

A utilização de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem de matemática

Lucimar Aparecida Mascarin

Dissertação de Mestrado do Programa Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: _____

Lucimar Aparecida Mascarin

A utilização de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem de matemática

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Orientadora: Profa. Dra. Edna Maura Zuffi

USP – São Carlos
Outubro de 2017

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MM115u Mascarin, Lucimar Aparecida
u A utilização de atividades lúdicas e exploratórias
no ensino e aprendizagem de matemática / Lucimar
Aparecida Mascarin; orientador Edna Maura Zuffi. --
São Carlos, 2017.
77 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de
Computação, Universidade de São Paulo, 2017.

1. atividades lúdicas e exploratórias. 2.
aprendizagem significativa. 3. trigonometria. 4.
círculo. I. Zuffi, Edna Maura , orient. II. Título.

Lucimar Aparecida Mascarin

The use of playful and exploratory activities in teaching and learning mathematics

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Professional Master Degree Program in Mathematics in National Network

Advisor: Profa. Dra. Edna Maura Zuffi

**USP – São Carlos
October 2017**

AGRADECIMENTOS

Inicialmente é a Deus que agradeço pela execução deste trabalho; Ele foi a minha fortaleza, me deu a sabedoria de que precisava para ir além dos meus limites e não me deixou faltar forças para ir até o fim.

Agradeço e dedico este trabalho ao meu companheiro, Tércio, a quem peço desculpas pela minha ausência nesses anos. Com paciência, carinho e companheirismo, sempre esteve ao meu lado, pela paciência que teve em ouvir meu desespero, toda vez que retornava de São Carlos, me proporcionando momentos agradáveis.

Agradeço também aos meus filhos, Marcelo e Mariana, por sempre me incentivarem, e mesmo na minha ausência por saberem crescer positivamente.

Agradeço a minha mãe, Luzia, que me ensinou a lutar e que sempre diz que o trabalho enobrece o homem. E também as minhas irmãs, colegas de trabalho que, incansavelmente me viram estudar, e sempre se preocupavam, encorajando-me e apostando nas minhas conquistas. Agradeço a todos, principalmente àqueles que estiveram mais presentes como a Valdirene, Ailton, Edicélia e Juliana, amigos de trabalho, que muitas vezes vendo meu cansaço, me animaram e afirmaram que tudo daria certo; são modelos de seres humanos, pelas quais sempre tive grande admiração.

Agradeço aos amigos, presenteados com este curso, que me auxiliaram nos momentos mais difíceis, com toda sabedoria e integridade. Aos meus alunos do ensino básico por me motivarem a buscar novos conhecimentos e aperfeiçoar na prática de ensinar matemática.

Não posso esquecer de meus professores, sem os quais eu jamais estaria aqui. Na primeira série, Dona Evanira Corsi Vivarelli, magnífica. Meu inesquecível professor de matemática: Sr Alberto, onde minha paixão pela disciplina floresceu. Agradeço a todos os professores do ICMC, à minha orientadora Edna, pela paciência, determinação e exemplo de profissionalismo. E não poderia esquecer da professora Ires. Não tenho palavras para agradecer-lá pela oportunidade, pela insistência, pelas palavras de conforto, sua amizade e seus ensinamentos. Que Deus continue a abençoá-la por muitos e muitos anos de sua vida.

Pela oportunidade única, agradeço a SBM pela criação do *Profmat*, a CAPES pelas bolsas concedidas e à USP pela participação no programa.

*“A mente que se abre a uma nova idéia
jamais volta ao seu tamanho original”*

(Albert Einstein)

RESUMO

MASCARIN, Lucimar Aparecida. **A utilização de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem de Matemática.** 2017. 77p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

A partir de estudos acerca das teorias sócio-histórico-culturais para o ensino e a aprendizagem, e de uma experiência de aplicação das mesmas na Educação Matemática, apresenta-se uma sequência didática envolvendo noções de semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, comprimento da circunferência e área do círculo, com o uso de atividades lúdicas e exploratórias. A construção dessa sequência se justifica como algo relevante para a sala de aula, porque se percebe que os conteúdos matemáticos apresentados de forma tradicional já não são atrativos para os alunos. Esta dissertação, aproximando-se de uma pesquisa de caráter qualitativo, busca evidenciar o processo de desenvolvimento dessa sequência didática e sua aplicação em uma sala do 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola pública. Como resultados, verificou-se que o uso de atividades lúdicas e exploratórias propiciou um maior envolvimento dos alunos na busca de conhecimentos acerca dos temas tratados (e também da professora-pesquisadora), de maneira a despertar o raciocínio crítico e reflexivo, conduzindo-os a uma aprendizagem mais significativa, além de possibilitar o desenvolvimento pessoal quanto a habilidades e atitudes. Conclui-se que é possível fazer um trabalho diferenciado na condução do aluno ao conhecimento, mesmo em salas de aula onde há pouca motivação original dos estudantes, com persistência e maior dedicação docente, e espera-se que esta dissertação possa contribuir para inspirar as atividades didático-pedagógicas de outros professores de Matemática.

Palavras-chave: Atividades lúdicas e exploratórias, aprendizagem significativa, trigonometria, círculo.

ABSTRACT

MASCARIN, Lucimar Aparecida. **The use of playful and exploratory activities in teaching and learning mathematics.** 2017. 77p. Dissertação (Mestrado em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos – SP, 2017.

Based on studies about socio-historical-cultural theories for teaching and learning, and on an experience of applying them in Mathematics Education, a didactic sequence is presented, involving notions of similarity of triangles, trigonometry in the rectangle triangle, the length of the circumference, and the area of the circle, with the use of playful and exploratory activities. The construction of this sequence is justified as relevant, because it is perceived that the mathematical contents presented in a traditional way are no longer attractive for the students. This dissertation, approaching a qualitative research, seeks to highlight the process of development of this didactic sequence and its application in a room of the 9th grade of Elementary School, in a public institution in Brazil. As results, it was verified that the use of playful and exploratory activities led to a greater involvement of the students in the search of knowledge about the subjects treated (and also of the teacher-researcher), in order to awaken critical and reflexive reasoning, leading them to more meaningful learning, and to enable personal development in skills and attitudes. It was concluded that doing a differentiated work in unmotivated classrooms is something feasible, in order to lead the students towards meaningful knowledge, and it is hoped that this dissertation can contribute to inspire the didactic-pedagogical activities of other Mathematics teachers.

Keywords: Exploratory and playful activities, meaningful learning, trigonometry, circle.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Fig. 1 – Dedução das relações métricas no triângulo retângulo.....	41
Fig. 2 – Problemas do Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014-2017).....	43
Fig. 3 _ Avaliação Mensal sobre relações métricas no triângulo retângulo.....	44
Fig. 4 – Avaliação da Aprendizagem em Processo.....	45
Fig. 5 – Quadro comparativo de notas do 9º ano, no 2º e 3º bimestre.....	46
Fig. 6 – Triângulos construídos com os mesmos ângulos e medida de lados diferentes.....	48
Fig. 7 – Tabelas com os cálculos das divisões dos lados dos triângulos.....	48
Fig. 8 – Exercícios e aplicações 17.10.2016.....	49
Fig. 9 – Construção do quadrado e do triângulo equilátero para obter valores de seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°.....	50
Fig. 10 – Alguns exercícios realizados nos dias 19 e 20.10.2016.....	51
Fig. 11 - Alunos medindo altura de árvores e postes usando teodolito confeccionado por eles.....	52
Fig. 12 - Ferramentas de Trabalho do Pedreiro.....	53
Fig. 13 – Algumas peças do jogo Trigominó.....	54
Fig.14- Alunos jogando Trigominó.....	55
Fig. 15 – Grupos medindo comprimento e diâmetro de alguns objetos circulares.....	56
Fig. 16 – Tabela e conclusão do comprimento da circunferência através dos valores obtidos pelas medições do contorno e do diâmetro de cada objeto circular.....	56
Fig. 17 – Questão 144 relacionada com o trabalho sobre circunferência.....	58
Fig. 18 – Correção da prova final (4º bimestre) de um aluno do 9º ano B.....	59

SUMÁRIO

Introdução	19
1 Escolhas Metodológicas e os Alunos	21
1.1 A Pesquisa Qualitativa.....	21
1.2 Tipos de Pesquisa Qualitativa em Educação.....	22
1.2.1 Pesquisa do tipo etnográfico.....	22
1.2.2 Estudo de caso.....	23
1.2.3 Pesquisa-ação.....	23
1.3 Caracterização Metodológica desta Pesquisa: a escola e os alunos.....	24
2 O Enfoque Sócio-Histórico da Psicologia e as Atividades Exploratórias e Lúdicas	
2.1 Vygotsky: O homem e a tarefa.....	27
2.1.1 Mediação.....	27
2.1.2 Processo de internalização.....	28
2.2 Zona de desenvolvimento proximal.....	29
2.3 Formação de conceitos e o ensino escolar.....	30
2.4 Significado e Sentido.....	31
2.5 Criatividade.....	31
2.6 Conteúdos escolares e desenvolvimento cognitivo.....	31
2.7 Atividade e consciência.....	32
2.8 O Conhecimento Matemático e a Teoria Sócio-Histórica: pontos de aproximação... 33	
3 A Proposição de uma Sequência Didática e sua Aplicação	39
3.1 A Fase do Planejamento.....	39
3.1.1 Revisão de semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras.....	40

3.1.2	Dedução das Relações Métricas no triângulo retângulo usando recortes no papel sulfite.....	41
3.1.3	Continuação das relações métricas no triângulo retângulo.....	42
3.1.4	Avaliação Mensal sobre o Conteúdo (28.09.2016).....	44
3.1.5	Avaliação de Aprendizagem em Processo (29.09.2016).....	44
3.1.6	Correção, comentários e devolução das provas (03.10.2016).....	46
3.1.7	Razões trigonométricas no triângulo retângulo.....	47
3.1.8	Aula sobre medidas de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30°, 45° e 60°).....	49
3.1.9	Atividades com teodolito e medidas de objetos externos.....	51
3.1.10	Confecção e uso do Trigominó.....	53
3.1.11	Estudo da circunferência.....	55
3.1.12	Vídeo: Roda do Sonho (27.10.2016).....	57
3.1.13	Leitura do livro paradidático.....	58
3.1.14	Avaliação do Saresp.....	59
3.1.15	Avaliação Bimestral (01.12.2016).....	59
4	Reflexões sobre a Aplicação.....	61
4.1	O Desenvolvimento dos Alunos.....	61
4.2	Como ficou a relação professora- alunos.....	65
4.3	Formação Profissional Docente	65
	Conclusão.....	67
	Referências Bibliográficas.....	71
	Anexo A.....	73

INTRODUÇÃO

Atualmente os professores enfrentam o desafio de dar aulas para alunos pouco participativos, devido a muitos atrativos que recebem de outras atividades sociais e das tecnologias de comunicação. Sendo assim, esta professora-pesquisadora viu a necessidade de buscar novas estratégias e metodologias de ensino que, ao mesmo tempo em que deveriam ser atraentes aos alunos, pudessem proporcionar-lhes uma aprendizagem significativa. Foi aí que constatou que deveria buscar seu aprimoramento didático-pedagógico, com leituras e reflexões, sobre atividades exploratórias para a sala de aula.

Nesse sentido, esta pesquisa, a qual muito se aproxima de uma pesquisa-ação, mostrou-se importante nesse aprimoramento, porque busca integrar os avanços matemáticos, obtidos no decorrer do curso de mestrado profissional, com uma possibilidade de melhoria em sala de aula, acreditando ser possível a realização de uma tarefa com atividades exploratórias e lúdicas, em Matemática, em uma sala de aula pouco participativa.

Imediatamente, ocorreram as seguintes dúvidas: como seria o aproveitamento, quanto aos conteúdos matemáticos de relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria no triângulo retângulo, comprimento e área do círculo? Seria possível propor atividades diferenciadas, de caráter exploratório e lúdico, sem perder o foco no desenvolvimento dos vários conteúdos estabelecidos pelo currículo escolar?

Esse questionamento nos levou às leituras e à construção de uma sequência didática, analisada mediante os referenciais teóricos estudados e os dados obtidos nessa experiência, que seria aplicada pela professora-pesquisadora (formada em Matemática pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de São José do Rio Pardo, no ano de 1989, com pós-graduação *latu-sensu* em Matemática, no ano 2000, pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guaxupé; Psicopedagoga pela PUC-Minas de Poços de Caldas, em 2009; trabalha na rede pública do Estado de São Paulo há 28 anos, e na rede municipal de Divinolândia -SP há 19 anos; já atuou na rede particular por 7 anos, como coordenadora pedagógica na escola do Estado, também por 7 anos, e como diretora de escola municipal, durante 3 anos) . Este texto traz, então, o relato dessa construção e dos resultados obtidos, os quais poderão ser úteis a outros professores para ampliarem sua formação didático-pedagógica.

No capítulo 1, será abordada a questão das pesquisas qualitativas. Com essa leitura, pode-se perceber que este trabalho se aproxima de uma pesquisa-ação. Além desse tipo de investigação, também serão caracterizados a pesquisa do tipo etnográfico e pesquisas

qualitativas, em geral. Serão apresentados também os sujeitos desta investigação e o ambiente escolar que frequentavam.

No capítulo 2, será apresentada a metodologia de ensino adotada, com atividades exploratórias e lúdicas, mostrando a importância do renovar a ação pedagógica e sua relação com o aprender. Para melhor posicionar essa relação, será apresentada, brevemente, a teoria Vygotskiana de desenvolvimento e aprendizagem, que salienta os aspectos históricos e culturais do desenvolvimento humano.

A sequência didática aplicada aos alunos será apresentada no capítulo 3 e seus resultados, analisados no capítulo 4. Mediante uma reflexão sobre a ação pedagógica desta professora-pesquisadora, observando-se seu trabalho anterior a esses estudos, fez-se necessária a construção dessa sequência, que buscasse desenvolver uma aprendizagem mais significativa, através do uso de atividades lúdicas e exploratórias, integrando os alunos no trabalho em equipe.

Finaliza-se o trabalho com algumas reflexões relacionadas à formação profissional da professora-pesquisadora, mostrando os resultados junto aos alunos e suas conquistas, em especial quanto ao conhecimento dos conteúdos matemáticos, teóricos e práticos, bem como quanto ao desenvolvimento dos conhecimentos da professora, para o ensino e a aprendizagem em Matemática.

1. Escolhas Metodológicas e os Alunos

O objetivo deste capítulo é mostrar as escolhas metodológicas para este trabalho, bem como caracterizar os sujeitos envolvidos na pesquisa.

Esta investigação aproxima-se de uma abordagem qualitativa e, mais especificamente, como uma pesquisa-ação. Como saber se um trabalho é ou não qualitativo? Apenas por não apresentar dados numéricos (quantidades)? Mas, se informações forem quantificadas, deixaria de ser qualitativo? Estas perguntas foram feitas à professora-pesquisadora para que se buscasse compreender metodologias possíveis de serem utilizadas numa investigação científica e, com o estudo da literatura a esse respeito, ampliou os conhecimentos da mesma. Espera-se que a leitura deste trabalho também traga ao leitor uma noção a este respeito.

1.1. A Pesquisa Qualitativa

Segundo André (1995), Dilthey, um historiador do final do século XIX, foi um dos primeiros a questionar a perspectiva positivista no estudo dos fenômenos humanos. Ele argumentava que esses fenômenos são muito complexos e que o contexto particular em que ocorre o fato é um elemento essencial à sua compreensão. Outros pesquisadores também começaram esse questionamento da análise das questões humanas e diziam que o foco da investigação deve ser a compreensão dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações. Defendiam a perspectiva idealista-subjetivista para as pesquisas.

Tal perspectiva busca a interpretação em lugar da mensuração, a descoberta em lugar da constatação, valoriza a indução e assume que fatos e valores estão intimamente relacionados. Nessa perspectiva, torna-se impossível que o pesquisador tenha uma postura neutra. Ela também pode ser conhecida como fenomenológica e deu origem à abordagem qualitativa de pesquisa, na qual se incluem as ideias de interacionismo simbólico, etnometodologia e etnografia. Será caracterizada, brevemente, cada uma dessas ideias:

Fenomenologia: preconiza observar o mundo sob a ótica do sujeito, suas experiências cotidianas e os significados atribuídos às mesmas.

Interacionismo simbólico: assume que, a partir das interações sociais, o indivíduo interpreta a realidade e a si mesmo.

Etnografia: segundo Spradley (1979, apud ANDRÉ, 1995), a principal preocupação da etnografia também é com os significados que têm as ações e os eventos, para as pessoas ou os

grupos estudados. Porém, o que a caracteriza, diferentemente da fenomenologia, é a tentativa de descrição da *cultura* em que o fenômeno se insere, um contexto a ser detalhado. O etnógrafo acaba por partilhar significados com o grupo cultural estudado.

