d_5} \\ b_{h_3,d_1} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & b_{h_3,d_4} & b_{h_3,d_5} \\ b_{h_4,d_1} & b_{h_4,d_2} & b_{h_4,d_3} & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ b_{h_5,d_1} & b_{h_5,d_2} & b_{h_5,d_3} & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Como não tem mais disciplinas com carga horária de 4 aulas, finalizamos e vamos para a próxima carga horária.

Passo **(ii)** do algoritmo. Consultando matriz A_{jXk} de disponibilidade da turma, que se encontra no Capítulo 3, seção 3.1, iremos alocar agora a disciplina m_{11}. Observamos que os dias disponíveis para aula são segunda, quinta e sexta. Vamos colocar como preferência os horários h_3 do grafo para qualquer dia que estiver disponível, pois assim iremos garantir que as outras disciplinas com carga horária maior tenham mais chances de ficarem geminadas sem a quebra do intervalo. Escolhendo o dia de forma aleatória, teremos.

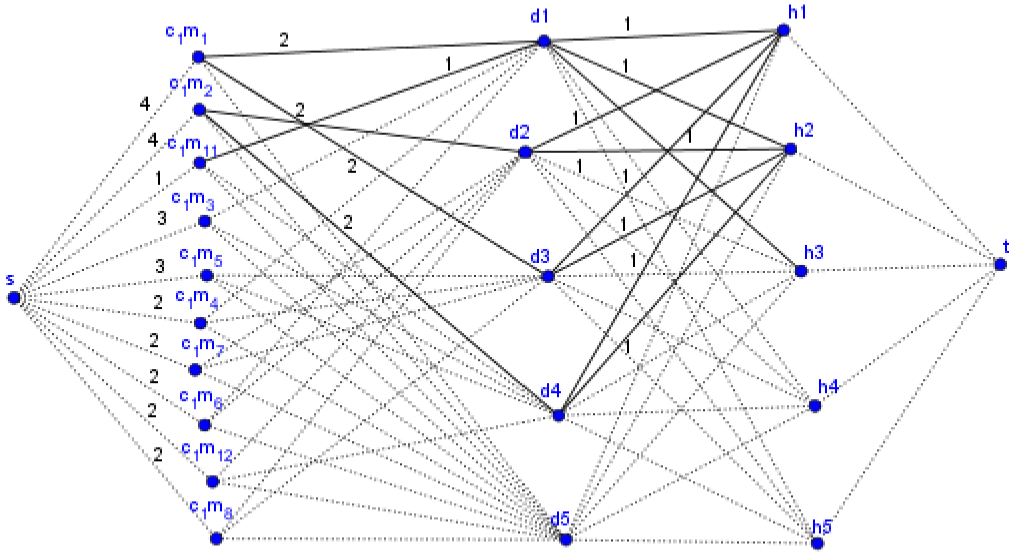

Figura 4.3: Grafo representado após alocação da disciplina m_{11}

Segue matriz da grade de horário abaixo.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_1,d_5} \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_2,d_5} \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & b_{h_3,d_4} & b_{h_3,d_5} \\ b_{h_4,d_1} & b_{h_4,d_2} & b_{h_4,d_3} & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ b_{h_5,d_1} & b_{h_5,d_2} & b_{h_5,d_3} & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Agora aplicando o passo **(iii)** do algoritmo, vamos alocar as disciplinas que tem carga horária de 3 aulas. Será alocada priorizando as duas aulas geminadas e a terceira aula se encaixando em algum terceiro horário disponível. Pela ordem da matriz A_{jXk} de disponibilidade, que se encontra no Capítulo 3, seção 3.1, temos primeiramente a disciplina m_3. Sua disponibilidade são para os seguintes dias segunda, quinta e sexta. De forma aleatória e excluindo os horários já ocupados pelas outras disciplinas de acordo com a Figura 4.3. Teremos:

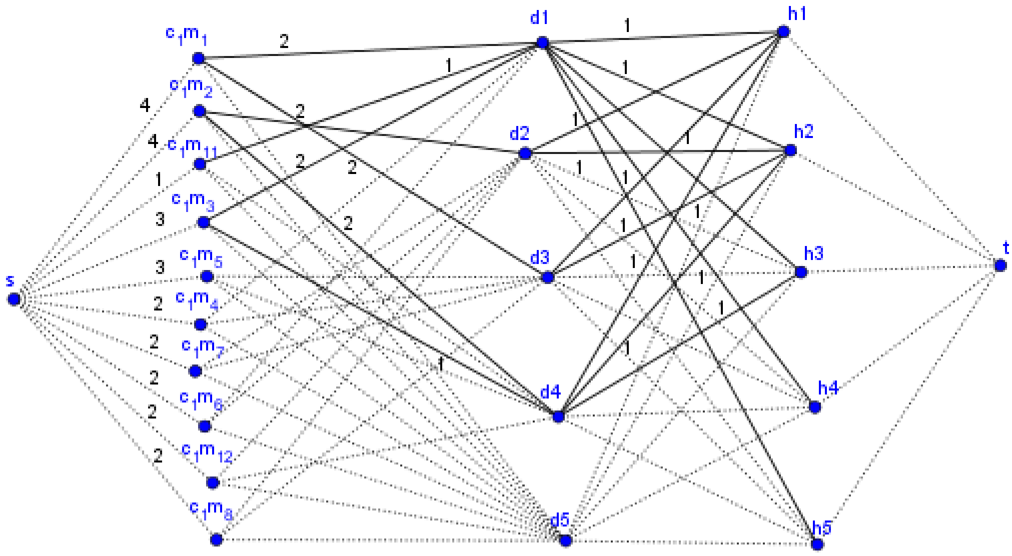

Figura 4.4: Grafo representado após alocação da disciplina m_3

Segue matriz da grade horária abaixo:

