



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO SEMI-ÁRIDO PRÓ-
REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

HILDEBERTO FERNANDO DE FREITAS REGIS

**O USO DE QUEBRA-CABEÇAS PARA ESTIMULAR O APRENDIZADO
DE POLÍGONOS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA NO ENSINO
FUNDAMENTAL**

MOSSORÓ/RN

2017

HILDEBERTO FERNANDO DE FREITAS REGIS

**O USO DE QUEBRA-CABEÇAS PARA ESTIMULAR O APRENDIZADO DE
POLÍGONOS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural
do Semiárido – UFRSA, campus Mossoró, para
obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal

Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES

© Todos os direitos estão reservados a Universidade Federal Rural do Semi-Árido. O conteúdo desta obra é de inteira responsabilidade do (a) autor (a), sendo o mesmo, passível de sanções administrativas ou penais, caso sejam infringidas as leis que regulamentam a Propriedade Intelectual, respectivamente, Patentes: Lei nº 9.279/1996 e Direitos Autorais: Lei nº 9.610/1998. O conteúdo desta obra tomar-se-á de domínio público após a data de defesa e homologação da sua respectiva ata. A mesma poderá servir de base literária para novas pesquisas, desde que a obra e seu (a) respectivo (a) autor (a) sejam devidamente citados e mencionados os seus créditos bibliográficos.

R337u REGIS, HILDEBERTO FERNANDO DE FREITAS .
O USO DE QUEBRA-CABEÇAS PARA ESTIMULAR O
APRENDIZADO DE POLÍGONOS NA DISCIPLINA DE
MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL / HILDEBERTO
FERNANDO DE FREITAS REGIS. - 2017.
59 f. : il.

Orientador: ELMER ROLANDO LLANOS VILLARREAL.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal
Rural do Semi-árido, Programa de Pós-graduação em
Matemática, 2017.

1. POLIGONOS. 2. QUEBRA-CABEÇAS. 3. ESTIMULAR.
4. AVALIAR. I. VILLARREAL, ELMER ROLANDO LLANOS ,
orient. II. Título.

O serviço de Geração Automática de Ficha Catalográfica para Trabalhos de Conclusão de Curso (TCC's) foi desenvolvido pelo Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (USP) e gentilmente cedido para o Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal Rural do Semi-Árido (SISBI-UFERSA), sendo customizado pela Superintendência de Tecnologia da Informação e Comunicação (SUTIC) sob orientação dos bibliotecários da instituição para ser adaptado às necessidades dos alunos dos Cursos de Graduação e Programas de Pós-Graduação da Universidade.

HILDEBERTO FERNANDO DE FREITAS REGIS

O USO DE QUEBRA-CABEÇAS PARA ESTIMULAR O APRENDIZADO DE POLÍGONOS NA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada a Universidade Federal Rural do Semiárido – UFRSA, campus Mossoró, para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

APROVADA EM: 28/04/2017

BANCA EXAMINADORA

Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal Presidente

Dr. Antônio Gomes Nunes – UFRSA Primeiro Membro

Dr. Walter Martins Rodrigues - UFRSA Segundo Membro

Mossoró/RN, 28 de 04 de 2017

Dedico este trabalho a minha família, ao meu professor orientador Dr. Elmer Rolando Llanos Villarreal e ao coordenador do mestrado Dr. Antonio Gomes Nunes pelo apoio e incentivo para realização desse curso.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, força suprema, que guia minha vida, me concede energia e saúde para galgar e desbravar essa jornada.

A minha esposa Francilene Nogueira da Costa Regis e aos meus filhos que foram a minha fonte de inspiração, de incentivo e que sempre estiveram comigo durante o mestrado.

A minha mãe Suzana de Freitas Regis que sempre acreditou no meu potencial e que tantas vezes rezou por mim e me encorajou para a conclusão desse trabalho.

Ao meu pai José Silvestre da Costa Regis, que dedicou a maior parte de sua vida aos estudos, sempre em busca do conhecimento, é sem dúvida uma pessoa na qual eu me espelho e não deixa que me acomode diante de uma imensidão de descobertas que a matemática proporciona.

Aos meus colegas de curso que tantas horas estivemos juntos, estudando, debatendo e trocando informações.

Aos meus professores, que com muita sabedoria me motivaram a realizar este sonho.

Ao meu orientador Elmer Rolando Llanos Villarreal que sempre me deu forças, acreditou na minha capacidade e me estimulou para concluir esta dissertação.

A minha filha Suzana Virgínia da Costa Regis que muito contribui na organização desta obra.

A todos os meus irmãos Elza, Helder (in memoriam), Humberto, Hélio, Heráclito, Hildo, Herman, Emília, Heládio e Henrique.

“A matemática vista com justeza, possui não apenas verdade, mas suprema beleza – uma beleza fria e austera, como só a grande arte pode mostrar”.

(Bertrand Russel)

RESUMO

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre polígonos com o apoio de quebra-cabeças. A minha experiência em sala de aula lecionando matemática nos ensinos fundamental e médio, nas escolas públicas por mais de vinte anos contribuiu bastante para a realização desta obra. Vários quebra-cabeças foram selecionados de acordo com o seu grau de importância, dentre eles: o tangram, a dissecção de polígonos ou quebra-cabeças bidirecionais, os quebra-cabeças construídos com palitos ou canudinhos e o geoplano. Para cada jogo foi adaptado um exercício específico que se encaixaria na medida em que o conteúdo fora apresentado, sempre respeitando o nível de conhecimento, de percepção e de raciocínio lógico, de modo que o professor foi o intermediador entre o sujeito e o objeto, mantendo sempre um diálogo pedagógico para que todos ficassem à vontade para fazer suas descobertas e assim construíssem conceitos geométricos. Foram apresentadas também juntamente com as atividades propostas algumas formas de avaliar os alunos, por exemplo: com a participação na construção das figuras, suas argumentações e observações e principalmente, as habilidades para expor hipóteses e resolver problemas.

Palavras-chave: Polígonos, quebra-cabeças, estimular e avaliar.

ABSTRACT

In this work, we conducted a study on polygons supported by puzzles. My classroom experience teaching mathematics in primary and secondary education in the public schools for over twenty years has contributed enough to the accomplishment of this work. Various puzzles were selected according to your degree of importance, among them: the tangram, dissection of polygons or two-way puzzles, the puzzles built with toothpicks or straws and the geoboard. For each game was adapted a specific exercise that would fit to the extent that the content outside presented, always respecting the level of knowledge, perception and logic, so that the teacher was the mediator between subject and object, always maintaining a pedagogical dialogue so that everyone would be free to make their discoveries and thus build geometric concepts. Were also presented along with the proposed activities are ways to evaluate students, for example: with the participation in the construction of figures, their arguments and observations and especially the skills to expose assumptions and solve problems.

Keywords: Polygons, puzzles, stimulate and evaluate.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 - Linhas poligonais..... | 14 |
| Figura 2 - Linhas poligonais abertas..... | 14 |
| Figura 3 - Linhas poligonais fechadas..... | 15 |
| Figura 4 - Linha poligonal fechada mples..... | 15 |
| Figura 5 – Linhas poligonais fechadas não simples..... | 15 |
| Figura 6– Polígonos..... | 16 |
| Figura 7 –Plano α | 16 |
| Figura 8 -Regiões convexas..... | 17 |
| Figura 9 – Regiões não convexas..... | 17 |
| Figura 10 – Polígonos e seus elementos..... | 17 |
| Figura 11 – Ângulos internos do polígono..... | 18 |
| Figura 12 – Diagonais de um polígono..... | 18 |
| Figura 13 – Classificação dos polígonos..... | 20 |
| Figura 14 – Pentágono..... | 20 |
| Figura 15 - Hexágono | 20 |
| Figura 16 - Triângulo ABC e retas paralelas..... | 21 |
| Figura 17 – Quadrilátero | 21 |
| Figura 18 – Pentágono..... | 21 |
| Figura 19 - Hexágono | 22 |
| Figura 20– Polígono de n lados | 22 |
| Figura 21 - Hexágono | 23 |
| Figura 22 – Polígono convexo de n lados..... | 24 |
| Figura 23 - Tangram..... | 25 |
| Figura 24 – Tangram em papel quadriculado | 28 |
| Figura 25 – Construção do tangram..... | 28 |
| Figura 26 – Manipulação com o tangram | 28 |
| Figura 27 – Área do polígono..... | 30 |
| Figura 28 – Polígono na malha quadriculada..... | 30 |
| Figura 29 – Pentagrama de Philip Tilson..... | 32 |
| Figura 30– Quadrado de Philip Tilson..... | 32 |
| Figura 31 – Heptágono de Galvin | 32 |
| Figura 32 – Quadrado de Galvin..... | 32 |
| Figura 33 – Pentagrama de Lindgren | 33 |
| Figura 34 – Decágono de Lindgren..... | 33 |
| Figura 35 – Cruz grega..... | 33 |
| Figura 36 - Quadrado | 33 |
| Figura 37 – Hexágono de Busschop..... | 34 |
| Figura 38 – Quadrado de Busschop | 34 |
| Figura 39 - Pentágono | 34 |
| Figura 40 - Quadrado | 34 |
| Figura 41 – Quadrado de Bradley | 35 |
| Figura 42 – Estrela de Davi | 35 |
| Figura 43 – Polígonos de palitos de picolé..... | 37 |
| Figura 44 – Quebra-cabeça com palitos de fósforo | 38 |
| Figura 45 – Quebra-cabeça com palitos de fósforo..... | 39 |
| Figura 46 – Quebra-cabeça com palitos de fósforo | 39 |
| Figura 47 – Quebra-cabeça com palitos de fósforo..... | 40 |
| Figura 48 – Linha poligonal com canudinhos | 40 |

| | |
|--|----|
| Figura 49 – Polígono convexo com canudinhos | 41 |
| Figura 50 – Polígono não convexo com canudinhos..... | 41 |
| Figura 51 – Polígono regular com canudinhos..... | 41 |
| Figura 52 – Polígono não regular com canudinhos | 41 |
| Figura 53 – Modelos de geoplanos | 43 |
| Figura 54 – Geoplano e elásticos | 44 |
| Figura 55 – Figuras planas no geoplano..... | 45 |
| Figura 56 – Polígonos regulares no geoplano | 45 |
| Figura 57 - Pentágono no geoplano..... | 45 |
| Figura 58 - Triângulos no geoplano | 46 |
| Figura 59 - Retângulo no geoplano..... | 46 |
| Figura 60 - Paralelogramo no geoplano..... | 47 |
| Figura 61 – Polígonos no geoplano..... | 47 |
| Figura 62 – Triângulo no geoplano..... | 48 |
| Figura 63 – Triângulo retângulo e quadrados no geoplano..... | 48 |
| Figura 64 – Triângulos no geoplano..... | 48 |
| Figura 65 – Polígono..... | 49 |
| Figura 66 – Geoplanos circulares..... | 50 |
| Figura 67 – Geoplanos circulares..... | 51 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| INTRODUÇÃO..... | 11 |
| CAPÍTULO 1 POLÍGONOS..... | 14 |
| 1.1 Conceitos básicos..... | 14 |
| 1.2 Região interior e região exterior..... | 16 |
| 1.3 Região convexa e região não convexa..... | 16 |
| 1.4 Elementos de um polígono..... | 17 |
| 1.5 Classificação dos polígonos..... | 19 |
| 1.6 Número de diagonais de um polígono convexo..... | 19 |
| 1.7 Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo..... | 20 |
| 1.8 Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo..... | 21 |
| 1.9 Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo..... | 22 |
| 1.10 Polígonos regulares..... | 24 |
| CAPÍTULO 2 TANGRAM: UM QUEBRA-CABEÇA MILENAR..... | 25 |
| 2.1 Tangram..... | 25 |
| 2.2 Tangram: origem e lendas..... | 25 |
| 2.3 Estratégias..... | 26 |
| 2.4 Benefícios do jogo..... | 26 |
| 2.5 O tangram e o contato com os primeiros polígonos estudados no Ensino Fundamental.. | 27 |
| 2.6 Atividades propostas em sala de aula com o uso do Tangram..... | 27 |
| 2.7 O tangram e o teorema de Pick..... | 29 |
| CAPÍTULO 3 DISSECÇÕES DE POLÍGONOS OU QUEBRA-CABEÇA BIDIRECIONAIS..... | 31 |
| CAPÍTULO 4 POLÍGONOS DE PALITOS E DE CANUDINHOS..... | 37 |
| CAPÍTULO 5 EXPLORANDO O GEOPLANO..... | 43 |
| 5.1 Introdução..... | 43 |
| 5.2 Modelos de geoplano..... | 43 |
| 5.3 Como construir um geoplano quadrado..... | 44 |
| 5.4 A importância do geoplano no estudo dos polígonos..... | 44 |
| 5.5 Atividades propostas com o geoplano..... | 47 |
| 5.6 Como avaliar os alunos a partir de atividades propostas com o geoplano..... | 49 |
| CAPÍTULO 6 O DIÁLOGO NA CONSTRUÇÃO DAS IDEIAS MATEMÁTICAS..... | 52 |
| 6.1 Avaliação..... | 52 |
| 6.2 O diálogo como estratégia para o sucesso no aprendizado da Matemática..... | 53 |
| CAPÍTULO 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS..... | 55 |
| REFERÊNCIAS..... | 58 |

INTRODUÇÃO

Este trabalho surgiu da necessidade de estimularmos os estudantes do ensino fundamental nas aulas de matemática e, em particular, no estudo de polígonos. Há mais de vinte anos lecionando essa disciplina nas escolas públicas estaduais e particulares no Ceará a estudantes do quinto ao nono ano do ensino fundamental e do primeiro ao terceiro ano do ensino médio, sempre me deparei com um grande número de alunos que fazem vários comentários, por exemplo: “Para que aprender polígonos? Não vou precisar disso nunca! É só decorar as fórmulas!” Esses e muitos outros viraram jargões que me incomodam muito, e, com certeza, incomodam também a maioria dos professores de matemática compromissados com o aprendizado dessa disciplina.

Na maioria das vezes, no exercício das atividades docentes, deparamo-nos com salas de aula superlotadas, alunos desinteressados, desmotivados, enfim, com vários fatores negativos que interferem direta ou indiretamente no aprendizado de qualquer disciplina, e mais ainda em matemática por requerer uma maior concentração dos alunos no processo de ensino-aprendizagem. A desmotivação é tanta que os alunos já chegam com a autoestima lá embaixo dificultando ainda mais o trabalho do professor.

