2013: Trabalho de Conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT
Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Construindo o conceito de álgebra: monômios e polinômios

Alcione A de Oliveira Moura [1]
Ronaldo Ribeiro Alves[2]

Resumo: O presente artigo visa apresentar propostas metodológicas diferenciadas para o ensino e aplicação de monômios e polinômios, tendo como fundamento uma pesquisa realizada com alguns professores do 8º ano do ensino fundamental da rede pública de ensino do estado de Minas Gerais, cuja maioria atua na cidade de São joão del-Rei/MG. A partir das respostas, serão apontados os erros mais comuns cometidos pelos alunos, citados pelos professores pesquisados, ou apontados no artigo publicado na revista Cálculo. Na seção seguinte serão sugeridas práticas e métodos diferenciados para se trabalhar álgebra. A proposta será feita por meio de atividades como jogos, resolução de problemas e modelagem matemática, objetivando estimular e incentivar o aluno no aprendizado da álgebra. Concluir-se-á que não existe a melhor estratégia para o ensino da álgebra, mas métodos mais adequados a cada turma que se trabalha, dependendo apenas do discernimento do professor no momento de sua escolha.

Palavras-chave: álgebra, aritmética, polinômio, ensino-aprendizagem.

1 Introdução

Introduzir os alunos do Ensino Fundamental na álgebra tem sido para a maioria dos professores um enorme desafio. As dificuldades encontradas no processo de alfabetização algébrica provêm da maneira já pronta e acabada com que a álgebra é trabalhada com os alunos, fazendo que os mesmos não saibam como aplicá-la de forma significativa. É muito comum no momento em que a álgebra é introduzida, os alunos questionarem o porquê de estarem aprendendo algo que eles nem sequer sabem quais são suas utilizações, ou em termos matemáticos, quais são suas aplicações práticas. Na verdade, os alunos estão apenas "engolindo" um método, pois precisam aprender a operar algebricamente para obter aprovação nas provas referentes a esse conteúdo. Sobre isso os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) relatam que:

[1]Aluna de Mestrado Profissional em Matemática, Turma 2011
Instituição: Universidade Federal de São João del-Rei - UFSJ
E-mail: alcioneufsj@yahoo.com.br
[2]Orientador do Trabalho de Conclusão de Curso
Departamento de Matemática e Estatística - DEMAT, UFSJ
E-mail: ronribal@ufsj.edu.br

> É importante destacar que as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (PCN, 1998, p. 63).

No entanto a maioria dos livros didáticos trazem em sua maior parte, exercícios para aplicação de técnicas e não para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, não existe uma conexão entre a aritmética e a álgebra; tudo o que se aprende em uma desvincula-se do que é aprendido na outra. Para Cruz(2005) esta não articulação entre estes dois conteúdos não dá oportunidades ao aluno de construir conexões entre letras e números e, talvez por isso, não entendem a álgebra como uma ferramenta para provar regras e relações numéricas.

Esse individualismo conteudista é, na maioria das vezes, o motivo do insucesso da aprendizagem do aluno. Faz-se necessária uma interligação entre estes dois conteúdos a fim de que os objetivos propostos para o estudo da álgebra, no ensino fundamental, obtenha êxito. Podemos destacar que o não entendimento nesse caso, pode acarretar prejuízos futuros, como dificuldades de compreensão da trigonometria e suas relações fundamentais, as quais são demonstradas algebricamente.

Existem diversas maneiras de se trabalhar álgebra de forma que o aluno possa interagir e participar da construção do seu conhecimento; pode-se citar o trabalho com modelagem matemática e com o algeplan. Neste trabalho, o objetivo é colocar dentre estas, outras alternativas de se trabalhar tais conteúdos.

2 Dificuldades e sugestões encontradas no ensino de álgebra no ensino fundamental

Antes de iniciar a escrita deste trabalho, foi feita uma pesquisa entre alguns professores de Matemática da rede pública do estado de Minas Gerais, cuja maioria atua na cidade de São João del Rei. Esta pesquisa tinha por objetivo verificar se as dificuldades encontradas nos alunos, ao ensinar álgebra, eram as mesmas, e de que forma os professores estavam introduzindo e trabalhando este conteúdo.

Foram feitas perguntas do tipo: Você gosta de trabalhar com a 7ª série? Gosta de ensinar álgebra? Como faz para iniciar um novo tópico dentro do ensino de álgebra? Ao iniciar um novo tópico, dá exemplos do cotidiano? Quais as maiores dificuldades percebidas? Qual ou quais as causas para estas dificuldades? e finalmente: O que pode ser feito para que o aprendizado de álgebra se torne mais fácil?

Analisando as respostas dadas pelos professores, nota-se que a maioria trabalha com a álgebra da forma convencional, sem aplicações práticas e partindo da explicação para depois a resolução de exercícios, de forma mecânica e repetitiva. O conteúdo do oitavo ano do ensino fundamental é considerado maçante, por isso não gostam muito de lecionar nessa turma e optam pelo Ensino Médio.

2.1 Dificuldades relatadas

Houve, pelos professores pesquisados, uma concordância com o fato de que a maior dificuldade no estudo da álgebra, bem como de todos os conteúdos da Matemática, é a interpretação dos exercícios propostos, pois os alunos leem mas não compreendem o que está escrito. Assim, muitas vezes, os alunos desistem da leitura e análise de um enunciado matemático julgando-o complexo e não retendo as informações nele contidas.

Particularmente, em álgebra, a dificuldade mais citada foi a de o aluno não conceber a mesma como linguagem, apresentando então resistência em aceitar que as letras representam números, ou seja, representam quantidades; causando um certo bloqueio na aprendizagem da álgebra.

Em seguida foi apontada também a dificuldade de transposição de conhecimentos aritméticos para a álgebra. Por exemplo, ao multiplicar monômios, os alunos confundem com a soma dizendo que $a.a = 2a$ ou esquecendo do expoente quando este vale 1, por exemplo $a.a^3 = a^3$. Assim como acontece com o esquecimento de parênteses na aritmética, o mesmo se verifica na álgebra. Ainda no momento do cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, esquecem de colocar o sinal de multiplicação que existe entre coeficiente e letra, como no exemplo abaixo:

Na expressão

$$2x + y$$

considerando $x = 5$ e $y = 3$ alguns determinam o valor numérico por

$$25 + 3 = 28$$

Muitos outros erros foram apontados. Como os mesmos estavam em consonância com o artigo referente a este assunto, editado na revista Cálculo, edição 12- páginas 14 a 19 e baseando-se neste, optou-se por transcrever tal artigo, na seção seguinte. Serão verificadas algumas adaptações devidas aos relatos recebidos sobre os erros mais cometidos em álgebra.

2.2 Causas sugeridas

De acordo com o grupo de professores pesquisados, atualmente, devido ao sistema de ensino onde o aluno não deve ser retido nas séries iniciais, a grande maioria chega ao sexto ano mal alfabetizada apresentando dificuldades na leitura, na escrita e na aritmética. Tendo como referência essa má formação básica em matemática, onde o aluno não sabe sequer as operações básicas como a tabuada, por exemplo, pergunta-se: como ele conseguirá ser alfabetizado algebricamente?!!

Ainda segundo o grupo, um fator que prejudica a aprendizagem da álgebra, é que a maioria dos alunos ao chegar ao ensino fundamental II, nunca ouviu falar do tema, sendo uma novidade para o mesmo, então, um primeiro contato com o conteúdo torna-se difícil; além da não visualização da praticidade do mesmo. Existe uma ideia equivocada de que a aprendizagem da álgebra só é possível aos alunos mais velhos uma vez que crianças entre 7 e 9 anos são capazes de usarem notações para ajudar na construção do raciocínio e isto dificulta ainda mais o ensino da mesma.

Outro fator prejudicial ao ensino da álgebra sugerido pelo grupo é o mundo tecnológico que se apresenta mais atraente que a sala de aula. O aluno torna-se desinteressado ou demonstra preguiça em ter que fazer os exercícios sozinhos. Além disso, estão tão habituados a copiar, que não procuram compreender a resolução dos problemas e exercícios propostos.

Apontaram ainda a falta de estrutura da sociedade brasileira; as famílias não ajudam os alunos por não perceberem o valor da escola. Para muitos, vender drogas dá mais dinheiro e ascensão social que estudar. Outro agravante citado pelo grupo é que a escola pública não oferece condições ao trabalho do professor com salas superlotadas e sobrecarga de atividades; salários baixos obrigando o profissional a ter mais cargos e deixando de se dedicar a criação de atividades novas que possam incentivar e motivar os alunos.

2.3 Sugestões apontadas

Dentre as sugestões apontadas pelo grupo de professores entrevistados, a que teve maior destaque foi começar o estudo da álgebra mais cedo com uma pequena introdução já no 5° ano do ensino fundamental (antiga 4ª série). Iniciaria com pequenos problemas e exercícios simples, por exemplo, após fazer atividades com quadrados vazios, substituí-los por letras, como o que se segue abaixo:

Complete o quadrado para que a sentença seja verdadeira:

a) $4 + \square = 15$ depois fazer como $4 + a = 15$

b) $\square - 7 = 12$ depois fazer como $b - 7 = 12$

c) $7 + 10 = \square$ depois fazer como $7 + 10 = c$

Outra sugestão apontada, foi trabalhar com o aluno do ensino fundamental, já no final do 6° ano com equações simples, utilizando a realidade vivenciada pelo aluno, além de atividades didáticas como diagramas que deveriam ser utilizados desde a educação infantil. Ambos teriam como finalidade o embasamento algébrico facilitando a formalização futura da álgebra.

Também foi sugerido o uso de jogos, resolução de problemas, modelagem matemática e atividades diversificadas que estimulem a aprendizagem da álgebra.

3 Erros mais comuns em álgebra

Para Booth (1995), uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nessa matéria e investigar as razões desses erros.

Foi pensando nisso que citou-se abaixo, erros comuns de álgebra e descobriu-se que a maioria tem origem em dificuldades da aritmética; alunos que não aprenderam bem as regras da aritmética terão ainda mais dificuldades em assimilar os conceitos de álgebra.

1. Dividir por zero

Normalmente os alunos não conseguem entender o que existe de errado em

$$\frac{7}{0} = 0$$

ou ainda,

$$\frac{7}{0} = 7$$

Essa dificuldade pode acarretar, na álgebra, contradições como na demonstração seguinte:

Suponha que $b = a$. Multiplicando-se os dois lados por a, tem-se:

$$ab = a^2$$

Subtraindo a expressão por b^2,fica:

$$ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Fatorando ambos os membros, obtém-se:

$$b(a - b) = (a + b)(a - b)$$

dividindo os dois lados por $(a - b)$,tem-se:

$$b = a + b$$

Como $a = b$, então:

$$b = 2b$$

dividindo-se os dois membros por b,obtém-se a contradição

$$1 = 2$$

Pode-se notar que o erro cometido neste exemplo está no momento em que o aluno divide por $(a - b)$, visto que, como a afirmação assumida verdadeira é $a = b$ tem-se que $a - b = 0$ e dividir por zero não faz sentido. Portanto, na Álgebra, é sempre importante pensar antes de efetuar os cálculos, se não existe algum zero pelo qual se esteja dividindo.

2. Parênteses mal colocados ou em falta

Na maioria das vezes, o esquecimento é causado pela preguiça de o colocar. Faz-se importante apresentar para os alunos que esta preguiça pode ser causa de erros na interpretação uma atividade. Note que já em aritmética, se o aluno ficar com preguiça de colocar o parênteses adequadamente, ocasiona erros de sinal por exemplo, o qual é um dos erros mais cometidos pelos alunos no estudo das potências de números negativos e, mais tarde, também irá prejudicá-lo no estudo da álgebra.

Exemplos:

a) Eleve -2 à quarta potência.

O aluno escreve:

$$-2^4 = -2.2.2.2 = -16$$

enquanto o correto seria

$$(-2)^4 = (-2).(-2).(-2).(-2) = 16$$

Note que como

$$-16 \neq 16$$

a falta do parênteses levou o aluno a cometer um erro inicialmente simples, mas que pode ser causa de vários outros.

b) Eleve $4x$ ao quadrado.

