

## **Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações**

Mauricio Di Tota Montanari Boni

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação *Stricto Sensu* Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, orientada pela Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos.

Catalogação na fonte  
Biblioteca Francisco Montojos - IFSP Campus São Paulo  
Dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B715c	<p>Boni, Mauricio Di Tota Montanari Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e outras aplicações / Mauricio Di Tota Montanari Boni. São Paulo: [s.n.], 2017. 73 f. il.</p> <p>Orientadora: Flávia Milo dos Santos Co-orientador: Marco Aurélio Granero Santos</p> <p>Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2017.</p> <p>1. Cálculo Fracionário. 2. Tautócrona. 3. Equações Horárias do Movimento. 4. Lotka-volterra. 5. Decaimento Radioativo. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo II. Título.</p> <p>CDD 510</p>
-------	--

MAURICIO DI TOTA MONTANARI BONI

**Cálculo fracionário aplicado às equações horárias do movimento e  
outras aplicações**

Dissertação apresentada e aprovada  
em 03 de outubro de 2017 como  
requisito parcial para obtenção do  
título de Mestre em Matemática.

A banca examinadora foi composta pelos seguintes membros:

Profa. Dra. Flávia Milo dos Santos  
IFSP – Câmpus São Paulo  
Orientadora e Presidente da Banca

Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos  
IFSP – Câmpus São Paulo  
Co-orientador

Prof. Dr. Carlos Corrêa Filho  
IFSP – Câmpus São Paulo  
Membro da Banca

Prof. Dr. Edmundo Capelas de Oliveira  
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP  
Membro da Banca

*“Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado.”*

(Sir Isaac Newton)

## **AGRADECIMENTOS**

À minha esposa Elisa, por ser um exemplo e uma inspiração. Por todo o apoio e companheirismo, desde sempre.

Aos meus pais e à minha irmã por sempre acreditarem em mim.

À minha orientadora Flávia pelo incentivo, pelas ideias, pelas discussões, pelas pesquisas, por abrir a minha mente e pela paciência.

Ao meu orientador Marco por toda a ajuda desde o início até o fim e por ter me apresentado o Cálculo Fracionário.

Aos professores Edmundo, Carlos, Anderson e Mariana por aceitarem participar deste trabalho.

Aos meus professores do PROFMAT Traldi, Henrique, Monica, Luciano, César, Samuel, Paulo, Graziela e Emiliano por sua competência sem igual.

Aos amigos que a vida me trouxe.



## RESUMO

Este trabalho trata do cálculo fracionário, ou seja, o cálculo que considera valores não necessariamente inteiros para a ordem das derivadas e integrais. Apesar de existirem relatos do cálculo fracionário desde o final do século XVII, este ganhou mais destaque a partir do século XX. Discute-se nesse trabalho a solução de problemas clássicos normalmente descritos pelo cálculo de ordem inteira como o problema da tautócrona, o sistema de Lotka-Volterra, o decaimento radioativo através do cálculo fracionário. Além disso, uma aplicação do cálculo fracionário às equações horárias do movimento é feita utilizando as definições de Riemann-Liouville e Caputo.

### **Palavras-chaves:**

Cálculo fracionário, tautócrona, equações horárias do movimento, Lotka-Volterra, decaimento radioativo.



# **Fractional calculus applied to the kinematic equations and other applications**

## **ABSTRACT**

This essay deals with fractional calculus, that is, the calculus that accounts not necessarily integer values for the order of the derivatives and integrals. Although there have been reports about the fractional calculus since the end of the 17th century, the interest around this topic increases significantly during the 20th century. Classical problems like the tautochrone curve issue, the Lotka-Volterra system and the radioactive decay, solved by the integer-order calculus, are now discussed by the point of view of the fractional calculus. Furthermore, the fractional calculus is applied to the kinematic equations through the Riemann-Liouville and Caputo definitions.

### **Keywords:**

Fractional Calculus, tautochrone, kinematic equations, Lotka-Volterra, radioactive decay.



## LISTA DE FIGURAS

**Pág.**

Figura 1 - Função Gama. ....	26
Figura 2 – Gráficos do Sistema de Lotka-Volterra Fracionário. Fonte: Extraído de Camargo, Oliveira e Gomes (2007).....	51
Figura 3 – Gráfico da equação (3.44) para alguns valores de $\alpha$ , com $0 \leq \alpha \leq 1$ . ....	54
Figura 4 - Gráficos da equação (3.57) (a) $\alpha = 0$ ; (b) $\alpha = 0,5$ ; (c) $\alpha = 1$ .....	62
Figura 5 - Gráfico da equação (3.57) para alguns valores de $\alpha$ , com $0 \leq \alpha \leq 1$ . ....	63
Figura 6 - Gráficos das equações (3.57) e (3.59) (a) $\alpha = 0$ ; (b) $\alpha = 0,5$ ; (c) $\alpha = 1$ ; (d) $\alpha = 1,5$ ; (e) $\alpha = 2$ .....	64



## SUMÁRIO

	<u>Pág.</u>
1. INTRODUÇÃO.....	15
1.1 Motivação.....	15
1.2 Revisão bibliográfica.....	16
1.3 Objetivos e estrutura do trabalho.....	20
2. CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA.....	23
2.1 Função gama.....	23
2.2 Funções de Mittag-Leffler.....	26
2.3 A transformada de Laplace.....	28
2.4 Integrais de ordem não inteira.....	34
2.4.1 Integrais de ordem arbitrária de Riemann-Liouville.....	34
2.5 Derivadas de ordem não inteira.....	35
2.5.1 Derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville.....	36
2.5.2 Derivadas de ordem arbitrária de Caputo.....	38
3. APLICAÇÕES.....	41
3.1 O problema da tautócrona e a resolução de Abel.....	41
3.1.1 Resolução utilizando cálculo fracionário.....	43
3.2 Sistema Lotka-Volterra ou sistema presa-predador.....	45
3.2.1 Caso Fracionário.....	47
3.3 Decaimento radioativo.....	51
3.4 As equações horárias do movimento.....	55
3.4.1 Formulação via derivação fracionária.....	55
3.4.2 Formulação via integração fracionária.....	59
3.4.3 Representação gráfica das equações do movimento para a formulação fracionária.....	61
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	67
REFERÊNCIAS.....	69
Anexo A – DERIVADAS E INTEGRAIS DE ORDEM $\alpha = 1/2$ DE ALGUMAS FUNÇÕES.....	73



## 1. INTRODUÇÃO

O desenvolvimento do cálculo integral e diferencial de ordem inteira trouxe consigo questionamentos sobre o que seriam os operadores de derivação e integração de ordem não inteira (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Porém, o cálculo de ordem não inteira, também conhecido como cálculo fracionário ou cálculo de ordem arbitrária, manteve-se por muito tempo relativamente desconhecido.

Este anonimato deve-se principalmente ao fato do cálculo de ordem inteira conseguir representar e descrever diversas situações da física e da engenharia, abrangendo ainda seus significados geométricos e físicos, o que ainda é um problema em aberto no cálculo fracionário. Entretanto, alguns estudos sobre essa interpretação podem ser encontrados em Machado et al (2003), Podlubny (1999, 2002) e em Tarasov (2016).

No final do século XX vislumbrou-se o ressurgimento do interesse por esta área através das primeiras conferências internacionais sobre o cálculo de ordem não inteira. Além disso, mais precisamente na década de 90, surgiram publicações em livros, revistas e simpósios sobre o tema.

### 1.1 Motivação

Do cálculo de ordem inteira sabemos que para uma função polinomial simples,  $f(x) = x^n$ , por exemplo, suas derivadas usuais são dadas por  $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ ;  $f''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot x^{n-2}$ ; podendo, então, generalizar sua  $k$ -ésima derivada:  $f^k(x) = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot x^{n-k}$ , para  $k \leq n$ .

Também sabemos as derivadas das funções trigonométricas, como por exemplo,  $f(x) = \text{sen}(x)$ . Temos  $f'(x) = \text{cos}(x) = \text{sen}(x + \frac{\pi}{2})$ ;  $f''(x) = -\text{sen}(x) = \text{sen}(x + \pi)$ . Podemos generalizar a  $k$ -ésima derivada de  $f(x)$ :  $f^k(x) = \text{sen}(x + \frac{k\pi}{2})$ .

Se tomarmos uma função exponencial para uma base  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , ou seja,  $f(x) = a^x$ , e calcularmos suas derivadas, temos  $f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ . E a generalização para a  $k$ -ésima derivada é  $f^k(x) = (\ln(a))^k \cdot a^x$ .

A partir dessas ideias, bastante comuns no ensino superior, surge o questionamento: o que acontece se a ordem  $k$  das derivadas não for um número inteiro?

A resposta a essa questão, envolvendo o cálculo de ordem não inteira, tem contribuído para o desenvolvimento deste novo campo de investigação, principalmente porque a maneira de se utilizar o cálculo fracionário na descrição de algum fenômeno é, a princípio, bastante simples. Substitui-se a derivada de ordem inteira da equação diferencial que representa o fenômeno por uma derivada de ordem não inteira. Este método conduz a equações diferenciais de ordens não inteiras.

A resolução dessas equações é bastante diferente da resolução de equações diferenciais de ordem inteira, principalmente por utilizar as chamadas funções especiais, que são características do cálculo fracionário, como a função de Mittag-Leffler.

Apesar dessas dificuldades, alguns resultados e algumas generalizações importantes foram obtidas utilizando-se o cálculo fracionário em diversas áreas, como probabilidade (PODLUBNY, 1999), biomatemática (ELSHEHAWAY et al, 2001; CAMARGO; OLIVEIRA; GOMES, 2007), psicologia (SPROTT, 2004), funções especiais (KYRIAKOVA, 1994; VIRCHENKO; FEDOTOVA, 2001); fractais (BUTERA; DI PAOLA, 2014) e mecânica dos fluidos, fenômenos de transporte e redes elétricas (DEBNATH, 2003).

## 1.2 Revisão bibliográfica

Essa seção apresenta uma breve revisão bibliográfica dos temas utilizados para o desenvolvimento dessa pesquisa. A seleção dos trabalhos teve como principal objetivo compreender a teoria concernente ao cálculo fracionário, bem como ilustrar sua importância através de aplicações.

Em setembro de 1695, em uma troca de correspondências entre Leibniz e L'Hospital, surge o questionamento se seria possível generalizar a ordem de uma derivada para números não inteiros. Surge então a pergunta do que seria a derivada '*meiésima*' da função identidade  $f(x) = x$ . E Leibniz responde que " $d^{1/2}x = x\sqrt{dx:x}$ ",

complementando que essa igualdade “algum dia gerará muitas consequências frutíferas” (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015, p. 10). Esse é o primeiro registro do cálculo fracionário.

Na sequência, outros grandes matemáticos contribuíram no desenvolvimento do mesmo, como Riemann, Liouville, Abel, Weyl, Riesz, Caputo, entre outros.

Um levantamento histórico sobre o cálculo fracionário pode ser encontrado em Oliveira (2010) e Camargo e Oliveira (2015), enquanto sua cronologia pode ser encontrada em Machado et al (2011) e Miller e Ross (1993).

Em Camargo e Oliveira (2015), após um levantamento histórico sobre o cálculo fracionário, os autores apresentam as diferentes definições para a integral e a derivada fracionária discutindo a utilização de cada uma dessas definições em diferentes situações. Além disso, os autores dedicam alguns capítulos para comentar sobre algumas ferramentas necessárias para a resolução de equações diferenciais de ordem fracionária. Para concluir, eles comentam sobre a resolução de alguns problemas, como o da tautócrona, do decaimento radioativo, da equação logística fracionária, do sistema de Lotka-Volterra (sobre interações presa-predador) e da equação de Langevin (sobre difusão anômala).

Oliveira e Machado (2014) também apresentam as definições e formulações do cálculo fracionário, além de uma breve comparação entre as formulações de Riemann-Liouville e de Caputo, que serão comentadas neste trabalho.