Diante desse quadro alarmante é que proponho dar a minha contribuição no sentido de amenizar essa situação, trazendo para vocês uma ferramenta: o Quebra-cabeça para dentro da sala de aula, que acredito ser imprescindível no processo de ensino-aprendizagem dos polígonos. O quebra-cabeça é um jogo divertidíssimo, desafiador e apaixonante e que está presente na vida de todas as pessoas. Obviamente, existem diversos tipos de quebra-cabeças, todos com a sua importância e com os mais variados graus de dificuldades, mas focarei naqueles que mais se adequaram aos conceitos de áreas, perímetros, diagonais e semelhanças de polígonos, estimulando nossos alunos de forma lúdica para que tais conceitos sejam bem compreendidos e assimilados.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), o jogo, apesar de ser algo cultural em que a matemática pode ser encontrada, ainda é uma simples atividade que auxilia no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos, consistindo em fazer algo sem uma obrigação, mesmo que possua algumas exigências.

Com o uso de quebra-cabeças, os alunos passam a obedecer, compreender e a utilizar regras padronizadas que serão empregadas no processo de ensino e aprendizagem. O fato dos alunos compreenderem que existem regras nos jogos é um fator determinístico que

favorece sua integração numa sociedade complexa e os coloca em situações que podem aproximá-los de futuras teorizações. Os jovens se adaptam a lidar com os jogos com regras, no estágio mais avançado, passando a entender que as regras podem ser definidas pelos próprios jogadores, esses jogos tem um aspecto interessante, pois o fazer e compreender estão interligados. Quando a criança participa de jogos em grupo, isso representa um estímulo para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico.

É de fundamental importância que os jogos constituam uma cultura na escola, sendo dever do professor avaliar os aspectos curriculares em que se desejam inseri-los, pois eles constituem um desafio que proporciona ao aluno interesse e prazer. Não é novidade a utilização de jogos escolares, assim como já se é de conhecimento a sua importância para o ensino.

Ao jogar, os alunos desenvolvem habilidades, pois precisam resolver problemas e encarar as regras, momento em que se praticam os elementos do jogo e a matemática, comprovando a situação de prazer e aprendizagem proporcionada pelo jogo nas aulas.

Esse tipo de trabalho também estimula a linguagem e a interação, já que é possível que no jogo cada estudante acompanhe o jogo dos demais, desenvolvendo o senso crítico e fortalecendo a autoestima.

O trabalho com quebra-cabeças nas aulas de polígonos quando bem planejado e orientado, auxilia o desenvolvimento de habilidades, terá um papel não só motivador, mas facilitará a compreensão e o entendimento dos conceitos de áreas das figuras planas, de perímetros, de diagonais e diferencia os diversos tipos de polígonos que são classificados de acordo com o número de lados, além do estudo de frações.

Descreveremos agora os conteúdos apresentados em cada um dos sete capítulos que compõem esse trabalho. No primeiro capítulo abordamos conceitos básicos sobre *polígonos*, definimos e classificamos linhas poligonais, conceituamos regiões convexas e não convexas, definimos e classificamos os polígonos, além de mostrar seus principais elementos.

No segundo capítulo apresentamos o *tangram*, sua origem e lendas e ressaltamos sua importância no processo de ensino e aprendizagem de polígonos, acompanhado de atividades propostas em sala de aula. Apresentamos também o *teorema de Pick*, importante no cálculo de áreas de figuras planas construídas na malha quadriculada.

O terceiro capítulo trata-se de quebra-cabeças bidirecionais ou dissecções de polígonos ou ainda polígonos equidecomponíveis cujo objetivo é mostrar que se dois polígonos têm a mesma área é possível decompor um deles em polígonos menores de modo a compor o outro. Mostramos também alguns exemplos de quebra-cabeças envolvendo polígonos equidecomponíveis e exercícios propostos.

No quarto capítulo fizemos referências aos quebra-cabeças que podem ser construídos com o uso de palitos e canudinhos, um material simples e barato, mas de muita importância para estimular a aprendizagem sobre polígonos.

No quinto capítulo ressaltamos a importância do geoplano no estudo de polígonos, os vários tipos de geoplanos, como construir um geoplano quadrado e como avaliar os alunos através de atividades propostas com esta ferramenta.

O sexto capítulo denominado “O diálogo na construção das ideias matemáticas” tem por objetivo principal aproximar o aluno do professor efetivando-se um diálogo pedagógico que só se verifica quando há confrontações verdadeiras de visões e opiniões.

Por fim, o sétimo capítulo traz em seu texto as considerações finais.

CAPÍTULO 1 POLÍGONOS

Neste capítulo serão abordados os conceitos básicos dos polígonos, suas regiões, seus elementos e as suas classificações, para um melhor entendimento a respeito do conteúdo que compõe esse trabalho.

1.1 Conceitos Básicos

Bianchini (2015, p.249) define: “toda linha poligonal fechada simples é denominada **polígono**”. Mas, para que este conceito seja bem compreendido, é preciso antes, entender o que é uma linha poligonal fechada simples, ou ainda, o que o autor caracteriza como linha poligonal. Porém, segundo Bianchini, entende-se como linha poligonal: “toda linha formada apenas por segmentos de reta consecutivos e não colineares”. Ele classifica as linhas poligonais em abertas ou fechadas, e tomando uma linha poligonal fechada, a mesma pode ser simples ou não simples. Através das figuras que veremos em seguida, reforçaremos o conceito de polígono trabalhado por docentes de matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio. A Figura 01 apresenta alguns exemplos de linhas poligonais abertas e fechadas:

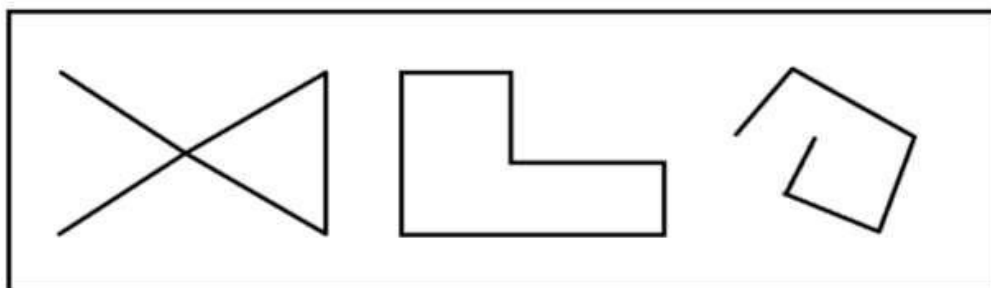


Figura 01 – Linhas poligonais

Conforme pode ser vista na Figura a seguir, nas linhas poligonais abertas a extremidade do último segmento não coincide com a origem do primeiro segmento traçado.

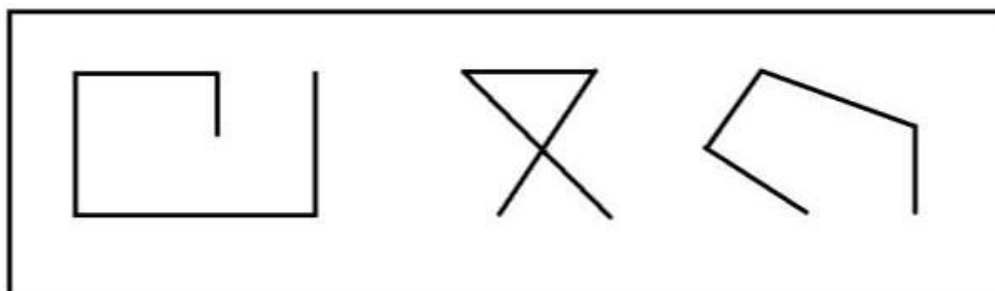


Figura 02 – Linhas poligonais abertas

Quando a extremidade do último segmento coincide com a origem do primeiro têm-se as linhas poligonais fechadas, como pode ser observado na Figura a seguir:

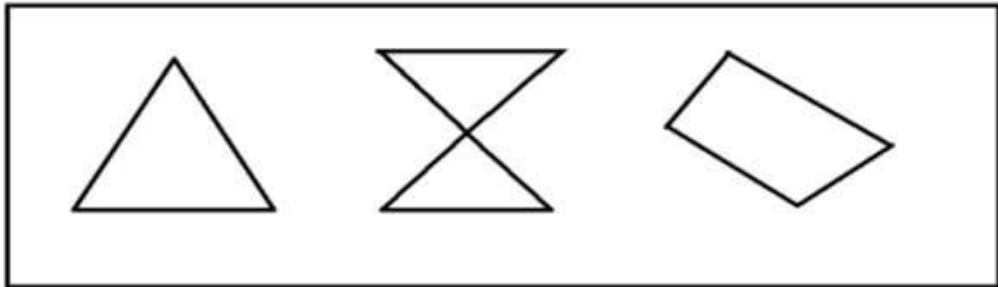


Figura 03 – Linhas poligonais fechadas

As linhas poligonais fechadas simples são aquelas que não se entrelaçam, conforme mostra a Figura 04:

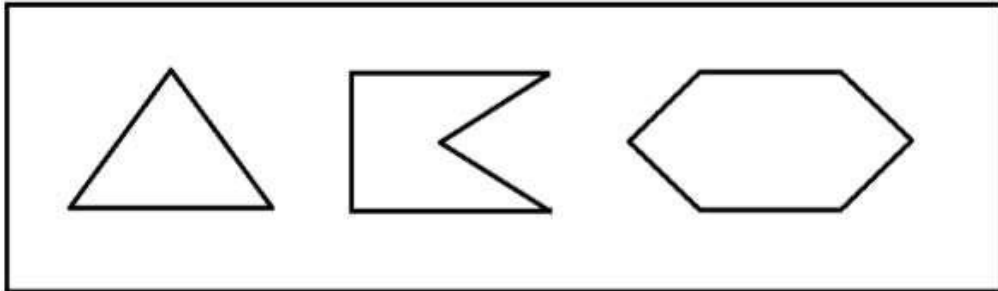


Figura 04 – Linhas poligonais fechadas simples

Na Figura 5 podem ser observadas as linhas poligonais fechadas não simples, que são aquelas em que pelo menos duas linhas se interceptam, contrariando as linhas poligonais fechadas simples.

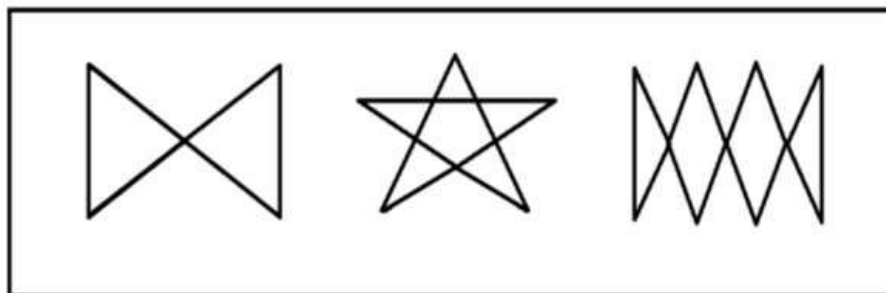


Figura 05 – linhas poligonais fechadas não simples

A Figura 6 apresenta alguns tipos de polígonos que serão trabalhados na presente pesquisa:

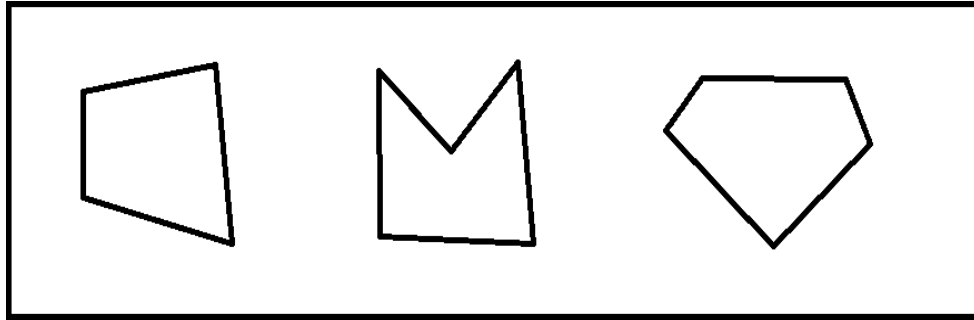


Figura 06 - Polígonos

1.2 Região interior e região exterior

Na Figura 7 mostraremos um plano α dividido por uma linha poligonal fechada simples em duas regiões sem pontos comuns. Estas regiões são chamadas de região interior e região exterior.

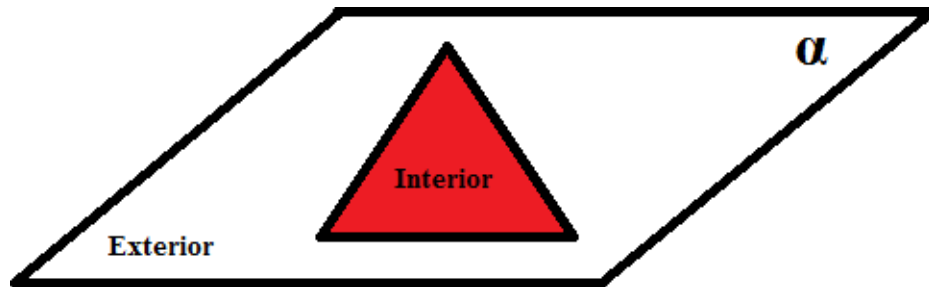


Figura 07 - Plano α

1.3 Região convexa e região não convexa

Tomando um segmento de reta com extremos em quaisquer dois pontos da região, de modo que este segmento esteja contido nesta região, dizemos que é uma região convexa, conforme pode ser observado na Figura a seguir, que também consiste em polígonos convexos.

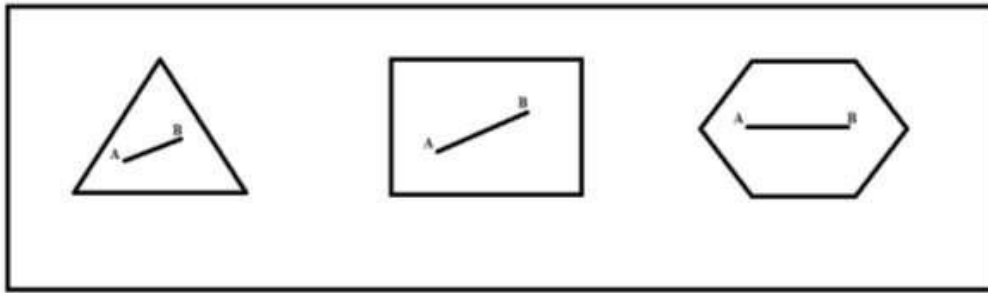


Figura 08 – Regiões convexas

Por outro lado, uma região de um plano é dita não convexa se existem dois pontos distintos pertencentes a esta região que são extremos de um segmento que não está contido na região, conforme está apresentado na Figura que segue que são ditos polígonos não convexas.