O aluno escreve:

$$4x^2$$

enquanto o correto seria

$$(4x)^2 = 16x^2$$

Como $4x^2 \neq 16x^2$, mais uma vez o aluno errou por colocar apenas o x elevado à potência, quando o termo todo deveria estar elevado, já que o mesmo se encontra imediatamente à esquerda do expoente.

c) Subtrair $3x - 5$ de $x^2 + 4x - 6$.

O aluno escreve

$$x^2 + 4x - 6 - 3x - 5 = x^2 + x - 11$$

enquanto o correto seria

$$x^2 + 4x - 6 - (3x - 5) = x^2 + x - 1$$

Como $x^2 + x - 11 \neq x^2 + x - 1$, mais uma vez a não colocação apropriada do parênteses evidenciou a não aprendizagem dos conceitos.

3. Distribuição imprópria

A maioria dos alunos aplica a distributiva da multiplicação em relação a adição erroneamente; esta propriedade quando apresentada aos alunos, na aritmética, é quase sempre descartado o seu uso, pois os alunos devem solucionar os parênteses primeiro para depois multiplicar e o uso incorreto da propriedade causa erros na aprendizagem da álgebra. Veja:

Exemplo 1: $2.(3x - 9)$

Alguns alunos resolvem da seguinte forma:

$$2.(3x - 9) = 6x - 9$$

onde o correto seria

$$2.(3x-9)=6x-18$$

A maioria dos alunos apenas multiplica pelo primeiro termo que está dentro do parênteses, esquecendo do segundo.

Exemplo 2: $3.(x+3)^2$ Alguns alunos resolvem da seguinte forma:

$$(3x+9)^2=9x^2+108x+81$$

Novamente fica evidente a não compreensão dos conceitos, já que o correto seria resolver a potência primeiro,

$$3.(x^2+6x+9)=3x^2+18x+27$$

4. Regra da Adição mal aplicada

Os alunos transferem, na maioria das vezes, a distributiva da multiplicação sobre a adição para situações mais elaboradas como:

a) $(x+y)^2=x^2+y^2$

b) $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

c) $\frac{1}{x+y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$

c) $sen(x+y)=sen(x)+sen(y)$

Se substituir as variáveis x e y por números aleatórios notar-se-á que as expressões do segundo membro da igualdade serão diferentes dos resultados do primeiro membro.

Também aqui, o uso incorreto dessa propriedade bem como a não compreensão de regras similares em aritmética acarreta numa enorme dificuldade de assimilar a forma de resolução das situações acima.

5. Erros de simplificação

a) $\frac{4x+2}{2}=4x+1$

b) $\frac{5x^2+x}{x}=5x^2+1$

Na pressa de simplificar ou ainda pela incompreensão do processo de simplificação os alunos não fatoram as frações algébricas primeiro para depois simplificar e acabam por cometer mais um erro. Aconselha-se que o processo de fatoração seja utilizado ou pelo menos apresentado aos alunos no momento em que se estuda a simplificação de frações aritméticas, visando um embasamento para a compreensão da simplificação de frações algébricas.

O correto seria:

a) $\frac{4x+2}{2}=\frac{2(2x+1)}{2}=2x+1$

b) $\frac{5x^2+x}{x}=\frac{x(5x+1)}{x}$

4 Análise dos muitos porquês dos erros cometidos pelos alunos

Na atualidade, a aritmética e a álgebra são ensinadas separadamente. A aritmética é trabalhada nas séries iniciais com níveis de dificuldade crescente, e somente a partir do 6º e 7º anos, o aluno é apresentado ao uso das letras para a resolução de problemas de álgebra. Esse modo de organização do ensino é bastante praticado e permite bons resultados. Vale ressaltar que algumas dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de dificuldades conceituais em aritmética que não foram corrigidas, tais como significado dos símbolos e operações inversas.

Para Lins e Gimenez (1997), na comunidade dos Educadores Matemáticos há poucas noções tão enraizadas como a de que a aprendizagem da aritmética deve vir antes do aprendizado da álgebra. Isto está retratado nos livros didáticos cabendo, então, ao professor, elaborar uma ação pedagógica que propicie aos alunos significados matemáticos e que dê sentido às suas aplicações práticas em sala de aula.

A revista Nova Escola, edição 199 de fevereiro de 2007, traz uma reportagem intitulada "Falta fundamentação didática no Ensino da Matemática" com uma entrevista realizada com a pesquisadora argentina Patricia Sadovsky,[3] numa de suas vindas ao Brasil para participar de encontros no Centro de Educação e Documentação para a Ação Comunitária e na rede privada de São Paulo.

Segundo sadovsky, a má fama da Matemática se deve à abordagem superficial e mecânica realizada pela escola. Falta formação adequada (prática reflexiva e formação continuada) aos docentes para aprofundar os aspectos mais relevantes; aqueles que possibilitam considerar os conhecimentos prévios dos alunos, as situações didáticas e os novos saberes a construir. A sugestão da pesquisadora, é que as Políticas Públicas da Educação implementem um espaço maior de reflexão nas escolas onde muitas vezes o professor não tem tempo para se especializar, devido a duplicidade de cargos em função de melhores salários.

Ainda segundo a pesquisadora, atualmente a matemática é apresentada sem vínculos com os problemas que fazem sentido na vida dos alunos. São pouco explorados os aspectos como desafios e resolução de problemas, discussão de ideias e verificação de informações. Faltam conceitos básicos para o entendimento do conteúdo proposto, busca da participação ativa do aluno na execução do ensino. Segundo a autora, é preciso confrontar o conceito antigo e o moderno, para que não se tenha a impressão de que o novo anule o antigo, mas sim promova um ensino renovado. "O profissional de hoje precisa ter uma postura reflexiva capaz de mostrar que não basta abrir um livro didático em sala de aula para que as crianças aprendam. O trabalho intelectual do professor requer tomadas de decisões particulares e coletivas baseadas em uma sólida bagagem conceitual."

Para a pesquisadora, jogos, idas ao supermecado/simulação de compras, ou fazer um projeto interdisciplinar, não necessariamente contemplam a aprendizagem de um novo saber ou conteúdo Matemático; é necessário que estes sejam uma fonte para elaborar problemas, sistematizar o conhecimento na sala de aula e estabelecer relações matemáticas muito bem definidas pelo professor."Não basta ser interdisciplinar para ser interessante, nem fazer parte do cotidiano para ser pertinente. Fundamental é ter um compromisso de aprendizagem com o aluno."

[3]Doutora em didática da Matemática pela Universidade de Buenos Aires. Além de pesquisar quais são as perguntas fundamentais que orientam o trabalho de investigação nas aulas, como se dá a evolução dos conhecimentos nos estudantes e as melhores intervenções que os professores podem fazer; coordena um programa de capacitação docente da secretaria municipal de Educação de Buenos Aires

D'Ambrósio[4](2003, apud Silva, 2007) diz ainda que talvez o maior indicador da ineficiência do sistema educacional esteja no fato de não sermos capazes de fazer a transferência de conhecimentos para situações novas. É por isso que devemos trabalhar a aritmética visando a aplicação na álgebra.

Sabemos que a álgebra contém um certo formalismo em sua linguagem e necessita de alguns procedimentos mais elaborados que exijam um maior grau de abstração, mas ainda sim, é importante ressaltar que a maneira com que o professor trabalha estes conceitos e procedimentos algébricos pode dificultar ainda mais a sua aprendizagem, causando no aluno horror à Matemática. Se o aluno possuir alguma dificuldade em apropriar-se de seus conceitos, ao resolver um problema, o mesmo irá preferir a matemática não-formal como estratégia de resolução, utilizando para isto, uma grande quantidade de cálculos.

DAmbrósio (1976,apud Salvam, 2004) diz que:

> A preocupação maior no ensino da Matemática está em levar ao conhecimento do aluno uma série de algoritmos, fórmulas e símbolos, sem que fique explícito para que servem, onde serão usados e como serão usados. Não há, pois, uma preocupação maior de integração dos conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento.(D'AMBRÓSIO ,1976)

Dessa forma, o ensino da Matemática, especialmente o da álgebra, fica caracterizado pela transmissão da informação que treina o aluno a utilizar técnicas e processos exaustivos sem a necessidade de produção de significados que deem sentido a essas técnicas. Infelizmente, não se encoraja o aluno a ser autônomo em seu processo de aquisição de conhecimento.

Segundo Machado (1992,apud Salvan, 2004) vários autores dizem que:

> Os alunos se dispersam quando o ensino da Matemática se faz rotineiro, ocultando consciente e inconscientemente sua verdadeira força e beleza, complicando-a inutilmente com fórmulas que não sabem de onde vem. O ensino tem que alcançar uma investigação em que o aluno tenha a sensação de estar fazendo algo com isso, em que se sinta mais confiante colocando em prática o seu trabalho efetivo e com isso, faça-o perceber o seu próprio rendimento.(MACHADO,1992)

É claro que muitos professores não são culpados do ensino que receberam, mas devem ser responsáveis pelo ensino que estão repassando, e é fundamental que procurem inovar suas práticas pedagógicas cativando o aluno para a aprendizagem, despertando no mesmo a curiosidade e desafiando-os a descobrir o caminho certo a seguir. Claro que pelo que foi relatado na pesquisa, é muito difícil ser professor inovador e criativo se não há tempo suficiente para que pesquise e elabore novos métodos de ensino. São vários os fatores que interferem como excesso de trabalho, baixo salário, ambientes impróprios e alunos desinteressados.

Seria interessante que o sistema educacional como um todo, pudesse considerar o aluno como ser pensante, criativo e capaz de construir o próprio conhecimento. Os educadores, na maioria das vezes, são sufocados pelo próprio sistema, que não os permite retornar ou gastar mais tempo em determinados conteúdos, pois tem-se um programa a cumprir. E, inovar significa gastar tempo e aulas que deveriam ser empregadas em conteúdos novos.

---

[4]D'AMBRÓSIO, Ubiratan. *A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional-INAF - como critério de avaliação da qualidade do ensino de matemática*, 2003, In: Silva *Álgebra e Aritmética no ensino fundamental: um estudo de como ensiná-las de forma integrada e com base em significados*, 2007

5 Algumas sugestões de atividades para sanar estas dificuldades

Desde a formatura na graduação de Matemática, várias pesquisas de atividades diferenciadas para trabalhar em sala de aula foram realizadas, mas nada a respeito de monômios e polinômios. Como é uma matéria extensa e cheia de regras, trabalhou-se como a maioria dos professores: explicam o conteúdo e auxiliam os alunos numa série de exercícios que visam a aplicação do que foi explicado anteriormente, mas no íntimo ficava a sensação de impotência de não saber a utilidade prática - além dos estudos futuros na própria Matemática - de se estudar todas aquelas regras. Daí então surgiu neste TCC a vontade de descobrir e aplicar aos alunos atividades diferenciadas que visem dar significados ao até então mundo de regras das operações de monômios e polinômios.

Segundo Carmem Sessa(2009), a generalização é um caminho possível de introdução à álgebra, pois a mesma serve também para fornecer mecanismos para validação de conjecturas baseado em regras de transformação das expressões numéricas para algébricas. Generalizar é encontrar características que unificam, é reconhecer tipos de objetos e problemas. Quando se discute a matemática envolvida em um problema, estamos descontextualizando e entrando num processo de generalização que permite usar o que se aprendeu em problemas de mesmo tipo.

É importante no ensino fundamental II, já no 7^{o} ano ao iniciar o aluno à álgebra, que o professor faça com que o mesmo se depare com problemas em que a ferramenta equação seja mais eficaz ou mais rápida do que recursos aritméticos de que ele dispõe, para que o mesmo possa dar significado ao estudo da álgebra. Normalmente, neste ano, o aluno aprende que uma equação é uma igualdade numérica verdadeira da qual não se sabe o valor da incógnita, ou seja, que possui um termo desconhecido e se limita a decorar regras por meio das quais é possível "isolar" a letra. Dessa forma, ele não consegue compreender equações lineares de uma variável sem solução(já que a mesma depende do conjunto Universo contido em seu domínio), ou com infinitas soluções e assimila ainda menos equações quadráticas com duas ou mais variáveis.