Em 1974 um químico e um matemático, Oldham e Spanier (2006), escreveram em conjunto a obra “*The Fractional Calculus*” que trata dos conceitos de diferenciação e integração para uma ordem arbitrária. A motivação para o seu trabalho foi quando perceberam que usar derivadas e integrais de ordem meio trazia algumas vantagens ao se comparar com a formulação com ordens inteiras.

Em seu livro eles comentam acerca da economia na abordagem das leis de Fick sobre difusão. Também destacam que outros problemas de ciências físicas são representados e resolvidos de maneiras sucintas utilizando o cálculo fracionário.

Também vale a pena ressaltar o trabalho de Rodrigues e Oliveira (2015a), no qual destaca-se a utilização das transformadas de Laplace e toda a sua abordagem aplicada a equações diferenciais fracionárias. Neste trabalho também são apresentadas aplicações do cálculo fracionário na resolução de problemas no

campo da viscoelasticidade linear e de osciladores harmônicos mostrando que a formulação através do cálculo de ordem não inteira é mais consistente com os dados experimentais.

Aplicações do cálculo fracionário na resolução da equação do telégrafo fracionária, na generalização fracionária do sistema de Lotka-Volterra e da equação de Langevin são desenvolvidas em Camargo (2009).

Ainda envolvendo a equação do telégrafo fracionária, Camargo, Chiacchio e Oliveira (2008) discutem a utilização do cálculo de ordem não inteira para ilustrar problemas da física argumentando que as situações que envolvem a variável 'tempo' devem ser descritas não apenas destacando o que ocorre no exato instante do fenômeno, mas também considerando o que eles chamam de 'memória no tempo'.

Na área de Biologia, Gomes (2013) apresenta algumas aplicações do cálculo fracionário, mostrando um problema de crescimento de uma população de bactérias (crescimento exponencial) e um problema sobre a equação logística, que representa uma situação de crescimento populacional, mas com uma restrição que inibe este crescimento, como uma alta procura por alimentos, por exemplo. Na resolução desses dois problemas via cálculo fracionário, a autora da dissertação concluiu que essa ferramenta fornece uma descrição generalizada dos fenômenos, podendo ser, inclusive, mais precisa.

Também em seu trabalho, Gomes (2013) faz um estudo bem detalhado do sistema de Lotka-Volterra (sobre interações presa-predador), comparando as soluções de ordem inteira e de ordem fracionária. A autora conclui em sua dissertação que a abordagem fracionária pode levar o sistema a convergir para o ponto de equilíbrio de maneira mais rápida do que a abordagem inteira.

O trabalho de David, Linares e Pallone (2011) se apresenta como uma discussão sobre a utilização do cálculo fracionário nas ciências aplicadas e na engenharia e também como um incentivo para o uso dessa ideia matemática como uma ferramenta para pesquisadores das mais diversas áreas. Neste, os autores utilizam o cálculo fracionário em uma situação que envolve engenharia de alimentos, sugerindo a utilização do mesmo para a simulação da viscoelasticidade de gomas de mascar. Adicionalmente, o autor utiliza o cálculo de ordem não inteira para

descrever uma situação que envolve robôs, concluindo que um dos casos de ordem fracionária é aquele que descreve melhor o problema.

Rodrigues e Oliveira (2015b) apresentam uma aplicação do cálculo fracionário à equação de Bessel, que é encontrada no estudo dos fenômenos de propagação de ondas, da condução de calor e de equilíbrio eletrostático de domínios cilíndricos. Nesse trabalho, ao utilizar o cálculo de ordem não inteira, os autores chegam a uma aparente contradição com o cálculo de ordem inteira deixando algumas discussões em aberto para trabalhos posteriores.

Bhatti (2007) apresenta uma aplicação do cálculo de ordem não inteira sobre a equação de onda de Schrödinger e um 'princípio de incerteza fracionário'. O autor conclui que o cálculo fracionário é uma ferramenta poderosa para descrever uma série de eventos, e, além disso, que o mesmo retorna às soluções clássicas já conhecidas quando utilizadas as ordens inteiras nas derivadas.

Em Ebaid (2011) é apresentado um estudo sobre o movimento de projéteis, abordando um problema da mecânica clássica por meio do cálculo fracionário. Nele são formuladas as equações para obtenção da trajetória, do alcance, do tempo de voo e da altura máxima utilizando o cálculo de ordem arbitrária. Ao final do trabalho, o autor faz uma comparação dos resultados encontrados através dessa formulação com dados experimentais obtidos.

A dispersão de poluentes na atmosfera foi modelada utilizando o cálculo de ordem não inteira e comparada com resultados experimentais no trabalho de Goulart et al (2017).

Outra interessante aplicação do cálculo de ordem não inteira pode ser encontrada em Ionescu, Machado e Keyser (2011), onde é modelado o sistema respiratório humano.

Aplicações do cálculo fracionário na economia, mostrando que a utilização dessa ferramenta pode tornar possível a realização de simulações computacionais de processos econômicos com memória dinâmica, são discutidas em Tarasova e Tarasov (2018).

O trabalho de Grigoletto e Oliveira (2013) aborda a versão fracionária do teorema fundamental do cálculo, discutindo-o nas formulações de Caputo, Riemann-Liouville, Liouville, Riesz e Weyl, além de apresentar duas aplicações do teorema ao

resolver duas equações diferenciais fracionárias. Uma discussão sobre o teorema fundamental do cálculo também pode ser encontrada em Tarasov (2008). Nesse trabalho o autor também aborda o cálculo vetorial fracionário. Uma discussão sobre a regra da cadeia para o cálculo fracionário pode ser encontrada em Wang e Hu (2016).

Além de abordar interpretações geométricas e físicas para os operadores fracionários, Podlubny (2002) propõe relações dos conceitos do cálculo fracionário com conceitos de escalas de tempo e espaço e também apresenta uma nova interpretação física e geométrica para as integrais de convolução de Volterra.

### **1.3 Objetivos e estrutura do trabalho**

Este trabalho surgiu principalmente pelo interesse do autor em investigar esta nova área após uma palestra sobre o tema.

Uma pequena revisão bibliográfica revelou a existência de aplicações em temas diversos. Dentre estes, temas com grande proximidade com conteúdos que podem ser trabalhados de forma interdisciplinar no ensino médio, área de interesse e atuação do autor desta dissertação.

Desta forma, este trabalho tem como objetivo descrever e analisar alguns problemas clássicos de forma qualitativa e quantitativamente, sob o ponto de vista do cálculo fracionário. Entre os problemas escolhidos tem-se o problema da tautócrona, do sistema de Lotka-Volterra e do decaimento radioativo.

Além deles, faz-se uma aplicação do cálculo fracionário às equações horárias do movimento, um tópico bastante comum às grades do ensino médio e de muitos cursos do ensino superior.

Para o desenvolvimento dos objetivos propostos, o trabalho está dividido basicamente em duas partes.

A primeira delas apresenta as definições e propriedades que permeiam o cálculo fracionário, além de falar sobre a função gama, a função de Mittag-Leffler e as transformadas de Laplace, ferramentas importantes para o cálculo fracionário. Dentre as diferentes formulações do cálculo fracionário, nesta parte do trabalho ainda são apresentadas as formulações dos operadores de derivação e integração

de ordem fracionária segundo Caputo e Riemann-Liouville, cujas características serão discutidas no decorrer do capítulo.

A segunda parte do trabalho aborda as aplicações do cálculo fracionário aos problemas selecionados e às equações horárias do movimento.

O trabalho é finalizado com as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.



## 2. CÁLCULO DE ORDEM NÃO INTEIRA

Antes da apresentação das definições para os operadores integrais e diferenciais de ordem não inteira, inicialmente serão apresentados os conceitos sobre duas funções especiais - a função gama e a função de Mittag-Leffler - e sobre a transformada de Laplace, ferramentas necessárias ao desenvolvimento das aplicações propostas.

### 2.1 Função gama

A definição de Euler para a função gama é dada por:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \text{ para } z \in \mathbb{C}, \text{ com } \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (2.1)$$

É possível demonstrar que, para qualquer  $z$ , temos

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \quad (2.2)$$

e que  $\Gamma(1) = 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^{\infty} t^{1-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} [-e^{-t}]_0^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [-e^{-n} + e^0] = 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Portanto, podemos concluir que se  $z \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma(z + 1) = z! \quad (2.4)$$

Com essa definição, podemos mostrar que a função gama não está definida para  $z = 0$ , pois de (2.2) teríamos  $\Gamma(0 + 1) = 0 \cdot \Gamma(0)$  e, portanto,  $\Gamma(1) = 0$ , o que contradiz o que acabamos de mostrar. Além disso, a função gama não está definida para nenhum inteiro negativo, pois

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z + 1)}{z} \quad (2.5)$$

e a função gama para  $z = -1$  depende de  $\Gamma(0)$ . Pensando recursivamente, não é possível definir a função gama para nenhum número inteiro negativo.

É possível também mostrar que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ . De fato:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt. \quad (2.6)$$

Fazendo a mudança de variável  $t = u^2$  (e  $dt = 2u du$ ) na equação (2.6), temos:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} (u^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-u^2} 2u du = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (2.7)$$

Considerando  $I = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$ , temos

$$I^2 = \left( \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \cdot \int_0^{\infty} e^{-u^2} du. \quad (2.8)$$

A variável  $u$  pode ser trocada pela variável  $v$  em qualquer uma das integrais sem perda de generalidade, chegando em:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \cdot \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \\
 &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \cdot e^{-v^2} dudv = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Fazendo uma mudança de variável para coordenadas polares, com  $u^2 + v^2 = r^2$ , temos

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\theta.
 \tag{2.10}$$

Calculando a integral entre parênteses, fazendo mais uma mudança de variável, com  $w = r^2$  e  $dw = 2rdr$ , teremos  $\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-w} dw = \frac{1}{2}$ .

Então, temos  $I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\pi}{4}$ , portanto,  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . Assim,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.
 \tag{2.11}$$

Usando a equação (2.2), podemos calcular a função gama para qualquer valor fracionário de denominador igual a 2. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
 \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \\
 \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4};
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

e assim sucessivamente.

A Figura 1 apresenta<sup>1</sup> a função gama no intervalo  $] - 7; 4]$ , destacando os pontos onde ela coincide com o fatorial dos números naturais. Também é possível notar que a função não está definida nos números inteiros não negativos.

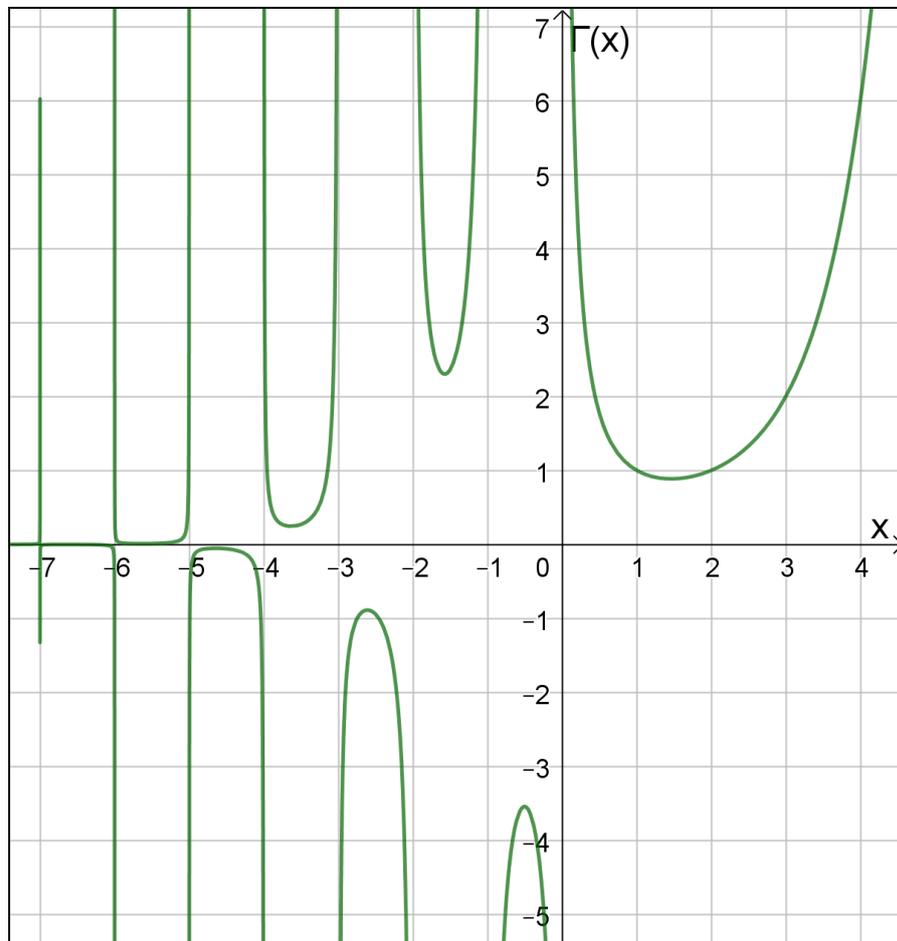


Figura 1 - Função Gama.

