UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA – UFSM
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

Diego Souza da Silva

FUNÇÕES: CONSTRUINDO CONCEITOS A PARTIR DA ANÁLISE GRÁFICA

Santa Maria, RS
2017

Diego Souza da Silva

FUNÇÕES: CONSTRUINDO CONCEITOS A PARTIR DA ANÁLISE GRÁFICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS
2017

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Silva, Diego Souza da
Funções: construindo conceitos a partir da análise gráfica / Diego Souza da Silva.- 2017.
162 p.; 30 cm

Orientador: João Roberto Lazzarin
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2017

1. Matemática 2. Ensino-aprendizagem de Funções 3. Análise gráfica I. Lazzarin, João Roberto II. Título.

Diego Souza da Silva

FUNÇÕES: CONSTRUINDO CONCEITOS A PARTIR DA ANÁLISE GRÁFICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

Aprovado em 23 de agosto de 2017:

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Pansonato.

Claudia Candida Pansonato, Dra. (UFSM)

Alvino Alves Sant'Ana, Dr. (UFRGS)

Santa Maria, RS
2017

Dedico este trabalho à minha família, pelo imenso amor dedicado a mim, sem o qual nada faria sentido.

AGRADECIMENTOS

A Deus que iluminou meu caminho durante essa jornada e fez tudo possível.

Ao meu pai Paulo e à minha mãe Fatima, exemplos de luta e trabalho, pelo amor, incentivo e força em momentos difíceis.

À minha irmã Rafaela pelo amor, apoio e amizade.

À minha namorada Aline pela sua companhia, sempre trazendo alegria aos meus dias.

Ao meu orientador Dr. João Roberto Lazzarin, responsável direto na realização deste trabalho, pela sua dedicação e auxílio constante no decorrer desta etapa.

À minha professora e amiga Me. Rosane Maria Jardim Filippsen pelo apoio e incentivo na minha formação acadêmica.

Aos meus familiares e amigos por estarem sempre a meu lado, mesmo quando me fiz ausente.

A todos os meus professores, em especial aos professores da Pós-Graduação em Matemática pelo carinho ao longo do curso, pela formação e que de forma indireta estiveram presentes neste trabalho.

Aos colegas do mestrado que estiveram comigo ao longo do curso pela amizade e troca de conhecimentos.

À Universidade Federal de Santa Maria, pela oportunidade.

Á Sociedade Brasileira de Matemática – SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES pela concessão de bolsa de estudos.

Um gráfico vale mais que mil palavras.

O principal valor de um gráfico está no auxílio que ele fornece à comunicação da informação. Em sala de aula, os gráficos guiam a nossa intuição na manipulação de conceitos abstratos. Nas situações profissionais, os gráficos fornecem um meio eficaz para apresentar informações e um auxílio visual na tomada de decisões (NIEVERGELT, 1989, p.145-77 apud CARNEIRO, 1993, p. 16).

RESUMO

FUNÇÕES: CONSTRUINDO CONCEITOS A PARTIR DA ANÁLISE GRÁFICA

AUTOR: Diego Souza da Silva
ORIENTADOR: João Roberto Lazzarin

O objetivo deste trabalho é verificar como uma prática pedagógica baseada na construção e interpretação de gráficos durante o processo de ensino de funções matemáticas facilita a aprendizagem e mune de significado o conceito de função. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, cujas informações resultantes da aplicação de oficinas sobre funções a alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Canela foram analisadas, avigoradas pelos pressupostos teóricos apresentados. Considerando a importância do estudo de funções no currículo escolar e na compreensão de fenômenos relacionados a diversas áreas do conhecimento, a sequência didática desenvolvida deu o enfoque principal à abordagem visual que se pode fazer dos diversos conceitos e definições relativas a funções, possibilitada por meio dos esboços de gráficos e de construções dinâmicas realizadas com o software GeoGebra. A importância desta pesquisa decorre da necessidade de os professores repensarem suas metodologias, como também dos benefícios trazidos para os alunos na aprendizagem da Matemática, em particular para a compreensão do conceito de função e dos demais desenvolvimentos científicos relacionados a ele. Dessa maneira, este trabalho aponta algumas das dificuldades encontradas por professores e alunos ao ensinar e aprender Matemática nos dias atuais; propõe uma sequência de atividades que, a partir da modelagem e resolução de problemas reais, pretende explorar os principais conceitos presentes no estudo de funções afins, quadráticas, exponenciais e logarítmicas e estabelece reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de funções, analisando as consequências na aprendizagem trazidas por uma metodologia de ensino que durante a formação de conceitos dê ênfase à abordagem visual por meio da análise gráfica de diferentes funções.

Palavras-chave: Matemática. Ensino e aprendizagem de funções. Análise gráfica.

ABSTRACT

FUNCTIONS: BUILDING CONCEPTS FROM GRAPHIC ANALYSIS

AUTHOR: Diego Souza da Silva
ADVISOR: João Roberto Lazzarin

The objective of this work is to verify how a pedagogical practice based on the construction and interpretation of graphs during the process of teaching mathematical functions facilitates learning and gives meaning to the concept of function. It is a qualitative research, whose information resulting from the application of workshops on functions to students of the 3rd year of high school in a public school in the city of Canela were analyzed, invigorated by the theoretical assumptions presented. Considering the importance of the study of functions in the school curriculum and the understanding of phenomena related to several areas of knowledge, the didactic sequence developed gave the main focus to the visual approach that can be made to the various concepts and definitions related to functions, made possible through Graphic sketches, and dynamic constructions built with GeoGebra software. The importance of this research stems from the need for teachers to rethink their methodologies, as well as the benefits brought to students in mathematics learning, in particular to understand the concept of function and other scientific developments related to it. In this way, this work points out some of the difficulties encountered by teachers and students in teaching and learning mathematics in the present day; Proposes a sequence of activities that, from the modeling and resolution of real problems, intends to explore the main concepts present in the study of related, quadratic, exponential and logarithmic functions and establishes reflections on the process of teaching and learning of functions, analyzing the consequences In learning brought about by a teaching methodology that during the formation of concepts emphasizes the visual approach through the graphic analysis of different functions.

Keywords: Mathematics. Teaching and learning functions. Graphical analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico (a) representa função e gráfico (b) não representa função..........46
Figura 2 – O domínio e o conjunto imagem de uma função 46
Figura 3 – Função par e função ímpar 47
Figura 4 – Gráfico de uma função injetiva..48
Figura 5 – Máximos, mínimos e zeros de uma função 49
Figura 6 – Reta tangente ao gráfico de f 50
Figura 7 – Gráfico da função inversa 51
Figura 8 – Gráficos da função afim e o sinal de a 52
Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = ax + 0$ e o valor absoluto de a 53
Figura 10 – Concavidade da parábola 54
Figura 11 – Abertura da parábola...56
Figura 12 – Translação vertical da parábola 56
Figura 13 – Gráficos da função exponencial para $a > 1$ e para $0 < a < 1$ 58
Figura 14 – Gráficos de funções de tipo exponencial...59
Figura 15 – Gráfico da função recíproca da função exponencial 60
Figura 16 – Gráficos da função logarítmica para $a > 1$ e para $0 < a < 1$ 61
Figura 17 – Gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$ 62
Figura 18 – Gráfico da população urbana no mundo 69
Figura 19 – Gráfico das temperaturas registradas num dia de inverno em São Joaquim..70
Figura 20 – Problema 1 71
Figura 21 – Janela de álgebra e janela gráfica do GeoGebra..................................73
Figura 22 – Entrada de comandos do GeoGebra...73
Figura 23 – Barra de ferramentas do GeoGebra...74
Figura 24 – Atividade 1 – A 75
Figura 25 – Gráfico e análise da relação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$ 77
Figura 26 – Gráfico e análise da relação $f: [-1, +\infty[\to \mathbb{R},\ y = x + 1$ 77
Figura 27 – Gráfico e análise da relação $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$..........................78
Figura 28 – Gráfico e análise da relação $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y^2 - x = 0$..............................78
Figura 29 – Gráfico da função $y = x^2 + 3$...80
Figura 30 – Respostas dadas ao item a da questão C...80
Figura 31 – Gráfico e conjunto imagem da função $y = 2.senx$ 81
Figura 32 – Análise das imagens das funções $y = x^2 + 3$ e $y = 2.senx$ 81
Figura 33 – Arquivo Atividade 2. 82
Figura 34 – Gráfico de uma função par...83
Figura 35 – Gráfico de uma função ímpar 84
Figura 36 – Respostas da questão G..84
Figura 37 – Caracterizando uma função como par ou ímpar a partir do gráfico........85
Figura 38 – Gráfico da população brasileira de 1940 a 2010...................................86
Figura 39 – Gráfico de um tanque de água sendo esvaziado 86
Figura 40 – Gráfico das funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = -x^2 + 2x$ .87
Figura 41 – Respostas das questões 1 e 2 88
Figura 42 – Reta tangente a curva $h(x) = -x^2 + 2x$ 88
Figura 43 – Análise da inclinação da reta tangente a função $h(x) = -x^2 + 2x$ 89
Figura 44 – Respostas da questão 4...90
Figura 45 – Respostas da questão 5...90
Figura 46 – Resposta da questão 6 90

Figura 47 – Valores para a área plantada no Problema 1 91
Figura 48 – Resposta do Problema 1 92
Figura 49 – Materiais utilizados no laboratório 93
Figura 50 – Dados tabelados por uma dupla de alunos........ 94
Figura 51 – Respostas da questão 1 95
Figura 52 – Respostas da questão 2 96
Figura 53 – Respostas da questão 3 96
Figura 54 – Respostas da questão 4 97
Figura 55 – Respostas da questão 5 98
Figura 56 – Respostas da questão 6 99
Figura 57 – Respostas da questão 7 100
Figura 58 – Resposta da questão 8 100
Figura 59 – Resposta da questão 9 101
Figura 60 – Reta dinâmica que representa $f(x) = a.x + b$ 103
Figura 61 – Resposta da questão A........ 103
Figura 62 – Resposta da questão B........ 104
Figura 63 – Resposta da questão C 104
Figura 64 – Resposta da questão D 105
Figura 65 – Resposta da questão E........ 105
Figura 66 – Resposta da questão F........ 105
Figura 67 – Resposta da questão G 106
Figura 68 – Coordenadas dos pontos A, B e C do triângulo ABC 107
Figura 69 – Ângulo formado entre a função $f(x) = a.x + b$ e o eixo x........ 107
Figura 70 – Relação entre a tangente de $\hat{A}$ e o parâmetro a 108
Figura 71 – Gráficos da questão H 109
Figura 72 – Respostas da questão H........ 109
Figura 73 – Características da função identidade........ 110
Figura 74 – Características da função constante........ 110
Figura 75 – Características da função linear 110
Figura 76 – Resposta da questão I........ 111
Figura 77 – O ponto máximo da função $y = -x^2 + 10x$........ 115
Figura 78 – Respostas do problema 1 115
Figura 79 – Parábola dinâmica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ 116
Figura 80 – O gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $a = 0$ 117
Figura 81 – A concavidade e o vértice da parábola........ 117
Figura 82 – O eixo de simetria da parábola 118
Figura 83 – Respostas do Problema 1 pelas coordenadas do vértice 119
Figura 84 – Dados do Problema 2 sobre o plano cartesiano 121
Figura 85 – Resposta da questão 1 122
Figura 86 – Resposta da questão 2 122
Figura 87 – Respostas da questão 3 122
Figura 88 – Análise do parâmetro a da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ 123
Figura 89 – Relações estabelecidas pelos alunos entre o parâmetro b e a parábola........ 123
Figura 90 – Análise do parâmetro b da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ 124
Figura 91 – Relações estabelecidas pelos alunos entre o parâmetro c e a parábola........ 124
Figura 92 – Ajustando a parábola aos pontos dados no Problema 2 125
Figura 93 – Resolução do item a do Problema 2........ 126
Figura 94 – O vértice da parábola $y = -x^2 + 3x + 1$ no GeoGebra........ 127

Figura 95 – Resposta dada ao item b do Problema 2 pela maioria dos alunos.......127
Figura 96 – Resposta do item b do Problema 2 por simetria entre as raízes..........128
Figura 97 – Respostas dos itens a, b, c, d e e do Problema 1 130
Figura 98 – Exponencial $f(x) = a^x$ 132
Figura 99 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a > 1$ 132
Figura 100 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a < 1$ 133
Figura 101 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a < 0$ 133
Figura 102 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a = 0$..134
Figura 103 – Resposta do item f do Problema 1 135
Figura 104 – Resolução do item f por substituição...136
Figura 105 – Gráfico de $f(x) = 2^x$ e $y = x$...137
Figura 106 – Reta perpendicular a função identidade 138
Figura 107 – Curva simétrica da função$f(x) = 2^x$ em relação a reta $y = x$............138
Figura 108 – A função $g(x) = \log_2 x$ como inversa da função $f(x) = 2^x$ 139
Figura 109 – Resposta da questão g do Problema 1 139
Figura 110 – Resolução do Problema 2 141
Figura 111 – Cálculo de logaritmo pelo GeoGebra 141

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	21
	Capítulo 1	25
1	**O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA**	25
1.1	A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO	25
1.2	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	28
1.2.1	**Modelagem Matemática**	29
1.2.2	**Resolução de problemas**	32
1.2.3	**As tecnologias no processo ensino-aprendizagem de matemática**	35
1.2.3.1	*O GeoGebra*	38
1.3	ALGUMAS CONCEPÇÕES SOBRE APRENDIZAGEM	38
1.4	A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÕES	40
	Capítulo 2	44
2	**APORTES TEÓRICOS SOBRE FUNÇÕES**	44
2.1	A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E CONCEITOS ADJACENTES	44
2.2	FUNÇÃO AFIM	51
2.3	FUNÇÃO QUADRÁTICA	53
2.4	FUNÇÃO EXPONENCIAL	57
2.5	FUNÇÃO LOGARÍTMICA	60
	Capítulo 3	64
3	**RELATO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES PROPOSTAS**	64
3.1	ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS	64
3.2	OFICINA 1 – FUNÇÕES E CONCEITOS	68
3.2.1	**Iniciando a construção do conceito de função**	68
3.2.2	**Apresentando o GeoGebra**	72
3.2.3	**Atividade 1 – Definição de função, domínio, contradomínio e imagem**	74
3.2.4	**Atividade 2 – Funções pares e funções ímpares**	82
3.2.5	**Atividade 3 – Função crescente, função decrescente, máximos, mínimos e zeros de uma função**	85
3.2.6	**Resolvendo o Problema 1**	91
3.3	OFICINA 2 – FUNÇÃO AFIM	93
3.3.1	**Atividade de modelagem e função afim**	93
3.3.2	**Compreendendo a função afim a partir de seu gráfico**	102
3.3.3	**Função afim e resolução de problemas**	110
3.4	OFICINA 3 – FUNÇÃO QUADRÁTICA	113
3.4.1	**A função quadrática e a resolução de problemas**	113
3.4.2	**Atividade 1 – Construção da parábola dinâmica**	116
3.4.3	**O estudo dos parâmetros da função quadrática**	120
3.5	OFICINA 4 – FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA	129
3.5.1	**A função exponencial e a resolução de problemas**	129
3.5.2	**A função logarítmica como inversa da função exponencial**	135
	CONSIDERAÇÕES FINAIS	143
	REFERÊNCIAS	148
	APÊNDICE A – OFICINA 1	151
	APÊNDICE B – OFICINA 2	156
	APÊNDICE C – OFICINA 3	159

APÊNDICE D – OFICINA 4 162

INTRODUÇÃO

A Matemática faz parte da evolução humana e é utilizada nas mais diversas áreas de atuação do homem, ou mesmo nas atividades mais simples do cotidiano, inserindo-se de forma definitiva na vida das pessoas, tornando sua presença na educação escolar cada vez mais necessária para a evolução científica e produção de novos saberes.

De acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001), na escola, em função da maneira como muitas vezes é abordada, como uma ciência fragmentada e isolada, que não faz parte do cotidiano dos alunos, a Matemática se distancia de seus significados e objetivos previstos para o Ensino Fundamental e Médio. Tratada dessa forma, a Matemática deixa de ser uma linguagem usual e necessária para a vida dos estudantes na compreensão do universo e da realidade que os cerca, para tornar-se apenas uma ferramenta de uso profissional e científico. Para mudar essa realidade se faz necessária uma reflexão profunda por parte dos educadores matemáticos no sentido de reverter essa apatia metodológica que se constata no ensino dessa ciência. Segundo Micotti (1999, p. 153): "[...] as variações do modo de ensinar determinam diferenças nos resultados obtidos. Até a pouco tempo, ensinar era sinônimo de transmitir informações, mas as ideias pedagógicas mudaram".

No entanto, percebe-se, no contato com artigos publicados em revistas da área, nos trabalhos apresentados em congressos e em publicações atuais, que o ensino da Matemática passa por um processo de reformulação. Novas metodologias de ensino são exigidas para dar conta de uma visão diferenciada sobre o papel do educador, cuja principal missão será desenvolver novas posturas pedagógicas.

> As atuais propostas pedagógicas, ao invés de transferência de conteúdos prontos, acentuam a interação do aluno com o objetivo de estudo, a pesquisa, a construção dos conhecimentos para o acesso ao saber. As aulas são consideradas como situações de aprendizagem, de mediação; nestas são valorizados o trabalho dos alunos (pessoal e coletivo) na apropriação do conhecimento e a orientação do professor para o acesso ao saber (MICOTTI, 1999, p. 158).

Especificamente, ao se tratar do estudo de funções matemáticas, sabe-se que o conceito de função e os desenvolvimentos relacionados a ele são bases para a abordagem dos mais diversos tipos de problemas científicos e estão presentes no estudo de diversos outros conteúdos em matemática, do nível básico ao superior. A aprendizagem desse objeto matemático é essencial para o aluno de nível médio, uma vez que o principal objetivo nesta fase é o desenvolvimento de sua capacidade em descrever e estudar fenômenos da realidade, de modo a se tornar capaz de entendê-los, construir diagnósticos e previsões tornando-se apto a intervir propositivamente em seu cotidiano.

Porém cabe salientar que, as dificuldades na aprendizagem de funções não se apresentam de forma superficial, ao contrário, são por vezes inerentes à álgebra, à interpretação e a outros conceitos subsidiários. As trocas conceituais ou conceitos mal construídos, as falhas nas representações e respectivas transformações e os significados contraditórios atribuídos a conceitos ao tratar das funções matemáticas, revelam a necessidade de ações que vão além da mera transmissão de saberes fragmentados e dissociados da realidade dos educandos.

O estudo das funções a partir de sua análise gráfica, visto pela importância da interpretação gráfica como um instrumento facilitador na construção dos conceitos de funções e na compreensão de suas características, foi investigado no presente trabalho buscando responder a questão primordial da pesquisa: “*Como a abordagem visual por meio da análise gráfica de diferentes funções auxilia a sanar as dificuldades dos alunos no que se refere à construção do conceito de função e na compreensão de suas características?*”.

Desta forma, o objetivo geral deste trabalho foi verificar como uma prática pedagógica baseada na construção e interpretação de gráficos durante o processo de ensino de funções facilita a aprendizagem e mune de significado tal conceito. Assim, formulou-se como objetivos específicos para o trabalho, a identificação das principais dificuldades dos alunos na compreensão dos conceitos de funções e de suas características, o estudo de algumas propostas pedagógicas atuais em educação matemática que se utilizam de análises gráficas para saná-las, e ainda, a construção e a avaliação de uma proposta pedagógica para o ensino de funções, na qual a abordagem gráfica ganha ênfase e é utilizada desde o início do tema.

Acredita-se que atividades que visem a resolução de problemas reais, juntamente com abordagens metodológicas diferenciadas que se utilizam de recursos didáticos variados, possibilitam uma maior significação dos conceitos estudados e, consequentemente, sua efetiva aprendizagem.

Para concretizar essa pesquisa, foram investigadas questões norteadoras, tais como: Quais os obstáculos que se colocam frente aos objetivos do ensino e da aprendizagem de matemática no Ensino Médio? Quais as principais dificuldades encontradas pelos alunos no estudo das funções e seus gráficos? Como a análise de gráficos, na construção do conceito de função, oportuniza aos alunos estabelecer relações e transitar entre diferentes formas de registro deste objeto matemático? Quais os efeitos do uso do software GeoGebra no processo de ensino-aprendizagem de funções? Qual a participação dos alunos nesse processo? Quais os ganhos na aprendizagem ao se enfatizar a análise gráfica das funções?

Dessa forma na busca de alcançar o objetivo proposto, a presente pesquisa foi desenvolvida em quatro etapas e apresentada em três capítulos. Primeiramente realizou-se o levantamento teórico relacionado ao tema, apresentado neste trabalho nos dois primeiros capítulos. Na primeira parte da fundamentação, teórica discute-se algumas dificuldades que perpassam o processo de ensino e aprendizagem de matemática e algumas das propostas apresentadas pela área da educação matemática para o enfrentamento de tais obstáculos, assim como, a teoria da aprendizagem segundo Ausubel, para que se possa definir a aprendizagem significativa de funções. Dando sequência aos aportes teóricos, no segundo capítulo, apresenta-se algumas definições referentes ao tema funções, características e aplicações dos modelos de funções reais usados na posterior aplicação das atividades e a leitura gráfica que se pode fazer de tais informações.

De acordo com as concepções de aprendizagem baseadas na crença de que o aluno aprende refletindo e agindo sobre situações e objetos que lhes são oferecidos, estabelecendo conexões com outras situações e objetos de conhecimento já aprendidos por ele, na segunda etapa da pesquisa, elaborou-se uma sequência didática que, durante a introdução e o desenvolvimento do estudo de funções, deu o enfoque principal à abordagem visual que se pode fazer dos diversos conceitos e definições relativas às funções, possibilitada por meio dos esboços de gráficos e de construções dinâmicas realizadas com o software GeoGebra, visando a motivação e participação dos estudantes na construção de seu próprio conhecimento e propiciando a eles fazer conjecturas e estabelecer o maior número de relações possíveis entre diferentes formas de representação dos objetos estudados.

A terceira etapa da pesquisa, a aplicação da proposta pedagógica, ocorreu no início do ano letivo de 2017, em uma escola estadual de Ensino Médio em Canela no Estado do Rio Grande do Sul. As atividades foram propostas a uma turma de 3º ano do Ensino Médio noturno desta escola, visto que, os 12 alunos pertencentes a esta turma, enfrentaram o problema de falta de professores de matemática nos dois anos anteriores do Ensino Médio, apresentando assim, uma grande defasagem no que se refere aos conteúdos da disciplina propostos para esta etapa da educação básica.

Em ordem de relevância para a pesquisa, optou-se por estudar, durante a aplicação das atividades, a definição de função e alguns conceitos e definições subjacentes a ela, como: domínio, contradomínio, imagem, função crescente, função decrescente, função par, função ímpar e função inversa. Ainda no decorrer da proposta, com o intuito de oportunizar aos alunos compreender e estudar fenômenos da realidade que os cerca, abordaram-se alguns casos de funções reais, normalmente estudados no 1º ano do Ensino Médio: função afim e seus casos particulares, função quadrática, função exponencial e função logarítmica.

Na última etapa da pesquisa, como apresentado no Capítulo 3, fez-se concomitantemente o relato e a análise da proposta pedagógica aplicada a turma de 3º ano do Ensino Médio. Ainda neste capítulo, são apresentadas e referenciadas as estratégias metodológicas que embasaram este estudo de caso. Ao analisar as atividades foi enfatizada a importância dos dados descritos como forma de contribuição para a investigação aqui exposta, desta forma a presente pesquisa insere-se na perspectiva qualitativa. A análise dos dados obtidos através dos resultados das atividades aplicadas, fez-se, corroborando referências já elencadas nos pressupostos teóricos. Por fim, são apresentadas as considerações finais estabelecidas a partir do Capítulo 3.

Assim, é apresentada a presente pesquisa, que buscou justificar e oferecer suporte ao ensino de funções baseado na abordagem visual, por meio da análise e interpretação de gráficos, visando à aprendizagem que, realmente, tenha significado para os alunos.

Capítulo 1

1 O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Neste capítulo inicial, tenta-se primeiramente identificar e expor o panorama atual da matemática no Ensino Médio brasileiro e alguns dos principais objetivos ao ensinar matemática na escola, em especial para o ensino de funções, bem como algumas causas da ineficiência ao tentar atingir as metas propostas. Posteriormente, faz-se uma breve revisão de teorias sobre educação matemática e algumas propostas apresentadas por esta área para solucionar os problemas pelos quais passa o ensino e a aprendizagem da disciplina. Visando construir e avaliar uma proposta pedagógica para o ensino de funções, estudou-se, dentre as tendências em educação matemática, a resolução de problemas, a modelagem matemática e o uso de tecnologias.

A partir dos relatos de pesquisadores em psicologia da educação, apresentam-se algumas concepções sobre aprendizagem, a fim de orientar a postura do professor frente a ideia de como o aluno constrói e organiza o conhecimento em sua estrutura cognitiva. Dentre estas concepções destaca-se neste trabalho a teoria da aprendizagem significativa de David Ausubel.

Posteriormente, levando em conta as definições estabelecidas no texto sobre aprendizagem, aborda-se algumas orientações para que haja a aprendizagem significativa de funções, através de trechos de materiais oferecidos por documentos orientadores a nível nacional e falas de pesquisadores, que se dedicaram a analisar o ensino e a aprendizagem de funções por meio de propostas pedagógicas semelhantes a que se desejou construir e analisar neste trabalho.

1.1 A MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO

O debate em torno de uma educação de qualidade vem ganhando cada vez mais espaço na sociedade brasileira. Para enfrentar os problemas econômicos e alcançar o desenvolvimento, o país precisa mais do que nunca assumir o caráter de urgência da Educação, na tentativa de frear os baixos índices que tem apresentado nos exames internacionais.

Ao tratar do desencanto dos alunos com a escola brasileira Grandelle (2016) relata que, 1,7 milhão de pessoas que possuem entre 15 e 17 anos estão fora da escola, dentre estes 52% sequer completaram o Ensino Fundamental.

O Ensino Médio tem reunido alguns dos piores indicadores da educação brasileira. É nessa etapa da educação básica que se concentram as maiores taxas de abandono escolar, e também, as notas mais baixas no Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), índice que mede a qualidade de nossas escolas.

Quanto à Matemática, dados apresentados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) (2016), compilados a partir de resultados de 2015 do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e da Prova Brasil, revelam que as proficiências médias em matemática caíram no Ensino Médio pela segunda vez consecutiva, sendo que resultados anteriores apontaram que apenas 10,3% dos alunos brasileiros terminam o Ensino Médio sabendo o que deveriam em matemática, ou seja, quase 90% dos alunos não aprendem o esperado.

Tais índices em educação vêm a confirmar o descrito por Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 9):

> O estudo hoje é um elo perdido entre um ensino que parece querer controlar todo o processo didático e uma aprendizagem cada vez mais frágil pela exigência de que seja produzida como uma consequência imediata, quase instantânea, do ensino [...]. A matemática, tão presente em nossa vida cotidiana por meio de objetos técnicos, para muitos de nós é, no entanto, cada vez mais invisível e estranha. Essa situação é prejudicial, e a escola, em nome da sociedade, deveria corrigi-la. Mas, para isso, necessitamos compreender por que há matemática na sociedade e por que devemos estudar matemática na escola.

Consoante, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (BRASIL, 1996), objetiva para o Ensino Médio, não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para a cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. Nessa definição de propósitos, percebe-se que a escola de hoje não pode mais ficar restrita ao ensino disciplinar de natureza enciclopédica.

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio afirmam que:

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 1999, p. 40).

Entretanto, D’Ambrósio (1999, p. 97) observa que: “[...] um dos maiores erros que se pratica em educação, em particular na Educação Matemática, é desvincular a Matemática das outras atividades humanas”.

Nesse sentido, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio estabelecem que:

> Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico (BRASIL, 2008, p. 69).

Os objetivos destinados ao Ensino Médio mostram que o ensino de matemática não pode ser transformado em um fim em si mesmo. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 46): “Esse tipo de reducionismo pode fazer com que não se ‘leve a sério’ a matemática feita na escola, considerando-a como um mero ‘artefato escolar’”.

Ainda conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001), a atividade matemática escolar realizada pelos alunos tem poucas possibilidades de ser criativa, pois não é submetida às restrições de um processo sustentado e estruturado. Nas instituições escolares atuais a Matemática é ensinada de forma fragmentada, os objetos matemáticos são pouco relacionados entre si e a teoria é pouco relacionada com a prática matemática concreta.

Ao apontar alguns problemas e situações que se apresentam no aprendizado da Matemática nos anos finais da educação básica e suas causas, Markarian (2004) destaca que o objetivo da Matemática muitas vezes é imperceptível devido a abstração das propriedades quantitativas ou geométricas estudadas, constituindo um processo de complicada assimilação. O autor lembra que o conhecimento matemático possui um caráter cumulativo, fazendo com que carências acumuladas nas etapas anteriores gerem imensas dificuldades na compreensão de novas ideias, e ainda relata, que o aprendizado da Matemática depende muito de uma linguagem e de símbolos específicos, que separados das ideias que os fazem necessários não motivam os alunos.

A defasagem entre o que o docente pretende ensinar e o que o estudante, sacudido por inúmeros elementos alheios ao ensino formal, espera receber gera um desinteresse que interfere de maneira fundamental no aprendizado. O docente muitas vezes tem dificuldades para manter-se em dia com os conhecimentos, frente as frequentes mudanças de programas, métodos pedagógicos e ênfases temáticas que objetivam a motivação dos aprendizes. Por outro lado, a excessiva ênfase em tornar atrativo o objeto de estudo, pode levar a um descuido do ensino da matemática em si, das estruturas gerais e suas relações.

Portanto, a fim de que o ensino da matemática possa vir a contribuir para o desenvolvimento dos indivíduos, capacitando-os para uma plena participação na vida social, é necessária uma renovação da escola, em busca de métodos e recursos pedagógicos que propiciem o desenvolvimento de habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

1.2 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A área da Educação tem sido alvo de constantes pesquisas, que buscam inovar a sala de aula e desenvolver uma prática docente criativa e adequada às necessidades da sociedade do século XXI. A Educação Matemática não ficou de fora deste processo. Ao contrário, também abriu espaço para pesquisas e discussões que envolvem o ensino da Matemática, conforme argumentam Flemming, Luz e Mello (2005, p. 13): “a Educação Matemática pode ser caracterizada como uma área de atuação que busca, a partir de referenciais teóricos consolidados, soluções e alternativas que inovem o ensino de Matemática”.

Assim, pode-se dizer que a Educação Matemática é uma área de estudos e pesquisas que possui sólidas bases na Educação e na Matemática, mas que também está contextualizada em ambientes interdisciplinares. Por este motivo, caracteriza-se como um campo de pesquisa amplo, que busca a melhoria do processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Neste contexto, surgem tendências tanto na área da Educação como na de Educação Matemática, que envolvem diferentes abordagens consideradas importantes quando aplicadas ao processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Lopes e Borba (apud FLEMMING; LUZ; MELLO, 2005, p. 15):

> Uma tendência é uma forma de trabalho que surgiu a partir da busca de soluções para os problemas da Educação Matemática. A partir do momento que é usada por muitos professores ou, mesmo que pouco utilizada, resulte em experiências bem sucedidas, estamos diante de uma verdadeira tendência.

De acordo com Micotti (1999, p. 165), “cabe ao professor planejar situações problemáticas (com sentido, isto é, que tenham significado para os estudantes) e escolher materiais que sirvam de apoio para o trabalho que eles realizarão nas aulas”.

Desta forma, no presente trabalho, serão apresentadas algumas das atuais tendências da Educação Matemática que servir-se-ão de base para o desenvolvimento e aplicação da proposta analisada neste trabalho: a modelagem matemática, a resolução de problemas e o uso de tecnologias. Porém, é importante salientar que o professor pode utilizar várias tendências em uma mesma atividade, fazendo uso da criatividade para elaborar situações que se caracterizem como tendências.

1.2.1 Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática surgiu devido à necessidade de analisar acontecimentos, de se compreender o meio em que estamos inseridos. “A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual” (BASSANEZI, 2002, p. 24). Muitos autores concordam em descrever a matemática como uma atividade de modelagem.

> Caracterizamos o fazer matemática como um trabalho de modelagem. Esse trabalho transforma o estudo de um sistema não matemático, ou um sistema previamente matematizado, no estudo de problemas matemáticos que são resolvidos utilizando de maneira adequada certos modelos (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 56).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999), mencionam a modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos têm a possibilidade de utilizar a Matemática para investigar situações oriundas de outras áreas da realidade. Dessa forma, possibilita-se ao aluno visualizar aplicações práticas para os conhecimentos matemáticos, motivando-o para a aprendizagem da disciplina e ajudando-o a estruturar sua maneira de pensar e agir.

Normalmente a ideia de modelagem está vinculada ao estudo de um sistema não matemático através de aportes teóricos oferecidos pela matemática. Entretanto, Chevallard (1989 apud Sadovsky, 2010, p. 26) reivindica também a noção de modelagem para pensar a produção de conhecimentos de um sistema matemático por intermédio de outro sistema, também matemático. Chama-a de modelagem intramatemática.

Ainda de acordo com Sadovsky (2010, p. 26, grifo do autor): "*Reconhecer* uma problemática, *escolher* uma teoria para tratá-la e *produzir conhecimento novo* a respeito são três aspectos essenciais do processo de modelagem".

Vê-se Modelagem Matemática como um processo pelo qual se quer analisar algum fato da realidade, sendo que para isso temos que levantar dados sobre o objeto estudado, formulando hipóteses e criando modelos a fim de encontrarmos soluções aproximadas do fato em questão, ou seja, analisar através de esquemas matemáticos.

Para Bassanezi (2002), criamos um modelo quando procuramos refletir sobre algum determinado fato da realidade tentando explicá-lo ou até mesmo agir sobre ele, sendo que para isso precisamos selecionar o que é essencial para o estudo em questão. "Chamaremos de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" (BASSANEZI, 2002, p. 20).

Sucintamente, Sadovsky (2010) relata que as etapas da atividade de modelagem implicam em, escolher uma problemática em uma realidade em geral mais complexa, na qual intervêm mais elementos do que os que se vão considerar, para posteriormente identificar as variáveis envolvidas no problema e estabelecer relações entre elas, a fim de transformá-las em um modelo matemático, oportunizando assim, a produção de novos conhecimentos sobre o tema em estudo.

Consoante, Bassanezi (2002) sugere as seguintes etapas para a introdução do trabalho com modelagem:

Escolha do tema: a escolha de um tema deve ser feita com propósito de motivar os alunos para o aprendizado dos conteúdos matemáticos. É com a escolha do tema que damos início à modelagem. Segundo Bassanezi (2002), devemos escolher situações de estudo para as quais se possam abranger os questionamentos a várias direções.

Experimentação ou coleta de dados: escolhido o tema parte-se para a coleta de dados, ou seja, busca-se por via de várias fontes informações gerais e dados quantitativos sobre o assunto desejado. Para Bassanezi (2002, p. 26), a experimentação "é uma atividade essencialmente laboratorial onde se processa a obtenção dos dados. Os métodos experimentais, quase sempre são ditados pela própria natureza do experimento e objeto da pesquisa".

Abstração: é o momento em que se formulam os modelos matemáticos, por meio da elaboração de problemas, da seleção das variáveis envolvidas nos problemas, da formulação de hipóteses e sistematização dos conceitos que serão utilizados para resolução dos modelos que fazem parte do conteúdo programático.

Resolução: é a substituição das hipóteses por uma linguagem matemática coerente, ou seja, as hipóteses são substituídas por equações matemáticas que as representam.

Validação: é o momento de aceitação ou não do modelo matemático. Os modelos, juntamente com as hipóteses que os originaram, são testados de modo que suas soluções e previsões sejam comparadas com o sistema real. Para Bassanezi (2002, p. 30), "um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que o originaram".

Modificação: segundo Bassanezi (2002), alguns elementos podem rejeitar ou validar os modelos matemáticos, ou seja, algumas hipóteses podem ser insuficientes e dados experimentais podem ter sido obtidos incorretamente. Isso nos mostra que nenhum modelo é definitivo, sendo passível de modificação.

No âmbito de um processo de modelagem é possível muitas vezes enfocar um determinado problema através da exploração sem o uso de certas técnicas específicas da matemática, porém, como relata Sadovsky: "É interessante e fecundo discutir com os alunos as distinções entre abordar problemas dessa maneira exploratória ou com ferramentas algébricas" (2010, p. 29). Assim dar-se-á o devido espaço ao papel produtivo das interações entre professor e aluno em sala de aula.

Ainda que durante a atividade de modelagem, "[...] os conteúdos matemáticos são trabalhados conforme a exigência do momento [...]" (BASSANEZI, 2002, p. 184), o professor participa de todos os momentos do processo, tendo a função de orientar e organizar as atividades, adaptando os conteúdos de acordo com o andamento do processo.

Podendo ainda, a partir da reflexão sobre o problema inicialmente levantado, levar os alunos à formulação de conjecturas e à identificação de propriedades, para que possam organizar teorias que funcionem fora do problema de origem. Dessa forma, contribui-se para uma visão mais integrada da atividade matemática, realçando o valor educativo que envolve o ensino dessa disciplina e possibilita-se aos estudantes atuar sobre situações reais por meio de um artefato teórico.

Sadovsky (2010, p. 30) lembra que o fato de o estudante expressar uma situação prática usando uma teoria matemática, lhe permite atribuir valor ao conhecimento, o que consiste num princípio fundamental do sentido formativo. A ideia de modelagem implica no aspecto central visado pelo ensino, a construção de conhecimento.

1.2.2 Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma das concepções mais difundidas sobre o ensino da matemática. Popularmente costuma-se dizer que o propósito principal da Matemática é resolver problemas. Segundo Flemming, Luz e Mello (2005), ao considerar o problema como um recurso de aprendizagem, o professor deve ter em mente que só há problema se o aluno sente-se desafiado frente a situações pré-estabelecidas, as quais podem envolver mais de um método em sua resolução. Expostos a diversos problemas os alunos podem construir seus conhecimentos a partir da interação com o professor e com os colegas.

De acordo com Dante (2010, p. 11) pode-se dizer que um problema “[...] é um obstáculo a ser superado, algo a ser resolvido e que exige o pensar consciente do indivíduo para solucioná-lo”. Logo, toda situação que exija um processo de reflexão para solucioná-la pode ser caracterizada como um problema. Dessa forma, todo ser pensante tem uma ideia intuitiva do que seja um problema.

Ainda segundo Dante (2011b, p. 23), a resolução de problemas deve ter por meta:

- Fazer o aluno pensar;
- Desenvolver o raciocínio lógico do aluno;

- Ensinar o aluno a enfrentar situações novas;
- Levar o aluno a conhecer aplicações da matemática;
- Aparelhar o aluno com técnicas e estratégias para resolução de problemas;
- Tornar as aulas mais interessantes e motivadoras.

Com esses propósitos, segundo o autor, os alunos devem cumprir cinco etapas para resolver um problema: compreendê-lo, através da leitura e interpretação cuidadosa; elaborar procedimentos de resolução, formulando hipóteses e fazendo tentativas; executar o plano, pondo em prática todas as estratégias pensadas; verificar os resultados, repassando as etapas da estratégia proposta e comparando com maneiras diferentes de resolução e, por fim, elaborar a resposta à pergunta do problema.

Da mesma forma, Polya (1995) descreve os passos necessários para a resolução de problemas: a *compreensão do problema*, a *elaboração de um plano*, a *execução do plano* e o *retrospecto*.

Compreensão do problema. Primeiramente é preciso compreender o problema, percebendo claramente o que é necessário. O enunciado verbal do problema precisa ser entendido e o aluno deve estar em condições de identificar as partes principais do problema sob vários pontos de vista. Dessa forma, o problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil nem muito fácil, natural e interessante. Para melhor compreensão do problema o professor deve provocar os alunos com algumas perguntas, assim o problema vai ficando mais interessante a medida que vão se envolvendo com ele.

Elaboração de um plano. Nesta etapa, elaboram-se planos de ação para resolver o problema, fazendo a conexão entre os dados do problema e o que ele pede. Segundo Polya (1995, p. 5), o estabelecimento de um plano é a principal etapa na resolução de um problema, ele enfatiza que é difícil traçar uma estratégia de resolução se há pouca experiência ou conhecimentos anteriores. Sendo assim, o melhor que um professor pode fazer por seu aluno é induzi-lo discretamente à ideia de um plano por meio de indagações e sugestões.

Execução do plano. É preciso executar o plano elaborado, verificando cada passo a ser dado com paciência. Esta etapa da resolução é considerada a mais fácil, pois basta somente executar tudo que foi discutido na fase anterior. Segundo Polya (1995, p. 9), só existirá dificuldade se aluno não estiver bem seguro em executar o plano, devido ao fato de o mesmo não ter sido ideia sua. O aluno deve seguir o seu plano, aquele que foi idealizado por ele, pois assim há menor probabilidade de errar. Se houver mais de um plano, todos devem ser demonstrados e discutido o fato de que, por maneiras diferentes, se chegou ao mesmo resultado.

Retrospecto. Esta é uma fase importante e instrutiva que complementa a resolução de um problema. Nesta etapa faz-se um retrospecto da resolução completa, analisando a solução obtida, verificando o resultado final e reexaminando o caminho percorrido na resolução do problema, possibilitando detectar e corrigir possíveis enganos. Além disso, esse processo cuidadoso é um excelente exercício de aprendizagem, no qual se pode rever o pensamento inicial e a estratégia de solução. Assim, o aluno poderá dar mais consistência ao seu conhecimento e aprimorar suas habilidades em resolução de problemas.

Markarian (2004, p. 279) coloca que:

> A capacidade de resolução de problemas está fortemente baseada nesses graus de conceituação e rigor lógico: identificação das perguntas colocadas, utilização de alternativas válidas, mudança de estratégia para atacar o problema, em razão do fracasso de algo utilizado previamente.

Dessa maneira, em busca de auxiliar o aluno na apreensão de significados, deve-se valorizar a troca de experiências entre os alunos fazendo das respostas erradas um ponto de partida para que eles consigam resolver e formular problemas.

Sobre a resolução de problemas como metodologia do ensino de matemática, Müller (2000, p. 3) afirma que:

> O problema passa a ser o ponto de partida. Inicialmente, o aluno procura resolver o problema utilizando estratégias que conheceu ou desenvolvendo outras, pelas transferências que faz entre o conteúdo conhecido e o novo que lhe é apresentado. Através das transferências, retificações e rupturas, o aluno refaz o processo histórico de construção do conhecimento.

Dante (2010), ao tratar dos princípios que moldam a resolução de problemas, concorda que não são as definições que dão início a atividade e sim o problema, e ainda ressalta que: “O problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório” (2010, p. 17). Só há problema quando o aluno é levado a interpretar e elaborar estratégias para alcançar seus objetivos dentro da situação proposta. O autor ainda coloca que a resolução de problemas deve servir como orientação para a aprendizagem e, a partir dos problemas, aprender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Consoante, Markarian (2004, p. 279) entende que:

> Do mesmo modo como na evolução das ideias, também no ensino os conceitos devem ser introduzidos à medida que vão sendo solicitados pelos tópicos ensinados, e o aluno esteja em condição de apreciar criticamente a importância do que está aprendendo. Caso contrário o resultado é negativo, pois, em lugar de estimular o aprendizado, produz o efeito de gerar desinteresse por uma Matemática que trata de objetos imperceptíveis, que não são necessários nem em sua estrutura intrínseca.

Entretanto, Sadovsky (2010) chama a atenção para o fato de que a simples ideia de apresentar problemas não permite vislumbrar como os alunos poderiam elaborar teorias para resolver novos problemas. “Isso exige que se examine cada domínio ou teoria matemática, que é objeto de ensino, considerando os problemas que os conceitos desse domínio permitem abordar” (SADOVSKY, 2010, p. 39). Essa reflexão deve ser base para a construção do projeto de ensino que contempla a maneira como cada um dos aspectos teóricos que se pretende ensinar será inserido no trabalho do aluno, a fim que este tenha uma experiência de produção de conhecimento que lhe permita também enriquecer a conceituação teórica nesse mesmo domínio.

As Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, 2008, p. 83) afirmam que através da contextualização feita por meio da resolução de problemas o aluno pode construir conhecimento com significado, entretanto,

> [...] o professor precisa antecipar os conteúdos que são objetos de aprendizagem. Em outras palavras, a contextualização aparece não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático na escola (BRASIL, 2008, p 83).

“Vale aqui ressaltar o quanto é importante, para o exercício da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões necessárias à sua resolução” (BRASIL, 2008, p. 84).

1.2.3 As tecnologias no processo ensino-aprendizagem de matemática

Ainda que o livro didático seja um dos recursos auxiliares mais utilizados pelos professores, é importante destacar que existem muitos outros recursos importantes para promover a aprendizagem significativa, dos quais o professor pode dispor para guiar seu trabalho pedagógico.

É possível observar em trabalhos e artigos publicados no meio acadêmico a valia de inúmeros recursos didáticos utilizados ao ensinar e aprender matemática, destaca-se aqui o uso das tecnologias na sala de aula, devido seu papel crucial na sociedade atual e pelas imensas contribuições trazidas principalmente para as aulas de matemática.