Conforme as sugestões dadas pelos professores pesquisados, serão aqui colocadas algumas formas de se trabalhar a álgebra, mais especificamente, monômios e polinômios de forma diferenciada do sugerido nos livros didáticos. Vale ressaltar que não se está retirando a importância de praticar os métodos teóricos através de exercícios repetitivos que visem apenas a aplicação dos mesmos; está sim, ressaltando a importância de fazer com que os alunos deem significado ao conteúdo antes de partir para estes tipos de exercícios.

Uma das maneiras que acredita-se ser muito eficiente e que foi sugerida pela maioria dos professores entrevistados, foi introduzir álgebra desde as séries iniciais, através de atividades pedagógicas que deem embasamento ao ensino da álgebra no oitavo ano. Além disso, enfatizar no ensino da aritmética conteúdos e regras que serão de suma importância no estudo da álgebra, como por exemplo, a divisão por zero, a importância da colocação dos parênteses, a aplicação da propriedade distributiva, a fatoração, entre outros.

Confirmando a sugestão acima, na reportagem intitulada "Álgebra desde cedo"; publicada em NOVA ESCOLA - Edição 227, Novembro 2009 cujo Título original é "Reflexões no papel", a pesquisadora argentina Bárbara Brizuela,[5], mostra que tomando como base as investigações feitas por ela com crianças norte-americanas de 7 a 9 anos, é possível ensinar álgebra desde

[5]radicada há 15 anos nos Estados Unidos e docente da Faculdade de Educação da Universidade de Tufts, em Boston

cedo e permitir às crianças pequenas que usem notações (representações por escrito de suas ideias) para ajudar na construção do raciocínio.

Bárbara conclui em sua pesquisa que ao introduzir a álgebra aos alunos nos primeiros anos escolares, os mesmos ao chegarem aos 13 ou 14 anos não estranham que haja incógnitas ou variáveis nos problemas e conseguem resolvê-los com propriedade. E faz um alerta: "A maioria dos alunos tem problemas com Matemática nessa faixa etária. A deficiência não deve ser deles, mas pode ser nossa, que não ensinamos bem".

Nas demais sugestões mencionadas, procurou-se pesquisar jogos, atividades com materiais concretos, aplicação de resolução de problemas e modelagem Matemática.

5.1 Resolução de Problemas como forma de aprendizagem e aplicação de polinômios

Segundo Giovanni e Castrucci, em seu livro "A conquista da Matemática" , edição renovada de 2009, o trabalho com resolução de problemas é de suma importância no processo ensino-aprendizagem, não só em Matemática, mas em todas as áreas do conhecimento, visto que o ser humano em seu dia-a-dia é a todo momento desafiado a resolver problemas; e é por isso, que enxergam nessa prática um instrumento valioso e sugerem que seja dada uma especial atenção a esta metodologia de ensino.

Conforme Allevato e Onuchic (2004) o ensino de matemática através da resolução de problemas, pode ser visto como um meio importante para se fazer matemática, pois consiste em trabalhar com os alunos situações-problema que possam levá-los a raciocinar sobre a necessidade de construção desses conceitos matemáticos.

No entanto, a maioria dos professores não trabalham em suas aulas com essa metodologia, por não ser uma tarefa fácil, pois deixam de ser o transmissor do conhecimento para auxiliar e ser o mediador da construção do mesmo. Devido a isso, diversas vezes o professor é forçado a mudar o direcionamento de sua aula para suprir as dificuldades apontadas pelos alunos exigindo, dessa forma, uma desenvoltura do professor em relação a aspectos básicos para o desenvolvimento da resolução de problemas, o que assusta e causa insegurança nos mesmos.

Para Onuchic (1998) é fundamental que o professor, ao programar essa metodologia, reflita sobre algumas questões, tais como:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de matemática precisam ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para que séries você acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Você, como professor, teria dificuldade em trabalhar este problema?
- Que grau de dificuldade você acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Deve-se mudar e incentivar os educadores matemáticos a utilizarem esta metodologia de ensino em suas aulas, no verdadeiro sentido que a proposta sugere, pois na maioria das vezes, os problemas são utilizados apenas como um exercício que aplica, de forma mecânica, uma fórmula ou processo operatório. Para que essa proposta seja realmente aplicada é necessário que se delimite o conceito de **problema matemático**, visto que o mesmo é o ponto de partida para qualquer trabalho com "resolução de problemas"

De acordo com o CBC de Matemática do estado de Minas Gerais[6](2007, p.16),por situação-problema entendem-se problemas que envolvem o processo de tradução do enunciado, seja contextualizado ou não, em linguagem matemática, e a tomada de decisão sobre quais ferramentas matemáticas serão usadas em sua resolução ("modelagem"). Ainda no mesmo documento, estes problemas são aqueles que levam a uma compreensão do que realmente é Matemática, pois se passam em um ambiente onde coexistem os modos de pensamento formal e intuitivo, bem como as linguagens formal e verbal. Eles estimulam o trabalho em grupo, a crítica dos modelos adotados e o confronto dos resultados obtidos com o enunciado original do problema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto, é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução(BRASIL, 1998, p.41)

Ainda de acordo com o CBC de Matemática(op. Cit., p.14) resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis é de suma importância para a compreensão e atuação consciente na sociedade.

Segundo Dante

> Buscar a solução de um problema que os desafia é mais dinâmica e motivadora do que a que segue o clássico esquema de explicar e repetir. O real prazer de estudar matemática está na satisfação que surge quando o aluno por si só resolve um problema. Quanto mais difícil, maior a satisfação em resolvê-lo. Um bom problema sucinta a curiosidade e desencadeia no aluno um comportamento de pesquisa, diminuindo sua passividade e conformismo.(DANTE, 2000, p.12 e 13)

Com essa prática, o aluno deve ser levado a desenvolver seu raciocínio e criatividade, a estabelecer uma meta a ser alcançada e um plano para que isso ocorra, a enfrentar novas situações, aplicar os conhecimentos Matemáticos em fatos reais e a trocar opiniões com colegas.

5.1.1 Sugestões de Aplicação da Resolução de Problemas ao Ensino de polinômios

Na revista Nova Escola- Edição 224, Agosto 2009, o artigo intitulado "Tirando de Letra" traz uma possibilidade de introdução do aluno ao mundo da álgebra:

[6]Texto extraído do CBC(currículo básico comum) de Matemática elaborado pela secretaria Municipal de Educação de Minas Gerais

"Sabendo que o produto de dois números é 9.876, é possível conhecer o produto do dobro do primeiro pelo triplo do segundo?"

Embasados na aritmética, os alunos, primeiro, irão pensar em alguns números que multiplicados resultem em 9.876.

Os alunos farão diversas tentativas e chegarão a diferentes pares de números como 9.876 e 1 e 4.938 e 2, por exemplo. Com esses dados, conseguem resolver o problema pois, com o primeiro par de números, temos

$$9.876 \times 2 = 19.752$$

e

$$1 \times 3 = 3$$

que multiplicados entre si resultam em 59.256. Com o segundo par de números, efetuando-se as contas, teremos

$$4.938 \times 2 = 9.876$$

e

$$2 \times 3 = 6$$

que multiplicados resultam, de novo, em 59.256.

Após várias tentativas,irão concluir que o resultado procurado ("o produto do dobro do primeiro pelo triplo do segundo") não depende dos fatores usados. Neste momento mostra-se que a Matemática possui uma maneira de escrever esse tipo de raciocínio generalizado, para simplificar o processo. No exemplo acima, tem-se:

$$ab = 9.786$$

e

$$c = 2a \times 3b = 6ab = 6 \times 9.786 = 59.256$$

sendo "c" o produto pedido no problema. Através da notação algébrica final, que será obtida pela aplicação das propriedades comutativa e associativa da multiplicação, estudadas em aritmética; os alunos perceberão que a resposta desejada("c") é seis vezes o resultado inicial, não havendo assim, a necessidade de descobrir "a" e "b".

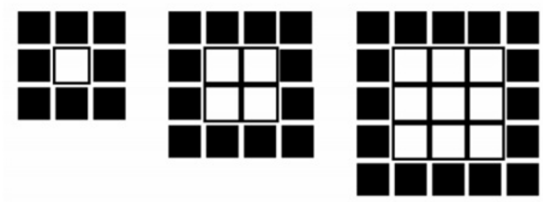
Assim como foi citado anteriormente, parte-se do pressuposto de que "a produção de uma fórmula é o ponto de apoio para abordar questões constitutivas da linguagem algébrica" (SESSA,p.60,2009).

O problema que será comentado a seguir, está embasado nos exemplos dados por Sessa, no livro "Iniciação ao estudo didático da álgebra", os quais são sugeridos como sendo os primeiros contatos dos alunos com a linguagem algébrica.

O problema trata de uma sequência de quadrados quadriculados como os da figura abaixo, onde os quadradinhos pretos cercam os quadradinhos brancos. Os alunos devem contar os quadradinhos que estão em volta dos brancos e encontrar uma fórmula que possibilite essa contagem dependendo apenas da quantidade de quadradinhos que compõe o lado do quadrado.

O trabalho com este problema, em sala de aula, deverá ser dividido em etapas, de forma que o aluno possa construir seu próprio conhecimento. Numa primeira etapa pode-se perguntar ao aluno: quantos quadradinhos pretos há em cada um dos quadrados quadriculados da sequência acima? Esta etapa tem como objetivo esclarecer ao aluno "do que se trata".

Como segunda etapa questiona-se o aluno, quantos quadradinhos pretos haverá em um quadrado com 32 quadradinhos de lado? Esta etapa tem por função colocar o aluno diante



dos limites dos procedimentos por ele utilizado na primeira etapa e incentivá-lo a buscar outra forma mais simples para efetuar esta contagem.

Na terceira etapa sugere-se dividir os alunos em grupo para que possam discutir as soluções encontradas e escolher uma para ser divulgada; explicar por escrito o método utilizado para encontrá-la. Esse método deverá tornar possível efetuar a contagem para outros casos. Nesta etapa os alunos estarão lidando com diferentes perspectivas e estratégias e deverão compará-las para elegerem a mais adequada para ser explicada por escrito aos demais colegas da turma.

Pela experiência de Sessa, as respostas mais frequentes serão:

- Somar 4 vezes o 32 e em seguida retirar um de cada canto(vértice)onde os lados se interligam, ou seja,
$$32 \cdot 4 - 4$$
- Contar dois lados de 32 completos e depois mais dois lados de 30, isto é:
$$32 \cdot 2 + 30 \cdot 2$$
- Contar os quadradinhos em fila, de cima para baixo: 32,30 duas vezes e depois 32 novamente:
$$32 + 30 \cdot 2 + 32$$
- Contar tiras de 31 quadradinhos de cada lado:
$$31 \cdot 4$$
- Contar todos os quadradinhos do quadrado que possui 32 quadradinhos de lado e depois subtrair o total de quadradinhos do quadrado que possui 30 quadradinhos de lado:
$$32^2 - 30^2$$

Após esta etapa deve-se discutir, os métodos de soluções encontrados por cada grupo, para que os outros grupos possam analisar os demais métodos a fim de descartarem os que estiverem errados e agruparem aqueles que considerarem corretos.

Numa quinta etapa cada grupo deverá escrever uma fórmula que traduza o método que julguem ser o mais adequado ao problema. Nesse momento o professor pode intervir discutindo com os alunos sobre seus entendimentos do que é uma fórmula, podendo para isso, recordar exemplos de cálculo de áreas, por exemplo.

Serão obtidas diversas fórmulas corretas e elas, numa sexta etapa, deverão ser discutidas. O professor deverá então aproveitar este momento para explorar a noção de equivalência entre fórmulas; bem como discutir as diferentes maneiras de escrever um produto(por exemplo $2 \times n$, $2 \cdot n$, $2n$), e ficar atento às dúvidas dos alunos que costumam ser num futuro próximo, fontes de grandes confusões.