## 2.2 Funções de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler é considerada por muitos como uma das funções especiais mais importantes (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Em geral, as soluções de equações diferenciais com coeficientes constantes aparecem em termos da função exponencial. Entretanto, a equação diferencial de ordem não inteira tem sua solução dada em termos das funções de Mittag-Leffler. Por esse motivo, pode-se

<sup>1</sup> Todos os gráficos serão feitos no software Geogebra (disponível em [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)). Quando não for possível utilizar este software por limitações do mesmo, outro será utilizado e anunciado.

dizer que a função de Mittag-Leffler é uma generalização da função exponencial dentro do cálculo fracionário.

Uma das maneiras de se definir a função de Mittag-Leffler com um parâmetro  $\alpha$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , denotada por  $E_\alpha(z)$ , é através da seguinte série de potências:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \quad (2.13)$$

Convém notar que, para  $\alpha = 1$ , temos

$$E_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.14)$$

que é a expansão da função exponencial em uma série de potências.

Também é possível definir a função de Mittag-Leffler com dois parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , e  $\text{Re}(\beta) > 0$ , denotada por  $E_{\alpha,\beta}(z)$ , como sendo a seguinte série de potências:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (2.15)$$

Para  $\beta = 1$ , temos a função de um único parâmetro, ou seja,  $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$ . Esse caso com dois parâmetros foi introduzido por Agarwal (1953).

A função de Mittag-Leffler com três parâmetros  $\alpha, \beta$  e  $\rho$ ,  $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{C}$ , é dada por

$$E_{\alpha,\beta}^{\rho}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\rho)_k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \frac{z^k}{k!}, \quad (2.16)$$

onde  $(\rho)_k = \frac{\Gamma(\rho+k)}{\Gamma(\rho)} = \rho(\rho+1)(\rho+2) \dots (\rho+k-1)$  e  $(\rho)_0 = 1$ . O parâmetro  $(\rho)_k$  é chamado de símbolo de Pochhammer, e essa generalização com três parâmetros foi proposta por Prabhakar (1971). Convém notar que, para  $\rho = 1$ , temos  $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ .

### 2.3 A transformada de Laplace

Algumas das ferramentas utilizadas para a resolução de equações diferenciais são as transformadas integrais de Fourier e de Laplace, dentre outras. Em geral, a utilização destas leva a equação diferencial a uma equação mais simples do que a equação original. Assim, resolve-se essa equação mais simples e, por meio da transformada inversa, recupera-se a solução da equação original. Será dada mais ênfase às transformadas de Laplace, com uma breve citação à transformada de Fourier.

Seja  $f(t)$  uma função. A transformada de Laplace bilateral de  $f(t)$ , denotada por  $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$  é definida por:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}f(t)dt, \quad (2.17)$$

onde  $s = \sigma + i\tau$ . No caso onde  $\sigma = 0$ , temos  $s = i\tau$  e então  $\mathcal{F}(i\tau)$  é a transformada de Fourier de  $f(t)$ .

A transformada de Laplace unilateral, ou simplesmente transformada de Laplace de  $f(t)$ , é dada por:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt. \quad (2.18)$$

Também é importante notarmos que a transformada de Laplace é um operador linear, ou seja, se  $F(s)$  e  $G(s)$  são, respectivamente, as transformadas de Laplace das funções  $f(t)$  e  $g(t)$ , temos  $\mathcal{L}[af + bg](s) = aF(s) + bG(s)$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes reais.

As transformadas de Laplace para as derivadas de  $f(t)$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'(t)](s) &= s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0); \\ \mathcal{L}[f''(t)](s) &= s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0) - f'(0), \end{aligned} \quad (2.19)$$

de tal modo que podemos generalizar este resultado para:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) &= s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \\ &= s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} [s^{n-1-k}f^{(k)}(0)]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Se  $\alpha$  é um número não inteiro, tal que  $m - 1 < \alpha < m$ , com  $m$  inteiro, temos

$$\mathcal{L}[f^{(\alpha)}](s) = s^\alpha\mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{m-1} [s^{\alpha-1-k}f^{(k)}(0)]. \quad (2.21)$$

A seguir são apresentados dois exemplos a fim de ilustrar a sequência do trabalho.

*Exemplo 1: Transformada de Laplace da função constante  $f(t) = 1$ .*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1](s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} 1 dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_0^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-sn}}{-s} - \frac{e^{-s \cdot 0}}{-s} \right] = \frac{1}{s}\end{aligned}\tag{2.22}$$

Então, temos que a transformada de Laplace de  $f(t) = 1$  é  $\frac{1}{s}$ .

*Exemplo 2: Transformada de Laplace da função  $f_k(t) = t^k$ .*

$$F_k(s) = \mathcal{L}[t^k](s) = \int_0^{\infty} e^{-st} t^k dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} t^k dt.\tag{2.23}$$

Integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} t^k dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{e^{-st}}{-s} t^k \right)_0^n - \int_0^n \frac{e^{-st}}{-s} k t^{k-1} dt \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-st}}{-s} t^k \right)_0^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{e^{-st}}{-s} k t^{k-1} dt = \frac{k}{s} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} t^{k-1} dt\end{aligned}\tag{2.24}$$

pois  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{-st}}{-s} t^k \right)_0^n = 0$ . Porém, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} t^{k-1} dt = F_{k-1}(s)\tag{2.25}$$

é a transformada da função  $f_{k-1}(t) = t^{k-1}$ , podemos escrever que

$$F_k(s) = \frac{k}{s} F_{k-1}(s). \quad (2.26)$$

Assim, podemos utilizar uma recorrência, de modo que

$$F_k(s) = \frac{k}{s} F_{k-1}(s) = \frac{k}{s} \frac{k-1}{s} F_{k-2}(s) = \dots = \frac{k!}{s^k} F_0(s). \quad (2.27)$$

No entanto,  $F_0(s)$  é a transformada para o caso  $k = 0$ , ou seja, para a função constante e igual a 1, calculada em (2.22). Portanto,

$$F_k(s) = \frac{k!}{s^k} \frac{1}{s} = \frac{k!}{s^{k+1}}. \quad (2.28)$$

Então, a transformada de Laplace de  $f_k(t) = t^k$  é  $\frac{k!}{s^{k+1}}$ .

A utilização da transformada de Laplace para resolver equações diferenciais requer o uso da transformada de Laplace inversa de modo a recuperar a solução da equação original.

Define-se a transformada de Laplace inversa pela seguinte expressão:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st} F(s) ds, \quad (2.29)$$

onde  $s = \sigma + i\tau$ . Vamos calcular um exemplo que relaciona as transformadas de Laplace com as funções de Mittag-Leffler, e que será retomado na sequência desse trabalho.

*Exemplo 3: Transformada de Laplace inversa  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+1}} \right]$*

Pela definição da transformada inversa, temos:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F](t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1} ds. \quad (2.30)$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração  $\frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha} + 1}$  por  $s^{\alpha}$ , podemos reescrever a transformada inversa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} e^{st} \frac{s^{-1}}{1 + \frac{1}{s^{\alpha}}} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} \frac{e^{st}}{s} \frac{1}{1 + \frac{1}{s^{\alpha}}} ds. \end{aligned} \quad (2.31)$$

A fração  $\frac{1}{1 + \frac{1}{s^{\alpha}}}$  pode ser escrita como uma série geométrica de razão  $-\frac{1}{s^{\alpha}}$ , cujo intervalo de convergência é  $\left| -\frac{1}{s^{\alpha}} \right| < 1$ . Temos, então,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} \frac{e^{st}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ (-1)^k \left( \frac{1}{s^{\alpha k}} \right) \right] ds. \quad (2.32)$$

Permutando-se o sinal da integral com o sinal do somatório, obtemos a expressão:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} \frac{e^{st}}{s} \frac{1}{s^{\alpha k}} ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2\pi i} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} \frac{e^{st}}{s^{\alpha k + 1}} ds. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\tau}^{\sigma + i\tau} \frac{e^{st}}{s^{\alpha k + 1}} ds \quad (2.34)$$

é, pela definição, a transformada de Laplace inversa de  $\frac{1}{s^{\alpha k + 1}}$ , temos

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^{\alpha k + 1}} \right]. \quad (2.35)$$

Se multiplicarmos o numerador e o denominador da fração por  $\Gamma(\alpha k + 1)$  (que seria o equivalente a  $(\alpha k)!$ , se  $(\alpha k) \in \mathbb{N}$ ), obtemos exatamente o resultado do exemplo anterior. Então, usamos o fato de que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}} \right] = t^{\alpha k}, \quad (2.36)$$

e também o fato de que  $\Gamma(\alpha k + 1)$  é uma constante em relação à transformada de Laplace inversa. Dessa forma:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\alpha k + 1)}{s^{\alpha k + 1}} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} t^{\alpha k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Porém, esta é a representação em série da função de Mittag-Leffler para  $z = -t^\alpha$ . Então, podemos concluir que  $f(t) = E_\alpha(-t^\alpha)$ .

De maneira análoga, é possível concluir que  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+m}} \right] = E_\alpha(-mt^\alpha)$  e que  $\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha-m}} \right] = E_\alpha(mt^\alpha)$ .

## 2.4 Integrais de ordem não inteira

Algumas formulações para as integrais de ordem não inteira podem ser encontradas em Camargo e Oliveira (2015), como as de Riemann-Liouville, as de Liouville e as de Weyl. Aqui apresentaremos apenas a formulação de Riemann-Liouville.

### 2.4.1 Integrais de ordem arbitrária de Riemann-Liouville

Seja  $X = [a, b]$  um intervalo finito. As integrais de ordem arbitrária  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , de Riemann-Liouville, denotadas por  $(I_{a+}^{\alpha}f)(x)$  e  $(I_{b-}^{\alpha}f)(x)$  são definidas por:

$$(I_{a+}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \text{ com } x > a \quad (2.38)$$

e

$$(I_{b-}^{\alpha}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \text{ com } x < b. \quad (2.39)$$

As integrais nas equações (2.38) e (2.39) são denominadas de integrais à esquerda e à direita, respectivamente.

Convém notar que para  $\alpha = 1$ , teremos as definições usuais de integrais:

$$(I_{a+}^1f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-1}} dt = \int_a^x f(t) dt \quad (2.40)$$

e

$$(I_{b-}^1 f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_x^b \frac{f(t)}{(x-t)^{1-1}} dt = \int_x^b f(t) dt \quad (2.41)$$

visto que  $\Gamma(1) = 1$ .

No caso específico de funções polinomiais, temos que se  $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ , então

$$(I_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1} \quad (2.42)$$

e

$$(I_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}. \quad (2.43)$$

Note que, se tomarmos  $\alpha$  e  $\beta$  inteiros, teremos as integrais de ordem inteira. Como exemplo, veja que, para  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ , temos

$$(I_{a+}^1 (t-a)^{2-1})(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+1)} (x-a)^{2+1-1} = \frac{1}{2} (x-a)^2 \quad (2.44)$$

e, por outro lado, temos

$$\int_a^x (t-a) dt = \left[ \frac{1}{2} (t-a)^2 \right]_a^x = \frac{1}{2} (x-a)^2. \quad (2.45)$$

## 2.5 Derivadas de ordem não inteira

Algumas formulações para as derivadas fracionárias também podem ser encontradas em Camargo e Oliveira (2015), como as de Riemann-Liouville, Caputo, Weyl, Riesz, Grünwald-Letnikov, Marchaud e Liouville.