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_1,d_5} \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_2,d_5} \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & m_3 & b_{h_3,d_5} \\ m_3 & b_{h_4,d_2} & b_{h_4,d_3} & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ m_3 & b_{h_5,d_2} & b_{h_5,d_3} & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Agora, observando a matriz A_{jXk} de disponibilidade, que se encontra no Capítulo 3, seção 3.1, verificamos outra disciplina de carga horária de 3 aulas. A disciplina m_5, sendo os dias disponíveis para aula quarta, quinta e sexta. Como afirma o algoritmo não podemos alocar as aulas geminadas para os 3º e 4º horários (h_3) e (h_4), pois a aula seria quebrada pelo intervalo, além disso a terceira aula terá que ser alocada no 3º horário (h_3), enquanto estiver disponível. Escolhendo de forma aleatória, teremos:

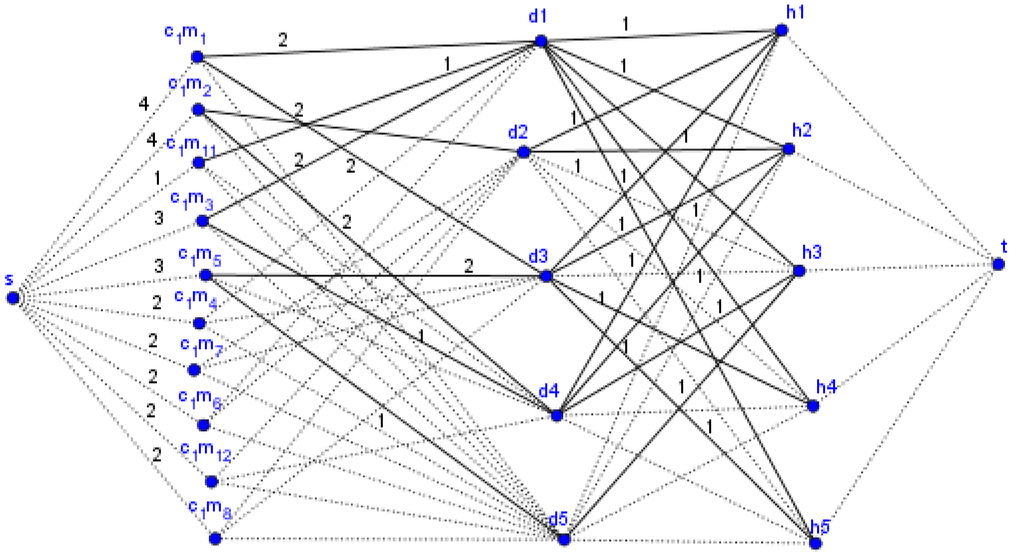

Figura 4.5: Grafo representado após alocação da disciplina m_5

Segue matriz da grade de horário após a alocação acima.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_1,d_5} \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & b_{h_2,d_5} \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & m_3 & m_5 \\ m_3 & b_{h_4,d_2} & m_5 & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ m_3 & b_{h_5,d_2} & m_5 & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Por fim, vamos aplicar o passo **(iv)** com as disciplinas de carga horária de duas aulas. Iniciando pela disciplina m_4, que tem disponibilidade nos dias de segunda, quarta e sexta. Como segunda já está completo e quarta não tem aulas geminadas, vamos alocar na sexta, escolhendo o horário de forma aleatória, teremos.

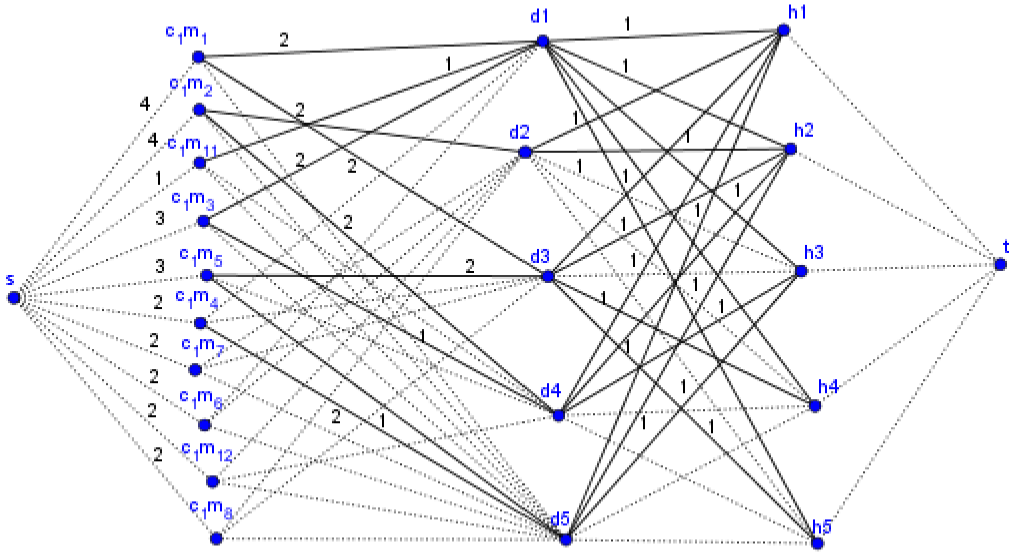

Figura 4.6: Grafo representado após alocação da disciplina m_4

Matriz representando o horário após a alocação da disciplina m_4.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & m_3 & m_5 \\ m_3 & b_{h_4,d_2} & m_5 & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ m_3 & b_{h_5,d_2} & m_5 & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Em seguida a disciplina, m_7, disponível nos dias de terça, quarta e sexta. Como a quarta tem apenas uma aula. De forma aleatória, podemos escolher a terça ou a sexta para alocar as aulas, assim teremos.