Essas concepções demoraram para ganhar destaque na área da Educação, porque as pesquisas, na época, eram dominadas por psicólogos que tinham forte tendência experimentalista. Os métodos qualitativos ganharam popularidade em nível mundial, principalmente a partir da década de 1960, porque queriam relatar todos os pontos de vista, inclusive dos que não tinham poder. O momento político era propício para isso, uma vez que estavam acontecendo várias lutas pela igualdade de direitos.

André (1995) afirma que reservaria os termos quantitativo e qualitativo para diferenciar técnicas de coleta e utilizaria denominações mais precisas para determinar o tipo de pesquisa realizado, isso porque a autora entende que o termo pesquisa qualitativa tem sido usado indiscriminadamente para qualquer pesquisa que não seja quantitativa.

Um exemplo importante pode ser notado no resultado de avaliações onde o professor tem a necessidade de quantificar a aprendizagem e, nem por isso o processo deixa de ser qualitativo. Em cada interferência, em cada questionamento e/ou reflexão, existe uma significância, existe um processo formativo que torna a atividade qualitativa.

1.2. Tipos de Pesquisas Qualitativas em Educação

1.2.1 Pesquisa do tipo etnográfico

Para André (1995), a etnografia é o estudo da cultura e sociedade; é uma tentativa de descrição cultural.

Segundo Wolcott (1988, apud ANDRÉ, 1995), para estudos da área da educação, não é necessário que se faça uma etnografia por completo; são suficientes estudos *do tipo etnográfico*. Estes ocorrem quando são utilizadas algumas técnicas tradicionais da etnografia, que são a observação participante, a entrevista intensiva e a análise de documentos.

Ainda segundo André (1995), na observação participante, o pesquisador sempre tem um grau de interação com a situação estudada e é também por meio desta interação que é feita a coleta e análise de dados. Com a entrevista intensiva, ele pode aprofundar as questões e esclarecer os problemas observados. Com a análise de documentos, é possível completar as

informações coletadas através de outras fontes, contextualizar o fenômeno e explicitar suas vinculações mais profundas.

Uma outra característica importante é que a pesquisa etnográfica dá ênfase no processo, ao se preocupar com o significado que as pessoas dão às suas experiências e ao mundo que as cerca. Essa característica também é incorporada nas *do tipo etnográfico*. O que esse tipo de pesquisa visa é a descoberta de novos conceitos, novas relações, novas formas de entendimento da realidade.

1.2.2 Estudo de caso

Segundo André (1995), o estudo de caso enfatiza o conhecimento do particular. O interesse do pesquisador é compreender um objeto delimitado, estando atento ao contexto, às suas relações e à sua dinâmica. Para que seja relevante esse tipo de pesquisa, é preciso que eleja um caso que seja diferenciado em relação aos fenômenos usuais.

Para ser reconhecido um estudo de caso etnográfico, é preciso preencher os requisitos da etnografia e ser bem delimitado, com a escolha, bem justificada, de uma pessoa ou um grupo social, por exemplo.

1.2.3 Pesquisa-ação

Segundo André (1995), Kurt Lewin foi o criador dessa linha de investigação e pretendia investigar as relações em algum tipo de intervenção na realidade e conseguir mudanças em atitudes e comportamentos dos indivíduos. Em 1944, já descrevia seu processo como análise, coleta de dados e conceituação dos problemas, planejamento da ação, execução e nova coleta de dados para avaliá-la, com a repetição desse ciclo tantas vezes quantas fossem necessárias para a mudança ocorrer.

Segundo Corey (1953, apud ANDRÉ, 1995), um exemplo prático da pesquisa-ação no ambiente escolar é quando o professor busca alterar o nível de aprendizagem de sua sala, e para isso, faz uso de nova metodologia. Faz uma análise prévia para diagnosticar, e com um processo de intervenção planejada, vai coletando dados, analisando, intervindo, relatando e refazendo todo o processo.

Segundo Elliot (1989, apud ANDRÉ, 1995), esse tipo de pesquisa pode seguir várias linhas, tendo entre elas um caráter diagnóstico, uma preocupação com o currículo, ou

podendo, ainda, ser voltada para o desenvolvimento profissional do professor. Pode ser muito apropriada para discutir a formação continuada de professores e a educação de adultos.

Para Barbier (1985, apud ANDRÊ, 1995), dentro dessa vertente, desenvolveu-se uma linha denominada “pesquisa participante ou participativa”. Nesta, há um envolvimento dos participantes e a necessidade de uma devolutiva sistemática para resultar numa melhoria para um grupo. Existe ainda, a corrente pesquisa-ação institucional, com o objetivo de tornar as relações sociais mais justas numa dada instituição, e a corrente investigação colaborativa, em que predomina o trabalho coletivo e a colaboração intensa entre todos os envolvidos.

1.3. Caracterização Metodológica desta Pesquisa: a escola e os alunos

A partir de um diagnóstico de uma sala de aula desta professora-pesquisadora e de uma preocupação em dar aulas mais dinâmicas, em que houvesse mais participação e que fossem menos cansativas, buscou-se alterar o nível de aprendizagem de seus alunos, fazendo-se uso de uma nova metodologia para os alunos e também para a professora. Com muita reflexão durante o curso do mestrado PROFMAT e no trabalho com os alunos, resolveu-se, então, fazer uso de atividades lúdicas e exploratórias no ensino e aprendizagem da Matemática.

Desse modo, esta investigação se aproxima do que foi descrito no item anterior como uma *pesquisa-ação*, em que, a partir de uma análise prévia para diagnóstico, o professor, que passa a investigar a própria prática, faz uma intervenção planejada, coleta dados, analisa e relata o processo dessa intervenção, refletindo sobre o mesmo e sobre possíveis modificações.

Os alunos que fazem parte deste estudo correspondem a uma turma de 9º (nono) ano de uma escola estadual, da cidade de Divinolândia, interior de São Paulo, em que esta professora-pesquisadora atua como docente.

Atualmente essa escola mantém o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, sendo formada por 8 classes do Ensino Fundamental, com um total de 298 alunos, e 10 classes do Ensino Médio, com um total de 380 alunos. O funcionamento se dá nos períodos da manhã e tarde. No período da manhã atende alunos de zona rural, que correspondem a 47% do total. Ainda por conta da localização ou condição sócio-econômica da comunidade que atende, há muita dificuldade em se solicitar pesquisas dos estudantes sobre os conteúdos escolares, uma vez que muitos não têm acesso à internet em casa e usá-la apenas no laboratório de informática da escola não é suficiente.

Quanto ao espaço físico da escola, apresenta treze salas de aula, mais uma de laboratório de Ciências e uma de informática. As salas de aula e os seus demais ambientes estão relativamente conservados, considerando que foram pintadas há pouco tempo. A maior parte das carteiras é frequentemente rabiscada pelos alunos e, portanto, não são bem preservadas. Todas as salas possuem um ventilador e amplas janelas com cortinas, deixando o ambiente mais arejado; são bem iluminadas e, em geral, salvo algumas exceções, seu espaço atende adequadamente ao número de alunos.

Em relação aos recursos didáticos, apenas uma sala de aula contém lousa branca que faz uso de pincel atômico; as demais têm lousa convencional. Também possui um único projetor, montado na sala de informática, que contém 20 computadores para uso dos alunos e um notebook conectado ao projetor. Os professores reclamam que há uma dificuldade em trabalhar vídeos e aulas diferenciadas neste ambiente, pois muitas vezes os computadores estão em manutenção. Além dos equipamentos da sala de informática, a escola possui quatro deles na secretaria, um na direção e três na sala da coordenação. Também possui uma tela de projeção, uma máquina fotográfica, um amplificador e microfone, porém estes aparelhos são usados, na maioria das vezes, em eventos, e não rotineiramente.

A escola também possui uma boa biblioteca, bem montada, com muitas coleções de livros, revistas e vídeos para uso de alunos e professores. Ela, porém, é pouco usada; os alunos não se interessam muito. Todos os anos chegam ótimos materiais, incluindo vários filmes e coletâneas. Nos dois períodos de funcionamento, há um professor responsável por essa sala.

Também possui uma quadra de esportes coberta e uma descoberta, usadas para educação física e jogos de campeonatos internos. Ainda há uma cozinha e uma cantina, as quais os alunos usam como espaço de socialização durante o intervalo, além de um pátio coberto e um descoberto.

Com relação aos aspectos didático-pedagógicos, o planejamento escolar, que ocorre no início de cada ano, nessa escola, prevê avaliações diagnósticas e contínuas, que busquem responder se os objetivos são alcançados junto aos alunos. Além das avaliações diagnósticas, estes participam de avaliações externas, como o SARESP, em nível estadual, e a Prova Brasil, em nível nacional. Os resultados, em 2016, para essa escola, de acordo com o IDESP foram: 9º ano EF: 4,32, dentre uma média de 3,13 para a Diretoria de Ensino a que pertence e de 2,93 para o Estado; no 3º ano do EM: Escola: 3,52, média da Diretoria: 2,43 e do Estado: 2,3.

Além do trabalho regular, a instituição oferece, aos finais de semana, a “Escola da Família”, que dispõe aos alunos e à comunidade, atividades diferenciadas e eventos comemorativos, levando sempre mensagens positivas, através de um trabalho sério e dedicado. Esse projeto tenta se aproximar dos alunos e desenvolver valores essenciais, mas que, muitas vezes, são esquecidos no dia-a-dia.

A gestão da escola apóia os docentes na realização das atividades, é uma gestão firme e participativa.

A escolha da classe e dos alunos envolvidos neste trabalho se deu perante algumas características apresentadas no decorrer das aulas do 9º ano B do Ensino Fundamental, em 2016, sendo elas relacionadas à falta de interesse dos alunos pela Matemática e dificuldades encontradas por eles. No total eram 32 estudantes, sendo 11 meninos e 21 meninas. A média de idade era de 14 anos. No geral, eram alunos que, em questão de aprendizagem, apresentavam grande potencial de evolução. A sala iniciou o ano letivo com pouca participação: por exemplo, os alunos não traziam materiais escolares, alguns não abriam seus cadernos, demoravam a se engajar nas atividades. Após vários meses de convívio com a professora-pesquisadora, já conseguiam se organizar melhor e participar da rotina diária. Porém, antes da realização desta pesquisa, a concentração ainda deixava a desejar, para a maioria deles.

Dois motivos que chamaram a atenção nessa sala, os quais fizeram escolhê-la para a intervenção, foram: a dificuldade de aprendizagem para a maioria dos alunos e o desinteresse pela Matemática, o que eles justificavam por ser muito difícil. Mesmo com essa falta de participação, quando eram questionados, demonstravam uma vontade muito grande de aprender, e quando se mobilizavam, apresentavam rendimento satisfatório nas atividades propostas, tornando-se ativos. Ainda assim, eles apresentavam uma defasagem de conhecimentos, o que gerava dificuldades quanto à aprendizagem.

Em relação ao segundo motivo, essa turma fez os seguintes comentários para esta professora-pesquisadora: gostariam de ter aulas mais dinâmicas, com materiais diferentes, e diziam que a matéria era muito difícil e que deveria haver outro jeito de ensinar. Isto motivou a pesquisa e a escolhê-los, a fim de propor atividades que os ajudassem a desenvolver o raciocínio crítico, levando-os a trabalhar em grupo, debater, a se respeitarem, tornando-os mais participativos, através de uma metodologia nova para eles e para a professora pesquisadora, qual seja, *o uso de atividades exploratórias e lúdicas na aula de Matemática*.

2 O Enfoque Sócio-Histórico da Psicologia e as Atividades Exploratórias e Lúdicas

Neste capítulo, serão apresentados os marcos teóricos desse enfoque, os quais baseiam-se principalmente na *mediação*, no processo de *internalização*, na ideia de *zona de desenvolvimento proximal* e na *formação de conceitos*, tratados por Vygotsky, Luria e Leontiev.

Outros temas abordados serão afetividade, criatividade e atividade em grupo, os quais foram também tratados por esses estudiosos e que são importantes para embasar nossa proposta pedagógica.

2.1 Vygotsky: O homem e a tarefa

Lev S. Vygotsky (1896-1934) graduou-se em direito pela Universidade de Moscou em 1917, fez cursos de Psicologia, Literatura e Filosofia, na Universidade Popular de Shanyavskii. Poucos anos depois estudou Medicina em Moscou e em Karkov. Acumulou um vasto conhecimento sobre as mais variadas áreas do saber. Entre a sua graduação e a sua ida para Moscou, dava aulas de literatura, história da arte e estética; fundou um laboratório de psicologia na escola Normal de Gomel, fazia conferências, escrevia e publicava. Chegou ao Instituto de Psicologia, em Moscou, e juntou-se aos jovens psicólogos pesquisadores. Expôs um trabalho cujas ideias iam de encontro ao pensamento psicológico tradicional e sustentava a necessidade de se procurar analisar o comportamento do homem como um todo.

Por Oliveira (1995), Vygotsky utilizando-se do método dialético, passou a estudar os fenômenos psíquicos e para ele, a tarefa básica da Psicologia deveria ser a de reconstruir a origem e a forma como se deu o desenvolvimento do comportamento humano e da consciência. Sustentava a necessidade de procurar analisar o comportamento do homem como um todo e buscou explicar as formas mais complexas da vida consciente no homem, na sua vida social, no seu trabalho, nas formas histórico-sociais da existência.

2.1.1 Mediação

Uma idéia marxista, e que acabou sendo um dos pontos-chaves da teoria vygotskiana é que o homem, por meio do uso de instrumentos, modifica a natureza, e ao fazê-lo, acaba por modificar a si mesmo. Partindo da ideia de que o trabalho e sua divisão social acabam por gerar novas formas de comportamento, novas necessidades, o homem busca meios para sua realização.

Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1995) concluiu que os sujeitos, ao longo da história e do seu próprio desenvolvimento, introduziram sistematicamente novos sinais, novos elementos e novos símbolos para as mediações das suas ações. Com a mediação, elemento auxiliar externo, foi possível a construção da linguagem, onde as palavras são os sinais mediadores. O sujeito atribui-lhes, então, os significados, o que lhe permite se lembrar de uma palavra dada. Por exemplo: em um experimento, participam um experimentador e um sujeito. A estes são mostrados 25-30 cartões com figuras, propondo-se em seguida uma lista de palavras as quais ele deve memorizar. Para isso ele pode escolher um dos cartões que se relacione com a palavra. Depois da apresentação de 12 a 15 palavras, o experimentador lhe apresenta aleatoriamente os cartões com as figuras, pedindo-lhe que se lembre das palavras. Esse experimento tem duas variantes. Na primeira, há sempre uma figura que está obviamente relacionada com a palavra a ser lembrada. Exemplo: inverno/ lareira. Na segunda, a relação precisa ser procurada pelo sujeito. Exemplo: fogo/machado. Com o machado corta-se a lenha para acender o fogo. Em ambos os casos os cartões funcionam como mediadores entre o estímulo e a resposta, levando a pessoa a se lembrar da resposta solicitada. Com o passar do tempo, a criança deixa de necessitar desse elemento auxiliar externo, e passa a utilizar signos internos, representações mentais, interiorizando também os significados.

A relação entre pensamento e linguagem continua fazendo parte dos estudos no campo da Psicologia, Linguística e da Educação, levando em conta esse processo.

2.1.2 Processo de internalização

Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1995) aprofunda as concepções de que no processo de desenvolvimento, as crianças começam a usar, em relação a si próprias, as mesmas formas de comportamento que os outros usaram inicialmente em relação a elas, com a ideia central de que é na interação social e por intermédio do uso de signos que se dá o desenvolvimento das funções psíquicas superiores.

Prosseguindo com os seus experimentos, concluiu que a internalização também ocorre em relação ao processo de transformação da linguagem egocêntrica em fala interior (a linguagem egocêntrica é aquela que a criança externa para acompanhar suas ações e liberar suas tensões, mesmo sem a presença de outro indivíduo por perto).

Leontiev, um dos colaboradores de Vygotsky, elaborou um livro, que não conseguiu terminar: "A psicologia do afeto", no qual afirma que por trás do processo de internalização, há um motivo que emana do campo afetivo. Assim, o aparecimento das relações cognitivas

necessárias à realização do processo de internalização, seria forçado pelos estados emocionais e pelas necessidades afetivas do sujeito.

Segundo Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1995), por exemplo, quando a criança emite alguns sons e os adultos os reconhecem como "palavras" do idioma falado, cercando a criança de agrados, em pouco tempo ela estará utilizando a palavra no sentido atribuído por esses adultos. É o desejo de ser novamente agradada que a leva não só a repetir aquela palavra, mas, sobretudo, a começar a estabelecer a relação entre o significante e o seu significado.