Apresentaremos a seguir as formulações de Riemann-Liouville e de Caputo.

### 2.5.1 Derivadas de ordem arbitrária de Riemann-Liouville

As derivadas de ordem arbitrária  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ , de Riemann-Liouville são definidas por:

$$(D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (2.46)$$

com  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ ;  $x > a$  e

$$(D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{b-}^{n-\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt, \quad (2.47)$$

com  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ ;  $x < b$ , onde  $[\text{Re}(\alpha)]$  representa a parte inteira de  $\text{Re}(\alpha)$ .

As derivadas nas equações (2.46) e (2.47) são denominadas de derivadas à esquerda e à direita, respectivamente.

Nesta notação, temos que as derivadas de ordem arbitrária são, para Riemann-Liouville, derivadas de ordens inteiras de integrais de ordens arbitrárias.

No caso específico de funções polinomiais, se  $\beta \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ , então

$$(D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \quad (2.48)$$

e

$$(D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}. \quad (2.49)$$

Se tomarmos agora  $\beta = 1$ , temos as derivadas de ordem  $\alpha$ , para uma função constante:

$$\begin{aligned} (D_{a+}^{\alpha}(t-a)^{1-1})(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{1-\alpha-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (D_{a+}^{\alpha}1)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} \end{aligned} \quad (2.50)$$

e

$$\begin{aligned} (D_{b-}^{\alpha}(b-t)^{1-1})(x) &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{1-\alpha-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow (D_{a+}^{\alpha}1)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Ou seja, as derivadas fracionárias de uma constante são, na formulação de Riemann-Liouville, diferentes de zero.

Novamente, se tomarmos valores inteiros para  $\alpha$  e  $\beta$ , teremos as derivadas de ordem inteira usuais. Veja, para  $\alpha = 1$  e  $\beta = 2$ ,

$$(D_{a+}^1(t-a)^{2-1})(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-1)}(x-a)^{2-1-1} = 1 \quad (2.52)$$

e, por outro lado,

$$\frac{d(x-a)}{dx} = 1. \quad (2.53)$$

No Anexo A, podemos encontrar uma tabela com derivadas e integrais de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  para algumas funções.

### 2.5.2 Derivadas de ordem arbitrária de Caputo

Para evitar o fato da derivada de uma função constante não se anular, Caputo propôs uma definição para a derivada de ordem qualquer baseada na definição de Riemann-Liouville, porém com uma inversão na ordem das operações de integração e derivação, conforme apresentado a seguir.

Seja  $X = [a, b]$  um intervalo finito e sejam  $D_{a+}^{\alpha}[y(t)](x) = (D_{a+}^{\alpha}y)(x)$  e  $D_{b-}^{\alpha}[y(t)](x) = (D_{b-}^{\alpha}y)(x)$  as derivadas de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . Definimos as derivadas de Caputo  $({}^cD_{a+}^{\alpha}y)(x)$  e  $({}^cD_{b-}^{\alpha}y)(x)$  da seguinte maneira:

$$({}^cD_{a+}^{\alpha}f)(x) = \left( D_{a+}^{\alpha} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \right) (x) \quad (2.54)$$

e

$$({}^cD_{b-}^{\alpha}f)(x) = \left( D_{b-}^{\alpha} \left[ f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \right) (x), \quad (2.55)$$

onde  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , se  $\alpha \notin \mathbb{N}$  e  $n = \alpha$ , se  $\alpha \in \mathbb{N}$ . As derivadas nas equações (2.54) e (2.55) são denominadas de derivadas à esquerda e à direita, respectivamente. No caso  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ , temos  $[\text{Re}(\alpha)] = 0$ . Logo,  $n = 1$  e então as equações (2.54) e (2.55) passam a ser

$$({}^cD_{a+}^{\alpha}f)(x) = (D_{a+}^{\alpha}[f(t) - f(a)])(x) \quad (2.56)$$

e

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} f)(x) = (D_{b-}^{\alpha} [f(t) - f(b)])(x). \quad (2.57)$$

Também é possível definir as derivadas fracionárias de Caputo da seguinte maneira:

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x - t)^{\alpha - n + 1}} dt = (I_{a+}^{n - \alpha} D^n f)(x) \quad (2.58)$$

e

$$({}^C D_{b-}^{\alpha} f)(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dt = (-1)^n (I_{b-}^{n - \alpha} D^n f)(x), \quad (2.59)$$

para  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$ , se  $\alpha \notin \mathbb{N}$  e  $n = \alpha$ , se  $\alpha \in \mathbb{N}$ . Ou seja, as derivadas fracionárias de ordem  $\alpha$  de Caputo são as integrais de ordem  $n - \alpha$ , de Riemann-Liouville, das derivadas de ordem inteira  $n$  usualmente definidas.

Convém observar que as derivadas de Caputo são mais restritivas, pois exigem que a função tenha derivada de ordem inteira.

Se tomarmos em particular o caso onde  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$ , temos novamente  $n = 1$  e

$$({}^C D_{a+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x \frac{f'(t)}{(x - t)^{\alpha}} dt = (I_{a+}^{1 - \alpha} Df)(x) \quad (2.60)$$

e

$$({}^c D_{b-}^\alpha f)(x) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b \frac{f'(t)}{(t-x)^\alpha} dt = (-1)(I_{b-}^{1-\alpha} Df)(x). \quad (2.61)$$

A partir dessa última definição, é possível obter as derivadas de ordem  $\alpha$  da função constante. Se  $f(t) = k, k \in \mathbb{R}$ , temos  $f^{(n)}(t) = 0$ , pois a derivada de ordem  $n \in \mathbb{N}$  de uma função constante é nula. Ou seja,

$$\begin{aligned} ({}^c D_{a+}^\alpha f)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{0}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt = 0. \end{aligned} \quad (2.62)$$

De modo análogo, teremos  $({}^c D_{b-}^\alpha f)(x) = 0$ . Portanto, as derivadas de ordem arbitrária de funções constantes, de acordo com a formulação de Caputo, são nulas.

### 3. APLICAÇÕES

Neste capítulo, discutiremos aplicações importantes do cálculo fracionário em alguns problemas, como o da tautócrona, do sistema de Lotka-Volterra, do decaimento radioativo e das equações horárias do movimento.

#### 3.1 O problema da tautócrona e a resolução de Abel

O problema da tautócrona é um clássico dentre os problemas que envolvem cálculos de variações, e já foi abordado e resolvido de diversas formas. O trabalho de Castro (2014) traz uma série de apontamentos interessantes sobre este problema. Vamos apresentar aqui a resolução que utiliza o cálculo fracionário (atribuída a Abel).

O problema consiste em determinar a curva na qual o tempo gasto por um objeto para deslizar, sem atrito, com gravidade uniforme até seu ponto mínimo não depende do seu ponto de partida.

Como a partícula se move sem atrito, vamos utilizar o *princípio da conservação de energia*, que nos garante que a soma da energia potencial gravitacional com a energia cinética permanece constante. A energia potencial gravitacional é o produto entre a massa do objeto, a aceleração da gravidade no local e sua altura naquele instante, e a energia cinética é igual à metade do produto da massa do objeto pelo quadrado de sua velocidade naquele instante. Ou seja,  $E_p = mgh$  e  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ .

Vamos considerar um objeto de massa  $m$ , que começa seu movimento a uma altura  $h_0$ , num local de gravidade  $g$ , e possui velocidade  $v = \frac{ds}{dt}$ , sendo que  $s$  representa o espaço percorrido sobre a curva. Partindo do repouso, sua velocidade inicial é nula e, portanto, sua energia cinética inicial será nula. Logo,

$$mgh_0 + \frac{1}{2}m0^2 = mgh + \frac{1}{2}mv^2, \quad (3.1)$$

sendo que  $h$  é a altura do objeto no instante em que ele atinge a velocidade  $v$ .

Então, temos:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 - mgh, \quad (3.2)$$

de onde podemos escrever:  $v^2 = 2g(h_0 - h)$  e, portanto,  $v = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2g(h_0 - h)}$ .

Adotando como referencial a direção vertical orientada para cima, e supondo um objeto em queda livre, portanto com velocidade no sentido contrário do referencial, escolheremos apenas o valor negativo da expressão

$$\frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{2g(h_0 - h)} \quad (3.3)$$

e podemos escrever

$$\begin{aligned} dt &= -\frac{ds}{\sqrt{2g(h_0 - h)}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{\sqrt{(h_0 - h)}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{(h_0 - h)}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Integrando o lado direito da igualdade em relação a  $h$  e o lado esquerdo em relação a  $t$ , de  $h_0$  até zero, temos:

$$\int_{\tau}^0 dt = \int_{h_0}^0 -\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\sqrt{(h_0 - h)}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh. \quad (3.5)$$

E, portanto,

$$\tau = -\frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{h_0}^0 \frac{1}{\sqrt{(h_0 - h)}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh, \quad (3.6)$$

onde  $\tau$  representa o tempo de descida. Ou seja, a equação que devemos resolver é

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{h_0} \frac{1}{\sqrt{(h_0 - h)}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh. \quad (3.7)$$

### 3.1.1 Resolução utilizando cálculo fracionário

Observando a equação (3.7) a ser resolvida, e lembrando da definição das integrais fracionárias de Riemann-Liouville, equações (2.38) e (2.39), vemos que o segundo membro da equação corresponde à definição da integral de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  a menos de um fator constante. Portanto, multiplicando e dividindo o segundo membro por  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{h_0} \frac{1}{\sqrt{(h_0 - h)}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2g}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{h_0} \frac{1}{(h_0 - h)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pela definição de Riemann-Liouville,  $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{h_0} \frac{1}{(h_0 - h)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh$  é a definição da integral fracionária de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  da função  $f(h) = \frac{ds}{dh}$ . Então, podemos aplicar a derivada segundo Riemann-Liouville de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  nos dois membros da equação (3.8), obtendo:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dh^{\frac{1}{2}}} \tau = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2g}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dh^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{h_0} \frac{1}{(h_0 - h)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh \right]. \quad (3.9)$$

Lembrando que  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  e como, neste caso, a integral fracionária de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  e a derivada fracionária de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  são operações inversas, teremos no segundo membro da equação (3.9) que

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dh^{\frac{1}{2}}} \left( I_{0+}^{\frac{1}{2}} f \right) (h) = f(h) = \frac{ds}{dh}. \quad (3.10)$$

Além disso, no primeiro membro da equação (3.9), segundo a definição de Riemann-Liouville, a derivada de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  da função constante igual a 1 é

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} (h)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi h}} \quad (3.11)$$

Então, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dh^{\frac{1}{2}}} \tau &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{2g}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dh^{\frac{1}{2}}} \left[ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{h_0} \frac{1}{(h_0 - h)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{ds}{dh}\right) dh \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \tau \frac{1}{\sqrt{\pi h}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2g}} \frac{ds}{dh} \end{aligned} \quad (3.12)$$

e, portanto,

$$\frac{ds}{dh} = \tau \frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{h}} \quad (3.13)$$

Assim,

$$ds = \tau \frac{\sqrt{2g}}{\pi\sqrt{h}} dh \Rightarrow s(h) = \frac{2\tau\sqrt{2g}}{\pi} \sqrt{h}. \quad (3.14)$$

Portanto, é possível observar que a resolução do problema da tautócrona via cálculo fracionário é muito mais simples e direta do que a resolução convencional, que utiliza transformadas de Laplace e pode ser vista em Camargo e Oliveira (2015).

### 3.2 Sistema Lotka-Volterra ou sistema presa-predador

Analisaremos nessa seção o sistema de Lotka-Volterra ou sistema presa-predador. Esse sistema pode ser aplicado a situações que englobem duas populações no mesmo ambiente, onde uma delas é considerada a presa e a outra, o predador.

Várias aplicações da Biologia podem ser explicadas e representadas por esse modelo, como situações de parasita-hospedeiro, genética de populações, controle de pragas. Ou mesmo a situação que motivou a pesquisa de Vito Volterra (VOLTERRA, 1926) e Alfred Lotka (LOTKA, 1925), no ano de 1925, estudando o que ocorreu com as populações de tubarões e peixes no mar Adriático.