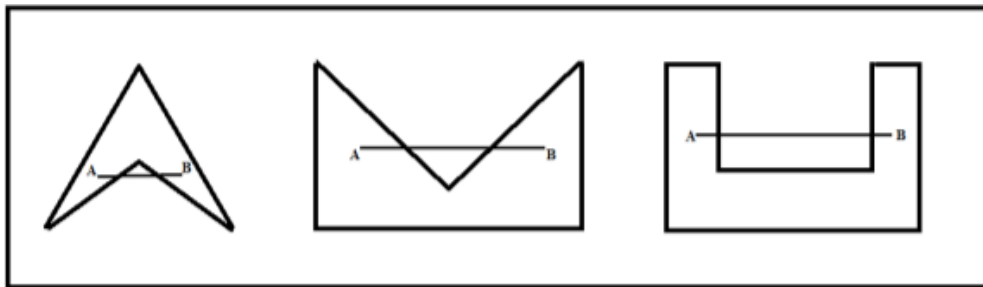


Figura 09 – Regiões não convexas

1.4 Elementos de um polígono

Segundo Bianchini (2015, p. 251), “em um polígono qualquer, os segmentos que formam a linha poligonal são chamados de lados do polígono e o ponto de encontro de dois lados consecutivos é chamado de vértice desse polígono”.

Na figura 10 veremos um polígono e seus elementos:

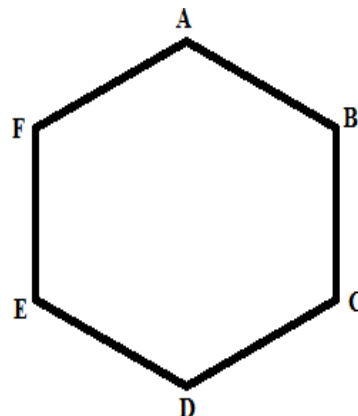


Figura 10 – Polígonos e seus elementos

- Os vértices desse polígono são os pontos A, B, C, D, E e F;
- Os lados desse polígono são os segmentos AB, BC, CD, DE, EF e FA;
- Indicamos assim polígono ABCDEF;
- Os vértices A e B, B e C, C e D, D e E, E e F, F e A são consecutivos;
- Os vértices A e C, A e D, A e E, B e D, B e E, B e F, C e E, C e F, D e A são não consecutivos.

Dois lados consecutivos de um polígono determinam um ângulo interno desse polígono. Veja o exemplo na figura 11:

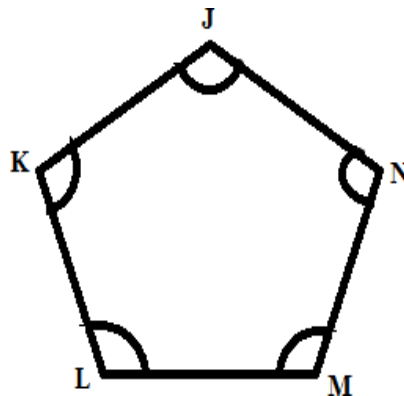


Figura 11 – Ângulos internos

Os segmentos JKLMN visto na figura 11, estão assinalados os ângulos internos que indicamos por \hat{J} , \hat{K} , \hat{L} , \hat{M} e \hat{N} .

De acordo com Bianchini (2015, p. 252) os segmentos com extremos em dois vértices não consecutivos são chamados diagonais do polígono, conforme veremos no exemplo da figura 12:

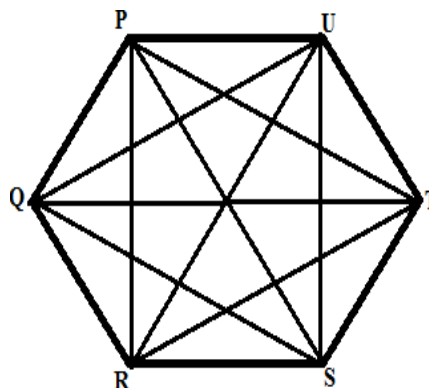


Figura 12 – Diagonais de um polígono

Os segmentos \overline{PR} , \overline{PS} , \overline{PT} , \overline{QS} , \overline{QT} , \overline{QU} , \overline{RT} , \overline{RU} , \overline{SU} são as diagonais do polígono PQRSTU.

1.5 Classificação dos polígonos

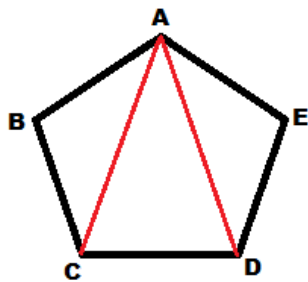
Conforme Bianchini (2015, p. 253) a palavra polígono é uma composição de poli (muitos) e gonos (ângulos) e que em um polígono, o número de lados é igual ao número de ângulos internos. Alguns polígonos recebem nomes especiais de acordo com o número de lados ou ângulos internos. Observe a seguir uma tabela com a classificação de alguns polígonos que serve de base para docentes de Matemática do Ensino Fundamental e Ensino Médio:

| NÚMERO DE LADOS (OU ÂNGULOS) | NOME DO POLÍGONO (EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE ÂNGULOS) | NOME DO POLÍGONO (EM FUNÇÃO DO NÚMERO DE LADOS) |
|------------------------------|---|---|
| 3 | Triângulo | Trilátero |
| 4 | Quadrângulo | Quadrilátero |
| 5 | Pentágono | Pentalátero |
| 6 | Hexágono | Hexalátero |
| 7 | Heptágono | Heptalátero |
| 8 | Octógono | Octalátero |
| 9 | Heneágono | Enealátero |
| 10 | Decágono | Decalátero |
| 11 | Undecágono | Undecalátero |
| 12 | Dodecágono | Dodecalátero |
| 15 | Pentadecágono | Pentadecalátero |
| 20 | Icoságono | Icosalátero |

Figura 13 – Classificação dos polígonos

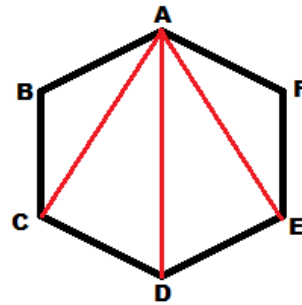
1.6 Número de diagonais de um polígono convexo

Observe a seguir nas Figuras 14 e 15 os polígonos e o número de diagonais traçadas por um de seus vértices.



Número de lados: 5
Número de diagonais: 2

Figura 14 – Pentágono



Número de lados: 6
Número de diagonais: 3

Figura 15 - Hexágono

Note que o número de diagonais traçadas por um de seus vértices (o vértice A) é igual ao número de lados menos três. Assim, em um polígono de n lados, podemos traçar, por um de seus vértices, $(n - 3)$ diagonais.

Como o polígono tem n vértices, podemos traçar $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Esse produto, porém, representa o dobro do número de diagonais, pois cada diagonal foi contada duas vezes.

Então, para calcular o número total de diagonais d de um polígono de n lados, podemos empregar a fórmula:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

1.7 Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo

Os triângulos possuem uma propriedade particular relativa à soma de seus ângulos internos, essa propriedade garante que a soma das medidas dos três ângulos internos é igual a 180 graus. Mas, o que garante essa veracidade? Será mostrado a seguir:

Vamos considerar um triângulo ABC qualquer e, traçar duas retas paralelas r e s . A reta r passa por A e a reta s é suporte do lado \overline{BC} do triângulo ABC. Indicaremos por x e y as medidas dos ângulos que forma com os lados \overline{AB} e \overline{AC} . Veja a Figura:

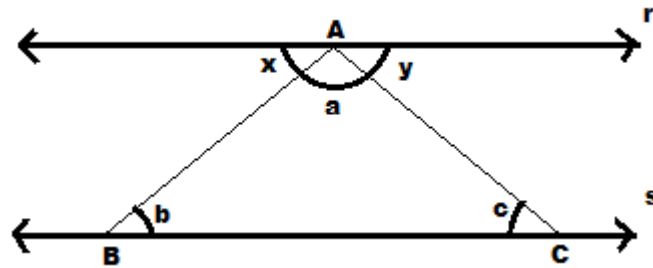


Figura 16 – Triângulo ABC e retas paralelas

Como os ângulos alternos internos formados por retas paralelas são congruentes, então, $x = b$ e $y = c$. A soma dos três ângulos de vértice A formam um ângulo raso com lados em r, logo, $x + y + a = 180^\circ$. Substituindo x por b e y por c, temos $b + a + c = 180^\circ$. Portanto: “ A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180° “.

1.8 Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo

Conforme foi mencionado no item anterior, a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180 graus. Com base nesta afirmação podemos pensar em dividir os polígonos convexos em triângulos. Em um quadrilátero conseguimos formar dois triângulos:

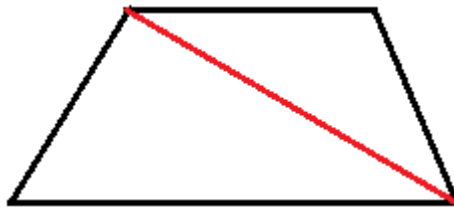


Figura 17 - Quadrilátero

Então, a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é $2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$. Em um polígono de cinco lados (pentágono), formamos três triângulos:

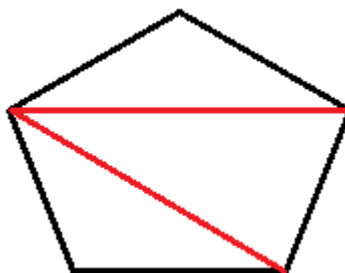


Figura 18 – Pentágono

Dessa forma, temos que a soma dos ângulos internos de um pentágono é $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Em um polígono de seis lados (hexágono), formamos quatro triângulos:

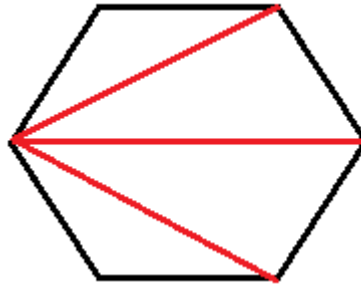


Figura 19 – Hexágono

Temos que, a soma dos ângulos internos de um hexágono é igual a $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Agora, vamos considerar um polígono de n lados. Traçando todas as diagonais que partem de um dos vértices desse polígono, obtemos $(n - 2)$ triângulos:

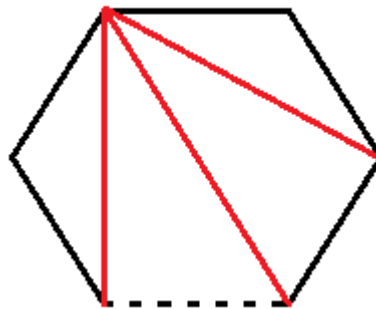


Figura 20 – Polígono de n lados

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , a soma S_i das medidas dos ângulos internos de $(n - 2)$ triângulos é: $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Então: A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é igual a:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

1.9 Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo

Um polígono convexo possui dois tipos de ângulos: aqueles que são internos (a_i) ao polígono e os ângulos que são externos (a_e).

O ângulo externo (a_e) de um polígono convexo é um ângulo suplementar adjacente a um ângulo interno (a_i) do polígono em um dado vértice, dessa forma, por serem suplementares, a soma de um ângulo interno com um externo resulta em 180° , isto é: $a_i + a_e = 180^\circ$.

Faremos uma demonstração partindo de um caso concreto utilizando um hexágono, conforme a Figura 21, na qual e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 e e_6 são os ângulos externos e i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 e i_6 são os ângulos internos:

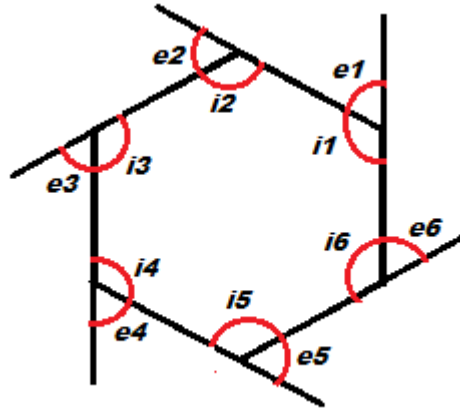


Figura 21 – Hexágono

Somando-se todos os ângulos suplementares obtem-se: $(e_1 + i_1) + (e_2 + i_2) + (e_3 + i_3) + (e_4 + i_4) + (e_5 + i_5) + (e_6 + i_6) = 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ + 180^\circ = 1080^\circ$, ou seja, $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) + (i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6) = 1080^\circ$, porém, $(i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6)$ é igual a soma dos ângulos internos (S_i) de um hexágono que vale 720° uma vez calculado através da fórmula $S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$.

Tomando $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) = S_e$, soma dos ângulos externos, e substituindo, resulta que $S_e + S_i = 1080^\circ$, mas $S_i = 720^\circ$, porém, $S_e = 1080^\circ - 720^\circ$, ou seja, $S_e = 360^\circ$.

A demonstração acima foi feita para um caso particular, faremos agora uma dedução para um polígono de n lados.