Após a dedução de cada uma das respostas mais frequentes, os alunos terão as seguintes fórmulas:

$$2 \cdot n + 2(n-2) \tag{1}$$
$$4 \cdot (n-1) \tag{2}$$
$$n^2 - (n-2)^2 \tag{3}$$
$$4n - 4 \tag{4}$$
$$n + (n-2) \cdot 2 + n \tag{5}$$

Neste momento, o professor pode perguntar: Como é possível um único problema possuir tantas fórmulas para sua solução? Com certeza, isso gerará muita discussão. Alguns pensarão que a única resposta correta é a que eles formularam; outros poderão pensar que o problema possui mais de uma solução, sem notarem a relação existente entre as expressões e, finalmente, alguns irão captar a equivalência entre as fórmulas. Vários assuntos didáticos determinam estas colocações:

- problemas que podem ser resolvidos por diversos caminhos devem ser trabalhados anteriormente às etapas deste problema;
- descobrir que um problema possui mais de uma solução pode fazer com que o aluno desista de procurar estabelecer uma relação entre elas;
- produção de fórmulas deve ser desenvolvida através de diversos problemas e atividades;
- obtém-se fórmulas diversas e corretas. Logo, esta noção de equivalência entre expressões algébricas é um conceito que DEVE ser construído.

Pode-se ainda fazer várias perguntas aos alunos com o intuito de mostrar-lhes como uma fórmula é útil para conhecer as características da situação por ela representada. Para a construção do conceito de equivalência, deve-se trabalhar em três níveis:

1. Os alunos deverão testar números particulares para terem a certeza de que os resultados são iguais.
2. Ter certeza da validade das fórmulas, verificando a contagem dos quadradinhos pretos em cada quadrado e concluindo que valem igualmente para cada valor atribuído à letra.
3. A partir de propriedades numéricas e operatórias, afirmar que os cálculos valem para todo valor atribuído à letra(deverá ser feito com intervenção do professor), e é este o ponto inicial do tratamento algébrico das expressões.

Esta forma de construir equivalência resultará, mais tarde, em leis de transformação mais dinâmicas que permitirão transformar uma expressão em outra, conservando-se a denotação da expressão algébrica. Por exemplo:

$$x^2 - 4x - 5 = (x-2)^2 - 9 = (x+1) \cdot (x-5)$$

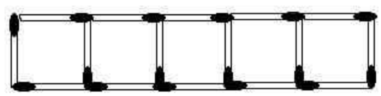
representam a mesma expressão, mas possuem sentidos diferentes: a primeira permite achar as raízes de uma equação quadrática, mas a segunda possibilita encontrar estas raízes com maior facilidade e, a terceira permite desenhar o gráfico de uma parábola e determinar seu vértice.

Aconselha-se ainda, numa sétima etapa, que o professor coloque para o aluno os seguintes questionamentos: Há algum valor de n para o qual a quantidade de quadradinhos pretos seja 587? Um aluno contou os quadradinhos pretos de um quadrado quadriculado e encontrou 6588 quadradinhos, já outro aluno contou 6590. É possível descobrir qual dos dois contou corretamente?

Pode-se ainda, pedir aos alunos para determinar uma expressão que calcule o total de azulejos brancos.

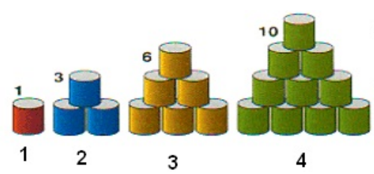
O exemplo acima é apenas uma sugestão e, para que o aluno assimile perfeitamente o processo de produção de fórmulas é necessário que vários outros problemas sejam trabalhados, tais como:

1) Fazendo quadrados com palitos de fósforos como mostra a figura:



a) Quantos palitos são necessários para fazer 25 quadrados?
b) Quantos quadrados se faz com 210 palitos?
c) Ache a fórmula que expresse a quantidade de palitos para n quadrados.

2)Quantas latas aparecerão na sétima posição da figura abaixo? E na quinquagésima? E na enésima posição?



A proposta a seguir foi uma pesquisa realizada pelas professoras Rosilda Santos Morais e Lourdes de la Rosa Onuchi, encontrada no artigo intitulado “A aprendizagem de polinômios através da Resolução de problemas-considerações sobre as operações de Multiplicação e Divisão de Polinômios no Ensino Fundamental II”.

O objetivo da pesquisa foi desenvolver atividades concretas envolvendo caixas de papelão e, a partir dessas construções, levar os alunos a observarem padrões que relacionassem as áreas das bases dessas caixas com suas respectivas alturas, direcionando-os às expressões algébricas, posteriormente chamadas de Polinômios.

Foram oito os Problemas desenvolvidos durante a pesquisa e que acredita-se poderem ser reproduzidos nas salas de aulas, com o intuito de trabalhar Polinômios com significado.

Problema 1: Entrega-se uma folha de papel A_4 e solicit-se aos alunos que desenhem uma caixa e que, depois de desenhada essa caixa, deverão reproduzí-la em um papelão para sua montagem.Nesse problema, não é necessária uma determinação das dimensões da caixa.A mesma será chamada de “caixa piloto”.

Problema 2: Os alunos terão que desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: comprimento: 1,6dm e largura: 1,0dm e, a partir desse retângulo, construir uma caixa sem tampa, com altura 0,1dm, chamada “caixa teste”.

Problema 3: Os alunos deverão calcular a área do papelão gasto na construção da “caixa teste” após sua montagem.

Problema 4: Utilizando o retângulo desenhado no problema 2, os alunos deverão efetuar o cálculo das áreas das bases de caixas, caso fossem construídas, com as alturas, fornecidas em um quadro, variando de 0cm a 5cm (sendo estas, números naturais). As medidas encontradas para as áreas das bases deverão ser registradas no referido quadro e, após esta etapa, os alunos poderão construir o esboço de um gráfico de pontos, representando essas áreas, relacionando-as com suas respectivas alturas. Após a construção do esboço do gráfico, os alunos deverão fazer uma análise das áreas das bases dessas caixas para os possíveis valores das alturas. Este problema extrapola o uso do material concreto (manipulação da caixa) para o abstrato pois, os alunos não terão construído todas as caixas cujas alturas estavam relacionadas no quadro, mas sim, deverão imaginar essas caixas e calcular as áreas de suas bases para cada uma das alturas dadas. Nesta atividade os alunos deverão ainda, perceber os limites para as possíveis alturas dessas caixas.

Problema 5: Os alunos deverão desenhar um retângulo com as seguintes dimensões: comprimento: 1,6dm e largura: 1,0dm. Após o desenho, fazer uma análise do que ocorreria se cortássemos quadrados nos cantos desse retângulo, dentro dos limites possíveis para a altura dessa caixa, onde a medida do lado do quadrado cortado representa a altura da caixa, e essa altura seria medida por um número racional qualquer. Essa caixa será chamada de “caixa 1”. Os objetivos dessa atividade são: falar de diferentes conjuntos numéricos; levar os alunos a se depararem com o importante conceito de variável na álgebra; identificar o que é variável na Álgebra e identificar uma fórmula matemática para a área da base de uma caixa de altura x.

Após os alunos perceberem que a altura da caixa poderia variar no intervalo $x > 0cm$ e $x < 5cm$, deverá ser escrita uma fórmula matemática que represente a área das bases dessas caixas. Então, será introduzido o conceito de Polinômio.

Problemas 6: Os alunos deverão desenhar uma caixa planificada chamada “caixa 2” com retângulos de dimensões 10cm por 6cm.

Problema 7: Os alunos deverão desenhar uma caixa planificada chamada agora de "caixa 3" com retângulos de dimensões 6cm por 4cm.

Nos dois problemas acima a discussão em torno da altura deverá ocorrer da mesma forma que no Problema 5, onde os alunos atribuíram um valor aleatório para a mesma. Estes problemas estendem as ideias trabalhadas no Problema 5 e busca fortalecer a passagem da aritmética para a álgebra.

Os Polinômios representantes das áreas das bases das caixas dos Problemas 5, 6 e 7 são, respectivamente,

$$\begin{aligned} A_1 &= 4x^2 - 52x + 160 \\ A_2 &= 4x^2 - 28x + 40 \\ A_3 &= 4x^2 - 20x + 24 \end{aligned}$$

Problema 8: chamado "Fixação dos conhecimentos novos construídos", são constituídos de 4 Tarefas (T_1, T_2, T_3 e T_4) sendo:

T_1**:** Fazendo aplicações dos Problemas 5, 6 e 7.

T_2**:** Conceitualização.

T_3**:** Operações com Polinômios.

T_4**:** Listas de Atividades de Fixação.

T_1: Os alunos deverão desenhar a planificação das caixas dos Problemas 6 e 7 e escrever a fórmula representante das áreas das bases dessas caixas para suas respectivas alturas (dessa vez já representada pela variável x) sem, necessariamente, haver a manipulação do material concreto, visto que essas caixas não foram construídas e também esboçar o gráfico de pontos para cada uma das caixas como o que foi feito no problema 5.Vale ressaltar que a partir do Problema 5, as ações dos alunos pediam generalização de ideias e fórmulas, desligadas da situação concreta.

T_2: Com as áreas das bases das caixas 1, 2 e 3 feitas na T_1 e que estarão apresentadas como produtos de duas expressões algébricas, os alunos deverão chegar, usando a propriedade distributiva da multiplicação sobre a Adição, a uma soma algébrica que descreva essas áreas através de um novo objeto matemático: o Polinômio. Reunindo termos semelhantes, ordenando segundo potências crescentes ou decrescentes da variável, chegarão à forma simplificada de um Polinômio. Nesta tarefa explora-se, também, o estudo das expressões numéricas e expressões algébricas. O objetivo desta tarefa é levar os alunos a perceberem que, a partir de um produto de fatores, chega-se a uma soma algébrica usando a distributividade e que, inversamente, partindo-se de uma soma algébrica, pode-se chegar a um produto de fatores. Este processo é chamado "fatoração".

T_3:Consiste no objetivo maior deste trabalho pois, enfoca as Operações com Polinômios, dentre elas: Adição Algébrica de Polinômios, Multiplicação e Divisão. Em relação à Adição, deverão ser realizadas as seguintes ações:

Dados:

$$\begin{aligned} A_1 &= 4x^2 - 52x + 160 \\ A_2 &= 4x^2 - 28x + 40 \\ A_3 &= 4x^2 - 20x + 24 \end{aligned}$$

Efetuar as seguintes operações

$$A_1 + A_2$$
$$A_1 + A_2 + A_3$$
$$A_1 + A_3$$

O objetivo desta tarefa é verificar se os alunos sabem operar com somas algébricas (adição e subtração).

T_4:Para rever a Multiplicação, deve-se partir de ações já feitas pelos alunos. Eles conhecem as áreas das bases das caixas, dadas pelos produtos de suas duas dimensões:

$$\begin{aligned} A_1(x) &= (16-2x)(10-2x) \\ A_2(x) &= (10-2x)(4-2x) \\ A_3(x) &= (6-2x)(4-2x) \end{aligned}$$

Ao aplicarem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em cada caso, obterão os Polinômios, na variável x,

$$\begin{aligned} A_1(x) &= 4x^2 - 52x + 160 \\ A_2(x) &= x^2 - 28x + 40 \\ A_3(x) &= 4x^2 - 20x + 24 \end{aligned}$$

Assim, pede-se que calculem:

a) $A_1 \times A_2$

b) $A_2 \times A_3$

c) $A_1 \times A_3$

d) $\frac{A_1}{A_2}$

e) $\frac{A_1}{A_3}$

f) $\frac{A_2}{A_3}$

Para os exercícios acima propostos, não deverá ser dada importância ao algoritmo da Divisão de Polinômios pois, o objetivo será o de comparar os valores numéricos dos Polinômios que expressam as áreas das bases das caixas como uma **Razão**.

Dessa forma,os alunos deverão fazer as atividades abaixo:

a) Comparar as áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, para uma mesma altura,como uma Razão (comparação multiplicativa entre duas grandezas).

b) Atribuir um valor numérico para a variável x nas expressões dos Polinômios $A_1(x)$ e $A_2(x)$ e encontrar a Razão entre os valores numéricos desses dois Polinômios, que são os valores numéricos das áreas das bases das caixas 1 e 2. Analogamente, repetir o processo para os Polinômios $A_1(x)$, $A_3(x)$ e $A_2(x)$, $A_3(x)$.