Frant (1998), ao resumir a evolução da tecnologia ao longo da história da humanidade, garante que a escola manteve certa coerência com as mudanças sociais, o que nos leva a refletir sobre o significado de levarmos novas tecnologias para a escola. “A sociedade atual requer o trabalhador holístico, no mercado de trabalho não há mais lugar para o especialista, mas há lugar para aquele que tem flexibilidade de aprender, de se adaptar a mudanças cada vez mais rápidas” (FRANT, 1998, p. 19).

Sobre o uso de tecnologias as Orientações Curriculares para o Ensino Médio afirmam que,

> Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia a dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (BRASIL, 2008, p. 87).

Segundo o texto orientador, o embate das tecnologias na sociedade contemporânea, exige da educação dos tempos modernos uma nova dimensão do conhecimento e da competência dos alunos na utilização destes recursos, o que nos obriga a pensar em novas maneiras de se aprender e ensinar Matemática, além do que, a função do professor, de mediar o processo, torna-se extremamente importante.

Nesta definição de propósitos, a utilização de tecnologias no ensino e na aprendizagem de matemática está se tornando uma tendência pedagógica muito difundida no âmbito educacional. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999, p. 41) trazem o recurso às tecnologias como um dos caminhos para “fazer Matemática” na sala de aula. E mais adiante, apontam o computador como o instrumento mais relevante no impacto das tecnologias sobre o ambiente educacional.

Entretanto, muitos professores do Ensino Fundamental e Médio manifestam resistência a esta nova tendência pedagógica, Angelo e Rigodanzo (2004, p. 16) apontam que os motivos são muitos: “falta de computadores nas escolas, despreparo do professor, desconhecimento de softwares de qualidade, descrédito no potencial dessas tecnologias, entre outros”.

Para Andrade e Nogueira (2004) o progresso científico e computacional indica a obsolescência de métodos e práticas tradicionais na escola e aponta para a necessidade de incorporação de novos pontos de vista em vários tópicos do currículo de Matemática.

> Mas não se trata apenas da inserção da “informática” nos currículos escolares e sim da alteração dos pressupostos do processo educativo de forma a possibilitar a construção e a elaboração de conhecimentos a partir das características específicas das novas tecnologias computacionais. Além disso, como ferramentas didáticas auxiliares, constituem-se numa das possibilidades de ação pedagógica e metodológica para a superação de algumas dificuldades no ensino de Matemática em todos os níveis (ANDRADE; NOGUEIRA, 2004, p. 25).

Os computadores, por exemplo, não podem apenas servir como facilitadores de uma prática que antes era feita com lápis e papel. É necessário explorar suas potencialidades para que possam, efetivamente, servir na construção de novos saberes.

Segundo Müller (2000), devidamente utilizado, o computador impõe um repensar à prática educativa e, instiga a redefinição dos papéis dos envolvidos no processo educativo. “Diante desta ferramenta, o aluno pode embrenhar-se na vegetação exuberante que é o conhecimento produzido pela humanidade, em busca das informações que lhe são necessárias [...]” (MÜLLER, 2000, p. 7). Neste processo, não existe espaço para o professor transmissor de um conhecimento pronto e acabado. O professor passa a ser um orientador do processo de aprendizagem, aprendendo junto com seu aluno.

Muitas experiências relacionadas ao uso dos computadores no ensino-aprendizagem de matemática têm sido divulgadas regularmente em encontros e revistas especializadas, e muitas delas se referem especificamente a utilização do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de funções reais.

Segundo Tozetto (2013, p. 51) é importante que os alunos compreendam as funções como um processo e não como um objeto matemático qualquer, para isso o professor deve usar computadores equipados com programas como o GeoGebra, que possibilita aos alunos entender como ocorre a variação e fazer conexões necessárias ao aprender diversos tipos de função.

"Em uma era de tecnologia e comunicação, é fundamental que os alunos se familiarizem com o computador e com programas específicos para aprofundar sua aprendizagem matemática" (DANTE, 2011b, p.18).

1.2.3.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um dos mais populares softwares educacionais matemáticos. A sua grande diversidade de recursos e as várias possibilidades de sua utilização fazem com que esse seja um recurso tecnológico muito utilizado por educadores.

O GeoGebra (www.geogebra.org) é um software gratuito de matemática dinâmica que foi desenvolvido por Markus Hohenwarter para ser utilizado em ambiente de sala de aula tanto a nível básico quanto universitário. O projeto foi iniciado em 2001, na Universität Salzburg, e tem prosseguido em desenvolvimento na Florida Atlantic University.

Ele integra geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos, estatística e cálculo em um único ambiente fácil de usar. Uma das vantagens didáticas de usar o GeoGebra é que, por meio de suas janelas de visualização, pode-se ver ao mesmo tempo as representações gráficas e algébricas de um mesmo objeto matemático, possibilitando relacionar tais representações.

O GeoGebra é composto por várias ferramentas que permitem construir figuras geométricas das mais simples às mais complexas mediante uma interface em português, bem apresentável e didática. Além das vantagens relacionadas ao fator conteúdo, este software dá espaço à criatividade e à descoberta de novas formas de construções gráficas e geométricas.

1.3 ALGUMAS CONCEPÇÕES SOBRE APRENDIZAGEM

O momento crítico pelo qual passa a educação brasileira, evidenciado pelo baixo desempenho dos alunos não pode ser visto apenas como consequência do histórico descaso para com a educação e dos problemas sociais, é importante que se pense também, em novos métodos de ensino que visem a uma aprendizagem eficaz dos alunos.

> A renovação do ensino não consiste, apenas, em mudança de atitude do professor diante do saber científico, mas, ainda e especialmente, diante do conhecimento do aluno: é preciso compreender como ele compreende, constrói e organiza o conhecimento (MICOTTI, 1999, p. 164).

Neste sentido, a aproximação entre psicologia e educação, pode ajudar a compreender o cérebro em funcionamento e suas potencialidades nos processos de aprendizagem e desenvolvimento.

Moreira (1999, p. 152), ao abordar a teoria de Ausubel que focaliza primordialmente a aprendizagem cognitiva relata que,

> A atenção de Ausubel está constantemente voltada para a aprendizagem, tal como ela ocorre na sala de aula, no dia a dia da grande maioria das escolas. Para ele, o fator isolado que mais influência a aprendizagem é aquilo que o aluno já sabe (cabe ao professor identificar isso e ensinar de acordo). Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas, na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcionem, dessa forma, como ponto de ancoragem a novas ideias e conceitos. Entretanto, a experiência cognitiva não se restringe a influência direta dos conceitos já aprendidos sobre componentes da nova aprendizagem, mas abrange também modificações relevantes nos atributos da estrutura cognitiva pela influência do novo material.

Segundo Pantano (2011), uma das principais contribuições trazidas pela psicologia ao processo de ensino e aprendizagem é a constatação de que o cérebro, mesmo após o nascimento, não é vazio de conhecimento, este se encontra preparado para reforçar as sinapses já estabelecidas e formar novas sinapses, através da experiência e estímulos, ou seja, a aprendizagem modifica a estrutura física do cérebro. O processo de ensino-aprendizagem deve levar em conta os conhecimentos prévios de cada pessoa.

Os desafios educativos, que se colocam aos participantes do ambiente escolar, passam por reconhecer o aprendiz em suas singularidades pessoais e culturais. Porém, devido à grande diversidade na escola, criar um ambiente educativo que possa ser definido como uma comunidade de aprendizagem implica buscar novas formas de organização do tempo e do espaço pedagógico a fim de permitir que cada aluno possa trabalhar de forma autônoma ou em grupo, possibilitando uma aprendizagem significativa.

De acordo com Moreira (1999, p. 153), para Ausubel aprendizagem significativa é,

> [...] um processo pelo qual uma nova informação relaciona-se com um aspecto especialmente relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo, ou seja, este processo envolve a interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica [...].

A aprendizagem significativa acontece quando o aluno consegue atribuir sentido e significado às ideias matemáticas e sobre elas é capaz de pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar.

1.4 A APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE FUNÇÕES

Tendo como objetivo o desenvolvimento da capacidade dos estudantes de descrever e estudar fenômenos da realidade, de modo a se tornarem capazes de entendê-los, construir previsões, e, assim tornarem-se aptos a intervir na realidade, a aprendizagem de funções de forma significativa é de fundamental importância e deve acontecer a partir da contextualização e da interdisciplinaridade, permitindo conexões entre diversos conceitos e diferentes formas de pensamento matemático. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 43): “o ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui”. Mais adiante, as Orientações Curriculares Nacionais fornecem sugestões de modelos a serem estudados como exemplos de aplicações das funções a problemas de outras áreas do conhecimento:

> O estudo de *Funções* pode prosseguir com os diferentes modelos que devem ser objeto de estudo na escola – modelos linear, quadrático e exponencial. [...]. É recomendável que o aluno seja apresentado a diferentes modelos, tomados em diferentes áreas do conhecimento (queda livre de um corpo, movimento uniforme e uniformemente acelerado, crescimento de uma colônia de bactérias, quantidade de medicamento na corrente sanguínea, rendimentos financeiros, consumo doméstico de energia elétrica, etc.) (BRASIL, 2008, p.72, grifo do autor).

A introdução da ideia de função é um pré-requisito para se fazer ciência, pois nela estão embutidas as noções de determinação, eventualmente expressando causalidade, previsibilidade e regularidade dos fenômenos, e através dela se tem condições de entender a maneira como se dão as relações de dependência entre diferentes grandezas. Nesse sentido, Carneiro (1993, p. 10) coloca que:

> O estudo das funções elementares é de extrema importância no segundo grau. Esse é o momento de introduzir, de forma intuitiva, algumas das noções básicas do Cálculo. Relações de dependência funcional entre variáveis, análise qualitativa e interpretação de gráficos, pontos críticos, modelagem, noções de limites e taxas de variação são conceitos que, em geral, surgem de forma mágica nos primeiros semestres dos cursos universitários e podem aparecer naturalmente em situações da Matemática secundária.

Ainda sobre o papel desempenhado pelo conceito de função, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1999, p. 43) destacam: “[...] descrever e estudar através da leitura, interpretação e construção de gráficos, o comportamento de certos fenômenos tanto do cotidiano, como de outras áreas do conhecimento [...]”. Portanto, fica como objetivo para o professor, fazer que seus alunos sejam capazes de lidar com o conceito de função em situações diversas. Para tal, é essencial trabalhar com situações problemas reais.

> Desencadear um assunto do programa com uma situação-problema real motiva o estudante a interessar-se mais por aquilo que está aprendendo e mostra a ele que, além da beleza intrínseca da matemática como ciência essencialmente dedutiva, ela é útil na vida cotidiana (DANTE, 1986, p. 32-5 apud CARNEIRO, 1993, p. 13).

Assim, como várias são as aplicações do conceito de função na ciência e no cotidiano, também são muitas as formas de representarmos situações que expressam funções.

> [...] a função é vista simultaneamente como um conceito e um processo. Como conceito, ela é o estudo da regularidade e quantificação de fenômenos, o que é a essência da Matemática. Como processo, os estudantes aplicam o conceito para analisar relações entre diferentes grandezas em vários níveis de dificuldade, ao longo do desenvolvimento do currículo. Essas relações são estabelecidas através de tabelas, gráficos, expressões verbais e matemáticas, e de modelos que as representam (HOWDEN, 1989, p.18-23 apud CARNEIRO, 1993, p. 23).

Acredita-se que quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto. A conceituação e a aquisição de conhecimentos ocorrem somente quando o aluno consegue transitar naturalmente por diferentes registros. Sendo assim, durante o ensino de funções deve-se oportunizar que os alunos estabeleçam relações entre suas diferentes representações, ajustando seus conhecimentos sobre funções a fim de construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, não basta buscarmos novos métodos de ensino,

> [...] se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (BRASIL, 1999, p. 43)

Ainda sobre a importância das articulações entre diferentes conceitos e modos de representação do conhecimento Luís Carlos Pais (2006, p. 60) afirma:

> Para levar o aluno a se envolver com saber é preciso desenvolver atividades que multipliquem as articulações possíveis internamente entre os diferentes temas, entre as várias maneiras de representar o conhecimento, entre o saber escolar e os conhecimentos do cotidiano e assim por diante. Numa aula que não se limite à exposição de matéria ou à resolução de exercícios, o professor tende a assumir um papel de coordenador e não de controlador.

A fim de introduzir intuitivamente algumas noções básicas do Cálculo, propiciar aos alunos transitar entre as diferentes formas de representar funções e torná-los aptos a lidar com o conceito de função em diversas situações, entende-se que é necessária a utilização de gráficos, não apenas como suporte, mas como base para uma aprendizagem significativa de funções. Pois, como relatado ao justificar este trabalho, a expressão através de gráficos é utilizada na representação de dados em diversos conteúdos e é a forma mais adequada para apresentar informações sobre linearidade, intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos, taxas de variação, regularidade, continuidade. Os gráficos expressam uma visão geral e completa das funções e suas características.

> Um gráfico vale mais que mil palavras. O principal valor de um gráfico está no auxílio que ele fornece à comunicação da informação. Em sala de aula, os gráficos guiam a nossa intuição na manipulação de conceitos abstratos. Nas situações profissionais, os gráficos fornecem um meio eficaz para apresentar informações e um auxílio visual na tomada de decisões (NIEVERGELT, 1989, p.145-77 apud CARNEIRO, 1993, p. 16).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio atentam para o fato de que: “a elaboração de um gráfico por meio da simples transcrição de dados tomados em uma tabela numérica não permite avançar na compreensão do comportamento das funções” (BRASIL, 2008, p. 72). O estudo de gráficos na representação e significação do conceito de função deve ser realizado de forma diferenciada a fim de que os alunos possam visualizar padrões algébricos, além de perceber que existem gráficos não definidos algebricamente. “É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes” (BRASIL, 2008, p. 72).

Quanto à interpretação de gráficos na construção de conhecimentos matemáticos Albé e Filippsen (2006, p. 23) colocam que:

> A reflexão sobre a exploração visual permite que o aluno construa seu próprio conhecimento matemático, interprete a linguagem simbólica e a gráfica com maior destreza e seja capaz de, ao ler uma expressão analítica, imaginar o esboço de seu gráfico e vice-versa, bem como ter maior domínio na comunicação matemática.

O uso de softwares além de facilitar e proporcionar tempo no trabalho com gráficos pode tornar o aluno mais ativo na construção do saber.

Segundo Albé e Filippsen (2006, p. 12):

> A interação aluno-computador pode ser uma ótima oportunidade para o educando desenvolver o hábito de buscar informações e resolver problemas, exercitando o pensamento e o raciocínio. O computador possibilita a manipulação dos símbolos, modela a realidade, cria o virtual para torná-lo concreto.

Desse modo, sugere-se que durante o estudo de funções, seja dada ênfase à representação gráfica, nos passos iniciais, bem como no desenvolvimento do conceito de função e na compreensão de suas características, usufruindo assim do caráter integrador que o tema possui.

Capítulo 2

2 APORTES TEÓRICOS SOBRE FUNÇÕES

Em busca do embasamento matemático necessário à construção, aplicação e análise da proposta a qual se destina este trabalho e, também, a fim de oferecer alguns suportes conceituais para elaboração de novas atividades que venham a tratar do mesmo assunto, apresenta-se neste capítulo algumas definições e aplicações das funções e mais especificações, das funções reais de variáveis reais.

Inicia-se este capítulo com o conceito de funções de uma forma bem geral para depois abordá-lo via suas particularidades. As definições e conceitos apresentados neste texto são referenciados em livros clássicos de matemática, que tratam do estudo de funções e em livros didáticos voltados a matemática do Ensino Médio, tais como: Lima (2013), Paiva (2013), Dante (2011a), Iezzi e Murakami (1997), entre outros. Os recortes feitos em cada livro foram escolhidos de forma a evitar o excesso de formalismo existente no estudo de funções e também, buscando oferecer os subsídios necessários à elaboração da proposta aplicada e analisada neste trabalho.

2.1 A DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO E CONCEITOS ADJACENTES

A maioria dos materiais referentes ao estudo de funções apresenta a noção de função como uma relação entre grandezas de dois conjuntos, ou até mesmo, como uma variação de uma grandeza associada à variação de outra grandeza e citam inúmeros exemplos que ilustram este conceito. Para Oliveira e Fernández (2010, p. 281) são várias as situações cotidianas que retratam estas relações entre grandezas como: “[...] o quanto João ganha é função do que ele trabalha, ou ainda a distância que percorremos é função da velocidade e do tempo que viajamos".

Usando a ideia de variação de uma grandeza associada a variação de outra grandeza, Paiva (2013, p. 117, grifo do autor) apresenta o seguinte conceito de função: “Dizemos que uma variável y é dada em *função* de uma variável x se, e somente se, a cada valor de x corresponde um único valor y”, e chama a lei que estabelece esta correspondência entre os valores de x e y de lei de associação.

Já, de forma mais formal, Lima (2013, p. 36) define que “dados dois conjuntos X, Y, uma função $f: X \to Y$ (lê-se “uma função de X em Y”) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$”. Os conjuntos X e Y chamam-se respectivamente *domínio* e *contradomínio* da função f e para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se *imagem* de x pela função f.

O assunto principal deste trabalho são as funções reais de uma variável real, isto é, funções $f: X \to \mathbb{R}$ que tem como domínio um subconjunto $X \subset \mathbb{R}$ e cujos valores $f(x)$, para todo $x \in X$, são números reais.

Como a proposta apresentada neste trabalho visa dar ênfase aos gráficos das funções e as propriedades observadas a partir deles, cabe então aqui, definir formalmente o gráfico de uma função e a leitura que se pode fazer da definição de função a partir do seu gráfico. Entretanto, definir, construir e interpretar o gráfico de uma função requer as noções de plano cartesiano.

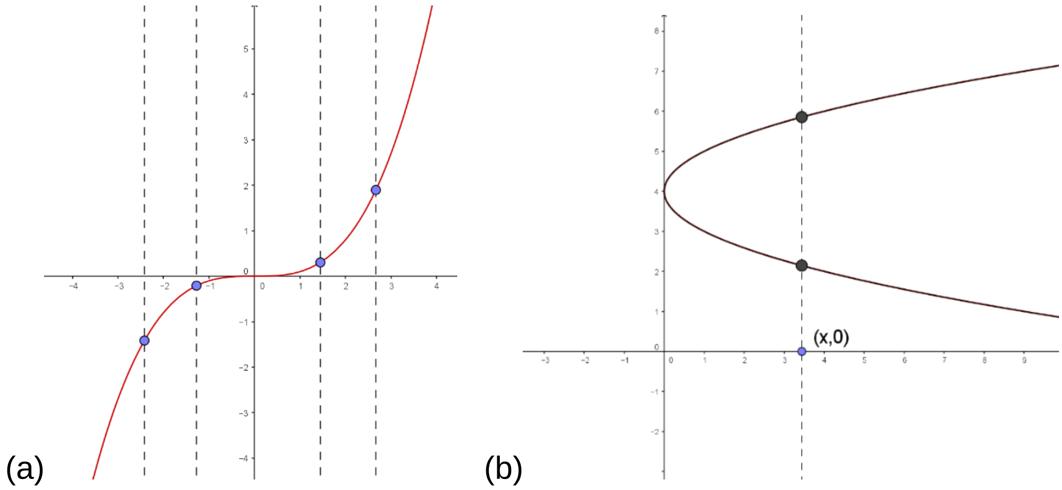
Segundo Dante (2011a, p. 53), plano cartesiano é um plano munido de um sistema de eixos ortogonais Ox e Oy, que tem a mesma origem O. Os eixos cartesianos, Ox e Oy, dividem o plano em quatro regiões denominadas quadrantes. Todo ponto P desse plano, tem sua localização determinada por um par ordenado $P(x, y)$, para o qual x é a coordenada horizontal e y é a coordenada vertical do ponto, chamadas respectivamente de abscissa e ordenada de P. A cada par ordenado de números reais corresponde um ponto do plano cartesiano e, reciprocamente, a cada ponto do plano corresponde um par ordenado de números reais. Essa correspondência biunívoca possibilita escrever conceitos e propriedades geométricas em uma linguagem algébrica e, reciprocamente, interpretar geometricamente relações entre números reais.

Para Lima (2013, p. 72), o produto cartesiano $X \times Y$ de dois conjuntos X e Y é o conjunto $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), onde $x \in X$ e $y \in Y$. Mais adiante Lima estabelece que “o *gráfico* de uma função $f: X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ ou G_f do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y), para os quais x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$" (2013, p. 73, grifo do autor).

De acordo com Iezzi e Murakami (1977, p. 75) pode-se verificar por meio da representação gráfica se um subconjunto qualquer de $X \times Y$ representa ou não uma função. Para tal, basta verificarmos se a reta paralela ao eixo y conduzida pelo ponto

$(x, 0)$, com $x \in X$, encontra sempre o gráfico de f em um só ponto. Obviamente este teste é valido para analisar se y está em função de x. A Figura 1 apresenta os esboços de duas relações, uma que é função e uma que não é função.
Observação: Neste trabalho considera-se sempre y como variável dependente e x como variável independente.

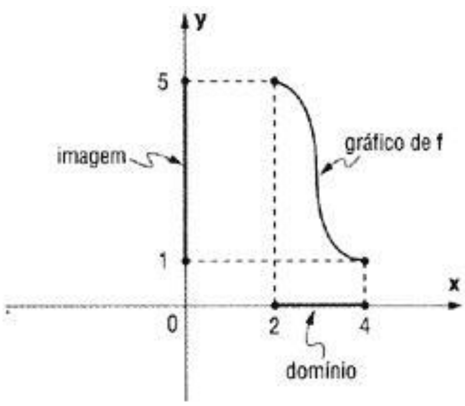
Figura 1 – Gráfico (a) representa função e gráfico (b) não representa função



Fonte: Autor.

Dante (2011a, p. 81) relata que observando o gráfico de uma função no plano cartesiano pode-se, às vezes, determinar o domínio e o conjunto imagem da função, projetando o gráfico nos eixos Ox e Oy, respectivamente, como mostra a Figura 2.

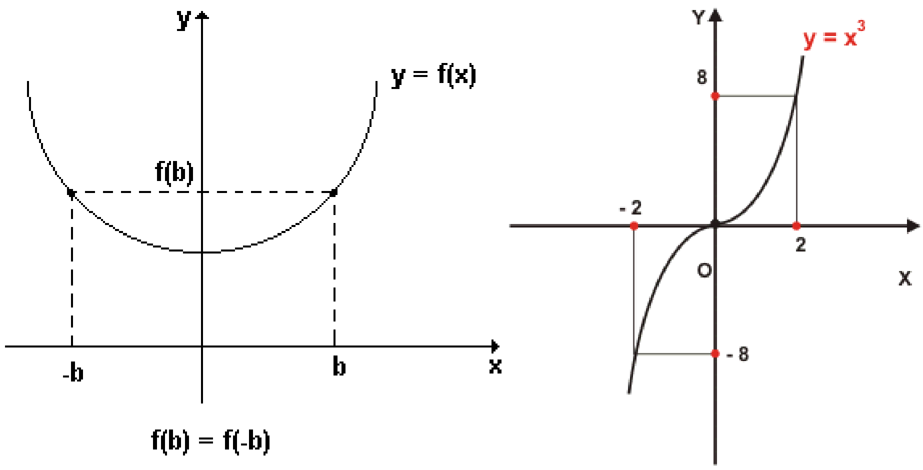
Figura 2 – O domínio e o conjunto imagem de uma função



Fonte: Dante (2011a, p. 81).

Ainda segundo Dante (2011a) uma função f é dita *função par* se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, para qualquer $x \in D$ e é chamada *função ímpar* se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$, com D representando o domínio de f. Observando o gráfico de uma função pode-se identificar se ela é uma função par ou uma função ímpar, visto que o gráfico da função par é simétrico em relação ao eixo y e o gráfico da função ímpar é simétrico em relação à origem. Na Figura 3 são apresentados, respectivamente, o gráfico de uma função par e o gráfico de uma função ímpar.

Figura 3 – Função par e função ímpar



Fonte: Autor.

Ainda em viés de caracterizar as funções de acordo com suas especificidades Neto (2015, p. 38) lembra que são dados nomes especiais às funções cujos contradomínios coincidem com suas imagens, ou que associam imagens distintas a elementos distintos do domínio, como apresenta a definição a seguir.

Uma função $f: X \to Y$ é dita:

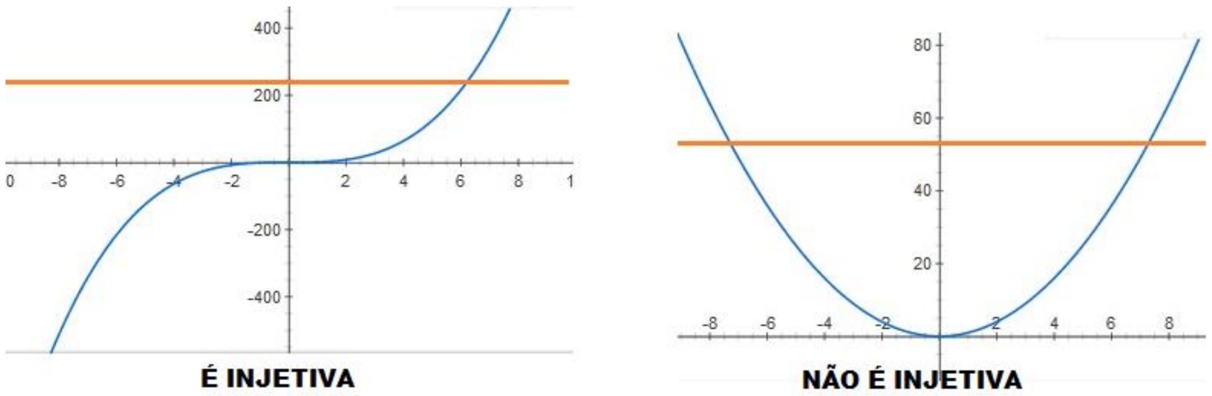
(a) Injetora, ou injetiva, ou uma injeção, se, para todo $y \in Y$, existir no máximo um $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

(b) Sobrejetora, ou sobrejetiva, ou uma sobrejeção, se, para todo $y \in Y$, existir pelo menos um $x \in X$ tal que $y = f(x)$.

(c) Bijetora, ou bijetiva, ou uma bijeção, se for ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.

Dadas as definições anteriores, uma função é injetiva se elementos distintos do domínio apresentam imagens distintas, logo é possível verificar se uma função é injetiva olhando seu gráfico, basta imaginar retas horizontais cortando o gráfico, essas retas podem intersectarem-se com o gráfico uma única vez para cada valor de y, como ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Gráfico de uma função injetiva



Fonte: Autor.

Ainda segundo Neto (2015, p. 28), uma função $f: X \to \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se *crescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ e *decrescente* quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. É fácil perceber que uma função que é sempre crescente ou sempre decrescente é injetiva, pois $f(x) = f(z)$ implicaria $x = z$.

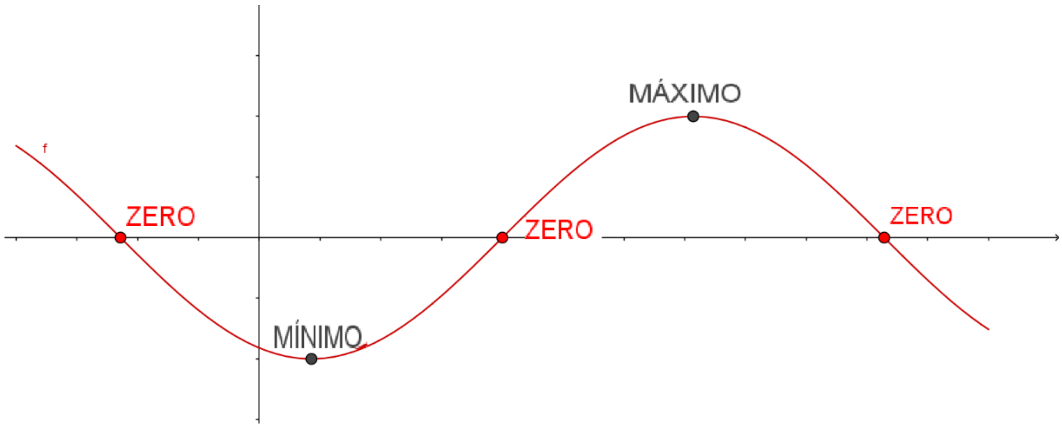
Cabe ressaltar ainda que uma função é *constante* em um intervalo do domínio se, e somente se, para quaisquer valores x_1 e x_2 desse intervalo, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) = f(x_2) = k$, sendo k uma constante real.

Analisando o gráfico de uma função podemos observar propriedades e valores importantes dela, como: para quais valores ela é positiva ($f(x) > 0$), para quais valores ela é negativa ($f(x) < 0$), para quais valores ela se anula ($f(x) = 0$) e em quais valores assume um valor máximo ou um valor mínimo. Os valores de x para os quais $f(x) = 0$ são chamados zeros da função f.

Segundo Iezzi et al. (2010, p. 65), seja A um subconjunto do domínio de uma função f, se para todo x pertencente a A, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então x_0 e $f(x_0)$, são respectivamente, o ponto de máximo e o valor máximo de f em A. Caso $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 e $f(x_0)$, são respectivamente, o ponto de mínimo e o valor mínimo de f em

A. Tais valores são também chamados de máximos e mínimos relativos, ou locais, de f (relativos a alguma região A do domínio). Quando A é igual ao domínio de f, estes valores são chamados de máximos e mínimos absolutos. A Figura 5 ilustra máximos e mínimos relativos e também alguns zeros de uma função.

Figura 5 – Máximos, mínimos e zeros de uma função



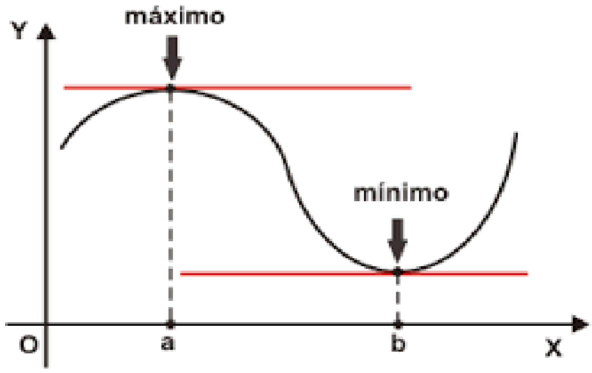
Fonte: Autor.

Para Guidorizzi (2001) uma boa maneira de determinar os pontos de máximo ou de mínimo relativos (locais) de uma função f é analisá-la quanto ao crescimento e decrescimento. “Sejam $a < c < b$; se f for crescente em $]a, c]$ e decrescente em $[c, b[$, então c será um ponto de máximo local de f; se f for decrescente em $]a, c]$ e crescente em $[c, b[$ então c será um ponto de mínimo local de f” (GUIDORIZZI, 2001, p. 273, grifo do autor).

Guidorizzi (2001) ainda relata que a reta tangente ao gráfico de f num ponto c, isto é, a reta que localmente só toca o gráfico no ponto $(c, f(c))$ tal que todos os demais pontos do gráfico estão do mesmo lado dessa reta, tem inclinação positiva se c pertence a um intervalo no qual f é crescente e inclinação negativa se c pertence a um intervalo no qual f decrescente.

Observação: Não entraremos em detalhes, mas usando técnicas do cálculo diferencial é possível perceber que nos pontos de máximos e mínimos locais de uma função f derivável, a reta tangente é horizontal, como ilustra a Figura 6.

Figura 6 – Reta tangente ao gráfico de f



Fonte: Autor.

Outro conceito importante com o qual nos deparamos ao trabalhar com funções é o de taxa média de variação, que segundo Paiva (2013, p. 141) pode ser definida como a razão entre a variação de valores de y (Δy) e a correspondente variação de valores de x (Δx), nesta ordem, isto é, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Uma importante aplicação da taxa média de variação se dá ao definir a velocidade média de uma partícula, num determinado intervalo de tempo, a partir da função horária do movimento desta partícula.

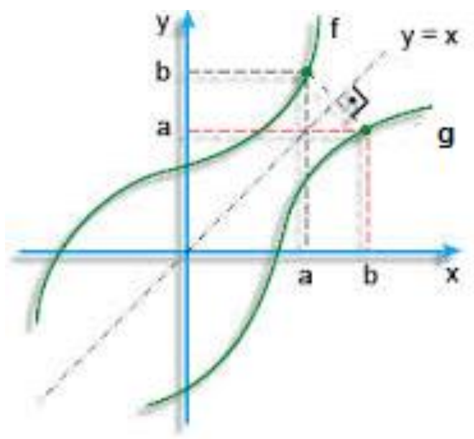
Como neste trabalho usa-se a noção de função inversa para definir a função logarítmica, cabe-se expressar a definição de função inversa dada por Dante (2011a, p. 102): "Dada uma função $f: A \to B$, bijetiva, denomina-se função inversa de f a função $g: B \to A$ tal que, se $f(a) = b$, então $g(b) = a$, com $a \in A$ e $b \in B$".

Guidorizzi (2001, p. 214) relata que, "se f for uma função inversível, com inversa g, então g também será inversível, e sua inversa será f". O mesmo autor apresenta a seguinte colocação sobre o gráfico de f (G_f) e o gráfico de g (G_g):

$$(a, b) \in G_f \Leftrightarrow b = f(a) \Leftrightarrow a = g(b) \Leftrightarrow (b, a) \in G_g.$$

Portanto, como (a, b) e (b, a) são simétricos em relação à reta $y = x$, resulta que os gráficos de f e de g são simétricos em relação à reta $y = x$, como esboça a Figura 7 (vale observar que x foi trocado por y e vice-versa na confecção do gráfico da função g). Também no caso de f ser uma bijeção crescente (ou decrescente), tem-se que sua inversa é crescente (ou decrescente).

Figura 7 – Gráfico da função inversa



Fonte: Autor.

Na sequência, vamos revisar alguns conceitos que permeiam o estudo das funções reais utilizadas na aplicação da proposta pedagógica a qual se dedica este trabalho. Cada tipo de função será abordado junto às características que podem ser percebidas na análise de seus gráficos e ideias de aplicações na modelagem e estudo de alguns fenômenos.

2.2 FUNÇÃO AFIM

A função afim ou função polinomial de 1º grau é um importante instrumento na descrição de fenômenos que possuem taxa de variação constante. Paiva (2013, p. 151) diz que se numa função $y = f(x)$ as variações de x e y são diretamente proporcionais, então o gráfico de f é uma reta e, consequentemente, f é uma função afim.

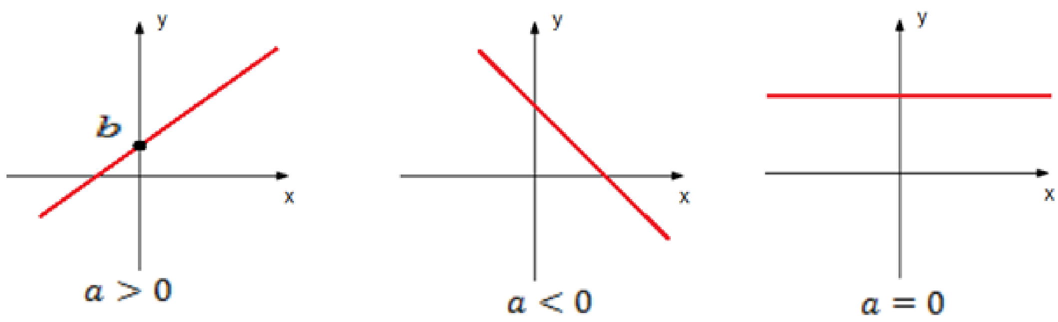
Lima (2013) define a função afim da seguinte forma: “Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se *afim* quando existem constantes a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$” (2014, p. 79, grifo do autor). O mesmo autor, na p. 89, prova que: “Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona injetiva. Se o acréscimo $f(x + h) - f(x) = \varphi(h)$ depender apenas de h, mas não de x, então f é uma função afim”. Em outras palavras, se f é uma função crescente ou decrescente que associa a acréscimos iguais no domínio, acréscimos iguais na imagem destes valores, então f é uma função afim.

É fácil mostrar que o coeficiente (ou parâmetro) a da lei de associação $f(x) = ax + b$ corresponde à taxa de variação da função afim. Para obtê-lo em função de seus pontos no gráfico basta conhecer dois destes pontos distintos quaisquer $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Tem-se $a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, para $x_2 \neq x_1$. Já o coeficiente (ou parâmetro) b é o valor que a função dada assume quando $x = 0$, isto é $b = f(0)$, ou mais geralmente, utilizando-se de um dos pontos, digamos $(x_1, f(x_1))$, obtém-se $b = f(x_1) - ax_1$. Reciprocamente, dados a e b, como afirma Paiva (2013, p. 152) podemos obter o gráfico de uma função afim f representando-se dois pontos distintos de f sobre o plano e traçando-se a reta que passa por eles, o que obviamente, será uma reta não vertical (ver Lima, 2013, p. 82).

Na geometria analítica, a equação reduzida de uma reta não vertical é dada por $y = mx + q$, com m chamado de coeficiente angular e q coeficiente linear da reta. Portanto, do ponto de vista geométrico, $b = q$ é a ordenada do ponto no qual a reta, que é o gráfico da função $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo y e $a = m$ é responsável pela inclinação da reta, ou seja, o coeficiente angular da reta é exatamente a taxa de variação da função afim, sendo que m é a tangente do ângulo formado entre o eixo x e a reta $y = mx + q$.

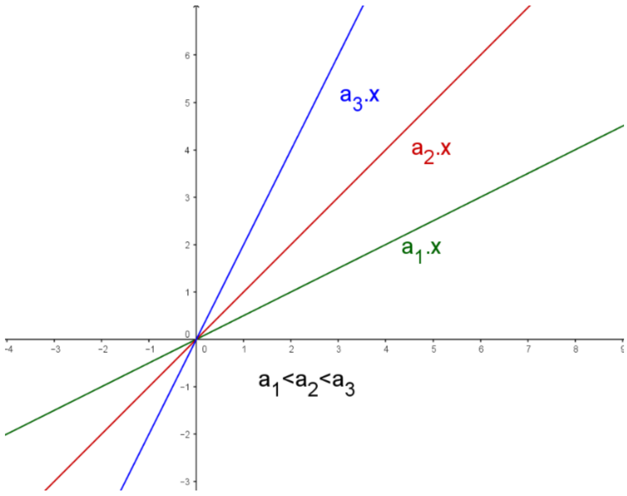
Lima (2013, p. 81) afirma que quanto maior o valor absoluto de a mais a reta se afasta da posição horizontal. Quando $a > 0$ o gráfico de f é uma reta ascendente (f é crescente) e quando $a < 0$, a reta é descendente (f é decrescente) e finalmente, se $a = 0$ a reta é horizontal (f é constante). Dadas as definições anteriores é possível fazer a leitura apresentada nas Figuras 8 e 9.

Figura 8 – Gráficos da função afim e o sinal de a



Fonte: Autor.

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = ax + 0$ e o valor absoluto de a



Fonte: Autor.

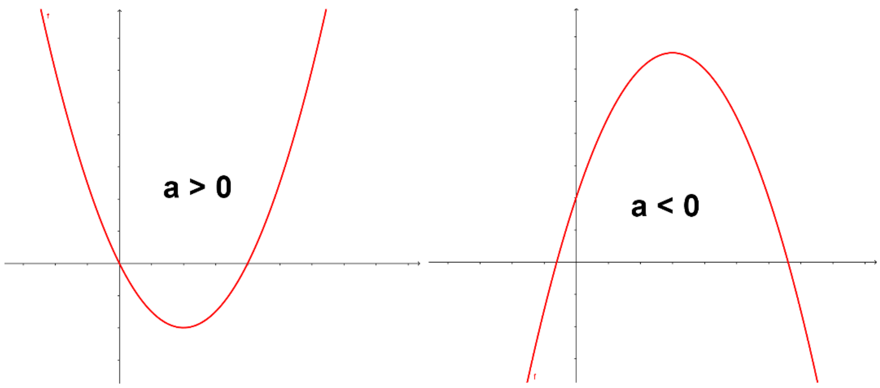
A função afim é utilizada como modelo para o estudo de diversos fenômenos que se caracterizam pela taxa de variação constante entre grandezas. Em particular, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 72) destacam a importância das funções no estudo da cinemática na Física, na qual a função afim descreve a equação horária dos espaços no movimento retilíneo uniforme (MRU). Segundo Calçada e Sampaio (2005), no MRU, um corpo percorre distâncias iguais em intervalos de tempos iguais, ou seja, a velocidade (v) do corpo é constante, o que a caracteriza como a taxa de variação da função afim, desta forma tem-se a função horária do espaço $S = S_0 + v.t$ que descreve a posição S do móvel em dependência do tempo t de percurso, no qual S_0 é a posição inicial que o corpo ocupa na trajetória.

2.3 FUNÇÃO QUADRÁTICA

Segundo Lima (2013, p.104), define-se função quadrática ou função polinomial do 2º grau a toda função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que existem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, satisfazendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mais adiante Lima (2013, p. 106) prova que dados três pontos $A = (x_{1,}y_1)$, $B = (x_{2,}y_2)$ e $C = (x_{3,}y_3)$ não colineares do plano cartesiano, existe uma única função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

É possível provar que o gráfico de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola (ver Lima, 2013, p. 115). A Figura 10 ilustra bem o sentido de abertura de uma parábola, sentido este que é denominado concavidade, segundo Iezzi e Murakami (1997, p. 125): “Se $a > 0$ a concavidade da parábola está voltada para cima. Se $a < 0$, a concavidade da parábola está voltada para baixo”.

Figura 10 – Concavidade da parábola



Fonte: Autor.

Ainda segundo Iezzi e Murakami (1997), com o intuito de realizar o esboço do gráfico da função quadrática com precisão é necessário determinar os pontos de intersecção da parábola com os eixos coordenados, assim como a abscissa do ponto da parábola de maior ou menor ordenada. O ponto de intersecção da parábola com o eixo y é facilmente obtido tomando $x = 0$ em $f(x) = ax^2 + bx + c$, isto é, $f(0) = c$. Logo a parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$. Entretanto, para identificar os pontos de contato com o eixo Ox, é conveniente escrever a lei de associação da função quadrática na forma canônica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

adotando $b^2 - 4ac = \Delta$ tem-se:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]. \qquad (1)$$

As abscissas dos pontos de intersecção da parábola com o eixo x são denominados zeros da função e são determinados pelas raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, obtida quando toma-se $f(x) = 0$. Utilizando a forma canônica, tem-se:

$$0 = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto, pode-se concluir que:

a) Se $\Delta > 0$, a equação terá duas raízes distintas e portanto, a parábola terá dois pontos de intersecção com o eixo x.
b) Se $\Delta = 0$, a equação terá duas raízes iguais e a parábola terá um ponto de intersecção com o eixo x.
c) Se $\Delta < 0$, a equação não apresenta raízes reais e a parábola estará totalmente abaixo ou acima do eixo x.

Segundo Paiva (2013, p. 178), chama-se de vértice o ponto máximo ou mínimo da parábola que representa a função real $f(x) = ax^2 + bx + c$. Uma função quadrática admite um valor máximo quando a parábola que a representa tem concavidade voltada para baixo $(a < 0)$, ou, um valor mínimo quando a parábola que a representa tem concavidade voltada para cima $(a > 0)$. Dessa forma, considerando a função quadrática na forma canônica (1), considerando que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $-\frac{\Delta}{4a^2}$ tem valor constante, percebe-se que $y = f(x)$ assumirá valor máximo (para $a < 0$) ou um valor mínimo (para $a > 0$) quando a diferença $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ for a menor possível, que ocorre se $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$. Agora substituindo $x = \frac{-b}{2a}$ em (1) tem-se $y = \frac{-\Delta}{4a}$.

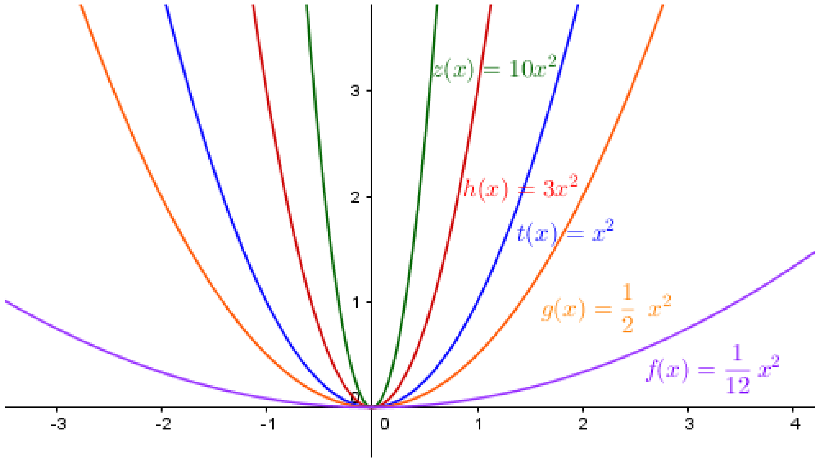
Portanto o vértice da parábola que representa a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é o ponto $V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

O eixo de simetria divide a parábola em dois ramos que possuem em comum o vértice (V), o ramo crescente da parábola e o ramo decrescente.

O sinal do parâmetro a é responsável pelo sentido da concavidade da parábola, como ilustrado na Figura 10. Além disso, quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola e quanto menor o módulo de a maior a abertura da parábola, como ilustrado a Figura 11.