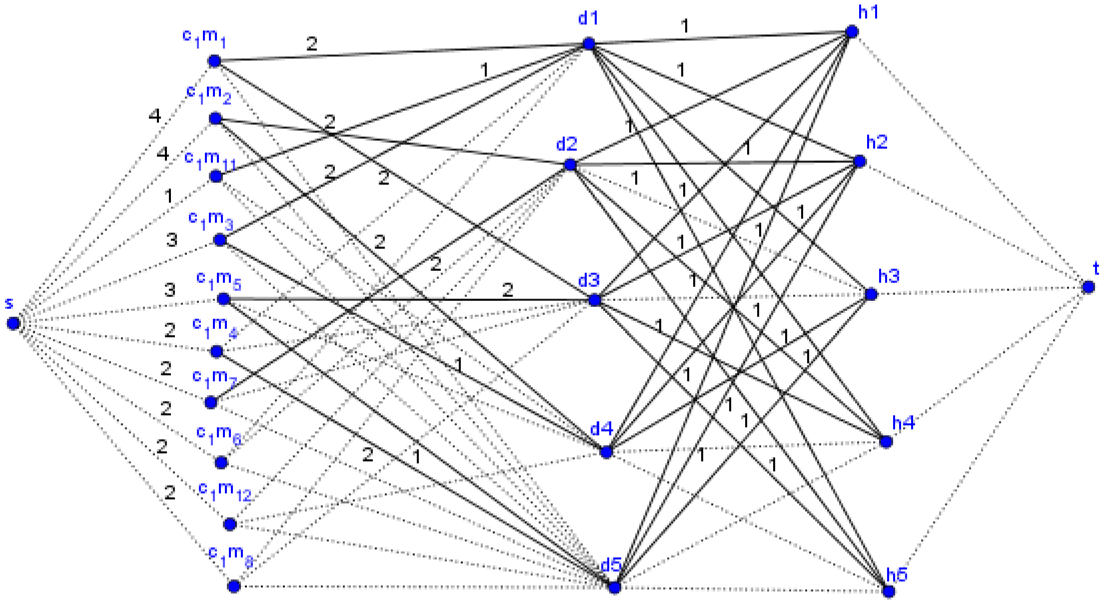

Figura 4.7: Grafo representado após alocação da disciplina m_7

Abaixo segue matriz da grade horária após a alocação da disciplina m_7.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & m_3 & m_5 \\ m_3 & m_7 & m_5 & b_{h_4,d_4} & b_{h_4,d_5} \\ m_3 & m_7 & m_5 & b_{h_5,d_4} & b_{h_5,d_5} \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Agora a disciplina m_6, disponível nos dias de segunda, terça e sexta. Como a segunda já está completa, o único dia com aula geminada disponível é a sexta feira. Assim, teremos.

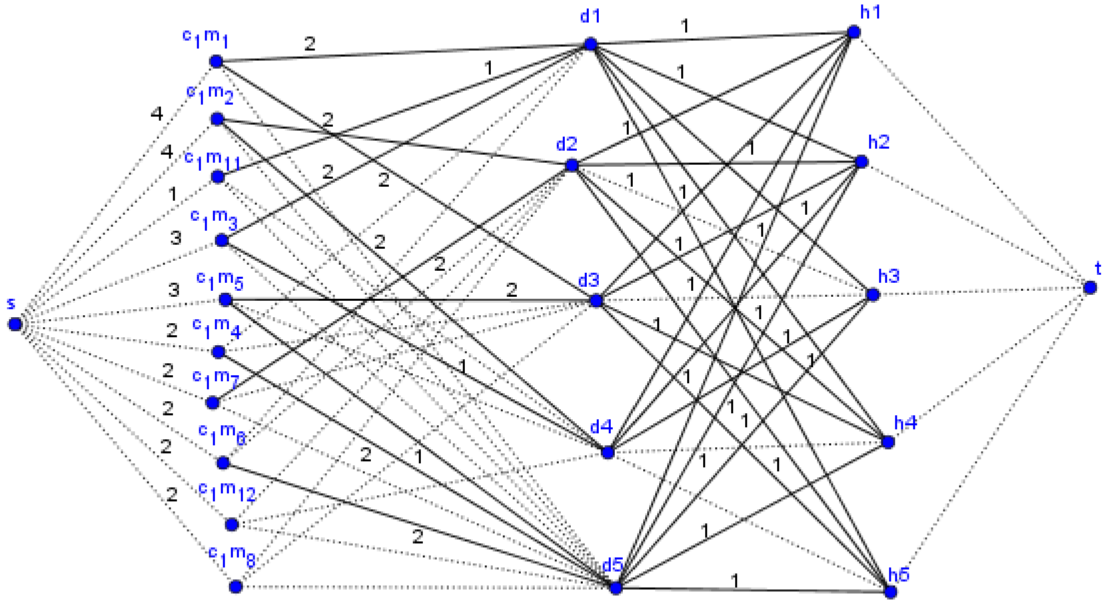

Figura 4.8: Grafo representado após alocação da disciplina m_6

Abaixo segue matriz da grade horária após a alocação da disciplina m_6.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & m_3 & m_5 \\ m_3 & m_7 & m_5 & b_{h_4,d_4} & m_6 \\ m_3 & m_7 & m_5 & b_{h_5,d_4} & m_6 \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

A disciplina m_{12}, disponível nos dias de terça, quinta e sexta. Pelo que temos na matriz anterior, temos os dois últimos horários na quinta. A terça feira, não tem aulas geminadas, já a sexta-feira está completa, logo vamos alocar na quinta-feira nos dois últimos horários. Então, teremos.