Assim, no processo de internalização, os aspectos cognitivo e afetivo mostram-se intimamente entrelaçados.

2.2 Zona de desenvolvimento proximal

Segundo Valsiner e Veer (1991, p.11, apud OLIVEIRA, 1995), o conceito de zona de desenvolvimento proximal foi se plasmando em pelo menos três contextos diferentes: primeiro, sobre diagnósticos do desenvolvimento infantil, baseados no uso de testes que relacionavam a diferença do escore obtido quando a criança desempenhava uma tarefa sozinha e a desempenhava assistida por algum adulto, ou mesmo por outra criança mais adiantada, que a orientava; segundo, em decorrência das preocupações de Vygotsky com a questão do ensino/ aprendizagem; terceiro, no contexto do jogo.

Em síntese, o conceito de **zona de desenvolvimento proximal** define-se como sendo “a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes”. (Oliveira, 1995, p.60)

Baseado em seus estudos sobre a zona de desenvolvimento proximal, Vygotsky (1988, p.114 apud, OLIVEIRA, 1995) diz: "O bom ensino é aquele que se adianta ao desenvolvimento". Criando zonas de desenvolvimento proximal, o professor estaria forçando o aparecimento de funções ainda não completamente desenvolvidas no educando. Segundo ele, as matérias escolares são capazes de orientar e estimular o desenvolvimento das funções psíquicas superiores.

2.3 Formação de conceitos e o ensino escolar

A teorização sobre a formação de conceitos, segundo Oliveira (1995), é uma extensão da pesquisa de Vygotsky sobre o processo de internalização. Esse autor faz distinção entre os *conceitos espontâneos*, ou seja, aqueles em que a criança aprende no seu dia-a-dia, nascidos do contato que ela possa ter tido com determinados objetos, fatos, fenômenos, etc., dos quais ela não tem sequer consciência, e os conceitos que se aprende na situação escolar, que são denominados pelo autor como *conceitos científicos*.

A partir das teorias de Vygotsky, Moysés (1997) resumiu o que seria a essência de um ensino voltado para a compreensão, através das seguintes ações no ensino escolar:

- a) "trabalhando com o aluno": a preposição *com* revela uma atitude estreita de interação, onde trabalham professor e aluno.
- b) "explicando" e "dando informações": explicar é mais do que fazer uma exposição. É buscar na estrutura cognitiva dos alunos as ideias relevantes que servirão como ponto de partida para o que ensinar, ampliando os esquemas mentais já existentes;
- c) "questionando e corrigindo": o professor deve verificar se a sua fala é compreendida e, diante de possíveis erros, deve corrigi-los;
- d) "e fazendo o aluno explicar": este seria o ponto alto de todo o processo. Ao pedir que o aluno explique, o professor pode detectar se está havendo, no plano intrapsicológico (interno ao aluno), uma reestruturação das relações que ocorreram no âmbito interpsicológico (entre os participantes do processo). É um processo dinâmico, construído passo a passo pelos alunos, em estreita interação com o professor. Ao buscar desenvolver um conceito científico, conhecendo a zona de desenvolvimento proximal do aluno, o professor bem preparado saberá fazer perguntas que irão provocar o desequilíbrio na sua estrutura cognitiva, fazendo-o avançar no sentido de uma nova e mais elaborada reestruturação.

Para Oliveira (1995), o processo de relacionar o conceito espontâneo que o aluno traz, com o conceito científico que se quer que ele aprenda, exige de quem ensina uma compreensão dos diferentes significados que os conceitos têm para o aluno. Exige, também, que o docente perceba quais são os seus contextos, quais são os sentidos nos quais eles estão sendo empregados.

2.4 Significado e sentido

Para Luria (1979d, 1987, apud OLIVEIRA, 1995), o **sentido** de uma palavra depende da forma com que está sendo empregada, isto é, do contexto em que ela surge; já o seu **significado** permanece relativamente estável e engloba a conceituação mais geral dos objetos.

Segundo Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1995), o fato de o aluno não compartilhar do mesmo nível de profundidade e amplitude de um conceito com um interlocutor, seja ele o professor ou o autor de um texto que ele esteja lendo, pode gerar desentendimentos.

O compartilhar dos significados e, dentro de determinados contextos, do sentido que se pretende alcançar, é fundamental para que haja compreensão nas relações interpessoais. A possibilidade de haver equívocos, distorções e inúmeros outros problemas relacionados a essa questão é algo para o qual o professor deveria estar permanentemente atento.

2.5 Criatividade

Segundo Vygotsky (1990, apud OLIVEIRA, 1995), o cérebro armazena e reproduz suas experiências anteriores. Ao utilizá-las, o homem é capaz de se adaptar ao mundo à sua volta, fazendo uso da atividade criativa. Esse autor lembra, ainda, que a atividade de imaginação criativa se completa pela cristalização da imagem de uma forma externa e depende primariamente de quão rica e variada é a experiência prévia que a pessoa armazenou no seu cérebro.

Segundo Vygotsky (apud OLIVEIRA, 1995), a imaginação criativa é passível de desenvolvimento e guarda estreita relação com a riqueza de experiências e conhecimento previamente adquiridos pela pessoa.

2.6 Conteúdos escolares e desenvolvimento cognitivo

Vygotsky abordou a questão dos conteúdos escolares, ao tratar das relações entre aprendizagem e desenvolvimento. Posteriormente alguns de seus seguidores realizaram investigações procurando analisar especificamente essas relações. Bogayavlensky e Menchinskaya (1991, p.46, apud OLIVEIRA, 1995), afirmam que "o conhecimento que o aluno adquire não só amplia sua consciência, como também modifica seu próprio modo de

pensar". Ou seja, ao aprender algo, uma pessoa modifica suas potencialidades, desenvolvendo-se.

Pela teoria Vygotskiana (apud OLIVEIRA, 1995), é preciso que o professor esteja alerta ao uso do material figurativo-concreto (que traga experiências sócio-culturais significativas aos alunos), seguido de processos que levem a abstrações e a amplas generalizações, enfatizando os processos de internalização e as respectivas gerações de significados.

Uma pesquisa realizada por Zankov (1991, apud Moysés, 1997) mostrou que algumas atividades nas quais o objeto, ou elemento figurativo, estimulou o aluno a pensar, propiciaram melhores resultados de aprendizagem. O professor orientava a observação do aluno que, baseado nessas observações, deveria deduzir as propriedades e as relações nele existentes. Segundo esse autor, o objeto foi fundamental para as inferências feitas a seu respeito, e a fala do professor ajudou a encaminhar a atenção para os pontos fundamentais.

Lembra Luria (apud OLIVEIRA, 1995), que até mesmo a simples mudança de objetivo de uma tarefa leva "inevitavelmente a uma mudança significativa na estrutura dos processos psicológicos que a levam a termo", e isso implica mudança na organização cerebral. A isso se chama, neste trabalho, de *aprendizagem significativa*, ou seja, aquela que causa uma mudança na organização dos modos de pensar dos indivíduos, em uma atividade.

2.7 Atividade e consciência

Segundo Moysés (1997), Leontiev dedicou-se ao estudo da atividade mental e de sua relação com o próprio desenvolvimento da personalidade, afastando-se da concepção sócio-histórica. Dentre os seus temas, destaca-se o da relação entre atividade e consciência. Segundo Oliveira (1995), a aprendizagem não pode girar só em torno de atividades mecânicas.

Nas experiências realizadas pelos colaboradores de Vygotsky com atividades compartilhadas, foi encontrado que a tendência geral do desenvolvimento infantil caminha do social para o individual e o nível mais elevado de participação é aquele em que a colaboração passa a ser o objetivo da própria tarefa. O sucesso da aprendizagem escolar dependeria, então, em grande parte, da possibilidade de levar os alunos a realizar atividades compartilhadas, as quais ativam o desenvolvimento cognitivo e favorecem a aquisição do conhecimento (OLIVEIRA, 1995).

2.8 O Conhecimento Matemático e a Teoria Sócio-Histórica: pontos de aproximação

Para Oliveira (1995), a escola vem trabalhando com os conteúdos escolares como um fenômeno de "encasulamento", em que se fecha sobre si mesma e não promove muita continuidade entre o que se aprende nela e o conhecimento que existe fora. Não se mostra para o aluno a relação direta que há entre a escola e a vida. Em muitos casos, o saber da escola anda na contramão do saber da vida.

Além disso, são observadas muitas dificuldades em relação à própria aprendizagem de Matemática pelos alunos. Para minimizar esse problema, alguns autores sugerem novas formas de ensiná-la, pautadas principalmente, nas atividades em grupo, reconhecendo a importância da interação na construção do conhecimento. Várias dessas propostas se baseiam nos estudos de Lev S. Vygotsky.

Segundo Oliveira (1995), a influência do pensamento de Vygotsky na Educação Matemática tem sido um marco importante para justificar que a aprendizagem dos conceitos tem suas origens nas práticas sociais e uma nova tendência vem crescendo nos últimos anos: a preocupação com a contextualização do ensino.

Se professor e alunos defrontam-se com sentenças, regras e símbolos matemáticos sem que nenhum deles consiga dar sentido e significado a tal simbologia, então a escola continua a negar ao aluno, uma das formas essenciais de ler, interpretar e explicar o mundo.

Segundo Oliveira (1995, p.73), para que se desenvolva um ensino de qualidade é preciso:

- 1º) contextualizar o ensino da Matemática, fazendo com que o aluno perceba o significado de cada operação mental que faz;
- 2º) levar o aluno a relacionar significados particulares com o sentido geral da situação envolvida;
- 3º) que nesse processo, se avance para a compreensão dos algoritmos envolvidos;
- 4º) propiciar meios para que o aluno perceba, na prática, possibilidades de aplicação desses algoritmos.

Os pesquisadores norte-americanos John S. Brown, Allan Collins e Paul Duguid, segundo Oliveira (1995, p.73), vêm o ensino como um processo contínuo, que se estende ao

longo da vida e se dá mediante a atuação da pessoa em diferentes situações e circunstâncias. Entendem, também, ser o ensino intrinsecamente indistinto da atividade.

Seguindo, então, esta linha de pensamento, estudou-se a pesquisa de Oliveira (1995), incluindo os seus aspectos metodológicos, as pretensões e circunstâncias que lhe deram origem e a apresentação de alguns dados a respeito da realidade escolar na qual se desenrolou. O principal objetivo da pesquisa dessa autora foi ver como se dava a relação entre conteúdos curriculares e o desenvolvimento das funções mentais superiores dos alunos. Uma ideia que norteou a definição metodológica da mesma foi a preocupação de ir além da simples descrição da realidade estudada, buscando caminhos para a ação e a transformação.

A pesquisa-ação tem como principal característica a presença da ação que se dá no plano empírico, e que serve de palco para submeter à prova a teoria em jogo. No caso de Moysés, verificou-se que o suporte teórico da psicologia sócio-histórica, proposta por Vygotsky, era um guia seguro para os objetivos que tinha em vista, isto é, aproximar a Matemática da vida, levando os alunos à construção dos conceitos trabalhados e à apropriação do conhecimento de forma pessoal.

A turma de alunos pesquisados por Oliveira (1995) pertencia a um nível socioeconômico baixo e, em geral, eles levavam uma vida difícil. Desse modo, a autora procurou investigar quais eram os seus sonhos futuros. Todos se viam trabalhando em dez anos e poucos prosseguindo os estudos. Como um dos resultados da intervenção pedagógica realizada por aquela autora, com o passar do ano letivo foi que, os alunos revelaram um verdadeiro prazer de realizar as tarefas de Matemática.

Nessa pesquisa realizada por Oliveira (1995), foi feito um acompanhamento sistemático e intenso de todas as atividades de Matemática desenvolvidas pela turma e foram realizadas entrevistas semiestruturadas e pequenos debates em grupos para obtenção de dados, além das observações.

Quanto ao procedimento metodológico de ensino usado por Moysés (1997), eram lançadas perguntas com o objetivo de incentivar o aluno a caminhar com o seu raciocínio, analisando o seu próprio conhecimento e levando-os a avançar para formas superiores de pensamento, para perceber mudanças qualitativas.

A intervenção realizada na pesquisa de Moysés (1997) envolvia atividades de Geometria para a sala de aula com a construção de sólidos de argila, partindo do vocabulário que os alunos já traziam, antes de conceituar o que eram vértices (“ponta”), arestas (“linhas”) e faces (“região plana”), base e altura. A autora usou caixotes que transportavam frutas e

indagou como poderia ser medido “o interior do caixote” (para os alunos pensarem em sua noção original de volume). Alguns sugeriram medir com tijolos, outros com cubinhos. Depois sugeri atividades relacionando o trabalho com as caixas e diferenciando-os, com os alunos, do trabalho com paredes (ideia de superfície). Também usou escalas para a medição e, após explorar os sentidos desses conceitos pelos alunos, com os materiais manipuláveis e suas experiências vividas, a professora da pesquisa de Moysés passou a tratar dos conceitos matemáticos (arestas, vértices, faces, volumes, áreas e perímetros), aproximando-os dos significados mais gerais que os alunos levantaram com as experiências anteriores.

Também usou uma caixa de 80 cm^3 e perguntou quantas caixas daquela caberiam dentro da sala de aula. Cada grupo imaginou o que poderia ser feito. Alguns tentaram colocar os caixotes sobrepostos e a professora pergunta se realmente seria necessário colocar o caixote na sala toda para medir. Um grupo entendeu que não haveria necessidade e que bastaria colocar no fundo e numa altura vertical, e no comprimento da sala e depois multiplicar as quantidades. A professora sempre ia indagando, até chegar à síntese final de que, o volume do paralelepípedo (relacionado com o contexto do volume da sala) era a multiplicação das medidas das três arestas principais (duas da base e uma da altura). Depois a professora pediu para os alunos desenharem no papel quadriculado retângulos, triângulos, quadrados para medir áreas (a representação simbólica através do desenho é importante para ilustrar a ideia de mediação proposta por Vygotsky), quando os alunos passam a representar situações através de figuras geométricas, que seriam, posteriormente, internalizadas com mais significado para eles. (Aqui, deve-se ressaltar o cuidado para que a imagem conceitual, a partir dos desenhos, não fique somente limitada a eles!!!). Depois trabalhou com o contexto das casas, se havia azulejos na cozinha, para o cálculo de áreas, com o estudo de preços, o uso sem desperdício e houve muita coerência nas respostas dos alunos. Pelas respostas que eles deram, foi possível ter um bom resultado com relação aos significados.

Ela percebeu, com essa experiência, que havia alunos que sabiam quanto era 5×5 , mas não sabiam quanto era 25 dividido por 5. Aqui, pode-se inferir que a professora poderia ter aproveitado o estudo com azulejos, para dar mais significado tanto para a multiplicação, quanto para a divisão.

Durante esse processo de cálculos de áreas e volumes relacionados à construção civil, um aluno perguntou à professora como se mede o metro de areia, porque ouvia as pessoas da obra falarem assim. Ela perguntou como mediam o caminhão de areia. Os alunos trouxeram medidas com cálculos decimais e a aula teve muitos significados explorados. Inferiu-se que

tenham chegado à conclusão de que era o metro cúbico (m^3) que se comprava de areia, embora no dia a dia, as pessoas falassem “metro de areia”.

Na sequência, a professora colocou várias situações-problemas para a medida de áreas, com preços e outros dados, sempre inquirindo os alunos. Contou aos alunos que estava escrevendo um livro a respeito das atividades que eles faziam e estes ficaram mais receptivos ainda para o trabalho. Mencionaram que não acreditavam que estavam tendo aulas de Matemática, porque isso estava muito interessante para eles.

Na sequência, a professora usou um triângulo desenhado numa folha para relacionar o cálculo de sua área com a de um retângulo e também a altura do mesmo com a de um retângulo que o inscreve. Passados alguns meses, ela voltou a colocar alguns problemas similares, mas alguns alunos usaram os números que apareciam nos dados indiscriminadamente, para calcular as medidas. Ela explorou a situação para ajudar esses alunos a entender porque haviam errado. Depois foram convidados a desenharem, em papel quadriculado, a planta de uma casa com sala, quarto, cozinha e banheiro, de modo a não ultrapassar 50 m^2 . Comparam a casa com a sala de aula que tinha 49 m^2 . Usaram como referência a medida do quadrado que a carteira ocupava.

Depois da leitura das experiências de Moysés (1997), esta professora-pesquisadora passou a refletir que ficou mais preocupada com a forma de ensinar os alunos em sala de aula e atenta para que eles trabalhassem em grupo, propondo mais problemas, inclusive de cálculos mentais, para estimulá-los.