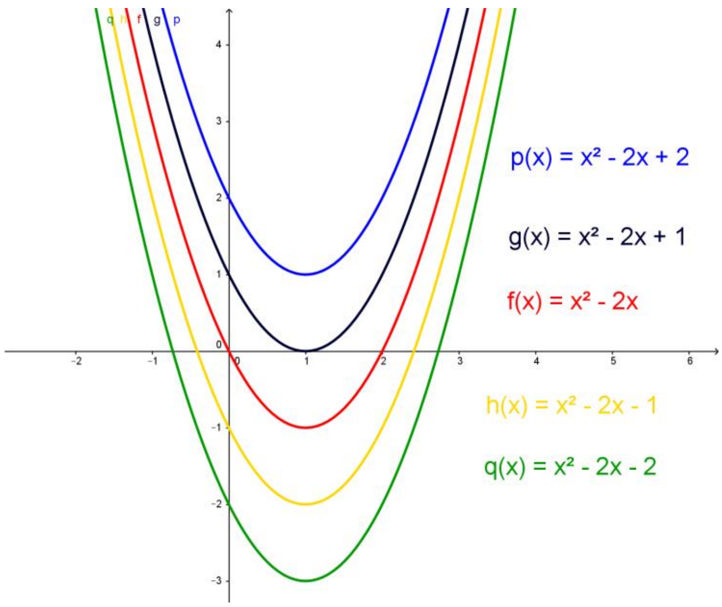
Na Figura 12, vê-se que o parâmetro c, que, como relatado anteriormente, representa a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y. Além disso, alterações no valor de c geram translações verticais de igual valor e sentido nos pontos da parábola.

Figura 11 – Abertura da parábola



Fonte: Autor.

Figura 12 – Translação vertical da parábola



Fonte: Autor.

São diversas as situações em que se podem aplicar os conhecimentos sobre a função quadrática e seu gráfico. Dante (2011a, p. 145) sugere que a parábola é bastante valorizada na arquitetura, na engenharia e nas artes, o que se verifica ao observarmos sua presença em inúmeras construções e objetos. Podemos perceber também, que a parábola descreve a trajetória de corpos em diversas situações, fazendo-se importante para o estudo de fenômenos físicos. Além disso, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2008, p. 73) destacam o uso da parábola para solucionar problemas em que se deve encontrar o valor máximo de uma grandeza estabelecida a partir de uma função quadrática, evitando-se a memorização de regras.

De acordo com Calçada e Sampaio (2015), ainda na Física, a função quadrática desempenha um papel importante modelando o movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Neste tipo de movimento, que tem como exemplo importante a queda livre dos corpos no vácuo, sujeitos apenas à ação da gravidade, a velocidade do corpo sofre sempre a mesma variação à medida que o tempo passa, caracterizando a existência de aceleração constante. Desta forma, as posições do móvel em sua trajetória se dão em dependência do quadrado do tempo de percurso através da função $S = S_0 + v_0 + \frac{1}{2}a.t^2$, na qual S_0 e v_0 representam respectivamente a posição e velocidade iniciais do móvel e a é a aceleração constante imposta ao móvel.

2.4 FUNÇÃO EXPONENCIAL

Segundo Lima (2013, p. 153), seja a um número real positivo e diferente de 1, chama-se função exponencial de base a, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, indicada pela notação $f(x) = a^x$.

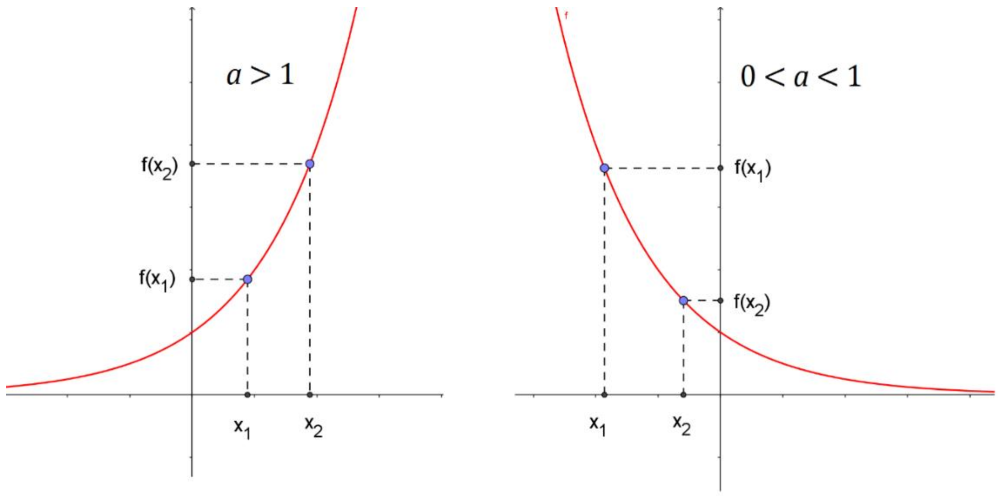
As restrições $a > 0$ e $a \neq 1$ dadas na definição são necessárias, pois para $a = 0$ e x negativo, ou, para $a < 0$ e $x = \frac{1}{2}$, por exemplo, não existiria $a^x \in \mathbb{R}$, já para $a = 1$ ter-se-ia $a^x = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o que caracterizaria uma função constante.

Ainda de acordo com Lima (2013, p. 156), se $a > 0$ e $a \neq 1$, todo número real positivo y é uma potência de a, isto é, existe algum $x \in \mathbb{R}$ tal que $a^x = y$, o que mostra que f é uma função sobrejetiva pois seu contradomínio foi adequadamente tomado como sendo $\mathbb{R}^+$ (conjunto dos números reais positivos).

Dante (2011a, p. 228) diz que o gráfico da função real $f(x) = a^x$ é uma figura chamada curva exponencial, que passa por $(0,1)$, não toca o eixo x e não tem pontos nos quadrantes III e IV do plano cartesiano.

Conforme descrito por Paiva (2013, p. 216), quando $a > 1$ tem-se $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 > x_1$ e quando $a < 1$ tem-se $a^{x_2} > a^{x_1} \Leftrightarrow x_2 < x_1$, situações tais que podem ser observadas diretamente no gráfico da função exponencial, concluindo assim que a curva é crescente quando $a > 1$ e decrescente para valores reais de a entre 0 e 1, como ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Gráficos da função exponencial para $a > 1$ e para $0 < a < 1$



Fonte: Autor.

Como pode-se perceber a função exponencial é crescente ou decrescente, portanto é injetiva (ver seção 2.1), junto ao fato de ser sobrejetiva caracteriza-se como uma bijeção. Logo a função exponencial admite função inversa.

Lima (2013, p. 158) sugere que se conheça as propriedades características de cada tipo de função real, a fim de fazer a escolha do instrumento matemático apropriado para resolver o problema que se estuda. Nesta definição de propósitos, o autor apresenta a prova de que a função exponencial é contínua e ilimitada superiormente, e ainda, mostra que as afirmações a seguir são equivalentes:

(1) $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

(2) $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $a = f(1)$;

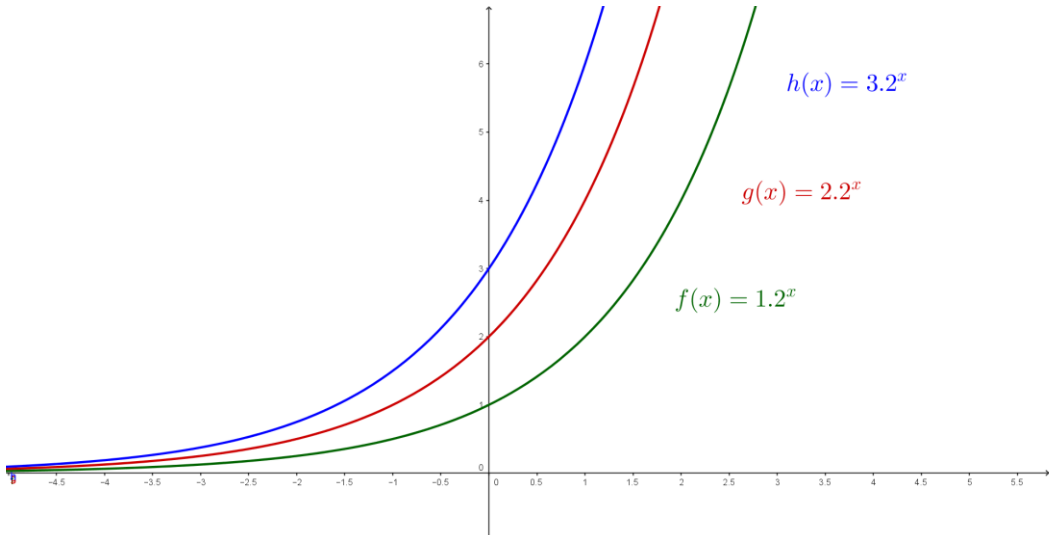
(3) $f(x + y) = f(x).f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

Como descrito por Dante (2011a) as ideias desenvolvidas no estudo da função exponencial podem ser aplicadas em outras funções em que a variável independente aparece no expoente, dentre estas funções Lima (2013, p. 159, grifo do autor) destaca:

“Dizemos que uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é do *tipo exponencial* quando se tem $g(x) = ba^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com a e b constantes positivas”.

Na Figura 14 vê-se o gráfico de funções de tipo exponencial $g(x) = ba^x$, nos quais percebe-se que o ponto de intersecção com o eixo y é $(0, b)$.

Figura 14 – Gráficos de funções de tipo exponencial



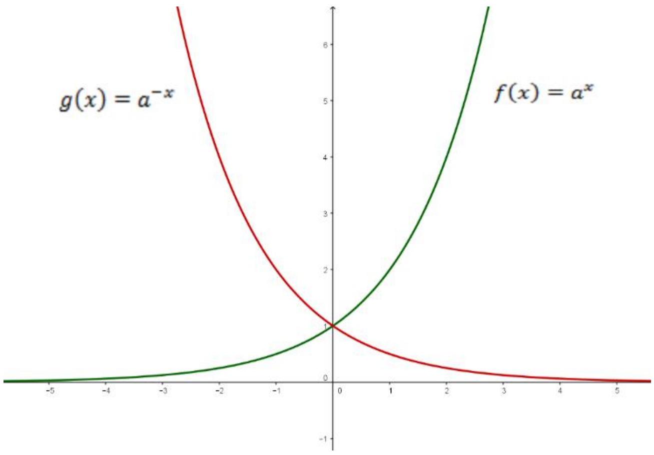
Fonte: Autor.

Dante (2011a, p. 236) chama de *recíproca da função exponencial* f*,* definida por $f(x) = a^x$, a função g tal que $g(x) = a^{-x}$. Conforme a Figura 15, pode-se perceber que as funções f e g são simétricas em relação ao eixo y, o que não é uma característica exclusiva da função exponencial, pois para qualquer função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, os gráficos de $f(x)$ e $f(-x)$ são simétricos em relação ao eixo y.

De acordo com Lima (2013) e Dante (2011a) uma função exponencial muito importante é aquela cuja base é o número irracional $e = 2{,}71828182\ldots$, ou seja, a função dada por $f(x) = e^x$, em que e é o limite da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quando o número natural n tende ao infinito. Funções envolvendo essa função exponencial, como por exemplo a função de tipo exponencial $f(x) = b.e^{\alpha x}$ surgem com frequência nas aplicações da matemática e na descrição de fenômenos naturais.

Enquanto a função afim garante um crescimento à taxa constante, as funções de tipo exponencial apresentam uma taxa de variação que depende do valor da função a cada instante, Lima (2013) explica que dada uma função de tipo exponencial f o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ é proporcional ao valor $f(x)$, mais especificamente $f(x+h)-f(x)=\varphi(h).f(x)$. Esta característica é o que indica a escolha de uma função de tipo exponencial para descrever uma determinada situação.

Figura 15 – Gráfico da função recíproca da função exponencial



Fonte: Autor.

Segundo os autores abordados, o crescimento exponencial é característico de certos fenômenos naturais e muitas situações do cotidiano, como: a desintegração radioativa; o crescimento populacional; a datação de materiais arqueológicos; o crescimento de uma colônia de bactérias; a concentração de uma solução em determinado meio; a aplicação de um capital a juros fixos etc.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 75) destacam as questões voltadas à matemática financeira como uma interessante aplicação do modelo exponencial. Com este propósito Dante (2011a, p. 239) apresenta a função de tipo exponencial $M=C.(1+i)^t$ que descreve o montante (M) em função do tempo (t) de aplicação de um capital (C) a uma taxa (i) de juros compostos.

2.5 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

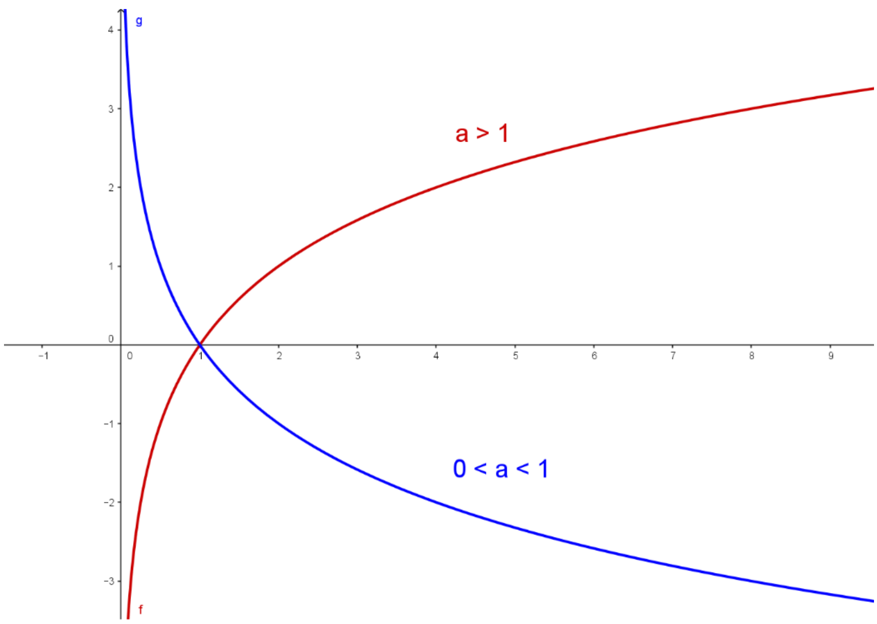
Como visto anteriormente, para todo número real positivo $a \neq 1$, a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$, é bijetiva, logo, admite função inversa.

Lima (2013, p. 164) e Dante (2011a, p. 263) definem a função logarítmica como a inversa da função exponencial, denotando-a por $\log_a x$. Segundo estes autores, chama-se função logarítmica de base a a função $\log_a x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$, que associa a cada número real positivo x um expoente y tal que $a^y = x$.

Lima (2013, p. 165) mostra que se a função exponencial tem a propriedade de transformar somas em produtos, a sua inversa, a função logarítmica, tem a propriedade de transformar produtos em somas, isto é, $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. O mesmo autor ainda ressalta que as funções logarítmicas mais utilizadas são aquelas de base $a > 1$, especialmente as de base 10, base 2 e base e.

Conforme Paiva (2013, p. 240) apresenta, a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$ e decrescente em todo o seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$, pois suas inversas assim o são (ver seção 2.1). Tal situação pode ser observada na Figura 16. Portanto, como $\log_a 1 = 0$, quando $a > 1$ os números compreendidos entre 0 e 1 tem logaritmo negativo e os números maiores do que 1 tem logaritmo positivo. Quando $0 < a < 1$ o $\log_a x$ é positivo para $0 < x < 1$ e negativo para $x > 1$.

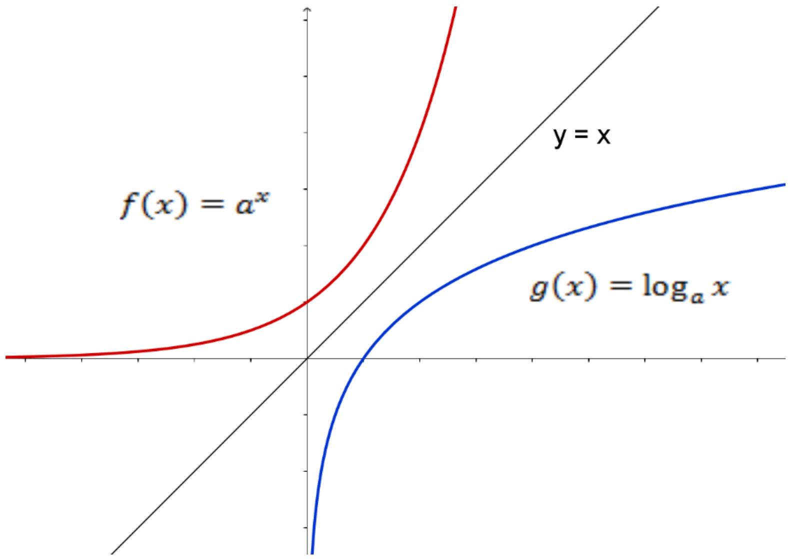
Figura 16 – Gráficos da função logarítmica para $a > 1$ e para $0 < a < 1$



Fonte: Autor.

Ao analisarmos o gráfico da função logarítmica percebemos que ele passa pelo ponto $(1,0)$, pois $\log_a 1 = 0$, e nunca toca o eixo y, consequentemente não ocupa pontos dos quadrantes II e III. Também pode-se notar que a função logarítmica é ilimitada superior e inferiormente. Como descrito por Lima (2013, p. 167), ao contrário da função exponencial, que cresce rapidamente quando x tende ao infinito, a função logarítmica cresce lentamente quando aumentamos os valores de x. Este contraste fica evidente ao observarmos os gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, representados na Figura 17, que, como sabe-se são simétricos em relação à reta $y = x$.

Figura 17 – Gráficos das funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$



Fonte: Autor.

Uma propriedade importante das funções logarítmicas, segundo Lima (2013, p. 166) e Dante (2011a, p. 267), é que dadas duas funções quaisquer $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$ existem constantes positivas c e d tais que $f(x) = c.g(x)$ e $g(x) = d.f(x)$, mais precisamente $\log_a x = \log_a b \, . \log_b x$, conhecida como fórmula de mudança de base de logaritmos.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p. 75) relatam que, nos problemas de aplicação da função exponencial, em geral é preciso resolver equações exponenciais, o que pede o uso da função inversa, a função logarítmica. Da mesma forma, as demais obras estudadas nesta pesquisa, apresentam o uso das funções logarítmicas para modelar os mesmos fenômenos e situações nas quais usa-se a função exponencial, devido a necessidade da troca da variável dependente pela variável independente nos modelos usados para abordar cada situação.

Um bom exemplo disso, dá-se na Matemática Financeira quando se pretende descrever o tempo (t), de uma aplicação a juros compostos, em função do montante (M) que se pode resgatar decorrido este tempo, logo tem-se o modelo $t = \frac{1}{\log(1+i)} . \log M$, no qual i representa a taxa de juros constante.

Capítulo 3

3 RELATO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo, apresenta-se inicialmente a abordagem metodológica dada a esta pesquisa, junto as estratégias que orientaram a organização, observação, relato e análise das atividades desenvolvidas. Posteriormente, é relatada e analisada a proposta pedagógica aplicada para o estudo de funções, apresentada nas demais seções de acordo com os assuntos abordados.

3.1 ESTRATÉGIAS METODOLÓGICAS

Nesta seção, descreve-se os princípios metodológicos que orientaram o desenvolvimento desta pesquisa, na qual buscou-se investigar a importância da interpretação gráfica como instrumento facilitador na construção de conceitos sobre funções e na compreensão de suas características.

Procurando atingir este objetivo optou-se neste trabalho por uma pesquisa qualitativa, pois segundo Bogdan e Biklen (1982, apud André e Lüdke, 1986) neste tipo de abordagem todos os dados da realidade, predominantemente descritivos, são considerados importantes e obtidos pelo contato direto e prolongado do pesquisador com a situação investigada, enfatiza-se mais o processo do que o produto e se preocupa em retratar a perspectiva dos participantes.

Segundo André e Lüdke (1986, p. 13), entre as várias formas que pode assumir uma pesquisa qualitativa, destaca-se o estudo de caso, pelo seu potencial para estudar as questões relacionadas à educação. Portanto, esta forma de abordagem foi adotada neste trabalho. Os mesmos autores citam as características de um estudo de caso, dentre as quais destaca-se: a possibilidade de novas descobertas durante o estudo; a ênfase na interpretação em contexto; o relato da realidade de forma completa; a variedade de fontes de informação; a representação de diferentes pontos de vista e os relatos em um estilo informal.

Como proposto por Nisbet e Watt (1978, apud André e Lüdke, 1986), esta investigação foi realizada com base nas três fases do desenvolvimento de um estudo de caso, que compreendem: a formulação das questões que dão origem à pesquisa; a delimitação do estudo por via da coleta de dados e a análise sistemática das informações juntamente a elaboração do relatório.

A coleta de informações para esta pesquisa fez-se por meio da elaboração e aplicação de uma sequência didática sobre funções direcionada a uma turma de 12 alunos do 3º ano do Ensino Médio noturno de uma escola estadual do município de Canela no Estado do Rio Grande do Sul. As atividades propostas aos alunos, tiveram como objetivo proporcionar o estudo do tema por meio da abordagem visual e análise gráfica das funções estudadas, da metodologia de modelagem matemática, da resolução de problemas e do uso de tecnologias.

A sequência didática, previamente elaborada, foi dividida para aplicação em quatro oficinas que se destinaram a levar os aprendizes a construir conceitos e definições sobre funções e compreender suas características por meio de reflexões induzidas por questionamentos feitos pelo professor e do estabelecimento de relações entre diferentes registros de um mesmo objeto matemático, visando propiciar o maior número de articulações possíveis entre estes registros.

A primeira oficina, com duração de 6 períodos de 45 minutos cada, tratou da definição de função, assim como, das definições de domínio, contradomínio, conjunto imagem, função crescente, função decrescente, função par e função ímpar. Ainda neste bloco de atividades estudaram-se os conceitos de máximos, mínimos e zeros da função.

Já na segunda oficina abordou-se, durante 5 períodos, a definição de função afim, bem como, a construção de conceitos referentes a seus casos particulares, como: função linear, função identidade e função constante. Além disso, estudaram-se as características destas funções e algumas de suas aplicações.

A terceira oficina reservou-se ao estudo da função quadrática, de algumas de suas características e aplicações. Para aplicar as atividades referentes a esta etapa fez-se uso de 3 períodos, da mesma forma que na última oficina, na qual estudaram-se a função exponencial e a função logarítmica, suas respectivas características e aplicações.

Durante a aplicação da proposta a qual se destinou este trabalho, necessitou-se da sala de informática por 15 períodos e do laboratório de ciências por 2 períodos. Na sala de informática foram utilizados 13 notebooks, um para cada aluno e um para o professor. Cada notebook possuía o software GeoGebra previamente instalado. O professor ainda fez uso de um projetor e de uma lousa, a fim de orientar as atividades realizadas pelos alunos. No laboratório de ciências utilizaram-se 4 torneiras, 4 réguas de 30 centímetros, 4 provetas graduadas e 4 frascos cilíndricos retos, com o propósito de estudar a função afim a partir de uma atividade de modelagem matemática.

De acordo com André e Lüdke (1986, p. 7) os métodos atuais de investigação apresentam "uma nova atitude de pesquisa, que coloca o pesquisador no meio da cena investigada, participando dela e tomando partido na trama da peça". Nesta definição de propósitos, o professor autor deste trabalho foi quem aplicou as atividades e realizou a coleta de dados, por meio da observação das aulas e de questionários respondidos pelos alunos. Ainda segundo André e Lüdke (1986) a observação direta permite também que o observador chegue mais perto da perspectiva dos sujeitos e confronte o que vai captando da realidade com o que esperava encontrar.

No início de cada uma das quatro oficinas em que foi dividida a sequência didática, os alunos receberam impressos os textos, definições e atividades que seriam utilizados no decorrer da aula, posteriormente, ao término das atividades, recolheram-se os materiais produzidos pelos alunos, para ter-se acesso as respostas e soluções dadas por eles às questões levantadas.

Ainda ao fim de cada bloco de aulas, referentes a uma oficina, fez-se o registro das observações de como transcorreram as atividades, levando-se em conta todos os comentários e ações que se julgaram importantes para a pesquisa. Para tal, levou-se em consideração as sugestões dadas por Bogdan e Biklen (1982, apud André e Lüdke, 1986) sobre o que deve ser incluído nas anotações de campo: a descrição dos sujeitos; a reconstrução dos diálogos, a descrição das atividades e comportamentos das pessoas observadas, registrando a sequência em que ambos ocorrem; os comportamentos e intervenções do professor e as reflexões feitas pelo observador.

O relato das atividades foi dividido em quatro blocos, cada bloco corresponde as atividades realizadas em uma única oficina, visando deixar claro para o leitor os objetivos aos quais se destinaram cada oficina e a metodologia utilizada na aplicação das atividades. A transcrição dos dados obtidos por meio da aplicação e observação da sequência didática referente a cada oficina realizou-se de forma cronológica conforme as atividades foram aplicadas em sala de aula.

Foram registradas todas as intervenções e falas do professor durante as aulas e anexadas as respostas dadas pelos alunos aos questionamentos levantados, em vista de vislumbrar todas as impressões e percepções do professor, observador e aplicador das atividades, e a real apreensão de saberes por parte dos alunos, a fim de tornar o relato o mais real possível, podendo assim o leitor fazer sua própria análise do que julgou adequado, ou não, nas interações que se deram em sala de aula.

Bogdan e Biklen (1982, apud André e Lüdke, 1986, p. 46) sugerem dentre procedimentos para a análise de dados que:

> É conveniente que no processo de delimitação progressiva do foco principal da investigação sejam também formuladas algumas questões ou proposições específicas, em torno das quais a atividades de coleta possa ser sistematizada. Além de favorecer a análise, essas questões possibilitam a articulação entre os pressupostos teóricos do estudo e os dados da realidade.

Dessa forma a análise dos dados obtidos através dos resultados das atividades aplicadas, fez-se em busca de responder as questões que nortearam esta pesquisa, relacionando as descobertas feitas durante a investigação com os pressupostos teóricos apresentados nos Capítulos 1 e 2 deste trabalho.

Ao relatar e analisar as atividades tentou-se identificar as dificuldades apresentadas pelos alunos na construção de conceitos e na resolução de problemas referentes às funções e analisar o desenvolvimento dos estudantes em seu aprendizado, as relações que foram capazes de estabelecer e as reflexões e interações que se deram em aula. Entremeio ao relato, discutiu-se as contribuições trazidas pela abordagem dada neste trabalho ao tema funções para que os estudantes pudessem superar os obstáculos que se impõem ao aprendizado de matemática, em especial deste conteúdo.

Ainda buscou-se examinar a metodologia baseada na abordagem visual e análise gráfica dentro dos trabalhos de modelagem matemática e resolução de problemas, bem como a valia do software GeoGebra para o estudo de funções. Porém sempre que surgiram novas discussões relevantes ao processo de ensino-aprendizagem de matemática, estas foram analisadas, a fim de contribuir para a avaliação da proposta apresentada neste trabalho e para construção de novas propostas pedagógicas relacionadas ao tema.

Algumas conclusões parciais foram estabelecidas no decorrer do relato, junto as informações que lhe serviram de embasamento, para facilitar a análise dos dados, o estabelecimento de relações pelo pesquisador e as reflexões à cerca dos fatos pelo leitor.

Na sequência são relatadas as atividades realizadas em sala de aula durante a aplicação das 4 oficinas que formaram a sequência didática proposta neste estudo, em simultâneo, registraram-se todas as percepções do professor que ministrou as aulas, bem como, as considerações e discussões realizadas, de modo a analisar a proposta pedagógica a qual se destinou esta pesquisa.

3.2 OFICINA 1 – FUNÇÕES E CONCEITOS

A primeira oficina, que trata de função e conceitos subjacentes, teve por objetivo lançar um segundo olhar sobre a definição de função, assim como levar os alunos a intuir ideias inerentes ao tema por meio da abordagem visual, da exposição à diversos gráficos e relações. Ainda nesta oficina, os alunos seriam apresentados ao software GeoGebra para que pudessem fazer uso deste recurso na abstração e construção de conceitos e características referentes ao tema funções.

O objetivo maior do uso de gráficos foi apresentar o conceito de função informalmente, estabelecendo relações com a terminologia relacionada a esse assunto. Tais recursos podem ainda chamar a atenção do aluno e mostrar que a Matemática está presente em seu cotidiano, que ela é útil no dia a dia e que também é uma forma de linguagem.

3.2.1 Iniciando a construção do conceito de função

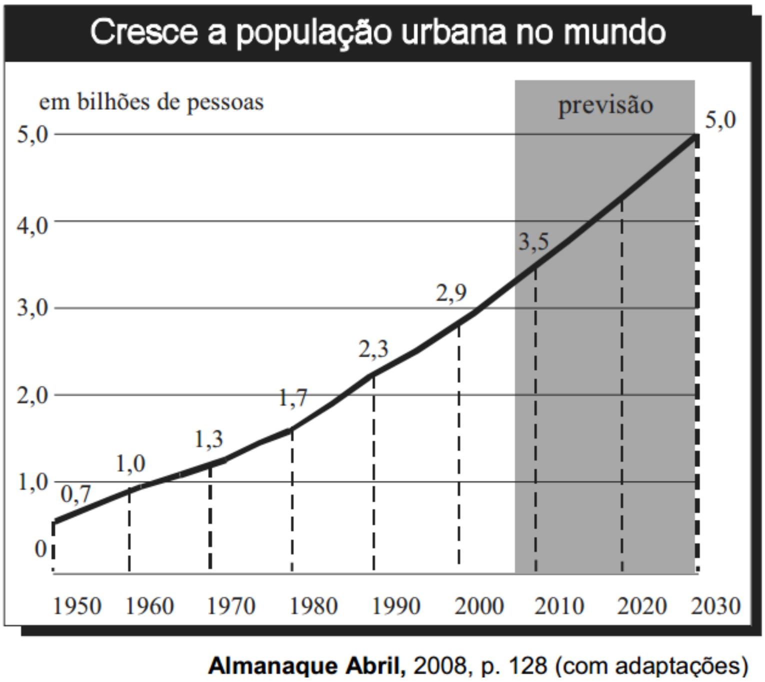
No primeiro momento os alunos foram direcionados ao laboratório de informática e receberam cópias do texto sobre funções e das atividades que seriam desenvolvidas, conforme é possível visualizar no “APÊNDICE A” deste trabalho.

O laboratório estava organizado de forma que cada um dos 11 alunos presentes recebeu um notebook ligado e conectado a um mouse, com a janela do GeoGebra minimizada sobre a barra de ferramentas. A tela do notebook do professor foi projetada na parede ao fundo da sala.

Posteriormente o professor mostrou dois gráficos que relacionam grandezas para que os alunos pudessem perceber as ideias de variação e dependência entre grandezas e ainda a importância de tais registros para a previsão de resultados.

Ao apresentar o primeiro gráfico, representado abaixo na Figura 18, o professor fez as seguintes perguntas: O que representam os números no eixo horizontal? E no eixo vertical? Que grandezas o gráfico está relacionando?

Figura 18 – Gráfico da população urbana no mundo



Fonte: Almanaque Abril (2008, p.128, apud ENEM – 2008).

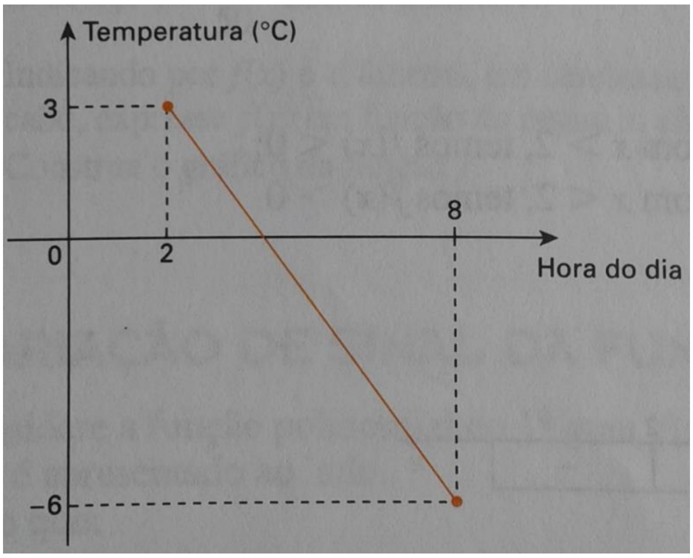
Na sua maioria, os alunos demonstraram perceber que os números na horizontal representam os anos e os números na vertical representam a população mundial, porém não atentaram para o fato de os dados serem relativos apenas a população urbana, evidenciando que não interpretaram ou não deram atenção a todas as informações disponíveis no gráfico.

Uma aluna perguntou o que significa a palavra grandeza, o professor respondeu que é algo que pode ser medido e pediu que os colegas dessem exemplos. Surgiram exemplos como horas, comprimento e temperatura.

O professor também atentou para o fato de que a parte cinza do gráfico representa uma previsão com base nos dados anteriores. Neste momento um aluno comentou que não necessariamente o previsto aconteceria. Logo, o professor pode complementar a fala do aluno dizendo que a matemática possui ferramentas e métodos próprios para calcular as margens de erro e a confiabilidade da previsão. Induzindo a turma a notar a importância da matemática e das funções na previsão de fenômenos.

Ao apresentar o segundo gráfico, representado na Figura 19, a fim de observar os conhecimentos prévios dos alunos o professor fez as seguintes perguntas: Qual a temperatura máxima registrada no gráfico? A que horas ocorreu este registro? O que acontecem com as temperaturas no período entre 2 horas e 8 horas?

Figura 19 – Gráfico das temperaturas registradas num dia de inverno em São Joaquim



Fonte: Autor.

Um aluno respondeu que a temperatura máxima registrada foi de 8 °C. O professor pediu que analisassem o gráfico com mais cuidado, então os alunos mostraram perceber que a temperatura máxima foi de 3 °C registrada às 2 horas. Da mesma forma concordaram em dizer que a temperatura caiu entre as 2 horas e as 8 horas. Durante a conversa foi possível comentar de forma sutil conceitos como valor máximo, crescimento e decrescimento de uma função. O professor ainda relatou que os gráficos acima representam funções, pois as grandezas expressas variam uma em função da outra.

Visando a construção de conceitos por parte dos alunos, o processo de ensino-aprendizagem deve levar em conta os conhecimentos prévios dos educandos, pois os conhecimentos teóricos e científicos, por si só, podem não ter significado para o aluno na etapa da construção do conceito de função como discutido na seção 1.3.

Na sequência os alunos foram convidados a ler o texto sobre função apresentado no "APÊNDICE A", que trata da definição formal de função e de alguns de seus conceitos subsidiários como domínio, contradomínio e imagem. A grande maioria dos alunos mostrou-se confusa com a leitura do texto, alguns relataram não lembrar nada do assunto e outros disseram jamais ter tido contato com o conteúdo apresentado. O que pode ser justificado pela falta de aulas e professores de matemática nos anos anteriores.

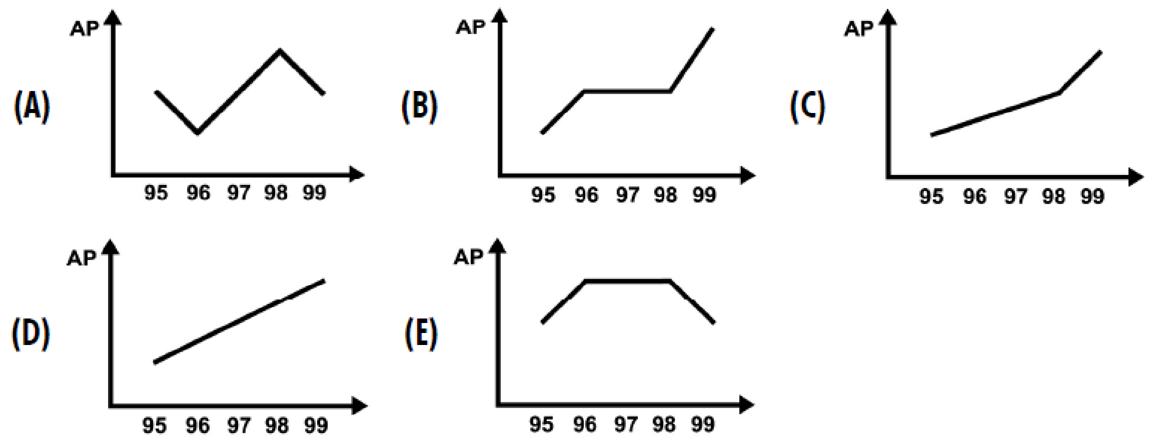
A fim de analisar o raciocínio e as percepções prévias dos alunos frente a análise e interpretação de gráficos o professor propôs-lhes o problema apresentado na Figura 20, extraído do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM, 2008, p. 11), denominado nas atividades como "Problema 1".

Figura 20 – Problema 1

O quadro apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

	Safra				
	1995	1996	1997	1998	1999
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1.500	2.500	2.500	2.500	4.000

O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:



Fonte: ENEM (2008, p. 11).

A maioria dos alunos disse não ter ideias para resolver o problema, exceto por um aluno que afirmou que a resposta correta estava representada no item b, justificando a afirmação pelos valores da segunda linha da tabela, os quais começam com um valor mínimo, permanecem constantes por um período e posteriormente assumem o valor máximo.

Porém quando questionados se os valores da segunda linha da tabela representavam a área plantada (AP), os alunos puderam perceber que esta grandeza não estava explícita na tabela. Mesmo sendo instigados pelo professor a relacionar os dados a fim de obter valores para a área plantada (AP) os alunos não obtiveram resultados.

Durante a apresentação do Problema 1, pode-se perceber que os alunos apresentaram grandes dificuldades para relacionar grandezas, porém um aluno mostrou-se inclinado a relacionar os dados numéricos e gráficos o que veio a constatar que a apresentação de relações por meio de gráficos faz-se familiar, atrativa e de fácil compreensão aos alunos.

Foi acordado entre professor e alunos que o Problema 1 seria retomado ao término da oficina sobre funções e conceitos pois o uso do software GeoGebra, que lhes seria apresentado, e as atividades a seguir ajudar-lhes-iam a aprender e entender melhor os conceitos necessários à resolução.

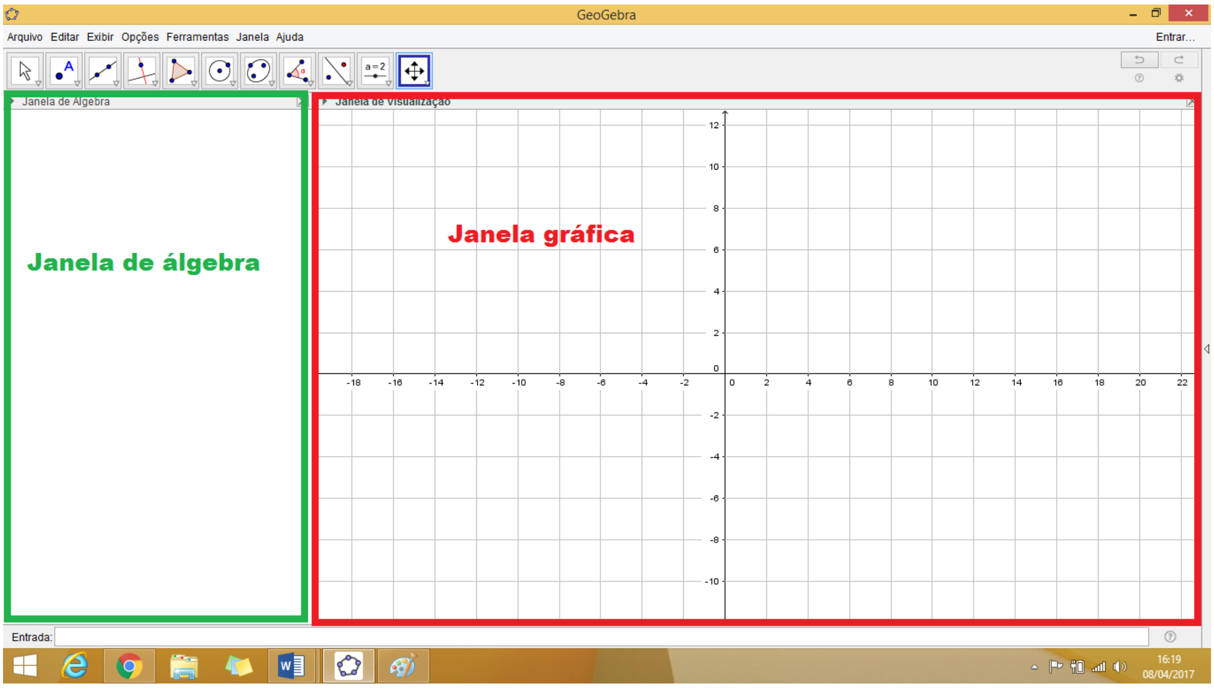
3.2.2 Apresentando o GeoGebra

Inicialmente os alunos abriram o software GeoGebra presente na área de trabalho dos notebooks e foram informados pelo professor de que a janela gráfica do GeoGebra (Figura 21) é como uma folha de caderno de desenho, na qual pode-se desenhar os objetos geométricos e interagir com as figuras. Ao lado da janela gráfica conheceram a janela de álgebra, a qual exibe todos os objetos construídos e suas equações ou coordenadas.

Posteriormente os alunos foram apresentados a entrada de comandos do GeoGebra, indicada na Figura 22, a qual será importante no decorrer das atividades, pois com ela podemos realizar cálculos e construir objetos diretamente a partir de expressões algébricas ou coordenadas.

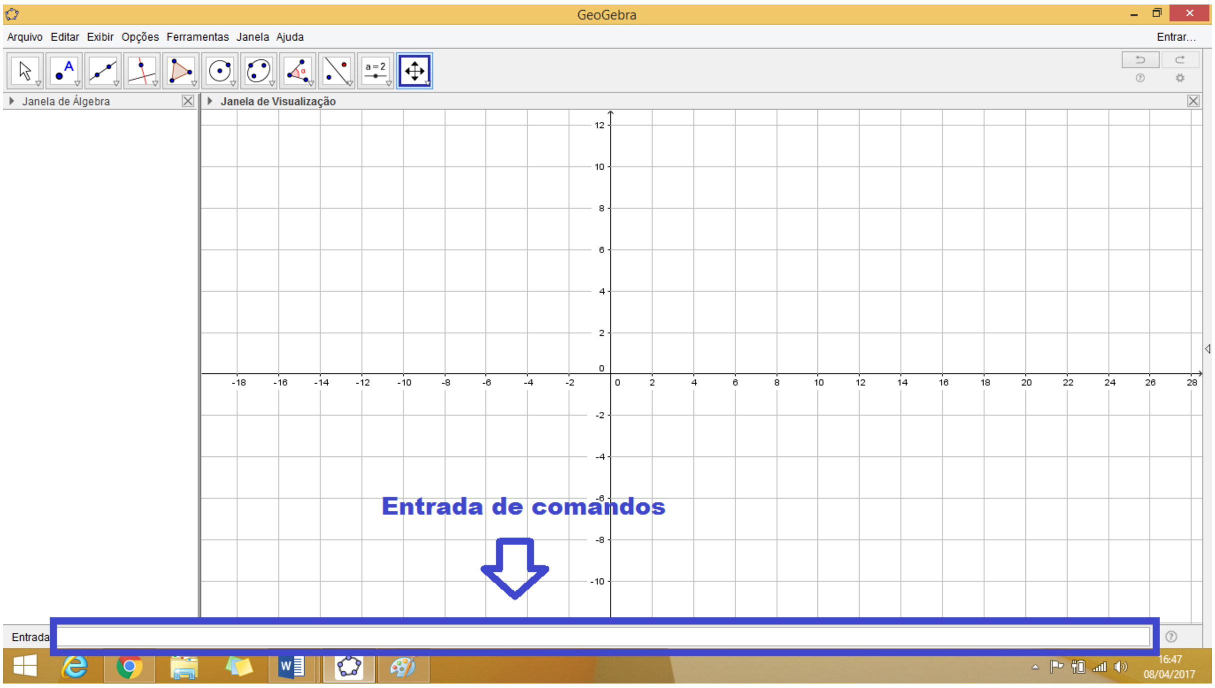
Por fim o professor apresentou a barra de ferramentas (Figura 23) e explicou para que servem alguns dos comandos que seriam usados com mais frequência.

Figura 21 – Janela de álgebra e janela gráfica do GeoGebra



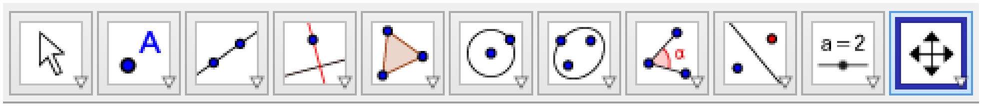
Fonte: Autor.

Figura 22 – Entrada de comandos do GeoGebra



Fonte: Autor.

Figura 23 – Barra de ferramentas do GeoGebra



Fonte: Autor.

Pode-se notar que pelo simples fato de estarem usando o computador os alunos se motivaram a conhecer o programa, pois, começaram imediatamente a clicar sobre os ícones apresentados na interface do GeoGebra tentando identificar suas respectivas funções.