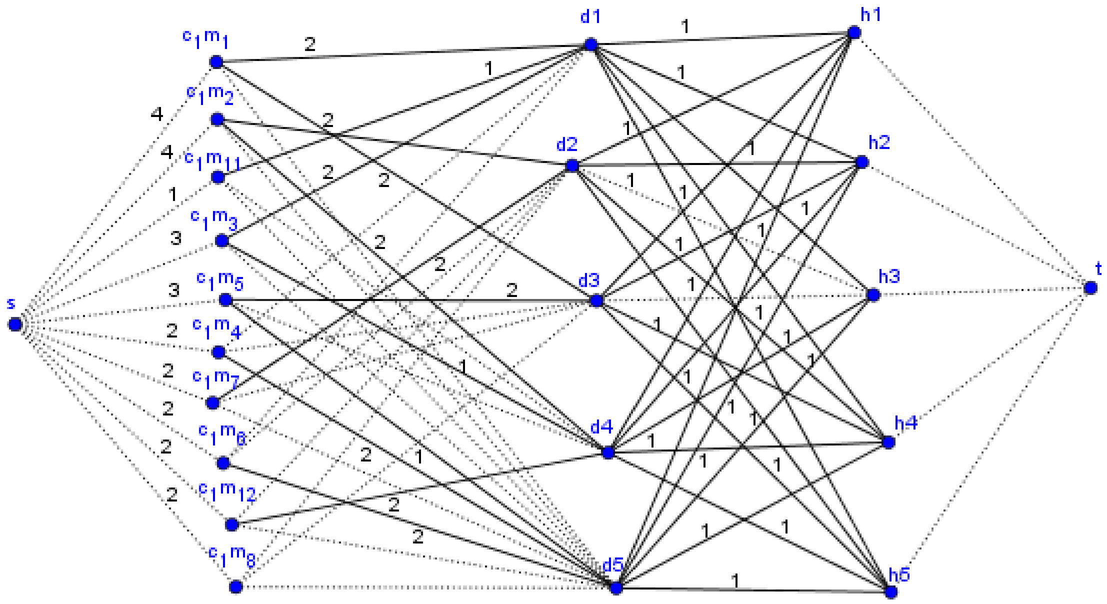

Figura 4.9: Grafo representado após alocação da disciplina m_{12}

Abaixo segue matriz da grade horária após a alocação da disciplina m_{12}.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_{11} & b_{h_3,d_2} & b_{h_3,d_3} & m_3 & m_5 \\ m_3 & m_7 & m_5 & m_{12} & m_6 \\ m_3 & m_7 & m_5 & m_{12} & m_6 \end{pmatrix}_{5\times5}$$

Agora para finalizar o algoritmo temos a disciplina m_8, disponível nos dias de terça, quarta e sexta. Como podemos observar a partir do grafo na Figura 4.9, sobrou somente o horário h_3 na terça e na quarta. Sendo assim, teremos.

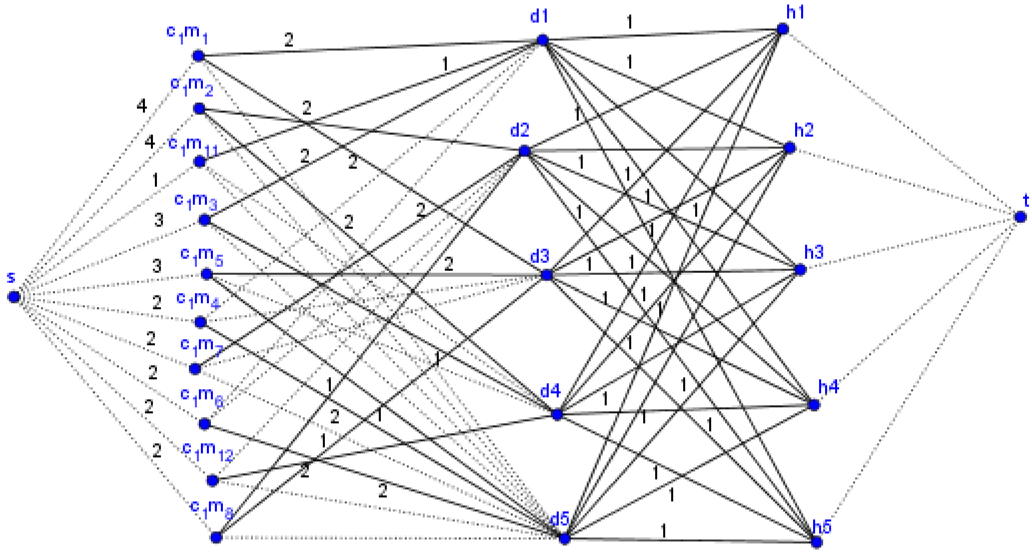

Figura 4.10: Grafo representado após alocação da disciplina m_8

Segue abaixo matriz da grade de horária finalizado, sem nenhum choque ou qualquer outro tipo de problema.

$$B = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_1 & m_2 & m_4 \\ m_{11} & m_8 & m_8 & m_3 & m_5 \\ m_3 & m_7 & m_5 & m_{12} & m_6 \\ m_3 & m_7 & m_5 & m_{12} & m_6 \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

A partir do grafo e da matriz B acima temos o horário da turma do 6º ano completamente alocado. Assim temos o seguinte quadro de horário.

Horários	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
13:20	Português	Matemática	Português	Matemática	Geografia
14:00	Português	Matemática	Português	Matemática	Geografia
14:40	Geometria	Ed. Física	Ed. Física	Ciências	História
15:40	Ciências	Língua Estrangeira	História	Meio Ambiente	Artes
16:20	Ciências	Língua Estrangeira	História	Meio Ambiente	Artes

Tabela 4.1: Grade de Horário da turma do 6º ano

4.2 Resultado do Quadro de Horário para a Turma do 7º ano

Utilizando o mesmo algoritmo e seguindo a rigor todos os passos. Vamos mostrar os resultados das alocações feitas para as outras turmas. Primeiramente para a turma do 7º ano.