Passou a refletir, também, que *aprender* é uma palavra que apresenta diferentes significados, dependendo das concepções e crenças que se carrega sobre os objetivos da educação. No passado, esse termo poderia ser concebido como *receber*, ou *reproduzir* conhecimentos. Segundo a concepção estudada por (OLIVEIRA, 1995), aprender é um processo natural e faz parte do ser humano desde os primeiros anos de vida, passando de uma condição meramente biológica, para uma experiência sócio-cultural. A fala é um exemplo de aprendizagem. Concebe-se, nesta pesquisa, que aprender Matemática deve ser visto como o desenvolvimento de uma rede de significados, integrado ao desenvolvimento de competências e habilidades, envolvendo situações, processos, raciocínios tipicamente escolares e seu uso em situações reais, problemas reais e com uma postura crítica e reflexiva.

Do mesmo modo, esta professora-pesquisadora passou a se questionar: ser professor significa debitar matéria, usar lousa, projetor, transmitir informação? Ou ser professor significa promover a aprendizagem significativa e avaliar resultados? (DEGRAVA 2013).

Com essa experiência encontrada em Moysés (1997), também se verificou que a avaliação contínua faz parte deste tipo de prática docente. Cabe ao professor recolher informações desde o primeiro momento, percebendo se houve um entendimento mais profundo da tarefa e, durante as atividades, é necessário recolher informações sobre o desenrolar do trabalho, procurando entender o que os grupos construíram durante o processo (Degrava, 2013). Em geral, nesse tipo de avaliação contínua, os alunos apresentam dificuldade em fazer um registro organizado de seus trabalhos e, ainda, há limitações na comunicação oral em Matemática. Mas o professor deve, mesmo assim, deixar os grupos atuarem com autonomia, sem a necessidade de corrigir cada afirmação, mas favorecendo-lhes a argumentação com a proposta de tarefas desafiadoras, dando-lhes tempo adequado para consolidar os conhecimentos, de forma que se tornem significativos dentro de suas experiências de vida.

Inspirada nesse estudo de Moysés, esta professora-pesquisadora procurou, então, construir uma intervenção pedagógica para o ensino de relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria no triângulo retângulo, comprimento da circunferência e área do círculo, que levasse em conta o contexto de vida dos alunos e que tivesse também algum caráter lúdico e exploratório, de modo a envolvê-los em atividades que conduzissem a uma aprendizagem mais significativa e prazerosa desse conteúdo de Matemática. Essa intervenção e seus resultados serão apresentados no próximo capítulo.

3 A Proposição de uma Sequência Didática e sua Aplicação

Neste capítulo, serão apresentados o planejamento das atividades propostas e o modo como se deu o desenvolvimento das mesmas, junto a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola estadual da cidade de Divinolândia- SP, para a aprendizagem de conceitos relativos a relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria no triângulo retângulo, área do círculo e comprimento da circunferência, que são partes do Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012), para esse nível escolar.

3.1 A Fase de Planejamento

Após o contato com o 9º ano B do Ensino Fundamental, essa professora-pesquisadora notou muitas dificuldades dos alunos em relação ao aprendizado em Matemática, o que resultava em desinteresse em participar das aulas e indisciplina por parte de vários alunos. A partir da leitura dos autores citados no capítulo anterior, decidiu-se por trabalhar com atividades exploratórias e lúdicas para o desenvolvimento dos conteúdos de relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria no triângulo retângulo e círculos. O objetivo foi o de tornar as aulas mais dinâmicas, participativas e assim, aumentar a possibilidade de obter melhores resultados quanto à aprendizagem significativa dos alunos. Foi escolhida a turma do 9º ano B, de 2016, de uma escola estadual na qual esta professora-pesquisadora atua, por ser o ano em que esse conteúdo seria desenvolvido naquele momento, bem como pela anuência da direção da escola e dos demais participantes. Essa sala tinha 32 alunos pouco participativos nas aulas de Matemática, mas com grande potencial de aprendizagem.

Passou-se, então, à construção de uma sequência didática que fosse significativa e incluísse diversas atividades de caráter exploratório e lúdico para estimular a participação dos alunos e buscando levar em conta os princípios de *atividade compartilhada* (atividades em grupo que favorecem a socialização e a aprendizagem), *mediação* (através do uso de signos: linguagem, sistemas de contagem, diagramas, mapas, desenhos, e todo tipo de signos convencionais, o homem modifica as suas próprias funções psíquicas superiores) e *zona de desenvolvimento proximal* (distância entre a zona de desenvolvimento real, em que o homem resolve seus problemas independentemente e a zona de desenvolvimento potencial, em que o homem precisa de alguém mais capaz para orientá-lo), de Vygotsky (OLIVEIRA, 1995).

Entende-se as *atividades exploratórias*, nesta pesquisa, no sentido proposto por Ponte *et al* (2003), como sendo aquelas em que os alunos são chamados a levantar hipóteses e

breves conjecturas acerca de uma situação proposta, geralmente com medidas de objetos reais, geométricos ou visuais, e suas comparações, neste caso para se chegar a conceitos da trigonometria e/ou da geometria. O caráter lúdico se manifesta em situações em que os alunos são convidados a jogar, brincar e experimentar aspectos da realidade, ou que envolvam objetos meramente matemáticos.

A sequência didática que se apresenta a seguir, foi construída com a inspiração do trabalho de Moysés e sob a supervisão da orientadora deste trabalho de pesquisa, com trocas de ideias e discussões sobre as necessidades dos alunos do 9º ano B, baseadas na experiência desta professora-pesquisadora com essa turma:

1ª etapa: Revisão de semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras

2ª etapa: Dedução das relações métricas no triângulo retângulo

3ª etapa: Construção das razões trigonométricas no triângulo retângulo

4ª etapa: Construção das razões trigonométricas para os principais ângulos (30° , 45° e 60°)

5ª etapa: Atividades com teodolito e medida de objetos externos

6ª etapa: O jogo Trigominó.

7ª etapa: Estudo do círculo (como preparação para a trigonometria no ciclo trigonométrico em séries posteriores)

Após discutidas e planejadas essas etapas, elas foram desenvolvidas como será narrado a seguir: totalizando 54 aulas no 2º semestre de 2016.

3.1.1 Revisão de semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras (1 aula, realizada em 08.09.2016):

Foi planejada como uma aula expositiva-dialógica, com a apresentação de desenhos de alguns triângulos semelhantes, outros não, e a discussão sobre as condições para que fossem considerados semelhantes. Em seguida passou-se a resolução de alguns exercícios.

Para a revisão a cerca do Teorema de Pitágoras, foi utilizada uma atividade exploratória. Iniciou-se com o desenho do triângulo de lados 3, 4 e 5 unidades, sobre os quais desenhou-se um quadrado, para a indução de que a área do quadrado de lado 5 é igual à soma das áreas dos quadrados de lados 3 e 4. Depois foram feitos mais alguns desenhos, com os quais calcularam as respectivas áreas relativas aos catetos e às hipotenusas, estendendo o resultado para outros triângulos retângulos, empiricamente, e finalizando com a resolução de alguns exercícios sobre Teorema de Pitágoras. Não foi realizada a demonstração formal do

Teorema, nesta aula. Os alunos realizaram as atividades com boa participação, fazendo os cálculos adequadamente.

3.1.2 Dedução das Relações métricas no triângulo retângulo, usando recortes no papel sulfite:

Foi pedido aos alunos que desenhasssem, **com régua e compasso**, dois triângulos de mesma medida: 12, 16 e 20cm. Para isso, fizeram um segmento de reta de 20 cm com o uso da régua, abriram o compasso em 16 cm, colocando a ponta seca na extremidade do segmento de 20 cm e marcando com um traço os 16cm, logo após abriram em 12 cm e colocando a ponta seca na outra extremidade, marcaram sobre o traço de 16 cm, formando um dos vértices do triângulo. Em seguida, verificaram se esses triângulos eram retângulos, ou seja, se valia a relação do Teorema de Pitágoras. Um deles foi preservado e o outro foi recortado, sendo dividido em 2 triângulos, com um recorte na altura em relação à hipotenusa, (obtida pela própria dobradura pelo vértice do ângulo reto e a base na hipotenusa). Foram nomeados os lados e destacados os ângulos, conforme figura 1 (desenho de um aluno):

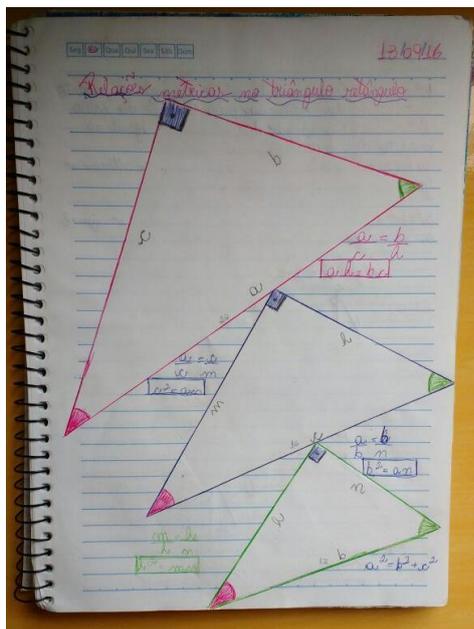


Figura 1 – Dedução das relações métricas no triângulo retângulo (fonte: da autora)

Como atividade exploratória, foi solicitado que os três triângulos fossem colocados com a mesma posição relativa ao ângulo reto e, em seguida, que encaixassem os ângulos, sobrepondo os recortes de papel, para verificarem se tinham a mesma medida. Após a verificação, os alunos concluíram que eram triângulos semelhantes, pelo caso AAA e,

novamente com a mesma posição relativa, foram escrevendo as razões e proporções encontradas, por lados homólogos, com a *mediação* de perguntas feitas pela professora. Pela multiplicação das razões de semelhança, chegaram às quatro relações métricas ($b^2 = a.n$; $c^2 = am$; $h^2=mn$; $ah= bc$); também foi descrito com palavras o que significava cada relação, em termos dos catetos e hipotenusa, da altura e suas projeções sobre a hipotenusa. Para fixação, foram feitos exercícios em que outros triângulos eram nomeados, **com letras diferentes**, e alguns problemas de aplicação em 4 aulas realizados em 13,14, 15 e 19 .09.2016. Esse trabalho foi realizado em grupo e os alunos se ajudaram nos cálculos.

Nesse procedimento, foram lançadas perguntas com o objetivo de encorajar o aluno a caminhar com o seu raciocínio e levá-lo a avançar para formas superiores de pensamento (no caso, alcançando as relações de proporção e as relações métricas gerais em um triângulo retângulo, as quais não conheciam previamente), o que contribuiu para a percepção de mudanças qualitativas no raciocínio, durante a manifestação dos alunos nas aulas.

Cada grupo lidou bem com os recortes. Nesse caso, foi aproveitada a tarefa para lembrar mais uma vez, para a classe toda, como construir triângulos por régua e compasso, o que terminou o trabalho com êxito. A classe do 9º ano B foi dividida em grupos de 4 alunos e esta professora passava para auxiliá-los; quando percebia que algum deles não estava entendendo, pedia para alguém do grupo, que já havia entendido, que explicasse aos outros e ficava observando; se necessário, fazia intervenções.

Quanto à resolução dos exercícios relacionados aos triângulos, os grupos fizeram com mais empenho e foi percebido, logo no desenvolvimento das atividades, que foi um conteúdo que aprenderam com mais facilidade, em relação ao modo como era feito antes. Todo esse aprendizado citado foi verificado durante as aulas, porque os alunos que se mostravam apáticos, pouco participativos, começaram a questionar, responder perguntas, trazer tarefas de casa resolvidas.

3.1.3 Continuando com as relações métricas no triângulo retângulo

Na sequência, exibiu-se um vídeo do Youtube (<https://www.youtube.com/watch?v=7bm4Q3pdFio>), em 19.09.2016, de autoria do Prof. Geraldo Ventura, com uma interpretação das relações métricas no triângulo retângulo, onde também foi mostrada a importância dos mesmos na vida prática. O vídeo apresenta também vários lugares que comportam objetos triangulares, principalmente na construção civil, e para

evidenciar experimentalmente a validade das relações métricas, o professor usa quatro varetas em cada lado do triângulo. O Teorema de Pitágoras, explicando com a comparação entre as áreas formadas nas regiões delimitadas pelas varetas. Logo em seguida, foi exibido outro vídeo (www.youtube.com/watch?v=UGat3wyaPgI) do mesmo professor, com exercícios para melhor fixação do conteúdo, e proposto mais problemas com significados e contextos, retirados do *Caderno do Aluno* do 9º ano Ensino Fundamental, vol 2., Nova Edição (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 28- 41) nos dias 20, 21, 22 e 27.09.2016. Os alunos mostraram-se satisfeitos por terem assistido ao vídeo e assim puderam resolver com mais facilidade os exercícios propostos.

The figure shows four pages from a student's notebook, illustrating the application of the Pythagorean theorem in various contexts. The pages are numbered 28, 29, 30, and 31.

- Page 28 (top left):** Problem 7: Two perpendicular roads cross at city A. One road is 60 km from A to city B, and the other is 80 km from A to city C. A police station is to be built on the road between B and C. The student uses the Pythagorean theorem to find the distance from B to the station (x) and from the station to C (y). The solution shows $x = 300$ and $y = 300$.
- Page 28 (top right):** Problem 8: A right-angled triangle with legs of 30 m and 40 m. A rectangular house is built inside. The student finds the area of the house and the total area of the triangle. The solution shows the house has a width of 50 m and a height of 24 m, with an area of 1200 m².
- Page 30 (bottom left):** Problem 9: A right-angled triangle inscribed in a circle with radius 4 cm. The student finds the lengths of the legs and the hypotenuse. The solution shows legs of 3 cm and 4 cm, and a hypotenuse of 5 cm.
- Page 30 (bottom right):** Problem 11: A rectangular frame with dimensions 3 m by 2 m. Two rigid bars are placed along the diagonals. The student finds the length of the bars. The solution shows the bars are 3.6 m long.
- Page 31 (bottom left):** Problem 10: A ball is thrown from a height of 30 m. Maria is 50 m from the ball, and João is 40 m from the ball. The student finds the distance between Maria and João. The solution shows the distance is 10√7 m.
- Page 31 (bottom right):** Problem 12: A rectangular room with dimensions 4 m by 6 m. A cable is run from one corner to the other, divided into two equal parts. The student finds the length of the cable. The solution shows the cable is 2√13 m long.

Figura 2 - Alguns Problemas do Caderno do Aluno - 9º ano (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 28- 41)

3.1.4 Avaliação Mensal sobre o conteúdo (28.09.2016)

Na sequência dessas atividades, foi realizada a avaliação determinada pela escola. A figura abaixo traz as questões dessa prova escrita, com as respostas de um aluno.

Questão 1: Um avião percorreu a distância de 5000 metros na posição inclinada, e em relação ao solo, percorreu 3000 metros. Determine a altura do avião. 4000 m

Questão 2: Uma escada de 12 metros de comprimento está apoiada sob um muro. A base da escada está distante do muro cerca de 8 metros. Determine a altura do muro. 10

Questão 3: Uma bicicleta saiu de um ponto que estava a 8 metros a leste de um hidrante, andou 6 metros na direção norte e parou. Assim, a distância entre a bicicleta e o hidrante passou a ser: 10 m

Questão 4: Num triângulo retângulo, as projeções dos catetos sobre a hipotenusa medem 4 m e 1 m, respectivamente. Calcule a área desse triângulo. 5 cm^2

Questão 5: Num triângulo retângulo em A, a altura relativa à hipotenusa mede 12, e o menor dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa, 9. O menor lado do triângulo mede: 15

Figura 3 – Avaliação Mensal sobre relações métricas no triângulo retângulo. (Fonte: da autora)

A avaliação mostrada acima é de um aluno que tinha um desempenho regular anteriormente e que foi apresentando um progresso no decorrer dos bimestres, com as atividades diferenciadas. Essa pesquisa foi realizada durante dois bimestres.

3.1.5 Avaliação de Aprendizagem em Processo (29.09.2016)

Por determinação do sistema escolar, foi realizada a *avaliação da aprendizagem em processo*.

O objetivo da Avaliação da Aprendizagem em Processo é diagnosticar o nível de aprendizado dos estudantes matriculados na Rede Estadual de Ensino. O caderno de perguntas e respostas é composto por uma redação a ser realizada pelos alunos, para verificação de aprendizagem da Língua Portuguesa, questões dissertativas e de múltipla escolha dessa

No bimestre anterior a este trabalho, essa turma ficou com 8 alunos (de 32) com média abaixo do mínimo, ou seja 25%. No bimestre em que ocorreu o trabalho, essa turma ficou com apenas 1aluno com média abaixo de 5,0 (3%) (de 31 – 1 aluno foi remanejado para outro período). Bom resultado porque além de diminuir a quantidade de notas inferiores ao mínimo, aumentou-se a média da maioria (a média geral da turma passou de 5,875 para 6,9).