3.2.3 Atividade 1 – Definição de função, domínio, contradomínio e imagem

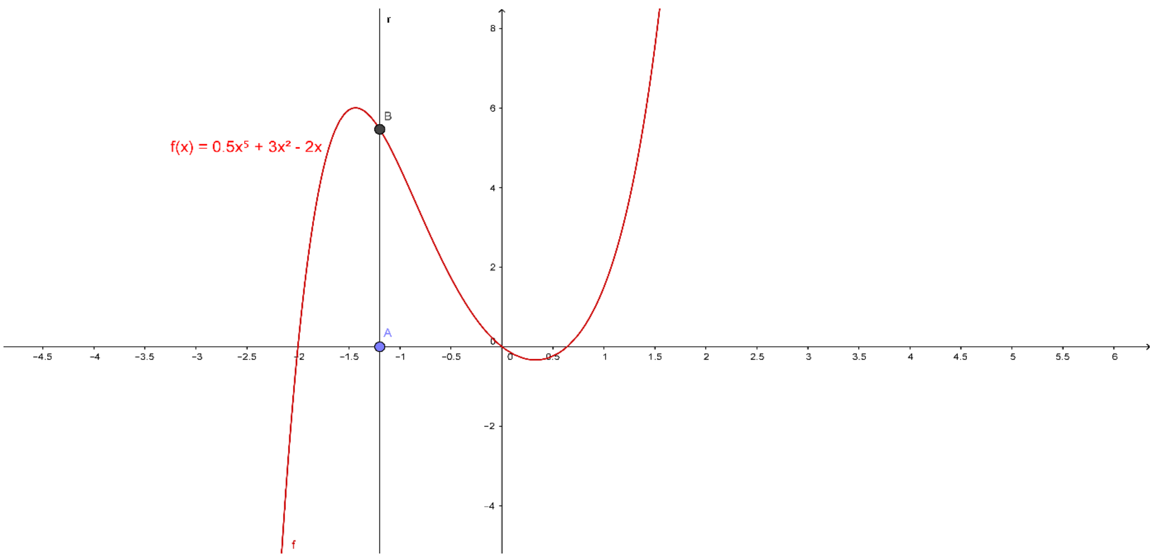
Durante a atividade 1, cujo roteiro está descrito abaixo e no “APÊNDICE A”, referente a folha impressa entregue aos alunos, tentou-se facilitar aos aprendizes a compreensão da definição de função, domínio, contradomínio e imagem a partir da análise de gráficos e do estabelecimento de relações entre gráficos, expressões analíticas e definições formais.

A) Represente no GeoGebra a relação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^2 - 2x$. Sobre o eixo x crie um ponto A e uma reta r perpendicular à $y = 0$ (eixo x) que passe por este ponto. Mova o ponto A sobre o domínio de f e perceba que r intersecta o gráfico de f num único ponto, verificando assim a definição de função.

Apesar do professor orientar a construção do gráfico, através da projeção na parede, os alunos apresentaram muitas dificuldades no momento de digitar a expressão $f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^2 - 2x$ na entrada de comandos do software. Alguns digitaram toda a relação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^2 - 2x$, outros fizeram uso de letras maiúsculas ao digitar, porém o software não entende a expressão “$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$” nem o uso de letras maiúsculas para representar funções. Alguns alunos ainda precisaram de auxílio para plotar o ponto A sobre o eixo x, demonstrando falta de atenção e coordenação motora.

A atividade durou mais tempo do que o esperado, entretanto, após constantes intervenções do professor e de colegas, todos conseguiram construir o material representado na Figura 24 abaixo.

Figura 24 – Atividade 1 – A



Fonte: Autor.

Ao mover o ponto A sobre o eixo x os alunos puderam compreender que estavam percorrendo valores pertencentes ao domínio da função f e ainda observaram suas respectivas imagens descritas pela ordenada do ponto B, criado pela intersecção da função f com a reta r. Novamente de posse da definição formal de função presente no texto, os alunos conseguiram, mediante a interpretação gráfica e de algumas intervenções do professor, relacionar o domínio e o contradomínio da função f com os números reais representados respectivamente no eixo x e no eixo y.

Em seguida, o professor questionou se para cada elemento x pertencente ao domínio de f, a correspondência dada associava um único elemento y pertencente ao contradomínio. Com a falta de respostas dos alunos o professor orientou que estes movessem o ponto A, e consequentemente a reta r, e observassem se para cada valor de x, representado pela posição de A sobre o eixo das abscissas, a reta r intersectava o gráfico de f em um único ponto. Muitos alunos disseram que sim, para cada “x” existe um “y”. O professor lembrou-os do fato de que cada elemento x, pertencente ao domínio, pode ter apenas um representante y no gráfico de f, a fim de que o gráfico represente uma função.

Dando sequência a atividade, os alunos foram convidados a resolver o item B da atividade 1.

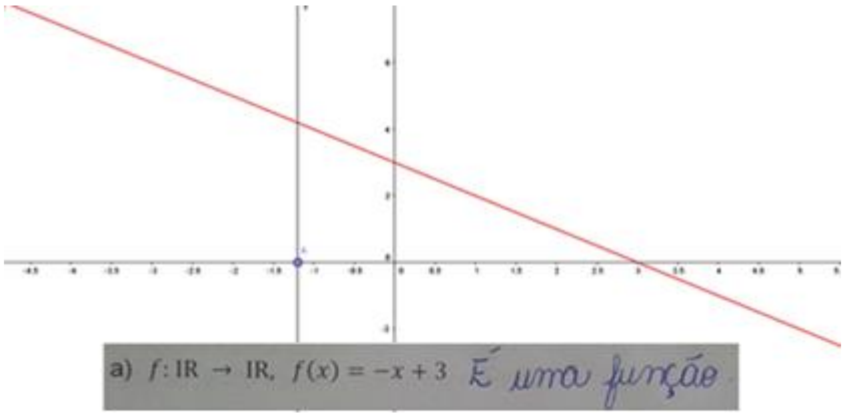
B) Represente graficamente as relações abaixo e verifique se representam funções para os respectivos domínios e contradomínios. Caso a relação não seja função, justifique.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = -x + 3$.
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \ln(x)$.
c) $f: [-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \; y = \sqrt{x+1}$.
d) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \; y^2 - x = 0$.

No decorrer da atividade, formam muitas as dificuldades apresentadas pelos alunos, normalmente relacionadas à interpretação dos símbolos matemáticos presentes nas expressões $[-1, +\infty[$, $\mathbb{R}_+$ e $\ln(x)$. Ainda que necessárias para expressar certos conceitos e definições, pode-se perceber que a simbologia e terminologia muitas vezes usada na matemática faz-se totalmente estranha aos alunos. Neste momento da oficina, notou-se que seria importante ter oferecido aos estudantes momentos de revisão sobre intervalos reais e operações com logaritmos e raízes.

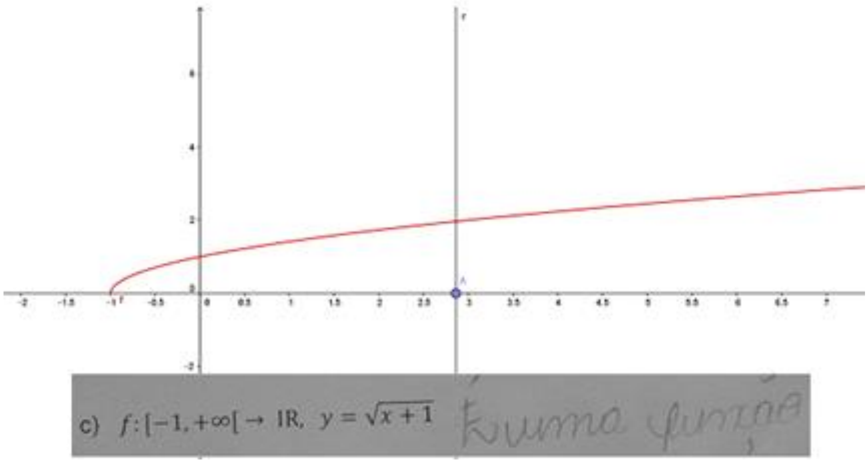
Tendo construído os gráficos e a reta perpendicular ao eixo x, os estudantes mostraram-se capazes de verificar se uma relação representa, ou não, uma função, pela análise de seu gráfico em conjunto com a expressão que a representa. Seguem, nas Figuras 25 e 26, as construções realizadas e algumas das respostas dadas ao item B pelos alunos para os casos que representam funções.

Figura 25 – Gráfico e análise da relação $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = -x + 3$



Fonte: Autor.

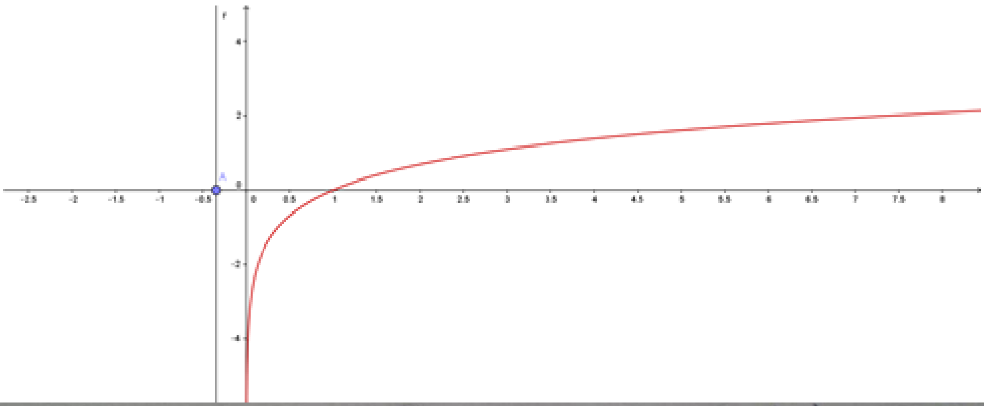
Figura 26 – Gráfico e análise da relação $f: [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R},\ y = \sqrt{x+1}$

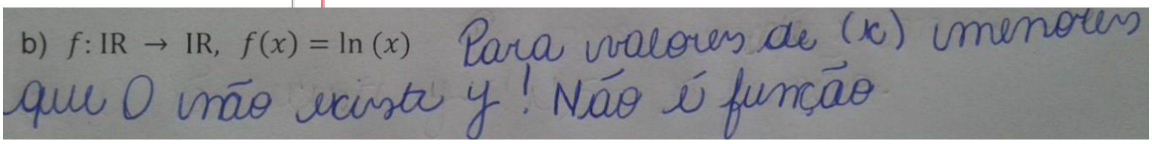


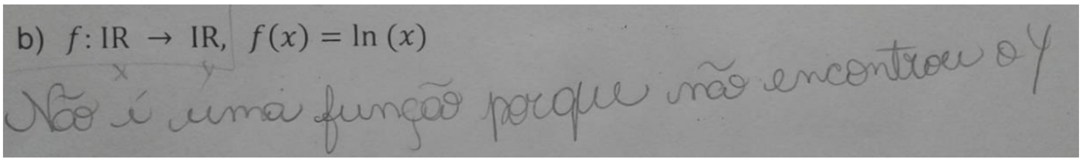
Fonte: Autor.

Nos demais casos, os alunos mostraram por meio de suas respostas terem identificado que as relações não representam funções, porém foram muitas as dificuldades enfrentadas por eles para transcrever seu raciocínio ao justificar o porquê das relações não expressarem funções. O que pode ser verificado nas Figuras 27 e 28 que ilustram as construções realizadas no GeoGebra pelos alunos e apresentam algumas de suas respostas aos itens b e d da questão B.

Figura 27 – Gráfico e análise da relação $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(x)$

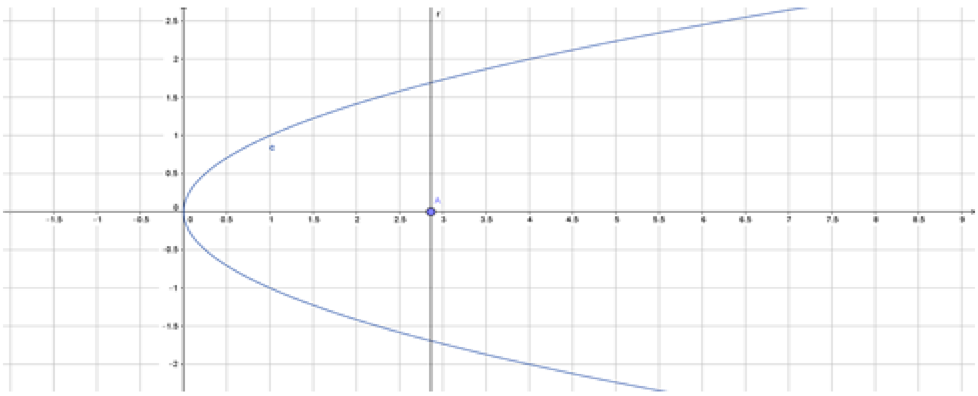


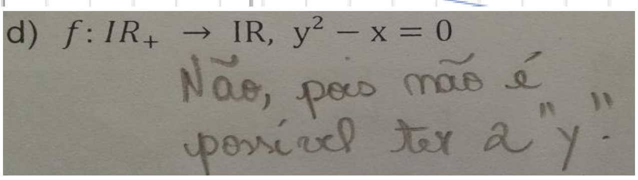

b) f: IR → IR, $f(x) = \ln(x)$ Para valores de (x) menores que 0 não existe y! Não é função

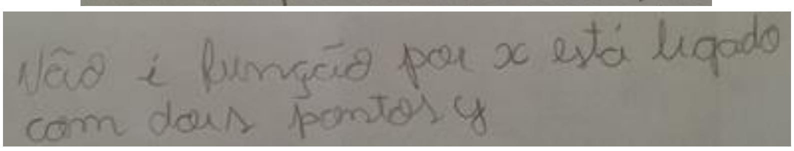

b) f: IR → IR, $f(x) = \ln(x)$
Não é uma função porque não encontrou o y

Fonte: Autor.

Figura 28 – Gráfico e análise da relação $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y^2 - x = 0$




d) $f: IR_+ \to$ IR, $y^2 - x = 0$
Não, pois não é possível ter 2 "y".


Não é função pois x está ligado com dois pontos y

Fonte: Autor.

Após as constatações iniciais feitas pelos alunos (Figura 27), coube ao professor lembra-los do fato de que o logaritmo natural de um número real x não é definido para $x \leq 0$. Portanto, para $x \leq 0$ não existe $y \in \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$, logo a relação só faz sentido se o domínio fosse $\mathbb{R}_+^*$.

Nas respostas dadas para o item d (Figura 28) pode-se perceber a dificuldade dos alunos em escrever e usar a terminologia matemática adequada a cada situação, o que demonstra a falta de hábito dos estudantes em trabalhar com problemas que os façam expressar e escrever raciocínios matemáticos. Muitas vezes as atividades direcionadas aos estudantes visam apenas a reprodução de métodos e algoritmos já ilustrados, buscando uma aprendizagem mecânica, o que se distância das concepções sobre aprendizagem apresentadas neste trabalho. Cabe então ressaltar a necessidade de apresentar questões que levem o aluno a expor seu pensamento e escrevê-lo.

Dando continuidade à atividade 1, os alunos foram convidados a resolver respectivamente as questões C e D.

C) Construa o gráfico de cada função real abaixo e expresse seu conjunto imagem Im(f).

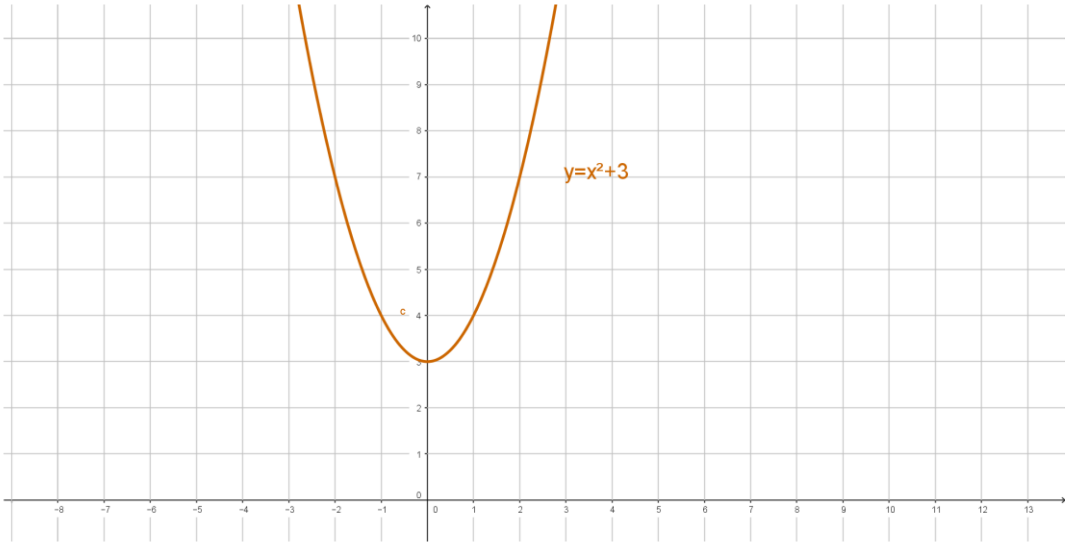
a) $y = x^2 + 3$

b) $y = 2.sen(x)$

D) Estabeleça relações entre a imagem das funções do item C e suas expressões algébricas.

A maioria dos alunos relatou não lembrar o que significa o termo imagem, retomaram ao texto impresso sobre funções no qual puderam ler a definição de conjunto imagem e ao representar o primeiro gráfico no GeoGebra estabeleceram a relação entre a definição de imagem e sua representação no gráfico da função. Segue a construção do gráfico de $y = x^2 + 3$ na Figura 29.

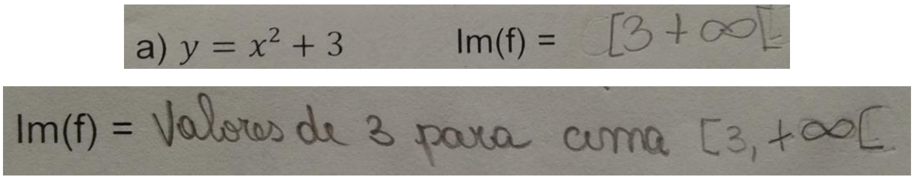
Figura 29 – Gráfico da função $y = x^2 + 3$



Fonte: Autor.

Apesar de terem dificuldades para representar o conjunto imagem usando a simbologia adequada, através de suas falas os alunos demonstraram visualizar que a imagem da função acima era composta por valores reais de y maiores ou iguais a 3. O que pode ser confirmado pelas respostas, representadas na Figura 30.

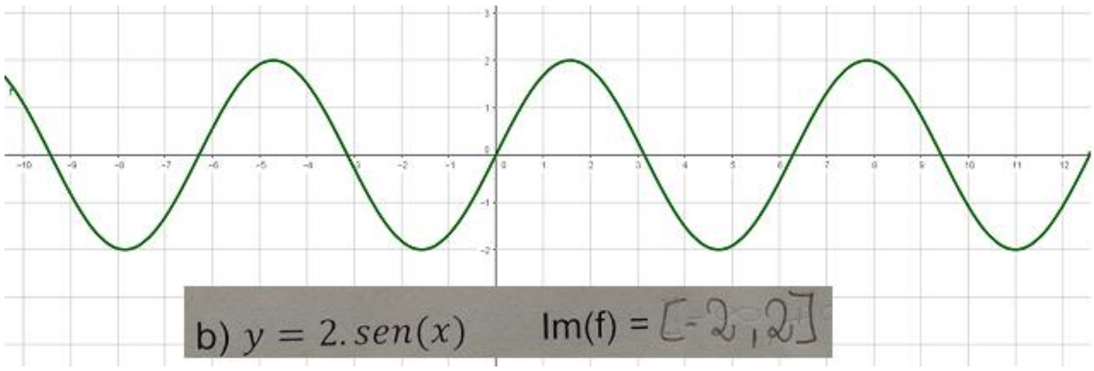
Figura 30 – Respostas dadas ao item a da questão C



Fonte: Autor.

Ao desenhar o gráfico da função $y = 2.sen(x)$, alguns alunos perguntaram o significado de “sen”. Logo o professor teve que retomar o conceito de seno no triângulo retângulo e na circunferência trigonométrica. Posteriormente, analisando o gráfico construído, os alunos puderam expressar a resposta correta como mostra a Figura 31.

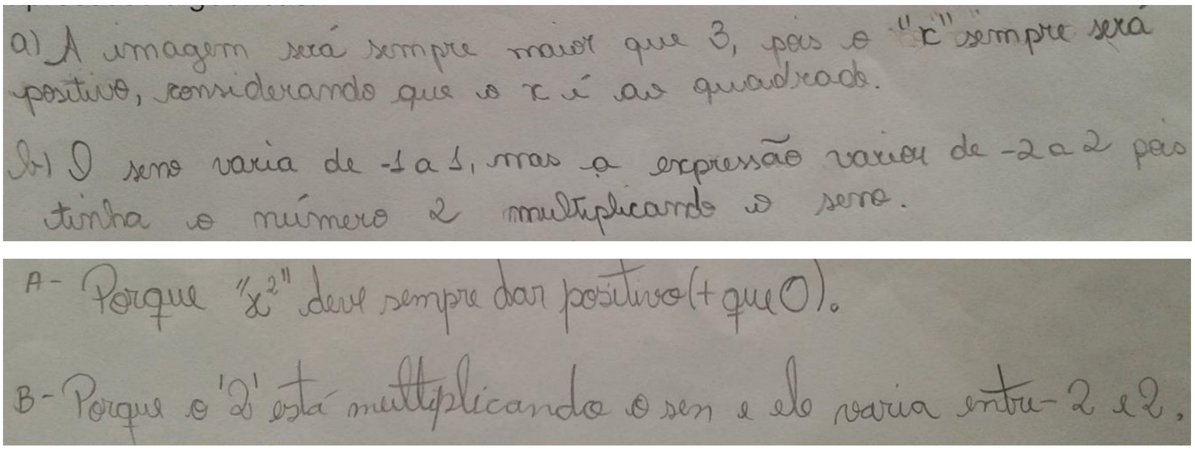
Figura 31 – Gráfico e conjunto imagem da função $y = 2.sen(x)$



Fonte: Autor.

Para que os estudantes pudessem responder ao item D, no qual deveriam estabelecer relações entre a imagem das funções $y = x^2 + 3$ e $y = 2.sen(x)$ e suas expressões algébricas, o professor precisou orientar-lhes com perguntas como: “Qual o valor mínimo da imagem? E o valor máximo?”; “Na expressão algébrica das funções o que faz com que a imagem assuma estes valores?”. Dado o debate, os alunos foram capazes de expressar respostas como descritas na Figura 32.

Figura 32 – Análise das imagens das funções $y = x^2 + 3$ e $y = 2.sen(x)$



Fonte: Autor.

Ao término da atividade 1, pode-se perceber que, apesar das inúmeras dificuldades de interpretação e principalmente de expressão, os alunos mostraram interesse e motivação para abordar o tema funções utilizando o GeoGebra. Também se concluiu que a abordagem visual faz-se mais atrativa aos alunos do que a simples exposição formal das definições apresentadas. Neste primeiro momento a abordagem das funções por meio da análise gráfica serviu de facilitadora do processo de ensino, assim como do processo de compreensão e construção de conceitos por parte dos alunos.

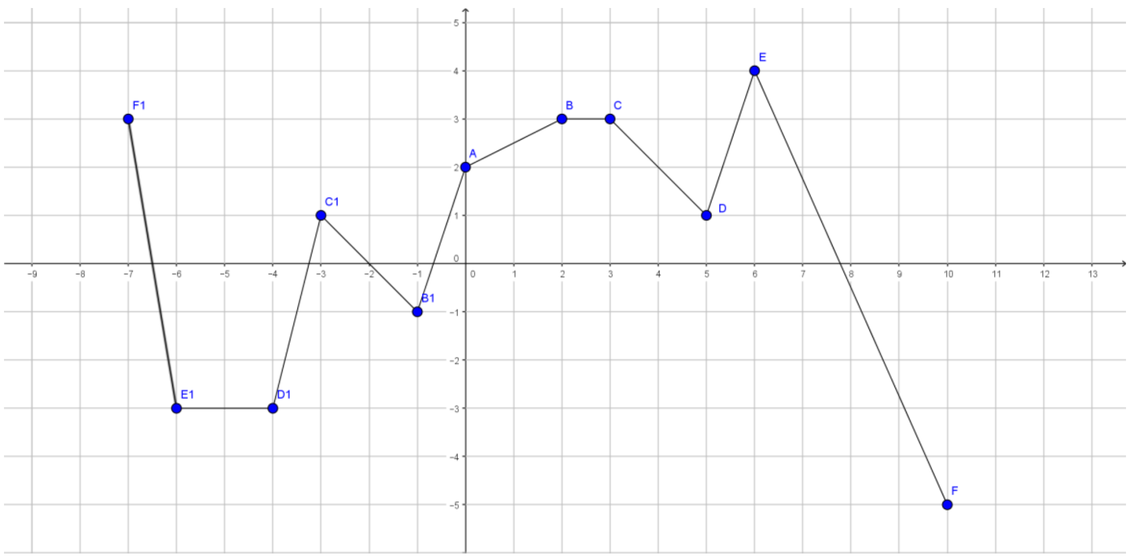
3.2.4 Atividade 2 – Funções pares e funções ímpares

Nesta atividade os estudantes foram direcionados a definir e compreender algumas características de certas funções. Começando a abordagem, os alunos leram as definições de função par e função ímpar, como apresentadas na seção 2.1 do Capítulo 2.

Para exemplificar as definições, o professor fez uso das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^3$ pedindo que os alunos calculassem o valor das funções para valores de x com sinais opostos.

A fim de compreender melhor os conceitos descritos, os alunos abriram o arquivo “Atividade 2” do GeoGebra salvo na barra de ferramentas de seus notebooks. O arquivo “Atividade 2” trazia na janela gráfica do GeoGebra 5 pontos fixos (B, C, D, E, F) e 6 pontos móveis $(A, B1, C1, D1, E1, F1)$ todos ligados por segmentos de reta a fim de representarem uma função como esboçado na Figura 33.

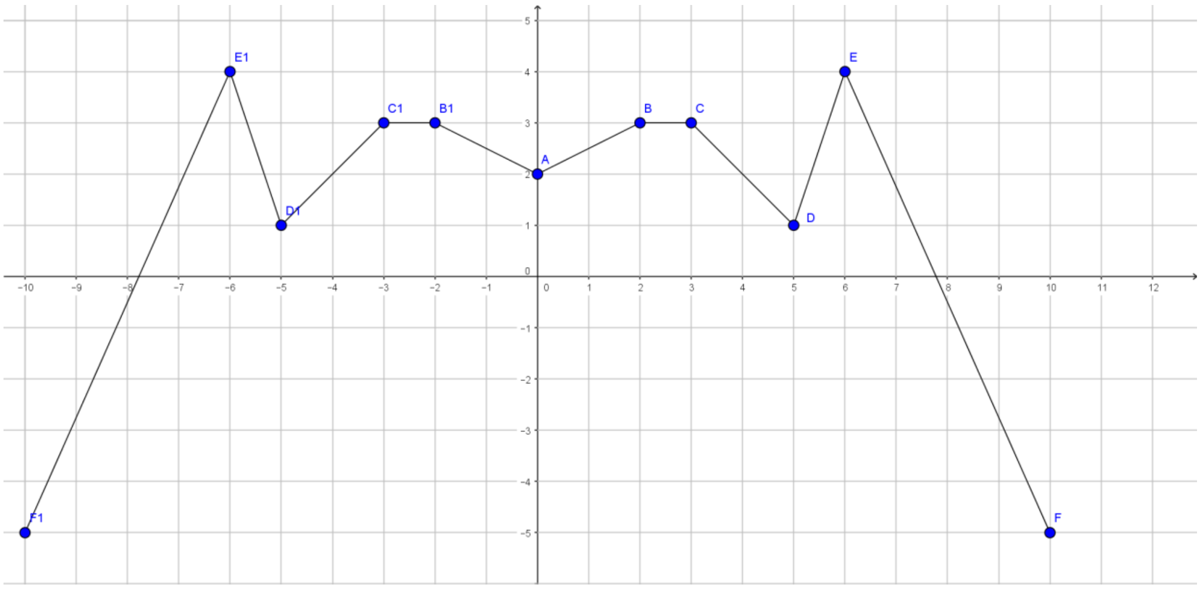
Figura 33 – Arquivo Atividade 2.



Fonte: Autor.

Dando sequência à atividade, no arquivo representado anteriormente os alunos deveriam mover os pontos $B1, C1, D1, E1\ e\ F1$ (situados à esquerda do eixo y) a fim de que a função representada se tornasse par, para tal foi necessário que colocassem em prática a definição de função par, observando as coordenadas dos pontos fixos e modificando as coordenadas dos pontos móveis até obter a representação adequada ao gráfico de uma função par como indicado na Figura 34.

Figura 34 – Gráfico de uma função par



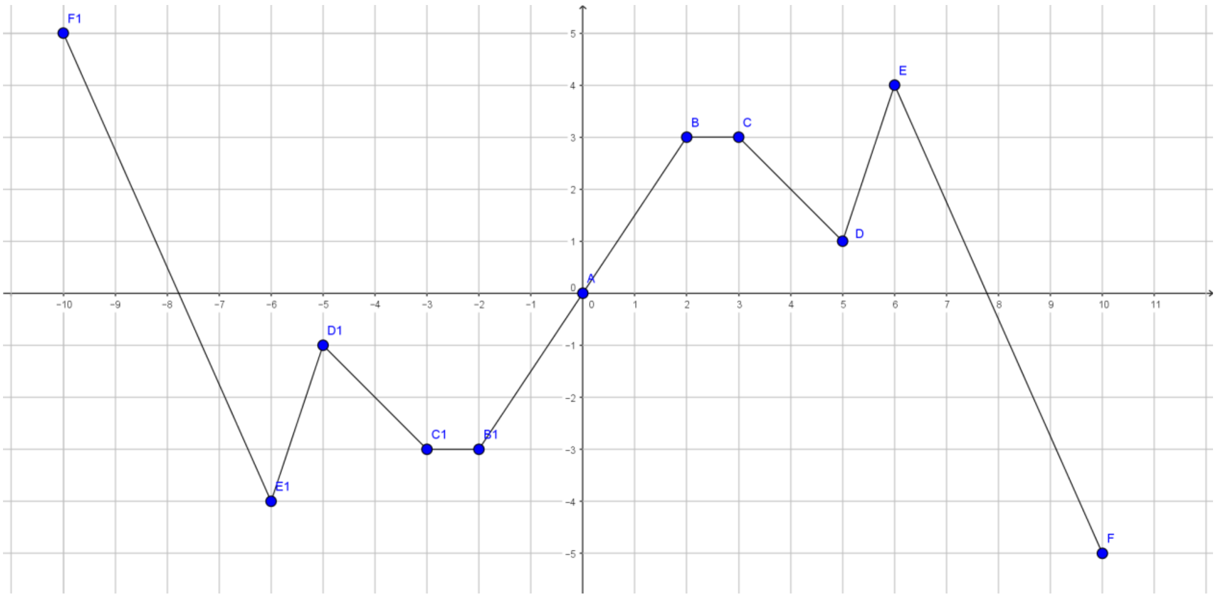
Fonte: Autor.

Posteriormente os alunos foram orientados a mover os mesmos pontos incluindo A, se necessário, de modo que a função se tornasse ímpar, obtendo o seguinte resultado expresso na Figura 35.

Alguns alunos desenvolveram a atividade com perfeição, observando as coordenadas de cada ponto, outros, porém se guiaram pela noção de simetria e plotaram alguns pontos com coordenadas erradas.

Ao desenhar o gráfico da função par um aluno comentou que este ficava espelhado no eixo y, no decorrer da atividade todos os alunos foram percebendo as simetrias relacionadas aos gráficos. Então o professor pediu que respondessem à questão G.

Figura 35 – Gráfico de uma função ímpar

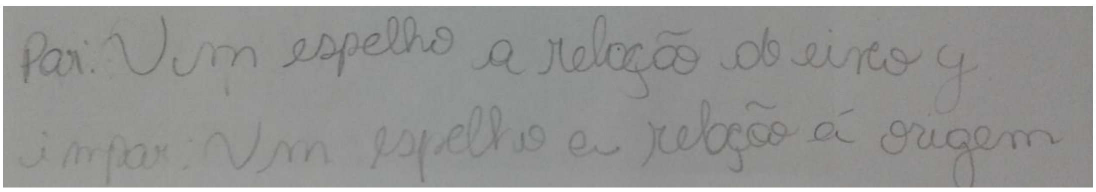


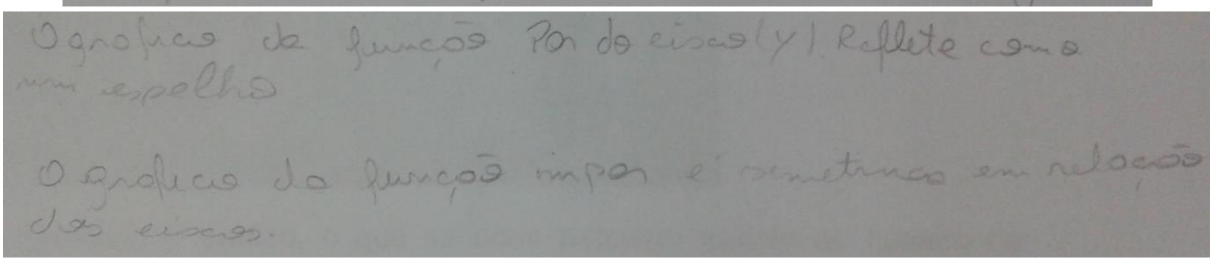
Fonte: Autor.

G) O que se pode concluir sobre a simetria dos gráficos representados?

Os alunos demonstraram, através da fala, compreender a simetria da função par em relação ao eixo y e da função ímpar em relação a origem, porém novamente tiveram dificuldades para expressar suas conclusões de forma escrita, como ilustram algumas respostas presentes na Figura 36.

Figura 36 – Respostas da questão G


Par: Um espelho a relação do eixo y
impar: Um espelho a relação a origem

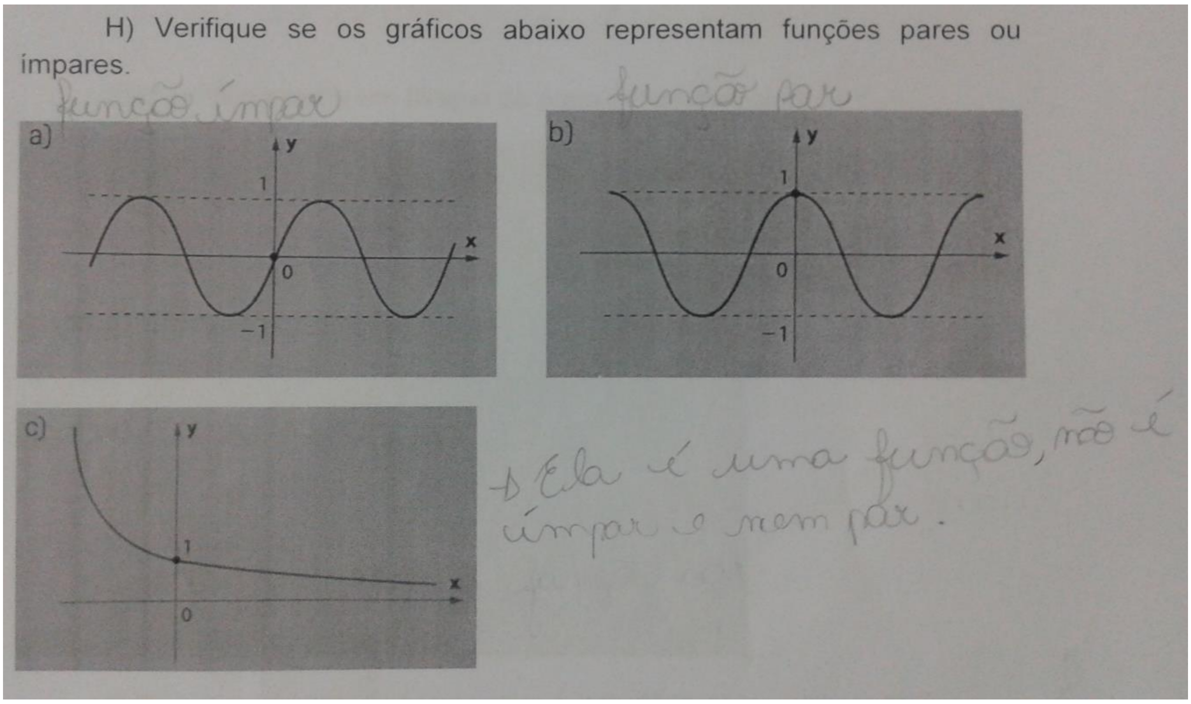

O grafico da função Par do eixo (y) Reflete como um espelho

O grafico da função impar é simetrica em relação dos eixos.

Fonte: Autor.

Com o intuito de saber se os alunos seriam capazes de aplicar as noções de simetria, lhes foi proposto o exercício H, apresentado na Figura 37 junto as respostas dadas por um aluno.

Figura 37 – Caracterizando uma função como par ou ímpar a partir do gráfico.



Fonte: Autor.

Foi possível, para os alunos, durante a atividade 2, compreender e aplicar os conceitos de função par e função ímpar de uma forma descontraída, analisar a simetria de gráficos e aplicá-la para caracterizar funções.

3.2.5 Atividade 3 – Função crescente, função decrescente, máximos, mínimos e zeros de uma função

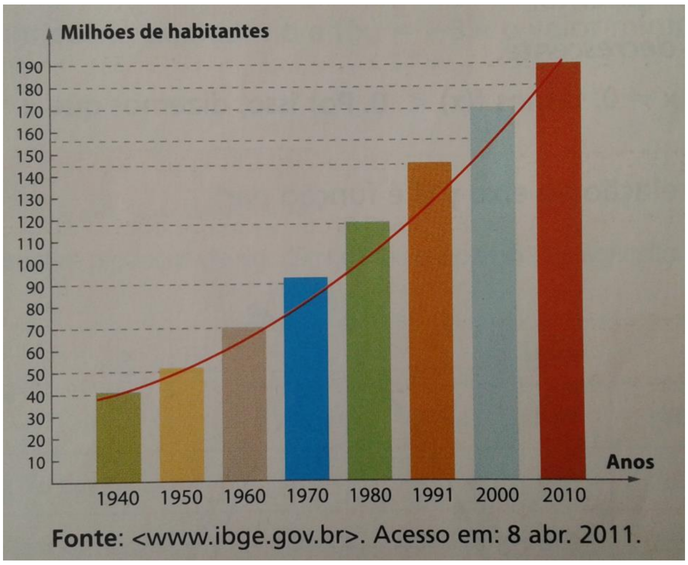
Dando sequência as atividades o professor projetou dois gráficos na parede juntamente com as respectivas informações apresentadas nas Figuras 38 e 39. Logo após apresentar os gráficos o professor dirigiu os questionamentos I e J abaixo descritos, aos alunos.

I) Segundo o gráfico, o que se pode perceber quanto ao número de habitantes no Brasil com o passar dos anos?

J) Com o aumento do tempo o que acontece com o volume de água no reservatório?

Figura 38 – Gráfico da população brasileira de 1940 a 2010

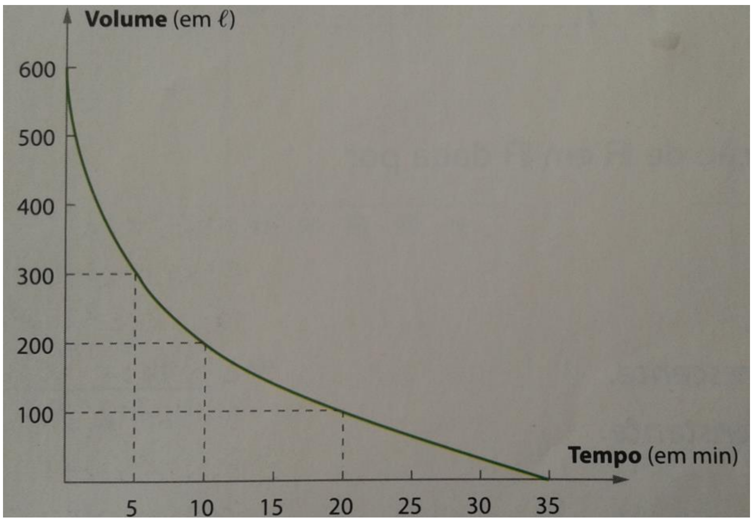
População brasileira de 1940 a 2010



Fonte: IBGE (2011 apud DANTE, 2011a, p.87).

Figura 39 – Gráfico de um tanque de água sendo esvaziado

Este gráfico mostra um tanque de água sendo esvaziado

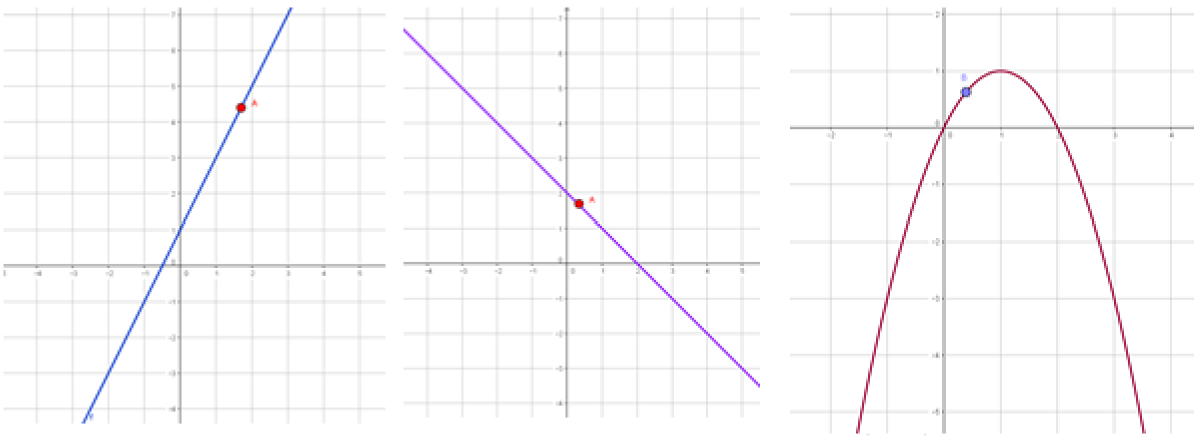


Fonte: DANTE (2011a, p.87).

A exposição dos gráficos, assim como o levantamento de tais questionamentos tiveram como objetivo instigar os alunos a invocar e apresentar seus conhecimentos prévios acerca do tema, para que se pudesse posteriormente ancorar as definições formais de função crescente e função decrescente. Logo, a partir das questões levantadas e discussões propostas, pode-se estabelecer as definições de função crescente e função decrescente vistas na seção 2.1 do Capítulo 2, assim como uma interpretação gráfica para as mesmas.

Com o objetivo de consolidar tais definições os alunos representaram no GeoGebra os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$: $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = -x^2 + 2x$. Criaram um ponto sobre a curva representativa das funções e o moveram, a fim de analisar o crescimento ou decrescimento das funções. A Figura 40 ilustra as respectivas construções.

Figura 40 – Gráfico das funções $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -x + 2$ e $h(x) = -x^2 + \ 2x$

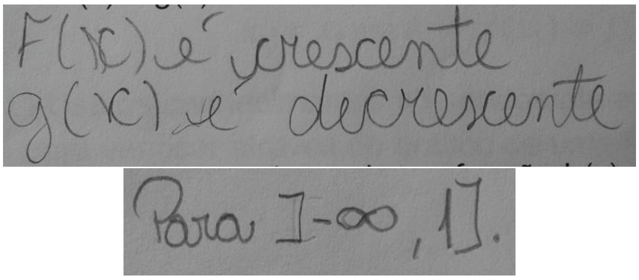


Fonte: Autor.

De posse das construções gráficas realizadas no GeoGebra, os estudantes puderam responder as questões 1 e 2 propostas na folha impressa como mostra a Figura 41.

1) $f(x)$ e $g(x)$ são crescentes ou decrescentes?
2) Para quais valores de x a função $h(x) = -\,x^2 + 2x$ é crescente?

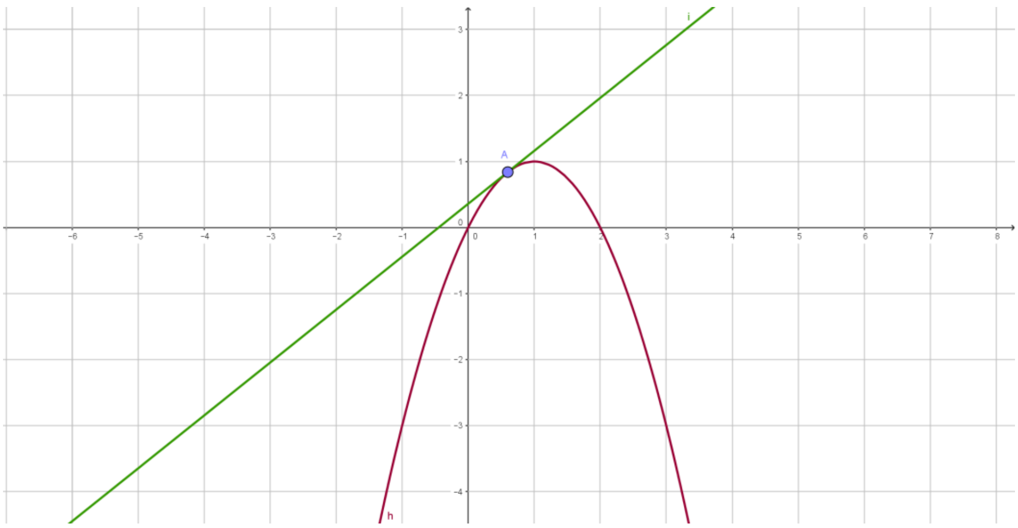
Figura 41 – Respostas das questões 1 e 2



Fonte: Autor.