Os Polinômios $A_1(x)$, $A_2(x)$ e $A_3(x)$, dados como áreas das bases das caixas 1, 2 e 3, foram obtidos usando-se a propriedade distributiva, como uma multiplicação horizontal. Mas, é comum ser trabalhado na forma vertical, quando dado na forma fatorada $(16-2x)(10-2x)$,o professor deverá fazer este exemplo, por esse processo, e deixar que os alunos repitam o processo para os Polinômios $A_1(x)$, $A_3(x)$ e $A_2(x)$, $A_3(x)$.

Ao efetuar o cálculo de razões poderá surgir confusão com a divisão de polinômios se enxergassem o resultado da comparação como fração e não razão. Uma maneira de contornar essa confusão seria pedir aos alunos que desenhem as caixas 1,2 e 3 planificadas com altura 1cm e, para facilitar as atividades, o professor deverá levar as três caixas já montadas em papelão e cubinhos de $1cm^3$ também de papelão para que os alunos possam formar os volumes das caixas e assim compará-los.

Na comparação das áreas das bases, os alunos deverão desenhar apenas as bases das caixas e dividí-las em quadradinhos de $1cm^2$, já que, com o material concreto, eles não conseguirão um encaixe perfeito, devido a espessura do papelão.

A seguir sugere-se problemas que acredita-se serem uma boa aplicação de polinômios. Os dois primeiros problemas se encontram no artigo "Uso de polinômios para surpreender" da revista Professor de Matemática(nº 31, 1996) de autoria de Catherine H. Mulliga.

1) *Se dois números de dois algarismos têm iguais os algarismos das dezenas, e se os algarismos das unidades somam 10, pode-se calcular seu produto instantaneamente.*

Se os alunos,a fim de testarem o enunciado, perguntarem algo como 67×63 por exemplo, o professor deverá responder instantaneamente 4221. Após mais um ou dois exemplos, revela-se o "truque": multiplica-se o algarismo das dezenas, 6, pelo seu sucessor, 7, achando 42, cujos algarismos serão, nessa ordem, os algarismos dos milhares e das centenas da resposta. Acrescenta-se à direita de 42 o produto dos algarismos das unidades,no caso 7×3 ou seja 21, obtendo-se 4221. Pode-se ainda aumentar a confiança no "truque", aplicando-o a vários outros exemplos, porém exemplos não constituem uma demonstração. Mas, se usarmos polinômios,mais especificamente neste caso, binômios para representar os números a serem multiplicados, pode-se dar uma demonstração que não depende dos exemplos dados. Represente por x o algarismo das dezenas dos dois números considerados e por y o algarismo das unidades do primeiro número. Então, o algarismo das unidades do segundo número será $10-y$ Logo, $10x+y$ é o primeiro número e $10x+(10-y)$ o segundo número. Seu produto é:

$$(10x+y)\times(10x+10-y) = ... = 100x(x+1)+y(10-y)$$

2)*Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos, o resultado será sempre um quadrado perfeito.*

Alguns exemplos como os citados abaixo, levarão os alunos a pensarem que essa afirmação é sempre verdadeira:

$$\begin{aligned}
&1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2\\
&5 \times 6 \times 7 \times 8 + 1 = 1680 = 41^2\\
&64 \times 65 \times 66 \times 67 + 1 = 18395521 = 4289^2
\end{aligned}$$

Para obter uma prova desse fato, representa-se os inteiros consecutivos por: n, $n+1$,$n+2$ e $n+3$. Então

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 \quad = \quad n^4+6n^3+11n^2+6n+1 \qquad (6)$$

Tem-se, agora, dois procedimentos possíveis. Alguns alunos notarão que o quadrado perfeito, nos exemplos numéricos, é o quadrado de 1 mais o produto do primeiro pelo último termo da sequência (é também o quadrado de 1 menos o produto do segundo pelo terceiro termo da sequência). Pode-se observar, por exemplo, que

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2 = (1 + 4 \times 7)^2$$

Expressando em polinômios, escreve-se

$$[1 + n(n+3)]^2 \quad = \quad n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \tag{7}$$

Isso, além de confirmar que (6) é um quadrado perfeito, também diz qual é o número que é um quadrado perfeito.

Outra maneira de proceder é trabalhar diretamente a partir de (6) e conjecturar que seria bom fatorar o segundo membro e ver que ele é um quadrado perfeito. Esse quadrado teria, para um a conveniente, a forma:

$$4(n^2 + an + 1)^2 \quad = \quad n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)n^2 + 2an + 1 \tag{8}$$

Igualando os coeficientes em (6) e (8), tem-se:

$$2a = 6$$

e

$$2 + a^2 = 11$$

ou seja,

$$a = 3$$

Então,

$$n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$$

O terceiro problema é proveniente da lista 3 do Nível 2 do Banco de questões da 3ª Olimpíada Brasileira de Matemática(OBMEP 2007)

Reverso de um número -*O reverso de um número inteiro de dois algarismos é o número que se obtém invertendo a ordem de seus algarismos. Por exemplo, 34 é o reverso de 43. Quantos números existem que somados ao seu reverso resultam em um quadrado perfeito?*

É importante lembrar com os alunos que números de dois algarismos onde a é o algarismo das dezenas e b o algarismo das unidades são da forma: $10 \cdot a + b$, por exemplo, $34 = 3 \cdot 10 + 4$

Denote por ab e ba o número e seu reverso. Tem-se que

$$ab + ba = 10a + b + 10b + a = 11(a + b)$$

Por outro lado, $a = 9$ e $b = 9$, logo,

$$a + b = 18$$

Como 11 é um número primo e $a + b = 18$, para que $11(a + b)$ seja um quadrado perfeito, só poderá ter

$$a + b = 11$$

Assim, tem-se 8 números satisfazendo o problema: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 e 92.

O quarto problema é proveniente da lista 8, do Nível 2, do Banco de questões da 5ª Olimpíada Brasileira de Matemátiva(OBMEP 2009)

Número curioso *O número 81 tem a propriedade de ser divisível pela soma de seus algarismos* $8+1=9$. *Quantos números de dois algarismos cumprem esta propriedade?*

Seja ab um tal número. Por hipótese $ab = 10a + b$ é divisível por $a + b$. Logo, a diferença $(10a + b) - (a + b) = 9a$, também é divisível por $a + b$. Além disso, sabemos que $10a + b$ é divisível por $a + b$ se, e somente se, $(10a + b) - (a + b) = 9a$ é divisível por $a + b$ (prove isso). Antes de prosseguir, é importante observar que como ab é um número de dois algarismos tem-se que $a \neq 0$. Agora, basta atribuir valores para a e calcular os valores de b para os quais $a + b$ divide $9a$.

Logo os números que satisfazem a propriedade são: 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90 ou seja, existem 23 números que atendem ao problema.

5.2 Modelagem Matemática para o ensino de polinômios

Segundo Bassanezi,

> "Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". (BASSANEZI, 2004, p.24)

Os motivos que destacam a relevância do uso da Modelagem Matemática são muitos, e segundo Bassanezi(2004) alguns destes são de natureza:

- Formativa: desenvolve no aluno capacidades e atitudes que os tornam críticos, criativos e explorativos;
- De competência crítica: Prepara os estudantes para a vida real tornando-os cidadãos atuantes na sociedade com opiniões próprias;
- Utilidade: prepara o aluno para utilizar a matemática como instrumento para a resolução de seus problemas em diversas áreas e situações;
- Intrínseca: fornece ao estudante uma forma mais eficiente de entender e interpretar a própria matemática com todas suas artimanhas;
- Aprendizagem: garante que os processos aplicativos facilitam o entendimento dos argumentos matemáticos, bem como a assimilação de conceitos e resultados e valoriza a própria matemática.

A Modelagem Matemática no ensino tem como principal objetivo seguir etapas onde o conteúdo matemático vai sendo, no decorrer do processo, sistematizado e aplicado, isto é, tomando-se um tema desenvolve-se questões referentes ao mesmo, dando aos conceitos matemáticos e ao tema em estudo significados. Essa metodologia faz com que a matemática deixe de ser algo desvinculado do contexto sócio-cultural-político e sem preocupação de tornar-se utilitária, aproximando-a do mundo real.

5.2.1 Sugestão de Aplicação da Modelagem Matemática ao Ensino: Construção de uma Casa

Esta sugestão foi retirada e adaptada do artigo de Cícero Santos e Diógenes Maclyne intitulado “A modelagem matemática como estratégia no ensino-aprendizagem”.

Nesse exemplo, tem-se a pretensão de mostrar algumas questões relacionadas à construção de uma casa através da elaboração de uma planta e uma maquete. Tem-se a possibilidade de levantar questões que envolvem geometria plana e espacial, sistemas de medidas, polinômios, produto notável, porcentagem, relações métricas do triângulo retângulo, dentre outras.

Pode-se começar o trabalho com uma discussão informal sobre o tema abordando questões do tipo: O que é necessário na construção de uma casa? Como o pedreiro sabe a medida e o modelo de uma casa? Como e onde construir? Após essas perguntas, deve-se pedir aos alunos que façam um esboço da planta baixa de uma casa de forma livre e espontânea, sem nenhuma orientação,objetivando avaliar o conhecimento dos alunos sobre os conceitos de medida e geométricos.

Em seguida, o professor deve instigar os alunos a responder as questões abaixo, levando para isso um modelo pronto.

Como fazer uma planta baixa de uma casa?

É primordial garantir que os segmentos que representam as paredes, estejam paralelos e/ou perpendiculares, caso a forma dos interiores seja quadrilátera. As aberturas (portas e janelas) também devem estar indicadas.

Como o construtor determina o tamanho da casa que se deseja construir?

A palavra “tamanho” nesse contexto são as medidas padronizadas que relacionam cada objeto de “estrutura” semelhantes. O construtor realiza uma obra através de uma planta que é um desenho reduzido semelhante à casa que vai construir. O método utilizado para reduzir ou ampliar um desenho, sem que sua forma seja alterada, é chamado de escala. Nesse momento, o professor pode aproveitar para revisar e/ou verificar os conhecimentos de **escala** dos alunos.

Numa planta, sugere-se as seguintes medidas:

1 cm da planta equivale a 1m(100 cm) da casa ou 1 : 100 (escala de 1 por 100)

ou então,

2 cm da planta equivale 1 m(100 cm) da casa ou 2 : 100 (escala de 2 por 100).

Qual deve ser a medida e o local apropriado do terreno para construir a casa?

Na planta deve constar: o espaço que será ocupado pelas paredes, as medidas relativas ao terreno e a região deste que será ocupada pela casa, ou seja, a área do terreno, da casa e dos cômodos.

“A área de uma figura geométrica plana é o número que expressa a “medida” da superfície dessa figura numa certa unidade.”

Suponha que o terreno e a planta da casa sejam retangulares e que as medidas dos mesmos sejam, respectivamente, 10m por 30m e 9m por 12 m. Então,

a área do terreno será

$$10m \times 30m = 300m^2$$

e da planta baixa da casa será

$$9m \times 12m = 108m^2$$

Quando o espaço físico for pequeno, para se obter um melhor aproveitamento, deve-se medir os objetos e planejar sua distribuição no espaço para somente então, determinar as medidas dos cômodos. Outra forma de aproveitar o espaço é colocar a porta no"canto", de forma que, abrindo-a totalmente, forme um ângulo de 90º.

Como relacionar a área útil com a área construída?

Neste momento pode-se pedir aos alunos que façam um esboço de uma planta baixa de forma retangular, com medidas internas 6m e 7m, respectivamente, e a espessura da parede seja 0,20m.

Será dada aos alunos a seguinte informação:

Área total = área útil (interna) + área ocupada pelas paredes + área ocupada pelas colunas.