D A	2º BIMESTRE		3º BIMESTRE		MÉDIA	FALTAS	COM PENSADA(S)
	1	2	1	2			
01	10,34	20	10	2	10,2		
02	8,25	15	8	1	8		
03	6,16	18	6	2	6,2		
04	5,19	12	5	1	5		
05	5,20	15	5	6	5,6		
06	5,10	12	5	4	5,4		
07	7,26	18	7	1	7		
08	7,24	18	7	1	7		
09	3,56	9	3	5	3,5		
10	6,15	18	6	1	6		
11	4,16	12	4	1	4		
12	6,24	18	6	3	6,3		
13	4,05	10	4	20	4,20		
14	4,13	10	4	5	4,5		
15	7,35	15	7	1	7		
16	4,06	18	4	5	4,5		
17	5,15	15	5	1	5,1		
18	6,16	20	6	1	6		
19	6,32	20	6	8	6,8		
20	3,08	9	3	15	3,15		
21	6,24	20	6	1	6		
22	7,29	15	7	5	7,5		
23	6,14	15	6	3	6,3		
24	10,40	20	10	1	10		
25	5,14	18	5	6	5,6		
26	4,14	10	4	11	4,11		
27	10,36	20	10	4	10,4		
28	7,24	18	7	1	7		
29	7,19	15	7	2	7,2		
30	3,14	9	3	1	3		
31	7,22	18	7	1	7		
32	5,20	15	5	8	5,8		
33							

D A	2º BIMESTRE		3º BIMESTRE		MÉDIA	FALTAS	COM PENSADA(S)
	1	2	1	2			
01	10,37	21	10	9	10,4		
02	9,17	20	9	1	9		
03	7,17	21	7	3	7,3		
04	8,32	21	8	1	8		
05	6,15	19	6	1	6,1		
06	5,12	22	5	3	5,3		
07	8,22	21	8	2	8,2		
08	8,02	10	8	13	8,13		
09	5,02	19	5	5	5,5		
10	6,17	22	6	3	6,3		
11	6,00	21	6	5	6,5		
12	8,37	21	8	6	8,6		
13	5,20	20	5	24	5,24		
14	5,20	22	5	10	5,10		
15	8,02	22	8	2	8,2		
16							
17	6,17	08	6	1	6,1		
18	7,17	19	7	2	7,2		
19	5,17	15	5	8	5,8		
20	3,17	11	3	39	3,39		
21	5,15	15	5	3	5,3		
22	9,15	32	9	4	9,4		
23	7,02	22	7	10	7,10		
24	10,04	02	10	2	10,2		
25	7,22	08	7	7	7,7		
26	6,15	15	6	6	6,6		
27	10,04	03	10	3	10,3		
28	9,17	12	9	1	9,1		
29	9,02	19	9	1	9,1		
30	5,22	12	5	1	5,1		
31	7,02	21	7	3	7,3		
32	5,12	22	5	3	5,3		

Fig. 5 – Quadro comparativo de notas do 9º ano, no 2º e 3º bimestre
 Fonte: Diário de classe do 9º ano B da professora pesquisadora

3.1.6 Correção, comentários e devolução das provas (03.10.2016)

A correção das avaliações foi feita, exercício por exercício. Aqueles em que houve maior quantidade de erros foram retomados, interrogando para que os alunos percebessem suas dificuldades. Alguns comentavam na hora da correção: "Nossa, professora! Que falta de atenção!"; outros: "não tinha percebido isso". Com essas falas, notou-se que eles participavam mais da correção e estavam mais atentos para sua aprendizagem com a atividade da prova.

Com a aplicação das atividades diferenciadas, até aquele momento, passou-se a observar mais detalhes do que os alunos escreviam em suas avaliações e comentou-se com

mais cuidado sobre isso, na correção da prova. Com esse fato, os alunos passaram a manifestar maior interesse pelo que haviam feito. Esses comentários evidenciam que tomaram mais consciência de seus processos de aprendizagem, embora não se possa afirmar que tenham alcançado total compreensão sobre os fatos estudados e se os erros cometidos se tratavam apenas de um lapso de atenção.

3.1.7 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Essas atividades foram realizadas em uma semana (6 aulas) nos dias 04, 05, 06, 10, 11 e 13.10.2016.

A partir da idéia de semelhança de triângulos, fixado um ângulo agudo x num triângulo retângulo, os alunos recortaram, em papel, triângulos de diversos tamanhos, definindo, com a nomenclatura dos lados nos triângulos recortados, o que eram os respectivos catetos opostos e adjacentes ao ângulo x e deduziram que aqueles triângulos eram semelhantes (pelo caso AAA) (vários alunos se manifestaram para concluir que eram semelhantes), o que não era comum. A partir disso, a professora pesquisadora solicitou que construíssem uma tabela com os valores medidos nos triângulos e observar as seguintes razões de semelhança em relação ao ângulo x :

$$I) \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}}; \quad II) \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}}; \quad III) \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{cateto adjacente a } x}$$

Realizaram as medições com régua nos triângulos recortados e calcularam as respectivas taxas usando a calculadora no celular. Concluíram que os valores não mudam, apesar de apresentarem pequenas variações nos cálculos, em cada uma das relações (I, II e III), porque é mantida a abertura do ângulo.

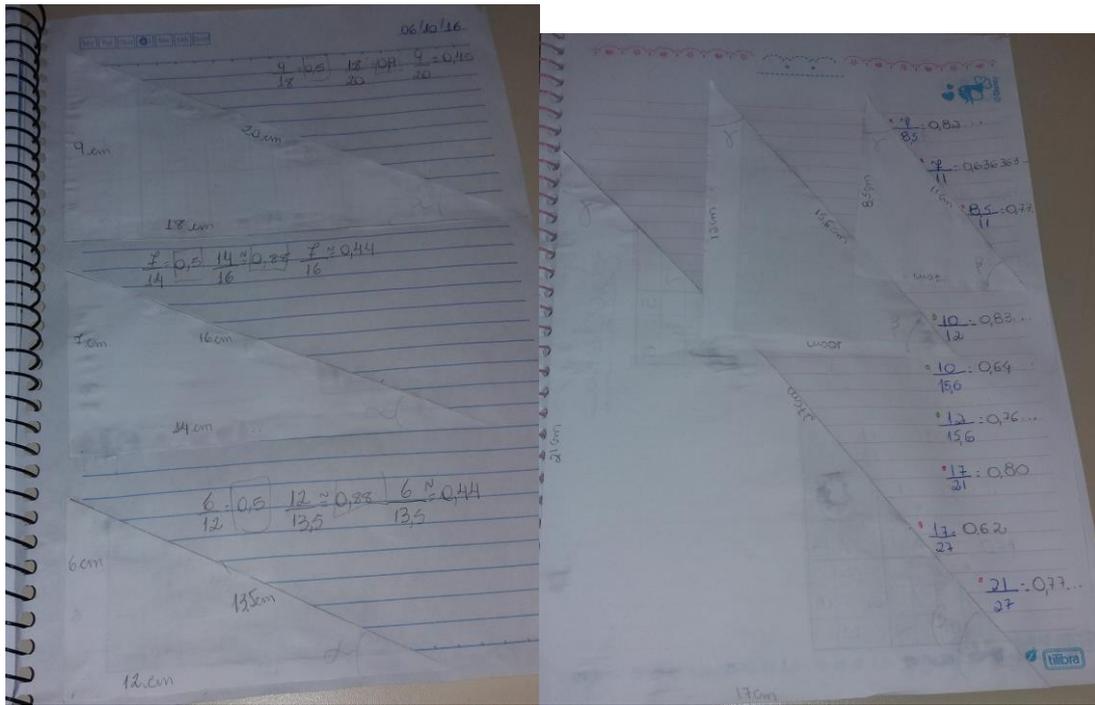


Figura 6 - Triângulos retângulos construídos pelos alunos: ângulos iguais e medidas dos lados diferentes.
Fonte: caderno do aluno

cat opo	hipo	cat adj	α	β
0,5	0,45	0,9	37°	63°
0,5	0,44	0,88	37°	63°
0,5	0,44	0,88	37°	63°

Figura 7 - Tabelas com os cálculos das divisões dos lados dos triângulos
Fonte: caderno de um aluno

Em seguida, foi nomeada cada uma dessas relações com respeito a abertura do ângulo x :
 $I = \text{sen } x$; $II = \text{cos } x$; $III = \text{tg } x$.

Na sequência, os alunos foram questionados a pensar, quando muda a abertura x , se mudam esses valores; como exemplo para os cálculos, foi usado o ângulo complementar nos mesmos triângulos recortados.

Mais alguns exercícios foram feitos com a intenção de fixar melhor esse conteúdo, foram realizados em uma aula, com poucas dúvidas.

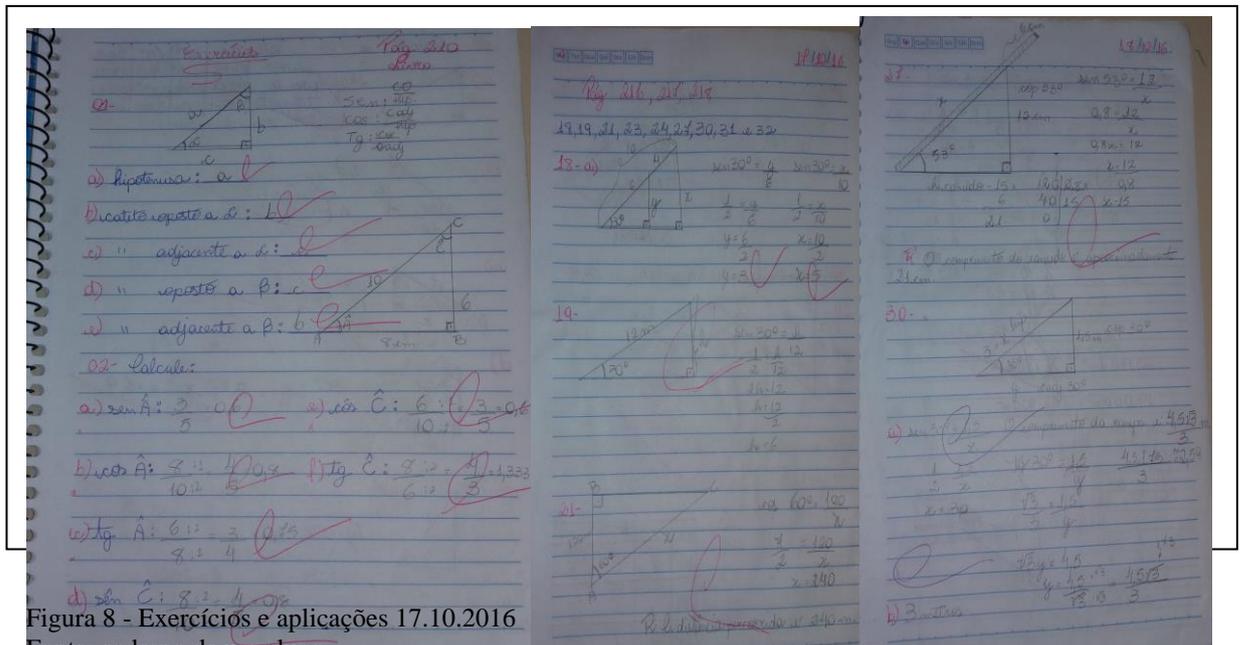


Figura 8 - Exercícios e aplicações 17.10.2016
 Fonte: caderno de um aluno

3. Seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis (30° , 45° e 60°)

Para a obtenção das relações trigonométricas dos ângulos 30° e 60° , foi construído um triângulo equilátero cuja altura do triângulo equilátero ficou dividido em 2 triângulos retângulos. Os alunos sugeriram medidas para os lados do triângulo equilátero, os lados, concluiu-se o seno, cosseno e tangente de 30° e 60° . Para a obtenção das relações trigonométricas dos ângulos 45° e 60° , usou-se um quadrado e sua diagonal, dividindo-o em dois triângulos retângulos. Os alunos sugeriram medidas para os lados do triângulo, os lados, concluiu-se o seno, cosseno e tangente de 45° .

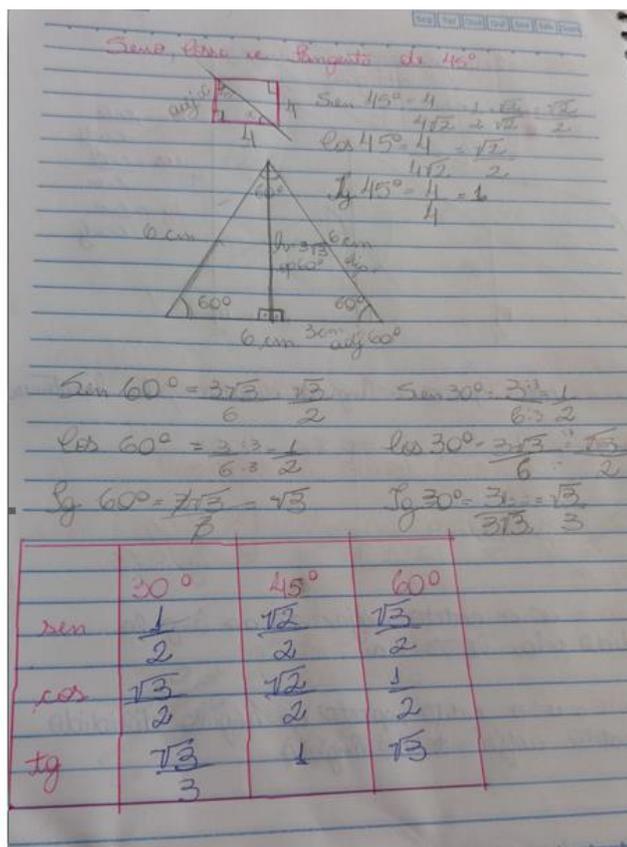


Figura 9 - Construção do quadrado e do triângulo equilátero para obter valores do seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60°
 Fonte: caderno de aluno

A construção do quadrado e do triângulo equilátero, para chegar nos valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, foi uma atividade acompanhada de significados para os alunos, porque eles foram construindo as figuras, com várias perguntas feitas pela professora desde o começo da construção. Por exemplo: o que é um quadrado? Quanto medem seus ângulos internos? Traçando a diagonal, os ângulos passaram a ser de quantos graus? Como se pode calcular a medida da diagonal do quadrado? Finalmente, relacionando os três lados, chegou-se aos valores de seno, cosseno e tangente de 45°. Com o triângulo equilátero foram repetidas algumas perguntas e concluindo os valores de seno, cosseno e tangente de 30° e 60°. Como os resultados foram concluídos com a participação dos alunos, foram mais significativos do que a simples memorização.

Relacionando esse tipo de abordagem com a Teoria de Vygotsky, que afirma que o ensino escolar colabora para a ampliação dos conceitos “científicos” e que sua compreensão é alcançada pelas trocas de significados culturalmente acumulados, na medida que se fazia perguntas para os alunos, a interação era estimulada durante o questionamento e correção das

atividades, a professora verificava se foi compreendida, corrigindo possíveis erros. Assim, passou-se a conhecer também a zona de desenvolvimento proximal do aluno e as perguntas foram sendo colocadas para provocar o desequilíbrio na sua estrutura cognitiva, avançando para uma mais elaborada reestruturação.

Em seguida, os alunos fizeram uma série de exercícios em que deveriam aplicar os valores trigonométricos para esses ângulos notáveis.