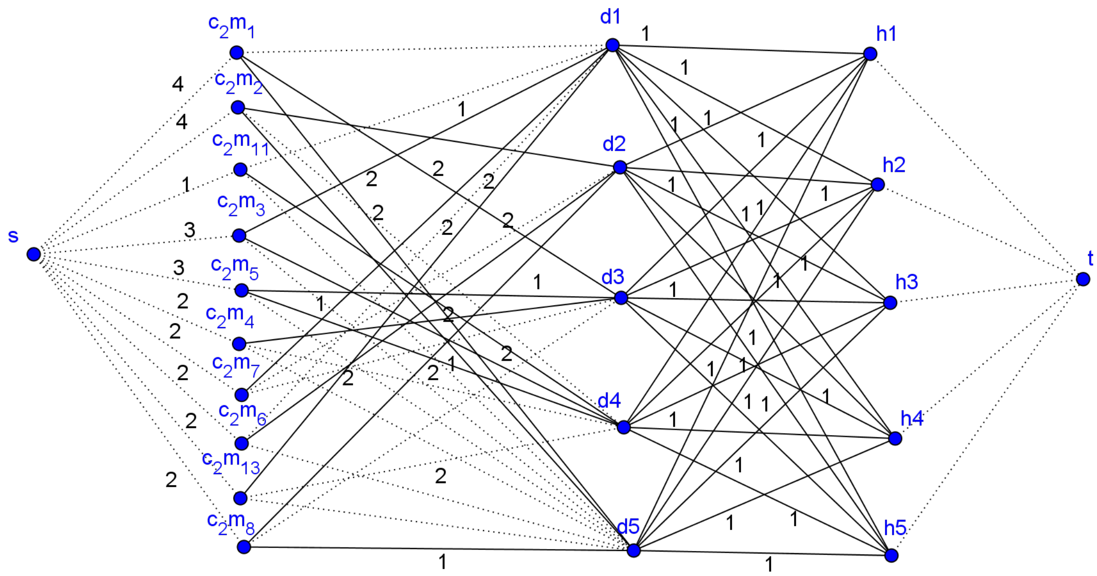

Figura 4.11: Grafo representado após alocação de todas as disciplinas para a turma c_2.

A partir da leitura do grafo acima, temos a matriz da grade de horária finalizado, sem nenhum choque ou qualquer outro tipo de problema.

$$B = \begin{pmatrix} m_{13} & m_2 & m_1 & m_3 & m_1 \\ m_{13} & m_2 & m_1 & m_3 & m_1 \\ m_3 & m_8 & m_5 & m_{11} & m_8 \\ m_7 & m_6 & m_4 & m_5 & m_2 \\ m_7 & m_6 & m_4 & m_5 & m_2 \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

Abaixo se encontra o quadro de horário respectivo ao grafo e a matriz de solução encontrado.

Horários	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
13:20	Identidade e Cultura	Matemática	Português	Ciências	Português
14:00	Identidade e Cultura	Matemática	Português	Ciências	Português
14:40	Ciências	Ed. Física	História	Geometria	Ed. Física
15:40	Língua Estrangeira	Artes	Geografia	História	Matemática
16:20	Língua Estrangeira	Artes	Geografia	História	Matemática

Tabela 4.2: Grade de Horário da turma do 7º ano

4.3 Resultado do Quadro de Horário para a Turma do 8º ano

Agora observamos os resultados para a turma do 8º ano.

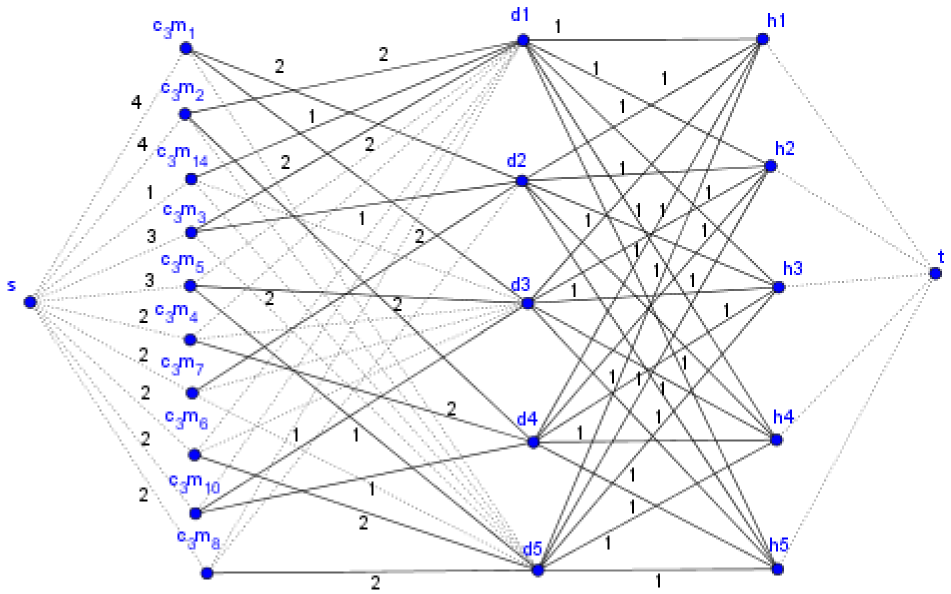

Figura 4.12: Grafo representado após alocação de todas as disciplinas para a turma c_3

Matriz da grade de horária finalizado, sem nenhum choque ou qualquer outro tipo de problema.

$$B = \begin{pmatrix} m_2 & m_1 & m_1 & m_2 & m_6 \\ m_2 & m_1 & m_1 & m_2 & m_6 \\ m_{14} & m_3 & m_{10} & m_{10} & m_5 \\ m_3 & m_7 & m_5 & m_4 & m_8 \\ m_3 & m_7 & m_5 & m_4 & m_8 \end{pmatrix}_{5\times 5}$$

A partir do grafo e da matriz acima temos o horário da turma do 8º ano completamente alocado. Assim temos o seguinte quadro de horário.