Neste exemplo, numericamente tem-se:

$$\begin{aligned} & (6 \times 7) + 2[6 \times (0,20) + 7 \times (0,20)] + 4(0,20^2) \\ = \; & [7 + 2(0,20)] \times [6 + 2(0,20)] \end{aligned} \tag{9}$$

Como o esboço pode ter a forma de outra construção, modificando-se apenas as medidas, pode-se representar a informação dada algebricamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} 7m &= a \\ 6m &= b \\ 0,20m &= c \end{aligned}$$

Substituindo na expressão numérica (9) , obtém-se uma expressão algébrica que representa um **produto entre polinômios**. Deve-se, nesse momento, explorar a parte da **distributividade da multiplicação em relação a adição, bem como a fatoração de polinômios**

$$\begin{aligned} & (ab) + 2(bc + ac) + 4(c^2) \\ = \; & ab + 2bc + 2ac + 4c^2 \\ = \; & b(a + 2c) + 2c(a + 2c) \\ = \; & (a + 2c) \times (b + 2c) \end{aligned}$$

Sugira aos alunos que imaginem que a forma do ambiente seja quadrada, isto é, $a = b$ substituindo na (9) a expressão algébrica será:

$$\begin{aligned} & (a^2) + 2(ac + ac) + 4(c^2) \\ = \; & a^2 + 2ac + 2ac + 4c^2 \\ = \; & a(a + 2c) + 2c(a + 2c) \\ = \; & (a + 2c) \times (a + 2c) \end{aligned}$$

Daí obtém-se um trinômio quadrado perfeito, o qual permite ainda explorar a fatoração do mesmo e evidenciar o **quadrado da soma de dois termos**

$$(a + 2c)^2 = a^2 + 4ac + 4c^2$$

Terminada a construção da planta baixa pode-se passar à construção de uma maquete.

Como o processo de construção de uma casa envolve uma série de etapas, como a construção de alicerce, paredes, laje, telhado, acabamento etc, faz-se então, uso de modelos como a maquete que permite ter a noção de como será a casa, como também a quantidade de material necessário para a construção.

Qual é a escala mais apropriada?

A escala depende do material que será usado na construção da maquete, principalmente no que diz respeito à espessura das paredes. Por exemplo, se o material for placas de isopor de 7mm de espessura e sabendo-se que a espessura da parede de uma casa seja 15 cm e que 1 metro é igual a 100 cm, pode-se utilizar(e explorar) uma **Regra de três Simples** para encontrar a escala apropriada.

Tamanho real	cartolina
100cm	x
15cm(parede)	0,7cm

Logo a escala para a maquete será:

$$X = \frac{100 \times 0,7}{15} = 4,66... \quad \text{(escala)}$$

ou seja,

$$4,66 : 100$$

Este número fará com que a maquete fique muito grande. Por exemplo, para uma casa de 8m por 12m tem-se:

a largura do papel dada por:

$$4,66 \times 8 = 37,28cm$$

e o comprimento dado por:

$$4.66 \times 12 = 55.92cm$$

Logo, uma alternativa é usar uma escala menor, mas para isso, a espessura da parede ficaria fora dos padrões normais, por exemplo: Considerando-se uma escala de $\frac{3,5}{100}$; a parede real teria uma espessura de 20 cm, mas a maquete teria:

$$3,5 \times 8 = 28cm$$

e o comprimento seria dado por:

$$3,5 \times 12 = 42cm$$

menor e mais prática de ser construída.

Como construir e montar as paredes da maquete?

Através das medidas reais da casa,tais como altura das paredes, tamanho de cada cômodo, entre outros, calculam-se as medidas referentes a cada item utilizando-se a escala para a maquete e marcam-se as partes correspondentes da casa sobre o material para, então, efetuar o corte. Após o corte das paredes, é só montar. Para facilitar a montagem da maquete, o ideal é fazer um levantamento da quantidade de paredes bem como suas respectivas medidas e, em seguida, cortar todas de uma vez. É preciso também analisar a forma ideal para cortar a folha de isopor ou papelão, riscar primeiro e cortar logo em seguida.

Nesta etapa o professor pode aproveitar para citar sólidos geométricos pois, as paredes da maquete da casa, uma vez cortadas e montadas, sugerem a forma de um prisma. Prisma, pirâmide, esfera, cilindro e cone são denominados sólidos geométricos.

Pode-se também exercitar e revisar as operações com números decimais pois, os alunos terão que transformar cada medida real (janela, porta, paredes etc,) em medida apropriada para a maquete e calcular a quantidade de revestimentos, tijolos etc.

Calculando a quantidade de tinta,tijolos, azulejos e pisos para uma casa

Considere uma parede de comprimento 5m e largura 3m onde existam duas janelas de 1m por 1,5m. Então,
área da parede(A) = área total - área das janelas

$$A = (5m) \times (3m) - 2 \times (1m \times 1,5m) = 15m^2 - 3m^2 = 12m^2$$

Como cada tijolo tem sua face retangular maior medindo 5 cm por 20 cm, temos que a área da face do tijolo será

$$5cm \times 20cm = 100cm^2$$

ou

$$0,05m \times 0,20m = 0,0100m^2$$

fazendo, área da parede dividida pela área do tijolo, obteremos o total de tijolos

$$15m^2 \div 0,0100m^2 = 1500tijolos$$

Portanto, para uma parede são necessários 1500 tijolos e repetindo esse procedimento para as outras paredes, tem-se o total de tijolos necessários para se construir uma casa. Vale ressaltar que nesta etapa o professor pode lembrar o cálculo de áreas de retângulos.

Procedendo da mesma maneira, pode-se encontrar o número de pisos, telhas, azulejos. Deve-se lembrar aos alunos que os revestimentos como piso e azulejo são vendidos em m^2 e em caixas. Algumas caixas têm $1m^2$; outras, pouco mais, dependendo do tamanho do revestimento.

Para calcular a quantidade de tinta necessária, tem-se que calcular quantos m^2 (de parede, piso, portas...) serão pintados com cada cor. Depois, é necessário verificar as indicações nas latas de tinta para saber quantos metros uma lata cobre de parede, assim chega-se a quantas latas serão necessárias, bastando dividir a área total a ser pintada pela área que uma lata de tinta cobre. Se o proprietário pretender dar duas camadas deve-se então, multiplicar tudo por dois.

Todo o projeto de construção da casa estudado até agora, incluindo a maquete, pode ser considerado um Modelo Matemático. E através desse, pode-se ainda fazer um orçamento, uma estimativa de custo para construir a casa (materiais, mão-de-obra, impostos etc.), assim como estimar o tempo de construção da mesma.

Para isso, o professor pode explorar as unidades de medidas, já que cada material de construção para ser adquirido, deve estar de acordo com uma determinada unidade de medida como, por exemplo:

- fios, canos e madeiras são vendidos por metro
- pisos e revestimentos são vendidos por metro quadrado (área)
- tinta é vendida por litro)
- areia e terra são vendidos por metro cúbico
- prego é vendido por quilograma

Nesta etapa deve-se pedir aos alunos que façam um levantamento de preços de materiais de construção e dos materiais utilizados na maquete afim de montarem duas tabelas. Eles podem utilizar panfletos e/ou visitarem uma loja de material de construção.

- uma constando o orçamento real dos materiais de construção que seriam gastos numa casa nos padrões projetados

- outra constando o orçamento dos materiais utilizados na construção da maquete, como isopor, cola, alfinete, cartolina etc.

Os trabalhadores (pedreiro, carpinteiro, pintor, dentre outros) normalmente, cobram por metro quadrado construído ou tempo necessário para fazer o serviço, ou ainda por semana. Dessa forma, é possível obter um orçamento que dê a previsão de custo e de tempo para a construção. Esta tabela poderá ser facilmente modificada caso haja alguma mudança nas quantidades ou preços dos produtos/serviços.

Ao fazer esses orçamentos, o aluno estará utilizando de todas as unidades de medidas propostas no decorrer do trabalho além, de efetuar inúmeros cálculos envolvendo as quatro operações com números inteiros positivos e racionais na forma decimal e fracionária. Sendo então, este momento apropriado para avaliar o trabalho.

Note ainda que os dois orçamentos podem ser considerados modelos matemáticos pois, retratam a quantidade necessária de material para a construção de uma casa ou de uma maquete. São várias as aplicações, mas o mais importante é adaptá-las de forma conveniente, objetivando motivar e aprender matemática.

5.3 Jogos no ensino de polinômios e frações algébricas

Antes de sugerir alguns jogos para o ensino-aprendizagem de polinômios é importante perceber a importância que os mesmos têm em relação ao ensino-aprendizagem da disciplina Matemática. Sobre isso, o PCN destaca que:

> Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas pois, permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, durante ação, sem deixar marcas negativas.(PCN,1998, p.46)

Quando o aluno analisa o erro e constrói novas estratégias para ganhar o jogo fornece subsídios ao professor para a sistematização dos conceitos trabalhados durante a situação do jogo em sala de aula

Segundo Borin,

> “Outro motivo para a introdução de jogos nas aulas de matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem a Matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam Matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem”.(BORIN, 1996, p.9)

Os jogos provocam no aluno um desafio que gera interesse e prazer. Por isso, é importante fazer com que os mesmos tornem-se presentes na cultura escolar. É responsabilidade do professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes tipos de jogos e o conteúdo que deseja desenvolver.

A fim de que os jogos realmente sejam um material produtivo em sala de aula, ao escolhê-los, deve-se levar em consideração alguns cuidados como:

- O jogo não pode se tornar algo obrigatório;
- Os jogos devem ser escolhidos de forma que vença aquele que descobrir as melhores estratégias e não aqueles em que o fator sorte interfira nas jogadas;
- Os jogos devem envolver dois ou mais alunos, para que haja interação social;
- Estabelecer regras;
- Saber jogá-lo antes de aplicar.

O professor que souber utilizar o recurso de jogos, na Matemática, perceberá os benefícios de se trabalhar com esta metodologia pois, o auxiliará a detectar as dificuldades dos alunos e eles aprenderão sem perceber, e consequentemente, o interesse na disciplina aumentará. Porém, como em todo recurso utilizado, podem ocorrer alguns entraves e o professor deve estar preparado, como por exemplo, no uso de jogos em sala de aula o barulho é inevitável pois, somente através de discussões torna-se possível que os alunos cheguem a resultados convincentes. É necessário enxergar esse barulho de forma construtiva, já que sem ele, dificilmente haverá clima ou motivação para o jogo. É importante habituar os alunos ao trabalho em grupo, uma vez que o barulho diminui se os alunos estiverem acostumados a se organizar em equipes.

5.3.1 Sugestões de jogos para o ensino de polinômios

a) **Algeplan**

O objetivo principal de usar o “Algeplan”, é relacionar figuras geométricas planas (quadrados e retângulos) com expressões algébricas do primeiro e segundo graus, monômios e polinômios, resolução de equações do primeiro grau e fatoração de trinômios do segundo grau. O material pode ser construído em EVA, bem como ser adquirido em lojas especializadas (em madeira) e deve ser utilizado após uma introdução da teoria (ou revisão), que deverá ser retomada após o jogo de modo a conduzir o aluno a trabalhar algebricamente com situações mais gerais, já que o material é limitado.

Descrição

O "jogo" algeplan é formado por 40 peças/figuras geométricas dos seguintes tipos:

Quadrados: Quatro quadrados grandes cujos lados medem x, $x > 0$ (onde é fixado um valor para x, para cortar os quadrados), cuja área será dada por x^2, e cada um deles representa o elemento/expressão do tipo x^2), quatro quadrados médios cujos lados medem y (com $y < x$),onde cada um deles representa o elemento/expressão do tipo y^2, e doze quadrados pequenos de lados medindo 1, representando o elemento/expressão do tipo $1 = 1^2$). Totalizando 20 quadrados

Retângulos: Quatro retângulos com lados medindo x e y , que representam cada um o elemento/expressão do tipo xy, oito retângulos com lados medindo x e 1 que representam cada um o elemento/expressão do tipo $x = x.1$ e oito retângulos com lados medindo y e 1 representando cada um o elemento $y = y.1$. Totalizando 20 retângulos.

As peças são utilizadas conforme suas áreas. Deve-se utilizar uma cor para cada tipo de peça ou tomar todas da mesma cor. Se o material for comprado(em madeira), são usadas as cores vermelha, azul e amarela para os quadrados pequenos, médios e grandes, respectivamente. Nos retângulos as cores utilizadas são lilás, verde e laranja mas, nada impede de se usarem outras cores.