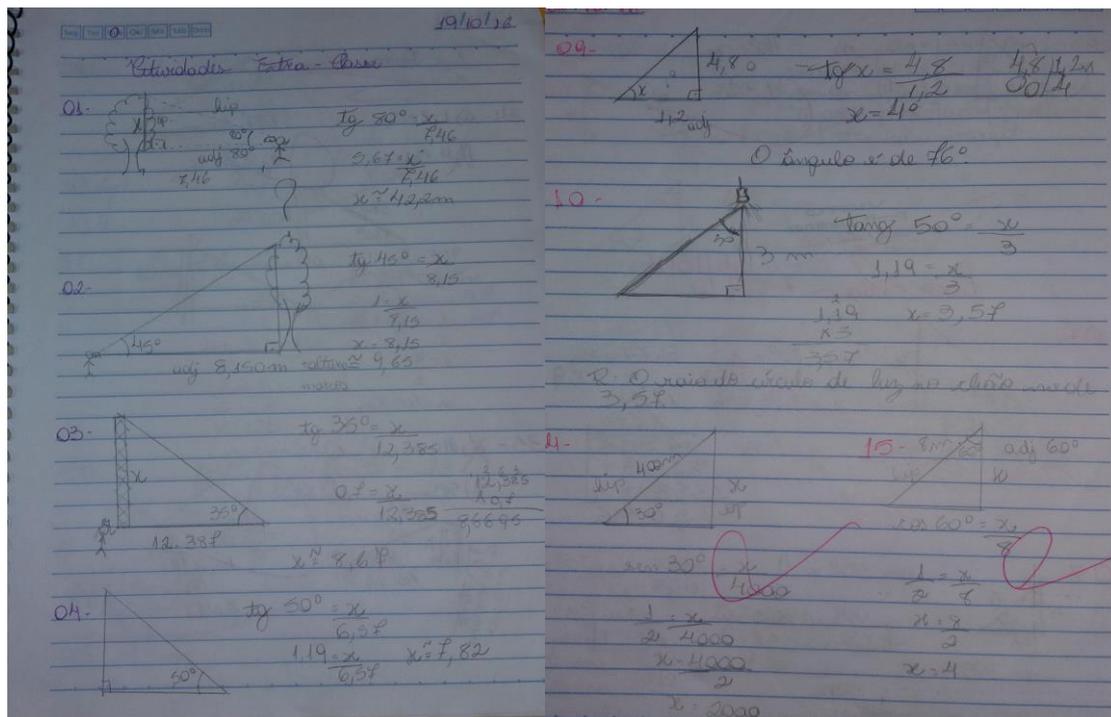


Figura 10 - Alguns exercícios realizados em 19 e 20.10.2016
 Fonte: caderno de um aluno

3.1.9 Atividades com teodolito e medida de objetos externos (24.10.2016)

Em uma aula dupla, foram realizadas algumas atividades experimentais fora do ambiente da sala usual. Os alunos saíram para o pátio da escola e fora dela, para medirem postes da rua, a altura da torre da escola, a altura do teto da quadra, entre outros, com o uso do teodolito confeccionado por eles, em uma aula anterior. Fizeram anotações para depois, em sala de aula, realizarem os cálculos, usando o conceito de tangente dos ângulos e distâncias medidas em cada caso. A participação dos alunos durante a coleta dos dados foi muito boa, embora o dia estivesse muito quente. Por esse motivo, cerca de 6 deles (de 30 presentes) ficaram um pouco apáticos e tinham de ser estimulados o tempo todo a realizar as tarefas. Com um pouco de insistência, todos realizaram as medições.



Figura 11 - Alunos medindo alturas de árvore e postes usando teodolito confeccionado por eles
Fonte: fotos da autora

Em seguida, foi perguntado se havia alguém em sala, cujo pai trabalhava na construção civil. Um dos alunos era filho de pedreiro e, então, levou o material que o pai usa no trabalho para compartilhar com a classe explicou, ele próprio, sobre como o utiliza para verificar se o ângulo da parede com o chão é reto, além de algumas ferramentas para ver nível. A professora explicou para a turma do 9º ano B que os engenheiros utilizam o teodolito para medições e os marceneiros usam as relações trigonométricas no triângulo retângulo na fabricação de móveis e telhados.

Um marceneiro, pai de um dos alunos da turma, foi entrevistado pelo filho e mais um colega de sala, na sua própria casa e, ao perguntar sobre como o Ensino Fundamental e/ou o Ensino Médio influenciaram sua atividade de profissional, ele respondeu: “Acredito que boa parte do que sei aprendi na escola, o resto foi na prática”. Em seguida, o filho perguntou quais são os conteúdos da Matemática mais usados no seu trabalho. Ele respondeu: “Geometria, perspectiva, matemática financeira e também trigonometria, como calcular a altura de algum objeto, conhecido o ângulo e o Teorema de Pitágoras”.

Com essas atividades, os alunos puderam relacionar a trigonometria com problemas da vida prática, gerando significados culturais para os conhecimentos escolares e, ainda, com as entrevistas, puderam confirmar aspectos do uso de conteúdos matemáticos escolares nessas profissões.

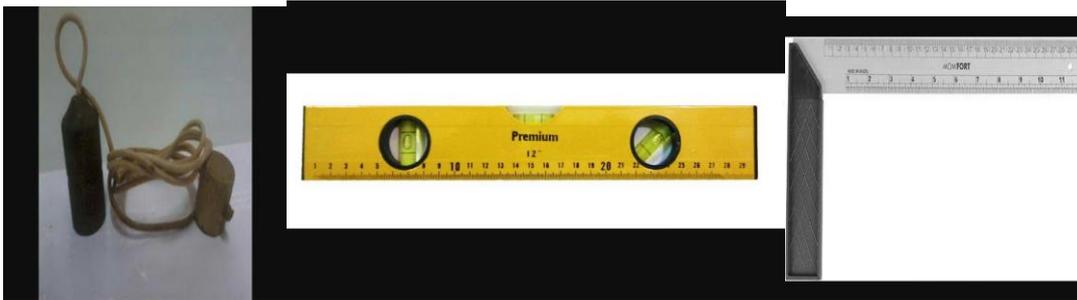


Figura 12 - Ferramentas de trabalho do pedreiro, apresentadas em aula.

Fonte: fotos da autora

Exercícios do livro didático *Praticando Matemática*, (ANDRINI e VASCONCELOS, 2015, p. 214-224) e do *Caderno do Aluno* do 9º ano (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 28- 41) foram realizados para ajudar na fixação dos conteúdos e significados, de 27/10 a 04.11.2016.

3.1.10 Confeção e uso do Trigominó

Para Zabala (1998), é importante que o uso de jogos pedagógicos esteja inserido num momento curricular previamente planejado. Os conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos por meio dos jogos devem estabelecer relações de continuidade/aprofundamento com o trabalho desenvolvido em sala de aula. Ainda segundo esse autor, o jogo envolve o planejamento de uma sequência didática, isto é, uma sequência de atividades que visam à construção gradativa de determinado conteúdo (conceitual, procedimental e atitudinal), com um início e fim bem explicitados.

Desse modo, dando continuidade à sequência didática anteriormente planejada para o desenvolvimento de conceitos da trigonometria no triângulo retângulo, no dia 09.11.2016, em uma aula dupla, os alunos me ajudaram a terminar a confecção do jogo Trigominó. O objetivo desse jogo é fixar as relações trigonométricas fundamentais dos arcos notáveis, onde as peças são identificadas por essas propriedades.

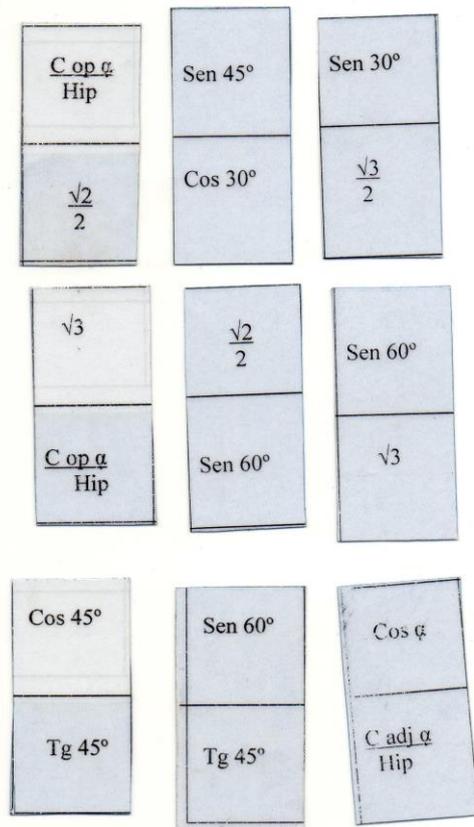


Fig. 13- Algumas peças do jogo Trigominó
 Fonte: Da autora

Em seguida, foi explicado o procedimento para jogar em grupos de 4 alunos, da mesma forma como no dominó tradicional. A maioria dos alunos ficaram ansiosos, porque era novidade; queriam iniciar o jogo e alguns grupos deixaram de prestar atenção logo de início. Mas assim que se acalmaram, a professora passou novamente as regras do jogo e no decorrer, foi tudo tranquilo, com a maioria. Um dos grupos estava um pouco desatento e desmotivado. Notou-se que não prestaram atenção e não sabiam jogar, então a professora ficou junto deles e explicou novamente, até que percebeu que iniciaram com mais facilidade e o jogo foi acontecendo.

De início, foi deixado que olhassem na tabela anteriormente construída do seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60° e também para um ângulo genérico α . Conforme iam se familiarizando com os valores, passaram a jogar sem precisar recorrer à tabela. Depois de finalizar o jogo, quando todos os envolvidos terminaram com as peças na mesa, cada um fazia uma pergunta para o outro colega e também eram feitas de um grupo para outro, sobre Trigonometria no triângulo retângulo. A participação, no geral, foi muito boa; esse jogo ajudou a memorizar os valores de seno, cosseno e tangente de 30°, 45° e 60° e também as

razões trigonométricas. Isso foi verificado com as perguntas entre os grupos e aqueles alunos que respondiam corretamente ganhavam pontos para somar na nota do bimestre. Eram propostas questões como valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos notáveis, também alguns problemas como: "Quero medir a altura de um prédio, sei a distância que me encontro do mesmo, minha altura e o ângulo formado por mim e o ponto mais alto do prédio. Qual a razão trigonométrica que devo utilizar neste problema?". Como as respostas às perguntas foram dadas muitas vezes com facilidade, foi observado que aprenderam com o jogo e que o mesmo colaborou para a fixação dos principais fatos da trigonometria no triângulo. Como observado por Zabala (1998), as relações de continuidade e aprofundamento, visadas nos momentos de planejamento e inserção do jogo, foram importantes para que este contribuísse para a aprendizagem e fixação de fatos ligados a esse conteúdo escolar.

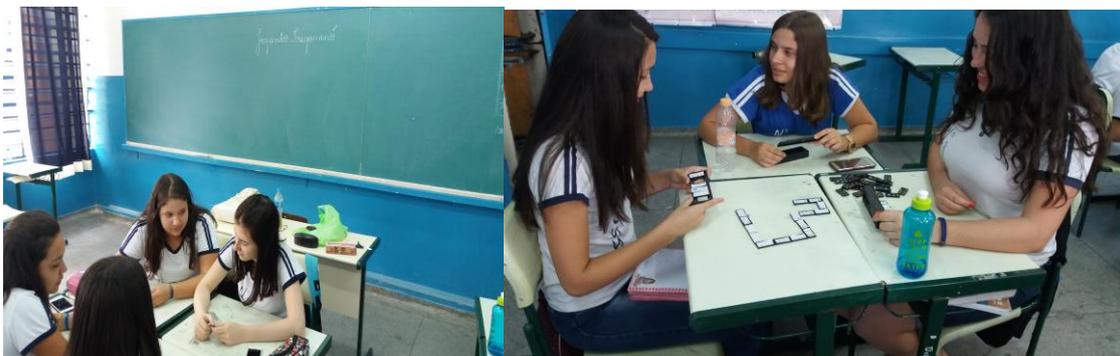


Figura 14 - Alunas jogando o Trigominó
Fonte: Da autora

Após essas atividades de experimentações e a realização de outras do livro didático, iniciou-se o estudo da circunferência.

3.1.11 Estudo da circunferência (26 de outubro a 22 de novembro de 2016 , 17 aulas)

Com o uso de barbante e trena, a classe deslocou-se a alguns pontos da escola onde há círculos, por exemplo: a mesa da praça, boca do lixo, floreira, roda do carro, entre outros; mediu-se o comprimento e o diâmetro dos mesmos. Em seguida, montou-se uma tabela com o resultado destas medidas e uma coluna foi feita para o resultado da divisão do comprimento pelo diâmetro dos círculos citados, onde os alunos fizeram a divisão com o uso da calculadora do celular e perceberam que o resultado era aproximadamente 3,14. Assim, foi explicado que esse número é chamado de π , " π " e que π tem infinitas casas decimais, mas que a calculadora

não é capaz de fazer aproximações muito precisas. Outros erros de aproximação ocorreram por causa das imprecisões dos instrumentos de medida.

Logo em seguida, foi deduzida a fórmula usual para o cálculo do comprimento da circunferência, em função de seu raio ou diâmetro, através das experiências realizadas fora da sala de aula. Também com o uso do compasso, foram construídos alguns círculos e recortados setores de iguais tamanhos para deduzir a fórmula da área. Essas atividades foram realizadas em 2 aulas.



Figura 15 - Grupos medindo comprimento de alguns objetos circulares e o diâmetro deles
Fonte: Da autora

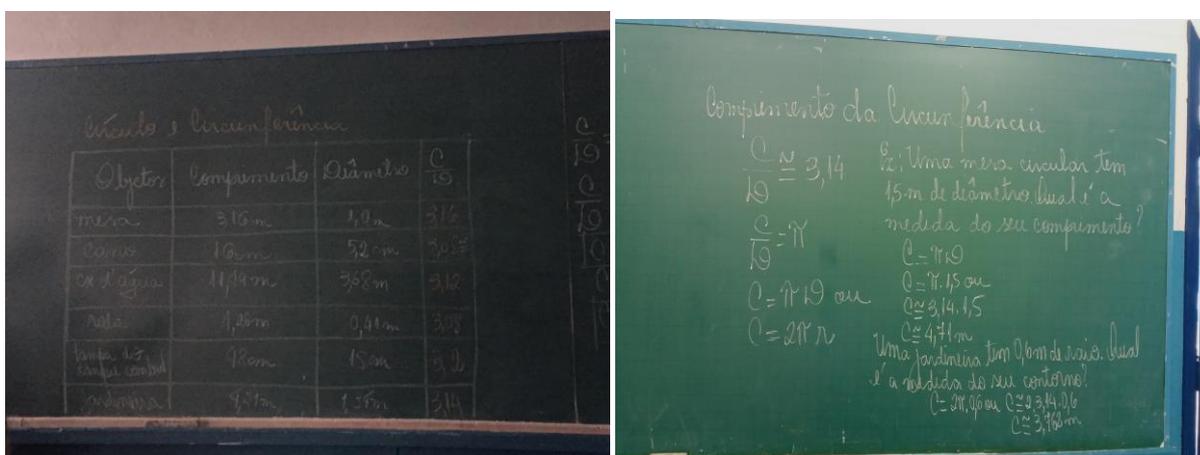


Figura 16. Tabela e conclusão da fórmula do comprimento da circunferência através dos valores obtidos pelas medições do comprimento e do diâmetro de cada objeto circular.
Fonte: Da autora

Após essas atividades envolvendo a exploração do comprimento e da área do círculo, os alunos realizaram outras atividades do livro didático *Praticando Matemática* (ANDRINI e VASCONCELOS, 2015 p. 231, 232 e 244) e do *Caderno do Aluno* (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 59-71), de 27/10 a 04.11.2016. Durante essa fase, apareciam alguns erros de cálculo de multiplicação, potenciação e outros, gerados pela falta de atenção, descuido, ou por

dificuldades com essas operações. Nesses casos, a professora fazia a interferência para chamar a atenção ao erro e para a situação correta.

3.1.12 Vídeo: *Roda do Sonho* (27.10.2016)

(Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=R52ZZ6uKxRI>)

O vídeo faz uso dos personagens Pablo e Arquimedes para abordar inicialmente o resultado deste último, de que a área de um círculo é equivalente à área de um triângulo retângulo que tem por base o perímetro deste círculo e por altura seu raio. No final também é comentado que usando o fato de que todos os círculos são semelhantes, é possível calcular a área de um círculo apenas conhecendo seu raio. Duração: aprox. 10 min.

Conteúdos: área de um círculo, relação com outras figuras geométricas e aspectos históricos.

Os objetivos esperados com a exibição desse vídeo foram: i) apresentar a dedução da área de um círculo a partir do resultado de Arquimedes (equivalência com a área de um triângulo) e da relação entre áreas das figuras semelhantes; e ii) motivar para a busca de aspectos históricos que foram fundamentais no desenvolvimento da Matemática até a forma como é conhecida hoje.

Após o vídeo e alguns comentários, foram realizados vários exercícios sobre comprimento e área do círculo.

No Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014-2017, p. 65) há um exercício envolvendo o cálculo da altura de um pneu, o diâmetro da roda e o do pneu, assim como sua largura, relacionados com números que vêm escritos na lateral do mesmo. Foi observado pela professora, na internet, uma prova do ENEM de 2016, que trazia uma questão similar, porém mais fácil (prova cinza, questão 176). Então, ela percebeu que estava preparando bem os alunos para o ENEM, porque na prova constam alguns exercícios que foram trabalhados em sala de aula e que, juntamente com as atividades lúdicas e exploratórias, passaram a ter mais significado para os alunos. E, para se obter um resultado satisfatório, observou-se que seria necessária a soma de esforço e concentração, aliados a aulas dinâmicas com alunos aplicados e participativos, o que estava sendo possível com esta nova proposta.

A figura abaixo também mostra como o trabalho realizado com esta sequência didática está na direção do que é esperado de um aluno que conclui o Ensino Médio hoje, em nosso país, com a compreensão dos conceitos e sua capacidade de aplicá-los em situações culturais de nossa sociedade.