Na próxima etapa propôs-se aos estudantes criarem um ponto A sobre o gráfico da função $h(x) = -x^2 + 2x$ e posteriormente traçarem uma reta tangente à função h que passe por A, conforme ilustrado a seguir na Figura 42.

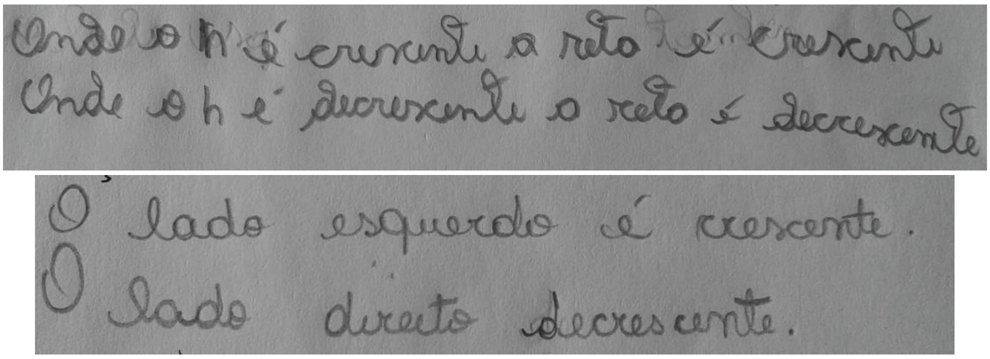
Figura 42 – Reta tangente a curva $h(x) = -\,x^2 + 2x$



Fonte: Autor.

Depois pediu-se que os alunos movessem o ponto A, e consequentemente a reta tangente à h, e descrevessem o que podiam observar sobre a inclinação da reta no intervalo em que h é crescente e no intervalo em que h é decrescente. Os resultados foram os descritos na Figura 43.

Figura 43 – Análise da inclinação da reta tangente a função $h(x) = -\,x^2 + 2x$



Fonte: Autor.

Com estudo da reta tangente à curva $h(x) = -x^2 + 2x$, mostrou-se que é possível a partir da análise gráfica, ainda na etapa de construção de conceitos, construir conhecimentos prévios para elaboração de estudos mais avançados sobre funções, como o caso da inclinação da reta tangente a uma função e a determinação de sua derivada.

Quanto a resposta citada na Figura 43, os alunos mostraram usar a noção de simetria para dividir a parábola em duas partes, o “lado direito” e o “lado esquerdo”. Neste momento coube ao professor dizer que a divisão da parábola se dá a partir do seu eixo de simetria e que é possível substituir as expressões “lado esquerdo” e “lado direito” por “ramo crescente” e “ramo decrescente”, respectivamente neste caso.

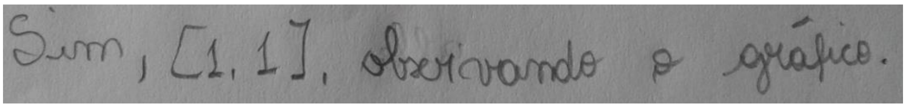
Com o intuito de introduzir os conceitos de valor máximo, valor mínimo e zeros da função (ver seção 2.1 do Capítulo 2) foram propostas as questões 4, 5 e 6 a seguir.

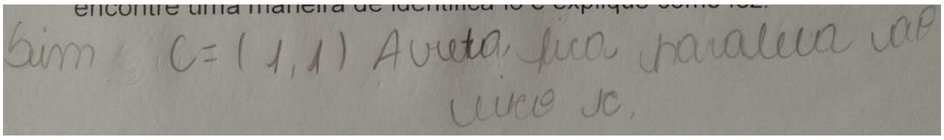
Utilizando o gráfico de $h(x) = -x^2 + 2x$ os alunos responderam a questão 4 como descrito na Figura 44.

4) Existe um ponto em que $h(x)$ assume um valor máximo? Se sim, encontre uma maneira de identificá-lo e explique como fez.

Nas respostas expressas pela Figura 44, pode-se notar que o aluno analisou a inclinação da reta tangente para justificar sua resposta, um artifício comum na resolução de problemas de otimização.

Figura 44 – Respostas da questão 4



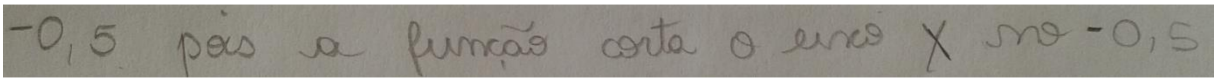


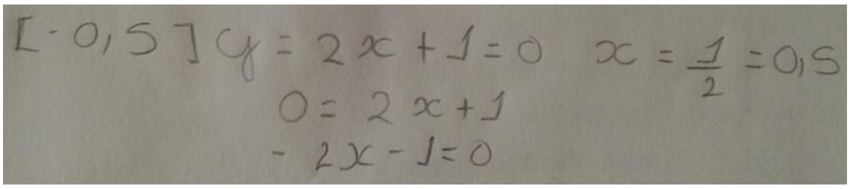
Fonte: Autor.

Nas questões 5 e 6, os alunos conseguiram identificar os zeros das funções $f(x) = 2x + 1$ e $h(x) = -x^2 + 2x$, porém novamente encontraram dificuldades para escrever as respostas, necessitando de constantes intervenções do professor (Figuras 45 e 46).

5) Para quais valores de x a função $f(x) = 2x + 1$ é nula? Justifique sua resposta.

Figura 45 – Respostas da questão 5

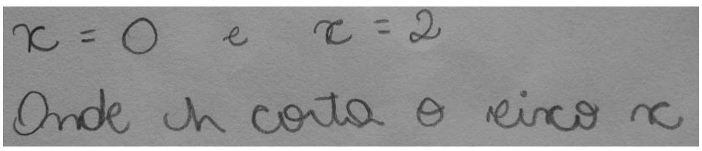




Fonte: Autor.

6) Para quais valores de x a função $h(x)$ tem $y = 0$? Explique sua resposta.

Figura 46 – Resposta da questão 6



Fonte: Autor.

O professor explicou na lousa que é possível encontrar os zeros das funções dadas substituindo y por zero nas leis de correspondências das funções, a fim de propor uma técnica que não necessite da visualização do gráfico da função dada.

3.2.6 Resolvendo o Problema 1

Para encerrar a primeira oficina, retomou-se ao Problema 1 (encontrado no “APÊNDICE A” referente a folha impressa entregue aos alunos) que foi resolvido pelos alunos com o auxílio do professor como relatado abaixo.

No primeiro momento, o professor pediu que os alunos lessem o problema novamente e identificassem os dados que são informados na tabela: produção (em mil toneladas) e produtividade (em kg/hectare). Depois o professor questionou sobre o que se pede no problema: O gráfico que melhor representa a área plantada ao longo dos cinco anos considerados.

O professor disse que deveriam usar as informações da tabela para calcular a área plantada, observando as unidades das grandezas. Para tal, inicialmente trocaram-se os valores da produção em mil toneladas para quilogramas. Assim, como unidades de medida, para a produção e a produtividade, tem-se respectivamente, kg e kg/hectare. Logo, pode-se perceber que a produtividade é a razão entre a produção e a área plantada, isto é, $\text{produtividade} = \frac{\text{produção}}{\text{área plantada}}$ e, portanto, $\text{área plantada} = \frac{\text{produção}}{\text{produtividade}}$. Estabelecida a relação, os alunos rabiscaram a tabela e encontraram os valores para a área plantada (AP), como na Figura 47.

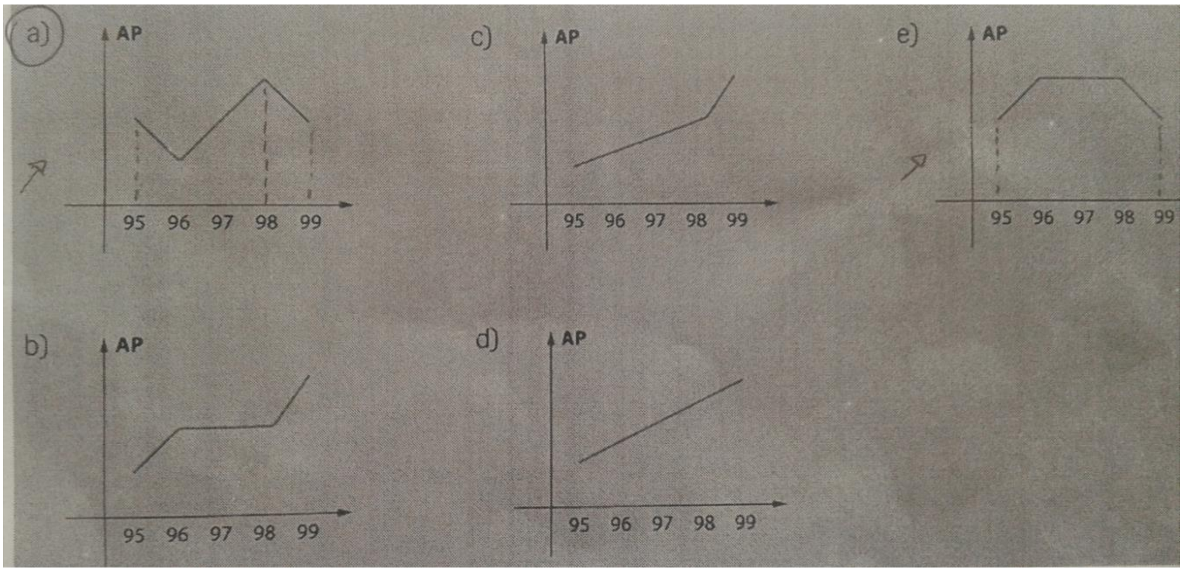
Figura 47 – Valores para a área plantada no Problema 1

	Safra				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Produção (em mil toneladas)	30×10^6	40×10^6	50×10^6	60×10^6	80×10^6
Produtividade (em kg/hectare)	1 500	2 500	2 500	2 500	4 000
AP área plantada	20mil	16mil	20mil	24mil	20mil

Fonte: Autor.

Tendo terminado a tabela, um aluno respondeu que o gráfico correto estava representado no item a ou b, e justificou dizendo que a área plantada era igual nos anos de 1995 e 1999. Outro aluno, afirmou que a resposta correta era a letra a, pelo fato de que em 1998 a produção foi máxima. Logo puderam verificar suas hipóteses e responder a questão como indicado na Figura 48.

Figura 48 – Resposta do Problema 1



Fonte: Autor.

Com os valores da área plantada calculados, os alunos foram rápidos ao escolher o gráfico que melhor a representava. As maiores dificuldades encontraram-se no momento de estabelecer as relações entre as unidades de medida das grandezas.

Ao término deste bloco de atividades foi possível concluir que a abordagem usada na proposta apresentada leva os estudantes a serem cada vez mais autônomos no processo de aprendizagem, fazendo do professor um mediador e facilitador deste processo, ao escolher as atividades e intervir quando necessário para a construção de novos saberes.

3.3 OFICINA 2 – FUNÇÃO AFIM

Nesta oficina teve-se como objetivo iniciar o estudo da função afim e seus casos particulares, através de uma abordagem prática desenvolvida com base nos pressupostos teóricos sobre modelagem matemática. Também buscou-se investigar, as contribuições trazidas pelo uso de gráficos para a criação e validação de um modelo e a valia do software GeoGebra para compreender as características da função afim.

Portanto, esperava-se que durante esta oficina os estudantes construíssem o conceito de função afim, estabelecessem relações entre as diferentes formas de expressar uma função e ainda, aprendessem a fazer uso desses conhecimentos para resolver situações problemas.

3.3.1 Atividade de modelagem e função afim

Os 8 alunos presentes foram divididos em duplas e receberam material impresso, no qual constam algumas definições teóricas sobre função afim, questões que norteiam outras definições e as etapas das atividades a serem desenvolvidas. Esse material pode ser consultado no “APÊNDICE B”.

Na sequência os alunos foram direcionados ao laboratório de ciências onde encontraram sobre as bancadas, ao lado das torneiras, uma régua de 30 cm, uma proveta graduada e um frasco cilíndrico reto, representados na Figura 49.

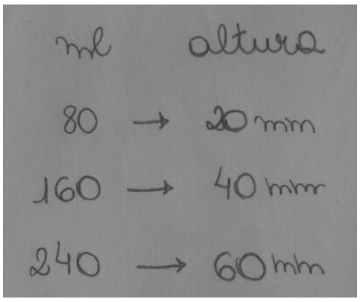
Figura 49 – Materiais utilizados no laboratório

Fonte: Autor.

Dando início a atividade cada dupla de alunos coletou uma quantidade x de água com a proveta graduada, quantidade esta escolhida por eles, despejou a água no frasco cilíndrico, mediu a altura que o nível da água atingiu no frasco e tomou nota dos dados em mililitros (ml) e milímetros (mm). Os alunos foram orientados a despejar sobre a quantidade de água já existente no frasco novamente uma quantidade x escolhida por eles, medir a altura do novo nível de água e anotar os dados: quantidade de água no frasco (ml) e altura da água no frasco (mm). O mesmo processo foi repetido por algumas vezes.

Na segunda etapa da atividade os alunos deveriam organizar os dados coletados em uma tabela, o que não foi necessário visto que todas as duplas já tinham organizado os dados dispostos em colunas, como exemplificado na Figura 50. Logo os alunos passaram para a próxima etapa que correspondia ao esboço dos dados no plano cartesiano.

Figura 50 – Dados tabelados por uma dupla de alunos



Fonte: Autor.

Ao iniciar o esboço do gráfico, um aluno perguntou como o faria, visto que tinha escolhido 190 ml como quantidade de água a ser despejada no frasco, logo pensou que deveria fazer 190 segmentos sobre o eixo x do plano cartesiano. Então o professor foi ao quadro e explicou que bastava que fosse escolhida e respeitada a escala da representação gráfica. Em outras palavras, que intervalos iguais nos dados anotados fossem representados por segmentos de mesmo tamanho no respectivo eixo de representação.

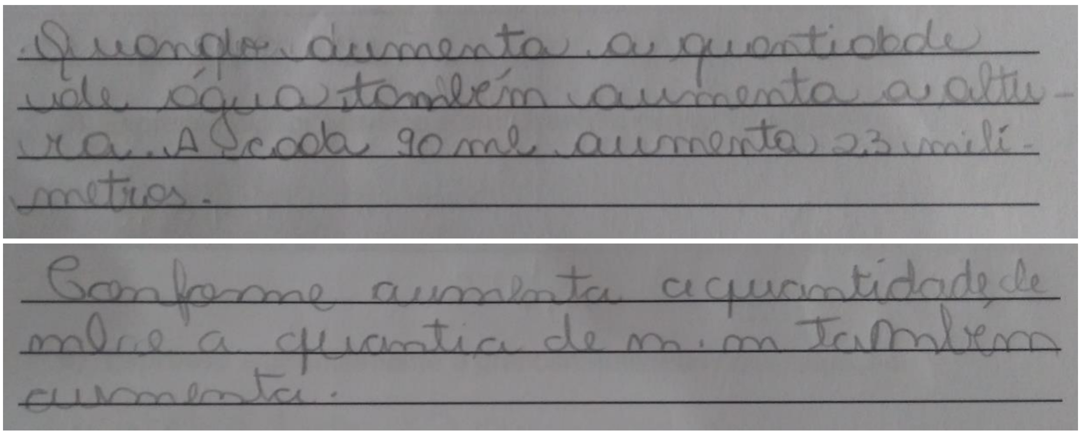
Durante a construção dos gráficos percebeu-se que alguns alunos não demonstravam habilidade ao usar a régua e o cuidado ao projetar perpendicularmente as coordenadas dos pontos. Esperava-se ainda que os alunos apresentassem dúvidas quanto a distribuição dos dados e seus respectivos eixos de representação, porém todos representaram a quantidade de água (ml) sobre o eixo x e a altura do nível de água (mm) sobre o eixo y.

É importante salientar que esta primeira representação gráfica, obtida simplesmente pela transcrição dos dados anotados para o plano cartesiano, por si só não permite avançar na construção dos conhecimentos sobre funções. Ainda que durante esta etapa tenha sido possível rever alguns conceitos e técnicas importantes para o esboço de gráficos, fazem-se necessárias reflexões e análises sobre o gráfico durante o processo de construção e elaboração do modelo matemático. Dessa forma, foram propostas 9 questões aos alunos, presentes no material impresso recebido por eles. Seguem abaixo as referidas questões, seguidas de figuras que mostram algumas das respostas dadas pelos alunos e o relato e análise do processo de resolução.

1) Você pode perceber alguma relação entre a quantidade de água despejada no frasco (ml) e a altura da água no frasco (mm)? Explique.

Nas respostas dadas pelos alunos para a questão 1 é possível visualizar que eles conseguiram notar a relação de dependência entre as grandezas envolvidas no problema, atendendo ao propósito inicial da atividade de experimentação e modelagem, como ilustrado na Figura 51.

Figura 51 – Respostas da questão 1


Quando aumenta a quantidade de água também aumenta a altura. A cada 90 ml aumenta 2,3 milímetros.

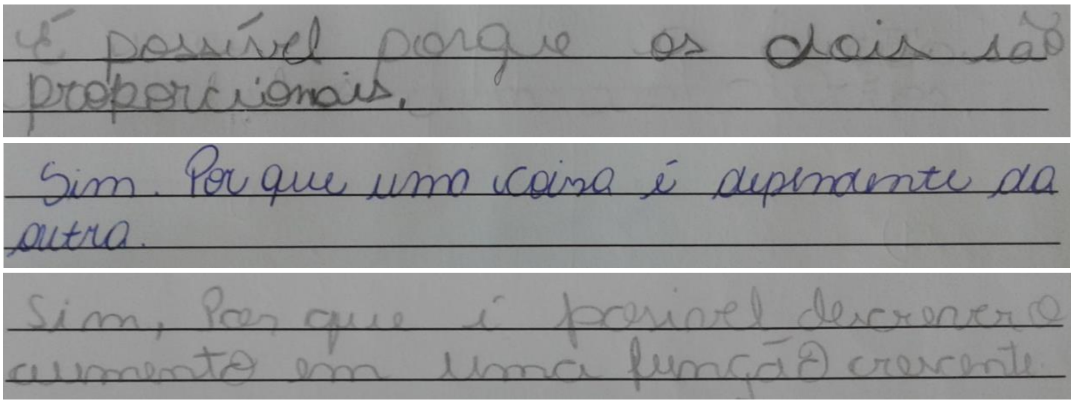
Conforme aumenta a quantidade de ml e a quantia de m.m também aumenta.

Fonte: Autor.

2) É possível descrever a situação acima como uma função? Explique.

Segundo o escrito pelos alunos nas respostas dadas à questão 2 (Figura 52), estes se apoiaram em conceitos e conhecimentos prévios para justificar o fato de a situação representar uma função, estabelecendo relações entre a nova situação apresentada e conhecimentos anteriormente adquiridos, consolidando assim conhecimentos anteriores e criando pontos de partida para que os novos saberes aconteçam de forma significativa.

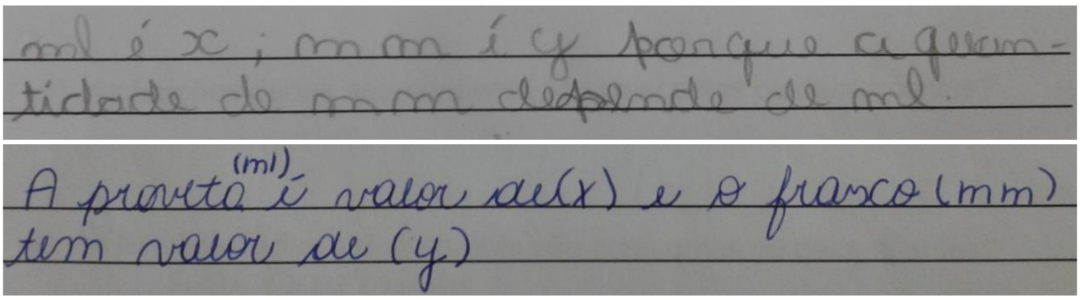
Figura 52 – Respostas da questão 2



Fonte: Autor.

3) Qual é a variável independente (x) e qual a variável dependente (y)?

Figura 53 – Respostas da questão 3

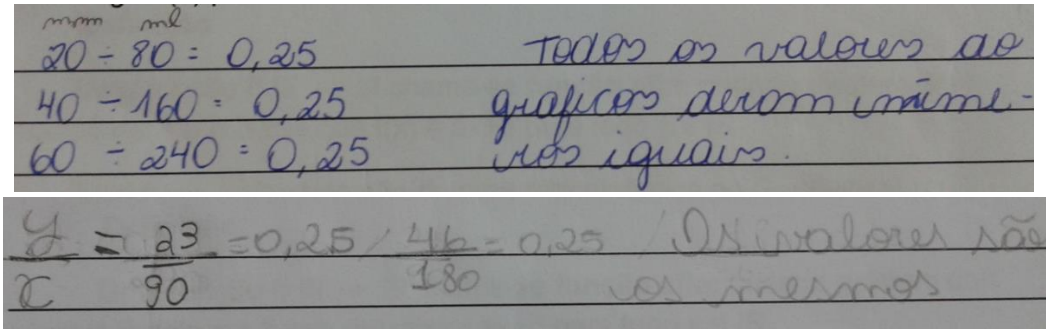


Fonte: Autor.

Pode-se notar que o fato de terem participado do experimento, coletando a água, depositando-a no recipiente e posteriormente medindo a altura do nível de água, fez com que os alunos estabelecessem de forma fácil a relação de dependência entre as grandezas, pois perceberam que os valores de entrada da função se referiam a quantidade de água (em ml) e os valores de saída y dependiam dos mililitros presentes no frasco. A quantidade de água não ter sido previamente determinada pelo professor foi outro fato que contribuiu para que os alunos pudessem escolher a variável independente x corretamente.

4) Expresse a razão entre a altura da água no frasco (y) e a quantidade de água (x) para diferentes pontos do gráfico. O que você pode perceber?

Figura 54 – Respostas da questão 4



Fonte: Autor.

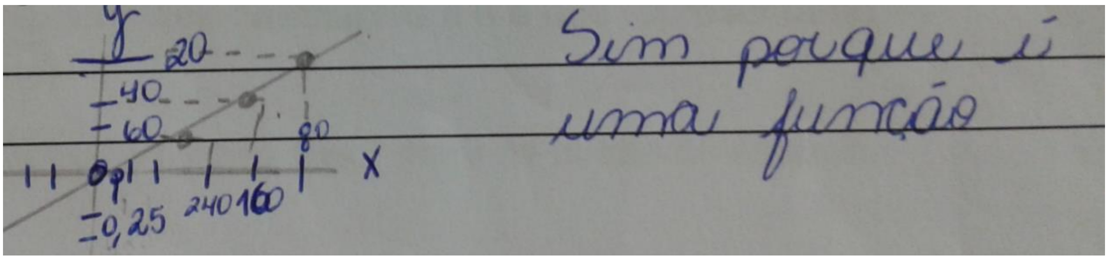
Alguns alunos já haviam citado a palavra “proporcionais” anteriormente ao responder à questão 2, porém foi possível perceber, durante a resolução da questão 4, que todos ficaram surpresos com o fato da razão y/x ter o mesmo valor para os diferentes pontos do gráfico e, até mesmo, para as diferentes duplas. Portanto os alunos estavam associando “proporcionalidade” simplesmente ao fato de que quando uma grandeza aumenta a outra aumenta também. Então surgiu a oportunidade para que o professor pudesse explicar que a igualdade entre as razões das coordenadas y e x dos pontos do gráfico é o que verifica o conceito de proporcionalidade. O professor ainda explicou que os resultados foram iguais para os diferentes grupos pois os frascos nos quais depositaram a água eram iguais.

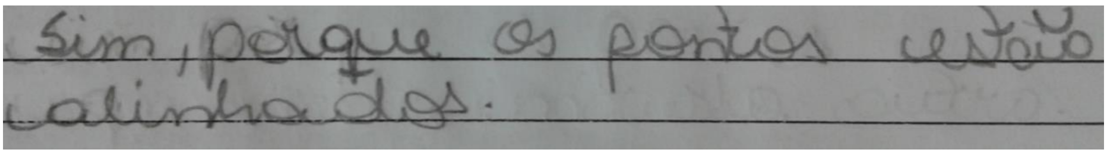
Além da questão 4 ter sido de extrema importância para construção do modelo matemático e da expressão analítica da função linear que o representa, pode-se tratar, durante sua resolução, da noção de invariância, também fundamental à compreensão da proporcionalidade e das funções. Segundo Mathias (2013, apud TOZETTO, 2013, p. 50), “os conceitos de variação e invariância não são opostos. Dependendo de como eu olho a fração, posso ver a variação ou a invariância”.

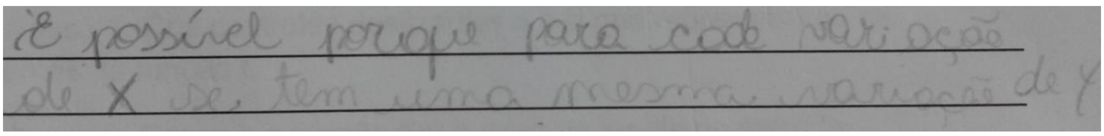
5) É correto ligar os pontos do gráfico com uma reta? Explique.

Após afirmar que os pontos deveriam ser ligados por uma reta, os alunos mostraram invocar conhecimentos prévios para justificar a afirmação. Alguns usaram o conceito de função para justificar a continuidade do gráfico e consequentemente a linha que liga os pontos inicialmente plotados no plano, como visto na resposta (1) da Figura 55. Outros, justificaram o ligar dos pontos usando conhecimentos geométricos sobre a reta, como pode-se observar na resposta (2) da Figura 55. Outros ainda, usaram a ideia de variação constante, acredita-se que por visualizar a inclinação constante do gráfico.

Figura 55 – Respostas da questão 5

(1)


(2)


(3)


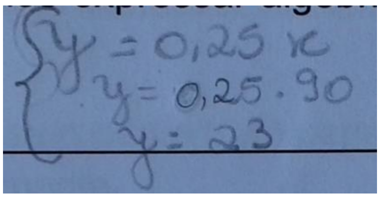
Fonte: Autor.

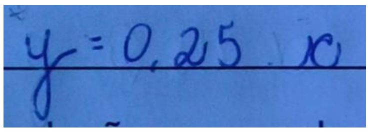
O professor ainda explicou que se colocássemos todos os pontos obtidos pelas duplas sobre um mesmo plano, estes ficariam sobre a mesma reta. Pois todos são expressos pela mesma função.

6) Como podemos expressar algebricamente a situação que acabamos de modelar?

No início os alunos sentiram-se receosos para responder à questão 6. Entretanto, o professor explicou que procurávamos uma relação algébrica entre os valores de y e x, uma “fórmula” que permitisse determinar o valor de y a partir do valor de x, mesmo assim os alunos não conseguiram chegar a uma solução. Somente quando o professor atentou-os para o fato de que existe uma relação entre y e x que não variava para diferentes pontos (x, y), os estudantes lembraram da razão calculada anteriormente, $y/x = 0{,}25$. Logo, conseguiram escrever a função $y = 0{,}25x$. A fim de testar a eficácia da fórmula, alguns alunos substituíram x por abscissas de pontos do gráfico e conferiram suas respectivas ordenadas, verificando assim o modelo desenvolvido para o experimento (Figura 56).

Figura 56 – Respostas da questão 6





Fonte: Autor

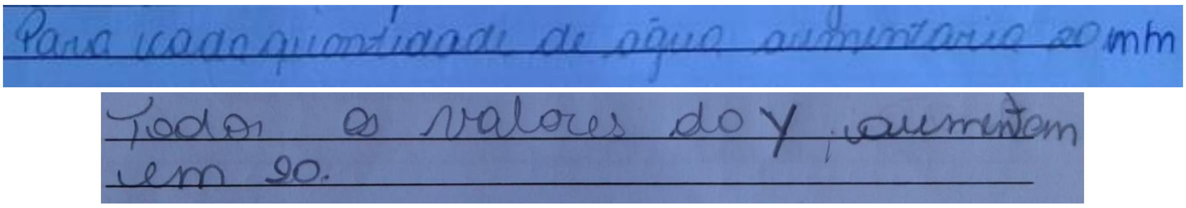
O professor explicou que, de posse dessa função, não seria mais necessário usar a régua para medir a altura do nível de água no frasco de acordo com a quantidade de água colocada. Logo, se construiu um instrumento capaz de prever os resultados para o experimento. Coube também ao professor relatar que a relação que se acabara de modelar corresponde a uma função linear, que representa casos de proporcionalidade. Um caso específico da função afim.

Com o intuito de expandir a ideia de função linear para função afim, propôs-se a questão 7.

7) Se ao iniciarmos o experimento já existisse água no frasco a uma altura de 2 cm, o que mudaria nos resultados obtidos anteriormente?

Como ilustrado na Figura 57, todos os alunos demonstraram ter entendido que para as mesmas quantidades de água colocadas no frasco anteriormente ia-se ter 20 mm a mais de altura no nível da água, porém tiveram certas dificuldades quando pedido que expressassem algébrica e graficamente esta nova relação como descreve a questão 8.

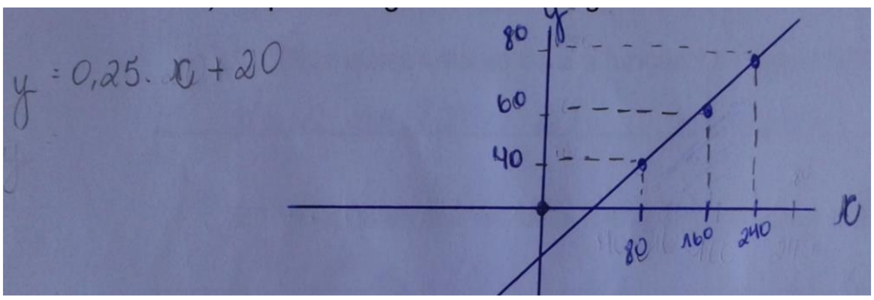
Figura 57 – Respostas da questão 7



Fonte: Autor.

8) Expresse algebricamente e graficamente esta nova situação.

Figura 58 – Resposta da questão 8



Fonte: Autor.

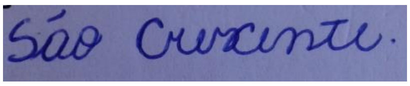
Para que os alunos conseguissem escrever a expressão $y = 0{,}25.x + 20$, bastou que o professor induzisse-os a perceber que os mesmos valores de x, representados na expressão anterior, $y = 0{,}25.x$, teriam suas respectivas imagens acrescidas de 20 unidades. Entretanto, os alunos, não perceberam que o novo gráfico seria a translação vertical do anterior em 20 unidades para cima, pois construíram novos gráficos apenas mudando os valores no eixo y, novamente sem atentar à escala escolhida para o esboço do gráfico e sem marcar corretamente os pontos de intersecção da função com os eixos coordenados, como pode-se ver na Figura 58.

Fica evidente a importância do estudo do gráfico da função afim para que o aprendiz possa perceber seus erros, buscar alternativas para a construção do gráfico e ainda comparar gráficos de uma mesma família de funções, analisando as diferenças e semelhanças entre problemas propostos, a fim de ser capaz de adaptar os conhecimentos construídos a novas situações problema.

9) As funções dadas anteriormente são crescentes ou decrescentes?

Ainda que com erros gramaticais os alunos responderam à questão 9 sem dificuldades, mostrando recordar do tema da oficina anterior (Figura 59).

Figura 59 – Resposta da questão 9



Fonte: Autor.

Ao término desta primeira parte da oficina sobre função afim, notou-se que o principal benefício trazido pela metodologia utilizada ao processo de ensino-aprendizagem foi a motivação dos alunos em participar da construção do experimento e do modelo matemático desenvolvido para estudá-lo. Outro fator significativo foi a formação de duplas para o desenvolvimento das atividades, pois permitiu aos alunos trocar ideias e observar uma mesma situação por perspectivas distintas. Ainda foi possível consolidar conhecimentos adquiridos anteriormente e formar pontos de ancoragem à construção de conceitos posteriores.

Construir o experimento com as próprias mãos facilitou para que os alunos descrevessem a situação estudada como uma função e compreendessem a relação entre as variáveis sem o auxílio do professor. No decorrer da atividade o professor pode ainda, observar as principais dificuldades trazidas pelos alunos a fim de intervir e utilizar novas estratégias para saná-las, dentre estas dificuldades salienta-se à construção do gráfico de uma função afim.

Ainda que de difícil construção para os alunos, o esboço do gráfico, feito a partir dos dados inicialmente levantados, serviu de suporte para a construção e validação do modelo utilizado na modelagem do experimento realizado, mostrando que a construção e análise de gráficos pode auxiliar para que a atividade de modelagem matemática aconteça de forma significativa.

3.3.2 Compreendendo a função afim a partir de seu gráfico

Ao relembrar as funções que modelaram as relações estudadas na atividade anterior o professor introduziu a definição de função afim, vista no Capítulo 2, seção 2.2.

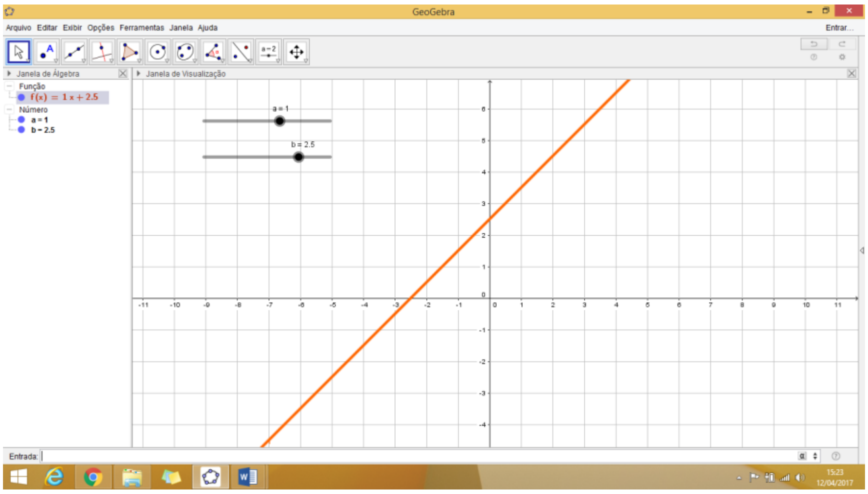
O professor observou que os casos representados anteriormente servem como exemplos da função afim e que, com o propósito de resolver outros problemas modelados por este tipo de função faz-se necessário entendê-la na totalidade de suas características e desenvolver técnicas para sua representação gráfica. Para tal, seria realizado o estudo da função afim a partir da análise de seu gráfico.

No laboratório de informática, os alunos abriram o software GeoGebra e seguiram os passos da “Atividade 2” (APÊNDICE B), construindo uma reta dinâmica a partir de controles deslizantes a e b, que representam os parâmetros da função f, cuja lei de associação $f(x) = a.x + b$ foi digitada na entrada de comandos do software.

Orientados pelo professor, os alunos conseguiram sem muitas dificuldades realizar a construção da reta que representa a função $f(x) = a.x + b$, como ilustrado na Figura 60.

Tendo construído a reta, os educandos puderam modificar os valores dos parâmetros a e b da função e observar as mudanças ocasionadas no seu gráfico. Posteriormente foram convidados a expressar suas percepções sobre o gráfico da função afim por meio do questionário que segue abaixo acompanhado de algumas respostas dadas pelos alunos e comentários do professor.

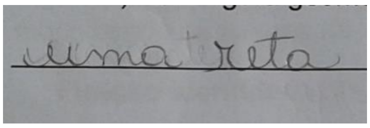
Figura 60 – Reta dinâmica que representa $f(x) = a.x + b$



Fonte: Autor.

A) Que figura geométrica representa o gráfico da função afim?

Figura 61 – Resposta da questão A



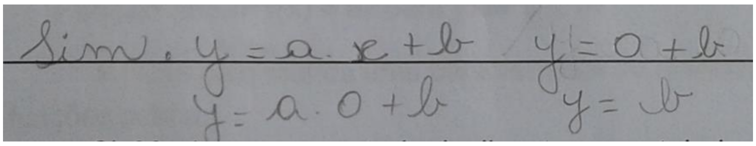
Fonte: Autor.

Todos os alunos perceberam que o gráfico da função afim é uma reta, independente dos valores de a e b, pois puderam modificar os parâmetros e tirar suas próprias conclusões.

B) Verifique se o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico de f? Explique algebricamente.

Novamente não houve dificuldades para responder afirmativamente que o ponto $(0, b)$ pertence ao gráfico de f, entretanto precisou que o professor orientasse os alunos a substituir x por zero na função $f(x) = a.x + b$ para obter $y = b$ (Figura 62). Durante este exercício o professor pode ainda questionar os alunos sobre como obter o valor do parâmetro b observando o gráfico da função afim, fazendo com que todos concluíssem que b é a ordenada do ponto de intersecção da reta com o eixo y, iniciando a construção de uma técnica que iria permitir transitar entre a representação analítica e gráfica da função afim.

Figura 62 – Resposta da questão B



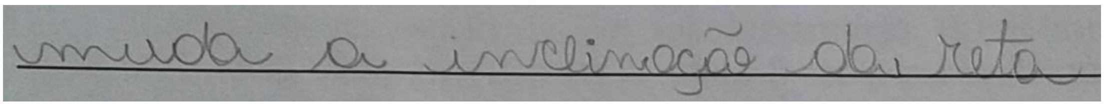
Fonte: Autor.

Cabe ressaltar que um aluno perguntou se existe a possibilidade de olhar para o gráfico e encontrar o valor do parâmetro a. Outro aluno respondeu que este era obtido pela intersecção da reta com o eixo x, porém ao analisar as retas construídas os colegas negaram a afirmação. Neste momento, pode-se perceber que o uso do software levou os alunos a se interessarem por analisar o objeto de estudo, levantar hipóteses e verificá-las.

.

C) Movimente o controle deslizante *a* e estabeleça relações entre seu valor e o gráfico de f.

Figura 63 – Resposta da questão C

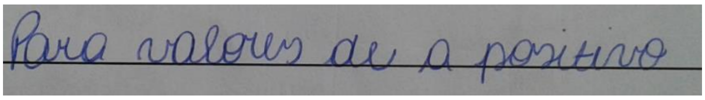


Fonte: Autor.

A turma foi unânime em observar que alterações no parâmetro *a* ocasionam mudanças de inclinação na reta. Porém, esperava-se aqui, que algum aluno notasse a relação entre o sinal de *a* e o fato da função ser crescente ou decrescente, o que foi proposto nas próximas perguntas.

D) Para quais valores do parâmetro a, temos que a função f é crescente?

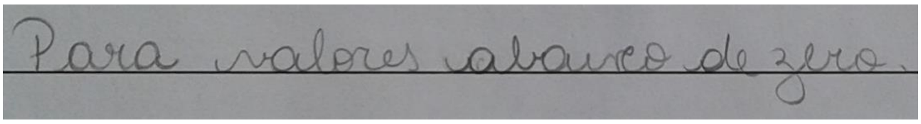
Figura 64 – Resposta da questão D



Fonte: Autor.

E) Para quais valores de a a função f é decrescente?

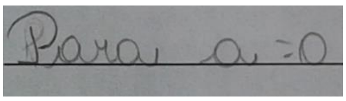
Figura 65 – Resposta da questão E



Fonte: Autor.

F) Para quais valores de a a função f é constante?

Figura 66 – Resposta da questão F

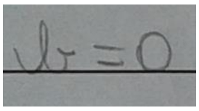


Fonte: Autor.

Analisando o gráfico da função afim e modificando o parâmetro *a* os estudantes estabeleceram as relações anteriores sem qualquer intervenção do professor, o que mostra uma conquista significativa oportunizada pelo uso do GeoGebra em conjunto com os questionamentos adequados.

G) Para quais valores de b a função f passa pela origem $(0,0)$?

Figura 67 – Resposta da questão G



Fonte: Autor.

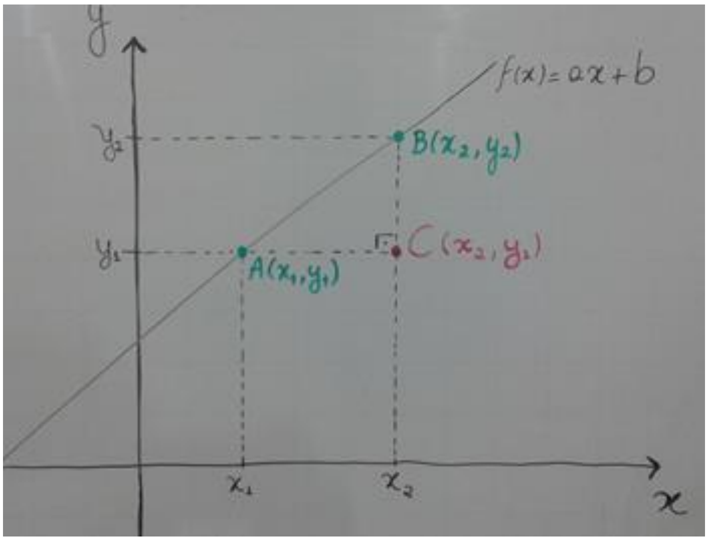
A questão G foi colocada em vista de observar se os alunos estabeleceriam relações com a questão B inicialmente discutida, o que se verificou, pois, a maioria dos alunos não recorreu ao software para identificar a resposta. O uso do software pode servir como uma importante base para a construção de conhecimentos e também para auxiliar na resolução de problemas, porém é importante que os alunos não fiquem totalmente dependentes deste mecanismo.

Na próxima etapa, visando estabelecer o conceito de taxa de variação e uma técnica para obter o parâmetro a a partir da análise do gráfico de uma função, o professor propôs que os alunos criassem sobre o gráfico de $f(x) = a.x + b$ dois pontos A e B, e posteriormente desenhassem um triângulo retângulo ABC de hipotenusa AB.

Criar os pontos A e B foi uma tarefa fácil para os alunos, porém situar o ponto C no plano cartesiano de modo que o triângulo ABC fosse retângulo gerou questionamentos, o que já era esperado. Na lousa o professor representou os pontos A e B sobre a reta e construiu suas projeções sobre os eixos do plano cartesiano, a fim de que os alunos pudessem situar o ponto C e determinar suas coordenadas. Através de questionamentos feitos pelo professor e respostas dadas pelos alunos pode-se obter a representação da Figura 68 na lousa.

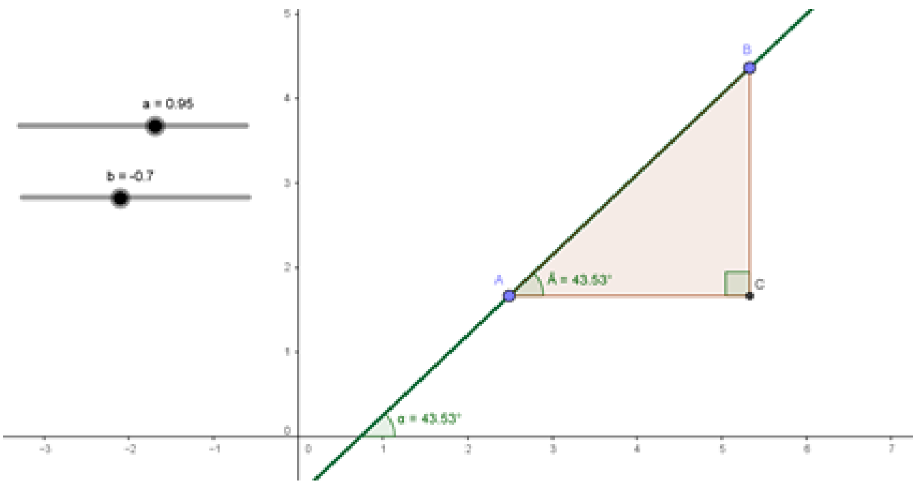
A partir da representação feita na lousa os alunos foram orientados a criar o ponto $C(x_2, y_1)$ na da janela de comandos do GeoGebra da seguinte forma: $C = (x(B), y(A))$. Usando os pontos A, B e C, já construídos, desenharam o triângulo retângulo ABC e indicaram o ângulo $\hat{A}$ do triângulo, correspondente ao menor ângulo formado entre a função afim e o eixo x, como mostra a Figura 69.

Figura 68 – Coordenadas dos pontos A, B e C do triângulo ABC



Fonte: Autor.

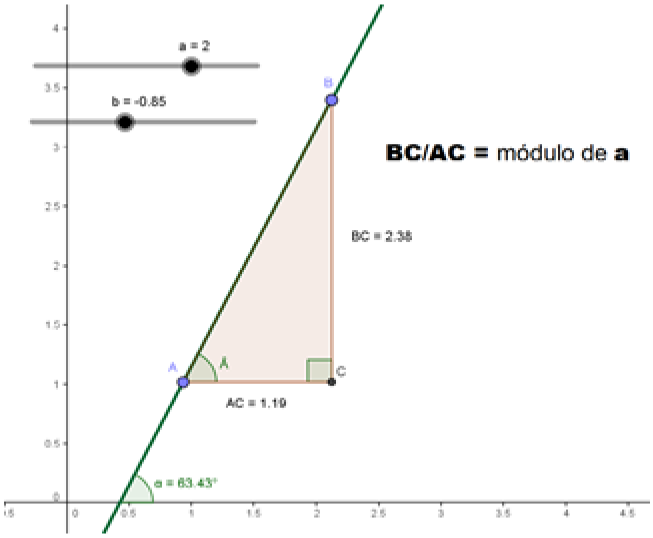
Figura 69 – Ângulo formado entre a função $f(x) = a.x + b$ e o eixo x



Fonte: Autor.