Neste exemplo sugere-se que os alunos façam as peças, em EVA, com medidas $x = 4cm$, $y = 3cm$ e a unidade como $1,5cm$.

Para indicar os "simétricos/opostos" devem-se usar os versos das peças, que no caso do algeplan de madeira, têm todos a mesma cor. Quando confeccionado em EVA, deve-se marcar uma letra ou o sinal " - " no verso de cada peça, ou escolher uma outra cor, diferente das já usadas, por exemplo, preta ou cinza, e construir para cada peça "positiva" uma peça (correspondente) nessa nova cor para indicar a peça oposta (negativa).

O algeplan pode também ser construído usando o Cabri Géomètre II, de modo a obter um "jogo virtual", com peças soltas. Para isso, é necessário copiar cada peça após a sua construção e, em seguida colar (apagando a peça inicial). Pode-se escolher as cores para os quadrados(azul,amarelo e vermelho e outras para os retângulos(branco, roxo e laranja). Sugerimos as medidas $x = 4cm$, $y = 2,5cm$ e a unidade com $0,5cm$ e os elementos simétricos serão obtidos contruindo-se, para cada peça, outra do mesmo tipo, porém, com uma nova cor escolhida.(Por exemplo:cinza)

Regra:"Elementos positivos e negativos do mesmo tipo se anulam/cancelam". Lembrando que no caso do algeplan de madeira ou EVA, usa-se a frente de cada peça para representar um elemento "positivo", e o verso um elemento "negativo/oposto".

No oitavo ano, trabalha-se mais a representação/modelagem das expressões, adição e subtração de monômios e polinômios. E a primeira atividade a ser desenvolvida deve ser a modelagem de expressões algébricas.

Atividade 1. (Modelagem de expressões algébricas)- Modelar, utilizando as diferentes peças do algeplan, a expressão algébrica

$$2x^2 + y^2 + 2xy + x + 3$$

A solução está essencialmente em identificar, para cada termo, quais e quantas "peças" do algeplan estão envolvidas e agrupá-las.

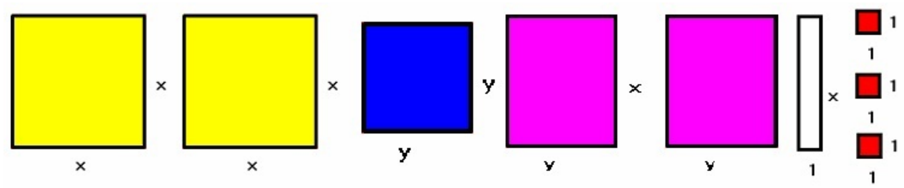


Figura 1: representação da expressão $2x^2 + y^2 - x - 3$

Atividade 2. (Simplificação, Adição e Subtração)- Determine, utilizando o Algeplan

$$(x^2 + 2x - 4) + (-3x + 2)$$

Para isso, primeiro modela-se, com as diferentes peças, as expressões $x^2 + 2x - 4$ e $-3x + 2$. Em seguida, efetua-se os cancelamentos/simplificações (de acordo com a regra estabelecida) obtendo-se o resultado desejado:

$$x^2 - x - 2$$

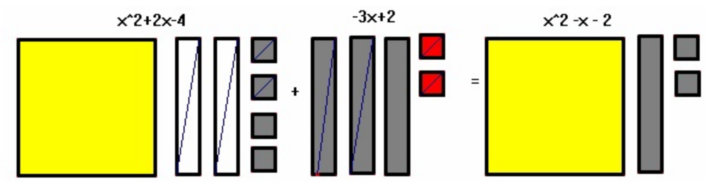


Figura 2: Cálculo de $(x^2 + 2x - 4) + (-3x + 2)$

Note que a subtração recai no caso da adição envolvendo os simétricos de cada elemento. Por exemplo,

$$(x^2 + 2x - 4) - (-3x + 2) = (x^2 + 2x - 4) + (3x - 2)$$

Para a próxima atividade (multiplicação), é importante trabalhar anteriormente a modelagem de representações para os produtos (mais simples) respeitando as regras de sinais. Por exemplo, $1.1 = 1$,$1.(-1) = -1$,$(-1).(-1) = 1$,$-1(x) = -x$ etc... Para uma melhor compreensão foram representados, na figura 3, os fatores e o resultado.

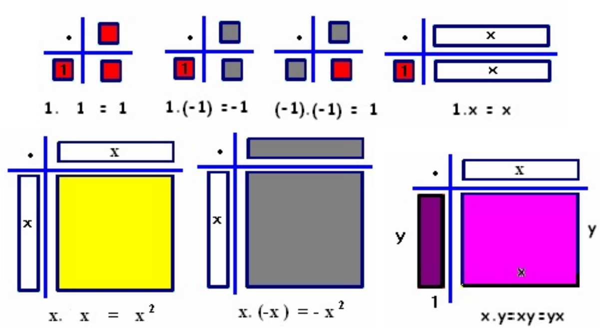


Figura 3: Exemplos de representações para produtos

Atividade 3. (Multiplicação) Utilize o algeplan para representar

$$2y.(2x+3)$$

e

$$(x-1).(x+1)$$

A solução é dada na Figura 4 abaixo.

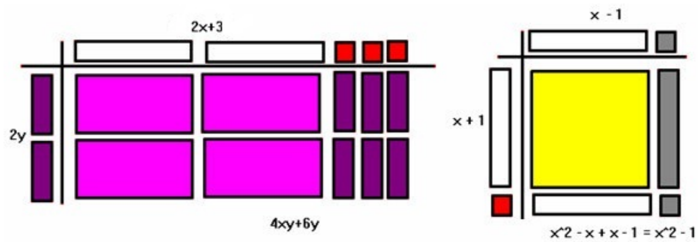


Figura 4: Cálculo de $2y.(2x+3)e(x-1).(x+1)$

As atividades referentes à fatoração têm por objetivo levar o aluno à percepção das propriedades que permitam fatorar um trinômio do segundo grau ax^2+bx+c, com a,b ec inteiros, $a>0$, em uma expressão do tipo $(ax+p).(x+q)$, com p e q inteiros. Para a realização destas atividades, deve-se estabelecer que "Um trinômio do 2º grau da forma ax^2+bx+c, com a, b e c inteiros e $a>0$, só poderá ser fatorado se, e somente se, for possível formar um "retângulo" com as peças que o representam (pode tornar-se necessário fazer "compensações" usando pares de peças que se "cancelam"). As dimensões do "retângulo" obtido representam os fatores do trinômio. Nesse caso, usa-se apenas as "peças" x^2, x , 1 e seus elementos opostos/simétricos $-x^2$,$-x$ e -1 (representados pelos versos, ou as peças de cores cinzas se trabalharmos com o Cabri), como representado na Figura 5. O método aqui utilizado é equivalente ao apresentado por Hellmeistter e Gálvão (1998)no artigo "Resolvendo fisicamente", publicado na coleção Explorando o Ensino da Matemática, ou seja, as atividades propostas por eles podem ser desenvolvidas usando as peças do algeplan.

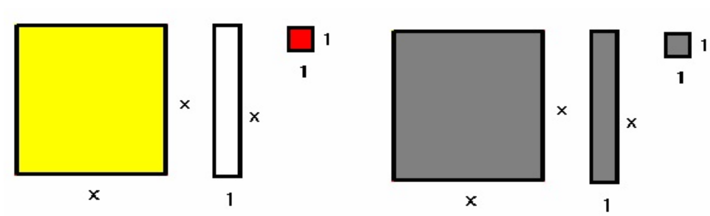


Figura 5: Peças utilizadas na fatoração

Atividade 4 (Fatoração). Fatorar (usando as peças do algeplan) os trinômios

$$\begin{array}{ll}(1) & x^2+3x+2\\(2) & x^2+6x-7\\(3) & 2x^2+8x+6\end{array}$$

Nesse caso utiliza-se uma peça x^2, três peças x e duas peças 1, e obtém -se o retângulo dado na Figura 6; algebricamente teremos:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

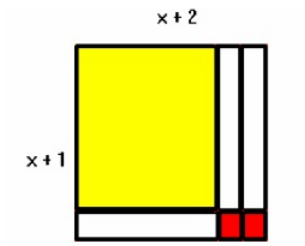


Figura 6: Fatoração $x^2 + 3x + 2$

A expressão $x^2 + 6x - 7$ é modelada (Figura 7) tomando-se uma peça x^2, seis peças x e peças -1 (oposto de 1). Na tentativa de montar um retângulo, verifica-se a necessidade de usar mais uma peça x e uma $-x$, o que não altera o resultado final. Obtendo dessa forma (Figura 7b) a fatoração desejada

$$x^2 + 6x - 7 = (x - 1)(x + 7)$$

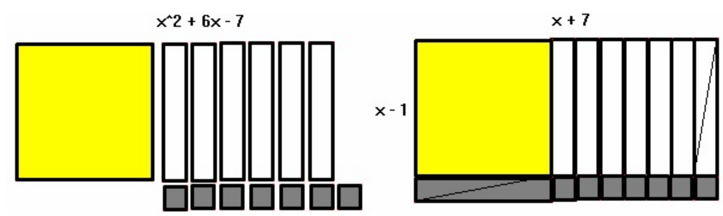


Figura 7: Fatoração $x^2 + 6x - 7$

Utiliza-se duas peças x^2, oito peças x e seis peças 1. O retângulo obtido é apresentado na Figura 8 e sua área é dada por $(x + 3).(2x + 2)$, que é a fatoração de $2x^2 + 8x + 6$.

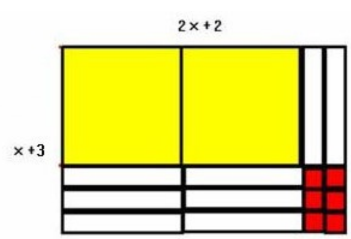


Figura 8: Fatoração $2x^2 + 8x + 6$

Sugestão: Para obter a fatoração, de acordo com o método acima (construção de um retângulo), deve-se observar primeiro quais os possíveis retângulos que podem ser obtidos com as unidades. (Por exemplo, na atividade anterior, item (3), para o 6 (seis) pode-se obter retângulos de dimensões 6×1, e 2×3). A partir daí, tenta-se obter o retângulo maior, com as demais peças disponíveis. Uma regra importante também é que as peças positivas(negativas) que serão utilizadas fiquem agrupadas (como no caso (2), as sete peças x (positivas) ficaram juntas, do mesmo lado e a negativa, $-x$, do outro lado).

b) **Matemórtica**

Este jogo tem por objetivo capacitar os alunos a encontrar o valor numérico de expressões algébricas.

Material: O professor deverá confeccionar 4 fichas com expressão algébrica para cada grupo.

Regras: A turma deverá ser dividida em grupos de 5 alunos e cada grupo receberá 4 fichas com expressões algébricas. Os alunos deverão estar sentados um atrás do outro em cada grupo. Os grupos receberão as mesmas fichas e na mesma ordem, para que obtenham o mesmo resultado. Depois de tudo distribuído o professor entrega uma ficha com o valor da variável(ou das variáveis) para o primeiro da fila. Este calculará o valor da expressão e passará o resultado para o de trás que, por sua vez, também encontra o valor numérico da expressão e passará o valor numérico de sua expressão para o próximo de trás. Assim, sucessivamente, até chegar o último da fila que deverá correr ao quadro e escrever o resultado final. Se tal resultado estiver correto, o aluno marca um ponto para a equipe. Um novo valor é atribuído à variável e entregue ao primeiro da fila e novamente, vai até o último da fila que deverá ir ao quadro. Ganha a equipe que marcar mais pontos. O professor pode mudar as posições dos alunos da mesma equipe.

c)**Aluno-monômio**

Este jogo tem por objetivo fixar conceitos referentes à adição de polinômios.

Material:Cartas que contenham um número e uma das duas palavras seguintes: grau e coeficiente.