Esse sistema se baseia no seguinte fato: a população de predadores aumenta caso haja fartura de presas. Porém, com o aumento da população de predadores, a quantidade de presas diminui. Supondo ausentes os predadores, a população de presas,  $x(t)$ , crescerá de forma exponencial. Por outro lado, na ausência de presas, a população de predadores,  $y(t)$ , decrescerá exponencialmente num certo tempo. Então, o sistema de Lotka-Volterra é dado por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} = -y(c - ex) \end{cases} \quad (3.15)$$

onde  $a$  é a taxa de natalidade de  $x(t)$  na ausência dos predadores,  $b$  é a taxa de sucesso dos ataques de  $y(t)$ ,  $c$  é a taxa de mortalidade de  $y(t)$  na ausência de presas e  $e$  é a taxa de mortalidade de  $x(t)$ .

Existem dois pontos que são chamados críticos, que fazem as duas equações serem iguais a zero. São eles o ponto  $P(0,0)$ , que não será considerado neste trabalho, pois seria a situação onde a quantidade de predadores e de presas é inicialmente igual a zero, e o ponto  $Q\left(\frac{c}{e}; \frac{a}{b}\right)$ , que é considerado o ponto de equilíbrio do sistema.

Para resolver o sistema, dividimos a segunda equação do sistema (3.15) pela primeira, encontrando

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(c - ex)}{x(a - by)}. \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser resolvida separando os termos em  $x$  e em  $y$ , da seguinte forma:

$$-\frac{1}{y}(a - by)dy = \frac{1}{x}(c - ex)dx \quad (3.17)$$

de onde podemos escrever:

$$-\frac{a}{y}dy + bdy = \frac{c}{x}dx - edx. \quad (3.18)$$

Integrando os dois lados da equação (3.18), temos:

$$-a\ln(y) + by = c\ln(x) - ex + k, \quad (3.19)$$

onde  $k \in \mathbb{R}$ .

Assim, o sistema tem como resposta a função de duas variáveis:

$$f(x, y) = c\ln(x) - ex + a\ln(y) - by = k. \quad (3.20)$$

### 3.2.1 Caso Fracionário

O sistema fracionário de Lotka-Volterra, dadas as mesmas definições das constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $e$ , é dado por:

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = x(a - by) \\ D^\beta y(t) = -y(c - ex) \end{cases} \quad (3.21)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  sendo números quaisquer entre 0 e 1.

Efetuada uma troca de variáveis e tomando  $x = u + \frac{c}{e}$  e  $y = v + \frac{a}{b}$ , obtemos a translação dessas equações para o ponto crítico determinado anteriormente  $\left(\frac{c}{e}; \frac{a}{b}\right)$ , o que resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = au + \frac{ac}{e} - buv - au - \frac{bcv}{e} - \frac{ac}{e} \\ D^\beta v(t) = -\left(cv - evu - cv + \frac{ac}{b} - \frac{aeu}{b} - \frac{ac}{b}\right) \end{cases} \quad (3.22)$$

com  $\alpha$  e  $\beta$  sendo números quaisquer entre 0 e 1. Logo, podemos escrever:

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = -buv - \frac{bcv}{e} \\ D^\beta v(t) = -\left(-evu - \frac{aeu}{b}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D^\alpha u(t) = -\frac{b}{e}(uve + cv) \\ D^\beta v(t) = \frac{e}{b}(bv u + au) \end{cases} \quad (3.23)$$

Como estamos estudando o sistema próximo ao ponto crítico  $\left(\frac{c}{e}; \frac{a}{b}\right)$ , podemos considerar o sistema linearizado, ou seja, desprezamos os termos não lineares, pois próximo ao ponto crítico sua interferência é pequena (ver equação (3.24)). Ou seja,

$$\begin{cases} D^\alpha u(t) = -\frac{bc}{e}v \\ D^\beta v(t) = \frac{ae}{b}u \end{cases} \quad (3.24)$$

Utilizando transformadas de Laplace no sistema de equações de (3.24), temos:

$$\begin{cases} \mathcal{L}[D^\alpha u(t)] = \mathcal{L}\left[-\frac{bc}{e}v\right] \\ \mathcal{L}[D^\beta v(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{ae}{b}u\right] \end{cases} \quad (3.25)$$

Usando o fato que  $u(0) = u_0$  e  $v(0) = v_0$  são as populações iniciais de presa e predador, e que  $F(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  e  $G(s) = \mathcal{L}[v(t)]$ , temos:

$$\begin{cases} s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1}u_0 = -\frac{bc}{e}G(s) \\ s^\beta G(s) - s^{\beta-1}v_0 = \frac{ae}{b}F(s) \end{cases} \quad (3.26)$$

Isolando  $F(s)$  na primeira equação, temos:

$$F(s) = \frac{s^{\alpha-1}u_0 - \frac{bc}{e}G(s)}{s^\alpha}. \quad (3.27)$$

Substituindo  $F(s)$  na segunda equação de (3.26), temos:

$$\begin{aligned} s^\beta G(s) - s^{\beta-1}v_0 &= \frac{ae s^{\alpha-1}u_0 - \frac{bc}{e}G(s)}{b s^\alpha} \Rightarrow \\ s^\beta G(s) - s^{\beta-1}v_0 &= \frac{ae}{b} \left( s^{-1}u_0 - \frac{bc}{es^\alpha}G(s) \right) \Rightarrow \\ s^\beta G(s) - s^{\beta-1}v_0 &= \frac{ae}{b} s^{-1}u_0 - \frac{ac}{s^\alpha}G(s) \Rightarrow \\ s^\beta G(s) + \frac{ac}{s^\alpha}G(s) &= \frac{ae}{b} s^{-1}u_0 + s^{\beta-1}v_0 \Rightarrow \\ G(s) \left[ s^\beta + \frac{ac}{s^\alpha} \right] &= \frac{ae}{b} s^{-1}u_0 + s^{\beta-1}v_0 \Rightarrow \\ G(s) \left[ \frac{s^{\alpha+\beta} + ac}{s^\alpha} \right] &= \frac{ae}{b} s^{-1}u_0 + s^{\beta-1}v_0 \Rightarrow \\ G(s) &= \frac{\frac{ae}{b} s^{\alpha-1}u_0 + s^{\alpha+\beta-1}v_0}{s^{\alpha+\beta} + ac} \Rightarrow \\ G(s) &= \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} v_0 + \frac{ae}{b} \frac{s^{\alpha-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} u_0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Substituindo o resultado acima em  $F(s)$ , equação (3.27), e resolvendo a equação encontrada de maneira análoga, obtemos

$$F(s) = \frac{s^{\alpha+\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} u_0 - \frac{bc}{e} \frac{s^{\beta-1}}{s^{\alpha+\beta} + ac} v_0. \quad (3.29)$$

Agora, aplicando a transformada de Laplace inversa, obtemos as soluções do sistema inicial:

$$u(t) = u_0 E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) - v_0 \frac{bc}{e} t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-act^{\alpha+\beta}) \quad (3.30)$$

e

$$v(t) = v_0 E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) + u_0 \frac{ae}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-act^{\alpha+\beta}), \quad (3.31)$$

onde  $E_{\alpha+\beta}$  e  $E_{\alpha+\beta, \alpha+1}$  são as funções de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros, respectivamente.

Reescrevendo as soluções do sistema, ou seja, as equações (3.30) e (3.31) nas variáveis iniciais, temos:

$$x(t) = \frac{c}{e} + \left(x_0 - \frac{c}{e}\right) E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) - \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) \frac{bc}{e} t^\alpha E_{\alpha+\beta, \alpha+1}(-act^{\alpha+\beta}) \quad (3.32)$$

e

$$y(t) = \frac{a}{b} + \left(y_0 - \frac{a}{b}\right) E_{\alpha+\beta}(-act^{\alpha+\beta}) + \left(x_0 - \frac{c}{e}\right) \frac{ae}{b} t^\beta E_{\alpha+\beta, \beta+1}(-act^{\alpha+\beta}). \quad (3.33)$$

Em seu trabalho, Camargo, Oliveira e Gomes (2007) apresentam uma representação gráfica dessas soluções, conforme apresentado na Figura 2. Para a construção desse gráfico, são usados os valores  $a = 2$ ,  $b = \frac{3}{2}$ ,  $c = 2$  e  $e = \frac{1}{2}$ , além dos valores  $x(0) = 1000$  e  $y(0) = 150$ .

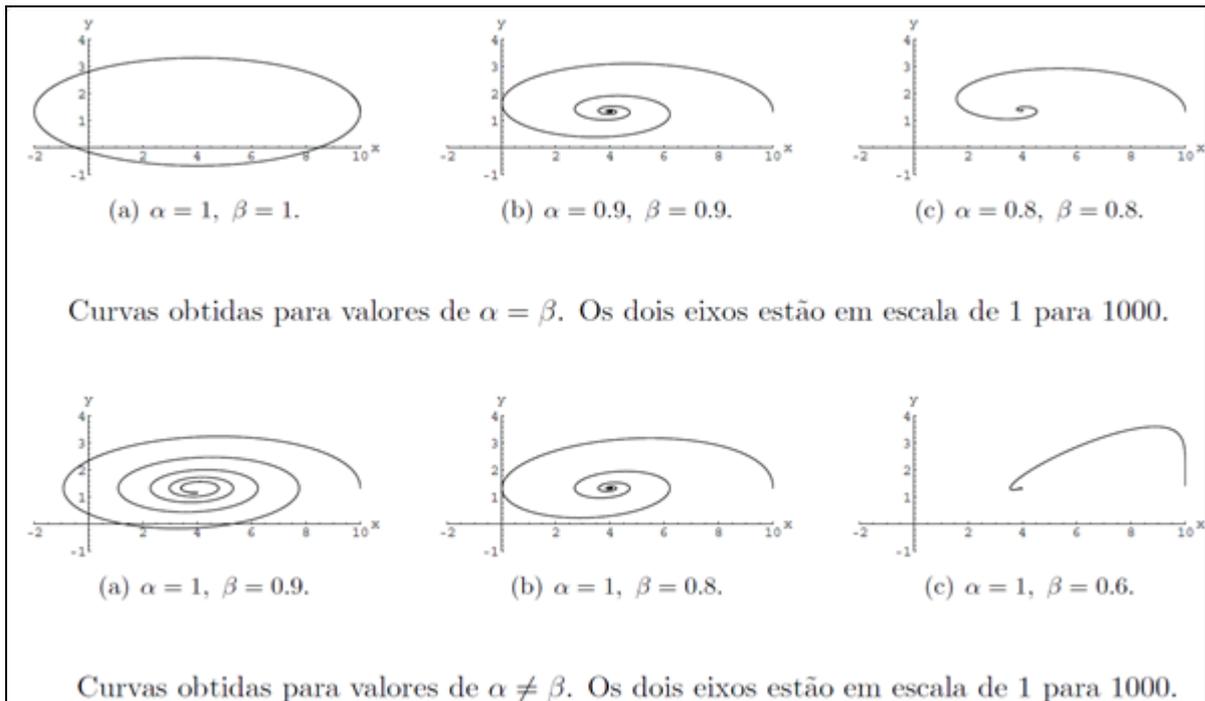


Figura 2 – Gráficos do Sistema de Lotka-Volterra Fracionário.  
 Fonte: Extraído de Camargo, Oliveira e Gomes (2007).

Ao observarmos a Figura 2, podemos ver no primeiro gráfico,  $\alpha = \beta = 1$ , o caso do sistema Lotka-Volterra para o cálculo convencional de ordem inteira. Nele é possível observar que a curva toca os eixos, ou seja, existem instantes nos quais alguma das populações torna-se igual a zero. Se uma das populações, seja de presas ou de predadores, fosse igual a zero, naturalmente a outra população também se extinguiria, tornando o modelo fisicamente inapropriado.