Figura 17 - Questão 144 relacionada com o trabalho sobre circunferência.
Fonte: ENEM 2016, prova cinza.

3.1.13 Leitura do livro paradidático - (27.10.16, 03.11.16 e 04.11.16)

Essa leitura complementar (*Atividades e Jogos com Círculos*, de Marion SMOOTHY, 1998) foi realizada pela professora no final de cada uma das aulas anteriores (27.10, 03 e 04.11.16), após a sala ter terminado as atividades. Era seguida de comentários e explicações para ver se nas próximas aulas os alunos se lembrariam de mais fatos sobre os círculos).

3.1.14 AVALIAÇÃO DO SARESP (29/11/2016):

Esta avaliação foi aplicada pois há a obrigatoriedade da participação dos alunos da escola estadual, mas não fazia parte da sequência didática planejada. Nela estavam incluídas atividades relacionadas com o trabalho em questão.

3.1.15 AVALIAÇÃO BIMESTRAL (01.12.2016)

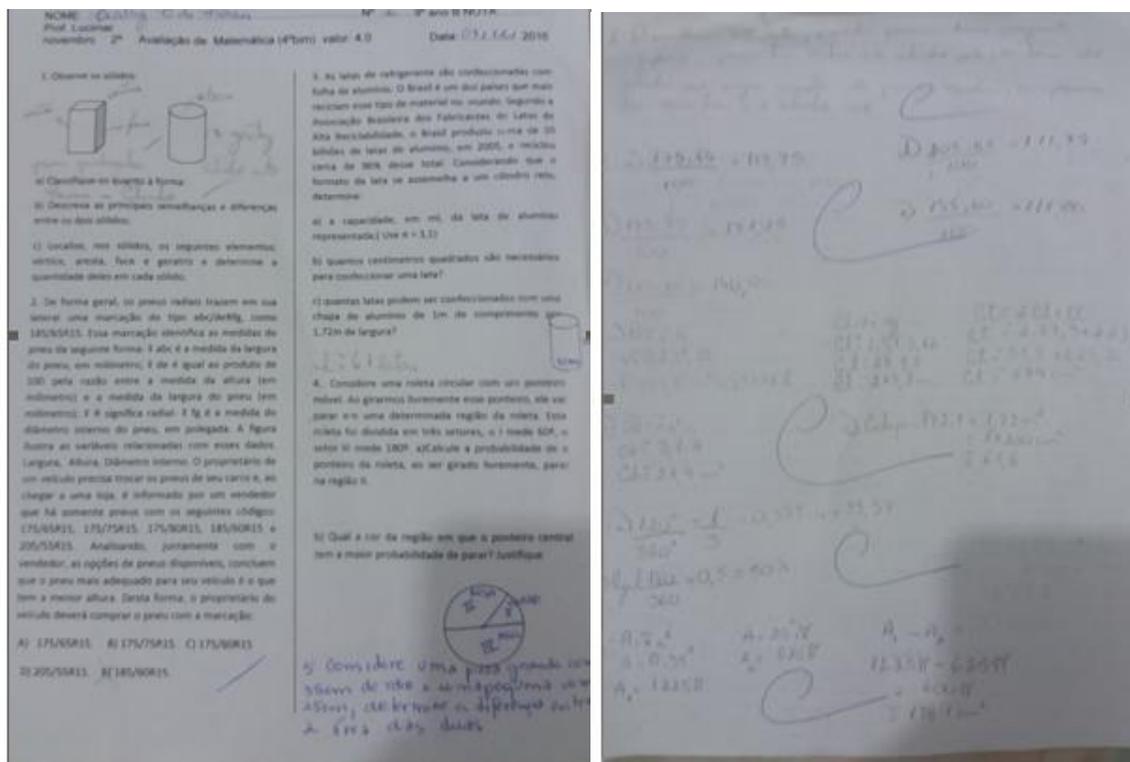


Figura 18 - Correção da prova final (4º bimestre) de um aluno do 9ºano B
 Fonte: Da autora

Com base nos resultados das avaliações e do trabalho realizado nos 3º e 4º bimestres letivos, incluindo organização, pesquisa, interação da parte dos alunos, nota-se que houve uma evolução dos mesmos e que, para eles, foi um semestre de descobertas. Observou-se que os alunos foram capazes de resolver problemas trigonométricos e saber qual razão deveriam usar, o que, antes de ter esse conteúdo desenvolvido dessa forma, não era usual. Em relação à circunferência, eles mesmos descobriram o valor aproximado do π e, souberam proceder corretamente nos cálculos.

Um dos alunos falou ao término dessas atividades: "Professora, quando nós mesmos fazemos nossos trabalhos e temos que pensar, nós aprendemos de verdade e não esquecemos mais. Gostamos de realizar essas atividades diferentes".

4 Reflexões sobre a Aplicação

Neste capítulo, será feita uma síntese das ações executadas em sala de aula e uma reflexão sobre as melhorias possibilitadas pelas atividades lúdicas e exploratórias, melhorias referentes à aprendizagem dos alunos e ao avanço profissional da docente.

A partir do estudo teórico realizado e de experiências analisadas de Moysés (1997), constatou-se que os conteúdos de Trigonometria seriam interessantes para serem desenvolvidos através de uma metodologia que incluísse situações matemáticas para a *exploração* de conceitos e propriedades, bem como com a utilização de aspectos *lúdicos*, com os quais a professora-pesquisadora teve contato em seus estudos durante o mestrado profissional.

Desse modo, foi planejada a sequência didática, em que os alunos do 9º ano B trabalharam em grupo, pesquisaram, realizaram experiências, usaram materiais diversificados (calculadora, trena, régua, compasso, transferidor, teodolito, jogo do trigominó), através de atividades exploratórias e/ou lúdicas, que tornaram as aulas no 2º semestre de 2016 mais dinâmicas, menos cansativas e com melhor aproveitamento, tanto da professora como também dos alunos, que, por várias vezes, mostraram contentamento.

4.1 O Desenvolvimento dos Alunos

A professora iniciou esse trabalho apresentando aos alunos os objetivos das atividades, explicando que seriam aulas diferenciadas com o uso de vídeos, jogos, leitura de livros paradidáticos, atividades exploratórias, saída da sala para algumas medições, uso de calculadora, trabalhos em grupo. Esse esclarecimento foi bem aceito pela sala, que ficou na expectativa de um trabalho diferenciado. Foi negociado também um comportamento participativo durante as atividades.

Após a aplicação dessa sequência proposta, constatou-se que essa negociação inicial foi importante para manter a motivação dos alunos e as interações em todos os momentos em que eram solicitadas.

Conforme orientações do *Currículo do Estado de São Paulo* (SÃO PAULO, 2012), na área de Matemática e suas Tecnologias, buscou-se aprimorar nos educandos as capacidades de agir, refletir e atuar no mundo em que vivem, ampliando aspectos de sua formação cultural, social e para o trabalho. A qualidade da educação das escolas públicas vem cada vez

mais procurando a excelência, mantendo também a preocupação em despertar a autonomia do aluno, que deve buscar sua aprendizagem contínua.

De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012, p.30):

A Matemática nos currículos deve constituir, em parceria com a língua materna, um recurso imprescindível para uma expressão rica, uma compreensão abrangente, uma argumentação correta, um enfrentamento assertivo de situações-problema, uma contextualização significativa dos temas estudados.

Esse documento tem como base três eixos norteadores de competências:

- *Expressão/compreensão*: é a capacidade de expressão do eu, de compreensão do outro, incluindo a leitura de todos os gêneros e a compreensão de fatos e fenômenos. A Matemática, dentro deste eixo, busca a expressão e compreensão da realidade.
- *Argumentação/decisão*: é a capacidade de argumentar, analisar e articular as informações adquiridas de diversas formas, buscando as tomadas de decisões e realização de ações efetivas. A Matemática, dentro deste eixo, proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico e da análise racional, buscando as conclusões pertinentes ao mundo em que o educando está inserido.
- *Contextualização/abstração*: é a capacidade de contextualizar conteúdos estudados na escola, significando-os em especial no mundo do trabalho. É destaque da Matemática, neste eixo, a capacidade de trabalhar com o concreto e o abstrato.

As práticas exploratórias e lúdicas, introduzidas com as atividades aqui apresentadas, não eram hábito dos alunos deste 9º ano e também não, para essa professora, mas objetivavam o desenvolvimento do conteúdo. De posse das atividades descritas no capítulo 3, houve a motivação para que os alunos buscassem se aperfeiçoar cada vez mais. Como comentado naquele capítulo, houve uma significativa evolução nas médias bimestrais desses alunos. Essa avaliação tem um caráter qualitativo, porque analisa o desenvolvimento da aprendizagem que é direcionado para um todo, desde a evolução das relações interpessoais até o crescimento matemático, observados no decorrer do desenvolvimento da sequência didática.

Por exemplo, ao montarem as tabelas com os dados obtidos na exploração das medidas de objetos circulares do entorno da escola em uma tabela, calculando também a taxa observada na relação comprimento da circunferência/diâmetro (capítulo 3, atividade 3.1.11), os alunos tiveram que expressar ideias matemáticas organizadamente e também relacioná-las com os cálculos, trazendo maior compreensão à obtenção da fórmula do comprimento de uma circunferência, envolvendo seu raio ou diâmetro.

Ao explorarem o ambiente externo à escola para fazerem medidas utilizando o “teodolito” (atividade 3.1.9), os alunos tiveram que tomar decisões a respeito de quais seriam as relações trigonométricas a serem usadas em cada caso e também aprenderam a argumentar por que estas seriam adequadas.

Em diversas atividades, mas principalmente naquelas que mencionaram o uso de recursos e materiais usados por pedreiros e marceneiros (atividades 3.1.9, 3.1.1, 3.1.12 e 3.1.13), os alunos puderam verificar que as relações trigonométricas e das medidas no círculo são bastante aplicadas em diversos contextos culturais da sociedade atual e das profissões liberais, verificando que a abstração dessas ideias, através dos princípios trigonométricos, auxiliam na resolução de problemas práticos relativos a essas profissões.

Com o objetivo de desenvolver um raciocínio significativo sobre as relações trigonométricas, estimulando-se a troca de ideias, foram feitas atividades em grupo, com boa participação da maioria. Alertada pelas leituras realizadas previamente, esta professora-pesquisadora percebeu a importância da *mediação* na aprendizagem dos alunos em diversos momentos, como por exemplo, ao apresentarem alguns “erros”, ela notou que os próprios colegas do grupo auxiliavam os outros que estavam errando o cálculo, ou confundindo as razões trigonométricas. Com as limitações de pessoas em processo de desenvolvimento, precisa-se de estímulos, paciência e compreensão, e a detecção do erro é uma etapa importante para a ampliação de conceitos e melhorias em atitudes e procedimentos. O trabalho compartilhado nos grupos ajudou os alunos nesse sentido, de ficarem mais alertas aos próprios erros e também de auxiliarem uns aos outros.

Nesta sequência, o momento fundamental e esperado foi o cálculo dos valores trigonométricos e suas aplicações para resolver problemas relacionados ao cotidiano e a algumas experiências culturais das profissões na sociedade atual. Sempre com função mediadora, a professora atendeu a todos os grupos, direcionando-os.

Cabe ressaltar que nesses momentos, com atividades exploratórias, os alunos não tinham um modelo prévio a ser seguido, apenas um objetivo a ser alcançado. Várias

estratégias foram utilizadas e o fato de grande parte dos grupos terem feito uso da calculadora em algumas situações, deu-lhes ânimo e determinação para alcançarem os resultados.

Já com a exploração do jogo *Trigominó*, os alunos puderam memorizar informações e ideias previamente discutidas. Eles se envolveram durante o jogo e foram capazes de, fazer perguntas pertinentes aos colegas, o que mostra que o jogo auxiliou nos processos de internalização da simbologia desenvolvida.

Uma das vantagens dessas atividades pôde ser observada na diversidade de estratégias abordadas, de acordo com um entendimento da situação. É nesse sentido que se dá a aprendizagem significativa, muitas vezes almejada e não alcançada com a mera apresentação antecipada de modelos de problemas pelo professor e/ou exercícios de fixação.

Neste trabalho, pôde-se observar, na prática da sala de aula, conceitos como *mediação*, *zona de desenvolvimento proximal*, *formação de conceitos*, que foram estudados no texto de Oliveira (1995), sobre o pensamento de Vygotsky.

Fato curioso chamou a atenção da professora durante a realização desta sequência. Em determinado grupo, um aluno que será citado pelo pseudônimo Félix, de início não realizava quase nada e debruçava-se sobre a mesa, mas com o decorrer das outras atividades, foi se acostumando e percebendo que sabia fazer alguma coisa; o líder do grupo lhe chamava e pedia algum cálculo; ele apresentou um bom resultado nesta etapa. Acabou percebendo que sabia calcular, mas, até então, talvez ele se sentisse apenas mais um na sala. Ansioso por querer participar, mostrou sua capacidade e importância. Seguem os relatos de como Félix realizou as atividades:

Resolvendo algumas questões:

...“Comecei usando a calculadora, mas o Marcos falava pra eu fazer cálculo também no papel que ele iria corrigir. E com esse incentivo do meu amigo e mais atenção na explicação, percebi que eu sabia sim; eu era preguiçoso.”...(aula do dia 25.10.2016)

Acredita-se que com várias atividades desse tipo seria possível garantir um avanço desejável junto aos alunos e isso evidencia o potencial das atividades exploratórias e lúdicas para a aprendizagem e o desenvolvimento mais global de todos os estudantes. Até mesmo alunos que aparentemente apresentavam mais dificuldades participaram da atividade, demonstrando ter capacidades muitas vezes não percebidas nas aulas tradicionais.

Através de uma conversa final, questionou-se sobre o que eles acharam destas aulas e, aqueles que são mais desinibidos falaram para a professora continuar com essas atividades exploratórias e, se possível, com jogos em outros conteúdos da Matemática.

Após a realização das atividades em grupo, a professora-pesquisadora, refletiu sobre os avanços comportamentais dos alunos, o entrosamento durante o período. Como em qualquer ambiente, opiniões divergentes ocorriam a todo o momento, mas os alunos adquiriram, durante o processo, discernimento suficiente para superá-las. O respeito se deu da melhor forma possível, facilitando o desenvolvimento das tarefas, o que mostra que um trabalho planejado pode ser bem-sucedido.

4.2 Como ficou a relação professora-alunos

A aplicação da sequência didática promoveu o avanço na relação professora-alunos e também no avanço na resolução das atividades propostas.

A ação da professora passou a ser direta com os grupos; facilitaram-se as trocas de experiências, além de estabelecer um maior nível de confiança entre ambos os lados. A valorização do trabalho de todos fez com que a seriedade fosse mantida.

No 1º semestre, os alunos se mostravam bastante apáticos e necessitavam de certo esforço da professora até para abrirem o caderno e realizarem as tarefas, diferentemente do término do ano letivo, em que a relação entre eles e entre alunos e professora foi de grande parceria.

4.3 Formação profissional docente

Promover a aprendizagem matemática significativa em seus alunos é sempre um desafio para o professor que recebeu, ele próprio, um ensino tradicional e pouco estimulante. As leituras sobre alguns autores e análise de algumas experiências didáticas diversificadas, auxiliaram a professora a construir sua própria sequência didática.

Mediante a proposta apresentada aos alunos, analisou-se todos os trabalhos em grupo, como agia cada aluno em conjunto com os demais, assim como os registros, cálculos, experiências e também a aprendizagem dos mesmos, através das avaliações escritas e participações nas atividades.

Após a aplicação das atividades exploratórias e lúdicas, a professora verificou que o trabalho foi eficaz, promovendo a satisfação pessoal da profissional. Esta professora-pesquisadora percebeu, ao final, que a aplicação dessas atividades é possível em salas de aula desafiadoras, em que as defasagens de aprendizagem são bastante frequentes.

Ao aplicar esta sequência didática, pode-se dizer que houve um desenvolvimento do *conhecimento pedagógico do conteúdo* (SHULMAN, 1986), bem como dos conhecimentos curriculares desta professora, ao interpretar o *Currículo do Estado de São Paulo*, à luz de uma nova ideia metodológica e de seu desenvolvimento na prática de uma sala de aula considerada desmotivada. Segundo esse autor, o *conhecimento pedagógico* é construído pelo professor ao ensinar; é o real conhecimento do conteúdo, que inclui, além da compreensão sobre um tópico de uma disciplina, também os procedimentos e as técnicas necessárias para se alcançar a aprendizagem, aqui entendida de modo que ocorra significativamente para os estudantes.

Com o desenvolvimento deste trabalho, a professora aprendeu, ainda, a refletir continuamente sobre a sua ação didático-pedagógica, com os estudos sobre a pesquisa qualitativa. Também pôde observar que existe sempre a necessidade da flexibilização no planejamento e execução das atividades, com retomadas constantes. Mediante a realização das atividades, a professora percebeu um melhor entrosamento entre os alunos, o que facilitou a aprendizagem também nas aulas subsequentes.