Segundo Dolce e Pompeo (2006), a soma S_e dos ângulos externos de um polígono convexo de n lados ($n \geq 3$) é dado por: $S_e = 4$ retos ou, simplesmente:

A soma dos ângulos externos de um polígono convexo é: $S_e = 360^\circ$. Dedução: Seja $A_1A_2A_3 \dots A_n$ um polígono convexo de n lados. Considerando os ângulos externos $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ suplementares adjacentes aos respectivos ângulos internos $i_1, i_2, i_3, \dots, i_n$ conforme mostra a figura abaixo:

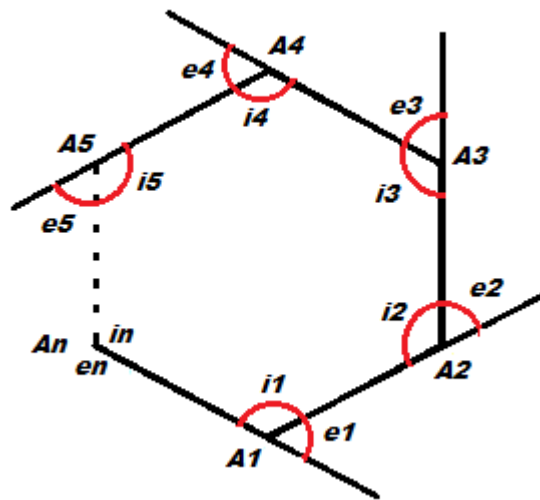


Figura 22 – Polígono convexo de n lados

Como o polígono de n lados tem n vértices, então a soma das medidas de todos os ângulos externos com a de todos os ângulos internos é igual a $n \cdot 180^\circ$. Veja:

$$(e_1 + i_1) + (e_2 + i_2) + (e_3 + i_3) + \dots + (e_n + i_n) = n \cdot 180^\circ$$

$$180^\circ \quad 180^\circ \quad 180^\circ \quad \dots \quad 180^\circ$$

$$(e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n) + (i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n) = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e + S_i = n \cdot 180^\circ$$

Substituindo-se S_i por $(n - 2) \cdot 180^\circ$, vem:

$$S_e + (n - 2) \cdot 180^\circ = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e + n \cdot 180^\circ - 360^\circ = n \cdot 180^\circ$$

$$S_e = n \cdot 180^\circ - n \cdot 180^\circ + 360^\circ$$

$$S_e = 360^\circ$$

Portanto: a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo qualquer é 360° .

1.10 Polígonos Regulares

Um polígono diz-se **regular** quando tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos ou externos também congruentes. São exemplos de polígonos regulares: o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular, etc.

Representando por a_i a medida de um ângulo interno de um polígono regular de n lados e por a_e a medida do ângulo externo, temos: $a_i = S_i/n$ e $a_e = 360^\circ/n$.

CAPÍTULO 2 TANGRAM: UM QUEBRA-CABEÇA MILENAR

Neste item abordaremos o tangram, contaremos um pouco da sua história, origem e lendas e mostraremos estratégias para serem utilizadas em sala de aula.

2.1 Tangram

A definição de *tangram* consiste em um quebra-cabeça chinês que é composto de sete peças, sendo: dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um triângulo médio, um quadrado e um paralelogramo. Veja a seguir, na Figura 23, um modelo de tangram:



Figura 23 - Tangram

2.2 Tangram: origem e as lendas

Segundo Rocha (2010) não se sabe com exatidão o surgimento do tangram, acredita-se que ele tenha sido um jogo inventado para mulheres e crianças, e com isso naquela época não era de suma importância.

A tradição do jogo afirma que ele é de origem antiga e que a primeira vez que foi jogado foi há mais de 4.000 anos na China, considerado um passatempo.

Supostamente os sete livros que existiam mostravam o criacionismo e a origem das espécies sob uma perspectiva diferente da apresentada por Darwin, o progresso do homem rastreado por sete estágios de crescimento até um estado espiritual misterioso, o que é uma alienação para uma consideração séria.

2.3 Estratégias

Durante muitos anos utilizando esse quebra-cabeça, esse trabalho é iniciado contando alguma história, dando ciência do que é o tangram, como e onde surgiu, como ele funciona e que conteúdo matemático pode ser explorado. Para isto, você pode utilizar pequenos textos que falem sobre a lenda do tangram, em seguida pedir para os alunos construírem passo a passo todas as peças, orientando-os e conceituando geometricamente cada peça.

Obviamente não existem regras prontas quando se vai montar o tangram, todavia, o jogador pode ter sua situação facilitada através de algumas estratégias que ele pode ir descobrindo com o hábito de jogar.

Muitos especialistas acreditam que encaixar primeiro as duas peças maiores têm suas vantagens, uma vez que o encaixe das outras peças fica mais restrito, restando poucas possibilidades.

O tangram é um excelente jogo educacional e motivacional, embora não exija muito esforço por parte daquele que o executa, requer muita paciência, concentração, tempo e muita imaginação. E, por ser um jogo que não apresenta regras específicas, exceto, que cada figura formada contenha todas as sete peças em sua composição tornam-se muito mais atrativo e mais envolvente. Várias estratégias podem ser utilizadas em sala de aula, todavia

é inócua afirmar qual seja mais eficaz, pois as mesmas podem variar de turma para turma.

2.4 Benefícios do jogo

Estimula os alunos que se sentem incapazes de aprender matemática, tornando possível o desbloqueio e acelerando o raciocínio lógico.

A aula pode ser divertida independente da série. Estimula também a resolução de problemas, a criatividade e sociabiliza o grupo, dando espaço para os alunos mais tímidos participarem, contribuindo assim para fortalecer a autonomia de cada um no intuito que ele, o aluno, possa fazer suas próprias descobertas.

2.5 O tangram e o contato com os primeiros polígonos estudados no Ensino Fundamental

Como já foi mencionado, o *tangram* é formado por dois triângulos grandes, dois triângulos pequenos, um triângulo médio, um quadrado e um losango.

Estes polígonos são os primeiros estudados pelos alunos, e, por isso, precisam serem bem explorados para que eles comecem a entender uma série de conceitos, de classificações, de medições, acerca destes polígonos. E o tangram por ser um jogo lúdico educacional, fará ou deverá fazer com que o aluno adquira esses conhecimentos de forma prazerosa e estimulante.

O professor deverá acompanhar seus alunos e fazer intervenções no momento oportuno, propiciando trocas de conhecimentos e, dependendo da série em que ele se encontra, fazer perguntas e questionamentos sobre a peça que ele está segurando. Por exemplo: qual o nome da peça? Quantos lados têm? Quantos ângulos? Qual a diferença entre triângulo e quadrilátero? Estes questionamentos serão de muita importância para o conhecimento de outros tipos de polígonos que eles estudarão nas séries subsequentes.

2.6 Atividades propostas em sala de aula com o uso do tangram

Após a apresentação do tangram e exploração de vários conceitos matemáticos, através de exemplos e atividades práticas, é proposto um exercício com quatro questões para alunos do nono ano do ensino fundamental. Na ocasião os alunos foram orientados a formarem grupos de quatro ou cinco pessoas, com o intuito de induzi-los a compartilharem suas dúvidas, trocar ideias e buscarem soluções para todas as questões. É aconselhado que o facilitador apenas acompanhasse os grupos, observando os distúrbios disciplinares e tire as dúvidas que possam aparecer. A seguir tem-se o exercício que foi aplicado em sala de aula:

- 1) Fabricar o tangram utilizando materiais, desde cartolina, papel cartão e e.v.a até madeira;
- 2) Criação livre de diversas formas usando o tangram;
- 3) Montar figuras congruentes utilizando as peças do tangram.
- 4) O tangram a seguir foi construído em um papel quadriculado, no qual cada quadradinho tem 1 cm de lado e área de 1 cm^2 .

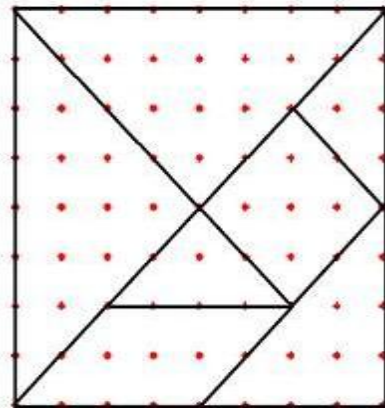


Figura 24 - Tangram em papel quadriculado

- Encontre a área de cada peça do tangram.
- Calcule a área do tangram.
- Que relações você observa entre as áreas das peças do tangram?
- A área do triângulo grande corresponde a que porcentagem da área do tangram?
- A área do triângulo pequeno corresponde a que porcentagem da área do triângulo grande?
- Calcule o perímetro do tangram e do quadrado (peça do tangram).

É observado que dúvidas aparecerão nesse processo e em muitas ocasiões se justificarão as intervenções. As figuras 25 e 26 apresentam os alunos do 9º ano da Escola Estadual Rui Barbosa em Tibau-RN, construindo o tangram e manipulando as peças para formar novas figuras.



Figura 25 – Construção do tangram



Figura 26 – Manipulação com o tangram

A situação mostrada nas Figuras é extremamente enriquecedora. Podem-se observar na Figura 25 alunos construindo o tangram. No primeiro momento são feitos desenhos em cartolinas e pintados, para em seguida serem recortados. É um contato direto com o objeto que eles construíram o que provavelmente facilitara a compreensão dos tipos de polígonos que foram se formando, o nome de cada um e a relação existente entre eles.

A Figura 26 apresenta uma aluna que foi até o quadro para manipular as peças do tangram, compara-las e trabalhar a noção de semelhanças e áreas. Vale ressaltar que todos os alunos são convidados para irem até o quadro, porém como normalmente acontece, existem alunos que demorarão mais a participarem, em virtude dos problemas preexistentes de socialização.

Portanto, é de extrema importância convidar o aluno para ir até o quadro, pois além de ser um momento descontraído, é também um momento de sociabilidade e aprendizagem.

2.7 O tangram e o teorema de Pick

Segundo Lima (2012) Georg Alexander Pick foi um matemático austríaco. Nasceu em família judia no ano de 1859 em Viena. Em 1889 publicou um teorema que leva seu nome. O *Teorema de Pick* afirma que os pontos do plano cujas coordenadas são números inteiros são chamados de pontos reticulados.

Um reticulado é, portanto, um conjunto de tais pontos. Um polígono reticulado é aquele cujos vértices são pontos reticulados e cujos lados são segmentos de reta unindo os vértices consecutivos. Se, além disso, ele não possui auto intersecções, então é chamado de reticulado simples.

A área de um polígono cujos vértices são pontos de uma rede é dada pela expressão $\mathbf{B/2 + I - 1}$ onde B é o número de pontos da rede situados sobre o bordo do polígono e I é o número de pontos da rede existentes no interior dos polígonos.

Exemplo: Vamos calcular a área do polígono apresentado na Figura 27 abaixo:

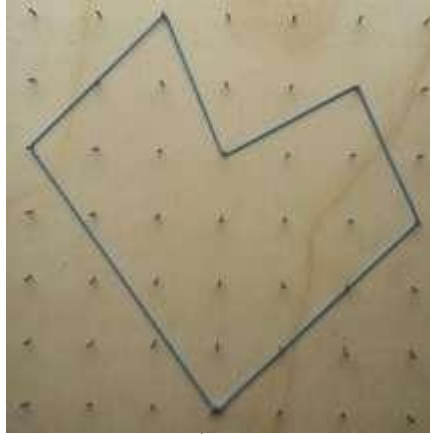


Figura 27 – Área do polígono

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \frac{1}{2}B + I - 1$$

$$B = 9 \text{ e } I = 14$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 9 + 14 - 1 = 17,5$$

Embora seja uma fórmula pouco conhecida, ela é de uma simplicidade imensa e pode ser aplicada do sexto ano ao ensino médio, uma vez que permite calcular a área de um polígono pela simples contagem de pontos. O cálculo de áreas de polígonos nem sempre é uma tarefa fácil, pela variedade de formas que podem assumir. Proporei agora, utilizando o teorema de Pick, calcular a área das peças do tangram que tem seus vértices sobre um reticulado de pontos no plano, no qual cada quadrado tem 1 cm de lado e área de 1 cm². Veja a Figura:

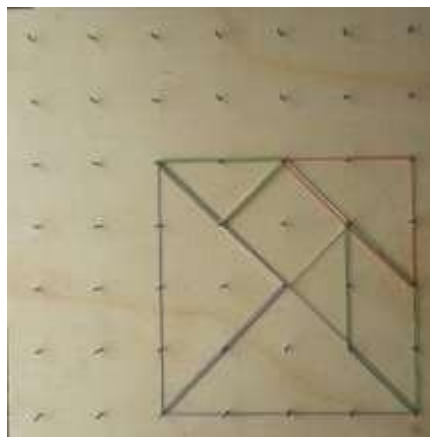


Figura 28 - Polígono na malha quadriculada

CAPÍTULO 3 DISSECÇÕES DE POLÍGONOS OU QUEBRA-CABEÇAS BIDIRECIONAIS

Dedica-se este trabalho de *dissecção* a dois grandes enigmistas Sam Loyd e Henry Ernest Dudeney, que escreveram a quatro mãos uma coluna regular de enigmas para a revista Tit-bits. Enquanto Loyd escrevia os quebra-cabeças, Dudeney acrescentava comentários e concedia prêmios. Stewart (2004) acrescenta ainda que:

A colaboração não demorou a se converter em realidade, e os dois homens seguiram caminhos separados. Ao fazê-lo, criaram toda uma indústria de quebra-cabeças nos dois lados do Atlântico, formulando problemas matemáticos fascinantes inseridos em historietas simples, mas atraentes (STEWART, 2004, p.70).

Os quebra-cabeças *dissecção de polígonos ou quebra-cabeças bidirecionais* consistem especificamente na decomposição e recomposição de figuras planas.

Dessa forma podemos enquadrar o tangram como um quebra-cabeça bidirecional, porém, por já ser um quebra-cabeça bastante conhecido e explorado apresentarei neste capítulo outros quebra-cabeças tão importantes quanto o tangram.

O conceito matemático subjacente a todo quebra-cabeça de *dissecção* é a área. Quando uma forma é recortada, e os pedaços rearranjados, a área total não muda. O cálculo de área por meio de decomposição e recomposição de figuras planas é recomendado também pelos *parâmetros curriculares nacionais* para o ensino de matemática, pois não só possibilita o desenvolvimento da visualização geométrica do aluno, como também ilustra um processo para obter as fórmulas de uma forma experimental (STEWART, 2004, p.72).

Dois polígonos são considerados *equidecomponíveis* se possuem mesma área e se for sempre possível transformar um no outro pela decomposição e composição de suas peças. É exatamente isso que acontece na *dissecção de polígonos*.

Calcular a área de um polígono em função do outro é um dos objetivos da *dissecção*, porém, outros conceitos matemáticos podem ser explorados, como por exemplo, perímetro, ângulos, diagonais e frações.

Veremos agora uma seleção de exemplos interessantes de quebra-cabeças bidirecionais, baseada em Stewart (2004), sua aplicabilidade em sala de aula de modo que possa possibilitar o aluno a resolver problemas a partir do jogo, ou produzir algum registro, ou ainda criar novos problemas.