Ainda no GeoGebra, os estudantes determinaram as medidas dos catetos do triângulo ABC, usando a calculadora obtiveram o valor da tangente do ângulo $\hat{A}$ e observaram sua relação com o parâmetro a, como ilustra a Figura 70.

Figura 70 – Relação entre a tangente de $\hat{A}$ e o parâmetro a



Fonte: Autor.

O professor salientou que se tinha estabelecido uma relação entre o gráfico da função afim e o valor absoluto do parâmetro *a*. Posteriormente questionou os alunos sobre como identificar o sinal de *a*, logo um aluno respondeu que bastava observar se a função era crescente ou decrescente.

Ainda coube ao professor definir o parâmetro a como a taxa de variação da função afim e, usando a construção da Figura 68, mostrar que $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, para $x_2 \neq x_1$.

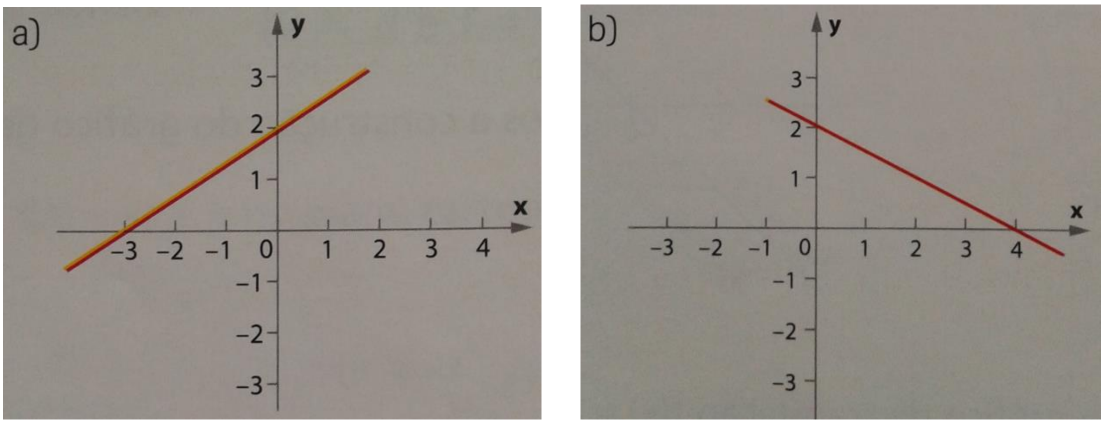
Modificando a posição dos pontos A e B sobre a reta dinâmica construída no GeoGebra, os alunos puderam perceber que a taxa de variação a é sempre constante para cada função afim. Identificando assim uma característica muito importante deste tipo de função.

No decorrer da atividade de construção do conceito de taxa de variação e identificação do parâmetro a, pode-se perceber que os alunos sentiram-se parte atuante na construção dos conhecimentos matemáticos envolvidos, visto que, participaram, opinaram e contribuíram com saberes anteriormente construídos.

A fim de que os alunos pudessem pôr em prática as técnicas criadas para identificar os parâmetros a e b, foi-lhes proposto o exercício H.

H) Dados os gráficos das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ (Figura 71), escreva a função $f(x) = a.x + b$ correspondente.

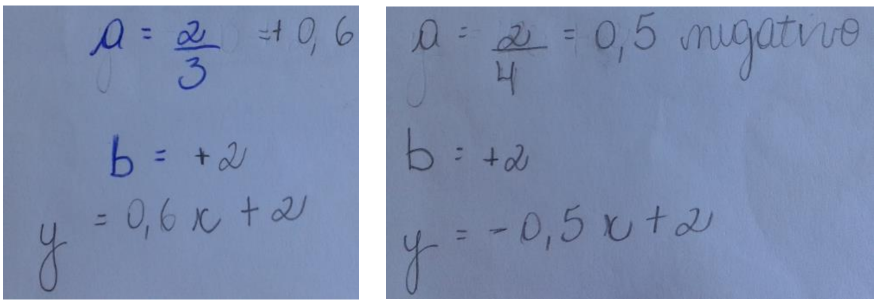
Figura 71 – Gráficos da questão H



Fonte: Autor.

Mostrando terem estabelecido as relações entre o gráfico e os parâmetros da função afim os alunos escreveram sem dificuldades as expressões analíticas das funções representadas graficamente nos itens a e b como mostra a Figura 72.

Figura 72 – Respostas da questão H

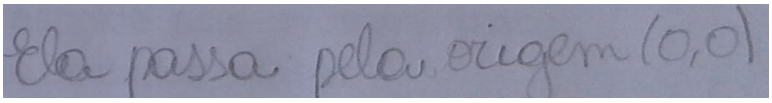


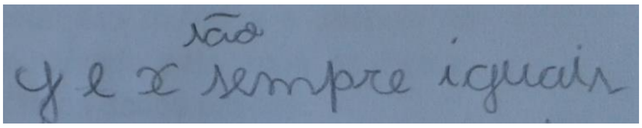
Fonte: Autor.

Ainda fazendo uso da reta dinâmica criada no GeoGebra, propôs-se aos estudantes esboçar os gráficos de alguns casos particulares importantes da função afim, analisar os gráficos e posteriormente citar pelo menos uma característica de cada gráfico. Para construir os gráficos da função identidade, da função constante e da função linear, os alunos simplesmente alteraram os valores dos controles deslizantes que representam os parâmetros a e b da função afim. Para cada caso citaram algumas características importantes das funções dadas como mostram algumas das respostas anexadas nas Figuras 73, 74 e 75 a seguir.

Figura 73 – Características da função identidade

Função identidade: $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

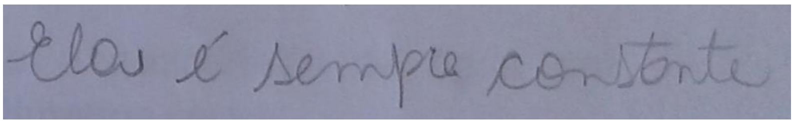




Fonte: Autor.

Figura 74 – Características da função constante

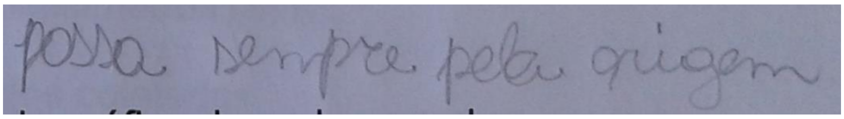
Função constante: $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$



Fonte: Autor.

Figura 75 – Características da função linear

Função linear: $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$



Fonte: Autor.

3.3.3 Função afim e resolução de problemas

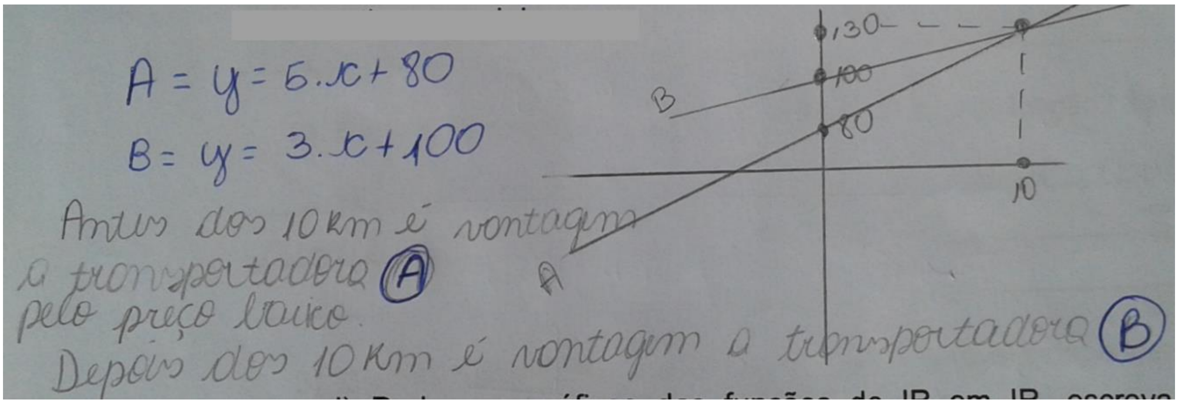
Ao término da aula sobre função afim foi proposto aos alunos o problema I, resolvido pelos alunos como ilustrado na Figura 76.

I) Existem na região de um reflorestamento, duas transportadoras de madeiras A e B. A transportadora A cobra 5 reais por quilômetro rodado mais uma taxa fixa de 80 reais. A transportadora B cobra 3 reais por quilometro rodado mais uma taxa fixa de 100 reais. Discuta a vantagem de A sobre B (ou vice-versa) em função do número de quilômetros rodados. Faça gráficos comparativos nos dois casos.

Após a etapa de compreensão do problema os alunos perceberam que a melhor estratégia para resolvê-lo seria representar os preços cobrados por cada transportadora em função dos quilômetros percorridos, pois notaram a dependência entre as variáveis envolvidas. Porém, tiveram certa dificuldade para executar este plano, logo o professor levantou questionamentos sobre o valor do transporte feito pela empresa A para 1 km, 2 km, 3 km e outras distâncias, até que os alunos fossem capazes de conjecturar o valor do transporte para x km.

Tendo estabelecido a relação que representa o valor do transporte feito pela empresa A em função da distância percorrida em km, os estudantes também conseguiram representar rapidamente a função que representa os valores cobrados pela empresa B em dependência dos quilômetros rodados.

Figura 76 – Resposta da questão I



Fonte: Autor.

Ao analisar as expressões algébricas que representam os valores cobrados pelas duas empresas os alunos ficaram confusos e relataram não saber qual das duas cobrava menos pelo transporte, o professor falou que fazer os gráficos comparativos iria ajudá-los a visualizar as vantagens ou desvantagens de se contratar alguma das empresas. Foi pedido ainda, que os alunos esboçassem os gráficos inicialmente usando régua, lápis e papel.

Observando o parâmetro b de cada função os alunos iniciaram os gráficos representando o ponto de corte do eixo y por cada função. Esperava-se que os estudantes marcassem outro ponto de cada função no gráfico a fim de traçar as retas por dois pontos distintos, porém um aluno comentou que a reta que representa os valores cobrados por A era mais inclinada do que a reta que exibe os valores cobrados por B devido a seus parâmetros 5 e 3. Logo, todos perceberam o fato e traçaram as retas sobre o mesmo plano cartesiano.

O professor perguntou se alguma das duas transportadoras tinha os preços sempre abaixo da outra. Os alunos observaram o gráfico e responderam que não. Então um aluno comentou que precisava-se determinar o ponto de encontro das retas a fim de poder comparar os preços. O professor pediu que encontrassem uma maneira de fazer isto e os alunos usando o GeoGebra marcaram o ponto de intersecção das retas, voltaram aos esboços feitos no papel, representaram tal ponto e responderam à questão.

Percebeu-se que os alunos foram elaborando e executando o plano de solução em etapas, à medida que os obstáculos se colocavam frente a resolução do problema, entretanto, ainda que com auxílio pelo professor, puderam percorrer as três primeiras etapas de resolução propostas por Polya (1995).

O professor repassou com os alunos as etapas da resolução feita por eles, afim de que pudessem verificar o resultado encontrado, e disse-lhes que esperava que usassem o gráfico apenas para visualizar a necessidade de determinar o ponto de encontro das retas, porém como a ideia de usar o GeoGebra partiu deles, deixou que assim o fizessem. O professor explicou ainda, que neste caso o GeoGebra foi usado como uma espécie de calculadora que serviu para determinar o valor de x para o qual as funções assumiam o mesmo valor, o que poderia ser determinado pela solução da equação $5x + 80 = 3x + 100$. Pode-se ainda discutir o fato de que a solução está contida na reta, mas não é a reta.

Analisando as construções gráficas dos alunos para a questão dada pode-se perceber que durante a aula eles puderam desenvolver técnicas para um melhor esboço dos gráficos, visto que atentaram para a inclinação das retas e seus pontos de intersecção com o eixo y. Acredita-se que a melhor percepção dos alunos sobre o gráfico da função afim se deu pelo uso do software, pois este permitiu que visualizassem de uma forma dinâmica as mudanças ocasionadas no gráfico quando alteramos os parâmetros da função. O software também permitiu estabelecer de forma clara a definição de taxa de variação e confirmar que esta é sempre constante para uma mesma função afim. Entretanto, deve existir um cuidado para que usando o software o aluno não deixe de realizar operações e pôr em prática técnicas indispensáveis ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

3.4 OFICINA 3 – FUNÇÃO QUADRÁTICA

As atividades planejadas e aplicadas aos alunos nesta oficina tiveram como fulcro avaliar a proposta para o ensino de funções quadráticas apresentada a seguir. Durante a oficina 3 os estudantes foram convidados a resolver dois problemas, os quais serviram de base para abordar a definição de função quadrática e estudar suas características através do estabelecimento de relações entre sua expressão analítica e seu gráfico. Ainda no decorrer destas atividades buscou-se identificar o auxílio trazido pela análise gráfica das funções quadráticas para a metodologia de resolução de problemas. Através de construções realizadas com o uso do GeoGebra tentou-se propiciar aos alunos estabelecerem relações significativas entre os parâmetros da função quadrática e seu gráfico, construindo um suporte para a resolução de problemas modelados por este tipo de função.

3.4.1 A função quadrática e a resolução de problemas

No início da aula, já na sala de informática, os alunos receberam o material impresso contendo os problemas a serem resolvidos, os conteúdos apresentados no decorrer da oficina e as etapas das construções que posteriormente seriam realizadas no GeoGebra. As cópias entregues aos alunos encontram-se no “APÊNDICE C”.

De início foi proposto aos alunos o seguinte problema.

Problema 1: Com 20 m de tela deseja-se construir um canil retangular de modo que sua área seja a maior possível. Quais deverão ser as dimensões do canil? Qual será sua área?

A fim de observar se os alunos fizeram uma leitura cuidadosa do problema o professor os questionou sobre os dados informados no texto e sobre as incógnitas da questão. Logo, pode-se verificar que os estudantes não atentaram para todas as informações. Portanto sugeriu-se que fizessem uma nova leitura em busca da compreensão do problema, o que segundo Polya (1995) é o primeiro passo na resolução de problemas.

Percebendo que os alunos não deram nenhuma sugestão para resolução do problema o professor pediu que fizessem uma nova representação da situação proposta por meio de um desenho. Alguns alunos simplesmente desenharam um retângulo, outros ainda identificaram o comprimento e a largura do retângulo como x e y, mostrando perceber que os lados do retângulo podem variar. Porém nenhum aluno havia percebido a relação existente entre o comprimento e a largura do retângulo pelo fato de seu perímetro ser igual a 20 metros.

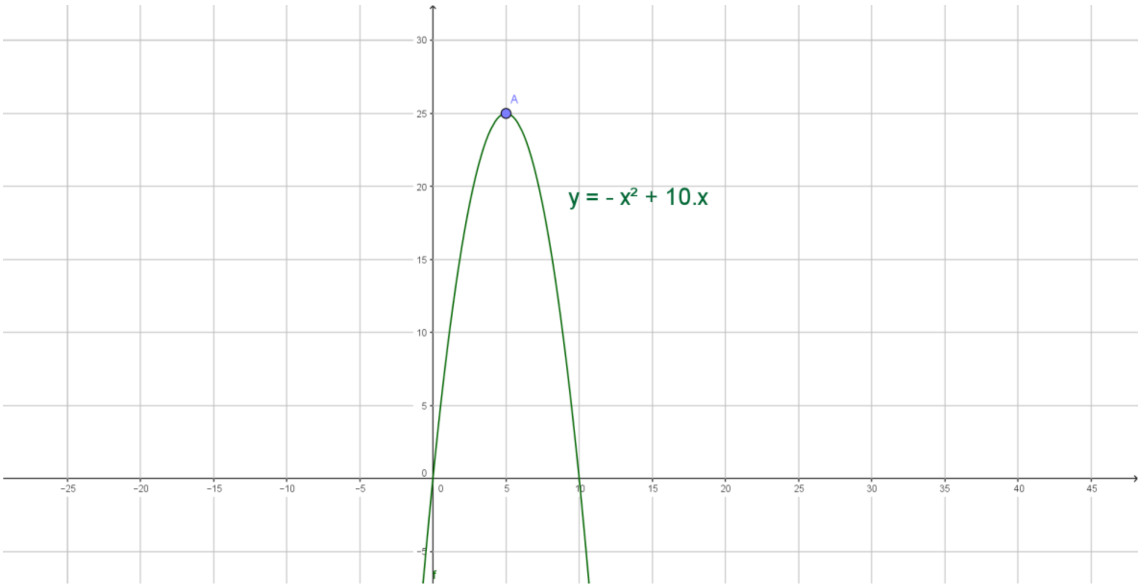
Na lousa o professor desenhou um retângulo e pediu que os alunos propusessem valores numéricos para seu comprimento, em função deste se estipulou a largura e posteriormente a área do retângulo. Repetiu-se esse mesmo processo por algumas vezes para que os alunos percebessem que a largura do retângulo varia em função do seu comprimento e a área varia em função das duas dimensões. Dessa forma pode-se perceber, conjuntamente, que a melhor maneira de representar o problema proposto era por meio de uma função, devido a dependência entre as variáveis do problema.

Depois de inúmeros exemplos numéricos dados pelo professor, os alunos foram capazes de conjecturar a largura do retângulo em função de seu comprimento, representando o comprimento do retângulo por x e a largura por $(10 - x)$. O professor ainda lembrou que necessitava-se escrever uma relação da área do retângulo em função de seu comprimento e de sua largura, de imediato um aluno mostrou lembrar que a área (A) do retângulo é obtida pelo produto da base pela altura. Logo, os alunos puderam chegar a relação: $A = x.(10 - x)$. Coube ainda ao professor lembrar que a área (A) depende do comprimento x, ou seja, A é a variável dependente y. Pediu-se então, que os alunos usassem a distributividade da multiplicação em relação a subtração a fim de chegar à expressão $y = -x^2 + 10x$.

Tendo como exemplo a situação anterior, expressa por uma função em sua forma analítica, o professor pode apresentar a definição de função quadrática expressa na seção 2.3 do Capítulo 2.

Voltando novamente à leitura do Problema 1, os alunos puderam entender que deveriam encontrar o valor de x para o qual y tem seu valor máximo. Mostrando lembrar das atividades desenvolvidas na oficina 1, sobre funções, os alunos abriram o GeoGebra, representaram a função graficamente e observaram o ponto de máximo do gráfico conforme a Figura 77.

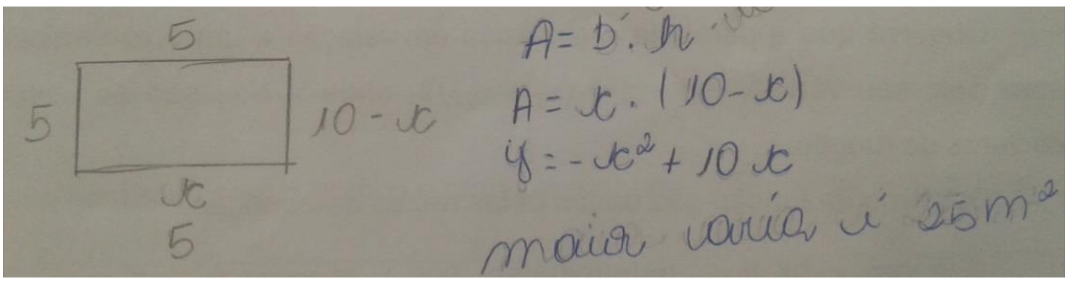
Figura 77 – O ponto máximo da função $y = -x^2 + 10x$



Fonte: Autor.

Posteriormente escreveram suas respostas como representado na Figura 78.

Figura 78 – Respostas do problema 1



Fonte: Autor.

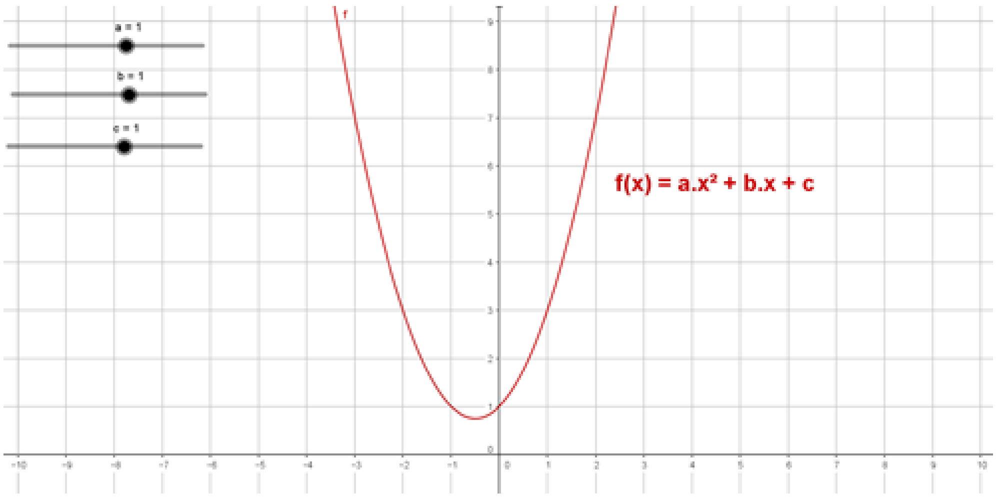
Com o intuito de discutir outras formas de resolução o professor alertou os alunos para o fato de que nem sempre dispõem-se do software GeoGebra ao resolver este tipo de problema, e relatou que é possível a partir desta análise gráfica realizada pelos alunos encontrar métodos algébricos para chegar a solução de situações como esta.

3.4.2 Atividade 1 – Construção da parábola dinâmica

Para colocar os alunos em busca de outra forma de resolver o problema anterior, o professor destacou que o gráfico da função quadrática se chama parábola e o ponto encontrado por eles chama-se vértice da parábola. O professor ainda ressaltou que as coordenadas do vértice da parábola podem ser obtidas a partir dos parâmetros a, b e c da função quadrática e que esta relação seria estabelecida a partir da análise gráfica da função, realizada com o auxílio do software GeoGebra.

Para tal, os estudantes realizaram a construção de uma parábola dinâmica, a partir dos controles deslizantes a, b e c do GeoGebra, como ilustrado através da Figura 79.

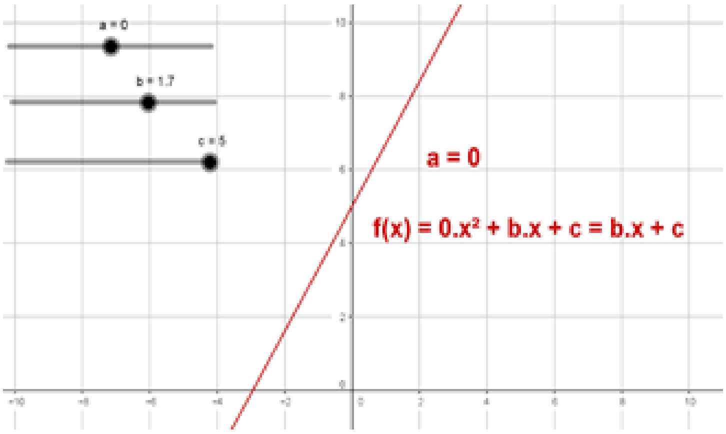
Figura 79 – Parábola dinâmica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$



Fonte: Autor.

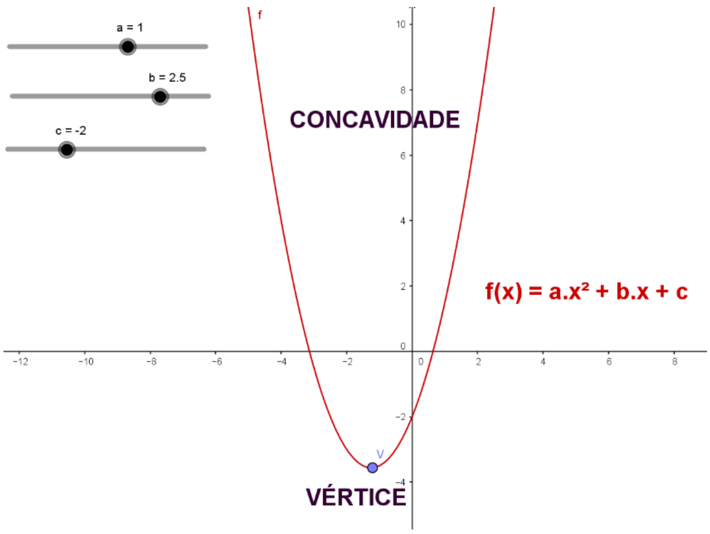
Construído o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, os estudantes puderam modificar os valores de seus parâmetros, como indicado na Figura 80, e perceber que a curva sempre é uma parábola exceto para $a = 0$ quando a função é afim. O professor pode falar que o sentido de abertura de uma parábola é chamado de concavidade, que pode ser voltada para cima ou para baixo e ainda no gráfico pode-se observar os zeros da função, já vistos anteriormente, e o ponto no qual a função assume seu valor máximo ou mínimo definido como vértice da parábola, conforme a Figura 81.

Figura 80 – O gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ quando $a = 0$



Fonte: Autor.

Figura 81 – A concavidade e o vértice da parábola

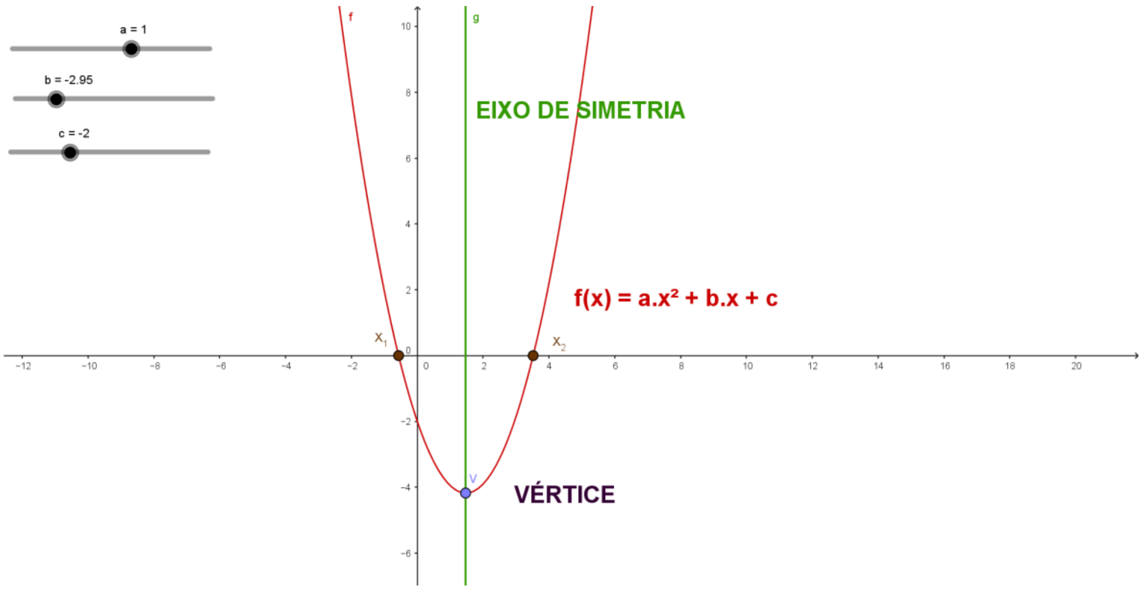


Fonte: Autor.

Ao iniciar a segunda etapa da construção da parábola dinâmica no GeoGebra o professor ressaltou que a determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seu valor máximo ou mínimo.

Com o propósito de determinar o vértice da parábola a partir dos parâmetros da função o professor indagou os alunos sobre a simetria existente no gráfico da função quadrática. Um aluno relatou que existe um eixo que divide a parábola nos ramos crescente e decrescente, mostrando lembrar-se da análise feita sobre parábola na oficina 1 quando estudaram funções crescentes e decrescentes. Logo, a partir da fala do aluno, o professor pode levar os estudantes a perceber que este eixo de simetria é perpendicular ao eixo x e passa pelo vértice da parábola como esboça a Figura 82.

Figura 82 – O eixo de simetria da parábola



Fonte: Autor.

A partir da simetria da parábola foi possível levar os alunos a observar que a abscissa do vértice é a média aritmética entre os zeros da função quadrática, isto é, $x_v = (x_1 + x_2)/2$, com x_1 e x_2 abscissas dos pontos de intersecção da função com o eixo x. O professor indagou os alunos sobre como obter os valores de x_1 e x_2, porém, na ausência de respostas lembrou-os de que x_1 e x_2 são as soluções da equação

$ax^2 + bx + c = 0$, determinadas por, $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$. O professor falou também que a existência dos zeros reais da função está condicionada ao valor de Δ.

Posteriormente, por via de indagações feitas pelo professor e da participação dos alunos, pode-se desenvolver na lousa os cálculos necessários e obter a abscissa do vértice da parábola:

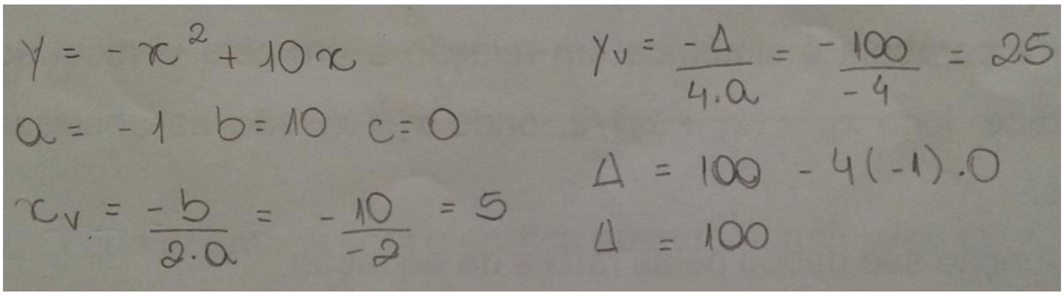
$$x_v = \frac{(x_1 + x_2)}{2} = \frac{1}{2}.\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{-b}{2a}$$

Substituindo x por x_v na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obteve-se $y_v = -\Delta/4a$.

Propôs-se aos alunos criar o vértice da parábola dinâmica no GeoGebra, digitando na entrada de comandos a expressão $V = (-b/2a, -\Delta/4a)$. Logo, movendo os controles deslizantes a, b e c, os alunos puderam notar que, independentemente da existência dos zeros da função, o vértice está sempre presente no gráfico, representando o máximo ou mínimo da função quadrática, visto que as coordenadas do vértice não dependem da raiz de Δ.

Por fim, como mostrado na Figura 83 os estudantes puderam novamente encontrar as respostas para o Problema 1 sem utilizar o GeoGebra.

Figura 83 – Respostas do Problema 1 pelas coordenadas do vértice



Fonte: Autor.

Ao término da primeira etapa da oficina 3, pode-se notar que os alunos conseguiram percorrer as etapas necessárias à resolução de problemas. Ainda que necessitassem de constantes intervenções do professor para resolver o problema 1, os estudantes mostraram-se atuantes na elaboração de estratégias e na construção da solução do problema dado. O fato de terem resolvido o problema recorrendo ao esboço do gráfico no GeoGebra mostra a autonomia dos estudantes na resolução do problema e a crescente afinidade com o uso do software e a análise gráfica de funções. Cabe também ressaltar a grande valia do problema proposto para a compreensão da função quadrática, pois no decorrer de sua resolução pode-se estabelecer de forma informal definições e construir conceitos inerentes ao estudo da função quadrática.

3.4.3 O estudo dos parâmetros da função quadrática

Buscando incentivar os alunos a estabelecer relações entre o gráfico da função quadrática e seus parâmetros, averiguar suas capacidades para tal, e ainda verificar se os estudantes usariam os conhecimentos previamente construídos na resolução de novos problemas propôs-se o Problema 2.

Problema 2: Um projétil é lançado de uma plataforma cuja altura é 1 m do chão, percorrendo uma trajetória parabólica, após 1 segundo, ele está a 3 metros de altura e em 3 segundos está a 1 metro de altura novamente. Considerando que todas estas medidas foram feitas em relação ao chão, responda.

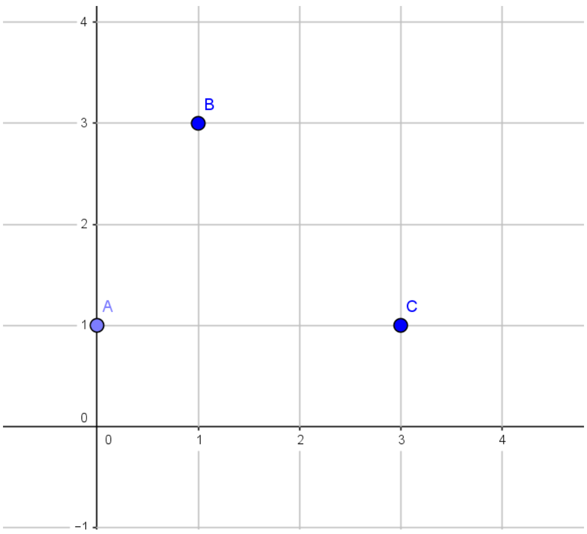
a) Qual a equação que descreve a trajetória do projétil?
b) Qual a altura máxima atingida por este projétil?
c) Em que momento o projétil atingirá o chão?

Novamente os alunos não tomaram a iniciativa na resolução do problema, tendo o professor que lhes instruir a construir um gráfico das posições do projétil em função do tempo para uma melhor compreensão do problema

Como representado na Figura 84, todos conseguiram fazer a representação dos dados iniciais utilizando o GeoGebra, embora que alguns alunos trocassem as coordenadas dos pontos, deixando de marcar os segundos sobre o eixo x e os metros sobre o eixo y, necessitando serem corrigidos pelo professor mediante perguntas para que pudessem verificar seus próprios erros.

Ao ler o item a, os alunos deparam-se com o problema de escrever uma equação que representasse a trajetória do projétil, quando questionados sobre como seria a curva traçada pelas posições do projétil em função do tempo os alunos responderam que a curva teria a forma de uma parábola, então o professor lhes perguntou que tipo de relação tem como gráfico uma parábola, logo puderam perceber que a relação procurada tratava-se de uma função quadrática, que deveria ser determinada a partir de três pontos distintos, completando a etapa de compreensão do problema.

Figura 84 – Dados do Problema 2 sobre o plano cartesiano



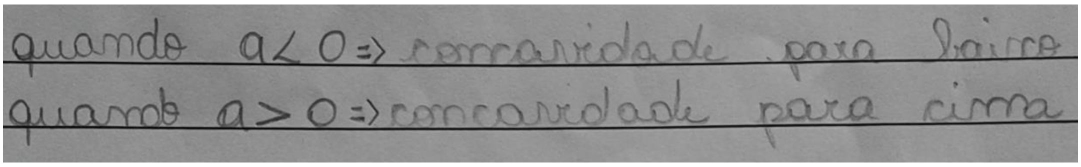
Fonte: Autor.

Como os alunos não conseguiram elaborar um plano para resolver o problema, o professor propôs que usassem a parábola dinâmica construída anteriormente e modificassem os valores de seus parâmetros, a fim de que a curva representativa da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ passasse pelos pontos dados no Problema 2. Entretanto ressaltou que esta tarefa ficaria mais fácil se anteriormente fossem estabelecidas relações entre os parâmetros a, b e c da função quadrática e seu gráfico. Assim iniciou-se o estudo dos parâmetros da função quadrática através de 5 questões que viriam a ser respondidas a partir da análise gráfica da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Para responder as questões 1, 2 e 3, representadas abaixo, pediu-se que os alunos modificassem apenas o valor do parâmetro a da função $f(x) = ax^2 + bx + c$. As respostas dadas pelos alunos aos questionamentos são registradas nas Figuras 85, 86 e 87, anexadas depois das questões que lhes originaram.

1) O que se pode notar na parábola quando $a > 0$ e quando $a < 0$?

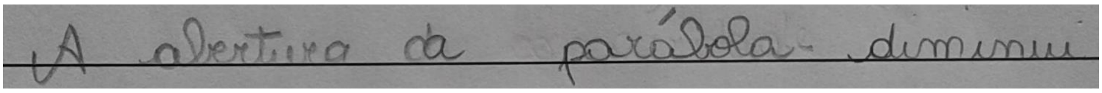
Figura 85 – Resposta da questão 1



Fonte: Autor.

2) O que acontece com o gráfico quando aumentamos o valor absoluto de a?

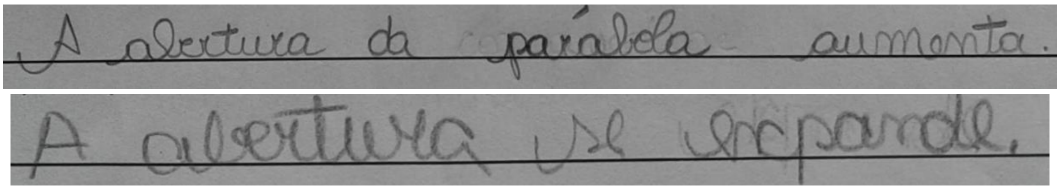
Figura 86 – Resposta da questão 2



Fonte: Autor.

3) O que acontece com o gráfico quando diminuímos o valor absoluto de a?

Figura 87 – Respostas da questão 3

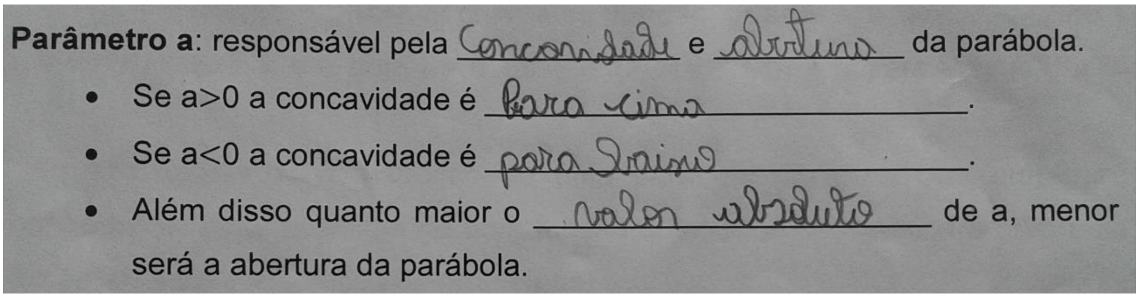


Fonte: Autor.

Depois os alunos puderam resumir as informações adquiridas através das questões 1, 2 e 3 conforme mostra a Figura 88.

Ainda que o professor tenha tido que relembrar o que significa “valor absoluto” na questão 2, os alunos responderam as três questões sem maiores dificuldades, demonstrando inclusive mais facilidade em expressar o raciocínio e em usar os termos matemáticos adequados.

Figura 88 – Análise do parâmetro *a* da função $f(x) = ax^2 + bx + c$

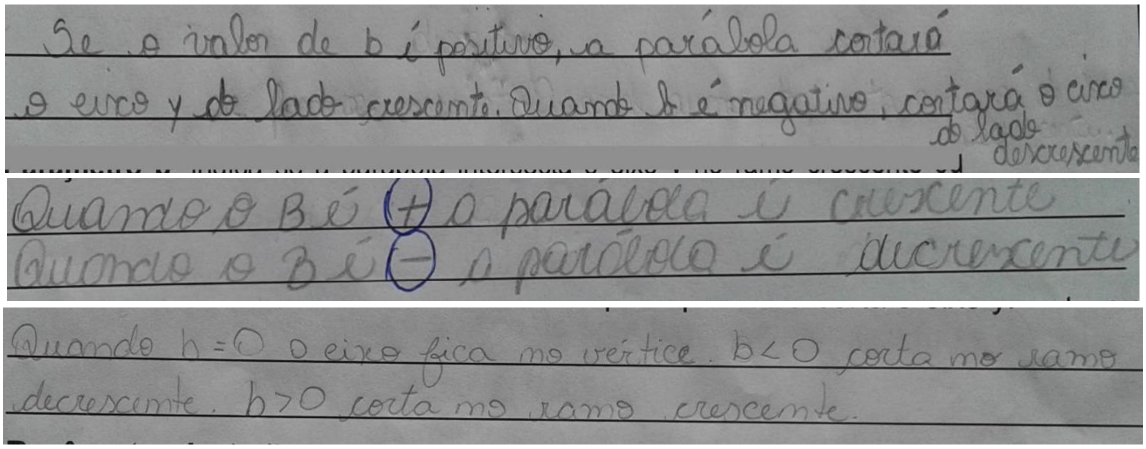

Parâmetro a: responsável pela Concavidade e abertura da parábola.

- Se a>0 a concavidade é Para cima.
- Se a<0 a concavidade é para baixo.
- Além disso quanto maior o valor absoluto de a, menor será a abertura da parábola.

Fonte: Autor.

Posteriormente, na quarta questão, modificando o valor de *b* os estudantes deveriam estabelecer relações entre o sinal de *b* e o ramo em que a parábola intersecta o eixo y. Como mostram algumas das respostas dadas pelos alunos anexadas na Figura 89.

Figura 89 – Relações estabelecidas pelos alunos entre o parâmetro *b* e a parábola


Se o valor de b é positivo, a parábola cortará o eixo y do lado crescente. Quando b é negativo, cortará o eixo do lado descrescente

Quando o B é + a parábola é crescente
Quando o B é − a parábola é decrescente

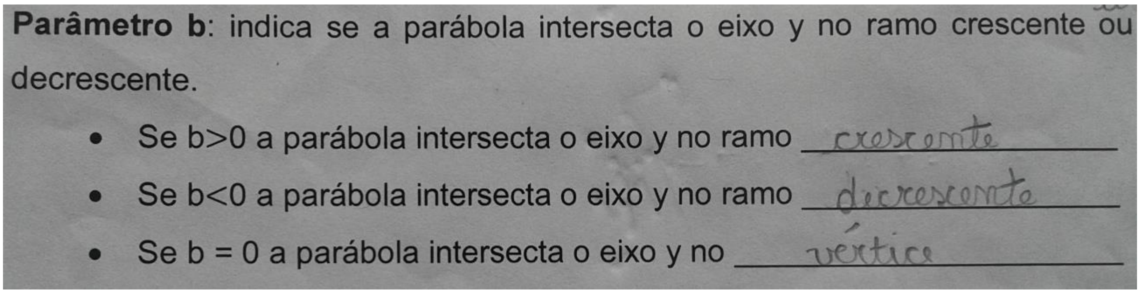
Quando b = 0 o eixo fica no vértice. b<0 corta no ramo decrescente. b>0 corta no ramo crescente.

Fonte: Autor.

Novamente os alunos sintetizaram as relações percebidas entre o parâmetro *b* da função quadrática e seu gráfico, como ilustra a Figura 90.

Ao escrever suas respostas alguns alunos esqueceram de analisar o que acontece com a parábola quando $b = 0$, entretanto, percebendo o fato o professor mostrou na lousa que se $b = 0$, então $V = (-b/2a, -\Delta/4a) = (0, c)$, isto é, a parábola intersecta o eixo y no vértice, que por sua vez tem ordenada igual ao parâmetro c.

Figura 90 – Análise do parâmetro b da função $f(x) = ax^2 + bx + c$


Parâmetro b: indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente.

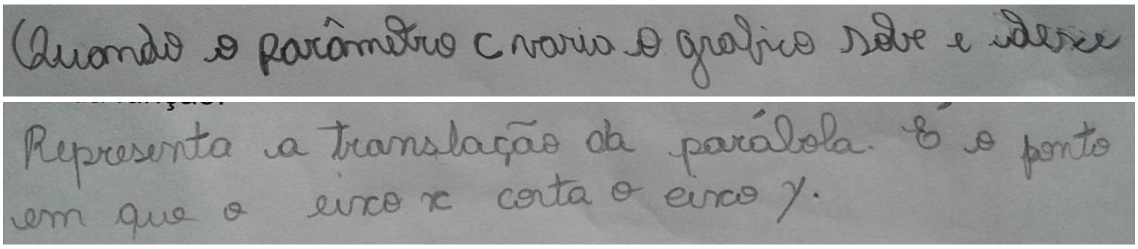
- Se b>0 a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente
- Se b<0 a parábola intersecta o eixo y no ramo decrescente
- Se b = 0 a parábola intersecta o eixo y no vértice

Fonte: Autor.

Foi possível perceber que os alunos muitas vezes são desatentos ao interpretar um problema, o que mostra a necessidade de instigá-los a realizar atividades que possuam como base a interpretação e a análise de dados. É interessante também, que tais atividades levem o aluno a expressão do seu raciocínio a fim de que o professor possa visualizar as possíveis falhas de interpretação do problema por parte dos alunos, assim como ajudá-los a expressarem-se de forma clara usando termos matemáticos, ampliando seus conhecimentos em linguagem matemática.

Por fim, na quinta questão, variando apenas o parâmetro c os alunos deveriam explicar o que ele representa para o gráfico da função (Figura 91).