CONCLUSÃO

Esta dissertação foi pensada mediante o desejo de tornar as aulas mais significativas e da vontade de ver os alunos com participação ativa, motivados a estudar Matemática. Afinal, é papel dessa disciplina fornecer ferramentas que permitam a construção do conhecimento humano.

A partir da leitura dos teóricos e de outras práticas observadas (MOYSÉS, 1997), foi proposta uma sequência didática, pensada para uma sala de aula desmotivada, a fim de gerar o desejo por resoluções de atividades exploratórias que levassem em conta os conteúdos do Currículo do Estado de São Paulo.

A aplicação da sequência ocorreu de uma forma agradável, sem muitas dificuldades, onde os alunos passaram a ser corresponsáveis pelo processo de ensino e aprendizagem. As atividades realizadas em grupos foram capazes de desenvolver competências como: argumentação, contextualização, abstração, comunicação e expressão. Desenvolveram, ainda, alunos participativos, críticos, colaborativos, atuantes e um pouco mais autônomos, conclusão observada no resultado bimestral das notas dos alunos, na observação do desenvolvimento durante o trabalho em grupo e na fala de alguns dos alunos já citadas anteriormente.

Alguns conhecimentos matemáticos sobre trigonometria no triângulo retângulo e medidas em círculos puderam ser aprendidos de forma significativa, pois, muitas vezes, não se tinha um caminho pronto a ser seguido e a tomada de decisão era necessária, com os conhecimentos previamente construídos. Aqui, verifica-se que as atividades estavam de acordo com a *zona de desenvolvimento proximal* dos alunos, no momento em que foram propostas, e que fizeram ampliar os significados por eles atribuídos às situações (matemáticas ou não) que envolviam a trigonometria no triângulo retângulo e o estudo do círculo.

Através dos registros nos cadernos e das avaliações, pôde-se perceber a busca pelo conhecimento matemático e a integração dos membros dos grupos, ora discutindo métodos, ou realizando os cálculos. Mesmo alunos com maior dificuldade participaram, mostrando sua evolução durante as atividades e nas avaliações. Eis mais uma vantagem dessa sequência: o desenvolvimento do aluno na sua totalidade, seja da disciplina em específico, interligando conteúdos dentro da própria Matemática, seja na língua materna, em suas formas de expressão oral e escrita, ou ainda, quanto às atitudes, ao valorizarem o trabalho em conjunto, estimulando o pensar coletivamente.

Diferentemente das aulas tradicionais, onde os alunos são dispostos em fileiras e o professor é o autor do processo, as atividades exploratórias favoreceram a mobilidade, ora em grupos, ora em roda, ora fora do espaço da sala de aula, dentre outras disposições, fazendo-os trocar ideias, pesquisar nos livros, favorecendo a fixação da atenção sobre as tarefas a serem realizadas e, conseqüentemente, a aprendizagem. As constantes devolutivas e orientações realizadas pela professora e, algumas vezes pelos próprios colegas do grupo, nos registros ou nas interações dialogadas durante as aulas, mostrou o benefício desta prática, fazendo com que os alunos analisassem mais os erros e buscassem por novas ações. Desse modo, a seqüência aqui apresentada enfatizou os processos de *mediação* de significados na sala de aula, uma vez que os parceiros mais capazes orientavam as ações e compreensões de outros.

Através das atividades lúdicas e exploratórias compartilhadas, a aprendizagem se tornou mais significativa e desenvolveu a autonomia e a motivação para aprender o conteúdo, como pôde ser comprovado pelas falas do aluno Félix, além de beneficiar as relações nos grupos estabelecidos durante essas atividades. Foi através das trocas ocorridas nos grupos e com a professora, que os alunos foram internalizando novos conhecimentos. Por exemplo, na atividade 3.1.8, ao construir as tabelas dos valores trigonométricos para os ângulos de 30° , 40° e 60° , a partir dos desenhos de triângulos equiláteros e da mediação com as perguntas feitas por esta professora-pesquisadora, ao invés de apenas memorizarem esses valores, puderam observar de onde eles surgem, argumentando devido ao Teorema de Pitágoras e as medidas em triângulos retângulos especiais. Assim, acredita-se que houve maior chance de *internalização desses significados* por parte dos alunos.

Após a reflexão sobre esse processo, reflexão sobre a ação, uma crítica que pode ser feita a este tipo de abordagem em sala de aula é que ela toma um tempo considerável para trabalhar os conteúdos matemáticos. Por esse motivo, recomenda-se que devem ser mescladas com outras metodologias de ensino, cada uma com seu benefício. Mas como decidir? Cabe ao professor diagnosticar, avaliar e tomar decisões, a fim de proporcionar a aprendizagem para todos os seus alunos, mesmo que em diferentes tempos e níveis, para cada um.

Com o uso das atividades exploratórias e lúdicas, segundo a figura 5 da página 46 sobre os dados comparativos e a percepção desta professora-pesquisadora, melhorou-se: o interesse dos alunos pela própria aprendizagem; o desenvolvimento do raciocínio lógico e da argumentação, nas tomadas de decisões; a possibilidade das interligações entre os conhecimentos prévios dos alunos, obtidos de suas vivências culturais, com a Matemática escolar e também entre os diferentes conteúdos dessa disciplina; o desenvolvimento de

habilidades de expressão oral e escrita; a possibilidade de uma avaliação contínua dos alunos, no acompanhamento dos registros das tarefas; os seus desempenhos nas provas oficiais (avaliações mensal, em curso e bimestral); e as condutas disciplinares em sala de aula.

Essa forma de ensinar, diferente do tradicional, com atividades exploratórias e o uso do lúdico, mostrou a necessidade de adequações e da busca constante por novos conhecimentos, também por parte desta professora, que nessa busca, veio a reconstruir-se como educadora.

Entende-se que a análise aqui apresentada precisaria ser aprofundada e mais descritiva, para ser caracterizada, de fato, como uma pesquisa qualitativa. Mas isso poderia ser aperfeiçoado num trabalho futuro, tendo em vista que o caráter prático do desenvolvimento profissional desta professora-pesquisadora foi o foco principal neste trabalho.

Acredita-se que esta experiência, através da ação na prática escolar, seu registro e a reflexão sobre a mesma, juntamente com os estudos adicionais realizados para esta pesquisadora e as disciplinas cursadas no PROFMAT, proporcionaram à professora o desenvolvimento, tanto no que diz respeito aos *conhecimentos dos conteúdos* de Matemática, quanto aos *conhecimentos pedagógicos desses conteúdos* e sobre os *currículos* e sua relação com as experiências sociais e culturais dos alunos. E será somente a partir destes, através de um exercício contínuo de conexão das teorias e das práticas pedagógicas, que o professor poderá decidir sobre o uso de outras metodologias em suas aulas.

Referências Bibliográficas

ANDRÉ, M.E.D.A. **Etnografia da Prática Escolar**. Campinas, SP: Papyrus, 1995.

ANDRINI, A. e VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática**. 4ª Ed., São Paulo, SP: Editora do Brasil, 2015.

DEGRAVA, C. F. **Gerando possibilidades concretas de uso da Proposta Curricular do Estado com Metodologias Investigativas**. 2013. 67p. Dissertação de Mestrado. São Paulo: ICMC-USP, 2013.

MOYSÉS, L. **Aplicações de Vygotsky à Educação Matemática**, Coleção Magistério, Papyrus, Campinas, SP, 1997.

OLIVEIRA, M. K. **Vygotsky - aprendizado e desenvolvimento: um processo sócio-histórico**. 2ª.ed. São Paulo: Scipione, 1995.

SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno. Matemática - Ensino Fundamental- 8ª série / 9º ano**, v. 2. São Paulo. Nova edição 2014- 2017.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado**. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2012.

SHULMAN, L.S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington, v.15, n.2, p.4-14, 1986.

SMOOTHEY, M. **Atividades e Jogos com Círculos**. São Paulo: Scipione, 1998.

ZABALA, A. **A Prática Educativa: Como ensinar**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

Vídeos: <https://www.youtube.com/watch?v=7bm4Q3pdFio>

<https://www.youtube.com/watch?v=R52ZZ6uKxR>

ANEXO A:

Atividades da sequência didática proposta aos alunos:

1) Revisão de semelhança de triângulos e Teorema de Pitágoras.

Recordação de fatos sobre a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras – através de perguntas da professora e respostas dos alunos e registro na lousa.

2) Dedução das relações métricas no triângulo retângulo:

Confeccione dois triângulos com medidas de 12cm, 16 cm e 20 cm. Corte um deles pela sua altura relativa à hipotenusa e, com os três triângulos semelhantes, calcule as razões entre os lados homólogos. Conclua sobre as relações métricas que você obteve para o triângulo retângulo.

3) Exercícios propostos aos alunos sobre as relações métricas no triângulo retângulo, do livro didático 9º ano: (ANDRINI, A. e VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática**. 4ª Ed., São Paulo, SP: Editora do Brasil, 2015, pág.200 a 206) e do Caderno do Aluno: (SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno. Matemática - Ensino Fundamental- 8ª série / 9º ano**, v. 2. São Paulo. Nova edição 2014- 2017, pág. 28 a 41).

4) Exibição de vídeos do Prof. Geraldo Ventura sobre as relações métricas no triângulo retângulo, com realização de mais alguns exercícios desse vídeos :
<https://www.youtube.com/watch?v=7bm4Q3pdFio>
<https://www.youtube.com/watch?v=R52ZZ6uKxR>

5) Construção das razões trigonométricas no triângulo retângulo

Desenhe alguns triângulos retângulos com a mesma abertura, mas com medidas de lados diferentes. Em seguida, calcule as razões, entre os lados desses triângulos dois a dois, e compare entre eles. O que você observa em cada razão, para os triângulos de medidas diversas?

(Observar, junto aos alunos, que os resultados dessas razões não dependem das medidas dos lados, e sim, da abertura do ângulo. Na sequência, a professora deve sintetizar na lousa que a razão entre o cateto oposto ao ângulo e a hipotenusa recebe o nome de *seno*; a razão entre o

cateto adjacente e a hipotenusa recebe o nome de *coseno*; e a razão entre o cateto oposto ao ângulo e o cateto adjacente recebe o nome de *tangente*.

6) Exercícios propostos do livro didático do 9º ano (ANDRINI, A. e VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática**. 4ª Ed., São Paulo, SP: Editora do Brasil, 2015, pág.214 e 215) e do Caderno do Aluno (SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno. Matemática - Ensino Fundamental- 8ª série / 9º ano**, v. 2. São Paulo. Nova edição 2014- 2017, pág. 42 a 49) .

7) Construção das razões trigonométricas para os principais ângulos (30°, 45° e 60°).

Desenhe um triângulo equilátero e trace sua altura para obter um triângulo retângulo. Em relação aos ângulos de 30° e 60°, relacione quais são os catetos opostos a eles e a razão de suas medidas com as das respectivas hipotenusas. Em seguida, relacione quais são os catetos adjacentes a eles e a razão de suas medidas com as das respectivas hipotenusas. Faça o mesmo entre catetos opostos com os adjacentes a eles, obtendo resultados para o seno, cosseno e tangente desses ângulos.

Na sequência, construa um quadrado e trace sua diagonal. Relacione os lados do triângulo formado obtendo o seno, o cosseno e a tangente do ângulo de 45°.

8) Atividades relacionadas com os valores trigonométricos para ângulos notáveis do livro didático do 9º ano (ANDRINI, A. e VASCONCELLOS, M.J. **Praticando Matemática**. 4ª Ed., São Paulo, SP: Editora do Brasil, 2015, pág.219 e 224) e do Caderno do Aluno (SÃO PAULO (Estado), Secretaria da Educação. **Caderno do Aluno. Matemática - Ensino Fundamental- 8ª série / 9º ano**, v. 2. São Paulo. Nova edição 2014- 2017, pág. 50 a 52)

9) Atividades com teodolito e medida de objetos externos:

Confeccionar, com a ajuda dos alunos, vários teodolitos, com papelão, xerox do transferidor, canudo, barbante e uma moeda, conforme foto abaixo.

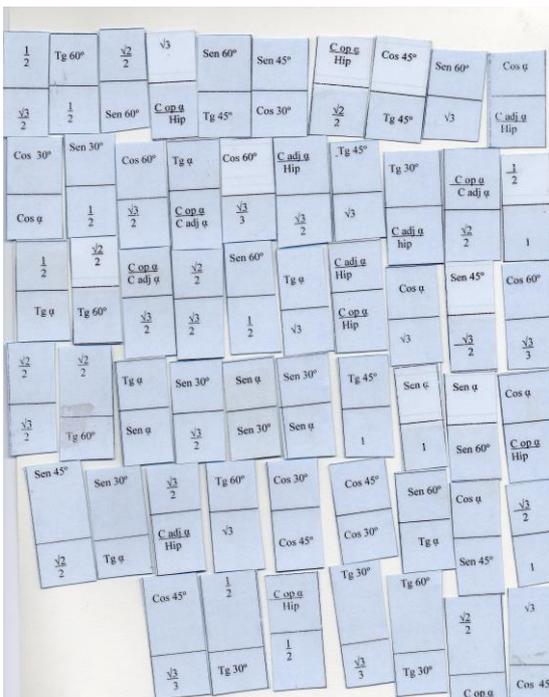


Fonte: Da autora

Escolher vários pontos fora da sala de aula para medir, como postes, torres da escola, altura de paredes, altura da cobertura da quadra. Estimular os alunos a descobrirem qual é a razão trigonométrica mais adequada em cada caso (tangente) e, a partir da tabela com os valores trigonométricos e uso de calculadora, estimular que os grupos façam os cálculos dessas alturas.

10) Jogo do Trigominó:

Confeccionar os trigominós com a ajuda dos alunos (tantos quantos forem os grupos de 4 alunos na sala de aula), conforme foto, com peças com seno, cosseno e tangente e os valores dessas razões para 30°, 45° e 60°.



Fonte: Da autora

Formar grupos com 4 alunos e explicar que as regras são as mesmas que as de um jogo de dominó. Cada um receberá seu conjunto de um trigominó completo. Distribuir as peças igualmente para os componentes do grupo e deixar que realizem um total de 4 jogadas.

11) Comprimento da circunferência:

Com o uso do barbante e trena, levar os alunos a áreas externas da escola, para medir alguns objetos circulares, como: mesa redonda do pátio, rodas de carros, jardineiras redondas, tampos de recipientes circulares. Devem ser medidos o comprimento das respectivas circunferências e os diâmetros (para estes, deve ser discutido com os alunos como encontrar o diâmetro desses objetos; devem chegar à conclusão de que precisam encontrar o maior segmento entre dois pontos da circunferência).

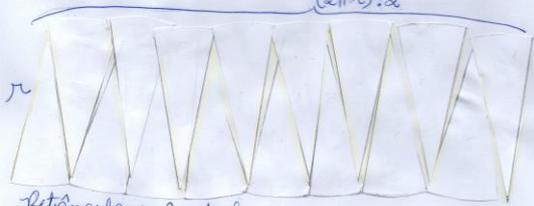
Solicitar aos alunos que anotem os resultados em uma tabela e, em grupo, na sala de aula, façam uso da calculadora para dividirem os comprimentos das circunferências pelos seus respectivos diâmetros. Espera-se que encontrem valores aproximados a 3,14. Com esses resultados, explicar que este número que representa a razão recebe o nome de "*pi*", e que se aproxima do valor 3,14. Inferir, em seguida, utilizando-se dessa razão, que o comprimento da circunferência é calculado pelo produto de *pi* pelo diâmetro dessa circunferência, ou por dois raios.

12) Área do círculo:

Com uma folha de papel, solicitar aos alunos que construam uma circunferência e a dividam em diversos setores de igual tamanho, marcando vários de seus raios. Em seguida, solicitar que recortem esses setores gerados (através dos raios) e os coloquem um ao lado do outro, um para cima e outro para baixo, formando uma figura que se aproxima de um retângulo. Questionar os alunos sobre qual será a medida da base e da altura desse retângulo, para o que se espera que respondam, respectivamente, a “metade do comprimento da circunferência” e “o raio”. Pede-se que calculem a área desse retângulo, e com essa experiência, percebam que, quanto menores forem os setores formados, mais esta área se aproximará da área do círculo e concluam que, para calcular esta área, chega-se à fórmula em que se multiplica "*pi*" pelo quadrado do raio.

Comprimento do círculo $C = 2\pi r$
o comprimento de 16 setores = $2\pi r$

$$(2\pi r) : 2$$



Retângulo $\Rightarrow A = b \cdot h$
 $A = \frac{2\pi r}{2} \cdot r$

$$A = \pi r^2$$