As Figuras abaixo mostram que é possível transformar um pentagrama, que é construído com sete peças poligonais, em um quadrado pelo processo de dissecção, isto é, através do rearranjo de suas peças:



Figura 29 - Pentagrama de Philip Tilson

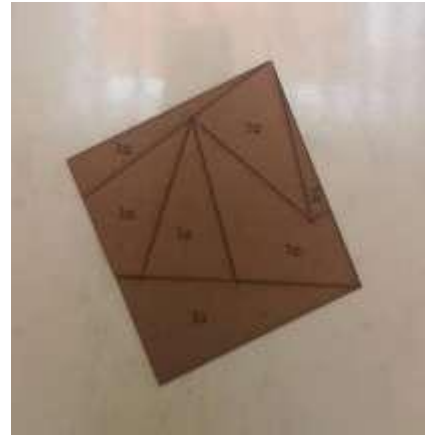


Figura 30 - Quadrado de Philip Tilson

Nas Figuras abaixo se tem um heptágono, que é um polígono que tem sete lados, e um quadrado formado com as mesmas peças. É sugerido ao facilitador, que o discente transforme o heptágono no quadrado ou ao contrario, ou ainda que pegue todas as peças misturadas e construa algum polígono. Dessa forma é explorada também a imaginação espacial.

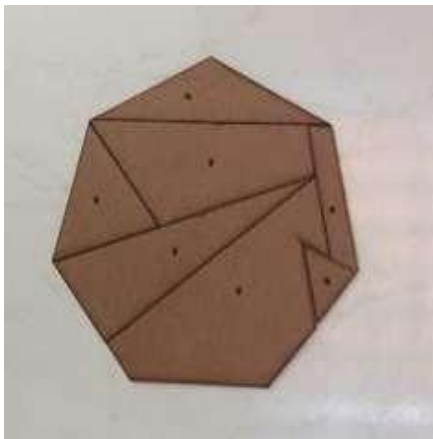


Figura 31 - Heptágono de Galvin

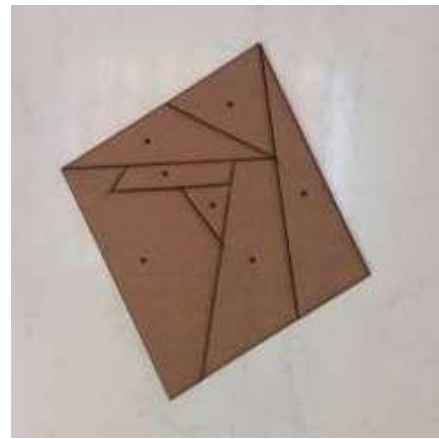


Figura 32 - Quadrado de Galvin

As Figuras a seguir mostram um pentagrama formado por dez peças e um decágono construído com as mesmas peças da pentagrama. Nelas é possível perceber um dos mais interessantes quebra-cabeças bidirecionais ou porque não dizer o mais belo de todos. Na Figura 33 tem-se um pentagrama formado por cinco losangos e dez triângulos isósceles. A Figura 34 foi obtida a partir do pentagrama pelo processo de dissecção, nela tem-se um

decágono regular, isto é, um polígono que tem dez lados congruentes.

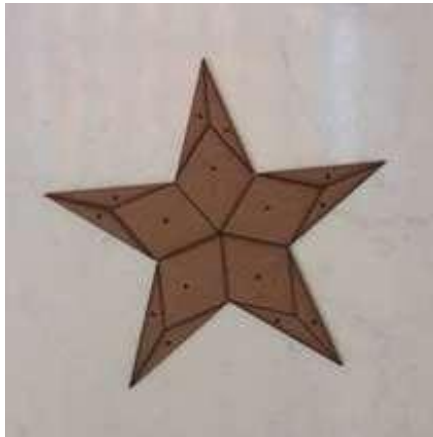


Figura 33 - Pentagrama de Lindgren



Figura 34 - Decágono de Lindgren

Os exemplos acima citados, mostrados nas Figuras 29, 30, 31, 32, 33 e 34, foram extraídos do livro *Plane and Fancy* de Greg N. Frederickson, segundo Ian Stewart (2004). As figuras abaixo mostram a cruz grega e o quadrado construídos com as mesmas peças. Trata-se de um quebra-cabeça simples e de fácil manuseio e por não exigir do aluno muito raciocínio pode ser o primeiro a ser explorado pelo professor. Na Figura 35, as quatro peças foram arranjadas formando uma cruz, e ao mesmo tempo um polígono de doze lados, isto é, um dodecágono e na Figura 36 temos um quadrado obtido a partir do rearranjo das peças que formaram a cruz grega.

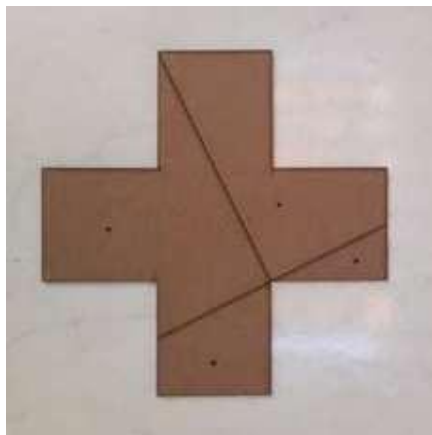


Figura 35- Cruz grega

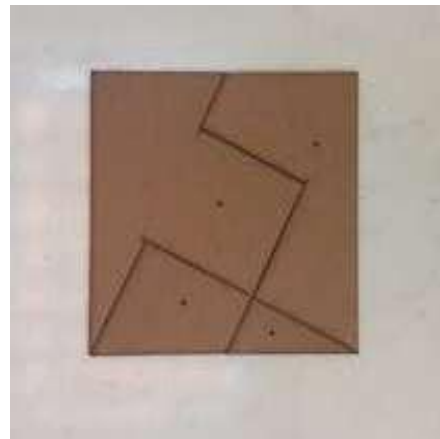


Figura 36 - Quadrado

As Figuras 37 e 38 mostram a dissecção de um hexágono, polígono de seis lados, em um quadrado, feita Paul Busschop, formada da decomposição e recomposição de cinco figuras planas. Segundo Ian Stewart (2004), Paul Busschop foi um belga que escreveu um livro sobre o jogo do “Resta um”, publicado postumamente em 1879 por seu irmão.

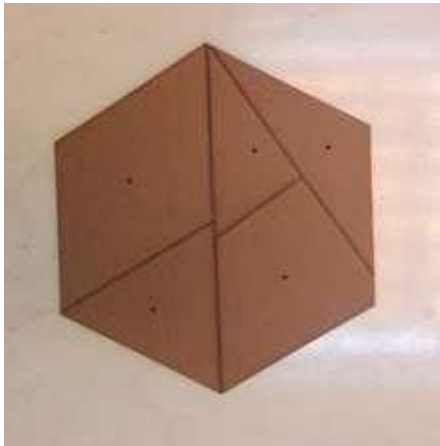


Figura 37 - Hexágono de Busschop

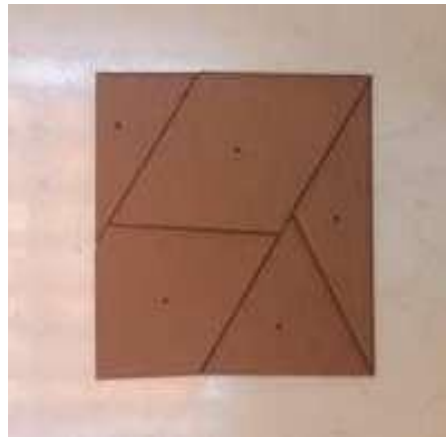


Figura 38 - Quadrado de Busschop

Nas Figuras a seguir temos um quadrado construído com as mesmas peças de um pentágono irregular. Apesar de ser também um quebra-cabeça simples, é de muita importância para o aprendizado dos polígonos. Esse jogo é formado por cinco peças, sendo quatro triângulos retângulos e um pentágono irregular.

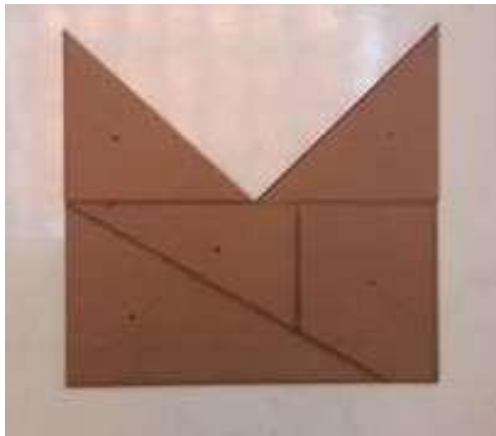


Figura 39 - Pentágono

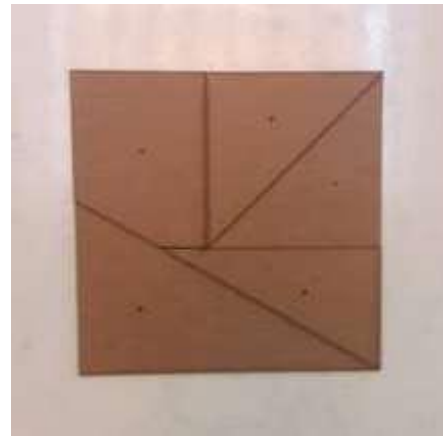


Figura 40 - Quadrado

Nas Figuras abaixo temos a estrela-de-Davi e um quadrado construídos com as mesmas peças. O objetivo deste jogo é montar uma das figuras e em seguida transformar na outra a partir do movimento dessas peças. Segundo Ian Stewart (2004) ela foi inventada por Harry Bradley um engenheiro americano que lecionou no MIT em 1897.

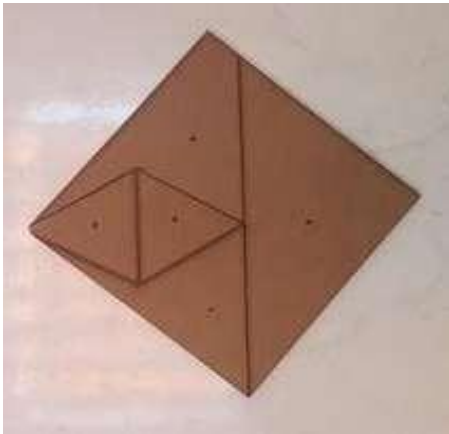


Figura 41 – Quadrado de Bradley

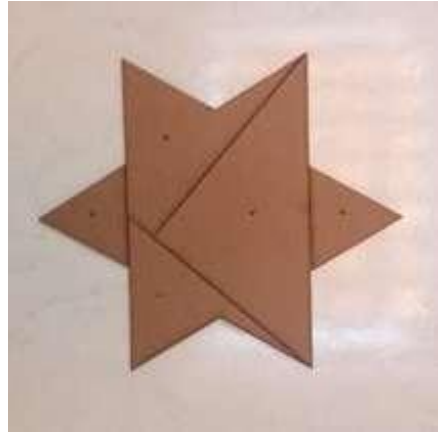


Figura 42 – Estrela de Davi

Os objetivos deste jogo consistem em permitir que os alunos identifiquem os polígonos, que diferenciem uns dos outros, que classifiquem quanto à medida de seus lados, de seus ângulos e de seus vértices, utilizando-se da visualização de figuras, do reconhecimento de um objeto a partir de suas propriedades e que os relacionem com o seu respectivo nome. Além disso, o jogo estimula o desenvolvimento da percepção das figuras planas, a leitura e a interpretação de símbolos e códigos em diferentes polígonos.

Organização da sala: grupos de duas, três ou quatro pessoas.

Recursos necessários: um quebra-cabeça para cada jogador.

Quanto às regras do jogo:

- 1) As peças são embaralhadas, em seguida, marca-se o tempo que cada jogador leva para formar uma das figuras.
 - 2) Com a primeira figura formada, marca-se novamente o tempo que ele gasta para transformar, desta vez, a figura em outra.
 - 3) Somam-se os dois tempos gastos na primeira e segunda etapa.
 - 4) Vence o jogo aquele que gastar menos tempo.
- Lembre-se: Fica a critério de cada professor aplicador criar suas próprias regras.

Algumas explorações possíveis:

Para explorar melhor o conteúdo matemático presente no jogo, além de jogar algumas vezes, recomenda-se solicitar que os alunos resolvam problemas a partir do jogo ou produzam algum registro focando o que aprendeu com ele, ou ainda criar novos problemas e novos jogos.

Antes de propor o jogo, deixe que os alunos leiam as regras, solicite aos alunos que produzam, em grupos, uma lista das dúvidas que eles têm a respeito dos polígonos e questione

sobre a importância do jogo. Em seguida, explore o quebra-cabeça perguntando:

- O quebra-cabeça é formado por quantos polígonos?
- Qual o nome de cada polígono que forma o quebra-cabeça?
- Quantos lados e quantos ângulos têm cada polígono?
- Será que o novo polígono formado pela decomposição do primeiro tem área semelhante?
- E, quanto ao perímetro será que não muda?

Comunicando a aprendizagem:

Os alunos podem mostrar o que aprenderam de diferentes maneiras:

- 1) Fazer uma lista coletiva de suas aprendizagens;
- 2) Reformular novos problemas a partir do jogo para outros colegas resolverem;
- 3) Escrever estratégias de como ser bem sucedido nesse jogo;
- 4) Propor que os alunos selecionem duas ou mais peças do quebra-cabeça, que sejam semelhantes, ou que possuam a mesma quantidade de lados.

CAPÍTULO 4 POLÍGONOS DE PALITOS E DE CANUDINHOS

Neste item sugerimos a utilização de palitos de picolé, palitos de fósforo e canudinhos plásticos, daqueles usados para tomar refrigerantes ou sucos, de cores e ou tamanhos diferentes para tornar as aulas mais atrativas e motivadoras, uma vez que, a maioria de nossos alunos, por apresentarem grandes dificuldades de reconhecerem as figuras planas e compreenderem as noções básicas de polígonos são desmotivados e apáticos.

Segundo Imenes (2004), Polígonos variados como: triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos, etc. podem ser construídos pelos alunos com palitos ou canudinhos de diferentes tipos. Mostraremos na Figura a seguir três polígonos: um triângulo, um quadrilátero e um pentágono construídos com palitos de picolé.