Figura 91 – Relações estabelecidas pelos alunos entre o parâmetro c e a parábola


Quando o parâmetro c varia o gráfico sobe e desce

Representa a translação da parábola. É o ponto em que o eixo x corta o eixo y.

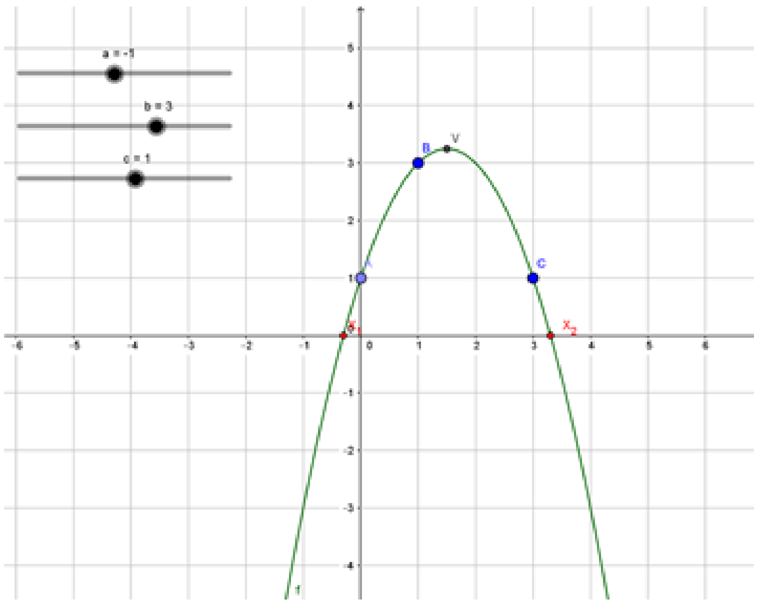
Fonte: Autor.

Como todos os alunos conseguiram visualizar o movimento vertical da parábola ao alterar o valor do parâmetro c, o professor informou-os de que este movimento do gráfico é chamado de translação vertical e ainda instigou-os a perceber que c é a ordenada do ponto de intersecção da parábola com o eixo y.

Observar os movimentos do gráfico da função quadrática, usando um programa de computador, proporcionou aos alunos visualizar e interpretar as mudanças nas características da parábola quando modificamos os parâmetros da função que a representa.

Executando a estratégia inicialmente proposta, no GeoGebra, sobre o plano no qual haviam construído a parábola dinâmica, os alunos plotaram os pontos (0,1), (1,3) e (3,1), dados no Problema 2. Depois, de posse das relações estabelecidas durante o estudo dos parâmetros da função quadrática, modificaram os valores dos parâmetros a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, a fim de que os pontos pertencessem a parábola como pode ser visto na Figura 92.

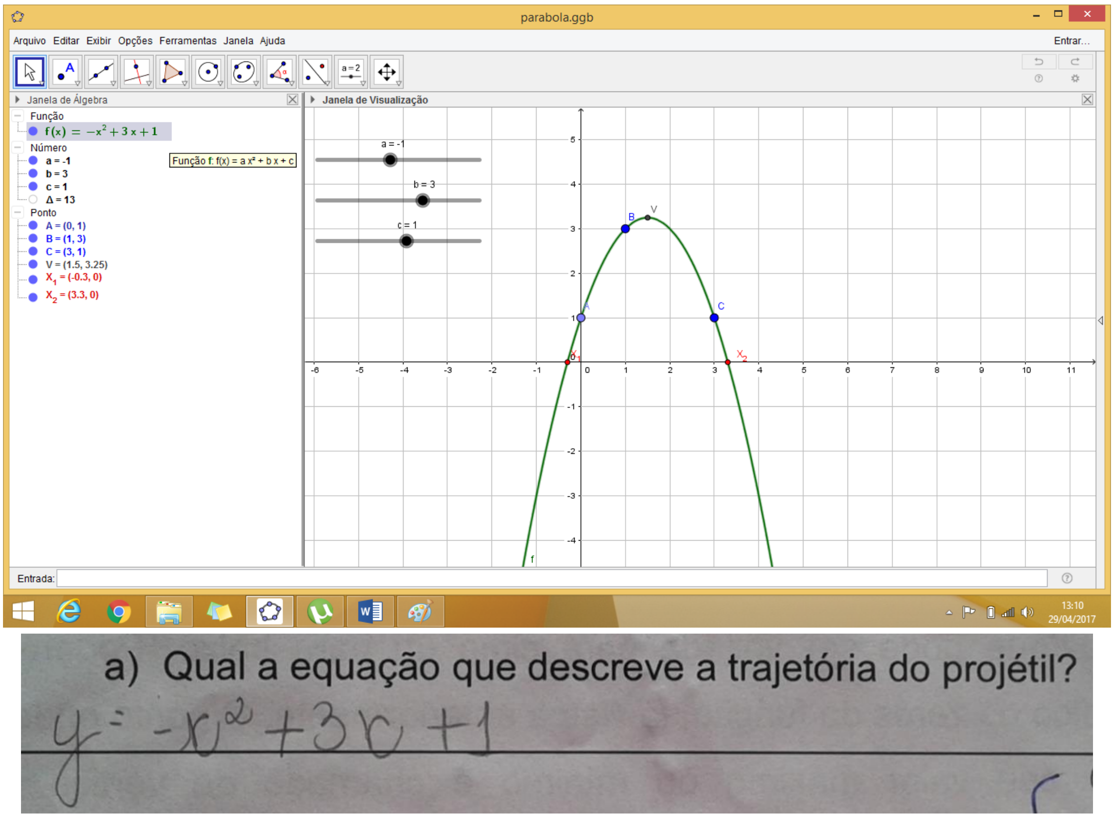
Figura 92 – Ajustando a parábola aos pontos dados no Problema 2



Fonte: Autor.

Logo, puderam visualizar os valores dos parâmetros da função que representa a trajetória do projétil, assim como, a expressão analítica da parábola na janela de álgebra, ao lado da janela gráfica, respondendo assim o item a do Problema 2 como mostra a Figura 93.

Figura 93 – Resolução do item a do Problema 2



Fonte: Autor.

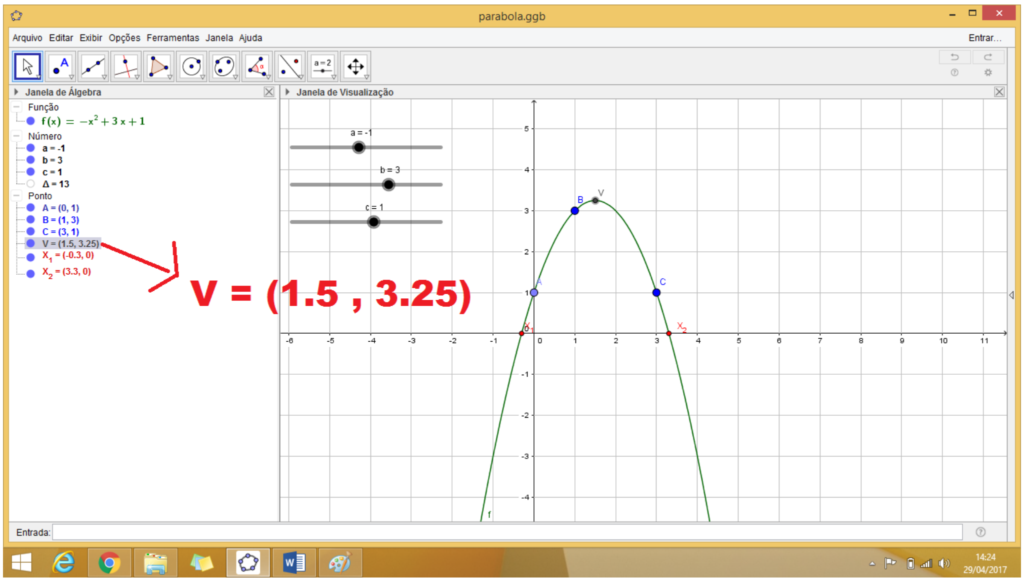
Durante a etapa de retrospecto do problema, professor ainda relatou que a expressão $y = -x^2 + 3x + 1$, que representa a trajetória do projétil para todo $x \in [0\,, (3 + \sqrt{13})/2]$, pode ser obtida recorrendo a resolução de um sistema de equações originadas pela substituição das coordenadas dos pontos (0,1), (1,3) e (3,1) na função $f(x) = ax^2 + bx + c$, como representado abaixo:

$$\begin{cases} 1 = a.0^2 + b.0 + c \\ 3 = a.1^2 + b.1 + c \\ 1 = a.3^2 + b.3 + c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 3 \\ 9.a + 3.b + c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Longrightarrow y = -x^2 + 3x + 1.$$

Durante a resolução do sistema de equações o professor retomou todos os passos da resolução por substituição e pode perceber que os alunos não lembravam de métodos de resolução de sistemas.

Quando foram responder qual a altura máxima atingida pelo projétil, os estudantes novamente recorreram ao gráfico já esboçado no GeoGebra e observaram a ordenada do vértice da parábola, visto que suas coordenadas ficam evidentes na janela de álgebra, pelo fato de anteriormente terem representado o vértice a partir dos parâmetros a, b e c da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, como mostra a Figura 94.

Figura 94 – O vértice da parábola $y = -x^2 + 3x + 1$ no GeoGebra

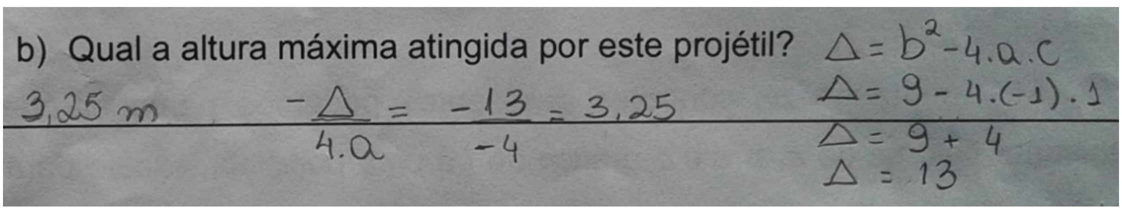


Fonte: Autor.

O professor questionou os estudantes sobre outras maneiras de responder a questão, alguns alunos disseram que podia-se usar a fórmula do vértice, outro aluno disse que a altura máxima é alcançada após 1,5 segundos do momento de lançamento, pois observou a abscissa do ponto médio de (0,1) e (3,1). Então o professor propôs-lhes usar estas estratégias para obter a altura máxima do projétil.

A maioria usou a expressão que representa a ordenada do vértice, como mostrado na Figura 95 da resposta dada por um aluno.

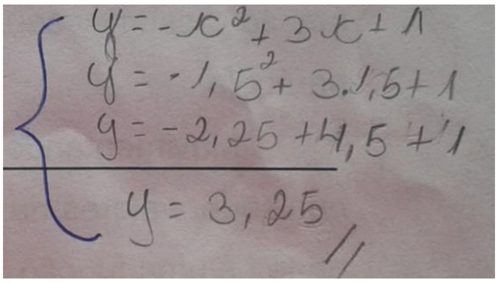
Figura 95 – Resposta dada ao item b do Problema 2 pela maioria dos alunos



Fonte: Autor.

O aluno que percebeu a simetria em relação a abscissa do vértice entre os pontos (0,1) e (3,1), foi orientado pelo professor a substituir x por 1,5 na expressão analítica da função e também pode chegar ao resultado esperado usando sua própria estratégia como mostra a Figura 96.

Figura 96 – Resposta do item b do Problema 2 por simetria entre as raízes



Fonte: Autor.

No último item do Problema 2, os alunos determinaram corretamente em que momento o projétil atingiria o chão observando graficamente os zeros da função. O professor lembrou-os novamente de que é possível obter os zeros da função encontrando as raízes da equação $y = -x^2 + 3x + 1$.

Durante a resolução do Problema 2 pode-se notar que os alunos souberam aproveitar todas as informações trazidas pelo gráfico da função e pelo software que utilizaram para desenhá-lo, analisando o gráfico e os dados calculados pelo GeoGebra. Ainda que, inicialmente, os aprendizes não tenham resolvido o item a usando um sistema de equações, o item b usando as fórmulas das coordenadas do vértice e o item c por meio das raízes da equação do 2º grau, estes puderam a partir de suas resoluções iniciais ser impulsionados para tal. Desta forma pode-se dar valor as estratégias utilizadas pelos alunos, atendendo ao propósito principal da resolução de problemas. É importante ressaltar que os alunos responderam as questões utilizando as estratégias que julgaram mais fáceis, mas mesmo assim, puderam participar da resolução das mesmas questões pelas técnicas usuais, visto que neste processo de resolução pode-se relembrar e consolidar técnicas e conteúdos estudados anteriormente.

3.5 OFICINA 4 – FUNÇÃO EXPONENCIAL E FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Através da resolução de um problema previamente formulado, buscou-se proporcionar aos alunos conjecturar um exemplo de função de tipo exponencial e posteriormente conjecturar sua função inversa, oportunizando-os assim, construírem as definições de função exponencial e de função logarítmica. A escolha do problema inicialmente proposto se deu de forma a facilitar a autonomia dos aprendizes no momento de resolução.

A atividade proposta nesta oficina teve como principal objetivo analisar as contribuições trazidas pela abordagem gráfica na construção das definições formais de função exponencial e de função logarítmica. O estudo das funções exponenciais e logarítmicas é indispensável para a descrição e a compreensão de um grupo de fenômenos de natureza não linear, ampliando consideravelmente a capacidade dos alunos de expressar e de modelar fenômenos naturais, o que favorecerá uma compreensão mais ampla nos diversos contextos em que eles surgem.

3.5.1 A função exponencial e a resolução de problemas

No início da última oficina os alunos receberam folhas impressas, presentes no "APÊNDICE D", nas quais constam definições, problemas e observações referentes ao estudo das funções exponenciais e das funções logarítmicas. Propôs-se inicialmente aos estudantes a leitura e resolução dos sete itens do problema abaixo.

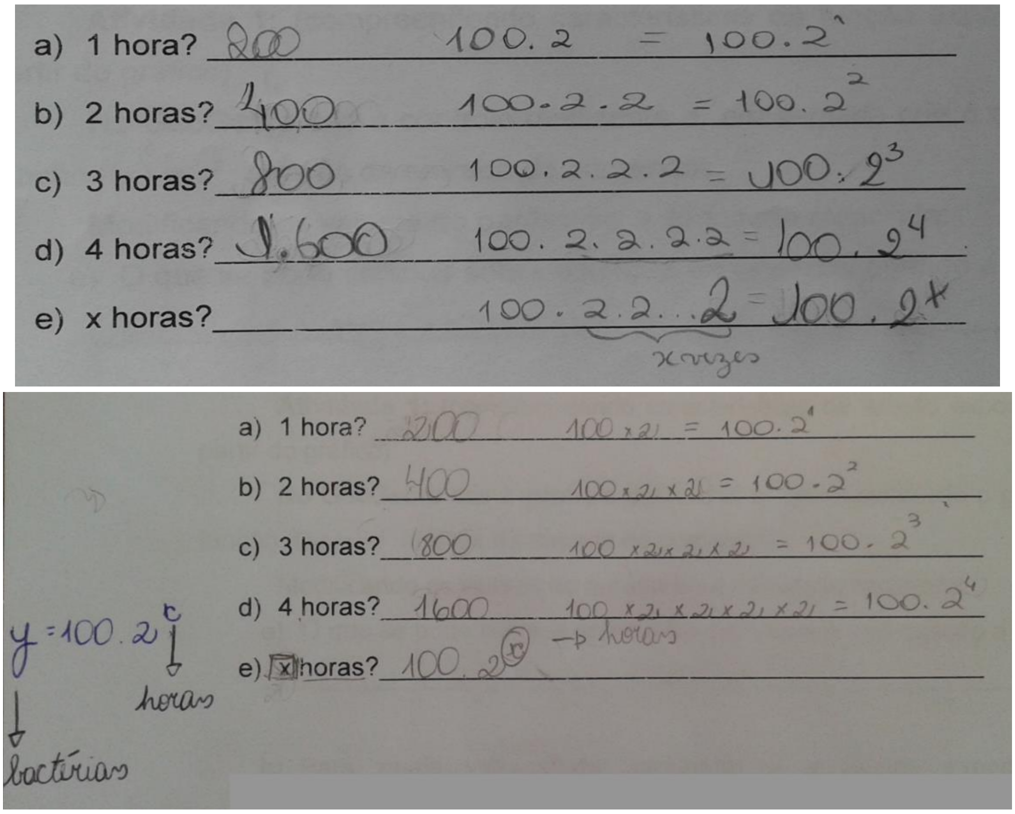
Problema 1: Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 100 bactérias no início da pesquisa, calcule quantas bactérias existirão depois de:

a) 1 hora?
b) 2 horas?
c) 3 horas?
d) 4 horas?
e) x horas?
f) Depois de quanto tempo o número de bactérias será igual a 12.800?
g) Encontre uma fórmula matemática do tempo (em horas) em função do número de bactérias.

Os quatro primeiros itens, de a até d, foram propostos para facilitar a conjectura da relação entre a quantia de horas e o número de bactérias presente na cultura. Entretanto, alguns alunos determinaram que o número de bactérias em 1 hora, 2 horas, 3 horas e 4 horas foram respectivamente, 200, 300, 400 e 500. Mostrando novamente desatenção na leitura do problema, pois ao invés de dobrar a quantidade de bactérias a cada hora os alunos acrescentaram sucessivamente 100 à quantidade presente na hora anterior. Logo, quando o professor indagou os alunos sobre os resultados obtidos para os itens a, b, c e d, os estudantes que haviam cometido o equívoco puderam comparar suas respostas às dos colegas, percebendo o erro e corrigindo seus registros.

Sem a intervenção do professor os alunos não conseguiram resolver o item e, no qual deveriam determinar uma sentença matemática para o número de bactérias depois de x horas. Portanto o professor orientou-os a expressar cada uma das respostas anteriores em função da primeira resposta, dada ao item a, como ilustrado na Figura 97.

Figura 97 – Respostas dos itens a, b, c, d e e do Problema 1



Fonte: Autor.

Desta forma os alunos puderam observar a relação entre o número de horas e a quantidade de fatores iguais a 2 no produto que representa o número de bactérias presentes na cultura depois de cada hora. Em vista disto, escreveram as respostas usando potências de base 2 e, consequentemente, a expressão que representa o número de bactérias depois de x horas, determinando assim o número de bactérias da cultura em função do tempo por meio de uma função do tipo exponencial, como pode-se ver na Figura 97.

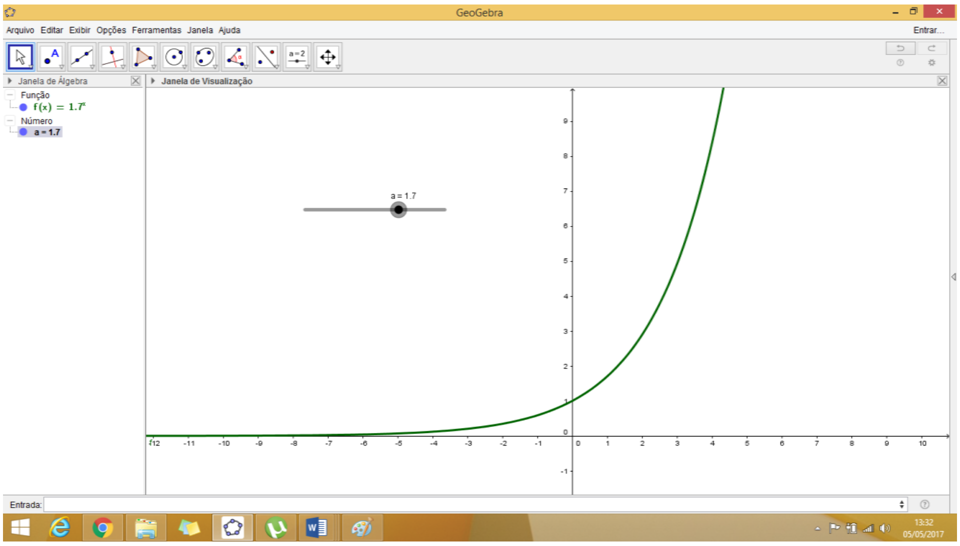
Tendo os alunos modelado inicialmente o problema pela relação $y = 100\ .\ 2^x$, com x e y representando, respectivamente, o tempo em horas e o número de bactérias decorridas estas horas, pode o professor comunicar que o modelo matemático que fornece soluções para todos os itens acima é dado por funções do tipo $f(x) = b.a^x$, conhecidas como funções do tipo exponencial. Logo pode-se apresentar a definição de função exponencial $f(x) = a^x$ conforme descrito na seção 2.4 do Capítulo 2.

Os estudantes foram informados de que a próxima atividade lhes oportunizaria conhecer algumas propriedades deste tipo de função, o que os ajudaria a entender melhor a solução apresentada do problema dado acima, e também, facilitaria a compreensão das restrições feitas aos valores do parâmetro a e do contradomínio da função exponencial. Desta forma construiriam também conhecimentos prévios para abordar outros problemas modelados por este tipo de função.

Para que pudessem construir a curva que representa o gráfico da função exponencial os alunos criaram, no GeoGebra, o controle deslizante a, que viria a representar o parâmetro a da função $f(x) = a^x$. Depois digitaram a expressão $f(x) = a^x$ na entrada de comandos construindo assim a curva exponencial vista na Figura 98.

Posteriormente, modificando no GeoGebra os valores do parâmetro a da função $f(x) = a^x$ e observando as alterações no gráfico, os alunos responderam quatro questões referentes aos valores de a e sua relação com as características da função exponencial. Na sequência são apresentadas as questões, a ilustração da construção gráfica realizada pelos alunos e algumas das respectivas respostas dadas por eles.

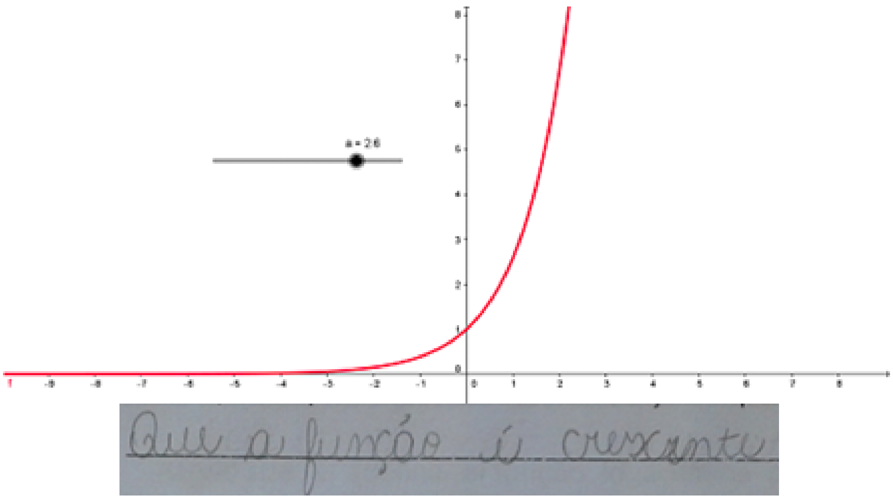
Figura 98 – Exponencial $f(x) = a^x$



Fonte: Autor.

a) O que se pode concluir sobre a função exponencial quando $a > 1$?

Figura 99 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a > 1$

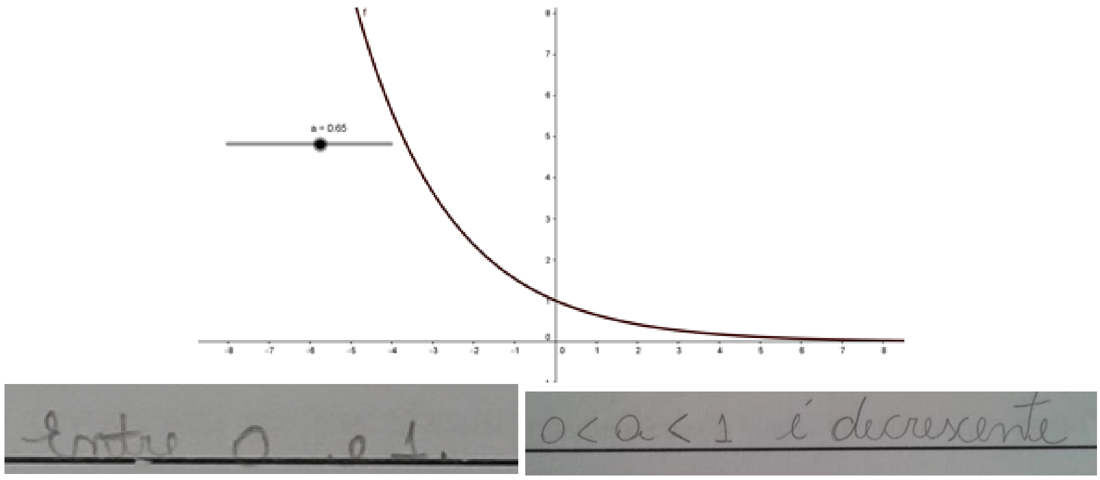


Fonte: Autor.

Dadas as respostas dos alunos (Figura 99), se discutiu o porquê de a função exponencial ser crescente para $a > 1$, levando os alunos a lembrar de que numa potenciação com base maior do que 1, quanto maior for expoente maior será a potência.

b) Para quais valores do parâmetro a a função exponencial é decrescente?

Figura 100 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a < 1$

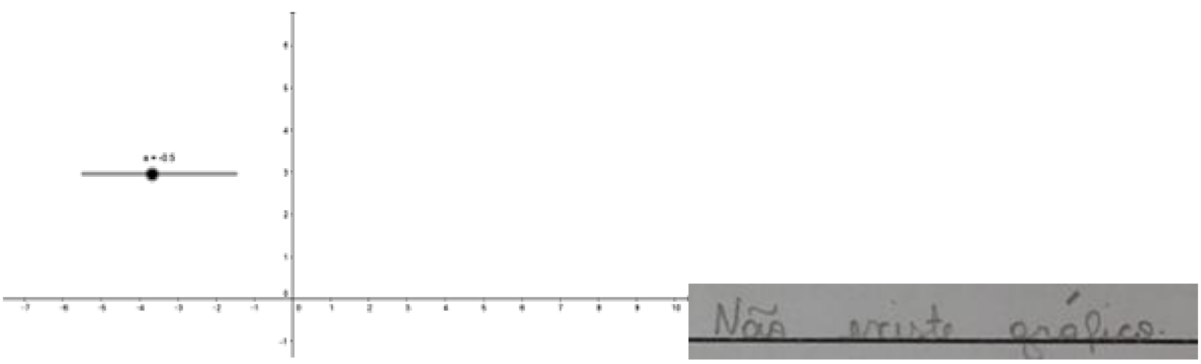


Fonte: Autor.

A partir da análise do gráfico os alunos observaram que a função exponencial é decrescente para valores de a entre 0 e 1 e expressaram suas respostas como visto na Figura 100. O professor pode ainda comentar que os valores de a entre 0 e 1, embora não sejam todos números racionais, podem ser suficientemente aproximados por frações próprias, o que faz com que quanto maior o expoente da potenciação de base a menor seja sua potência.

c) O que acontece com o gráfico quando $a < 0$?

Figura 101 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a < 0$



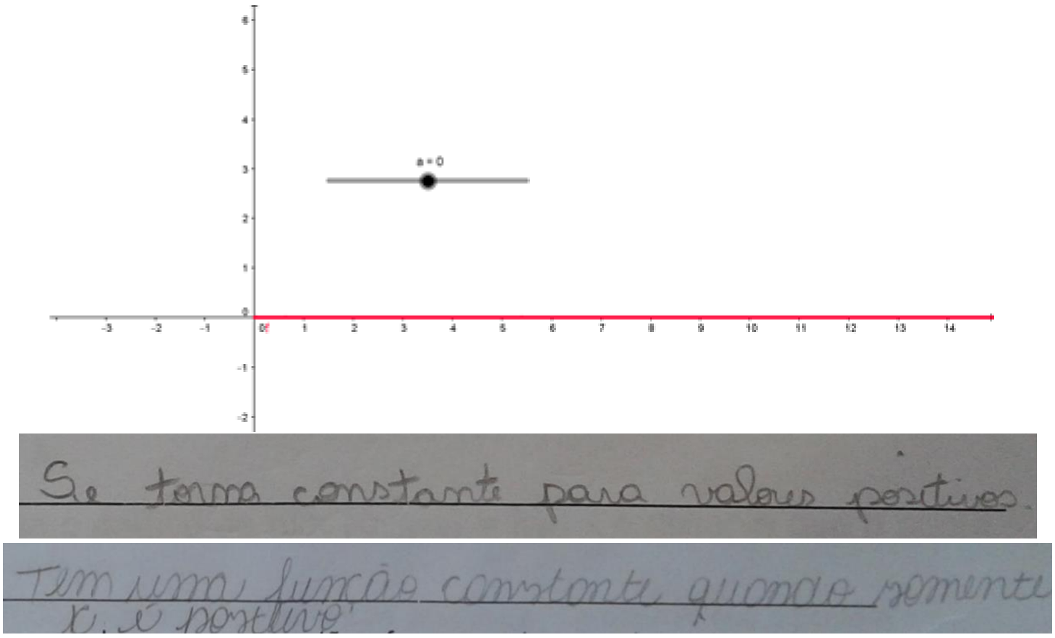
Fonte: Autor.

Como todos os alunos haviam percebido a ausência do gráfico da função para $a < 0$ (Figura 101), pode-se debater sobre as causas da ocorrência, levando os aprendizes a perceberem que a expressão a^x perde o sentido, dentre os números reais, para valores de x da forma n/m, com n um número ímpar e m é um número par.

d) O que acontece com o gráfico quando $a = 0$?

Ao levantar-se questões a respeito das respostas listadas pelos alunos, apresentadas na Figura 102, estes justificaram a função ser constante pela hipótese de que zero elevado a qualquer expoente resulta sempre em zero. Portanto, o professor interviu e mostrou que zero elevado a um expoente negativo, ou nulo, não tem sentido dentre os números reais.

Figura 102 – Exponencial $f(x) = a^x$ quando $a = 0$



Fonte: Autor.

Depois discutiu-se o caso em que $a = 1$, quando os alunos puderam perceber que $f(x) = a^x = 1^x = 1$, isto é, a função é constante.

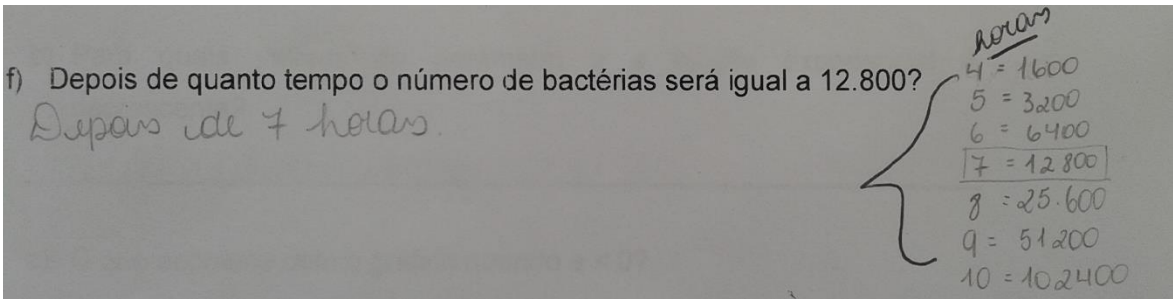
Por fim, o professor pediu que os alunos observassem o gráfico da função exponencial e mostrou que sua imagem é igual ao seu contradomínio, representado por IR_{+}^{*}. Assim, a função exponencial além de injetiva é sobrejetiva, portanto, bijetiva.

Ao término desta etapa pode-se perceber que, por meio da análise gráfica da função exponencial, os estudantes notaram, por conta própria, características importantes deste tipo de função, possibilitando a discussão sobre as restrições feitas ao valor do parâmetro a, a fim de que a relação $y = a^x$ seja uma função exponencial.

3.5.2 A função logarítmica como inversa da função exponencial

A pergunta presente no item f foi proposta aos alunos para que percebessem a necessidade de definir uma função inversa à função exponencial. Porém, para responder depois de quanto tempo o número de bactérias seria igual a 12.800, os alunos simplesmente testaram potências de 2 na função $y = 100\,.\,2^x$ até obter $100\,.\,2^7 = 12.800$ como pode-se perceber na resposta de um aluno apresentada na Figura 103 abaixo.

Figura 103 – Resposta do item f do Problema 1



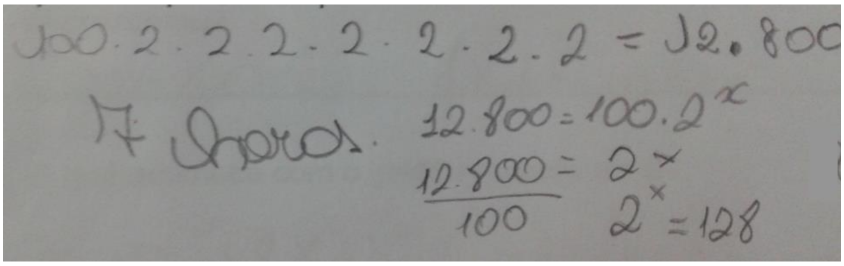
Fonte: Autor.

Dessa forma, notou-se que devido a resposta da questão f ser dada por um número inteiro os alunos não sentiram a necessidade de buscar uma função inversa à função $y = 100\,.\,2^x$. Logo o professor levantou novos questionamentos, supondo que o expoente procurado não fosse um número inteiro ou ainda que fosse um número muito grande para ser calculado por meio de tentativas, até que um aluno propôs substituir y pelo número de bactérias informado e isolar x na equação obtida.

Então o professor os orientou a resolver o item f usando a estratégia planejada pelo aluno, o que foi feito como mostra a resolução apresentada por um aluno na Figura 104.

Nas resoluções apresentadas pelos alunos percebeu-se que os estudantes não lembravam a definição de logaritmo e sequer fizeram a decomposição de 128 em fatores primos para escrevê-lo como potência de base 2. Logo o professor lembrou a definição de logaritmo aos alunos (ver seção 2.5 do Capítulo 2).

Figura 104 – Resolução do item f por substituição



Fonte: Autor.

Os estudantes relataram nunca ter estudado logaritmos. Então, na lousa, o professor solucionou o problema dado a partir da definição de logaritmo, mostrando que $x = \log_2 128$ e resolvendo a expressão pela decomposição em fatores primos.

Um aluno questionou se é possível calcular logaritmos na calculadora, então o professor explicou que as calculadoras científicas normalmente calculam logaritmos de base 10 e para usá-las no cálculo de logaritmos de outras bases é necessário realizar a mudança de base com o uso da fórmula $\log_b a = \log a / \log b$. O professor mostrou também, como usar o GeoGebra para o calcular logaritmos, de qualquer base (positiva), a partir da entrada de comandos, escrevendo log (b, x), com b indicando a base do logaritmo e x o logaritmando.

Posteriormente os estudantes foram convidados a resolver o item g, em que deveriam escrever uma fórmula matemática do tempo (em horas) em função do número de bactérias, ou seja, a função logarítmica inversa da função $y = 100 \, . \, 2^x$. Como não apresentaram resultados o professor explicou que relembrar a definição de função inversa ajudar-lhes-ia a resolver o problema.

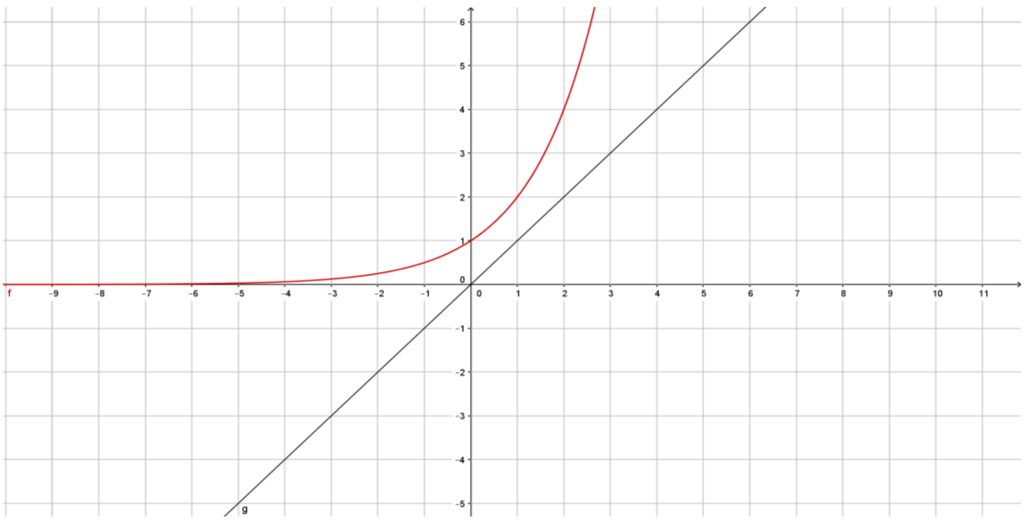
Logo os alunos leram a definição de função inversa presente na folha impressa que haviam recebido no início da aula, juntamente com a observação feita sobre seu gráfico (ver seção 2.1 do Capítulo 2).

Para exemplificar a definição acima e propor uma técnica para determinação da função inversa de uma função exponencial dada, o professor tomou a função $y = 2^x$, que determina uma potência y em função de cada expoente x para a base 2. Depois, orientou os alunos a primeiramente trocar y por x e x por y, pois não é comum considerar y como variável independente nas funções. Por fim, induziu os estudantes a usar a definição de logaritmo para isolar y na relação $x = 2^y$, isto é, escrever a função logarítmica $y = \log_2 x$, que determina o expoente y para a base 2 em função de cada potência x de mesma base.

Buscando consolidar a definição de função inversa e verificar graficamente a relação existente entre as funções $y = 2^x$ e $y = \log_2 x$ os alunos seguiram o roteiro abaixo, da "atividade 2" presente na folha impressa vista no "APÊNDICE D".

Primeiro construíram no GeoGebra o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e posteriormente a reta $y = x$ como representado na Figura 105.

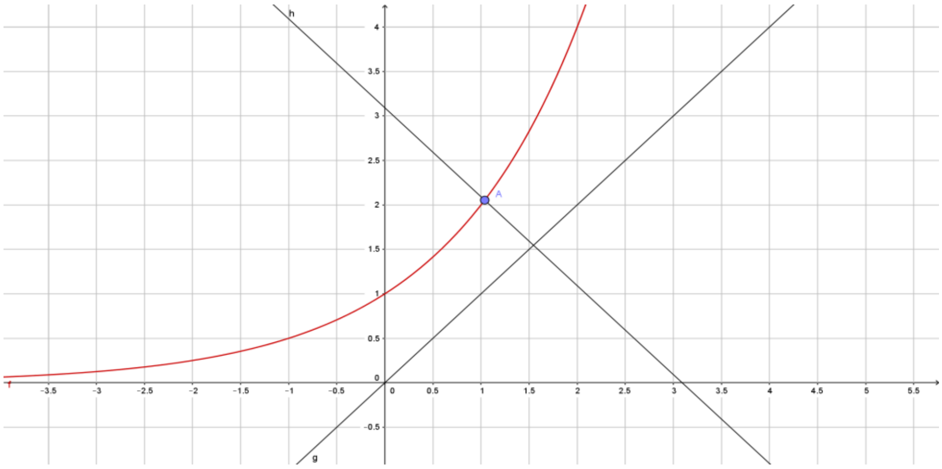
Figura 105 – Gráfico de $f(x) = 2^x$ e $y = x$



Fonte: Autor

Depois criaram uma reta perpendicular à reta que representa a função identidade e passa por um ponto A pertencente a $f(x)$ como esboçado na Figura 106.

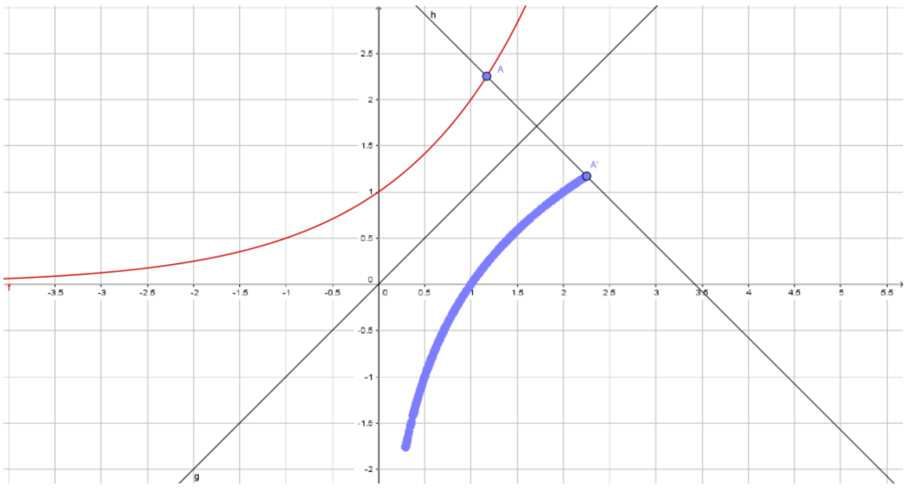
Figura 106 – Reta perpendicular a função identidade



Fonte: Autor.

Utilizando a ferramenta do GeoGebra "reflexão em relação a uma reta", os alunos estabeleceram a reflexão do ponto A em relação a reta $y = x$, criando assim o ponto A'. Posteriormente habilitaram o rastro do ponto A' e moveram o ponto A, a fim de observar a curva traçada por A', como representado na Figura 107.

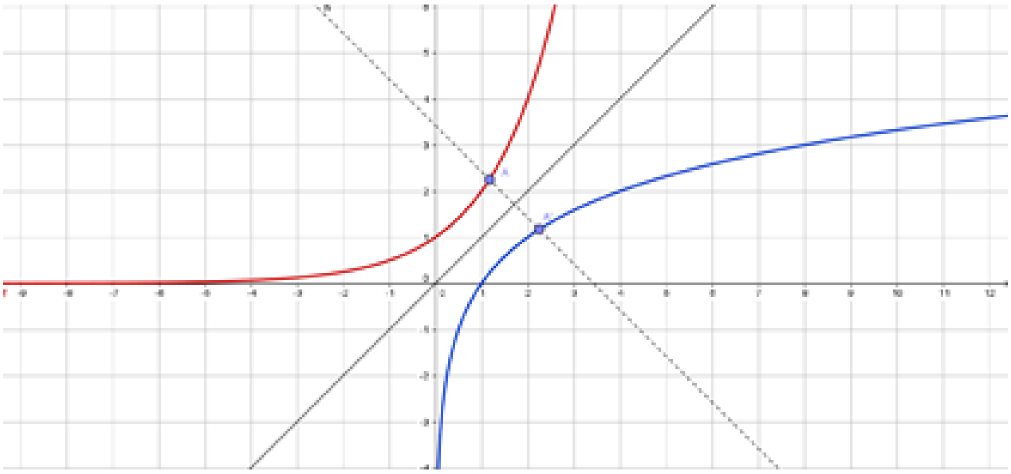
Figura 107 – Curva simétrica da função $f(x) = 2^x$ em relação a reta $y = x$



Fonte: Autor.

Por fim, construindo o gráfico da função $g(x) = \log_2 x$, os alunos moveram o ponto A pertencente a função f e notaram que o ponto A' percorria a função g, isto é, puderam observar que os simétricos, em relação à reta $y = x$, dos pontos que formam o gráfico da função $f(x) = 2^x$ pertencem a função $g(x) = \log_2 x$, como visto na Figura 108.

Figura 108 – A função $g(x) = \log_2 x$ como inversa da função $f(x) = 2^x$

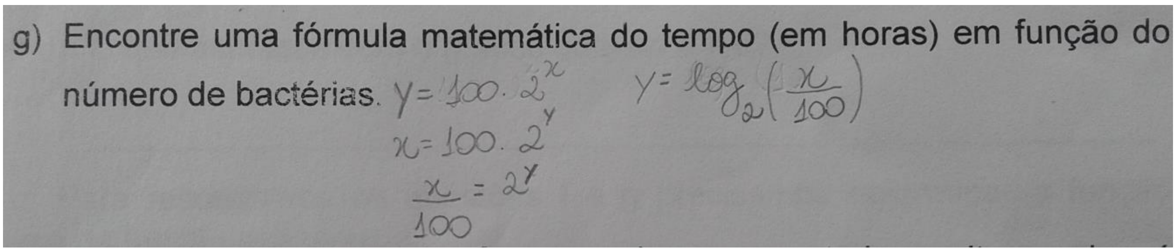


Fonte: Autor.

Ao término da atividade 2 pode-se intuir que, se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ é definida por $f(x) = a^x$, então sua inversa é $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log_a x$, com $0 < a \neq 1$.

Estabelecida a definição de função inversa e a função logarítmica como inversa da função exponencial os estudantes puderam responder a questão g, como mostrado na Figura 109.

Figura 109 – Resposta da questão g do Problema 1


g) Encontre uma fórmula matemática do tempo (em horas) em função do número de bactérias. $y = 100 \cdot 2^x$ $\quad y = \log_2\left(\frac{x}{100}\right)$

$x = 100 \cdot 2^y$

$\frac{x}{100} = 2^y$

Fonte: Autor.

A fim de perceber se os estudantes compreenderam os conceitos de função exponencial e de função logarítmica, ao término da oficina, lhes foi proposto o seguinte problema.

Problema 2: Se você fizer um investimento de R$ 1000,00 a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês, depois de quanto tempo terá o dobro?