Horários	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
13:20	Matemática	Português	Português	Matemática	Artes
14:00	Matemática	Português	Português	Matemática	Artes
14:40	Redação	Ciências	Cidadania	Cidadania	História
15:40	Ciências	Língua Estrangeira	História	Geografia	Ed. Física
16:20	Ciências	Língua Estrangeira	História	Geografia	Ed. Físic

Tabela 4.3: Grade de Horário da turma do 8º ano

4.4 Resultado do Quadro de Horário para a Turma do 9º ano

E, por fim, abaixo está um exemplo de solução para o horário da turma do 9º ano.

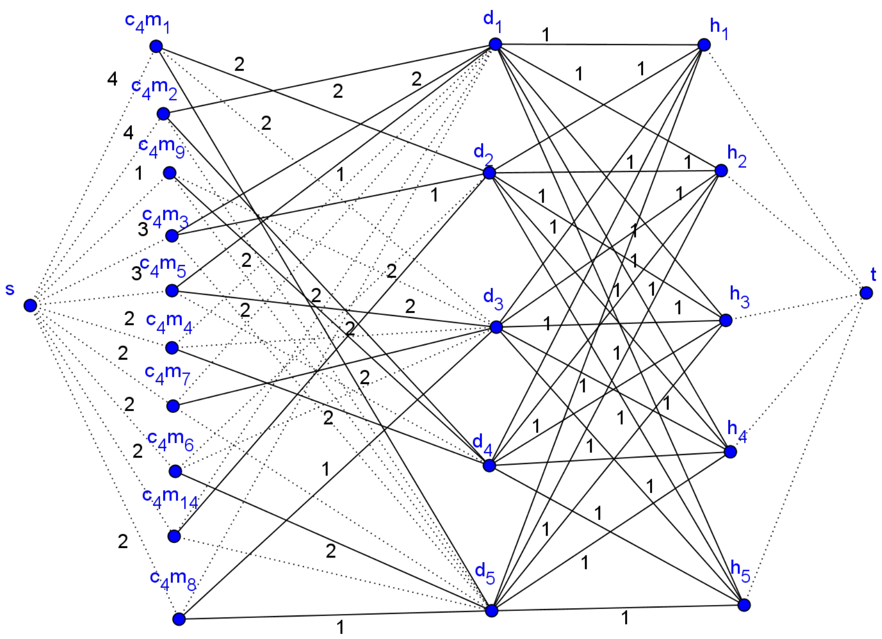

Figura 4.13: Grafo representado após alocação de todas as disciplinas para a turma c_4

Matriz da grade de horária finalizado, sem nenhum choque ou qualquer outro tipo de problema.

$$B = \begin{pmatrix} m_2 & m_1 & m_5 & m_2 & m_1 \\ m_2 & m_1 & m_5 & m_2 & m_1 \\ m_5 & m_3 & m_8 & m_9 & m_8 \\ m_3 & m_{14} & m_7 & m_4 & m_6 \\ m_3 & m_{14} & m_7 & m_4 & m_6 \end{pmatrix}_{5\times5}$$

A partir do grafo e da matriz acima temos o horário da turma do 9º ano completamente alocado. Assim temos o seguinte quadro de horário.

Horários	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta
13:20	Matemática	Português	História	Matemática	Português
14:00	Matemática	Português	História	Matemática	Português
14:40	História	Ciências	Ed. Física	Religião	Ed. Física
15:40	Ciências	Redação	Língua Estrangeira	Geografia	Artes
16:20	Ciências	Redação	Língua Estrangeira	Geografia	Artes

Tabela 4.4: Grade de Horário da turma do 9º ano

4.5 Comparando Resultados

A Figura 4.14 mostra a grade do horário real no turno vespertino no ano de 2016 da Escola CEPAOF. Foi feita uma análise da grade e nesta seção faremos uma comparação com os resultados encontrados na seção anterior. Como podemos observar temos alguns problemas no horário real que foram evitados na proposta de solução deste trabalho, são eles:

Na turma do 6º ano, os principais problemas que podemos observar são: a disciplina História com 3 aulas consecutivas em um mesmo dia, isso acarreta cansaço e um planejamento diferenciado ao professor e principalmente desmotivação, falta de concentração e falta de vontade pela aula, por parte dos alunos; temos a disciplina de Português que possui apenas 2 aulas geminadas e as outras duas separadas em dias diferentes o que pode acarretar prejuízo na sedimentação da aprendizagem, por ser uma disciplina muito importante na vida escolar do alunado; outro problema são as aulas de Ciências separadas pelo intervalo, não é interessante do ponto de vista pedagógico que aulas geminadas sejam separadas por intervalo, na prática o que vai acontecer é uma quebra do raciocínio por parte dos alunos e dificuldade do professor em continuar o conteúdo.

Na turma do 7º ano, os problemas na grade de horário são: as aulas da disciplina de Português separadas em 3 dias distintos, assim como na turma anterior, prejudica o ensino aprendizagem por parte dos alunos; outra questão é a disciplina de Matemática separada pelo intervalo, pois há uma quebra de raciocínio, ainda mais numa disciplina importante como essa em que manter a atenção dos alunos é indispensável.