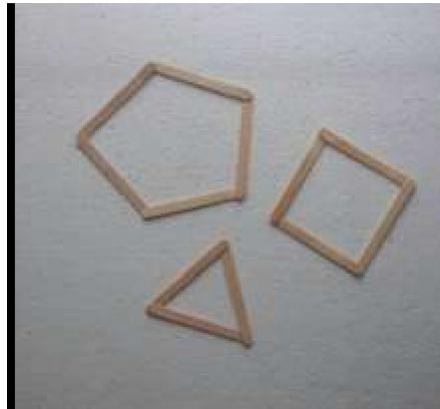


Figura 43 - Polígonos de palitos de picolé

Uma das vantagens de se trabalhar com palitos ou canudinhos deve-se à facilidade de aquisição desse material em virtude do seu baixo custo, o que facilita aos nossos alunos adquiri-los ou tê-los em casa. Porém é riquíssimo quando bem explorado pelo professor.

O aluno deve ser estimulado a produzir os polígonos, com o uso dos palitos e outros acessórios caso seja necessário. É nesse momento que ele deve fazer anotações e o professor pode interferi-los criando situações-problemas que venham a ajudar na construção do seu conhecimento.

Conforme Imenes (2004), o fato de estarmos usando palitos de mesmo comprimento sempre construiremos polígonos equiláteros, isto é, com todos os lados iguais, e obviamente terão o mesmo perímetro e a mesma quantidade de diagonais, porém, o mesmo não acontece com a área.

O único polígono que se mantém com as mesmas características é o triângulo, uma

vez que ele tem os três lados iguais ou congruentes, são ditos equiláteros e por terem os três ângulos iguais são chamados equiângulos. Devido a essa particularidade é que faz do triângulo um polígono rígido com muitas aplicações práticas.

O professor pode substituir os palitos de picolé por palitos de fósforo e continuar desenvolvido seu trabalho, utilizando diversas metodologias, seja na construção dos polígonos ou na exploração do raciocínio lógico através de diferentes tipos de quebra-cabeças construídos com os palitos.

Será mostrado em seguida um exercício que foi aplicado aos alunos do sétimo ano da Escola Estadual Rui Barbosa em Tibau-Rn. O exercício é composto por quatro questões, sendo que cada questão contém um quebra-cabeça formado com palitos de fósforo. Na ocasião pedi que eles formassem grupos de três ou quatro pessoas.

Em seguida, ocupei-me de acompanhar os grupos no sentido de manter a organização e provoca-los com perguntas voltadas à aprendizagem da geometria plana. Enquanto os registros eram feitos foi percebido que os alunos se descontraíam, se sociabilizavam e procuravam encontrar soluções para os quebra-cabeças desenvolvendo o raciocínio lógico-matemático e conhecendo alguns polígonos explorados naquele momento.

- 1) Vire o peixe de lado mexendo apenas três palitos.

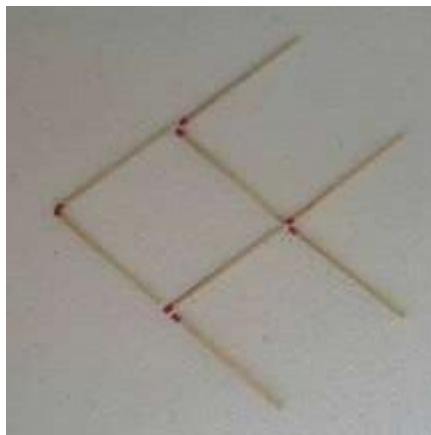


Figura 44 - Quebra-cabeça com palitos de fósforo

Aqui, podemos explorar o conceito de quadrado, de segmento de retas, de ângulos, além é claro, do raciocínio do aluno em resolver o problema.

2) Mova apenas dois palitos para formar quatro quadrados.

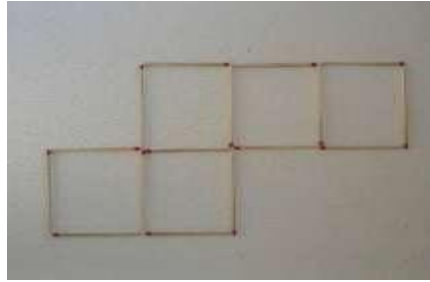


Figura 45 – Quebra-cabeça com palitos de fósforo

Podemos explorar aqui o raciocínio geométrico, o conceito de quadrado, semelhanças, comparar áreas, entre outros e, é claro, a capacidade de resolver o problema.

3) Elimine cinco palitos e forme cinco triângulos iguais.

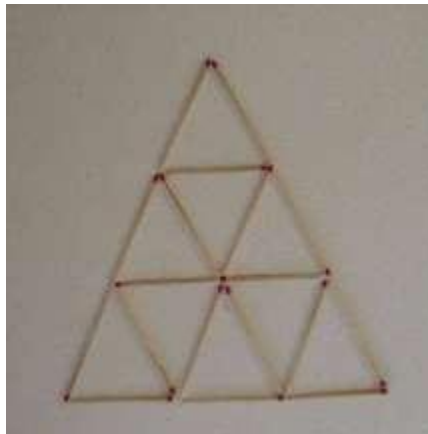


Figura 46 - Quebra-cabeça de palitos de fósforo

Com este quebra-cabeça peça para seus alunos descobrirem quantos triângulos há na figura, quais os tipos de polígonos que podem ser observados, explore o conceito de aresta, de áreas, de perímetros, entre outros, e, é claro qual o raciocínio que eles vão usar para resolver o problema.

4) Mova quatro palitos no hexágono e construa três triângulos equiláteros.

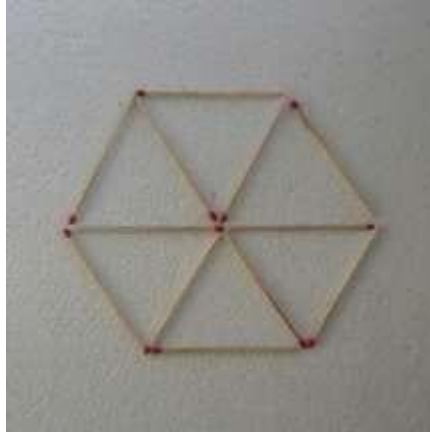


Figura 47 - Quebra-cabeça com palitos de fósforo

O professor pode explorar neste quebra-cabeça o conceito de triângulo equilátero, de hexágono, de diagonais, semelhança de triângulos, entre outros, além, é claro, do raciocínio lógico que ele vai usar para solucionar o problema.

Então, foram selecionados alguns dos muitos tipos de quebra-cabeça construídos com palitos de fósforos que o professor pode utilizar em qualquer ano do ensino fundamental e, cabe a ele, professor, aplicar métodos satisfatórios, respeitando a idade, o conhecimento e o grau de dificuldade de cada aluno.

Canudos plásticos de tomar refrigerantes foi outra ferramenta que foi abordada neste trabalho. Ela pode proporcionar ao educando uma atividade lúdica, motivadora e didático-pedagógica. Igualmente aos palitos, os canudinhos são de fácil acesso e com vantagem de ser flexível, o que facilita o manuseio, podendo ser encaixado um no outro, além de existirem de várias cores e tamanho diferentes.

A Figura a seguir mostra uma linha poligonal formada com canudinhos:



Figura 48 - Linha poligonal com canudinhos

É mostrado na Figura a seguir um polígono convexo formado com canudinhos de tomar refrigerante:

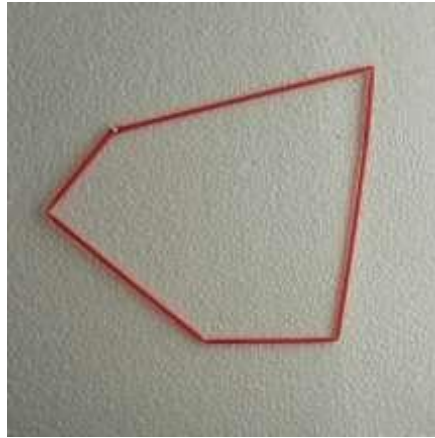


Figura 49 - Polígono convexo com canudinhos

A próxima Figura mostra um polígono não convexo também formado com canudinhos:

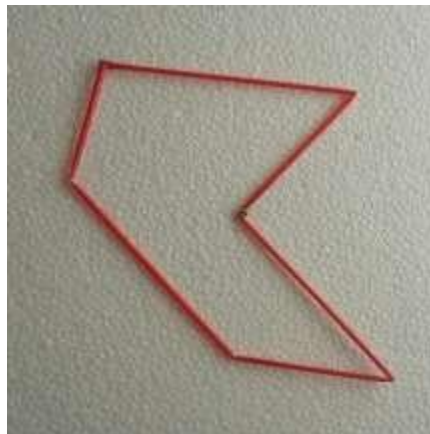


Figura 50 - Polígono não convexo com canudinhos

Na Figura a seguir observa-se um exemplo de polígono regular, no caso, um triângulo equilátero, formado por três canudinhos:

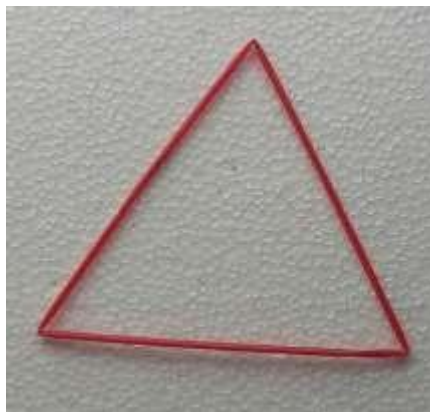


Figura 51 - Polígono regular com canudinhos

Na Figura abaixo têm-se um polígono não regular construído com canudinhos:

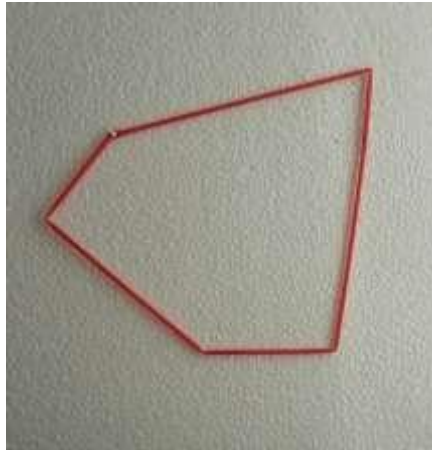


Figura 52 - Polígono não regular com canudinhos

CAPÍTULO 5 EXPLORANDO O GEOPLANO

Neste capítulo será abordado o geoplano, que será visto como mais um recurso que pode auxiliar o trabalho desta área da Matemática, desenvolvendo atividades com figuras planas explorando suas características e propriedades, ampliação e redução de figuras, simetria, área e perímetro.

5.1 Introdução

Segundo Guedes, Silva e Kaiuca (2010) o geoplano é um recurso didático-pedagógico dinâmico e manipulativo que pode auxiliar o trabalho do professor nas aulas de matemática nos mais variados conteúdos, em especial, polígonos, preocupação maior deste trabalho, desenvolvendo diversas atividades com figuras e formas geométricas planas. Embora este trabalho seja voltado para o estudo dos polígonos no ensino fundamental, o geoplano pode ser explorado no ensino médio no estudo das formas geométricas e na geometria analítica.

5.2 Modelos de geoplano

Existem diferentes tipos de geoplano (quadrangular ou quadrado, triangular ou treliçado e circular) É importante observar que, no geoplano utilizam-se elásticos podendo ser aqueles do tipo para amarrar dinheiro, mas de preferência que sejam coloridos. Veja alguns:

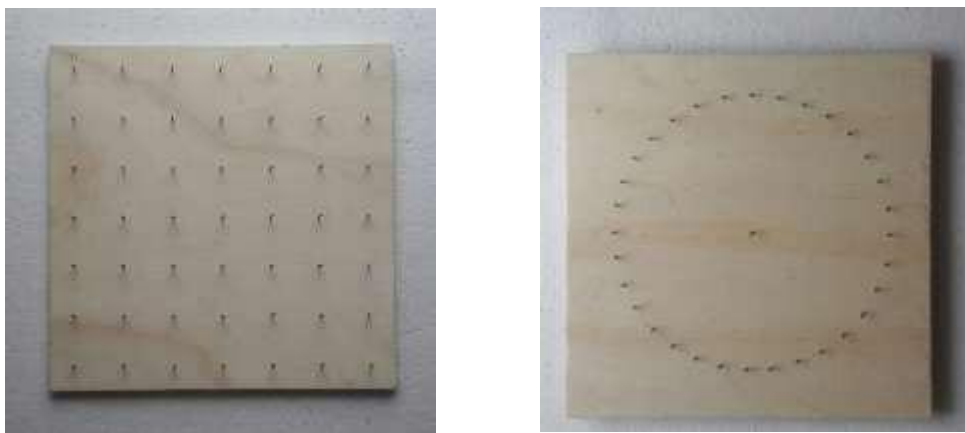


Figura 53 - Modelos de geoplanos

5.3 Como construir um geoplano quadrado

De todos os tipos de geoplanos que possa existir, não restam dúvidas, o mais utilizado é o quadrado. Por se tratar de estudos voltados para a aprendizagem de polígonos daremos uma atenção toda especial para este tipo de geoplano.

O geoplano que construiremos para essa finalidade consiste em uma base de madeira, de forma quadrada, com 49 pinos (pregos) fixados, a meia altura, distribuídos em sete filas paralelas, com sete pregos em cada fila, formando um quadriculado e a distância de um prego para outro, tanto na vertical quanto na horizontal é de 5 cm. Como cada lado tem setepregos o geoplano assim formado é dito 7×7 , e, para complementar o trabalho devemos disponibilizar de elásticos coloridos para construção das figuras sobre o geoplano conforme veremos na Figura a seguir:



Figura 54 - Geoplano e elásticos

5.4 A importância do geoplano no estudo dos polígonos

Como já apresentamos, o geoplano é um recurso didático-pedagógico, ou por que não dizer, um quebra-cabeça já que pode ser usado para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da percepção visual das formas geométricas, e das habilidades cognitivas.