Nos outros gráficos, observamos os casos de ordem não inteira com curvas tendendo ao ponto crítico comentado anteriormente (para as constantes escolhidas, o ponto crítico seria o ponto  $(4, 4/3)$ ). Especificamente para  $\alpha + \beta \leq 1,8$ , existe uma vantagem na comparação com o caso de ordem inteira, pois os gráficos não tocam os eixos, ou seja, as populações não se extinguem.

### 3.3 Decaimento radioativo

Alguns materiais chamados radioativos possuem um decaimento de sua massa. Isso significa que com o passar do tempo, sua massa tende a se

desintegrar. Experimentalmente, postula-se que este decaimento é proporcional à massa remanescente, ou seja, se  $m(t)$  é a massa de certo material no instante  $t$  e  $k$  é uma constante positiva, podemos escrever

$$\frac{dm(t)}{dt} = -km(t). \quad (3.34)$$

A resolução usual para esta equação diferencial, utilizando separação de variáveis, nos leva a

$$\frac{1}{m} dm = -kdt. \quad (3.35)$$

Integrando os dois membros da equação acima, temos

$$\int \frac{1}{m} dm = \int -kdt \Rightarrow \ln(m) = -kt + C, \quad (3.36)$$

onde  $C$  é uma constante real. Logo,

$$m(t) = e^{-kt+C}. \quad (3.37)$$

Podemos calcular a constante  $C$  em função da massa inicial do material. Seja  $m_0$  a massa do material no instante  $t = 0$ . Logo,

$$m_0 = m(0) = e^{0+C} = e^C. \quad (3.38)$$

Portanto, podemos reescrever a função  $m(t)$  da seguinte maneira:

$$m(t) = m_0 e^{-kt}, \quad (3.39)$$

onde  $m_0$  é a massa inicial do material e  $k$  é uma constante positiva que depende do material.

Essa expressão que relaciona a massa de um material radioativo com o tempo é, inclusive, apresentada no ensino médio durante o ensino de logaritmos e exponenciais. Porém, podemos utilizar o cálculo fracionário para obter uma expressão que descreva de maneira mais acurada esse fenômeno (CAMARGO e OLIVEIRA, 2015). Uma expressão geral para este mesmo caso, utilizando agora derivada de ordem  $\alpha$ , com  $0 < \alpha \leq 1$  pode ser dada por:

$$\frac{d^\alpha m(t)}{dt^\alpha} = -km(t). \quad (3.40)$$

Aplicando a transformada de Laplace nos dois membros da equação, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{d^\alpha m(t)}{dt^\alpha}\right](s) &= \mathcal{L}[-km(t)](s) \Rightarrow \\ \Rightarrow s^\alpha \mathcal{L}[m](s) - s^{\alpha-1} m(0) &= -k\mathcal{L}[m](s), \end{aligned} \quad (3.41)$$

sendo a transformada de Laplace para uma derivada fracionária como definido na equação (2.21). Considerando  $\mathcal{L}[m(t)](s) = F(s)$  e  $m(0) = m_0$  a massa inicial, temos

$$\begin{aligned} s^\alpha F(s) - s^{\alpha-1} m_0 &= -kF(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow F(s) &= m_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, temos:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[m_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}\right] = m_0 \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}\right]. \quad (3.43)$$

Relembrando que  $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + k}\right] = E_\alpha(-kt^\alpha)$ , temos

$$m(t) = m_0 E_\alpha(-kt^\alpha), \quad (3.44)$$

onde  $E_\alpha$  é a função de Mittag-Leffler com um parâmetro  $\alpha$ . Para  $\alpha = 1$ , recupera-se a solução usual, pois  $E_1(-kt) = e^{-kt}$ .

Na Figura 3 temos a representação gráfica<sup>2</sup> da equação (3.44), considerando  $m_0 = 1$ ,  $k = 0,5$  e  $\alpha = \{0,25; 0,5; 0,75; 1\}$ .

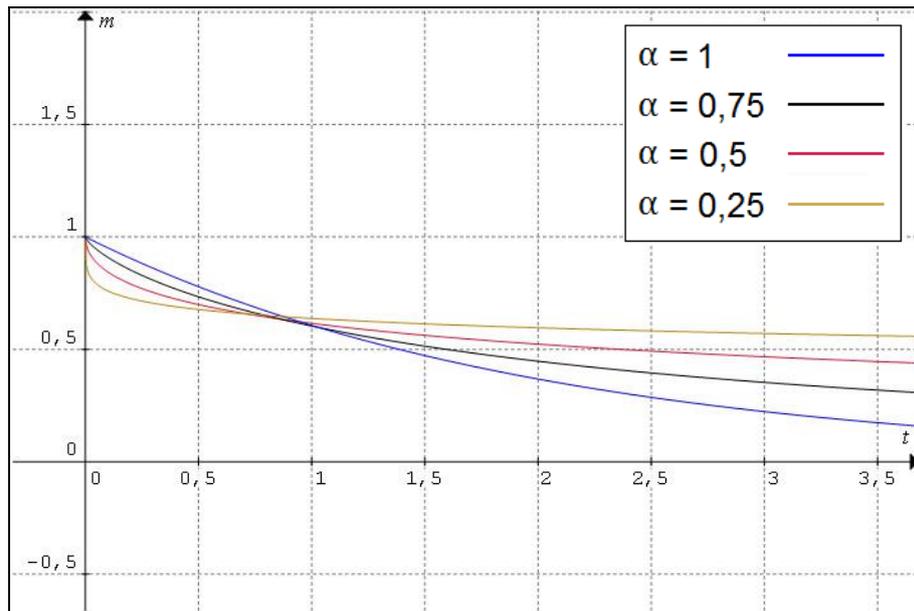


Figura 3 – Gráfico da equação (3.44) para alguns valores de  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Na Figura 3, podemos observar os casos intermediários advindos do cálculo fracionário, ilustrando de maneira mais aprimorada o decaimento radioativo de certo material em função do tempo, bem como o caso inteiro  $\alpha = 1$ , para efeito de comparação.

<sup>2</sup> Esse gráfico foi feito com o software Graphmatica, disponível em [www.graphmatica.com](http://www.graphmatica.com)

Em Lemes, Santos e Braga (2013), os autores comentam que o modelo para o decaimento radioativo através do cálculo fracionário apresenta bons resultados quando comparado com dados experimentais. Para pequenos tempos de observação, o modelo prevê de fato um decaimento exponencial e prevê um decaimento mais suave para um número grande de meias-vidas.

### 3.4 As equações horárias do movimento

Durante as aulas de Física do Ensino Médio são apresentadas aos alunos as equações horárias do movimento. Seja um móvel qualquer, partindo de uma posição  $s_0$ , com velocidade inicial igual a  $v_0$  e aceleração constante igual a  $a$ . Dizemos que a posição  $s(t)$  do móvel no instante  $t$  é dada por

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \quad (3.45)$$

e sua velocidade  $v(t)$  no instante  $t$  é dada por

$$v(t) = v_0 + at. \quad (3.46)$$

#### 3.4.1 Formulação via derivação fracionária

As equações horárias do movimento podem ser obtidas através de operações de derivação, sendo possível mostrar que a expressão da velocidade é a derivada da expressão da posição, uma vez que a velocidade é a variação do espaço, ou seja, se derivarmos a função horária do espaço (equação (3.45)), obteremos a função horária da velocidade (equação (3.46)). Ou seja,  $s'(t) = v(t)$ .

Se tomarmos a derivada da função horária da velocidade, teremos:

$$v'(t) = 0 + a = a, \quad (3.47)$$

ou seja,  $v'(t) = a$  e, portanto,

$$s''(t) = v'(t) = a, \quad (3.48)$$

uma constante do movimento.

Calculando a derivada de ordem  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$  da função horária do espaço, segundo a formulação de Riemann-Liouville para o intervalo  $[0; t]$  temos:

$$\begin{aligned} (D_{0+}^{\alpha}s)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s_0 + v_0x + \frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha-1+1}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t \frac{s_0}{(t-x)^{\alpha}} dx + \int_0^t \frac{v_0x}{(t-x)^{\alpha}} dx + \int_0^t \frac{\frac{ax^2}{2}}{(t-x)^{\alpha}} dx \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Calculando separadamente essas três integrais, temos para a primeira que:

$$\int_0^t \frac{s_0}{(t-x)^{\alpha}} dx = \left[ -\frac{s_0(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^t = \frac{s_0 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}. \quad (3.50)$$

A segunda integral é resolvida utilizando uma substituição simples de  $t-x$ , e observamos no final que a primitiva calculada para  $x=t$  se anula, sobrando apenas a primitiva calculada para  $x=0$ . Ou seja,

$$\int_0^t \frac{v_0x}{(t-x)^{\alpha}} dx = v_0 \left[ -\frac{x(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(t-x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \right]_0^t = \frac{v_0 t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}. \quad (3.51)$$

A terceira integração é feita por partes, e no final, a primitiva se anula para  $x=t$ , e a primeira das parcelas também se anula para  $x=0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \frac{ax^2}{(t-x)^\alpha} dx = \\
& = \frac{a}{2} \left[ -\frac{x^2(t-x)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{2x(t-x)^{-\alpha+2}}{(-\alpha+1)(-\alpha+2)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{2(t-x)^{-\alpha+3}}{(-\alpha+1)(-\alpha+2)(-\alpha+3)} \right]_0^t \\
& = \frac{2at^{3-\alpha}}{2(-\alpha+1)(-\alpha+2)(-\alpha+3)} = \frac{at^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Substituindo os resultados acima na equação (3.49), podemos calcular a derivada de ordem  $\alpha$ , como:

$$\begin{aligned}
(D_{0+}^\alpha s)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left[ \frac{s_0 t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{v_0 t^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{at^{3-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)} \right] \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ s_0 t^{-\alpha} + \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{at^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \right] \\
&= \frac{s_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{a t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

É interessante notar que essa expressão, para  $\alpha = 0$ , retorna para a expressão original, isto é, a função horária do espaço. Quando  $\alpha$  tende a 1, a parcela  $\frac{s_0 t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$  tende a zero, recuperando o caso inteiro, ou seja, a função horária da velocidade.

Este problema também pode ser abordado segundo a formulação de Caputo.

Considerando novamente a derivada de ordem  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$  da função horária do espaço e calculando para um intervalo  $[0; t]$ , pela definição de Caputo, temos:

$$\begin{aligned}
({}^C D_{0+}^\alpha s)(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\left(s_0 + v_0 x + \frac{ax^2}{2}\right)'}{(t-x)^{\alpha-1+1}} dx = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{(v_0 + ax)}{(t-x)^\alpha} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_0^t \frac{v_0}{(t-x)^\alpha} dx + \int_0^t \frac{ax}{(t-x)^\alpha} dx \right].
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Resolvendo separadamente cada uma das integrais acima, temos:

$$\int_0^t \frac{v_0}{(t-x)^\alpha} dx = \left[ -\frac{v_0(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^t = \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \tag{3.55}$$

e,

$$\int_0^t \frac{ax}{(t-x)^\alpha} dx = a \left[ -\frac{x(t-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(t-x)^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \right]_0^t = \frac{at^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}. \tag{3.56}$$

Assim sendo, temos que a derivada pela definição de Caputo, para uma ordem  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$  é:

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{at^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \right] = \frac{v_0 t^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \frac{at^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}. \tag{3.57}$$

Na expressão acima, se  $\alpha = 0$  recuperamos o caso da função horária do espaço, a menos da constante  $s_0$ , e para  $\alpha = 1$  temos exatamente a função horária da velocidade.

Ainda utilizando a definição de Caputo, a derivada de ordem  $\alpha$ , com  $1 \leq \alpha \leq 2$ , para a função horária do espaço é dada por

$$\begin{aligned}
({}^c D_{0+}^\alpha s)(t) &= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{\left(s_0 + v_0 x + \frac{ax^2}{2}\right)'''}{(t-x)^{\alpha-2+1}} dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{a}{(t-x)^{\alpha-1}} dx.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Calculando a integral proposta através de uma substituição simples de  $x - t$  e observando que a primitiva calculada para  $t = x$  se anula, temos:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{a}{(t-x)^{\alpha-1}} dx = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{a t^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = \frac{a t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}. \tag{3.59}$$

Convém notar novamente que para  $\alpha = 1$  temos o caso da função horária da velocidade, a menos da constante  $v_0$ , e para  $\alpha = 2$  temos exatamente a função horária da aceleração, que, nesse caso, é uma função constante.