Regras: Quando a carta contiver a palavra “grau” então, o número que a acompanha deve ser um inteiro. Divida os alunos da sala de aula em dois grupos e distribua as cartas de modo que cada estudante receba duas, uma de “grau” e outra de “coeficiente”. Cada estudante, que representa um monômio, deve encontrar no seu grupo monômios semelhantes para que seus coeficientes sejam somados. A soma de todos os monômios desse grupo resultará em um polinômio. O grupo que encontrar corretamente o polinômio que representa é declarado vencedor. O professor pode propor variações dessa atividade, criando uma quantidade de grupos maior ou ainda mudando as pessoas de grupo.

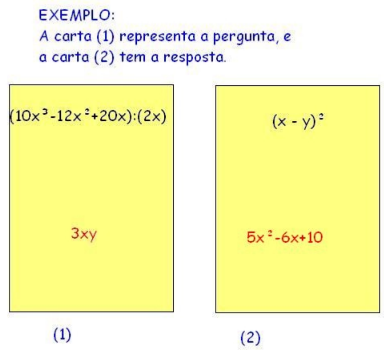


Figura 9: Modelo de Carta

d) **Baralho de Polinômio**

Este jogo tem por objetivo trabalhar as operações de multiplicação e divisão de Polinômios.

Material: 28 cartas que podem ser construídas em papel cartão ou cartolina.

Regras: A turma deverá ser dividida em grupos de 2 ou 4. As cartas serão distribuídas igualmente entre os jogadores; na parte superior da carta está uma operação com polinômio, que representa uma pergunta e na parte inferior, está um polinômio ou um monômio que representa a solução de uma outra carta. Sorteia-se o jogador que irá começar, devendo esse escolher qualquer uma de suas cartas e colocá-la sobre a mesa. O jogador da direita verificará se possui uma carta com a resposta referente à pergunta da carta que fora jogada anteriormente. Caso tenha a resposta certa, joga a carta sobre a mesa e o próximo jogador deverá verificar se possui a resposta para essa nova carta. Os jogadores que não possuem a carta resposta, vão passando a vez. Ganha o jogo quem se livrar primeiro de todas as cartas.

e) **Descobrindo o caso**

Este jogo tem por objetivo que o aluno fatore polinômios, diferencie os casos de fatoração e fixe conteúdos matemáticos

Material: Deverão ser confeccionadas 25 cartas com polinômios; 25 cartas com os nomes dos casos de fatoração e 25 cartas com o polinômio fatorado(em papel cartolina, ou em papel cartaz).

Regras: A sala pode ser dividida em grupos de 2 a 4 jogadores. Cada jogador recebe a mesma quantidade de cartas com os polinômios e com os casos de fatoração, retira do baralho uma carta e tenta formar uma dupla com uma de suas cartas. Em seguida, descarta uma carta na mesa de forma que todos a vejam. Ao formar uma dupla, deverá procurar nas cartas descartadas, a carta que representa seu polinômio fatorado, caso a encontre, montará seu trio de cartas sobre a mesa virado para cima. Vence aquele que primeiro conseguir montar corretamente os trios.

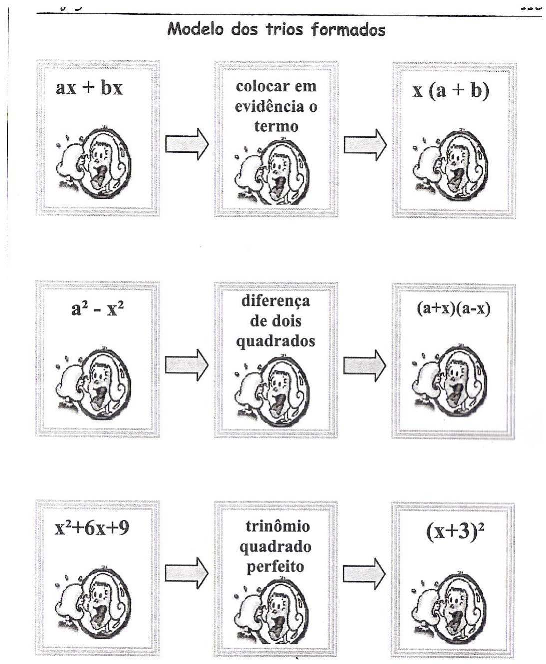


Figura 10: Modelos

6 Considerações Finais

Acredita-se ser a álgebra de suma importância tanto para a análise e interpretação de situações do cotidiano quanto para estudos mais avançados. Por isso, sua introdução deve se fundamentar na ideia de que os símbolos algébricos podem ser manipulados de forma que correspondam a aspectos do mundo real.

A capacidade de interpretação e uso de forma criativa dos símbolos matemáticos pode ser desenvolvida nos alunos na descrição de situações e na resolução de problemas algébricos, deixando de lado, o excesso do simbolismo e trabalhando-se a compreensão dessa simbologia, procurando esclarecer seu significado. Proporcionar contextos significativos para o estudo da álgebra aos alunos, pode tornar as informações mais fáceis de serem compreendidas e manipuladas. Esses conceitos podem ser introduzidos gradativamente, começando por uma fundamentação verbal e em seguida, por uma manipulação algébrica que produza uma assimilação efetiva e convença os alunos, de forma natural sobre a importância e o poder matemático contidos na simbolização e na formalização.

Dessa forma, é de todos os professores, a responsabilidade de continuamente levantar os aspectos que envolvem o aprendizado da álgebra, detectar e analisar erros cometidos pelos alunos, bem como identificar suas causas. Tudo isso se faz necessário ao decidir sobre os meios mais adequados para ajudar os alunos na compreensão matemática. Sabemos que não existe um melhor caminho para o ensino da álgebra, mas métodos adequados a cada turma que se trabalha, dependendo apenas do discernimento do professor no momento de sua escolha.

7 Agradecimentos

Agradeço a Deus por sempre iluminar meus caminhos e por fazer com que mais esse sonho se realize.

À Todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho; especialmente aos professores que gentilmente responderam à minha pesquisa e àqueles que tiveram a grande inciativa desta proposta de mestrado.

Em especial,

Ao meu pequeno príncipe, NATAN, por todo amor e carinho, pelas risadas que me encantam e me encheram de forças nesta jornada e principalmente pela paciência nos momentos em que estive ausente.

À minha família que é base da minha vida, sinônimo de amor, compreensão e dedicação, em especial a meu marido.

Ao meu orientador, prof. Ronaldo Ribeiro Alves, por sua amizade, dedicação e incentivo.

Aos professores do PROFMAT da Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ),que colaboraram com seu conhecimento para minha formação.

A todos os meus colegas do mestrado pelo convívio, amizade e ajuda. Peço a Deus que os abençoe grandemente, preenchendo seus caminhos com muita paz, amor, saúde e prosperidade.

Agradeço as minhas amigas e amigos, em especial à amiga Ana Lúcia Camarano e ao amigo Diogo Geraldo Rios,companheiros em todos os momentos

À professora Adriana Andrade ...

Por fim, à CAPES, pela bolsa de estudos que garantiu o sustento necessário à realização deste mestrado.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e do desporto.**Parâmetros Curriculares Nacionais (Matemática)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. São Paulo: Ed. Contexto, 2004. 389 páginas.

BOOTH, Leslly R. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. IN: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As Idéias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

BORIN, Júlia.**Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática.** 5ª. ed. São Paulo: CAEM / IME-USP, 2004, 100p.

CRUZ, Eliana da Silva.**A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental: um estudo sob a ótica da organização praxeológica**. São Paulo(SP): PUC-SP, 2005. 46f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan;**O ensino de ciências e Matemática na América Latina**, 1976, In: SALVAN, Aparecida F. M. **Avaliando as dificuldades de aprendizagem em Matemática**. Monografia apresentada à Diretoria de Pós-Graduação da Universidade do Extremo Sul Catarinense UNESC, para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática Criciúma, 2004
Disponível em:<http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000025/000025BA.PRN.pdf>.

D'AMBÓSIO, Ubiratan.**A relevância do projeto Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional-INAF - como critério de avaliação da qualidade do ensino de matemática**, 2003, In: SILVA, Rondinele Nunes da; **Álgebra e Aritmética no ensino fundamental: um estudo de como ensiná-las de forma integrada e com base em significados** Disponível em:<www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/RondineleNunesdaSilva.pdf>. Acesso em: 14 de jan. 2013

DANTE, Luiz R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática**. São Paulo: Ática, 1994.

FANTI, Erminia de L. Campello e et al.;**Ensinando Fatoração e funções quadráticas com o aboio de Material concreto e informática**
Disponível em:< http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2006/artigos/capitulo2/fatoracao.pdf>. Acesso em: 16 jan. de 2013

GIL, Katia Henn **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** Porto Alegre, 2008.Disponível em:<http://tede.pucrs.br/tde_arquivos/24/TDE-2008-05-27T053243Z-1306/Publico/401324.pdf>

GIOVANNI Jr., José Ruy ;CASTRUCCI, Benedicto **A conquista da matemática, 8º ano** - Ed. Renovada. - São Paulo: FTD, 2009.(Coleção a conquista da matemática)

HELLMEISTTER,Ana Catarina P.;GALVÃO,Maria Elisa E.L.;**Resolvendo Fisicamente** Disponível em:< http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat_iicap3.pdf> Acesso em 30 jan.2013

LARA, Isabel C. Machado de; **Jogando com a Matemática de 5ª a 8ª série**- 1ª edição- São Paulo: Rêspel, 2003

LINS, Rômulo; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MACHADO, Maria Gisela de Bom.**Dificuldades encontradas pelos alunos de 5ª a 8ª séries do primeiro grau no processo de aprendizagem da Matemática**, 1992, In: SALVAN, Aparecida F. M. **Avaliando as dificuldades de aprendizagem em Matemática**.Monografia apresentada à Diretoria de Pós- Graduação da Universidade do Extremo Sul Catarinense UNESC, para a obtenção do título de Especialista em Educação Matemática Criciúma, 2004
Disponível em:<http://www.bib.unesc.net/biblioteca/sumario/000025/000025BA.PRN.pdf>.
Acesso em: 14 de jan. 2013

MORAIS, Rosilda Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; **A Aprendizagem de polinômios através da Resolução de problema**- considerações sobre as operações de Multiplicação e Divisão de Polinômios no Ensino Fundamental II.
Disponível em:<www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/.../trab_completo_rosilda.pdf>.
Acesso em: 14 jan. 2013

ONUCHIC, L. de la R.;ALLEVATO, N. S. G. (2004).**Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. de C.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas**. In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Pesquisa em educação matemática. São Paulo: Editora da UNESP, 1999, p. 199-218.

REVISTA Cálculo: matemática para todos - São Paulo: Segmento,v.1, n. 12, p.14-19 jan/2012.

REVISTA do Professor de Matemática(RPM) publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática(SBM)-RP BIBLIOGRAFIA

REVISTA Nova Escola,publicada pela fundação Victor Civita- São Paulo:edição 199 de fevereiro de 2007

REVISTA Nova Escola,publicada pela fundação Victor Civita- São Paulo:edição 227 de novembro de 2009

SANTOMAURO, Beatriz; **Álgebra desde cedo**, Novembro 2009.
Disponível em:<http://revistaescola.abril.com.br/formacao/formacao-continuada/reflexoes-papel-algebra-notacoes-tabelas-equacoes-graficos-barbara-brizuela-investigacoes-511730.shtml>
Acesso em: 23 de janeiro de 2012

SANTOS, Cícero; MACLYNE, Diógenes.**A modelagem matemática como estratégia no ensino-aprendizagem**
Disponível em:<www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/.../PO02111714410T.doc> Acesso em: 16 jan. 2013

SESSA, Carmem; **Iniciação ao estudo didático da álgebra:origens e perspectivas** /Carmem Sessa; tradução Damian Krasus-São Paulo: edições SM, 2009

SECRETARIA DE ESTADO DE EDUCAÇÃO DE MINAS GERAIS. **Conteúdo Básico Comum Matemática**- 2007. Educação Básica

<http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/tirando-letra-488807.shtml>.
Acesso em: 26 de jan. 2013

< http://professoraeliandra.blogspot.com.br/2008/08/baralho-de-polinmio.html>
Acesso em 23 jan. 2013.

< http://www.moderna.com.br/didaticos/ef2/matematica/compreensao/8ano.pdf>
Acesso em 23 jan. 2013.

< http://www.obmep.org.br/>