É simples, fácil de ser fabricado e de baixo custo, mas devido sua imensa importância no estudo dos polígonos, é que faz dele um objeto fascinante e encantador, onde o seu lado artístico pode e deve ser explorado. Veremos agora algumas situações, seguidas de exemplos, onde faremos uso do geoplano no estudo dos polígonos:

1) Construção de diferentes tipos de figuras planas, como mostra a Figura a seguir:

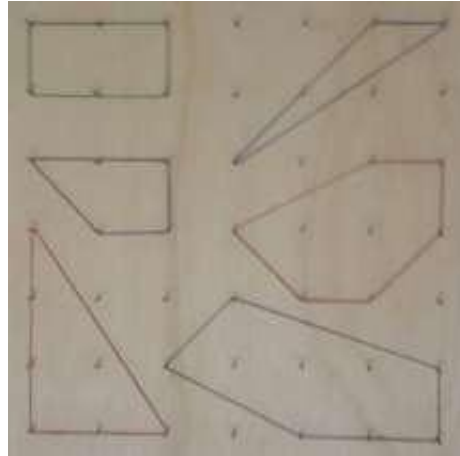


Figura 55 - Figuras planas no geoplano

2) Construção de polígonos regulares. Veja um exemplo:

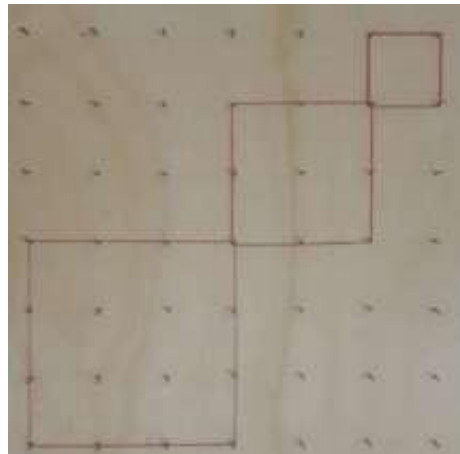


Figura 56 - Polígonos regulares no geoplano

3) Identificar lados e vértices de um polígono. Veja um exemplo:

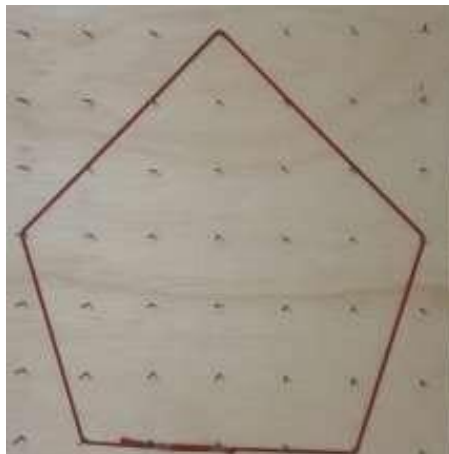


Figura 57 - Pentágono no geoplano

4) Ampliar e observar semelhanças entre polígonos. Veja o exemplo:

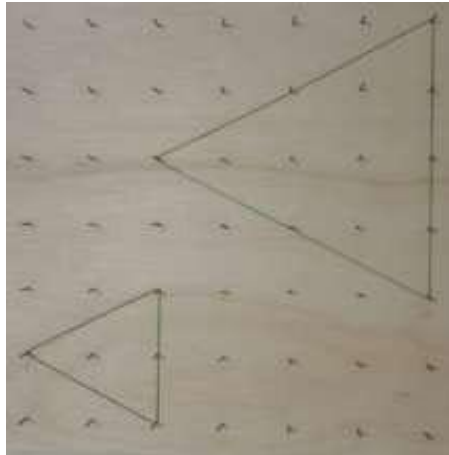


Figura 58 - Triângulos no geoplano

5) Calcular o perímetro de um polígono.

Ex.: Calcule o perímetro de um retângulo construído sobre um geoplano quadrado 7×7 , onde a distância entre dois pregos é de 5 cm. Veja a Figura:

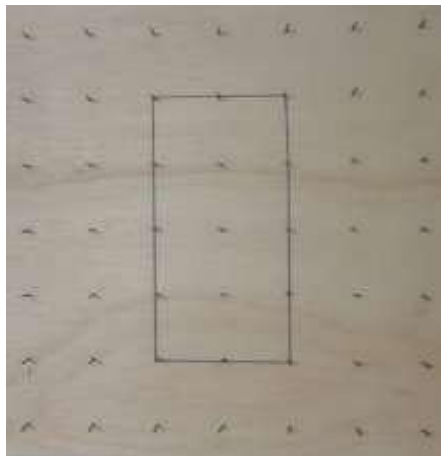


Figura 59 - Retângulo no geoplano

6) Calcular a área de um polígono.

Ex.: Calcule a área da região limitada por um paralelogramo construído sobre um geoplano quadrado 7×7 , onde a distância entre dois pregos é de 5 cm. Veja a figura na página a seguir

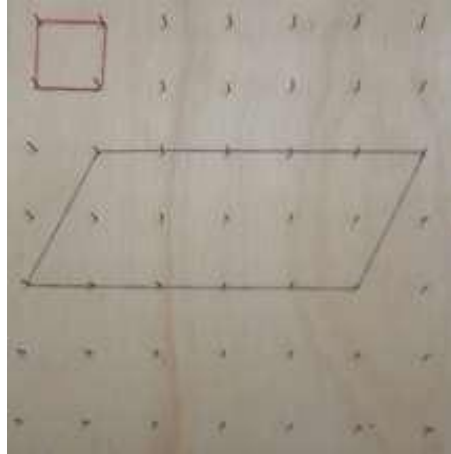


Figura 60 - Paralelogramo no geoplano

5.5 Atividades propostas com o geoplano

As atividades que serão elaboradas a seguir foram todas desenvolvidas com o auxílio de um geoplano quadrado 7x7 e que tomaremos como unidade o lado do menor quadrado construído sobre o geoplano, que passará a medir 1 cm e sua área é igual a 1 cm^2 .

1) Classifique cada polígono levando em conta a quantidade de lados que ele possui, conforme mostra a figura:

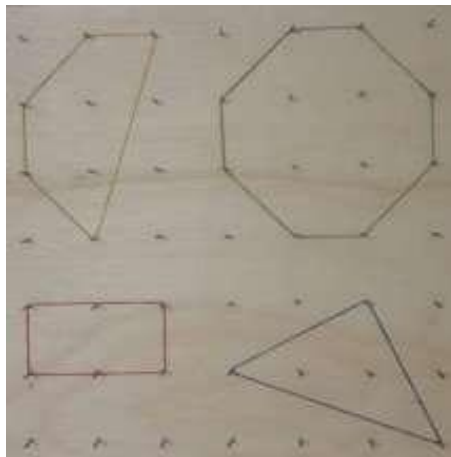


Figura 61 - Polígonos no geoplano

1.1 Quanto à medida de seus ângulos, um triângulo pode ser classificado em: acutângulo, retângulo ou obtusângulo. Com base nessas informações classifique cada triângulo a seguir de acordo com a quantidade de ângulos que ele possui na figura abaixo:

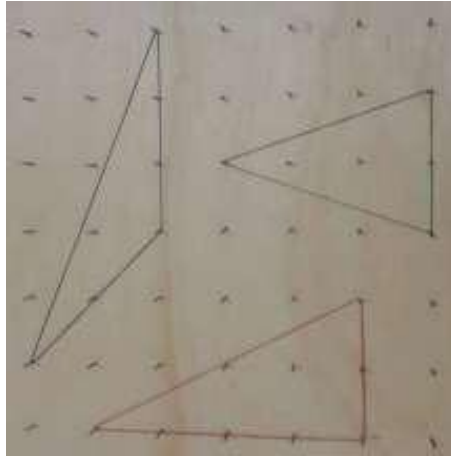


Figura 62 - Triângulos no geoplano

12 Calcule a área de cada quadrado construído sobre os lados do triângulo retângulo, conforme mostra a Figura, em seguida observe o teorema de Pitágoras.

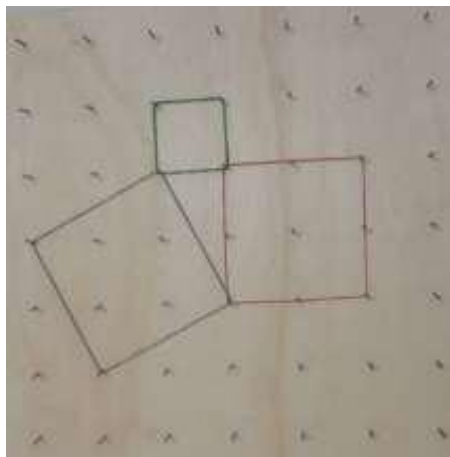


Figura 63 - Triângulo retângulo e quadrados no geoplano

13 Três triângulos isósceles foram construídos sobre o geoplano como mostra a Figura seguinte:

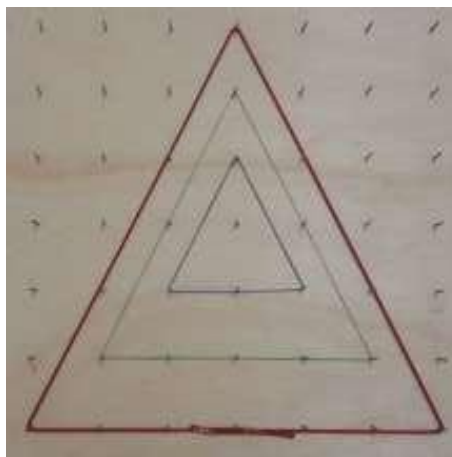


Figura 64 - Triângulos no geoplano

Chamaremos de A_p , A_m e A_g as áreas dos triângulos pequeno, médio e grande, respectivamente. Como cada triângulo da figura dada tem dois lados iguais e um diferente, chamaremos de base do triângulo, o lado diferente dos outros dois e, representaremos por B_p , B_m e B_g , respectivamente, as bases dos triângulos pequeno, médio e grande.

- Calcule o comprimento da base de cada triângulo.
- Calcule a área da região limitada por cada triângulo.
- Calcule as razões A_p/A_m e B_p/B_m , compare os resultados e tire conclusões.
- Calcule as razões A_p/A_g e B_p/B_g , compare os resultados e tire conclusões.
- Calcule as razões A_m/A_g e B_m/B_g , compare os resultados e tire conclusões.

14 Considere o polígono da figura e responda:

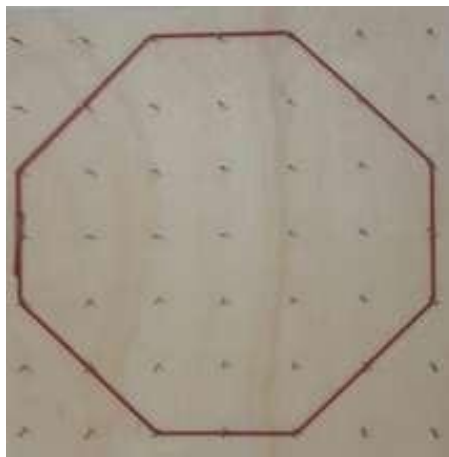


Figura 65 – Polígono

- Qual o nome desse polígono?
- Quantos vértices e quantos lados ele tem?
- Quantas diagonais partem de cada vértice?
- Quantas diagonais passam pelo centro?
- Quantas diagonais há no total?
- Qual a área total?

5.6 Como avaliar os alunos a partir de atividades propostas com o geoplano

Para avaliar é preciso acompanhar passo a passo o processo de ensino e aprendizagem de cada aluno, uma vez que na avaliação deve-se considerar o desenvolvimento

das capacidades em relação à aprendizagem de conceitos. Alguns instrumentos são indispensáveis na construção desse processo avaliativo, como: a participação dos alunos na construção das figuras, a capacidade de construir conceitos geométricos, a capacidade de opinar e dar sugestões quando se deparar com situações-problemas, a criatividade de descobrir novas figuras, entre outros.

O professor tem que ter um olhar clínico na hora de avaliar cada aluno, é preciso considerar que os alunos aprendem diferentemente por que tem histórias de vida diferentes. É preciso observar atentamente essas diferenças que fazem com que os alunos tenham ritmos de aprendizagem diferentes, e é nesse momento que prevalece a ação dialógica entre professor e aluno ou mesmo entre aluno e aluno. O diálogo é muito importante, pois facilita o trabalho do professor no acompanhamento das dificuldades e não expõe o aluno, no sentido dele ser rejeitado pelo resto do grupo, pois a avaliação tem que ser inclusiva integrativa e acolhedora.

5.7 Geoplano circular

O geoplano circular que é direcionado neste trabalho para os alunos do ensino fundamental, consiste em um tabuleiro de madeira de forma quadrada com pregos colocados como segue: um no centro e 32 igualmente espaçados um do outro e distantes 13,5 cm do prego que se encontra no centro, formando um círculo. Os elásticos enlaçados nos pregos representam figuras planas com vértices nesses pregos. Com este geoplano circular é possível construir polígonos convexos com 3, 4, 5, 6..., 32 lados; também é apropriado para o estudo das propriedades dos elementos do círculo e das figuras inscritas. Veja a Figura a seguir:

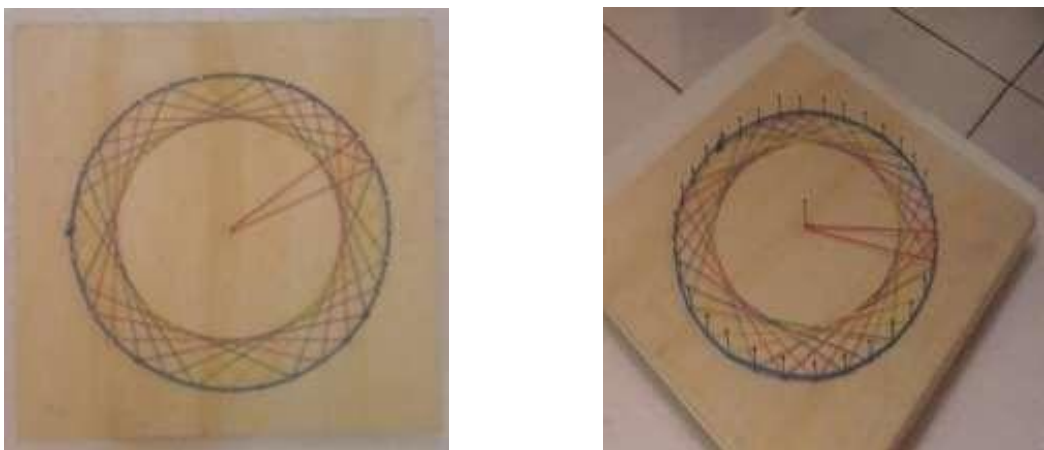


Figura 66 - Geoplanos circulares

O modelo de geoplano circular depende de quem vai construir, pois o mesmo pode variar no tamanho do tabuleiro, na quantidade de pregos colocados sobre uma circunferência,

nas cores e tipos de elásticos, enfim, vai depender da criatividade de cada um. Veja dois modelos de geoplanos circular:

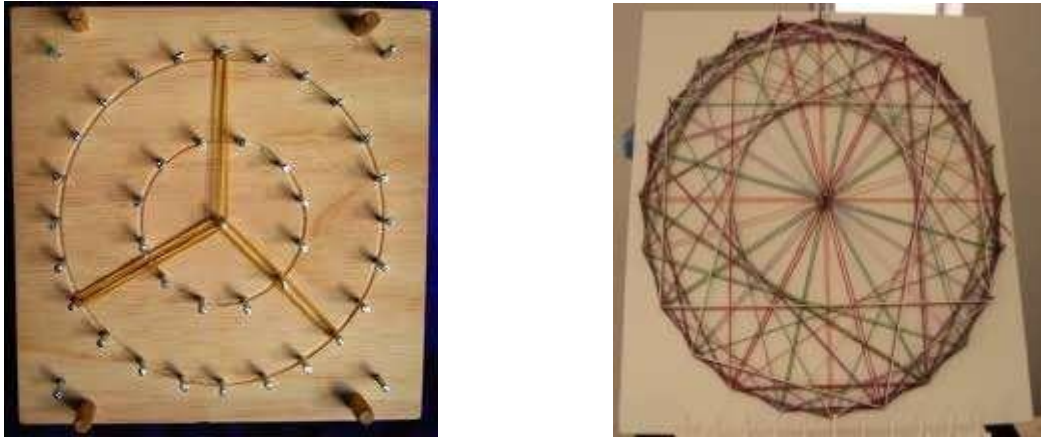


Figura 67 - Geoplanos circulares

Conforme Guedes, Silva e Kaiuca (2010), serão mostrados a seguir algumas aplicações didáticas do geoplano quadrado ou circular no estudo dos polígonos: posições relativas de retas no plano, segmentos de retas, circunferência e círculo, elementos do círculo, ângulos em círculo, somas de ângulos em um círculo, arcos de círculo, polígonos e seus elementos, classificação dos polígonos, polígonos regulares, ângulo central e apótema de polígonos regulares, polígonos irregulares, polígonos inscritos e circunscritos, polígonos entrelaçados, ângulos internos e externos dos polígonos, construção e comparação de figuras planas, perímetro de polígonos, equivalência de perímetros, área de polígonos inscritos, equivalência de áreas, congruências de figuras planas, dissecções e equicomposição de polígonos, semelhanças de figuras planas, etc.