Ou seja, ao usar a formulação de Caputo, conseguimos recuperar os casos já conhecidos das derivadas de ordem inteira, além disso, conseguimos ilustrar o que ocorre nos casos das derivadas de ordens não inteiras.

### 3.4.2 Formulação via integração fracionária

As equações horárias do movimento também podem ser obtidas através da integração. É possível mostrar que a equação horária da velocidade (equação (3.46)) é a integral da função constante igual a  $a$ , e que a equação horária do espaço (equação (3.45)) é a integral da equação horária da velocidade (equação (3.46)).

Considerando que um móvel possua aceleração constante igual a  $a$ , a partir das definições das integrais fracionárias, equações (2.38) e (2.39), vamos determinar uma função que descreva sua velocidade e uma função que descreva sua posição dado um certo tempo  $t$ .

A integral de ordem  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , da função constante  $f(t) = a$  utilizando a definição de Riemann-Liouville, para um intervalo entre 0 e  $t$ , é dada por:

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{a}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left. \frac{-a(t-x)^{\alpha}}{\alpha} \right|_0^t = \frac{at^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pode-se destacar que, na equação (3.60), o caso  $\alpha = 1$  recupera a função horária da velocidade a menos da constante  $v_0$ , ou seja, a função  $v(t) = at$ .

A partir da função horária da velocidade  $v(t) = v_0 + at$ , vamos calcular a integral de ordem  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$ , utilizando a definição de Riemann-Liouville, para um intervalo entre 0 e  $t$ .

$$\begin{aligned} (I_{a+}^{\alpha} v)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{v_0 + ax}{(t-x)^{1-\alpha}} dx \\ &= \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \left. \frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha} \right|_0^t + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx \\ &= \frac{v_0 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Resolvendo a primeira integral da equação (3.61), temos:

$$\frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx = \frac{v_0}{\Gamma(\alpha)} \left. \frac{(t-x)^{\alpha}}{\alpha} \right|_0^t = \frac{v_0 t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}. \quad (3.62)$$

A segunda integral da equação (3.61) pode ser resolvida usando uma substituição, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t x(t-x)^{\alpha-1} dx &= \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \left[ \frac{x(t-x)^\alpha}{\alpha} \Big|_0^t - \int_0^t \frac{(t-x)^\alpha}{\alpha} dx \right] \\ &= \frac{a}{\Gamma(\alpha)} \left[ 0 - \frac{(t-x)^{\alpha+1}}{\alpha(\alpha+1)} \Big|_0^t \right] = \frac{at^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Portanto, das equações (3.62) e (3.63), temos:

$$(I_{a+}^\alpha v)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{v_0 + ax}{(t-x)^{1-\alpha}} dx = \frac{v_0 t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{at^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad (3.64)$$

que para o caso  $\alpha = 1$  recupera a equação horária do espaço, a menos da constante  $s_0$ , ou seja, a função  $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ .

### 3.4.3 Representação gráfica das equações do movimento para a formulação fracionária

As soluções gráficas das equações obtidas na seção anterior para as funções horárias do movimento serão comparadas com sua formulação clássica através de simulações numéricas para diferentes parâmetros  $\alpha$ , que definem a ordem da derivada fracionária.

A Figura 4 apresenta os gráficos da equação (3.57) para  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 1$ , considerando as constantes  $v_0 = -5$  e  $a = 1$ .

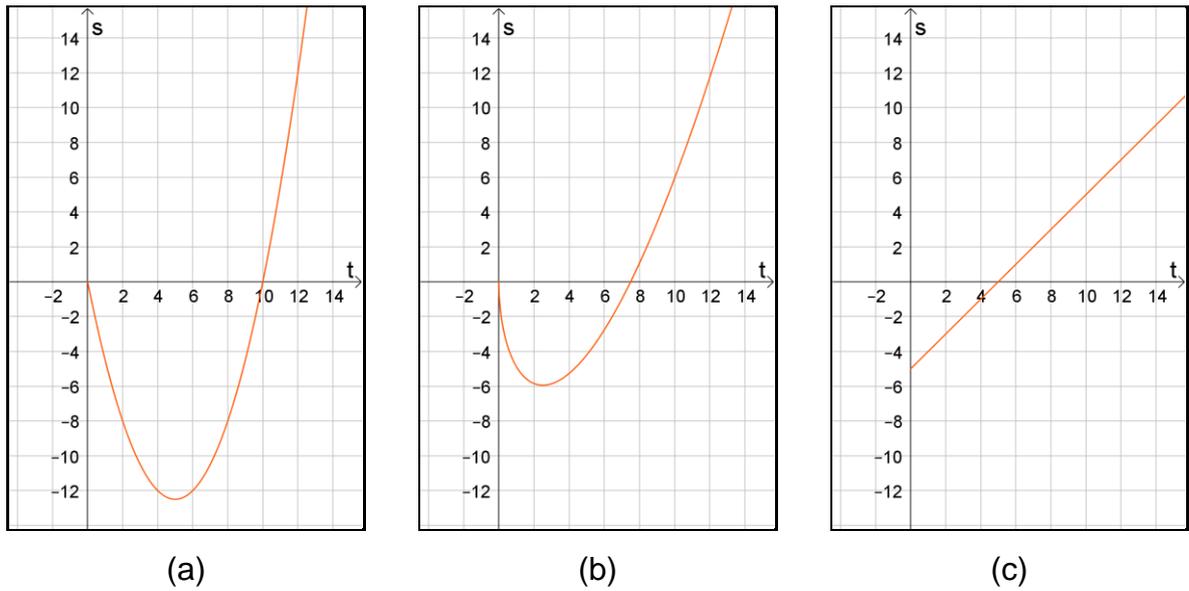


Figura 4 - Gráficos da equação (3.57) (a)  $\alpha = 0$ ; (b)  $\alpha = 0,5$ ; (c)  $\alpha = 1$ .

Podemos ver na Figura 4 que, quando temos  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ , retornamos para os casos conhecidos das funções polinomiais de graus 2 e 1, respectivamente. Porém, no caso  $\alpha = 0,5$ , é possível ver uma figura intermediária entre uma parábola e uma reta.

Na Figura 5, veremos os gráficos para os valores de  $\alpha$  de 0 até 1, com incremento de 0,1.

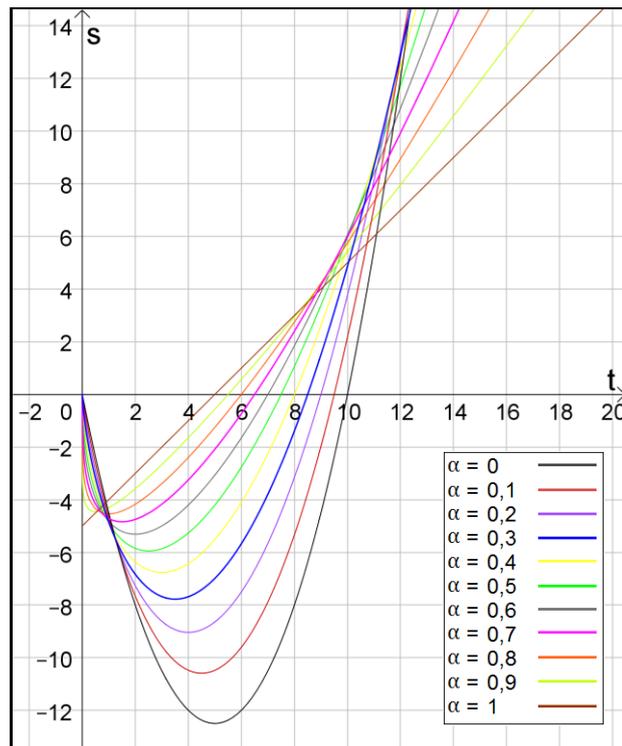


Figura 5 - Gráfico da equação (3.57) para alguns valores de  $\alpha$ , com  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Na Figura 5 temos os gráficos dos casos intermediários entre  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$ . No caso  $\alpha = 0$  temos uma parábola e em todos os casos entre 0 e 1, curvas que se assemelham a parábolas, mas com o eixo de simetria distorcido, de modo que conforme  $\alpha$  se aproxima de 1, essas curvas aproximam-se cada vez mais de uma reta.

A Figura 6 apresenta os gráficos das equações (3.57) e (3.59) considerando novamente  $a = 1$ , para as ordens  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1,5$  e  $\alpha = 2$ . A equação (3.57) foi utilizada nos casos  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 0,5$ . Nos outros casos, foi utilizada a equação (3.59). Para esses gráficos, foi considerado  $v_0 = 0$ .

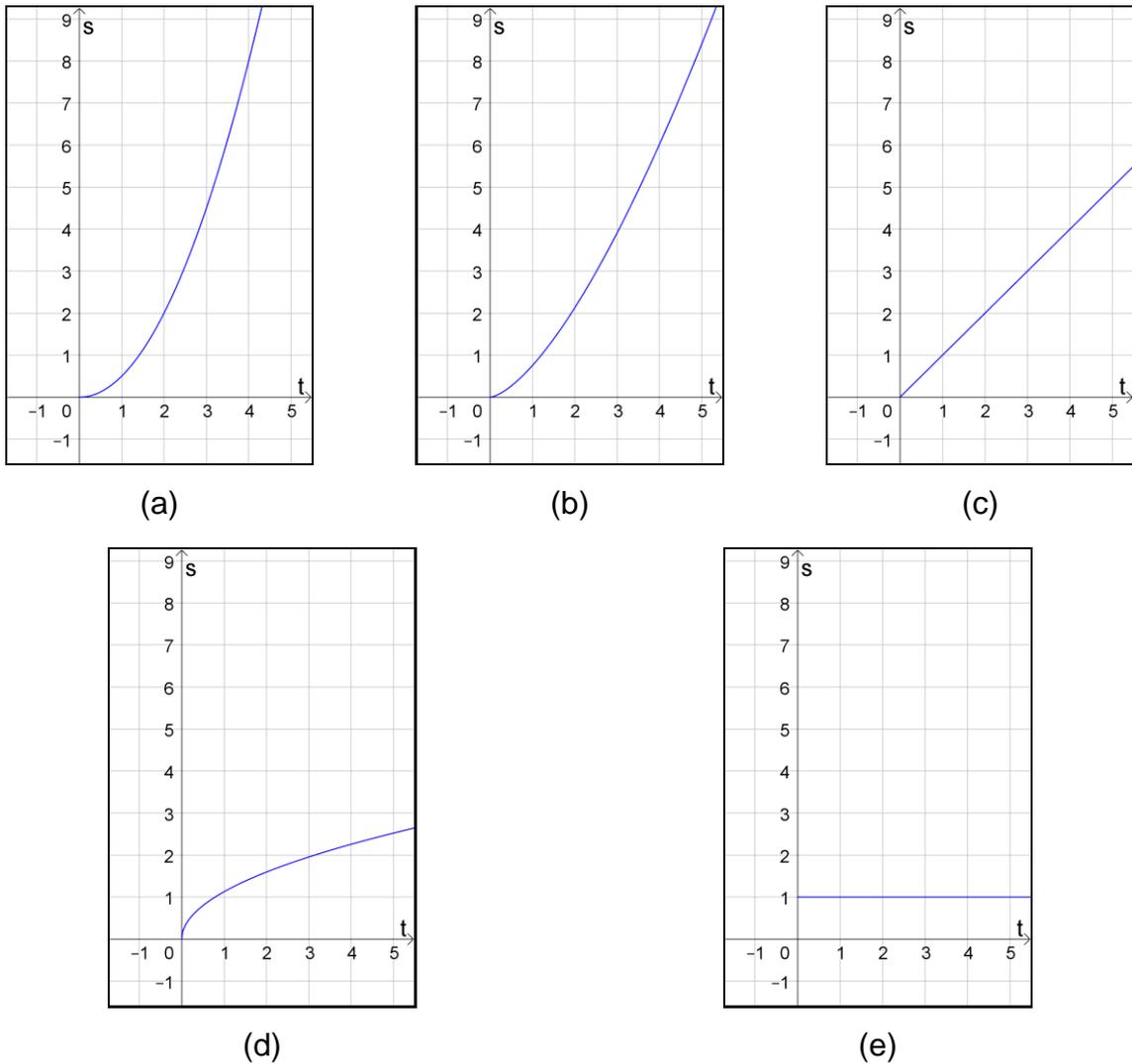


Figura 6 - Gráficos das equações (3.57) e (3.59) (a)  $\alpha = 0$ ; (b)  $\alpha = 0,5$ ; (c)  $\alpha = 1$ ; (d)  $\alpha = 1,5$ ; (e)  $\alpha = 2$ .