Na turma do 8º ano ou 7ª série, acontecem os mesmo problemas citados acima nas disciplinas de Artes que tem suas aulas separadas pelo intervalo. E as disciplinas de Português e Matemática separadas em 3 dias distintos, sendo que o ideal é que as aulas aconteçam em 2 dias com aulas geminadas, como foi mostrado na solução da seção anterior.

Na turma do 9º ano ou 8ª série, além das disciplinas de Educação Física e Matemática separadas pelo intervalo, temos o pior de todos os problemas, que é a disciplina de Ciências com 3 aulas consecutivas em um mesmo dia, como foi dito anteriormente sobrecarrega tanto o professor como o aluno para dar conta de tanto conteúdo no mesmo dia.

Estes problemas citados, provavelmente aconteceram devido a preferência dos professores por determinados dias e horários, para facilitar sua carga horária de trabalho, já que a grande maioria trabalha em outras instituições de ensino, assim não foi observado o lado dos alunos.

Podemos então destacar a importância do método proposto neste trabalho. Pois como foi descrito acima, existiram muitos problemas no horário real utilizado na escola no ano de 2016 que não foram encontrados na solução proposta. Indo mais além, os horários encontrados nas soluções foram não somente viáveis como também horários otimizados, pois foi encontrado um grande número de aulas geminadas e nenhuma dessas aulas separadas pelo intervalo, isso se deu ao atendimento de todas as restrições impostas pelo problema.

Horário do Vespertino

		6ª ano	7º Ano	7ª série	8ª Série
Seg	13:20	L.E. (Larissa)	Port (Rosana)	Ed Fis (Danilo)	Port (Palloma)
	14:00	L.E. (Larissa)	Ed Fis (Marilda)	Ed Fis (Danilo)	Port (Palloma)
	14:40	Port (Rosana)	Ed Fis (Marilda)	L.E. (Palloma)	Ed Fis (Danilo)
	15:40	Ed Fis (Marilda)	L.E. (Paloma)	Port (Rosana)	Ed Fis (Danilo)
	16:20	Ed Fis (Marilda)	L.E. (Paloma)	Port (Rosana)	Rel (Larissa)
Ter	13:20	Art (Helena)	Cienc (Luciene)	Mat (Carlos)	L.E. (Palloma)
	14:00	Geom (Joelma)	Cienc (Luciene)	Mat (Carlos)	L.E. (Palloma)
	14:40	Cienc (Luciene)	Geom (Carlos)	L.E. (Palloma)	Art (Helena)
	15:40	Mat (Joelma)	Id Cul (Helena)	Cienc (Luciene)	Port (Palloma)
	16:20	Mat (Joelma)	Id Cul (Helena)	Cienc (Luciene)	Port (Palloma)
Qua	13:20	Hist (Edmundo)	Art (Helena)	Hist (Berg)	Cienc (Luana)
	14:00	Hist (Edmundo)	Geo (Debora)	Hist (Berg)	Cienc (Luana)
	14:40	Hist (Edmundo)	Geo (Debora)	Art (Helena)	Cienc (Luana)
	15:40	M Amb (Luana)	Hist (Berg)	Art (Helena)	Geo (Debora)
	16:20	M Amb (Luana)	Hist (Berg)	Cid (Helena)	Geo (Debora)
Qui	13:20	Mat (Joelma)	Mat (Carlos)	Port (Rosana)	Hist (Berg)
	14:00	Mat (Joelma)	Mat (Carlos)	Geo (Ozineide)	Hist (Berg)
	14:40	Port (Rosana)	Hist (Berg)	Geo (Ozineide)	Mat (Carlos)
	15:40	Geo (Ozineide)	Port (Rosana)	Hist (Berg)	Mat (Carlos)
	16:20	Geo (Ozineide)	Port (Rosana)	Mat (Carlos)	Hist (Berg)
Sex	13:20	Port (Rosana)	Art (Helena)	Cienc (Luciene)	Mat (Carlos)
	14:00	Port (Rosana)	Cienc (Luciene)	Red (Deise)	Mat (Carlos)
	14:40	Cienc (Luciene)	Mat (Carlos)	Port (Rosana)	Art (Helena)
	15:40	Cienc (Luciene)	Mat (Carlos)	Cid (Helena)	Red (Deise)
	16:20	Art (Helena)	Port (Rosana)	Mat (Carlos)	Red (Deise)

Figura 4.14: Horário real do turno vespertino, montado e utilizado durante o ano letivo de 2016 na Escola CEPAOF.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Existem vários estudos na tentativa de solucionar o problema da grade de horário escolar. Apesar de existirem diversas ferramentas, há a dificuldade dos usuários em encontrar uma que satisfaça as suas necessidades por completo. Dessa forma, essas são construídas ou modificadas para atender a cada instituição.

Estudamos o problema de programação da grade de horário em uma instituição educacional de ensino fundamental, descrevendo as suas características básicas e as principais restrições. Descrevemos um problema típico e básico para a Escola Pública Municipal Centro Educacional Professor Áureo de Oliveira Filho do Estado da Bahia.

A ideia de estudar sobre tal problema surgiu a partir da observação do nível de dificuldade encontrada por parte das pessoas responsáveis em elaborar um quadro de horário viável e a grande importância prática que um bom quadro de horário permiti satisfazer a todos os envolvidos dentro da instituição.

Este trabalho se propôs a desenvolver um algoritmo que tratasse o turno vespertino da Escola em questão, considerando suas principais restrições, através da Teoria dos Grafos. A solução encontrada se mostrou viável perante as restrições e com uma ótima qualidade. Podemos observar nas soluções o grande número de aulas geminadas encontradas sendo que nenhuma foi interrompida pelo intervalo ou outra disciplina, além disso nenhuma disciplina ficou com mais de duas horas aulas por dia.