Como os alunos não lembravam a fórmula do montante para juros compostos, o professor explicou que o regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e, portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia a dia. Mostrou que os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte, por isso este regime é conhecido por sistema de "juros sobre juros". Por intermédio do diálogo entre o professor e os alunos pode-se conjecturar a fórmula para o montante da seguinte maneira:

1º mês: $M_1 = C.(1+i)$, com $M,\ C,\ t$ e $i,$ representando respectivamente, montante, capital, período de tempo e taxa de juros para o respectivo período.

2º mês: o capital é igual ao montante do mês anterior: $M_2 = M_1.(1+i) = C.(1+i).(1+i)$;

3º mês: o capital é igual ao montante do mês anterior: $M_3 = M_2.(1+i) = C.(1+i).(1+i).(1+i)$.

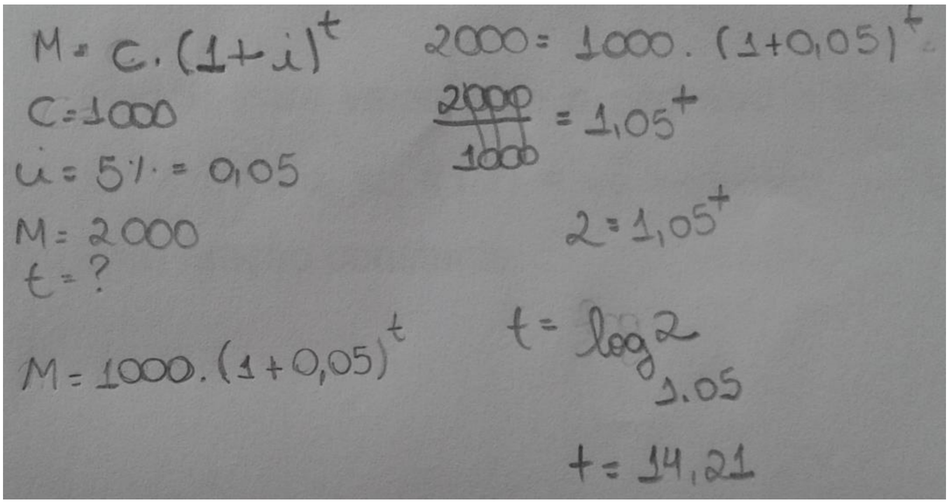
Portanto, $M_t = C.(1+i)^t$.

Durante a conversa que levou à fórmula do montante, os alunos perceberam que a relação $M_t = C.(1+i)^t$ trata-se de uma função do tipo exponencial do montante em função do tempo. Dessa forma iniciaram a resolução da questão proposta.

Primeiramente releram o problema e anotaram os dados. Posteriormente escreveram a função exponencial que determina o montante a partir do tempo de investimento. Depois formularam a equação na incógnita t, dada pelo montante ser o dobro do capital, e por fim usaram a definição de logaritmo para isolar a incógnita t, como pode-se observar na Figura 110.

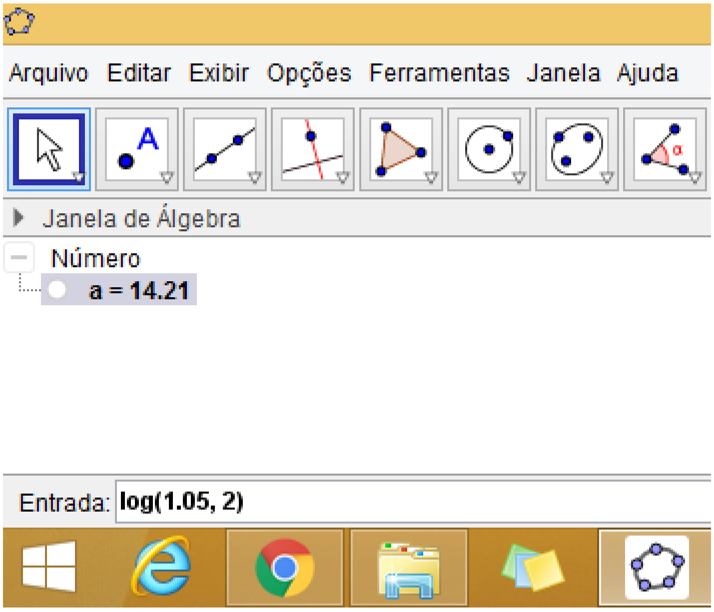
O cálculo do logaritmo de 2 na base 1,05 foi realizado pelos alunos usando o GeoGebra como ilustrado a Figura 111.

Figura 110 – Resolução do Problema 2



Fonte: Autor.

Figura 111 – Cálculo de logaritmo pelo GeoGebra



Fonte: Autor.

Durante a oficina 4 pode-se perceber que os alunos demonstraram mais habilidades ao usar o software GeoGebra, não necessitando de muita ajuda do professor como acontecera na primeira oficina. Também foi possível notar avanços na escrita e na fala dos estudantes ao expressar seu raciocínio, mostrando ter cada vez mais afinidade com termos próprios da matemática. A partir da leitura que se fez do movimento do gráfico da função exponencial no GeoGebra os alunos puderam compreender características importantes desta função, assim como entender melhor sua definição.

Ao definir a função logarítmica como inversa da função exponencial teve-se a oportunidade de construir conceitos inerentes a compreensão de funções inversas. Foi possível notar ainda a motivação e interesse dos aprendizes durante a atividade de comparação dos gráficos de uma função e sua inversa no GeoGebra. Porém, acredita-se que seria propício ter estudado a definição de função inversa e as características de seu gráfico anteriormente, pois tal atividade gerou um intervalo extenso na resolução do problema inicialmente proposto. Entretanto, ao término da aula quando conseguiram resolver o problema de matemática financeira, os estudantes demonstraram ter construído conceitos e habilidades importantes a compreensão de fenômenos modelados por funções exponenciais e funções logarítmicas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Encerradas as etapas da pesquisa e análise, com o objetivo de, verificar como uma prática pedagógica baseada na construção e interpretação de gráficos durante o processo de ensino de funções facilita a aprendizagem que tem significado para os alunos, cabe aqui apresentar uma síntese das reflexões acerca do assunto que foi abordado pela pesquisa com estudiosos da área e também com os atores principais das aulas de Matemática, o professor e os alunos.

Para que se pudesse responder a questão primordial da pesquisa: "*Como a abordagem visual por meio da análise gráfica de diferentes funções auxilia a sanar as dificuldades dos alunos no que se refere à construção do conceito de função e na compreensão de suas características?*", no capítulo anterior, teceram-se reflexões sobre uma proposta pedagógica que fez uso de algumas tendências em educação matemática e enfatizou a interpretação por meio da abordagem visual dada ao tema funções, sendo que as percepções do professor e as expressões dos alunos foram devidamente analisadas a partir dos pressupostos teóricos inicialmente elencados. Isso forneceu subsídios para levantar algumas conclusões apresentadas a seguir.

O ensino da Matemática tem se apresentado como um problema insolúvel, devido a imensa quantidade de obstáculos que se colocam frente ao processo de ensino-aprendizagem da disciplina. Como relatado por diversos autores e confirmado durante a aplicação das atividades, são inúmeras as causas para este insucesso, de natureza material, metodológica, cognitiva e social: a abstração e a simbologia presentes na Matemática, acompanhadas de uma nomenclatura diferente da utilizada no dia a dia, fazem-se totalmente estranhas aos alunos; a desmotivação dos aprendizes para estudar conteúdos em matemática que muitas vezes apresentam-se dissociados da realidade; o aluno muitas vezes é agitado por elementos alheios ao ensino formal, os meios de comunicação, o atraso cultural, problemas familiares etc; o caráter cumulativo do conhecimento matemático aliado à necessidade de tornar operativas informações memorizadas sistematicamente; há forte presença do método "tradicional" de ensino, no qual os principais recursos são o quadro e o giz, as aulas são extremamente expositivas e se acredita que o conhecimento é transmitido do professor para o aluno.

Tratando-se do estudo de funções, pode-se perceber inicialmente que a maioria dos alunos apresentava muitas dificuldades relativas à compreensão de símbolos matemáticos e a interpretação, tanto dos problemas que lhes são propostos, quanto dos gráficos a serem analisados. Outra dificuldade eloquente dos alunos, apresentou-se no momento de escrever corretamente e usar a nomenclatura matemática adequada a cada situação, o que demonstrou a falta de hábito dos estudantes em trabalhar com problemas que os façam expressar e escrever o raciocínio. Cabe ainda ressaltar que no início da aplicação da sequência didática, os estudantes apresentaram muitas dificuldades para relacionar grandezas e diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Entretanto, houve uma melhora gradativa destas habilidades dos estudantes no decorrer da proposta pedagógica, oportunizada pelas atividades de interpretação e análise gráfica, com o uso do software GeoGebra, que propiciaram o envolvimento dos alunos em discussões e reflexões sobre as diferentes representações de uma função e os induziram a expor seu pensamento e escrevê-lo, oportunizando ao professor visualizar as possíveis falhas de interpretação por parte dos alunos e seus conhecimentos prévios acerca do tema em estudo, assim como, ajudá-los a expressarem-se de forma clara usando termos matemáticos, ampliando seus conhecimentos em linguagem matemática.

As maiores contribuições trazidas pelo uso do software GeoGebra ao processo de ensino-aprendizagem dentro desta proposta pedagógica foram o interesse e a motivação dos alunos para explorar os objetos de estudo propostos. Ainda que nos primeiros contatos com o software os alunos tenham tido dificuldades para manuseá-lo, necessitando de constantes intervenções do professor, isto não foi um empecilho para que o usassem ao analisar e interpretar as funções graficamente e assim pudessem avançar nos seus conhecimentos em funções e nas habilidades de manejo do software.

O GeoGebra serviu também como uma importante ferramenta para a construção de conceitos e compressão das características de determinadas funções reais, permitindo aos alunos realizar construções dinâmicas, com as quais puderam analisar mudanças ocasionadas no gráfico de uma função quando alteramos seus parâmetros, comparando assim funções pertencentes a uma mesma família e estabelecendo relações entre as expressões analíticas das funções e os gráficos que as representam. Além disso, o software serviu como um recurso na resolução de problemas, em alguns momentos como calculadora gráfica, em outros, oferecendo um rápido auxílio visual para levantar hipóteses, verificá-las e construir conjecturas, favorecendo a autonomia dos estudantes na construção dos conhecimentos matemáticos. Entretanto, salienta-se que deve existir o cuidado para que os alunos não fiquem totalmente dependentes do software ao resolver um problema, deixando de realizar operações e pôr em prática técnicas indispensáveis ao desenvolvimento do seu raciocínio matemático.

Buscando uma experiência de ensino que por meio de uma metodologia, baseada na abordagem visual e análise gráfica das funções, possibilitasse aos alunos apropriarem-se dos conceitos sobre funções estudados no decorrer das atividades propostas, a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática fizeram-se adequadas aos propósitos da pesquisa, pois o estudo deste tema só tem sentido quando destinado a modelar e resolver problemas e situações reais. Entende-se que estas tendências em educação matemática, aliadas a utilização do GeoGebra, pelo seu grande potencial interativo e de animação ao tratar dos conceitos referentes ao tema funções e de suas características, possam ocorrer conjuntamente oportunizando maiores chances de aprendizagem.

Ao se enfatizar a análise e expressão gráfica durante a etapa inicial do estudo das funções, pode-se mostrar aos alunos que a matemática não é uma ciência isolada, pois estes sistemas representativos são usados com frequência para comunicação em outras áreas do conhecimento. Através da análise gráfica os alunos puderam compreender o conceito de função e outros conceitos subjacentes a ele, utilizando como exemplos várias relações que expressam, ou não, funções, sem ater-se a suas particularidades e a simbologia presente nas expressões analíticas destas relações.

Já num segundo momento, as atividades de exploração dos gráficos de funções, oportunizaram aos estudantes: visualizar por conta própria características importantes de cada uma das funções reais estudadas; atribuir significado às definições formais de cada tipo de função real e a terminologia utilizada em cada caso; estabelecer relações e transitar entre diferentes registros desse objeto matemático; compreender as relações de dependência entre as grandezas envolvidas numa determinada situação; construir conceitos e habilidades importantes à compreensão de fenômenos modelados por funções e analisar as diferenças e semelhanças entre problemas propostos, a fim de serem capazes de adaptar os conhecimentos construídos a novas situações problema.

Além disso, pode-se concluir que a abordagem visual faz-se mais atrativa aos alunos do que a simples exposição formal das definições apresentadas, servindo de facilitadora do processo de ensino, assim como do processo de compreensão e construção de conceitos por parte dos alunos, fazendo dos estudantes sujeitos autônomos no processo de aprendizagem e do professor um mediador e facilitador deste processo, ao escolher as atividades e intervir quando necessário para a construção de novos saberes.

Sabendo que, a aprendizagem de funções de forma significativa é de fundamental importância e deve acontecer a partir da contextualização e da interdisciplinaridade, permitindo conexões entre diversos conceitos e diferentes formas de pensamento matemático, o processo de ensino de funções deve levar em conta os conhecimentos prévios dos alunos.

Dessa forma, a fim de desvendar os conhecimentos prévios dos alunos e relacioná-los aos saberes escolares, no caso às funções, é necessário reconhecer o aprendiz em suas singularidades pessoais e culturais. Porém, devido à grande diversidade na escola, criar um ambiente educativo que possa ser definido como uma comunidade de aprendizagem implica em usar novas estratégias de ensino que possuam um caráter integrador. Assim, indica-se a expressão de funções através de seus gráficos, pois estes permitem a representação de dados em diversos conteúdos, o que amplia a importância de tais sistemas representativos, uma vez que não se relacionam apenas com conteúdos da Matemática, mas de fato permitem o tratamento das informações de diversas outras áreas de conhecimento. Além disso, os gráficos expressam uma visão geral e completa das funções e suas características.

Portanto, aliar a abordagem gráfica de funções a situações que mostrem ao aluno a importância e aplicabilidade do conteúdo, dentro e fora da escola, é essencial para que haja a motivação, e por consequência a construção dos conhecimentos em funções matemáticas pelos alunos.

Tendo em vista que, quanto maior for a possibilidade de articulação entre diferentes registros de representação do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto, entende-se que ao construir o conceito de função é importante que os alunos sejam expostos a diferentes modelos que expressam a relação de função, e a outros que não representam tal relação. Levando em consideração as dificuldades apresentadas pelos alunos ao aprender Matemática, evidenciadas nesta pesquisa, e algumas propostas apresentadas pela Educação Matemática, abordadas neste trabalho, concluiu-se que a abordagem das funções por meio da análise e interpretação gráfica é de grande valia ao tema, pois pode propiciar aos alunos construir o conceito de função de forma universal, assim como aprendê-las na totalidade de suas características.

As reflexões feitas a partir da presente pesquisa oferecem embasamento para possíveis práticas pedagógicas que visem à abordagem gráfica, feita não só como a simples transcrição dos dados de uma tabela para o plano cartesiano, mas sim através de uma análise das características das funções estudadas, pois este é sem dúvida, um caminho para uma aprendizagem significativa do tema, na qual o aluno é capaz de comparar e relacionar diferentes situações.

REFERÊNCIAS

ALBÉ, Maristela de Quadros; FILIPPSEN, Rosane Maria Jardim. Função trigonométrica: um enfoque aplicado ao ensino técnico. *Revista Liberato*. Novo Hamburgo, ano 7, n. 8, p. 12-23, out. 2006.

ANDRADE, Doherty; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Você quer discutir com o computador? *Educação Matemática em revista*. São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, p. 25-29, mai. 2004.

ANDRÉ, Marli E. D. A.; MENGA, Lüdke. *Pesquisa em educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

ANGELO, Claudia Laus; RIGODANZO, Mauro. Uma experiência de transposição didática com o Cabri-Géomètre II. *Educação Matemática em revista*. São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, p. 16-24, mai. 2004.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BRASIL. Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. *Diário Oficial da União*. Brasília, DF, 23 dez. 1996.

BRASIL. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008. v. 2.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica do Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília: SEMT/MEC. 1999.

CALÇADA, Caio Sérgio; SAMPAIO, José Luiz. *Física*: volume único. Coleção ensino médio Atual. 2. ed. São Paulo: Atual, 2005.

CARNEIRO, Vera Clotilde. *Funções Elementares*: 100 situações-problema de matemática. Porto Alegre: UFRGS, 1993.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. *Estudar Matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 97-115.

DANTE, Luiz Roberto. *Formulação e Resolução de problemas de matemática*: Teoria e Prática. São Paulo: Ática, 2010.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2011a. v. 1.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática*: contexto e aplicações. Manual do Professor. São Paulo: Ática, 2011b. v. 1.

ENEM 2001 – Exame Nacional do Ensino Médio. *INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Ministério da Educação. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2001/2001_amarela.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2017.

ENEM 2008 – Exame Nacional do Ensino Médio. *INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.* Ministério da Educação. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/provas/2008/2008_amarela.pdf>. Acesso em: 01 mar. 2017.

FLEMMING, Diva Marília; LUZ, Elisa Flemming; MELLO, Ana Cláudia Collaço. *Tendências em Educação Matemática*. 2. ed. Pallhoça: Unisulvirtual, 2005.

FRANT, Janete Bolite. Tecnologias e Educação Matemática. *Educação Matemática em revista*. São Paulo: SBEM, ano 5, n. 6, p. 19-20, nov. 1998.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v. 1.

GRANDELLE, Renato. Maioria dos jovens fora da escola sequer conclui ensino fundamental. *O Globo*, 25 fev. 2016. Disponível em: <https://oglobo.globo.com/sociedade/educacao/maioria-dos-jovens-fora-da-escola-sequer-conclui-ensino-fundamental-18744115>. Acesso em: 08 mai. 2017.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. *Fundamentos de matemática elementar*: conjuntos funções. 3 ed. São Paulo: Atual, 1997. v. 1.

IEZZI, Gelson. et al. *Matemática*: ciência e aplicações. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010. v. 1.

INEP, *Inep apresenta resultados do Saeb/Prova Brasil 2015*. Brasília: INEP/MEC, 2016. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/artigo/-/asset_publisher/B4AQV9zFY7Bv/content/inep-apresenta-resultados-do-saeb-prova-brasil-2015/21206>. Acesso em: 08 mai. 2017.

LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

MARKARIAN, Roberto. A Matemática na escola: Alguns problemas e suas causas. *In*: DRUCK, Suely (Org.). *Explorando o ensino da Matemática*: artigos. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2004. v. 1, p. 273-281.

MICOTTI, Maria Cecília de Oliveira. O ensino e as propostas pedagógicas. *In*: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 153-167.

MOREIRA, Marco Antonio. *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU, 1999.

MÜLLER, Iraci. Tendências atuais de Educação Matemática. *Unopar Científica – Ciências Humanas e Educação*. Londrina, v. 1, n. 1, p. 133-144, jun. 2000. Disponível em: <http://www.unopar.br/portugues/revista_cientificah/art_rev_133/body_art_rev_133.html>. Acesso em: 09 out. 2016.

NETO, Antonio Caminha Muniz. *Fundamentos de Cálculo*. Coleção PROFMAT. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. *Iniciação à Matemática*: um curso com problemas e soluções. Coleção Olímpiadas de Matemática. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

PAIS, Luís Carlos. *Ensinar e Aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAIVA, Manoel. *Matemática Paiva*. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2013. v.1.

PANTANO, Telma. *Neurociência aplicada à aprendizagem.* 2011. Disponível em: <http://www.congressosaber.com.br/index.php?acao=59&codigo=224 >. Acesso em: 14 jun. 2014.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. 2.ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SADOVSKY, Pratricia. *O ensino de matemática hoje*: Enfoques, sentidos e desafios. Tradução de Ernesto Rosa Neto. São Paulo: Ática, 2010.

TOZETTO, Claudia. Muita coisa não varia no mundo das variações. *Cálculo*: matemática para todos. 26. ed. São Paulo: Segmento, ano 3, n. 26, p. 46-51, mar. 2013.

APÊNDICE A – OFICINA 1

Funções

Estamos acostumados a expressões cotidianas que retratam uma relação funcional entre grandezas, como por exemplo, o quanto João ganha é função do que ele trabalha, ou ainda a distância que percorremos é função da velocidade e do tempo que viajamos. As funções são muito usadas na Ciência, já que esta recorre a "fórmulas" ou "modelos matemáticos" para descrever os fenômenos, relacionando suas variáveis e possibilitando a previsão de resultados.

Definição

Podemos definir formalmente uma função como um objeto matemático composto de três ingredientes: um conjunto não vazio A, chamado de ***domínio*** da função, um conjunto não vazio B, chamado de ***contradomínio*** da função e uma correspondência, que associa a **cada** elemento do primeiro conjunto um **único** elemento do segundo conjunto. Para simplificar o seu uso, foi criada uma notação que empacota todos os três ingredientes:

$$\begin{aligned} f:\quad & A \to B \\ & x \to f(x) \end{aligned}$$

O **conjunto imagem** de f é o subconjunto do contradomínio B formado pelos elementos y ∈ B tais que existe algum ponto x ∈ A tal que y = f(x).

Em alguns casos quando o domínio e o contradomínio estão fixados e claros para o interlocutor, podemos nos referir a uma função simplesmente invocando sua correspondência y = f(x).

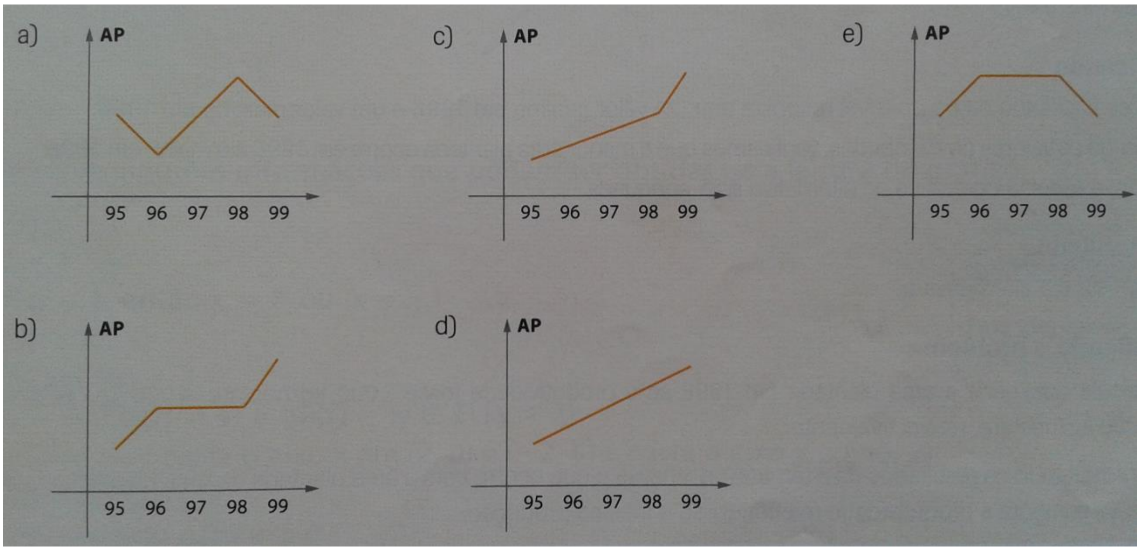
O **gráfico** de uma função $f: X \to Y$ é o subconjunto G(f) do produto cartesiano X x Y formado por todos os pares ordenados (x,y), onde x é um ponto qualquer de X e y = f(x).

Os problemas a seguir ajudarão a entender melhor estes conceitos. Utilizaremos também um recurso computacional que será de grande valia para observarmos graficamente o comportamento de uma função.

Problema1: (ENEM 2001) O quadro abaixo apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

	Safra				
	1995	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1 500	2 500	2 500	2 500	4 000

O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) é:



Atividade 1: (Definição de função, domínio, contradomínio e imagem)

A) Represente no Geogebra a relação $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR},\ f(x) = 0{,}5x^5 + 3x^2 - 2x$.

Sobre o eixo x crie um ponto A e uma reta r perpendicular à y = 0 (eixo x) que passe por este ponto. Mova o ponto A sobre o domínio de f e perceba que r intersecta o gráfico de f num único ponto, verificando assim a definição de função.

B) Represente graficamente as relações abaixo e verifique se representam funções para os respectivos domínios e contradomínios. Caso a relação não seja função, justifique:

e) $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR},\ f(x) = -x + 3$

f) $f\colon \mathrm{IR} \to \mathrm{IR},\ f(x) = \ln(x)$

g) $f\colon [-1, +\infty[\to \mathrm{IR},\ y = \sqrt{x+1}$

h) $f\colon IR_+ \to \mathrm{IR},\ \mathrm{y}^2 - \mathrm{x} = 0$

C) Construa o gráfico de cada função real abaixo e expresse seu conjunto imagem Im(f).

a) $y = x^2 + 3$ Im(f) =

b) $y = 2.sen(x)$ Im(f) =

D) Estabeleça relações entre a imagem das funções do item C e suas expressões algébricas:

Atividade 2: (Função par e função ímpar)

Função par: F é função par se, e somente se, $f(x) = f(-x)$, para qualquer $x \in D$.

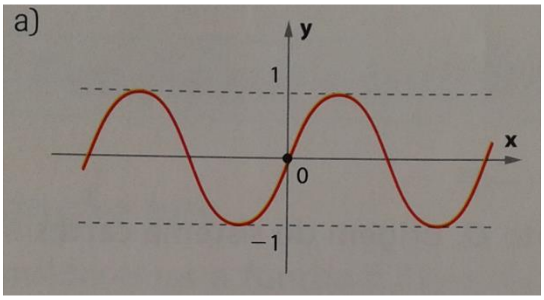
Função ímpar: F é ímpar se, e somente se, $f(-x) = -f(x)$, para qualquer $x \in D$.

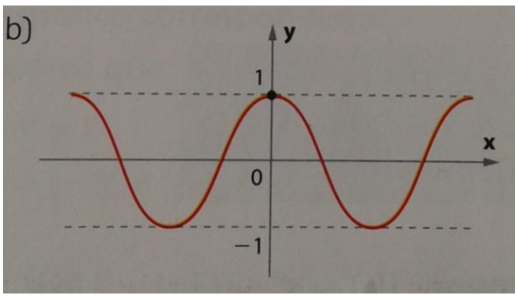
E) De posse das definições acima abra o arquivo "Atividade 2" do GeoGebra e mova os pontos B1, C1, D1, E1 e F1 afim de que a função representada se torne par (registre o resultado).

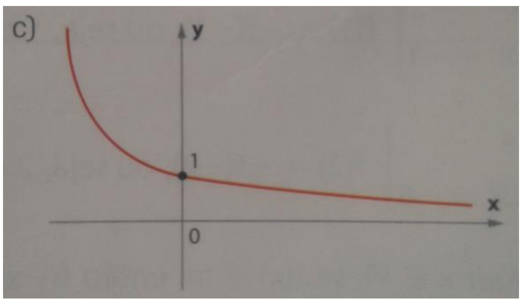
F) Agora, mova os mesmos pontos incluindo A, se necessário, de modo que função se torne ímpar (registre o resultado).

G) O que se pode concluir sobre a simetria dos gráficos acima?

H) Verifique se os gráficos abaixo representam funções pares ou ímpares.

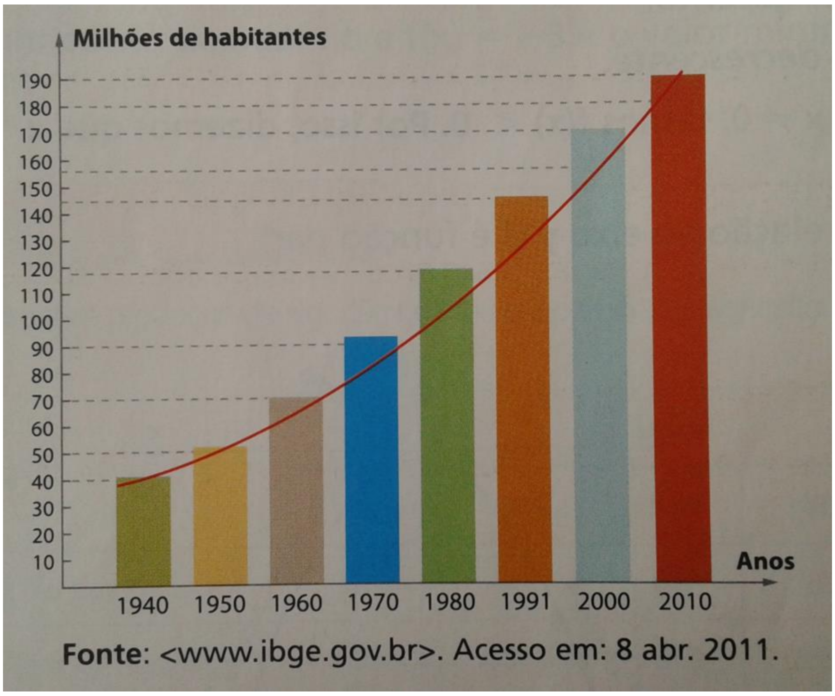






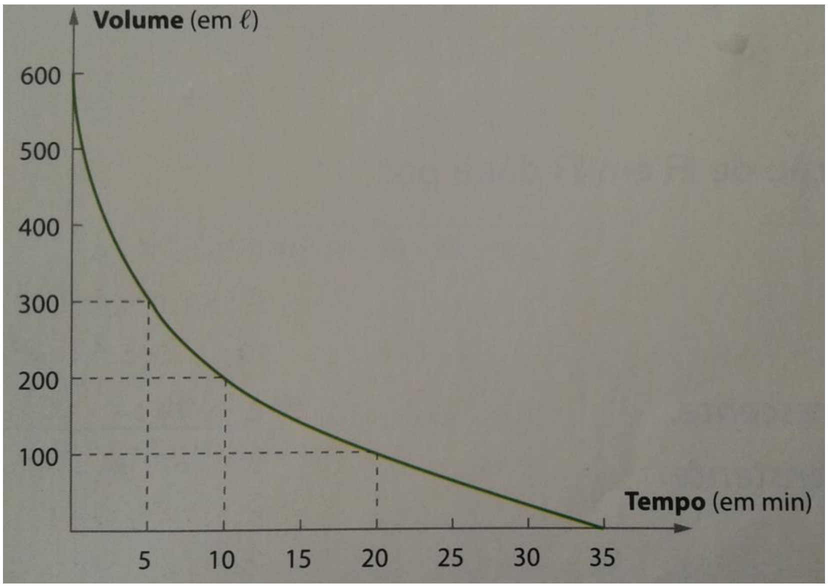
Função crescente e decrescente

O gráfico abaixo mostra a população brasileira de 1940 a 2010.



I) Segundo o gráfico, o que se pode perceber quanto ao número de habitantes com o passar dos anos?

Este gráfico mostra um tanque de água sendo esvaziado:



J) Com o aumento do tempo o que acontece com volume de água no reservatório?

Podemos expressar que uma função $f: \mathrm{X} \rightarrow \mathrm{IR}$, com $\mathrm{X} \subset \mathrm{IR}$, chama-se:

- **Crescente** quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

Quanto maior o valor de x maior será o valor correspondente y = f(x).

- ➢ Graficamente significa que se um ponto (x,y) sobre a função se move para a direita sua ordenada y se move para cima.

- **Decrescente** quando $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Quanto maior o valor de x menor será o valor correspondente y = f(x).

- ➢ Graficamente significa que se um ponto (x,y) sobre a função se move para a direita sua ordenada y se move para baixo.

K) Represente no GeoGebra os gráficos das funções de IR em IR: f(x) = 2x + 1, g(x) = - x +2 e h(x) = - x² + 2x. Crie um ponto sobre elas e mova-o a fim de analisar o crescimento ou decrescimento das funções.

Responda:

1) f(x) e g(x) são crescentes ou decrescentes?

2) Para quais valores de x a função h(x) = - x² + 2x é crescente?

Curiosidade: Sobre o gráfico da função h crie um ponto A, depois crie uma reta t tangente a função h que passa por A.

3) Descreva o que se pode observar sobre a inclinação da reta tangente no intervalo em que a função h é crescente e no intervalo em que a função h é decrescente.

Máximos e mínimos

4) Existe um ponto em que h(x) assume um valor máximo? Se sim, encontre uma maneira de identificá-lo e explique como fez.

Zeros da função

5) Para quais valores de x a função f(x) = 2x +1 é nula? Explique sua resposta.

6) Para quais valores de x a função h(x) tem y = 0? Explique sua resposta.

APÊNDICE B – OFICINA 2

Função Afim

Atividade 1:

1°) Colete com a proveta uma quantidade fixa de água e despeje no frasco cilíndrico. Meça com a régua a altura atingida pela água no frasco. Repita o mesmo processo algumas vezes e anote os dados obtidos.

2°) Construa uma tabela que relacione a quantidade de água em mililitros (ml) e a altura da água no frasco em milímetros (mm).

3°) Esboce no plano cartesiano os dados coletados.

Responda:

1) Você pode perceber alguma relação entre a quantidade de água despejada no frasco (ml) e a altura da água no frasco (mm)? Explique.

2) É possível descrever a situação acima como uma função? Explique.

3) Qual é a variável independente (x) e qual a variável dependente (y)?

4) Expresse a razão entre a altura da água no frasco (y) e a quantidade de água (x) para diferentes pontos do gráfico. O que você pode perceber?

5) É correto ligar os pontos do gráfico com uma reta? Explique.

6) Como podemos expressar algebricamente a situação que acabamos de modelar?

A relação que acabamos de modelar corresponde a uma função linear, que representa casos de proporcionalidade. Um caso específico da função afim.

7) Se ao iniciarmos o experimento já existisse água no frasco a uma altura de 2 cm, o que mudaria nos resultados obtidos anteriormente?

8) Expresse algebricamente e graficamente esta nova situação.

9) As funções dadas anteriormente são crescentes ou decrescentes?

Definição: Uma função f: IR $\rightarrow$ IR chama-se **função afim** quando existem dois números reais **a** e **b** tais que f(x) = ax+b para todo x $\in$ IR.

Atividade 2: (Construção de uma reta dinâmica no GeoGebra)

Passo 1: Crie controles deslizantes **a** e **b** que representarão os coeficientes da função f.

Passo 2: Escreva a função f(x) = ax+b na janela de entrada.

Movimente os controles deslizantes **a** e **b,** modificando assim os parâmetros da função e responda:

A) Que figura geométrica representa o gráfico da função afim?

B) Verifique se o ponto (0,b) pertence ao gráfico de f? Explique algebricamente.

C) Movimente o controle deslizante **a** e estabeleça relações entre seu valor e o gráfico de f.

D) Para quais valores do parâmetro a, temos que a função f é crescente?

E) Para quais valores de **a** a função f é decrescente?

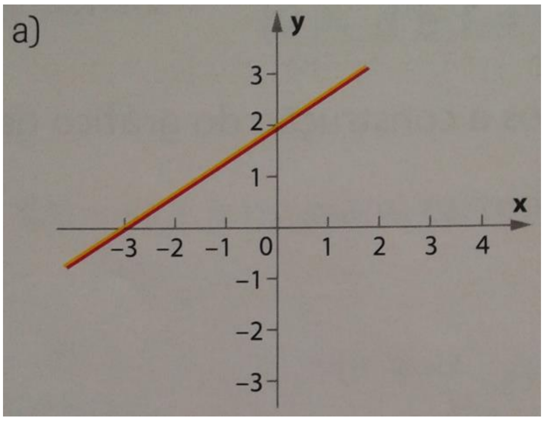
F) Para quais valores de **a** a função f é constante?

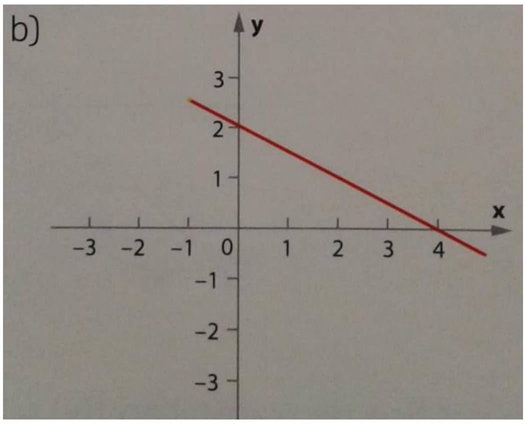
G) Para quais valores de **b** a função f passa pela origem (0,0)?

Criando o conceito de **taxa de variação:** $a = \frac{\mathrm{f}(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, $x_2 \neq x_1$

Sobre o gráfico de f crie dois pontos A e B, posteriormente desenhe um triângulo retângulo ABC de hipotenusa AB. Considerando α o ângulo do triângulo ABC correspondente ao ângulo formado pelo gráfico de f e o eixo x. Com o auxílio do GeoGebra calcule a tangente de α e observe sua relação com o parâmetro a. Faça um esboço para representar esta relação.

H) Dados os gráficos das funções de IR em IR, escreva a função f(x) = ax+ b correspondente.





Atividade 3:

Usando a reta criada anteriormente vamos representar no Geogebra alguns casos importantes da função afim f(x) = ax + b, simplesmente modificando os valores de **a** e **b**.

Função identidade: f(x) = x para todo $x \in IR$

Função constante: f(x) = b para todo $x \in IR$

Função linear: f(x) = ax para todo $x \in IR$

I) Cite pelo menos uma característica do gráfico de cada uma das funções acima.

Atividade 4: (Resolução de problemas)

J) Existem na região de um reflorestamento, duas transportadoras de madeiras A e B. A transportadora A cobra 5 reais por quilômetro rodado mais uma taxa fixa de 80 reais. A transportadora B cobra 3 reais por quilometro rodado mais uma taxa fixa de 100 reais. Discuta a vantagem de A sobre B (ou vice-versa) em função do número de quilômetros rodados. Faça gráficos comparativos nos dois casos.

APÊNDICE C – OFICINA 3

Funções quadráticas

Problema 1: Com 20 m de tela deseja-se construir um canil retangular de modo que sua área seja a maior possível. Quais deverão ser as dimensões do canil? Qual será sua área?

A função acima é um exemplo de função quadrática. Compreender as características desse tipo de função vão ajudar a resolver o problema apresentado, assim como outros que são modelados por funções quadráticas.

Definição: Uma função f: $\mathrm{IR} \rightarrow \mathrm{IR}$ chama-se função quadrática quando existem números reais a, b e c, com a ≠ 0, tal que f(x) = ax² + bx + c para todo x ∈ IR.

Atividade 1: (Construção de uma parábola dinâmica que propiciará conhecer as características de uma função quadrática e que servirá com uma ferramenta para resolução de problemas)

Passo 1: Construa o gráfico de uma função quadrática f(x) = ax² + bx + c a partir de controles deslizantes **a, b** e **c.**

Esta curva se chama parábola, isto é, o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. O sentido de abertura de uma parábola é chamado de concavidade, que pode ser voltada para cima ou para baixo. Podemos observar no gráfico os zeros da função, já vistos anteriormente. O ponto onde a função assume seu valor máximo ou mínimo é chamado de vértice da parábola.

Movimentando os controles deslizantes podemos perceber que para quaisquer valores de **a, b** e **c** o gráfico de f é uma parábola, exceto para a = 0 onde f é uma função afim.

Passo 2: Determinação do vértice da parábola e dos zeros da função

A determinação do vértice da parábola ajuda na elaboração do gráfico e permite determinar a imagem da função, bem como seu valor máximo ou mínimo.

Observe que a parábola é simétrica em relação a um eixo vertical que passa pelo seu vértice, logo $x_v = (x_1 + x_2)/2$, onde x_1 e x_2 são as abscissas dos zeros da função.

Os zeros da função são dados pelas raízes da equação: 0 = ax² + bx + c, determinadas por $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Portanto, $x_v = -b/2a$. Substituindo na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ obtemos $y_v = -\Delta/4a$

1) No GeoGebra crie o ponto que representa o vértice V da parábola a partir de seus parâmetros.

Problema 2: Um projétil é lançado de uma plataforma cuja altura é 1 m do chão, percorrendo uma trajetória parabólica, após 1 segundo, ele está a 3 metros de altura e em 3 segundos está a 1 metro de altura novamente. Considerando que todas estas medidas foram feitas em relação ao chão, responda:

a) Qual a equação que descreve a trajetória do projétil?

____

b) Qual a altura máxima atingida por este projétil?

____

c) Em que momento o projétil atingirá o chão?

____

A fim de adaptar a parábola aos pontos dados faremos a seguinte análise dos parâmetros **a**, **b** e **c**:

A) Variando apenas o parâmetro **a** na função f(x) = ax² + bx + c responda:

1) O que se pode notar na parábola quando a > 0 e quando a < 0?

2) O que acontece com o gráfico quando aumentamos o valor absoluto de a?

3) O que acontece com o gráfico quando diminuímos o valor absoluto de a?

Parâmetro a: responsável pela ______________ e ____________ da parábola.

- Se a>0 a concavidade é ______________________________.
- Se a<0 a concavidade é ______________________________.
- Além disso quanto maior o ________________________ de a, menor será a abertura da parábola.

B) Mudando apenas os valores do parâmetro b da parábola, estabeleça relações entre o sinal de b e o ramo em que a parábola corta o eixo y.

Parâmetro b: indica se a parábola intersecta o eixo y no ramo crescente ou decrescente.

- Se $b>0$ a parábola intersecta o eixo y no ramo ___________________
- Se $b<0$ a parábola intersecta o eixo y no ramo ___________________
- Se $b = 0$ a parábola intersecta o eixo y no _______________________

C) Variando apenas o parâmetro c, explique o que ele representa para o gráfico da função.

APÊNDICE D – OFICINA 4

Função exponencial e função logarítmica

Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 100 bactérias no início da pesquisa, calcule quantas bactérias existirão depois de:

a) 1 hora? ____

b) 2 horas?____

c) 3 horas?____

d) 4 horas?____

e) x horas?____

f) Depois de quanto tempo o número de bactérias será igual a 12.800?

g) Encontre uma fórmula matemática do tempo (em horas) em função do número de bactérias.

O modelo matemático que fornece soluções para todos os itens acima é dado por funções do tipo $f(x) = b.a^x$ que são conhecidas como funções exponenciais. Nosso próximo passo é conhecer algumas propriedades deste tipo de função que nos ajudarão a entender melhor a solução apresentada do problema dado acima.

Definição

Dado um número real a positivo e diferente de 1, denomina-se função exponencial de base *a*, a função $f: IR \rightarrow IR_+^*$ indicada pela notação $f(x) = a^x$.
Observação: para valores de a negativo e a = 1, a expressão perde sentido, pois por exemplo, se f(1/2) = $\sqrt{a}$ seria um número complexo, e f(x) = 1^x = 1 seria uma função constante.

O gráfico da função exponencial é uma figura chamada curva exponencial, a qual nos ajudará a compreender algumas características importantes da função exponencial.

Atividade 1: (Compreendendo características da função exponencial a partir do gráfico)

No GeoGebra crie o controle deslizante a, em seguida crie o gráfico da função $f(x) = a^x$ através da entrada de comandos.

Modificando os valores do parâmetro *a* da função responda:

a) O que se pode concluir sobre a função exponencial quando *a* > 1?

____

b) Para quais valores do parâmetro *a* a função exponencial é decrescente?

____

c) O que acontece com o gráfico quando *a* < 0?

____

d) O que acontece com o gráfico quando *a* = 0?

____

Para resolvermos as questões f e g precisamos determinar a função inversa da função exponencial.

Relembrando a definição de função inversa:

Dada uma função $f: X \to Y$, bijetiva, denomina-se função inversa de f a função $g: Y \to X$ tal que, se f(x) = y, então g(y) = x, com x ∈ X e y ∈ Y.

Observação: Se (a,b) pertence ao gráfico de f, então (b,a) pertence ao gráfico de g. E ainda, é fácil mostrar que (a,b) e (b,a) são pontos simétricos em relação à reta y = x. O que define que o gráfico de uma função f e o gráfico de sua função inversa g são simétricos em relação à reta y = x.

Exemplo: Dada a função $f(x) = 2^x$, isto é, $y = 2^x$, para determinar a função g inversa a função exponencial f primeiramente trocamos y por x e x por y, pois não é comum considerar y como variável independente, depois determinamos y em função de x.

Se f é tal que, $y = 2^x$, então em g temos que $x = 2^y$.

Para isolar y na expressão deve-se perceber que y é o expoente ao qual deve-se elevar a base 2 para obter x, isto é, $y = \log_2 x$. Pois a definição de logaritmo diz que:

Dados os números reais positivos a e b, com a ≠ 1, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se logaritmo de b na base a, ou seja, $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$.

Atividade 2: (Definir a função logarítmica como a inversa da função exponencial)

1º) Construa no GeoGebra o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e da reta y = x.

2º) Crie uma reta perpendicular à função identidade que passe por um ponto A pertencente a f(x).

3º) Utilizando a ferramenta “reflexão em relação a uma reta” do GeoGebra, estabeleça a reflexão do ponto A em relação a reta y = x, criando assim o ponto A’.

4º) Habilite o rastro do ponto A’ e mova o ponto A, a fim de observar a curva traçada por A’.

5º) Construa o gráfico da função $g(x) = \log_2 x$ e observe que o ponto A’ percorre a mesma verificando assim de forma visual a definição de função inversa.

Portanto, se $f: IR \rightarrow IR_+^*$ é definida por $f(x) = a^x$, então sua inversa é $g: IR_+^* \rightarrow IR$ definida por $g(x) = \log_a x$.

Usando a função inversa da função descrita no item e do problema inicialmente apresentado resolva os itens f e g.