Na Figura 6a, vemos uma função quadrática, que é a equação horária da posição quando há aceleração constante. Na Figura 6c, temos uma função afim, que é a primeira derivada da equação horária da posição, ou seja, a equação horária da velocidade. Na Figura 6e, temos uma função constante, um resultado que coincide com o fato de que a segunda derivada da função horária da posição é a aceleração, que, nesse caso, é constante.

Já na Figura 6b e na Figura 6d temos os casos intermediários do cálculo fracionário, com  $\alpha = 0,5$  e  $\alpha = 1,5$ .

Portanto, observamos que a utilização do cálculo de ordem arbitrária para modelar as equações horárias do movimento recupera, para os casos inteiros, as situações do cálculo clássico de ordem inteira, como pode ser visto graficamente. Fica aqui o questionamento acerca da interpretação física para os casos de ordem não inteira exibidos nas Figuras 5 e 6. Seria interessante, em um trabalho futuro, a realização de um experimento para comparação dos dados com os resultados obtidos via cálculo fracionário, como foi feito em Ebaid (2011) na modelagem do movimento dos projéteis via cálculo fracionário.



## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O cálculo fracionário, apesar de ter suas origens junto com o cálculo de ordem inteira, ganhou maior popularidade nas últimas décadas e, com certeza, deve vir a ser muito mais estudado nas próximas, já que muitos dos problemas ainda estão em aberto.

O objetivo desse trabalho foi descrever e analisar, qualitativa e quantitativamente, alguns problemas clássicos através do cálculo fracionário. A escolha dos problemas analisados está relacionada a conteúdos que podem ser trabalhados de forma interdisciplinar na educação básica.

Nesse trabalho, através da formulação de Riemann-Liouville e de Caputo, foram estudados os problemas da tautócrona, do sistema Lotka-Volterra, do decaimento radioativo e das equações horárias do movimento. Através desse estudo foi possível observar e descrever alguns fenômenos com a utilização do cálculo fracionário, sugerindo que a utilização de ordens não inteiras na representação de alguns fenômenos pode gerar benefícios. Entretanto, outros estudos são necessários para quantificação desses benefícios.

Na solução do problema da tautócrona, proposta por Abel, temos que o cálculo fracionário é uma ferramenta que torna a solução muito mais simples, elegante e direta.

Também vimos a aplicação do cálculo fracionário no sistema de Lotka-Volterra, onde a utilização de ordens arbitrárias apresenta uma vantagem de interpretação sobre a ordem inteira. No caso convencional de ordem 1, o modelo admite que uma população uma vez extinta pode voltar a existir, conforme discutido no Capítulo 3. No entanto, através da abordagem do cálculo fracionário, escolhendo-se convenientemente as ordens das derivadas, podemos evitar esse tipo de resultado, obtendo um sistema fisicamente apropriado.

Ao utilizarmos o cálculo de ordem não inteira nas equações do decaimento radioativo, encontramos uma formulação que recupera a solução usual do cálculo clássico para a ordem  $\alpha = 1$ . Para as ordens  $\alpha$ , com  $0 < \alpha < 1$ , temos a situação que descreve o decaimento radioativo não exponencial. Essa formulação mostrou-se

adequada a resultados experimentais, conforme apresentado em Lemes, Santos e Braga (2013)

Adicionalmente, as equações horárias do movimento foram formuladas através do cálculo fracionário. Além de recuperar o caso clássico utilizando a derivada de ordem inteira, essa formulação contempla situações intermediárias, embora ainda sem interpretação física.

Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a obtenção de dados experimentais para comparação com os resultados obtidos via cálculo fracionário nas equações horárias do movimento, assim como encontrados no trabalho de Ebaid (2011).

Além disso, sugerimos como pesquisa futura a utilização do cálculo fracionário para modelar o sistema de Lotka-Volterra com mais do que duas espécies, como já abordado utilizando o cálculo clássico; ver Nascimento e Silva (2016).

## REFERÊNCIAS

AGARWAL, R. P. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. **Comptes rendus de l'académie des sciences**. Paris, v. 236, p. 2031–2032, 1953.

BHATTI, M. Fractional Schrödinger wave equation and fractional uncertainty principle. **International journal of contemporary mathematical sciences**. v. 2, n. 17-20, 943-950, 2007.

BUTERA, S; DI PAOLA, M. A physically based connection between fractional calculus and fractal geometry. **Annals of physics**. v. 350, 146-158, 2014.

CAMARGO, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**. Tese de doutorado. Campinas: Unicamp, 2009.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA; E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: LF Editorial, 2015.

CAMARGO, R. F.; CHIACCHIO, A. O.; OLIVEIRA, E. C. Differentiation to fractional orders and the fractional telegraph equation. **Journal of mathematical physics**. 49, 033505, 2008.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C.; GOMES, F. A. M. **The replacement of Lotka-Volterra model by a formulation involving fractional derivatives**. Relatório de pesquisa. Campinas: Unicamp, 2007.

CASTRO, L. M. **O cálculo variacional e as curvas cicloidalis**. Dissertação de mestrado. Brasília: Universidade de Brasília, 2014.

DAVID, S. A.; LINARES, J. L.; PALLONE, E. M. J. A. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. **Revista brasileira de ensino de física**. v. 33, n. 4, 4302, 2011.

DEBNATH, L. Recent applications of fractional calculus to science and engineering. **International journal of mathematics and mathematical sciences**. v. 2003, n. 54, 3413-3442, 2003.

EBAID, A. Analysis of projectile motion in view of fractional calculus. **Applied mathematical modelling**. v. 35, n. 3, 1231-1239, 2011.

ELSHEHAWAY, E. F.; ELBARBARY, E. M. E.; AFIFI, N. A. S.; EL-SHAHED, M. On the solution of the endolymph equation using fractional calculus. **Applied mathematics and computation**. v. 124, n. 3, 337-341, 2001.

GOMES, A. V. **Transformadas integrais, modelagem fracionária e o sistema de Lotka-Volterra**. Dissertação de mestrado. Botucatu: Unesp, 2013.

GOULART, A. G. O.; LAZO, M. J.; SUAREZ, J. M. S.; MOREIRA, D. M. Fractional derivative models for atmospheric dispersion of pollutants. **Physica A: Statistical mechanics and its applications**. v. 477, 9-19, 2017.

GRIGOLETTO, E. C.; OLIVEIRA, E. C. Fractional versions of the fundamental theorem of calculus **Applied mathematics**. v. 4, n. 7, 23-33, 2013.

IONESCU, C.; MACHADO, J. A. T.; KEYSER, R. Fractional-order impulse response of the respiratory system. **Computers & mathematics with applications**. v. 62, n. 3, 845-854, 2011.

KYRIAKOVA, V. S. **Generalized fractional calculus and applications**. Harlow: Longman Sci, 1994.

LEMES, N. H. T.; SANTOS, J. P. C.; BRAGA, J. P. O uso de derivada fracionária na descrição do decaimento não exponencial. **Sigmae**. Alfenas, v. 2, n. 2, 14-20, 2013.

LOTKA, A. **Elements of physical biology**. Baltimore: Williams and Wilkins Company, 1925.

MACHADO, J. A. T; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. **Journal of fractional calculus & applied analysis**. v. 6, n. 1, 73-80, 2003.

MACHADO, J. A. T.; KIRYAKOVA, V.; MAINARDI, F. Recent history of fractional calculus. **Communications on nonlinear science and numerical simulation**. v. 16, n. 3, 1140-1153, 2011.

MILLER, K. S.; ROSS, B. **An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1993.

NASCIMENTO, T. S.; SILVA, J. M. Modelagem da interação presa-predador para multi-espécies. **Revista científica vozes dos vales**. n. 10, ano V, 2016.

OLDHAM, H. B.; SPANIER, J. **The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order**. 2. ed. New York: Dover Books, 2006.

OLIVEIRA, E. C.; MACHADO, J. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. **Mathematical problems in engineering**. 1-6. 2014.

OLIVEIRA, H. S. **Introdução ao cálculo de ordem arbitrária**. Dissertação de mestrado. Campinas: Unicamp, 2010.

PODLUBNY, I. **Fractional differential equations**, Mathematics in Science and Engineering. San Diego: Academic Press, 1999.

PODLUBNY, I. Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. **Journal of fractional calculus & applied analysis**. v. 5, n. 4, 367-386, 2002.

PRABHAKAR, T. R. A singular integral equation with generalized Mittag-Leffler function in the kernel. **Yokohama math journal**. v. 19, 7-15, 1971.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. **Revista brasileira de ensino de física**. v. 37, n. 3, 3305, 2015a.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. Solução da equação de Bessel via cálculo fracionário. **Revista brasileira de ensino de física**. v. 37, n. 3, 3308, 2015b.

SPROTT, J. C. Dynamical models of love. **Nonlinear dynamics, psychology, and life sciences**. Madison: Universidade de Wisconsin. v. 8, n. 3, 2004.

TARASOV, V. E. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. **Annals of physics**. v. 323, n. 11, 2756-2778, 2008.

TARASOV, V. E. Geometric interpretation of fractional-order derivative. **Fractional calculus & applied analysis**. v. 19, n. 5, 1200-1221, 2016.

TARASOVA, V. V.; TARASOV, V. E. Concept of dynamic memory in economics. **Communications in nonlinear science and numerical simulation**. v. 55, 127-145, 2018.

VIRCHENKO, N.; FEDOTOVA, I. **Generalized associated Legendre functions and their applications**. Singapura: World Scientific, 2001.

VOLTERRA, V. Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically. **Nature**. v. 118, 558-560, 1926.

WANG, J.; HU, Y. On chain rule in fractional calculus. **Thermal science**. v. 20, n. 3, 803-806, 2016.

## Anexo A – DERIVADAS E INTEGRAIS DE ORDEM $\alpha = 1/2$ DE ALGUMAS FUNÇÕES

Na Tabela A.1 são apresentadas as derivadas e integrais de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  de algumas funções através da definição de Riemann-Liouville, conforme equações (2.38), (2.39), (2.46) e (2.47). Essa tabela pode ser encontrada em Oldhan e Spanier (2006).

Tabela A.1 – Derivadas e integrais de ordem  $\alpha = \frac{1}{2}$  de algumas funções

Função	Derivada de ordem $\alpha = \frac{1}{2}$	Integral de ordem $\alpha = \frac{1}{2}$
0	0	0
C, constante	$\frac{C}{\sqrt{\pi x}}$	$2C \sqrt{\frac{x}{\pi}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	0	$\sqrt{\pi}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} x$
x	$2 \sqrt{\frac{x}{\pi}}$	$\frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$
$x^2$	$\frac{8x^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{\pi}}$	$\frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}$
$x^n, n = 0, 1, 2, 3...$	$\frac{(n!)^2(4x)^n}{(2n)! \sqrt{\pi x}}$	$\frac{(n!)^2(4x)^{n+\frac{1}{2}}}{(2n+1)! \sqrt{\pi}}$
$\ln(x)$	$\frac{\ln(4x)}{\sqrt{\pi x}}$	$2 \sqrt{\frac{x}{\pi}} (\ln(4x) - 2)$
$\sqrt{x} \ln(x)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} (\ln(\frac{x}{4}) + 2)$	$\frac{x\sqrt{\pi}}{2} (\ln(\frac{x}{4}) + 1)$
$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{x}$	$\sqrt{\pi} \ln(\frac{x}{4})$