Podemos comprovar através dos grafos que quanto maior o número de turmas, professores e restrições maior será a dificuldade de encontrar uma melhor solução. Um dos aspectos evidenciados em análises feitas nesse tipo de problema é o tempo gasto (não polinomial) na busca por um resultado que satisfaça as regras pré-estabelecidas. Outro fator importante é a qualidade do resultado obtido, já que seu extenso conjunto de regras torna a sua obtenção mais complexa.

Sugere-se para trabalhos futuros, a alteração da heurística construtiva, para o problema de horário escolar, como por exemplo a heurística de Algoritmos Genéticos, que são algoritmos de busca e otimização que consideram cada indivíduo como sendo candidato integrante do resultado ótimo. Outra proposta seria o aumento das restrições, o que gera uma grande mudança na dificuldade da resolução do problema, podendo assim abranger um número maior de instituições de ensino. Por exemplo, restrições que dizem respeito as instituições que possuem mais de uma unidade de ensino e que possuem professores que trabalham em várias destas unidades.

Outra proposta futura é comparar estes procedimentos com outros, como por exemplo, Coloração de Grafos, que se trata de atribuir cores a elementos de um grafo sujeita a certas restrições.

Referências Bibliográficas

[1] APPLEBY, J.S.; BLACK, D.V.;NEWMAN, E. A. *"Techniques for producting School Timetables on a computerand Their Apllication to Other Scheduling Problems"*.The Computer Journal,v.3,pp 237-245,1960.

[2] GOTTLIEB, C., *"The Construction of Class-Teacher Timetables"*,in Proceeding of the IFIP Congress,pp. 73-77, 1962.

[3] BRODER, S., *"Final Examination Scheduling"*,Comm.A.C.M., v.7,pp.494-498, 1964.

[4] WELSH, D.J.A., POWELL,M.B., *"An Upper Bound for the Chromatic Number of a Graph and Its Application to Timetabling Problems"*.Comput.J.10, pp. 85-86, 1967.

[5] KARP,R. M., *"Reducibility among Combinatorial Problems"*. In Complexity of Computer Computations, Miller,R.E.,and Thatcher, J.W.(eds), Plenum Press, New York, pp. 85-104,1972.

[6] MANVEL, B., *"Coloring Large Graphs"*. In Proceedings of the 1981 Southeast Conference on Graph Theory,Combinatorics and Computer Science, 1981.

[7] METHA, N., *"The Application of a Graph COloring Method to An Examination Scheduling Problem"*. Interfaces, 11, pp. 57-64,1981.

[8] LOBO, E. L. M., *Uma Solução do Problema de Horário escolar via Algoritmo Genético Paralelo*.Dissertação deMestrado em Modelagem Matemática e Computacional. Minas Gerais, 2005.

[9] NAVARRO, F., *Estudo de Coloração Aplicado ao Problema de Alocação de Horário de Professores*. DCC-UNIPACC. Minas Gerais, 2016.

[10] SANTOS, J.R., *AST: Um modelo para automação de horários escolares*. Tese de doutorado em Matemática Computacional.Recife, 2008.

[11] Imagem acessada dia 08/05/2017 https://pt.slideshare.net/RioInfo2009/oficina-analytics-ricardo-costa.

[12] DIESTEL, R., *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

[13] GOUVEIA, M. C. de, *Um pequeno histórico da Teoria dos Grafos*. UC, 2003. Disponível em http://www.mat.uc.pt/ mcag/FEA2003/Teoria de Grafos.doc. Acesso em Maio de 2017.

[14] SILVA, B. C., *Emparelhamento em Grafos Bipartidos no Ensino Médio*. Dissertação de Mestrado pelo PROFMAT. Rio de Janeiro, 2016.

[15] SOUZA, V. N., *Programação de Grade de Horário em Escolas de Ensino Fundamental e Médio*. Dissertação de Mestrado pela UNICAMP. Campinas-SP, 2006.

[16] SANTOS, H. G., SOUZA, M. J. F., *Programação de Horários em Instituições Educacionais: Formulações e Algoritmos*.UFRJ e UFOP. Agosto, 2007.

[17] BELLO, G. S., RANGEL, M. C., BOERES M. C. S., *Uma Abordagem do Problema de Programação de Grade Horária Sujeita a Restrições Utilizando Coloração de Grafos*. UFES. Setembro, 2008.

[18] ALVES, A. C., *GIRS - Genetic Information Retrieval System*. Dissertação defendida na Universidade de Santa Cruz do Sul. Outubro, 2009.

[20] SCHAERF, A.,*A survey of automated timetabling*. Arti?cial Intelligence Review 13. The Netherlands, Amsterdam, pp. 87-127, 1999.

[21] CRUZ, A. J. de O., *Algoritmos*. Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1997. Disponível em: http://equipe.nce.ufrj.br/adriano/c/apostila/algoritmos.htm. Acesso em Agosto de 2017.

[22] WERRA, D., *An Introduction to timetabling*. European Journal of Operational Research 19. pp. 151?162, 1985.

[23] JUNGINGER, W., *Timetabling in germany - a Survey*. Interfaces 16. pp. 667, 1986.

[24] BARBOZA, F. J. R., *Resumos de artigos sobre algoritmos genéticos*. Mestrado em Mecatrônica - Escola de Engenharia, UFBA. Salvador, 2003.

[25] WERRA, D., *Some Combinatorial Models for Course Scheduling*. In Burke, E.K., Ross, P. (eds), Practice and Theory of Automated Timetabling, v. 1153, pp. 296-308. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[26] NOGUEIRA, D. K. *Introdução à Teoria dos Grafos: Proposta para o Ensino Médio*. Dissertação (PROFMAT)-Universidade Federal de Brasília, Brasília, 2015.