CAPÍTULO 6 O DIÁLOGO NA CONSTRUÇÃO DAS IDEIAS MATEMÁTICAS

6.1 Avaliação

Considerando-se que avaliar consista num processo de sistematizar registros e apreciar resultados obtidos, convém focar ou direcionar o caráter especulativo da avaliação às observações na práxis das atividades da sala de aula. De acordo com Comenius (2002):

De tempos em tempos, interrompendo a lição, deve interrogar um ou outro: o que acabei de dizer? Quer repetir esse período? Em que ocasião aconteceu isso? etc. Isso será útil para toda a classe. Se ficar claro que alguém estava distraído, deverá ser repreendido e punido imediatamente, para que todos se esforcem em prestar mais atenção (2002, p. 212).

É bem provável que devemos aproveitar situações em que os alunos utilizem e vejam que realmente podem utilizar os conhecimentos, valores e habilidades que desenvolveram. A avaliação não deve representar um momento único e isolado do projeto, mas deve estar inserida no próprio processo do aprendizado.

A avaliação deve ser entendida como um processo contínuo e sistemático, compreensivo, comparativo, cumulativo, informativo e global que permite avaliar o conhecimento do aluno, portanto, ela não pode ser esporádica nem improvisada, mas ao contrário, deve ser constante e planejada fornecendo feedback e permitindo a recuperação imediata quando for necessária (SOUZA, 2011, p. 36)

À medida que o professor for trabalhando com o aluno, já paralelamente a avaliação vai se formando, acompanhando as estratégias do ensinar-construir-aprender. Nesse momento é muito importante que o professor esteja presente, que possa dialogar com os alunos, que os coloquem em situações conflitantes entre o objeto e o conhecimento.

À proporção que o professor leva o aluno a compreender situações-problemas de matemática, a relacionar com coisas do cotidiano, a despertar no aluno o interesse pela matemática, a compreender que a melhor maneira de aprender alguma coisa é descobri-la você mesmo, ou seja, quando o professor observar essas características no aluno já terá subsídios para uma avaliação satisfatória, construída dentro do processo, através do diálogo e das descobertas com o mundo.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) a avaliação da aprendizagem deve compreender o ensino oferecido, a atuação do professor, o desempenho do aluno, a estrutura da escola, as ferramentas auxiliares promovidas no ensino e a metodologia utilizada.

Não devemos pensar uma avaliação somente voltada para a medição dos conteúdos ensinados, ela deve possuir características contextuais embasadas em temas transversais como éticas, meio ambiente, pluralidade cultural, trabalho e consumo, educação sexual e saúde. A interdisciplinaridade também deve ser abordada, por exemplo: em uma avaliação de Matemática podemos criar situações problemas relacionadas à Física, Química, Biologia, Engenharia, entre outras ciências afins.

A avaliação é uma tarefa didática necessária e permanente do trabalho docente, que deve acompanhar passo a passo o processo de ensino e aprendizagem. Através dela os resultados que vão sendo obtidos no decorrer do trabalho conjunto do professor e dos alunos são comparados com os objetivos propostos a fim de constatar progressos, dificuldades, e reorientar o trabalho para as correções necessárias (LIBANEO, 1994, p.195).

A avaliação é um processo contínuo e necessário para uma melhor análise a cerca do desempenho dos alunos, com o intuito de identificar suas dificuldades e onde o aprendizado é mais notório por parte dos discentes.

6.2 O diálogo como estratégia para o sucesso no aprendizado da Matemática

O efetivo diálogo pedagógico só se verifica quando há confrontação verdadeira de visões e opiniões; o aprendizado de polígonos em matemática é um processo de transição da visão intuitiva, de senso comum ou de auto elaboração pela visão de caráter científico construída pelo aluno, como produto do embate de visões. Sobre o diálogo, SKOVSMOSE relata e faz referência a Paulo Freire e Rogers.

Na Filosofia clássica, o diálogo refere-se antes de tudo a uma exposição (e confrontação) de dois ou mais pontos de vistas diferentes (e contraditórios), com o objetivo de encontrar uma conclusão que seja consensual. Freire e Rogers, contudo, também viram o diálogo como algo que abrange as relações interpessoais, nas quais ouvir e aceitar o outro é fundamental. Dialogar não apenas uma forma de análise, mas também um modo de interação. Nas explicações sobre a noção de diálogo que seguem não perderemos de vista esses dois aspectos (epistemológico e interpessoal) do diálogo (SKOVSMOSE, 2010, p.14).

Não somente em matemática, mas até particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos, confrontados com situações-problemas, novas, mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de pesquisa, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua

capacidade de raciocínio, adquirem autoconfiança e sentido de responsabilidade; e, finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e argumentação.

Por outro lado, é importante sempre reforçarmos que a aula expositiva e dialogada, na aplicabilidade das estratégias fundamentais do facilitador, é também um dos muitos recursos no processo ensino-aprendizagem e deve ser o momento do diálogo, do exercício da criatividade e do trabalho coletivo de elaboração do conhecimento. Através dessa técnica podemos, por exemplo, fornecer informações preparatórias para um debate, jogo (quebra-cabeça) ou outra atividade em classe, análise e interpretação dos dados coletados nos estudos do meio e laboratório.

O diálogo é uma forma de interagir, de agrupar, de reunir. Para haver diálogo, é necessário que exista quem dialogue. O diálogo ocorre entre aluno(s)-professor (es), aluno-aluno(s), aluno-professor-palestrante e outros. O diálogo pode ser consigo próprio. O ato de dialogar leva o(s) aluno(s) a formar seu ponto de vista a partir de outras maneiras de enxergar o objeto de estudo, a defender seu pensamento e tirar de tempo a ideia de que o professor é apenas um repassador de conteúdo. O professor (facilitador) apresentará uma técnica, uma situação problema (ou várias) que será trabalhada do individual para o coletivo ou do coletivo para o individual. O professor levará os alunos a trabalharem, questionarem, não dando nada fabricado. No meu trabalho com jogos de quebra-cabeças, acredito em aluno ativo, participativo, com conhecimentos e precisando conhecer mais através dele mesmo em conjunto com seus colegas e com o meio.

Conforme Paulo Freire (1987 p. 79), “não há diálogo, porém, se não há um profundo amor ao mundo e aos homens”.

Sendo fundamento do diálogo, o amor é, também, diálogo. Daí que seja essencialmente tarefa de sujeitos e não possa verificar-se na relação de dominação. Nesta, o que há é patologia de amor: sadismo em quem domina; masoquismo nos dominados. Amor, não. Porque é um ato de coragem, nunca de medo, o amor é compromisso com os homens. Onde quer que estejam estes, oprimidos, o ato de amor está em comprometer-se com sua causa. A causa de sua libertação. Mas, este compromisso, porque é amoroso, é dialógico (FREIRE, 1987, p. 80).

A educação libertadora não se postula em um compromisso fragilizado pelas relações afetivas. O diálogo pedagógico do amor é racional, está pautado em regras e compromissos com a vontade e o saber.

CAPÍTULO 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido em um período de aproximadamente seis meses com alunos de ensino fundamental, das séries sétima, oitava e nona da Escola Estadual Rui Barbosa, localizada em Tibau no Estado do Rio Grande do Norte.

Foram utilizados vários procedimentos metodológicos pautados nos objetivos a serem alcançados, que se postularam de extrema importância para a concretização de um estudo voltado ao aprendizado de polígonos no ensino fundamental, investigação essa que é de suma importância, a medida que visa ao conteúdo de geometria espacial do ensino médio.

Dentre as diversas formas de conduzir esse processo e muitas vezes utilizando uma combinação de métodos, geralmente o material era apresentado para os alunos, que aos poucos se familiarizavam com o objeto de estudo, conhecendo as regras do jogo e a importância de se trabalhar com este ou aquele quebra-cabeça em uma aula de matemática. Foi proposto que cada grupo confeccionasse seu próprio jogo, aplicasse as regras por conta própria e descobrisse outras formas de solucionar cada desafio apresentado, fosse com atividades propostas ou explorando o material concreto naquele momento, objetivando sempre transferir a responsabilidade para cada estudante, tornando-o protagonista do seu aprendizado.

Neste trabalho, foi utilizado o Tangram, a dissecção de polígonos, palitos de picolé e de fósforo, canudinhos plásticos e o geoplano, para formar jogos e quebra-cabeças didáticos com uma proposta de estimular os alunos, desafiá-los e mostrar que é possível estudar de forma lúdica e prazerosa.

Durante o período em que a presente pesquisa foi desenvolvida, foram realizadas anotações e observações para daí obter conclusões mais concretas. Foi observado que em um primeiro momento existiu certa rejeição por parte de alguns alunos, porém na proporção em que o diálogo foi acontecendo foi-se construindo um ambiente favorável para aquela situação, onde até mesmo os alunos mais apáticos e os agitados passaram a interagir com a turma a respeito da atividade. Assim criou-se um clima ainda mais agradável dentro de uma perspectiva de aprendizagem cooperativa.

O jogo fluiu com naturalidade e aos poucos foram introduzidos elementos voltados para a construção do saber matemático. Dessa forma, percorrendo nesta dualidade que é o jogo e a resolução do problema, foram registrados avanços importantes. O simples fato de se construir um quadrado utilizando uma régua já era motivo de dificuldade, uma vez que era preciso trabalhar a coordenação motora. Portanto, gradativamente, no decorrer das

aulas, foi observado um avanço no aprendizado desses educandos, desde a construção e o nome de cada polígono, seus elementos e classificação, até o entendimento de conceitos mais complexos para eles como área e perímetro.

Diante disso, face à realidade dos objetivos terem sido alcançados, espera-se que o presente trabalho seja de suma importância e que ele esteja disponível para que outros educadores usem essas ferramentas aqui pedagogicamente apresentadas, isto é, levem os jogos didáticos para a sala de aula, ou quaisquer outros recursos similares que possam tornar as aulas mais atrativas, sem fugir do objetivo pedagógico que é o de fomentar a descoberta pelo conhecimento cada vez mais, focando sempre o sujeito-aluno como ator do seu aprendizado.

REFERÊNCIAS

ALRØ, Helle; SKOVSMOSE, Ole. **Diálogo e aprendizagem em educação Matemática**. Tradução de Orlanda Figueredo. 2. ed. Autêntica editora: Belo Horizonte, 2010.

ÁVILA, Geraldo. **Várias facetas da matemática: Tópicos para licenciatura e leitura em geral**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática Bianchini**. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.
BIEMBENGUT, Maria Salett; HEINS, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. 5. ed. São Paulo: Editora Contexto, 2010. 127 p.

COMENIUS. **Didática Magna**. São Paulo: Martins Fontes, 2002.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamento de Matemática Elementar**. São Paulo: Atual, 2005. 456 p.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do Oprimido**. 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e terra, 1987.

GUEDES, Ana Letícia Lima; SILVA, Lucia Fernanda da; KAIUCA, Miriam Abduche. **TRABALHANDO COM GEOPLANO**. 2010.

Disponível em:

<<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22374>>. Acesso em: 07 jan. 2017.

HELLMEISTER, Ana Catarina P. et al. **Explorando o Ensino da Matemática: Atividades**. 2. ed. Brasília: Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica, 2004. 136 p.

LIBÃNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Meu professor de matemática: e outras histórias**. 6. ed. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 241 p.

PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) – Ministério da Educação – Para o Ensino Fundamental (1997).

ROCHA, Marcio. **A origem e a história do tangram: Breve História do Tangram**. 2010. Disponível em: <http://profmarciorocha.blogspot.com.br/2010/11/origem-e-historia-do-tangram_28.html>. Acesso em: 10 fev. 2017.

SMOLE, Katia Stocco et al. **Cadernos do Mathema: Jogos de matemática**. Porto Alegre: Grupo A, 2008. 116 p.

SOUSA, Georgyna Batista de Carvalho. **A eficácia da avaliação qualitativa no processo ensino-aprendizagem**. In: Mundo Jjem. Publicação On Line Pontifca Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2011. Disponível em <<http://www.pucrs.br/mj/artigo-a-eficacia-da-avaliacao-qualitativa-no-processo-ensino-aprendizagem.php>>. Acesso: 21 out 2016.

STEWART, Ian. **Mania de Matemática:** Diversão e jogos de lógica e Matemática. Rio de Janeiro: Zahar, 2004. 207 p.